

## VIII. Векторные пространства. Базисы

1. Является ли  $\mathbb{Z}_n$  свободным  $\mathbb{Z}$ -модулем?
2. Найдите все гомоморфизмы из  $\mathbb{Z}_n$  в  $\mathbb{Z}$ .
3. Пусть в кольце  $R$  нет делителей нуля. Элемент  $x$  из  $R$ -модуля  $M$  называется *элементом кручения*, если  $\lambda x = 0$  для некоторого ненулевого  $\lambda \in R$ . Докажите, что элементы кручения образуют подмодуль. Он называется *подмодулем кручения*.
4. Если подмодуль кручения нулевой, то сам модуль называется *модулем без кручения*. Докажите, что любой гомоморфизм  $M \rightarrow N$  в модуль без кручения  $N$  переводит подмодуль кручения модуля  $M$  в нуль.
5. В каких из следующих случаев указанные операции на множестве  $X$  задают структуру векторного пространства над полем  $F$ ?
  - а)  $F = \mathbb{R}$ ,  $X$  — полуплоскость  $\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$ , операции сложения и умножения на числа стандартные (покоординатные);
  - б)  $F = \mathbb{R}$ ,  $X$  — множество геометрических векторов в трёхмерном пространстве, выходящих из начала координат, концы которых лежат на заданной плоскости, операции стандартные;
  - в)  $F = \mathbb{R}$ ,  $X = (0, +\infty)$ , операции сложения  $\oplus$  и умножения на числа  $\odot$  заданы формулами  $u \oplus v = uv$ ,  $\lambda \odot u = u^\lambda$ ;
  - г)  $F = \mathbb{R}$ ,  $X$  — множество многочленов  $f$  с вещественными коэффициентами, удовлетворяющих условию  $f(0) = 0$ , операции стандартные;
  - д)  $F = \mathbb{R}$ ,  $X$  — множество симметрических квадратных матриц порядка  $n$  со стандартными операциями. Если да, то какова размерность этого пространства?
  - е\*)  $F = \mathbb{Q}$ ,  $X$  — множество бесконечных последовательностей  $(a_n)$  вещественных чисел, удовлетворяющих условию  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ , операции стандартные. Если да, то какова размерность этого пространства?
6. Исследуйте на линейную зависимость следующие системы функций ( $n > 0$ ) над  $\mathbb{R}$ :
 

а) $1, x, x^2, \dots, x^n$ ;	б*) $1, e^x, e^{2x}, \dots, e^{nx}$ ;	в) $1, \ln x, \ln 2x, \dots, \ln nx$ ;
г) $1, \sin x, \cos x, \sin^2 x, \cos^2 x, \dots, \sin^n x, \cos^n x$ ;	д*) $1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx$ .	
- 7\* Докажите линейную независимость всех геометрических прогрессий, начинающихся с единицы, в векторном пространстве бесконечных последовательностей.

8. Проверьте, что система векторов  $e_1, e_2, \dots, e_n$  образует базис пространства  $\mathbb{R}^n$  и найдите координаты вектора  $x$  в этом базисе:
- а)  $e_1 = (1, 5, 3)^T$ ,  $e_2 = (2, 7, 3)^T$ ,  $e_3 = (3, 9, 4)^T$ ,  $x = (2, 1, 1)^T$ ;
- б)  $e_1 = (1, 2, -1, 2)^T$ ,  $e_2 = (2, 3, 0, -1)^T$ ,  $e_3 = (1, 2, 1, 4)^T$ ,  $e_4 = (1, 3, -1, 0)^T$ ,  $x = (7, 14, -1, 2)^T$ .
9. Докажите, что многочлены  $1, t-1, (t-1)^2, (t-1)^3, (t-1)^4, (t-1)^5$  образуют базис в пространстве  $\mathbb{R}[t]_5$ . Найдите координаты многочлена  $t^5 - t^4 + t^3 - t^2 + t - 1$  в этом базисе.
10. Докажите, что матрицы  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$  образуют базис в пространстве  $M_2(\mathbb{R})$  и найдите координаты матрицы  $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  в этом базисе.
11. Докажите, что последовательности  $u = (2, 3, 5, 8, 13, \dots)$  и  $v = (1, 2, 3, 5, 8, \dots)$  образуют базис в пространстве последовательностей  $(a_n)$ , удовлетворяющих условию  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ , и разложите последовательность  $w = (1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$  по этому базису.
12. В пространстве  $\mathbb{Q}[x]_2$  перешли от базиса  $x^2, x, 1$  к новому базису с помощью матрицы перехода  $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ . Найдите новый базис.
13. Найдите матрицу перехода от базиса  $e_1 = (2, 3, -2)^T$ ,  $e_2 = (5, 0, -1)^T$ ,  $e_3 = (2, 1, -1)^T$  к базису  $\tilde{e}_1 = (1, 1, -1)^T$ ,  $\tilde{e}_2 = (1, -1, 0)^T$ ,  $\tilde{e}_3 = (1, 1, 1)^T$ .
14. В пространстве  $\mathbb{R}[t]_3$  найдите матрицу перехода от базиса  $1, 1+t, 1+t^2, 1+t^3$  к базису  $1+t^3, t+t^3, t^2+t^3, t^3$ .
- 15\*  $V$  —  $n$ -мерное векторное пространство над полем  $F$ , состоящим из  $q$  элементов. Найдите:
- а) число векторов в пространстве  $V$ ;
- б) число базисов пространства  $V$ ;
- в) число невырожденных матриц порядка  $n$  над полем  $F$ ;
- г) число вырожденных матриц порядка  $n$  над полем  $F$ .



