Кольцо многочленов

$F \quad \mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}_2$

$f_i : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$

$f_1 : x \mapsto x \qquad f_1(x) = x$

$f_2 : x \mapsto x^2 \qquad f_2(x) = x^2$

x	0	1
f_1	0	1
f_2	0	1

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$

$R[x]$ – многочлены с коэфф. из кольца R

$(a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots) \quad a_i \in R$ почти все $a_i = 0$ за исключением конеч. числа

$(a_0, a_1, a_2 \ldots) + (b_0, b_1, b_2, b_3 \ldots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2 \ldots)$

$(c_0, c_1, c_2 \ldots) = (a_0, a_1, a_2 \ldots) \cdot (b_0, b_1, b_2 \ldots)$

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j$$

$c_0 = a_0 \cdot b_0$

$c_1 = a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0$

$c_2 = a_0 \cdot b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$

Теорема:

если R - кольцо, то

1) $R[x]$ – кольцо

2) R - ассоц, то $R[x]$ - ассоц.

3) R - коммут, то $R[x]$ - коммут

4) R - с единиц, то $R[x]$ - с единиц

нейтр. эл. по слож: $(0,0,0,0\ldots)$

$-(a_1, a_2, a_3\ldots) = (-a_1, -a_2, -a_3\ldots)$

дистрибутивность: аккуратное раскр. скобок

если R - ассоц. кольцо:

$$(a(bc))_k \parallel \sum_{i+j+l=k} a_i b_j c_l$$
$$((ab)c)_k \,//$$

если R - коммут кольцо: очев.

$1 \in R \quad (1, 0,0,0\ldots)$

$x^0 = (1, 0,0,0\ldots)$

$x^1 = (0,1,0,0\ldots) = x$

$x^2 = (0,0,1,0,0,0,\ldots)$

$(a_0, a_1, a_2, a_3\ldots) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3\ldots + a_nx^n = f$

стандартная запись многочлена

$R \xhookrightarrow{\text{изоморфное вложение}} R[x]$

$m \mapsto (m,0,0,0\ldots)$

подкольцо

$R \le R[x]$

степень

$\deg(f)$ - наибольший номер ненулевого a_i

если $f \overset{\text{тождественно}}{\equiv} 0$ (т.е. все $a_i = 0$), то $\deg(f) = -\infty$

$\deg: R[x] \to \mathbb{N}_0 \cup \{-\infty\}$

Далее R – коммут. ассоц. кольцо с 1. пр.: $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$

$f, g \in R[x]$

Лемма:

1) $\deg(f+g) \le \max\{\deg(f), \deg(g)\}$

2) $\deg(f \cdot g) \le \deg f + \deg g$

$\langle R, +, \cdot \rangle$ $\langle Q, +, \cdot \rangle$

два разн. кольца

$f: R \to Q$ гомоморфизм колец: если

1) $f(\overset{\text{из } \mathbb{R}}{x+y}) = \overset{\text{из } Q}{f(x)+f(y)}$

2) $f(\overset{\text{из } R}{x \cdot y}) = \overset{\text{из } Q}{f(x) \cdot f(y)}$

ev_c – гомоморфизм вычисления/эвальюации

$$ev_c: R[x] \to R$$
$$\hat{f} \longmapsto f(c)$$

$ev_c(f+g) = ev_c(f) + ev_c(g)$

$ev_c(fg) = ev_c(f) \cdot ev_c(g)$

Корень многочлена: $f(c) = 0$

Опр.:

поле F наз. <u>алгебраически замкнутым</u> если любой $f \in F[x]$, $\deg f > 0$ имеет корень

$\mathbb{R}$ не алг. замкнуто (квадратн. многочлен с $D < 0$)

$\mathbb{F}_K$ – конечное поле из K эл.: $a_1, a_2 \dots a_K$

Пр.: $\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5 \dots \mathbb{Z}_p$

$\exists\ (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_k)+1 \neq 0 \quad \forall a_k$

Лемма:

Конечное поле никогда не явл. алг-и замкнутым.

