Производная

1. $$f(x) = \begin{cases} |x|^{\alpha} \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

При каких α в точке $x=0$

а) Непрерыв

б) дифф-ма

в) C^1 т.е. непрерывн, дифф-ма

$\boxed{а}$ $\alpha > 0$

$\boxed{б}$ $$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \underbrace{\frac{|\Delta x|^{\alpha}}{\Delta x}}_{= \pm |x|^{\alpha-1}} \cdot \sin \frac{1}{\Delta x}$$

$\Leftrightarrow \exists \; \alpha - 1 > 0 \Rightarrow \alpha > 1$

$\boxed{в}$ $$\overset{x \neq 0}{f'(x)} = \alpha \cdot |x|^{\alpha-1} \cdot \operatorname{sign} x \cdot \sin \frac{1}{x} + |x|^{\alpha} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \alpha \cdot \underbrace{|x|^{\alpha-1}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\operatorname{sign} x}_{огр} \cdot \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_{огр} - |x|^{\alpha-2} \cdot \cos \frac{1}{x} \longrightarrow 0 \Leftrightarrow \alpha > 2$$

2. $y = f(x)$ задана неявно

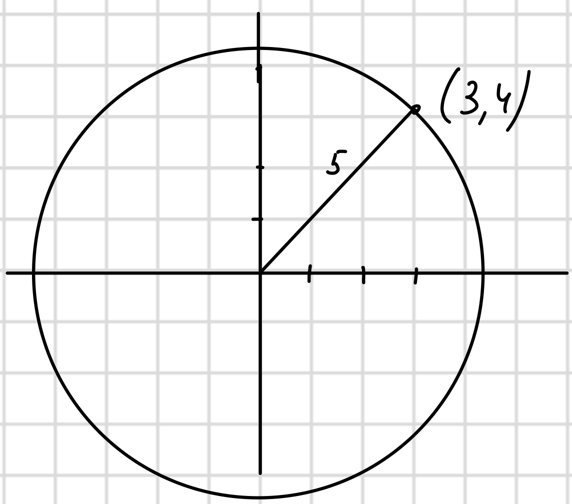
Найти $f'(x_0)$:

а) $x^2 + y^2 = 25$

$(x_0, y_0) = (3, 4)$

$2x + 2y \cdot y' = 0$

$$y' = \frac{-x}{y} \bigg|_{(3,4)} = -\frac{3}{4}$$



б) $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{y'x-y}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(2x+2y\cdot y'\right)$$

$$\frac{y'x-y}{\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(2x+2y\cdot y'\right)$$

$$\frac{y'}{1\cdot 1} = \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2+0$$

$$y' = 1$$

3. Найти $y''(x_0)$ в задаче 2(а), $(x_0,y_0)=(3,4)$

$$y'' = \left(-\frac{x}{y}\right)' = -\frac{y-x\cdot y'}{y^2}\Big|_{(3,4)} = -\frac{4-3\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}{16} =$$

4. Доказать

а) $n(b-a)a^{n-1} < b^n-a^n < n\cdot b^{n-1}(b-a)$, $0<a<b$, $n\in\mathbb{N}$

$f(x)=x^n$, $f'(x)=n\cdot x^{n-1}$

по т. Лагранжа: $f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$

$$b^n-a^n = \underbrace{n\cdot c^{n-1}(b-a)}_{<n\cdot a^{n-1}(b-a)\quad <n\cdot b^{n-1}(b-a)},\quad c\in(a,b)$$

б) $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$, $x>0$

$f(x)=\ln(1+x)$ на $[0,x]$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}$$

$$f(x) - f(0) = \ln(1+x) = f'(c)(x-0) = \frac{x}{1+c}, \text{ где } c \in (0, x)$$

$x \to b$

$$0 < c < b \Rightarrow \frac{b}{1+b} < \frac{b}{1+c} < b$$

$\frac{b}{1+c} = \ln(1+b)$

5. $P(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

доказать, что все корни $P'(x)$ действ.

$P(x) = (x-4)^k \cdot Q(x)$, $Q(4) \neq 0$

Т. Ролля: $f(b) = f(a) \Rightarrow \exists c \in (a,b): f'(c) = 0$

$P(0) = P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = 0$

$\exists c_1 \in (0,1): P'(c_1) = 0$

$P'(c_2) = 0$

6. $f(x) = tg\, x$ Построить многочлен Тейлора $P_5(x, 0)$

$0 = x_0$

$$P_5(x,0) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} + \dots + \frac{f^{(5)}(0)}{5!} \cdot x^5$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x}$$

$$f''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

$$f'''(x) = 2 \cdot \frac{\cos x \cdot \cos^3 x - 3\cos^2 x \cdot \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^6 x}$$

$$f^{(4)}(0) = 0$$

$$P_4(x,0) = 0 + x + 0 + 2 \cdot \frac{1 \cdot 1 - 0}{1} \cdot \frac{1}{3!} \cdot x^3 + 0$$