Неопределенный интеграл

$\rceil$ все функции $\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$

Опр.: ф-ия F наз. <u>первообразной</u> для ф-ии f на $\langle a,b\rangle$, если

$F'(x)=f(x)\quad \forall x\in\langle a,b\rangle$

Пр.:

1) $f(x)=x^2$

$F(x)=\frac{x^3}{3}+const$

Теорема (о двух первообразных)

$\rceil$ F - первообр. f на $\langle a,b\rangle$. Тогда $\Phi(x)$ явл. первообр. f на $\langle a,b\rangle$

$\Longleftrightarrow\ \Phi(x)-F(x)\equiv const$

$\triangleright$ $\boxed{\Leftarrow}$ $\rceil$ $\Phi'=(F(x)+C)'=F'+C'=f+0=f$

$\boxed{\Rightarrow}$ $(\Phi-F)'\equiv 0$ по следствию из т. Лагранжа $\Phi-F\equiv const$ $\blacktriangleleft$

Опр.: <u>Неопределенным интегралом</u> ф-ии f на $\langle a,b\rangle$ наз. мн-во всех первообразных f на $\langle a,b\rangle$

$$\int f(x)\,dx \text{ или } \int f\,dx=\{F \mid F - \text{первообр. } f \text{ на } \langle a,b\rangle\}$$

по Т. о двух первообразных: $\int f\,dx=F(x)+C,\ C\in\mathbb{R}$ если $\exists F(x)$

(Т3) Если $f\in C(\langle a,b\rangle)$, то $\exists F(x)$ на $\langle a,b\rangle$

$\triangleright$ потом $\blacktriangleleft$

№3 (№3) Т.к. F' не может иметь разрывов 1-го рода и устр-го, то если f имеет разрыв устр-го или 1-го рода то она не имеет первообразной

Пр.:

1) $$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\underset{x \neq 0}{F'(x)} = \left(x^2 \sin \tfrac{1}{x}\right)' = 2x \sin \tfrac{1}{x} + \cos \tfrac{1}{x} \left(-\tfrac{1}{\cancel{x^2}}\right) \cdot \cancel{x^2} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 0} F'(x) \text{ в } \overline{\mathbb{R}}$$

$2x \sin \frac{1}{x} \to 0$, $\nexists \lim \cos \frac{1}{x}$

$$F'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(0+\Delta x) - F(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 \sin \frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = 0$$

Итак, $$f = F' = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

разрывная ф-ия с разрывом 2-го рода у которой есть первообразная

№3 (№3) $$\int \frac{1}{x} dx = \begin{cases} \ln x + C_1, & x > 0 \\ \ln(-x) + C_2, & x < 0 \end{cases}$$, но пишут $\ln|x| + C, \ x \neq 0$

$$C = \begin{cases} C_1, & x > 0 \\ C_2, & x < 0 \end{cases}$$

Свойства неопр-го интеграла:

$\exists$ f, g имеют первообразные

1) $\left(\int f dx\right)' = f$, $\quad d\left(\int f dx\right) = f dx$

② $\int \underbrace{f'dx}_{df} = f(x)+C$, $\int df = f(x)+C$

③ линейность

$\int (f+g)\,dx = \int f dx + \int g dx$ ← мн-во всевозможных эл-ов

$\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$

④ $\int f\,dx + \int g\,dx = F(x) + \int g\,dx$ ← const сидит тут

⑤ Замена переменной $\exists\ \varphi: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, φ дифф-ма, Тогда:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\cdot \underbrace{\varphi'(t)\,dt}_{dx}, \text{ где } x = \varphi(t)$$

▷ (5) $F'(x) = f(x) \Rightarrow (F(\varphi(t)))' = F'(\varphi)\cdot\varphi' = f(\varphi)\cdot\varphi'$ ◀

⑥ Интегрирование по частям

$\exists\ u, v$ – дифф-мы на $\langle a,b\rangle$ и $\exists \int u\,dv$ Тогда:

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$ или $\int uv'dx = uv - \int vu'dx$

▷ (6) $(uv)' = u'v + uv'$

$$\int d(uv) = \int v\,du + \int u\,dv$$

$$uv = \int v\,du + \int u\,dv$$ ◀

Пр.:

