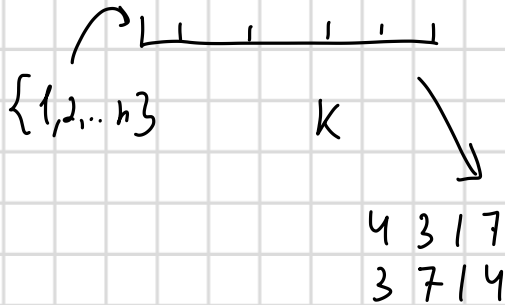


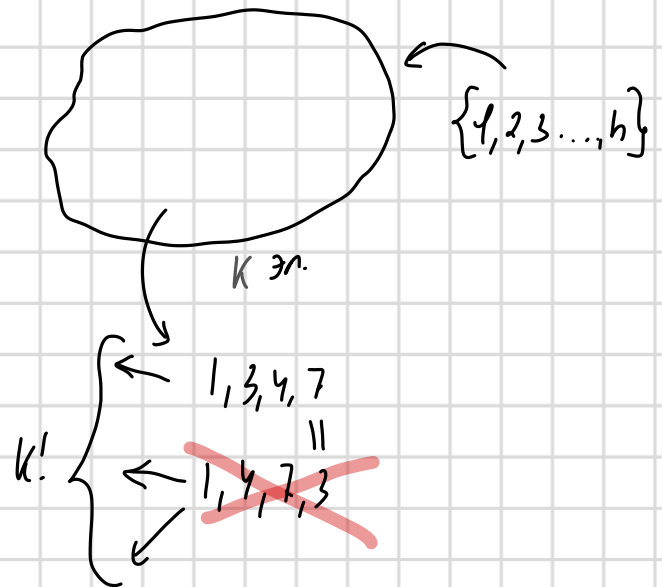
Размещения и сочетания

Размещения



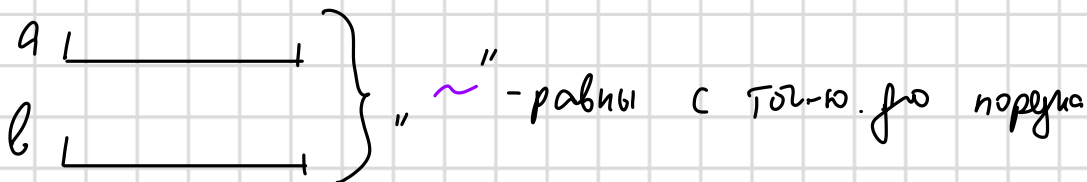
$$h^{\overline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Сочетания



$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

Отношение эквивалентности



$$A_{n,k} / \sim = C_{n,k}$$

↑
размер класса экв.

$$\nabla \{1, 2, \dots, n\}^k \quad | \text{len} = n^k$$

[1, 2, 3, 4]

[1, 1, 1, 1]

Групи

група: $\langle X, \circ \rangle$ $\circ: \begin{matrix} X & \times & X \\ \downarrow a & & \downarrow b \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} X \\ ab \end{matrix}$

полугрупа: група + асоціативність

$$(ab)c = a(bc)$$

моно: полугрупа + нейтр. ел.

$$a \cdot e = e \cdot a = a$$

група: моно + обернені

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$$

Групи дійсвн

G - група

$$1) f(hk) = (fh)k$$

X - об'єкти

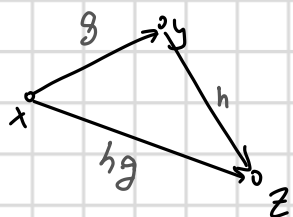
$$2) e \cdot f = f \cdot e = f$$

$$3) gf^{-1} = f^{-1}g = e$$

$$\begin{matrix} fX = y \\ \uparrow \text{действ} \quad \uparrow \text{объект} \quad \uparrow \text{объект} \end{matrix}$$

$$G \times X \rightarrow X$$

$$1) h(fx) = (hf)x$$



$$2) e \cdot x = x$$

$\rightarrow G$ действує на X

Π_p :

1) $X = \mathbb{R}^2$

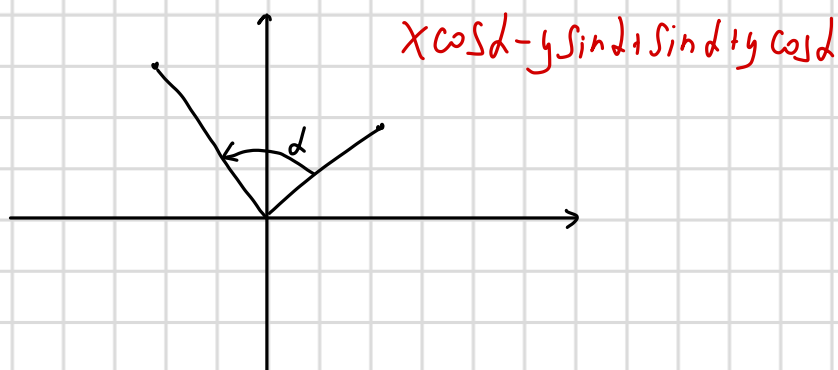
$G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

$g \cdot (x, y) = (gx, gy)$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ G & \mathbb{R}^2 & \mathbb{R}^2 \end{matrix}$

