Алгебра. КТ. Осенний семестр

VI. Арифметика матриц

1. Вычислите:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 8 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{10}$;

г) $f(A)$, где $f(x) = x^3 - 5x + 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$;

д) $f(B)$, где $f(x) = x^2 + x - 2$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Докажите, что матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ удовлетворяет уравнению

$$x^2 - (a+d)x + (ad - bc) = 0.$$

3. Вычислите:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{1000}$; б) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^{100}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2024}$; г*) $\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{30}$.

4. Найдите все матрицы второго порядка, квадраты которых равны а) нулевой матрице, б) единичной матрице.

5. Докажите, что $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$ для любого $n \geqslant 1$, где f_n — n-тое число Фибоначчи.

6. Докажите, что матрицы $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ образуют поле, изоморфное полю комплексных чисел, и вычислите $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{114}$.

7. $\lambda \in F$, E_{ij} — стандартные матричные единицы. Рассмотрим матрицы из $M_n(F)$, называемые *элементарными*:

а) $E + \lambda E_{ij}$ (*элементарная трансвекция*);

б) $E - (E_{ii} + E_{jj}) + (E_{ij} + E_{ji})$ (*элементарное отражение*);

в) $E + (\lambda - 1)E_{ii}$ (*элементарное псевдоотражение*).

Определите, что происходит с любой матрицей подходящего размера при умножение её слева/справа на элементарную.

8. Матрицы A и B не перестановочны. Может ли оказаться, что матрицы A^2 и B^2 перестановочны?

9.* $A, B \in M_n(F)$, $A + B = \lambda AB$, где $\lambda \in F$. Докажите, что A и B перестановочны.

10.* Рассматривается уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$ на множестве квадратных матриц 1000-го порядка. Докажите, что оно имеет бесконечно много решений, не являющихся диагональными матрицами.

11.* $A \in M_{4\times 2}(\mathbb{R})$, $B \in M_{2\times 4}(\mathbb{R})$, $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите BA.

12.* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}.$

Вычислите $(AB)A$ и $A(BA)$ и убедитесь, что умножение бесконечных матриц не ассоциативно.

1. Вычислите:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 8 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{10}$;

г) $f(A)$, где $f(x) = x^3 - 5x + 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$;

д) $f(B)$, где $f(x) = x^2 + x - 2$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 8 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -5 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 16 & 7 \\ -17 & 44 & 28 \\ 19 & -8 & -21 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{10} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}^{5} = \begin{pmatrix} 9^5 & 0 & 0 \\ 0 & 9^5 & 0 \\ 0 & 0 & 9^5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{2} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

г) $f(A)$, где $f(x) = x^3 - 5x + 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$f(A) = A^3 - 5\cdot A + 1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^3 - 5\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 1 =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^3 - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 21 \\ 14 & -21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$=$

2. Докажите, что матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ удовлетворяет уравнению

$$x^2 - (a+d)x + (ad - bc) = 0.$$

2. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$A^2 - (a+d)\cdot A + (ad - bc) = 0$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 - \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad & 0 \\ 0 & ad \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+dc & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cancel{a^2}+\cancel{bc}-\cancel{a^2}-\cancel{ad}+\cancel{ad}-\cancel{bc} & \cancel{ab}+\cancel{bd}-\cancel{ab}-\cancel{bd}+0 \\ \cancel{ac}+\cancel{cd}-\cancel{ac}-\cancel{dc}+0 & \cancel{bc}+\cancel{d^2}-\cancel{ad}-\cancel{d^2}+\cancel{ad}-\cancel{bc} \end{pmatrix} = 0$$

$$x^2 + trAx + \det A$$

3. Вычислите:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{1000}$; б) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^{100}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2024}$; г*) $\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{30}$.