1) $\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\sin x\,dx}_{dv} = \int \underbrace{x}_{u}\,d\underbrace{(-\cos x)}_{v} = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$

2) $\cancel{\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\ln x\,dx}_{dv}}$ $\quad \int \underbrace{x}_{dv}\underbrace{\ln x}_{u}\,dx = \int \ln x\,d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$

3) $I = \int \underbrace{e^x}_{u}\underbrace{\sin x\,dx}_{dv} = \int e^x\,d(-\cos x) = -e^x\cos x + \int \underbrace{e^x}_{u}\underbrace{\cos x\,dx}_{dv} = -e^x\cos x + \int e^x\,d\sin x =$

$= -e^x\cos x + e^x\sin x - \underbrace{\int e^x\sin x\,dx}_{I} \Rightarrow 2I = e^x(\sin x - \cos x) \Rightarrow I = \frac{1}{2}\cdot e^x(\sin x - \cos x) + C$

4) $\int \cos x \, e^{\sin x} dx \stackrel{\smile}{=} \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x} + C$

$\cos x dx = d\sin x$

$t = \sin x$ Св. 5 справа-налево

$dt = \cos x \, dx$

Или: $\stackrel{\smile}{=} \int e^{\sin x} d\sin x = e^{\sin x} + C$

(№3) $\exists$ интегралы которые не выраж-ся через эл-ые ф-ии

„Неберущиеся интегралы"

Пр.:

$$\int \frac{\sin x}{x} dx; \int \frac{\cos x}{x} dx; \int \frac{e^x}{x} dx; \int \frac{dx}{\ln x}; \int e^{x^2}; \int e^{-x^2} dx; \int \sin x^2 dx$$

(№3) Дробнорациональные ф-ии имеют первообразную выраж. в эл-ых ф-ях.

мн-ны $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$

Известно, что любой мн-н представим в:

$$* \; Q_m(x) = A(x-a_1)^{k_1} \ldots (x-a)^k (x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \ldots (x^2+px+q)^l$$

вещественные корни; $D<0$, $D<0$ комплексные корни

Теорема

$\forall$ рациональная дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ представима единств. образом как сумма мн-на $R_{n-m}(x)$

и дробей вида: (комплекс. дроб) $\frac{A}{x-a}$ ①; $\frac{A}{(x-a)^k}$ ②; $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ ③; $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}$ ④ $\leftarrow$ простейшие дроби, $k \in \mathbb{N}$

знаменатели все из (*)

$\triangleright$ В конспекте $\blacktriangleleft$

Пр.:

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)^3(x^2+1)(x^2+x+1)^2} \stackrel{\smile}{=}$$

$$\ominus \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}+\frac{D}{(x+2)^3}+\frac{Ex+F}{x^2+1}+\frac{Gx+H}{x^2+x+1}+\frac{Ix+J}{(x^2+x+1)^2}$$

Интегрирование простейших дробей

1. $\int \frac{A}{x-a}dx = A\cdot \ln|x-a| + C$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \frac{A\cdot(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C, \; k \neq 1$

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

3. $\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx \ominus$

$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)$ $\quad {>0}$ $\quad D = p^2-4q < 0$

$x+\frac{p}{2} = t, \; dx = dt$

$q - \frac{p^2}{4} = a^2$

$$\ominus \int \frac{Bt}{t^2+a^2}dt + \int \frac{C-\frac{p}{2}B}{t^2+a^2}dt$$

- $\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(t^2+a^2)+C$

$d(t^2+a^2) = 2t\,dt$

- $\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C$

4. Сводим к $\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^k}$ и $\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}$

- $\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{2}\int (t^2+a^2)^{-k}d(t^2+a^2) = \frac{1}{2}\frac{(t^2+a^2)^{-k+1}}{(-k+1)} + C$

- $I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+t^2-t^2}{(t^2+a^2)^k}dt = \frac{1}{a^2}I_{k-1} - \frac{1}{a^2}\int \underbrace{t}_{u}\underbrace{\frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^k}}_{dv} \ominus$

$k \geq 2$
$a \neq 0$

$V = \frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}$

$$= \frac{1}{a^2} I_{k-1} - \frac{t}{2a^2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{1}{2a^2(1-k)} \cdot I_{k-1}$$

База: $I_1 = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{A} + C$