II. Подпространства, связанные с эндоморфизмом

1. $\mathscr{A} \in \operatorname{End} V$, $V \geqslant U = \langle x_1, \ldots, x_k \rangle$. Докажите, что U инвариантно относительно $\mathscr{A}$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{A}(x_1), \ldots, \mathscr{A}(x_k) \in U$.

2. Инвариантно ли подпространство U пространства V относительно $\mathscr{A}$? Если да, найдите матрицу оператора $\mathscr{A}|_U$ в каком-нибудь базисе:

   а) $V = M_2(\mathbb{R})$, $U = M_2^+(\mathbb{R})$, $\mathscr{A}\colon X \mapsto X - X^{\mathrm{T}}$;

   б) $V = M_2(\mathbb{R})$, $U = M_2^-(\mathbb{R})$, $\mathscr{A}\colon X \mapsto X - X^{\mathrm{T}}$;

   в) $V = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f''' = 0\}$, $U = \{f \in V \mid f(1) = 0\}$, $\mathscr{A}\colon f \mapsto f(1-x)$;

   г) $V = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f''' = 0\}$, $U = \{f \in V \mid f(0) = f(1)\}$, $\mathscr{A}\colon f \mapsto f(1-x)$;

3. Инвариантно ли подпространство U пространства $\mathbb{R}^n$ относительно оператора $\mathscr{A}$, заданного в стандартном базисе матрицей:

   а) $n = 3$, $U\colon x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$, $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$;

   б) $n = 4$, $U = \langle (4, 0, -1, 1)^{\mathrm{T}}, (-2, 2, 3, 1)^{\mathrm{T}}, (0, 4, 5, 3)^{\mathrm{T}} \rangle$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

   в) $n = 4$, $U = \langle (1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}, (1, -1, 3, 5)^{\mathrm{T}}, (3, 2, 4, 5)^{\mathrm{T}} \rangle$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Найдите все инвариантные подпространства оператора $\mathscr{A}(f) = e^{-1} \cdot f(x+1)$ в вещественном пространстве $V = \langle e^x \cos x,\ e^x,\ e^x \sin x,\ e^{2x} \rangle$.

5. Найдите собственные значения и собственные подпространства линейных операторов в вещественном пространстве $\mathbb{R}^n$, заданных в стандартном базисе матрицами:

   а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$;

   г) $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

6. Найдите собственные значения и собственные векторы линейных операторов в трёхмерном пространстве геометрических векторов:

   а) $x \mapsto \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$; б) $x \mapsto (x, \mathbf{i})\mathbf{i}$; в) $x \mapsto \mathbf{i} \times x$.

7. Найдите собственные значения и собственные векторы линейных операторов в пространстве $\mathbb{R}[x]_n$:

   а) $f \mapsto xf'$; б) $f \mapsto \dfrac{1}{x}\displaystyle\int\limits_0^x f(t)dt$.

8. Пусть f — произвольный фиксированный вещественный многочлен, отличный от константы. Преобразование $\mathscr{A}$ пространства $\mathbb{R}[x]$ сопоставляет произвольному многочлену его остаток от деления на f.

   а) Докажите, что $\mathscr{A}$ является линейным оператором, причём проектором. Проектором на какое подпространство?

   б) Найдите все собственные значения и собственные векторы оператора $\mathscr{A}$;

   в) В подпространстве $\mathbb{R}[x]_3$ найдите собственный базис и запишите матрицу оператора $\mathscr{A}$ в этом базисе, если 1) $f = x$, 2) $f = x^2 + 1$, 3) $f = (x-1)^3$.

9. Операторы заданы матрицами в стандартном базисе. Выясните, какие из них диагонализируемы над полем $\mathbb{R}$ или над полем $\mathbb{C}$. Если оператор диагонализируем над $\mathbb{R}$, найдите собственный базис, соответствующую диагональную матрицу и спектральное разложение оператора:

   а) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

10.* $\mathscr{A} \in \operatorname{End} V$, $\dim V < \infty$. Докажите, что если $\operatorname{Ker} \mathscr{A} \neq \operatorname{Ker} \mathscr{A}^2$, то $\mathscr{A}$ не диагонализируем.

