

Неопределенный интеграл

\exists все функции $\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

Опр.: Ф-ия F наз. первообразной для ф-ии f на $\langle a, b \rangle$, если
 $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \langle a, b \rangle$

Пр.:

1) $f(x) = x^2$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + \text{const}$$

Теорема (о двух первообразных)

$\exists F$ - первообр. f на $\langle a, b \rangle$, Тогда $\varphi(x)$ явл. первообр. f на $\langle a, b \rangle$

$$\Leftrightarrow \varphi(x) - F(x) \equiv \text{const}$$

$\triangleright \boxed{\Leftarrow} \quad \varphi' = (F(x) + C)' = F' + C' = f + 0 = f$

$\boxed{\Rightarrow} \quad (\varphi - F)' \equiv 0$ по следствию из л. Лагранжа $\varphi - F \equiv \text{const}$ \blacktriangleleft

Опр.: Неопределенным интегралом ф-ии f на $\langle a, b \rangle$ наз. мн-во всех первообразных f на $\langle a, b \rangle$

$$\int f(x) dx \text{ или } \int f dx = \{ F / F - \text{первообр. } f \text{ на } \langle a, b \rangle \}$$

по т. о двух первообразных: $\int f dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$ если $\exists F(x)$

13 Если $f \in C(\langle a, b \rangle)$, то $\exists F(x)$ на $\langle a, b \rangle$

\triangleright тогда \blacktriangleleft

13) Т.к. F' не может иметь разрывов 1-го ржа и устр-во, то если f имеет разрыв устр-во или 1-го ржа то она не имеет первообразной

Пр:

$$1) F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$F'(x) = (x^2 \sin \frac{1}{x})' = 2x \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \cdot (-\frac{1}{x^2}) \cdot x^2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} F'(x) \text{ в } \bar{\mathbb{R}}$$

$$F'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(0+\Delta x) - F(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2 \sin \frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = 0$$

$$\text{Так, } f = F' = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

разрывная ф-ла с разрывом 2-го ржа у которой есть первообразная

$$13) \int \frac{1}{x} dx = \begin{cases} \ln x + C_1, & x > 0 \\ \ln(-x) + C_2, & x < 0 \end{cases}, \text{ но пишут } \ln|x| + C, x \neq 0$$

$$C = \begin{cases} C_1, & x > 0 \\ C_2, & x < 0 \end{cases}$$

Свойства неопр-во интегрирования:

$\exists f, g$ имеют первообразные

$$1) (\int f dx)' = f, \quad d(\int f dx) = f dx$$

$$\textcircled{2} \int \frac{f'(x)}{df} dx = f(x) + C, \quad \int df = f(x) + C$$

$$\textcircled{3} \int (f+g) dx = \int f dx + \int g dx \leftarrow \text{линейность интеграла}$$

$$\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx$$

$$\textcircled{4} \int f dx + \int g dx = F(x) + \int g dx \quad \text{const} \quad \text{сумма}$$

$$\textcircled{5} \text{ Замена переменной } \exists \varphi: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \text{ глгп-на, Тогда:}$$

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \frac{\varphi'(t)}{dx} dt, \text{ где } x = \varphi(t)$$

$$\triangleright (5) F'(x) = f(x) \Rightarrow (F(\varphi(t)))' = F'(\varphi) \cdot \varphi' = f(\varphi) \cdot \varphi' \quad \blacktriangleleft$$

$$\textcircled{6} \text{ Интегрирование по частям}$$

$$\exists u, v - \text{глгп-ны на } (a,b) \text{ и } \exists \int u dv \text{ Тогда}$$

$$\int u dv = uv - \int v du \quad \text{или} \quad \int uv' dx = uv - \int v u' dx$$

$$\triangleright (6) (uv)' = u'v + uv'$$

$$\int d(uv) = \int v du + \int u dv$$

$$uv = \int v du + \int u dv \quad \blacktriangleleft$$

Пр:

$$1) \int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\sin x}_{dv} dx = \int \underbrace{x}_{u} d \underbrace{(-\cos x)}_v = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

$$2) \int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\ln x}_{dv} dx = \int \underbrace{x}_{dv} \underbrace{\ln x}_{u} dx = \int \ln x d \left(\frac{x^2}{2} \right) = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

