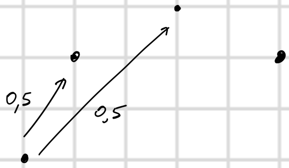
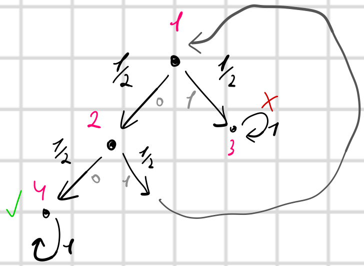
Марковские цепи



орр. граф



пр. марковской цепи

вер-ть

0 шаг: $(1, 0, 0, 0) = b^0$

1 шаг: $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) = b^1$

2 шаг: $(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}) = b^2$

может быть

b^k распр. вер-ей после k-го шага

P – матрица $n \times n$; P_{ij} – вер-ть $i \to j$

	1	2	3	4
1	0	1/2	1/2	0
2	1/2	0	0	1/2
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1

с какой вер-тью оказались в i после k

$$b_i^{k+1} = \sum_{j=1}^{n} p(\text{из } j \to i) \cdot p(\text{на пред. шаге в } j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} P_{ji} \cdot b_j^k = \sum_{j=1}^{n} b_j^k \cdot P_{ji} = (b^k \cdot P)_i$$

$$b^{k+1} = b^k \cdot P$$

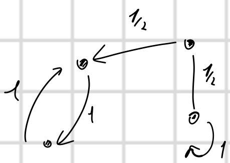
$$b^k = b^0 \cdot P^k$$

← поглощающее состояние (т.к. не выйдем)

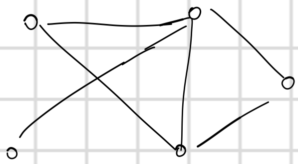
Остальные — непоглощающие

Марковская цепь наз. поглощающей, если из каждого состояния есть ∃ путь в поглощающее сост.

Пр.:



непоглощающее состояние

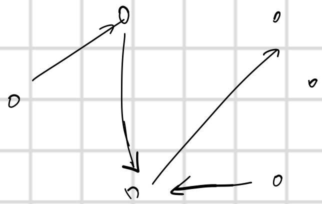


Неориентированный граф

aRb — $\exists$ путь из a в b отнош. экв.

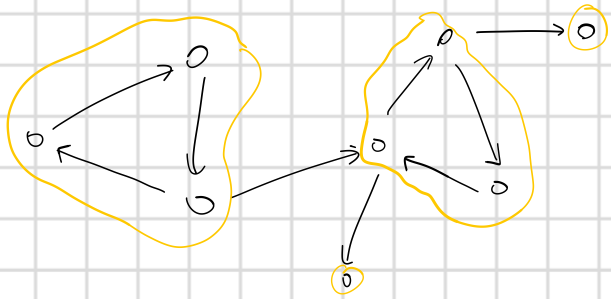
V/R — компоненты связности

Ориентированный граф



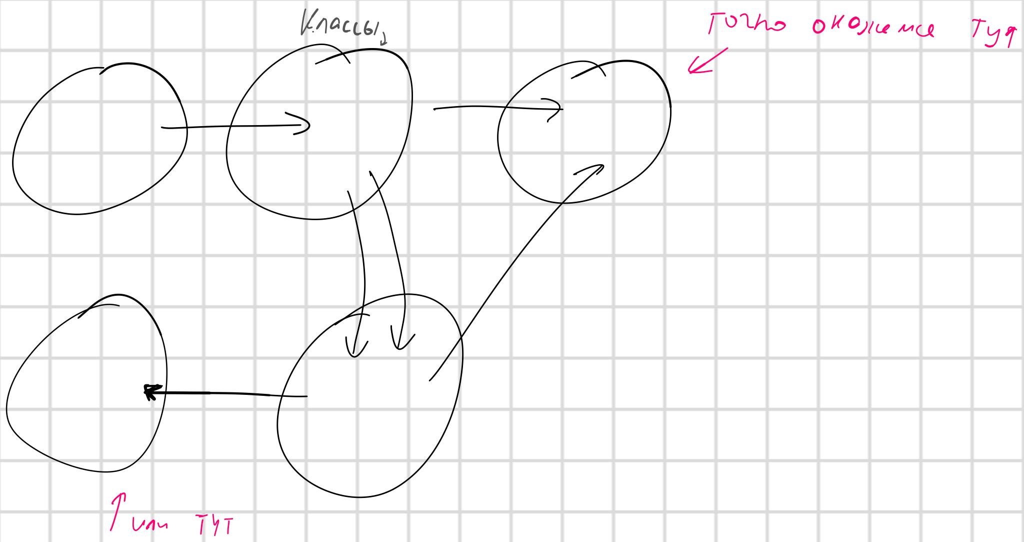
aRb — $\exists$ путь из $a \to b$ и $\exists$ $b \to a$ отнош. экв.