11. Найдите $(n-1)$-мерные инвариантные подпространства оператора $\mathscr{A} \in \operatorname{End} \mathbb{R}^n$, заданного матрицей в стандартном базисе:

   а) $n = 3$, $\begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 5 \\ 4 & -9 & 9 \end{pmatrix}$; б) $n = 3$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$; в) $n = 4$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Указание: вспомните о связи U, U^0 и инвариантности.

12.* Последовательность (x_n) задана рекуррентно $x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}x_{n-1}$, $x_0 = a \in \mathbb{R}$, $x_1 = b \in \mathbb{R}$. Докажите, что последовательность сходится и найдите её предел.

1. $\mathscr{A} \in \operatorname{End} V$, $V \geqslant U = \langle x_1, \ldots, x_k \rangle$. Докажите, что U инвариантно относительно $\mathscr{A}$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{A}(x_1), \ldots, \mathscr{A}(x_k) \in U$.

1.

$\triangleright$ Т $x_1, \ldots, x_k$ - базис

$\mathscr{A}(x_1 + \ldots + x_k) = \mathscr{A}(x_1) + \mathscr{A}(x_2) + \ldots + \mathscr{A}(x_k)$ $\blacktriangleleft$

2. Инвариантно ли подпространство U пространства V относительно $\mathscr{A}$? Если да, найдите матрицу оператора $\mathscr{A}|_U$ в каком-нибудь базисе:

а) $V = M_2(\mathbb{R})$, $U = M_2^+(\mathbb{R})$, $\mathscr{A}\colon X \mapsto X - X^{\mathrm{T}}$;

б) $V = M_2(\mathbb{R})$, $U = M_2^-(\mathbb{R})$, $\mathscr{A}\colon X \mapsto X - X^{\mathrm{T}}$;

в) $V = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f''' = 0\}$, $U = \{f \in V \mid f(1) = 0\}$, $\mathscr{A}\colon f \mapsto f(1-x)$;

г) $V = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f''' = 0\}$, $U = \{f \in V \mid f(0) = f(1)\}$, $\mathscr{A}\colon f \mapsto f(1-x)$;

а) $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\mathscr{A}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$\mathscr{A}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$

$\mathscr{A}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$[\mathscr{A}|_U] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ т.е. $\mathscr{A}|_U = 0$

б) $U = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\mathscr{A}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$[\mathscr{A}|_U] = (2)$

в) $V=\{f\in\mathbb{R}[x]\mid f'''=0\}$, $U=\{f\in V\mid f(1)=0\}$, $\mathscr{A}\colon f\mapsto f(1-x)$;

$V=\mathbb{R}[x]_2$

$U=(x-1)(ax+b)=ax(x-1)+b(x-1)$

$U=\langle x(x-1),\ x-1\rangle$

$\mathscr{A}(x(x-1))=(1-x)(1-x-1)=(1-x)(-x)=x(x-1)\in U$

$\mathscr{A}(x-1)=x$

$x=ax(x-1)+b(x-1)$ не получится $\Rightarrow x\notin U$

г) $V=\{f\in\mathbb{R}[x]\mid f'''=0\}$, $U=\{f\in V\mid f(0)=f(1)\}$, $\mathscr{A}\colon f\mapsto f(1-x)$;

$V=\mathbb{R}[x]_2=\{ax^2+bx+c \mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$

U: $a+b+c=c \Rightarrow a+b=0$ $\quad$ c – своб.

b – своб

$a=-b$

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-b\\b\\c\end{pmatrix}=b\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$U(-x^2+x,\ 1)$

$\mathscr{A}(-x^2+x)=-(1-x)^2+(1-x)=-x^2+2x-1+1-x=-x^2+x\in U$

$$[\mathscr{A}/_U]=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \mathscr{A}/_U=\mathcal{E}$$