3. а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{1000}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{1000} = \begin{pmatrix} 1 & 1000 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

База: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — верно

Шаг: $n = k$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Переход: $n = k+1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ верно

б) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^{100}$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 2\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^2 = \begin{matrix} \lambda^2 & \lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} \lambda^4 & 3\lambda^3 \\ 0 & \lambda^4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n \overset{?}{=} \begin{pmatrix} \lambda^n & (n-1)\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^n & (n-1)\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & n\lambda^n \\ 0 & \lambda^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^{100} = \begin{pmatrix} \lambda^{100} & 100\lambda^{99} \\ 0 & \lambda^{100} \end{pmatrix}$$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2024}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2024} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{1012} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$$

$$\operatorname{ord}(A) = 4$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \simeq \mathbb{C}$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \sim a + bi$$

$$|a + bi| = 1$$

$$a^2 + b^2 = 1 \qquad \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}^{2024} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}^{2024} = \begin{pmatrix} \cos\frac{1012\pi}{3} & -\sin\frac{1012\pi}{3} \\ \sin\frac{1012\pi}{3} & \cos\frac{1012\pi}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\left(337\pi+\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(337+\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(337\pi+\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(337\pi+\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2) $$\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{30} = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{X} \right)^{30} = X^0 + 30 \cdot X^1 + \frac{30\cdot 29}{2} X^2$$

$$X^0 = E$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad X^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. $\lambda \in F$, E_{ij} — стандартные матричные единицы. Рассмотрим матрицы из $M_n(F)$, называемые *элементарными*:

а) $E + \lambda E_{ij}$ (*элементарная трансвекция*);

б) $E - (E_{ii} + E_{jj}) + (E_{ij} + E_{ji})$ (*элементарное отражение*);

в) $E + (\lambda - 1)E_{ii}$ (*элементарное псевдоотражение*).

Определите, что происходит с любой матрицей подходящего размера при умножение её слева/справа на элементарную.

7. а) $E + \lambda E_{ij} = T_{ij}(\lambda)$

$$T_{ij}(\lambda) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{l} \uparrow \\ j \end{array} \end{array}$$

Элементарная трансвекция

б) $E - (E_{ii} + E_{jj}) + (E_{ij} + E_{ji}) = Q_{ij}$

$$Q_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & 0 \\ & & 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & 0 & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} & & \uparrow i & \uparrow j & & \end{array} & \end{array}$$

Элементарное отражение

в) $E + (\lambda - 1)E_{ii} = E - E_{ii} + \lambda E_{ii} = D_{ii}$

$$D_{ii} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} & & \uparrow i & & \end{array} & \end{array}$$

Элементарное псевдоотражение

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+\lambda d & b+\lambda e & c+\lambda f \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

К i-ой строке прибавилась j-ая помноженная на λ

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

i-ая j-ая строки меняются местами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ \lambda d & \lambda e & \lambda f \end{pmatrix}$$

$$\det(A \cdot Q_{ij}) = -\det(A)$$

$$\det(A \cdot D_{ii}(\lambda)) = \lambda \cdot \det(A)$$

$$\det(A \cdot T_{ij}(\lambda)) = \det(A)$$

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 & 3 \\ 20 & 5 & 4 \\ 26 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$AB = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 11 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 15 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 14 & 3 & 3 \\ 20 & 5 & 4 \\ 26 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Только если размеры блоков согласованы!

11.* $A \in M_{4\times 2}(\mathbb{R})$, $B \in M_{2\times 4}(\mathbb{R})$, $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите BA.

11.

$$AB = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\exists A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \hline A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \left(B_1 \middle| B_2\right)$$

$$AB = \left(\begin{array}{c|c} A_1B_1 & A_1B_2 \\ \hline A_2B_1 & A_2B_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} E & -E \\ \hline -E & E \end{array}\right)$$

$$BA = \left(B_1A_1 + B_2A_2\right) = 2E = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_1B_1 = E \quad A_2B_2 = E \quad \Rightarrow \quad B_1A_1 = E$$