

VII. Определители и их приложения

1. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} (-1+i)x - iy = 3-3i, \\ (1+3i)x + (1-2i)y = -3+i; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} (-1-2i)x + iy = 2-4i, \\ (2+i)x + (1+3i)y = 3-i. \end{cases}$$

2. α, β, γ — корни уравнения $x^3 + px^2 + qx + r = 0$. Вычислите

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}.$$

3. При каких значениях λ система уравнений над \mathbb{R} имеет единственное решение:

$$\text{а) } \begin{cases} \lambda x + y = 1, \\ x + \lambda y + z = 2, \\ y + \lambda z = 3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \lambda x + 2y + 3z + 4v = 1, \\ (3-\lambda)x + 2y + 3z + 4v = 2, \\ (2+\lambda)x + 3y + (4-\lambda)z + v = 3, \\ 2x + 3y + 4z + v = 4. \end{cases}$$

4. Вычислите определители:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 21 & 11 & 63 & 211163 \\ 57 & 45 & 97 & 574597 \\ 73 & 26 & 80 & 732680 \\ 30 & 18 & 29 & 301829 \end{vmatrix};$$

$$\text{г) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 3 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{д) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

5. Найдите матрицу, обратную данной:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, E — единичная матрица четвёртого порядка. При каких $x \in \mathbb{R}$ матрица $A + xE$ обратима?

7. Решите матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; г) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Вычислите определители порядка n , элементы которых заданы условиями:

а) $a_{ij} = \min\{i, j\}$; б) $a_{ij} = \max\{i, j\}$; в*) $a_{ij} = |i - j|$.

9* Если заменить любой столбец квадратной матрицы A на столбец из π , определитель получившейся матрицы будет равняться 0. Чему равен определитель A ?

10* Баба Яга и Кощей Бессмертный играют в такую игру: по очереди ставят произвольные действительные числа в матрицу 100 на 100. Баба Яга хочет сделать определитель матрицы каким угодно, но только не нулевым, а Кощей Бессмертный хочет помешать ей в этом. Баба Яга настояла на том, что будет ходить первой. Может ли кто-нибудь из них гарантированно победить?

1. Решите систему уравнений:

$$a) \begin{cases} (-1+i)x - iy = 3-3i, \\ (1+3i)x + (1-2i)y = -3+i; \end{cases} \quad б) \begin{cases} (-1-2i)x + iy = 2-4i, \\ (2+i)x + (1+3i)y = 3-i. \end{cases}$$

а)

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1+i & -i \\ 1+3i & 1-2i \end{vmatrix} = (-1+i)(1-2i) - (1+3i)(-i) =$$

$$= (-1 \cdot 1 + (-1)(-2i) + i \cdot 1 + i \cdot (-2i)) - (-i + 3i \cdot (-i)) =$$

$$= -1 + 2i + i + 2 - i - 3 = 2i - 2$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 3-3i & -i \\ -3+i & 1-2i \end{vmatrix} = (3-3i)(1-2i) - (-3+i)(-i) =$$

$$= 3 - 6i - 3i - 6 - 3i - 1 = -12i - 4$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-12i-4}{2i-2} = \frac{(-12i-4)(-2i-2)}{8} = \frac{(12i+4)(2i+2)}{8} = \frac{-24+8i+24i+8}{8} = 4i-2$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} -1+i & 3-3i \\ 1+3i & -3+i \end{vmatrix} = (-1+i)(-3+i) - (1+3i)(3-3i) =$$

$$= \cancel{3} - i - \cancel{3i} - 1 - \cancel{3} + \cancel{3i} - 9i - 9 = -10i - 10 \quad \text{хз}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-10i-10}{2i-2} = \frac{(-10i-10)(-2i-2)}{8} = \frac{(10i+10)(2i+2)}{8} = \frac{-20i+20i+20i+20}{8}$$

3. При каких значениях λ система уравнений над \mathbb{R} имеет единственное решение:

$$a) \begin{cases} \lambda x + y = 1, \\ x + \lambda y + z = 2, \\ y + \lambda z = 3; \end{cases} \quad б) \begin{cases} \lambda x + 2y + 3z + 4v = 1, \\ (3-\lambda)x + 2y + 3z + 4v = 2, \\ (2+\lambda)x + 3y + (4-\lambda)z + v = 3, \\ 2x + 3y + 4z + v = 4. \end{cases}$$

а) по Т. Крамера

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) =$$

$$= \lambda^3 - \lambda - \lambda = \lambda^3 - 2\lambda$$

Кому $\neq 0$?

