Теорвер. Введение

Вероятностое пр-во ?

Ω - эл-ы исходы (выпадение орла или монетки)

p - диск. плотность вероят-и

$p : \Omega \to [0, 1]$ и $\sum_{w \in \Omega} p(w) = 1$

диск. вероят. пр-во: Ω - конечн. или счетн.

Пр.:

1) чест-ая монета

$\Omega = \{0, 1\}$ (орел, решка)

$p(0) = p(1) = 1/2$

2) нечестн. монета

$\Omega = \{0, 1\}$

$p(1) = p \neq p(0) = q$, $p + q = 1$

3) чест. игр-ая кость

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$p(w) = 1/6$

(и случайное событие)

Событие - некоторое мн-во эл. исходов

$A \subset \Omega$

Вероятность события: $P(A) = \sum_{w \in A} p(w)$ или $\mathbb{P}(A)$ или $P_r(A)$

Пр.:

1) $E = \{2, 4, 6\}$

$P(E) = p(2) + p(4) + p(6) = 1/2$

Неверно: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ (только если вероятности равны)

(!) Не сущ. дискр. вероят. пр-ва с беск. числом равновер-ых исходов

$p(w) = 0 \Rightarrow \sum_{w \in \Omega} p(w) = 0 \neq 1$

$p(w) = a > 0 \Rightarrow \sum_{w \in \Omega} p(w) = a \cdot (+\infty) = +\infty$

2) $B = \{4, 5, 6\}$

$P(B) = 1/2$

Независимые событие:

A, B — независ. если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Пр.:

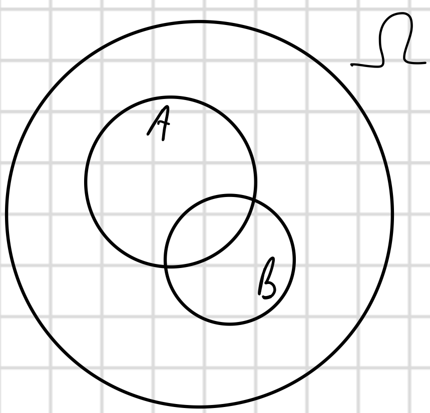
1) $P(O \cap E) = 0$

$\neq$ $\Rightarrow$ зависимые

но $P(O) \cdot P(E) = 1/4$

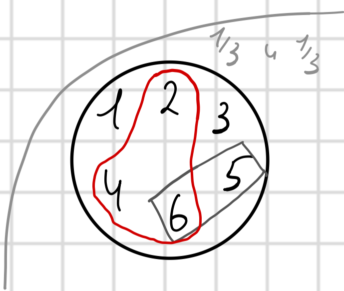
2) $P(E) \cdot P(B) = 1/4$

$P(E \cap B) = 1/3$



$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad | : P(B)$

$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(\Omega)}$ $=1$



$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$ ← Условная вер-ть A при усл. B

$$P(A/B) = P(A)$$ ← если одно опр. независ. событие

Пр.:

1) $V = \{5, 6\}$

$P(V \cap E) = 1/6$

$P(V) = 1/3 \quad P(E) = 1/2$

$P(V) \cdot P(E) = 1/6$

Произведение вероят-ых пр-в.

$\exists \left.\begin{matrix} \Omega_1, P_1 \\ \Omega_2, P_2 \end{matrix}\right\}$ $\quad \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$

$p(\langle w_1, w_2\rangle) = P_1(w_1) \cdot P_2(w_2)$

Теорема:

$\forall A_1 \subset \Omega_1$ и $A_2 \subset \Omega_2$:

любое событие

$A_1 \times \Omega_2$ и $\Omega_1 \times A_2$ – независимые

$$\triangleright P(A_1 \times \Omega_2 \cap \Omega_1 \times A_2) = P(A_1 \times A_2) = \sum_{\substack{a \in A_1 \\ b \in A_2}} p(\langle a, b\rangle) = \sum_{a \in A_1} \sum_{b \in A_2} P_1(a) \cdot P_2(b) =$$

$$= \sum_{a \in A_1} P_1(a) \left(\sum_{b \in A_2} P_2(b) \right) = P_1(A_1) \cdot P_2(A_2)$$

$P_1(A_1 \times \Omega_2) = P_1(A_1)$

$P_2(\Omega_1 \times A_2) = P_2(A_2)$ $\quad \blacktriangleleft$

№3 $A_1\ A_2 \dots A_n$

1) попарная независ (A_i и A_j независ)

2) независ. в совокупности $\left(\forall I \subset \{1, 2, \dots, n\} : P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i) \right)$

Пр.:

00
01
10
11

$A_1 = \{10, 11\}$

$A_2 = \{01, 11\}$, но $A_1\ A_2\ A_3$ – независ в совокуп-ти

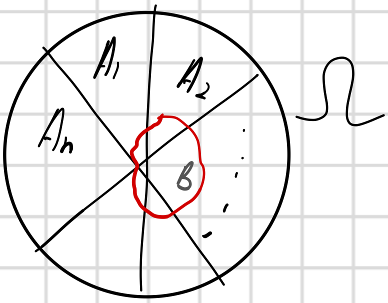
$A_3 = \{01, 10\}$

Формула полной вероятности:

$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, $i \neq j : A_i \cap A_j \neq \varnothing$

полная система событий

Дано: $P(A_i)$, $P(B|A_i)$



Найти: $P(B)$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) \ominus$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(B)}$$

$$\ominus \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$ ← формула полной вероятности

] Дано: $P(A_i)$ $P(B/A_i)$

Найти: $P(A_j/B)$

] A_1 – болен, A_2 – здоров

B – полож. рез. теста

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A_j)\cdot P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)\cdot P(A_i)}$$ ← формула Байеса

] $A_1 = 0{,}02$

$A_2 = 0{,}98$

$P(B/A_1) = 0{,}6$

$P(B/A_2) = 0{,}04$

$$P(A_1/B) = \frac{0{,}6\cdot 0{,}02}{0{,}6\cdot 0{,}02 + 0{,}04\cdot 0{,}98} \approx \frac{12}{12+40} = 0{,}23$$