2) $X = \mathbb{R}^2$

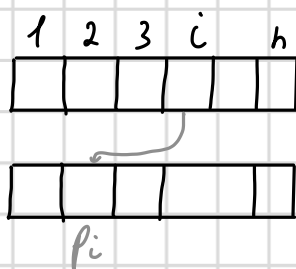
$G = ([0, 2\pi), +_{\text{mod } 2\pi})$



3) $X = \mathbb{B}^n$

$G = S_n$

$p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$



$p = [3, 1, 2, 4, 5]$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

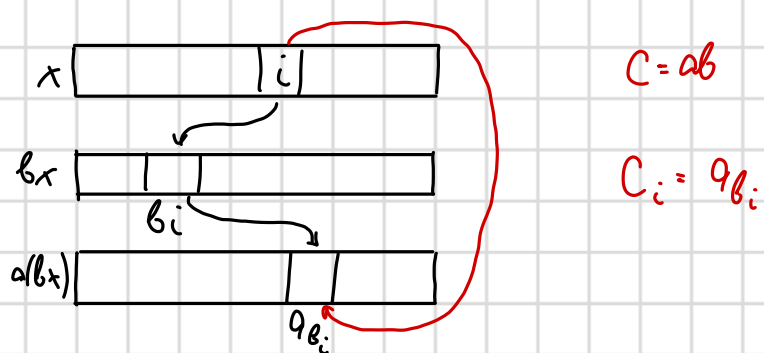
$x = [1, 1, 0, 1, 1]$

$px = [1, 0, 1, 0, 1]$

Группа перестановок

$a \circ b$

$(a \circ b)x = a(bx)$



ассоциативность:

$$a(bc): a[b[c[i]]]$$

$$(ab)c: a[b[c[i]]]$$

нейтральный

$$e_i = i$$

$$(ae)_i = ae_i = a_i$$

обратный:

$$b = a^{-1}$$

$$ba = e$$

$$b[a[i]] = i$$

for $i = 1 \dots n$

$$b[a[i]] = i$$

Умножение перестановок = действие \uparrow группа S_n на \uparrow массив S_n

$$4. X = T^h$$

$$G = (\{0, \dots, n-1\}, +_{\text{mod } n})$$

$$\xrightarrow{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a^{-1} = (n-a) \bmod n$$

X G -группа действует на X
" \sim_G " - равны с точностью до G

$$X \sim_G y \quad \exists g \in G : y = gx$$

1) рефлексивность

$$X \sim_G X : X = eX$$

$$2) X \sim_G y : y = gx$$

$$g^{-1}y = g^{-1}(gx) = (g^{-1}g)x = ex = X$$

$$\Rightarrow y \sim_G X$$

$$3) X \sim_G y, y \sim_G z$$

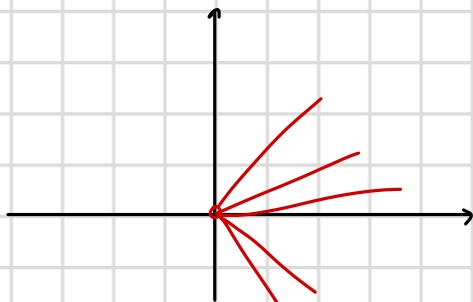
$$y = gx \quad z = hy = h(gx) = (hg)x = Kx, \text{ где } K = hg$$

$$\Rightarrow X \sim_G z$$

X/G - классы эквив-н (орбиты)

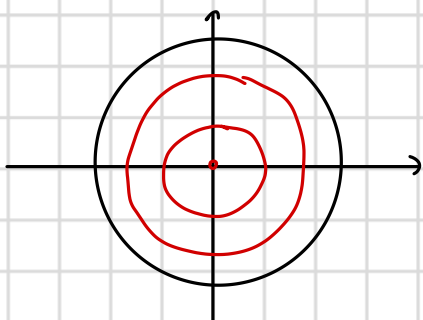
Пр.:

1)



$$f(x, y) = (gx, gy)$$

2)



$$f(x, y) \text{ неогот на } f$$

$$3) T^h \quad \boxed{} \quad S_n$$

$$4) T^h \quad \langle \{0, \dots, n-1\}, +_{\text{mod } n} \rangle$$

$$5) G = S_K$$

$$X/G = C_{n,K}$$

Неповоротные точки

$$f \quad I_f = \{x / gx = x\}$$

Теорема (Лемма Берксайда)

$$|X/G| = \frac{\sum_{g \in G} |I_g|}{|G|}$$



G

X	x_1, x_2, \dots	x	x_n
g_1			
g_2			
\vdots			
g		gx	
g_m			

	000	001	010	011	100	101	110	111
123		001						
132		010						
213		001		101				
231		100						
312		010						
321		100						

выберем g_1 -ты которые нежат в g -ой орбите и оставим 1 из них

X

$g_1 x$
$g_2 x$
\vdots
$g_m x$

Y

$g_1 y$	$= g_1 h x$
$g_2 y$	$= g_2 h x$
\vdots	\vdots
$g_m y$	$= g_m h x$

hony Vh

G

X	x_{i_1}	$x_{i_2} \dots$	x_{i_n}
g_1	z		
g_2			
\vdots			
g	z		
z			
g_n			

размер: $|G| \cdot |X/G|$

$$\begin{cases} z = g_1 x \\ z = g_2 x \\ \vdots \\ z = g_s x \end{cases}$$

$$x = g_1^{-1} z$$

$$\begin{cases} z = z \\ z = g_2 g_1^{-1} z \\ \vdots \\ z = g_k g_1^{-1} z \end{cases}$$

$$\{h/h z = z\} = St z$$

↑
стабилизатор эл-та z

$$\Rightarrow |G| \cdot |X/G| = \sum_{x \in X} |St x| = \sum_{x \in X} \sum_{g \in G} [gx = x] =$$

$$= \sum_{g \in G} \sum_{x \in X} [gx = x] = \sum_{g \in G} |I_g| \quad \blacktriangleleft$$