Теорема (осн. теорема алгебры):

поле $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто

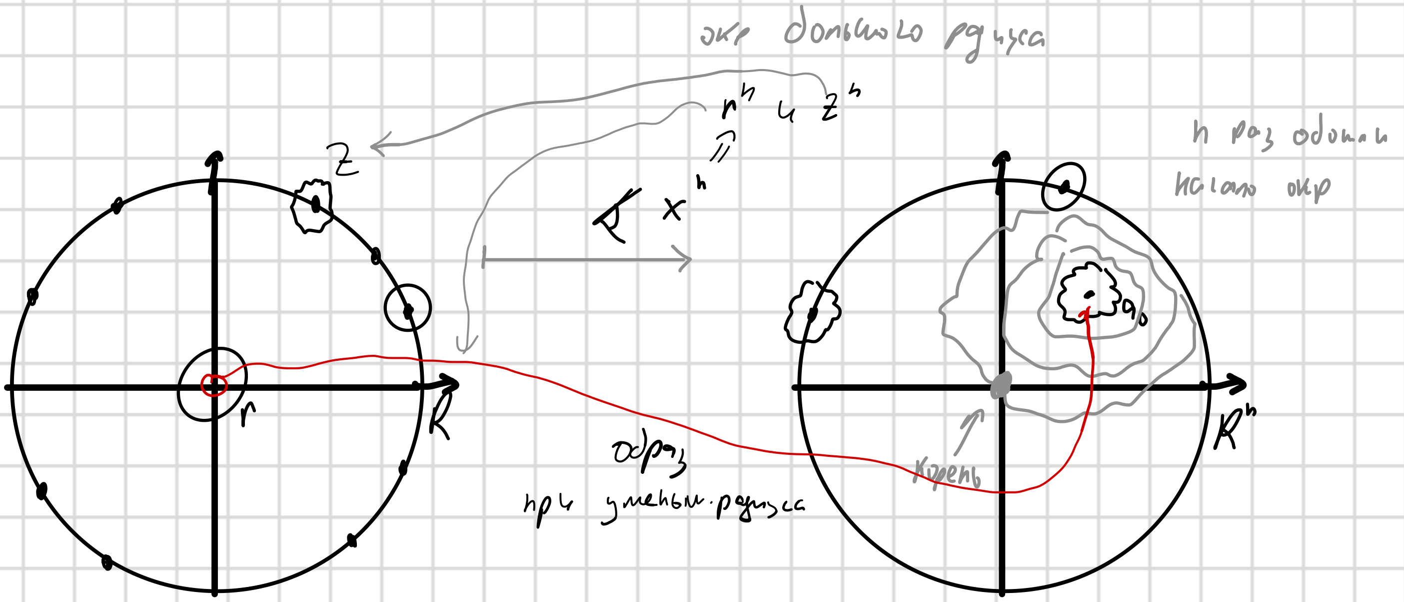
Следствие:

$\forall f \in \mathbb{C}[x]$ $\deg f = n > 0$ имеет ровно n корней (с учетом кратности)

Идея док-ва: („дама с собачкой")

$$f = \underbrace{x^n}_{\text{дама}} + \underbrace{a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0}_{\text{собачка}}$$

$a_i \in \mathbb{C}$ $\quad \exists\, a_0 \neq 0$ (если $a_0 = 0$, то корень $= 0$)



был момент, когда $f(c) = 0$

$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ $\qquad z = a + bi$

$\overline{z^n} = \overline{z}^n$ $\qquad \overline{z} = a - bi$

$f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$a_i \in \mathbb{R}$

$c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ $\quad Im(c) \neq 0$ $\qquad \overline{a_i} = a$

Тогда $\bar{c}$ это тоже корень f

$$f(\bar{c}) = \overline{a_n \bar{c}^n + a_{n-1} \bar{c}^{n-1} + \ldots + a_1 \bar{c} + a_0} = \bar{0} = 0$$

Вывод: любой многочлен раскладывается над $\mathbb{R}$ на линейные и квадратичные с отр. дискр-ом

$x_0 \in \mathbb{R}$

корень $f(x_0) = 0$

$$f(x) = (x - x_0)\, g(x)$$

$$(x-c)(x-\bar{c}) = x^2 - (c+\bar{c})x + c\bar{c} = x^2 - 2\underset{\mathbb{R}}{Re(c)} \cdot x + \underset{\mathbb{R}}{|\bar{c}|^2}$$

если есть мнимые корень

Следствие:

любой многочлен нечетной степени с вещественными коэф-с имеет как минимум один вещественный корень.

Пр.:

$$x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = \overset{\text{лин}}{(x-1)}\overset{\text{лин}}{(x+1)}\overset{\text{кв. с } D<0}{(x^2+1)} = (x-1)(x+1)\overset{\text{сопряжен}}{(x-i)(x+i)}$$