Несобственный интеграл

$\exists\, f : [a, b),\ b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Опр.: f – локально интегрируема на $E \subset \mathbb{R}$, Если:

$f \in R[a,b]\ \forall [a,b] \subset E$

$f \in R_{loc}[a,b) = \{ f : f \in R[a,w],\ w \in (a,b) \}$

Пр.:

1) $x^2 \in R_{loc}(-\infty, +\infty)$

2) $1/x \in R_{loc}(0, 1]$

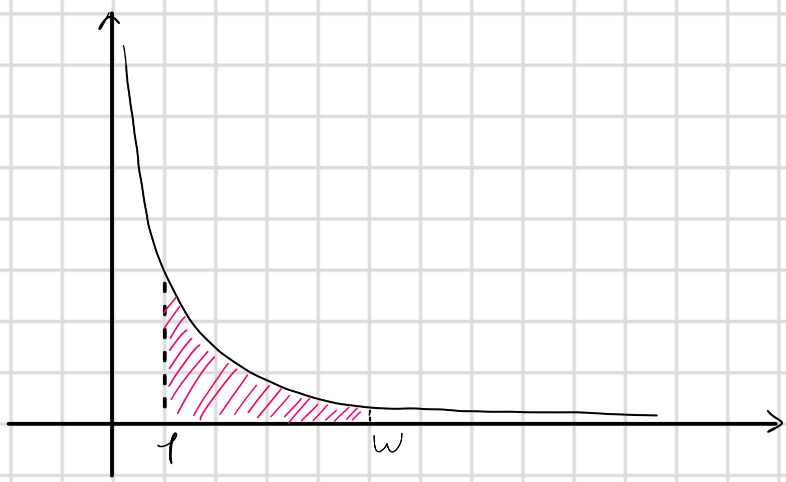
Опр.: $\exists\, f \in R_{loc}[a,b)$.

$\int\limits_a^b f\,dx = \lim\limits_{w \to b-0} \int\limits_a^w f\,dx$, $\int\limits_a^b$ сх-ся, если $\lim$ конечен

Пр.:

1) $$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{w \to +\infty} \int\limits_1^w \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{w \to +\infty} \begin{cases} \ln|x|\,\Big|_1^w, & \alpha = 1 \\ \dfrac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\,\Big|_1^w, & \alpha \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} +\infty, & \alpha \leq 1 \\ \dfrac{1}{\alpha - 1}, & \alpha > 1 \end{cases}$$

Сх-тся при $\alpha > 1$



2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \overset{\circ}{=} \int_0^1 = -\int_1^0 = -\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_1^\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1 \overset{\circ}{=} \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} +\infty, & \alpha\ge 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha<1 \end{cases}$

Сх-ся при $\alpha < 1$

(13) Если $f\in R[a,b] \Rightarrow f\in R_{loc}[a,b] \Rightarrow f\in R_{loc}[a,b)$

$$\triangleleft\ \underbrace{\int_a^b f\,dx}_{\text{несобств.}} = \lim_{w\to b-0}\underbrace{\int_a^w f\,dx}_{\varphi(w)} = \varphi(b) = \underbrace{\int_a^b f\,dx}_{\text{собств.}}$$

Пр.: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ — собств.

Свойства несобств. интегралов:

] $f,g\in R_{loc}[a,b]$

1) Линейность:

$\displaystyle\int_a^b(\alpha f+\beta g)\,dx = \alpha\int_a^b f\,dx + \beta\int_a^b g\,dx$ Если $\exists$ любые два в $\overline{\mathbb{R}}$ и операция опр.

2) Монотонность

] $f\le g$ на $[a,b)$ ($a\le b$) Тогда: $\displaystyle\int_a^b f\,dx \le \int_a^b g\,dx$, если оба $\int$ $\exists$

3) Аддитивность:

$$\int_a^b f\,dx = \underbrace{\int_a^c f\,dx}_{\text{собств.}} + \underbrace{\int_c^b f\,dx}_{\text{несобств.}}$$

4) Интегрирование по частям.

] u, v — дифф. на $[a,b]$, $u', v' \in R_{loc}[a,b)$. Тогда:

$$\int_a^b u\,dv = \underbrace{uv\Big|_a^b}_{\lim\limits_{x \to b-0} u(x)v(x) - u(a)v(a)} - \int_a^b v\,du$$

несобств

(не всегда)