3. Инвариантно ли подпространство U пространства $\mathbb{R}^n$ относительно оператора $\mathscr{A}$, заданного в стандартном базисе матрицей:

а) $n = 3$, $U: x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$, $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$;

б) $n = 4$, $U = \langle (4, 0, -1, 1)^{\mathrm{T}}, (-2, 2, 3, 1)^{\mathrm{T}}, (0, 4, 5, 3)^{\mathrm{T}} \rangle$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $n = 4$, $U = \langle (1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}, (1, -1, 3, 5)^{\mathrm{T}}, (3, 2, 4, 5)^{\mathrm{T}} \rangle$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

а) $n = 3$, $U: x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$, $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$;

$V = \mathbb{R}^3 \quad U$

базис подпр-ва решений однородной СЛАУ это ФСР

$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$

$\exists$ x_2 и x_3 - свобод

$\Rightarrow x_1 = -2x_2 + x_3$

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$Y = AX$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

и проверить лежат ли в U $\Leftrightarrow$ коорд. урав согласны

$-7+10-3=0$ ✓

$3-4+1=0$ ✓

nodegunu

6) $n = 4$, $U = \langle (4,0,-1,1)^T, (-2,2,3,1)^T, (0,4,5,3)^T \rangle$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

$V = \mathbb{R}^4$ $\quad U = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

nodegunu

$U \cap U$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 2 + I \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{matrix} 4 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 3 \end{matrix}$$

4. Найдите все инвариантные подпространства оператора $\mathscr{A}(f) = e^{-1}\cdot f(x+1)$ в вещественном пространстве $V = \langle e^x\cos x,\ e^x,\ e^x\sin x,\ e^{2x}\rangle_{\mathbb{R}}$.

$$f = (f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4)$$

$$e^{-1}\cdot e^{x+1}\cos(x+1) = e^x\cos(x+1) = \underbrace{e^x\cos x}_{f_1}\cos 1 - \underbrace{e^x\sin x}_{f_3}\sin 1 =$$

$$e^{-1}\cdot e^{x+1} = e^x = f_2$$

$$e^{-1}\cdot e^{x+1}\sin(x+1) = e^x\sin(x+1) = \underbrace{e^x\sin x}_{f_3}\cos 1 + \underbrace{e^x\cos x}_{f_1}\sin 1$$

$$e^{-1}\cdot e^{2(x+1)} = e^{2x+1} = e\cdot\underbrace{e^{2x}}_{f_4}$$

$$[\mathscr{A}]_f = \begin{pmatrix} \cos 1 & 0 & \sin 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin 1 & 0 & \cos 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

$$[\mathscr{A}]_{(f_1, f_2, f_3, f_4)} = \begin{pmatrix} \cos 1 & \sin 1 & 0 & 0 \\ -\sin 1 & \cos 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

Т.К. блочно диагональный вид

$$V = \langle f_1, f_3\rangle \oplus \langle f_2\rangle \oplus \langle f_4\rangle$$

5. Найдите собственные значения и собственные подпространства линейных операторов в вещественном пространстве $\mathbb{R}^n$, заданных в стандартном базисе матрицами:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

д)

$$\chi(t) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0-t & 1 & 0 \\ -4 & 4-t & 0 \\ -2 & 1 & 2-t \end{vmatrix} = t^3 - 6t^2 + (4+8)t - 8 =$$

$$= t^3 - 6t^2 + 12t - 8 = (t-2)^3$$

$\lambda = 2 \qquad a(2) = 3$

$V_2 = \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - 2\mathcal{E})$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\exists x_2$ - базисна

$(A - 2E) \cdot X = 0$

$x_2 = 2x_1$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

9. Операторы заданы матрицами в стандартном базисе. Выясните, какие из них диагонализируемы над полем $\mathbb{R}$ или над полем $\mathbb{C}$. Если оператор диагонализируем над $\mathbb{R}$, найдите собственный базис, соответствующую диагональную матрицу и спектральное разложение оператора:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

а) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\chi_A = t^3 - 5t^2$