$$\lambda^3 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - 2) = 0$$

$$\begin{cases} \lambda = 0 & \lambda = 0 \\ \lambda^2 = 2 & \lambda = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \mathbb{R} \setminus \{0, \pm\sqrt{2}\}$$

4. Вычислите определители:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 21 & 11 & 63 & 211163 \\ 57 & 45 & 97 & 574597 \\ 73 & 26 & 80 & 732680 \\ 30 & 18 & 29 & 301829 \end{vmatrix};$$

$$\text{г) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 3 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{д) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$\text{а) } \det \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{умножение на} \\ \text{транспонированной} \\ \text{матрицей}}} \det \begin{vmatrix} 1 & 2+(1 \cdot -2) & 3+(2 \cdot -2) & -2+(1 \cdot -1) \\ -2+(1 \cdot 2) & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= \det \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{+5 \text{ II} \\ +4 \text{ II}}} \det \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -25 \\ 0 & 0 & -2 & -15 \end{vmatrix} \xrightarrow{+2 \text{ III}} \det \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & -65 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-65) = 65$$

$$b) \begin{vmatrix} 21 & 11 & 63 & 21163 \\ 57 & 45 & 87 & 574587 \\ 73 & 26 & 80 & 732680 \\ 30 & 18 & 28 & 301828 \end{vmatrix} \xrightarrow{-(1000I + 100II + III)} \begin{vmatrix} 21 & 11 & 63 & 0 \\ 57 & 45 & 87 & 0 \\ 73 & 26 & 80 & 0 \\ 30 & 18 & 28 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$10000I + 100II + III$

$$g) \Delta_h = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \text{разложение} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det |2| = 2$$

$$\det \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$\det \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2^3 + 1 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot 1 - (0 \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2) = 4$$

разложение $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$

$$\begin{aligned} & \text{англ. } \downarrow \\ & \textcircled{=} 2 \cdot (-1)^{1+1} \Delta_{h-1} + 1 \cdot (-1)^{2+1} \Delta_{h-2} = \\ & = 2 \Delta_{h-1} - \text{разложение} = 2 \Delta_{h-1} - \Delta_{h-2} \end{aligned}$$

т.е. $\Delta_h = 2\Delta_{h-1} - \Delta_{h-2}$ \swarrow $\Delta p h \text{ } p h \text{ } n p o c e c h \Rightarrow \Delta_h = h+1$

$$\Delta_h - \Delta_{h-1} = \Delta_{h-1} - \Delta_{h-2}$$

5. Найдите матрицу, обратную данной:

а) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

а) $\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} \boxed{X^{-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$ $\begin{pmatrix} - \\ - \\ - \\ - \end{pmatrix}$

$\det \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0 + 30 + 15 - 27 - 0 - 15 = 4$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} -4 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 8 & -3 & 3 \\ -4 & 6 & -2 \end{vmatrix}$

В ответ. Со знаками $(-1)^i$:

$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} -3/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 3/4 & -3/4 & 3/4 & 0 \\ -1/4 & 3/4 & -3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} -3/4 & 3/4 & -3/4 & 0 \\ 1/4 & -1/4 & 6/4 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & -3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{vmatrix}$

7. Решите матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; г) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$
 A B

$\det A = -2 \neq 0 \Rightarrow$ имеет 1 решение

$$AX = B$$

$$X = A^{-1}B$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ +2 & +3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 & -1 \\ +2 & +3 \end{matrix}$$

б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ либо решения нет, либо не единственно

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + z = 2 \\ 2x + z = 2 \\ 2y + t = 1 \\ 2y + t = 1 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x+z & 2y+t \\ 2x+z & 2y+t \end{pmatrix}$$

⇓

$$\begin{cases} 2x + z = 2 \\ 2y + t = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 2 - 2x \\ t = 1 - 2y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ 2-2x & 1-2y \end{pmatrix} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

⇓
dec. into parameters

8. Вычислите определители порядка n , элементы которых заданы условиями

а) $a_{ij} = \min\{i, j\}$; б) $a_{ij} = \max\{i, j\}$; в*) $a_{ij} = |i - j|$.

а) $a_{ij} = \min\{i, j\}$
 $(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$

$n=1$:

$$\det(1) = 1$$

$n=2$:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

$n=3$:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} = 1$$

D3: 1 (d) 5 (d)
 2 7 (d, 2)
 4 (d, 2) 8 (d)