$$3) I = \int \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{\sin x}_{dv} dx = \int e^x d(-\cos x) = -e^x \cos x + \int \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{\cos x}_{dv} dx = -e^x \cos x + \int e^x \sin x dx =$$

$$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \underbrace{\int e^x \sin x dx}_I \Rightarrow 2I = e^x (\sin x - \cos x) \Rightarrow I = \frac{1}{2} \cdot e^x (\sin x - \cos x) + C$$

$$4) \int \cos x e^{\sin x} dx \stackrel{\text{сбс}}{=} \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x} + C$$

$$\cos x dx = d \sin x$$

$$t = \sin x \quad \text{сбс справа-налево}$$

$$dt = \cos x dx$$

$$\text{или: } \stackrel{\text{сбс}}{=} \int e^{\sin x} d \sin x = e^{\sin x} + C$$

13) \exists интервалы, которые не выписываются через n -ые φ -чи

"Непрерывные интервалы"

Пр.:

$$\int \frac{\sin x}{x} dx; \int \frac{\cos x}{x} dx; \int \frac{e^x}{x} dx; \int \frac{dx}{\ln x}; \int e^{x^2}; \int e^{-x^2} dx; \int \sin x^2 dx$$

13) Дробно-рациональные φ -чи имеют первообразную в виде n -ой φ -чи.

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

Известно, что любая м-н-н представима в:

$$* Q_m(x) = A(x - a_1)^{k_1} \dots (x - a)^k (x^2 + p_1x + q_1)^{e_1} \dots (x^2 + px + d)^e$$

$\nwarrow \nearrow$ вещественные корни $\nwarrow \nearrow$ комплексные корни
 $D < 0$ $D < 0$

Теорема

\forall рациональная дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ представима функцией. одразом как сумма м-н-н $R_{n-m}(x)$

и дроби вида: $\frac{A^{(1)}}{x-a}; \frac{A^{(2)}}{(x-a)^k}; \frac{Bx+C^{(3)}}{x^2+px+q}; \frac{Bx+C^{(4)}}{(x^2+px+q)^k} \leftarrow$ простые дроби, $k \in \mathbb{N}$

заметим все из (*)

▷ в контексте ◀

Пр.:

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)^3(x^2+1)(x^2+x+1)^2} \stackrel{?}{=}$$

$$\Leftrightarrow \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{(x+2)^3} + \frac{Ex+F}{x^2+1} + \frac{Gx+H}{x^2+x+1} + \frac{Ix+J}{(x^2+x+1)^2}$$

Интегрирование простейших дробей

$$① \int \frac{A}{x-a} dx = A \cdot \ln|x-a| + C$$

$$② \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \frac{A \cdot (x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C, k \neq 1$$

$$\int x^d dx = \frac{x^{d+1}}{d+1} + C$$

$$③ \int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx \Leftrightarrow$$

$$x^2+px+q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) \quad \leftarrow D = p^2 - 4q < 0$$

$$x + \frac{p}{2} = t, dx = dt$$

$$q - \frac{p^2}{4} = a^2$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{Bt}{t^2+a^2} dt + \int \frac{C - \frac{p}{2}B}{t^2+a^2} dt$$

$$\cdot \int \frac{t dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} = \frac{1}{2} \ln(t^2+a^2) + C$$

$$d(t^2+a^2) = 2t dt$$

$$\cdot \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{t}{a} + C$$

$$④ \text{Сложим } \int \frac{t dt}{(t^2+a^2)^k} \text{ и } \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}$$

$$\cdot \int \frac{t dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{2} \int (t^2+a^2)^{-k} d(t^2+a^2) = \frac{1}{2} \frac{(t^2+a^2)^{-k+1}}{(-k+1)} + C$$

$$\cdot I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2+t^2-t^2}{(t^2+a^2)^k} dt = \frac{1}{a^2} I_{k-1} - \frac{1}{a^2} \int \underbrace{t}_{u} \underbrace{\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}}_{dv} \Leftrightarrow$$

$$V = \frac{1}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}$$

$$\equiv \frac{f}{a^2} I_{k-1} - \frac{t}{2a^2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{f}{2a^2(1-k)} \cdot I_{k-1}$$

$$\text{für } a: I_f = \frac{f}{a} \arctan \frac{t}{a} + C$$