V/R — компоненты сильной связности

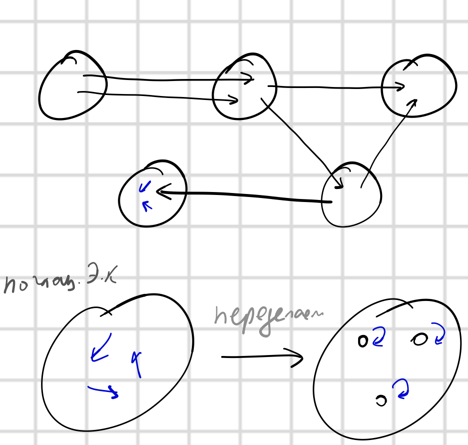


Эргодический класс — компоненты сильной связности

Поглощающий Эргодический класс — класс из которого нельзя попасть в другие классы



1) вер-ть попасть в поглощ. Эр.К. ?
2) распределение внутри поглощ. Эр.К ?
3) мат. ожидание шагов до поглощения



поглощающая марк. цепь

$$P = \begin{array}{ll} & \begin{array}{cc} 1 \;\; m & m+1 \;\; n \end{array} \\ \begin{array}{l} 1 \\ \text{непоглощ. сост.} \\ m \\ m+1 \\ \text{поглощ. сост.} \\ n \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline 0 & I \end{array}\right) \end{array}$$

матрица единичн.

$b^k = b^0 \cdot P^k$

$b =$ m непогл. | погл. $= 0$ $b \cdot P = \quad \cdot \quad Q \quad 0\,0\,0\,0$

$a^k = a^0 \cdot Q^k$

$P(\text{попасть в } \overset{\text{погл. сост}}{i}) = \sum_{j=1}^{m} \overbrace{P(j \to i)}^{R_{ji}} \cdot P(\text{на прошл шаге быть в } j) =$

$= \sum_{t=0}^{\infty} P(\text{погл. в } i \text{ после } t \text{ шагов}) = \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{m} P(j \to i)\, P(\text{быть в } j \text{ после } t \text{ шагов}) =$

$= \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{m} R_{j,i-m} \cdot (a^0 \cdot Q^t)_j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{\infty} R_{j,i-m} \cdot (a^0 Q^t)_j = \sum_{j=1}^{m} R_{j,i-m} \sum_{t=0}^{\infty} (a^0 Q^t)_j =$

$= \sum_{j=1}^{m} R_{j,i-m}\left(\sum_{t=0}^{\infty} a^0 Q^t\right)_j = \sum_{j=1}^{m} R_{j,i-m}\left(a^0 \underbrace{\left(\sum_{t=0}^{\infty} Q^t\right)}_{(I-Q)^{-1}}\right)_j = \sum_{j=1}^{m} R_{j,i-m}(a^0 N)_j =$

т.к. $\frac{1}{1-x}$

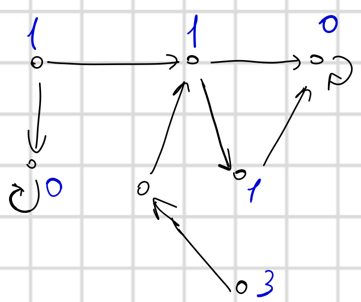
$N = (I - Q)^{-1}$ — фунд. матр

$= \sum_{j=1}^{m} (a^0 N)_j \cdot R_{j,i-m} \overset{?}{=} (a^0 N R)_i$

Вектор распределения поглощения $a^0 \cdot N \cdot R$

$Q^n \xrightarrow[\lim]{} 0$

$a^k = a^0 \cdot Q^k$



▨ — мин. длина пути до поглощ-го

L — макс из длин мин. путей

$Q^L_{ij} = \sum_{k_1,k_2 \dots k_{L-1}} Q_{ik_1} \cdot \underbrace{Q_{k_1k_2} \cdot Q_{k_2k_3} \cdot \ldots \cdot Q_{k_{L-1},j}}_{Q^{i-1}_{k,j}}$

$X = Q^L$

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{m} \sum_{k_1 \ldots k_{L-1}} Q_{ik_1} \cdot \ldots \cdot Q_{k_{L-1},j}}_{\text{вероятность попасть из } i \text{ в непоглощ. за } L \text{ шагов}}$$

$$\forall i \sum_{j=1}^{m} X_{ij} < 1 \qquad \delta - \max, \quad \delta < 1$$

$$Q^n = Q^{n-L} \cdot Q^L$$

$$Q_{ij} = \sum_{k=1}^{m} Q^{n-L}_{ik} \cdot Q^L_{kj} \le \overset{\max_{\ell} Q^{n-L}_{ik}}{M} \cdot \sum_{k} Q^L_{ki} \le M \cdot \delta$$

$$Q^n = Q^L \cdot Q^L \cdot \ldots \cdot Q^q \sim ?$$

$$\sum_{t=0}^{N} Q^t$$

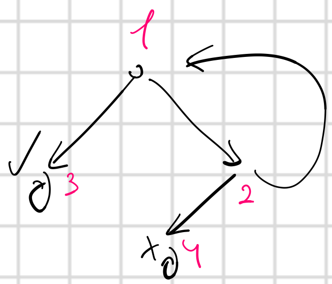
$$(I - Q^{N+1})(I-Q)^{-1}$$

T_i – мат. ожид. кол-во посещений i-го состояния

$T_i = \sum_{j=0}^{\infty} T_{ij}$, T_{ij} – посещение i в j момент

$$a^0 N = T$$

$a^0 N \cdot \vec{1}$ – мат. ожидание до поглощ.



$P =$

	1	2	3	4
1	0	0,5	0,5	0
2	0,5	0	0	0,5
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1

$$I - Q = \begin{pmatrix} 1 & -0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N = (I-Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & 2/3 \\ 2/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

$b^0 = (1\ 0\ 0\ 0)$

$a^0 = (1\ 0)$ (пополам)

$a^0 N = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$a^0 N \vec{1} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$

$a^0 N R = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$a^0 N$ – вектор из матожид. посещение (1..m)

$a^0 N \vec{1}$ – матожид. шагов до погл.

$a^0 N R$ – распред. по погл. сост.

распределение зависит от времени t и зависит от b^0

Класс неэ. циклический т.е. $\exists\, d > 1 : \forall$ цикл $\vdots\, d \Rightarrow \nearrow$

и ациклический : Нод всех циклов $= 1$

Теорема (Эффект „забывания")

Для Стохастическая цепь : $\forall i, j : P_{ij} > 0$

1) $\exists\, b : \forall b^0 \quad b^0 P^t \xrightarrow[t\to\infty]{} b$ (распределение после t-го шага не зависит ни от чего)

2) $b = bP$ (как найти)

$\triangleright$ (2) $bI = bP$

$b(I - P) = 0$

$\begin{cases} \sum b_k = 1 \\ b(I-P) = 0 \end{cases}$ как искать b

$rk(I - P) = n - 1$

Докажем с помощью (1)

? $b = bP$

$b^0 P^t \to b \Rightarrow b^0 P^{t+1} \to bP$

$b \Rightarrow b = bP$

(1) $b^0 P^t \to b$

$$(b^0 A)_i = \sum_{k=1}^{n} b_k^0 \cdot A_{ki} \ (=)$$

$$\text{Пусть } A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{ij} = a_j$$

$$(=) \sum_{k=1}^{n} b_k^0 a_i = a_i \cdot \underbrace{\sum b_k^0}_{1} = a_i$$

? $P^t \to A$

Рассм. i-й столбик

Пусть M_i^t – макс в i-ом столбике у P^t; m_i^t – мин. в i-ом столбике у P^t;

$M_i^t - m_i^t \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$?

? – индекс минимума

$$P_{ji}^{t+1} = \sum_{k=1}^{n} P_{ik} \cdot (P^t)_{ki} \le \Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} P_{jk}}_{1} \cdot M_i^t\Big) - P_{j?} \cdot M_i^t + P_{j?} \cdot m_i^t = M_i^t - P_{j?}(M_i^t - m_i^t) \ (\le)$$

Пусть $\delta = \min(P_{ij})$ $(\delta > 0)$

$$(\le) \ M_i^t - \delta(M_i^t - m_i^t)$$

$$\Rightarrow M_i^{t+1} \le M_i^t - \delta(M_i^t - m_i^t)$$

? – индекс максимума

$$P_{ji}^{t+1} = \sum_{k=1}^{n} P_{jk} (P^t)_{ki} \ge \sum_{k=1}^{n} P_{jk} \cdot m_i^t - P_{j?} \cdot m_i^t + P_{j?} \cdot M_i^t = m_i^t + P_{j?}(M_i^t - m_i^t) \ (\ge)$$

$$(\ge) \ m_i^t + \delta(M_i^t - m_i^t)$$

$$\Rightarrow m_i^{t+1} \ge m_i^t + \delta(M_i^t - m_i^t)$$

$$M_i^t + \delta(M_i^t - m_i^t) + m_i^{t+1} \ge M_i^{t+1} + m_i^t + \delta(M_i^t - m_i^t)$$

$$M_i^{t+1} - m_i^{t+1} \le (M_i^t - m_i^t)(1 - 2\delta) \quad \text{при } \delta > 0 \quad M_i^t - m_i^t \le (1-2\delta)^t$$

! чем больше δ, тем быстрее сходимость