Гомоморфизм

$\exists\ \varphi: G \to H$ гомоморфизм

$Im(\varphi) = \{\varphi(g) \mid g \in G\}$ – образ

$Ker(\varphi) = \{g \in G \mid \varphi(g) = \underset{\underset{H}{\cap}}{e}\}$ - ядро гомоморфизма

Пр.: $sgn: \underset{\underset{\sigma}{\cap}}{S_n} \to \{\pm 1\}$

$\sigma \mapsto sgn(\sigma)$

Ker(φ) – такие эл из G что φ(G) дает нейтральный в H (с операц в H)

$Im(sgn) = \{\pm 1\}$

$Ker(sgn) = A_n$

Св-ва:

1) $Im(\varphi) \leq H$
2) $Ker(\varphi) \trianglelefteq G$

$\triangleright$ (1) $\exists\ h_1, h_2 \in Im(\varphi)$

$h_1 = \varphi(g_1)$

$h_2 = \varphi(g_2)$

$h_1 \cdot h_2 = \varphi(g_1)\,\varphi(g_2)$ т.к. φ – гомоморфизм $\Rightarrow$

$\Rightarrow h_1 \cdot h_2 = \varphi(g_1 g_2)$ а значит их перемножение

замкнутость ✓ образ есть в H

$\forall\ \underset{\underset{Im(\varphi)}{\cap}}{h} = \varphi(g)$ $h^{-1} = \varphi(g^{-1}) \in Im(\varphi)$ $\exists$ обратный ✓

$e = \varphi(e)$ из G $\exists$ нейтральн ✓ ◀

$\triangleright$ (2) $\exists\ g_1, g_2 \in Ker(\varphi)$

$$\varphi(g_1 g_2) = \underbrace{\varphi(g_1)}_{e}\ \underbrace{\varphi(g_2)}_{e} = e \Rightarrow g_1 g_2 \in Ker(\varphi)$$

т.к. это ядро

докажем $Ker(\varphi) \leq G$

$\triangleleft\ g \in Ker(\varphi) \quad \varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1} = e^{-1} = e \Rightarrow g^{-1} \in Ker\ \varphi$

обратный ✓

$e = \varphi(e) \Rightarrow e \in Ker\ \varphi$ нейтр ✓

нормальность:

$\triangleleft\ \varphi(g x g^{-1}) = \varphi(g)\ \underbrace{\varphi(x)}_{e}\ \varphi(g^{-1}) = \varphi(g)\ (\varphi(g))^{-1} = e$

если $g, x, g^{-1} \in Ker(\varphi) \rightarrow$ если возьмем сопряжение то опять попадем в ядро

$\Rightarrow g x g^{-1} \in Ker\ \varphi$ нормальность ✓

Теорема (о гомоморфизмах):

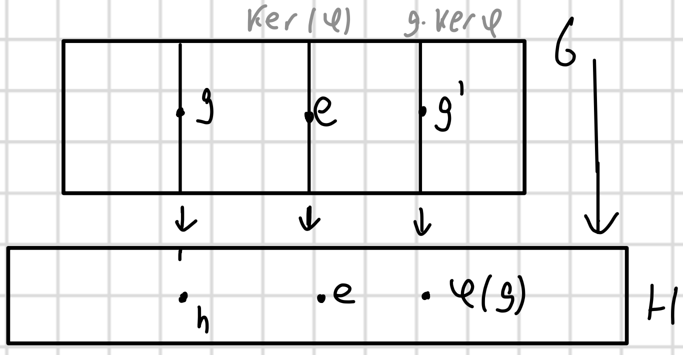
$\varphi : G \to H$ гомоморфизм тогда $G/Ker(\varphi) \simeq Im(\varphi)$

другими словами: $\exists$ изоморфизм $\Psi : G/Ker\ \varphi \xrightarrow{\sim} Im(\varphi)$

что $\varphi = \overset{\text{пси}}{\Psi} \circ \overset{\text{пи}}{\pi}$

$\pi : G \to G/Ker(\varphi)$

т.е. $\varphi(g) = \Psi(g \cdot Ker(\varphi))$



получилась биекция

$G/Ker(\varphi) \leftrightarrow Im(\varphi)$

нужно
Доказать: 1) $h \in \mathrm{Im}(\varphi)$ $\quad h = \varphi(g)$

2) $\varphi^{-1}(h) = g \cdot \ker(\varphi)$

Док-во: $\triangle$ $\forall\ \tilde{g} \in G$ и $k = g^{-1}\tilde{g} \Rightarrow \hat{g} = kg$ в каком случае равенство?

$$\varphi(\hat{g}) = \varphi(kg) = \varphi(k)\cdot \underbrace{\varphi(g)}_{h}$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(k) = e \Rightarrow k \in \ker(\varphi)$$

$$g^{-1}\hat{g} \in \ker(\varphi)$$

$$\Downarrow$$

g и $\hat{g}$ лежат в одном классе

покажем что это гомоморфизм: (т.к. биекция уже доказана)

$$\psi(g_1 \ker(\varphi)\cdot g_2 \ker(\varphi)) = \varphi((g_1 g_2)\ker(\varphi)) = \varphi(g_1 g_2) =$$

$$= \varphi(g_1)\ \varphi(g_2) = \psi(g_1 \cdot \ker\varphi)\cdot \psi(g_2 \ker\varphi) \quad \blacktriangleleft$$

Пр.: гр. $G = \mathbb{Z}$ $\quad$ подгр. $H = n\mathbb{Z}$

$$\forall\ \mathbb{Z}/\underbrace{n\mathbb{Z}}_{\text{если } \ker\varphi} \simeq \mathrm{Im}\,\varphi = \mathbb{Z}_n$$

$\mathrm{Im}\,\varphi = \mathbb{Z}_n$

$$\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

$$x \mapsto x \pmod n$$

$$n\mathbb{Z} = \ker(\varphi)$$

Пр.: $\overset{\text{гр.}}{G} = S_n$ $\qquad \overset{\text{подгр.}}{H} = A_n$

$\sigma \in A_n \qquad g \in S_n$

сопряжение

$g \sigma g^{-1} \in A_n \longrightarrow A_n \trianglelefteq S_n$

одна четность

$S_n / A_n \simeq \mathbb{Z}_2$

Пр.: $\overset{\text{группа}}{G} = \mathbb{R}$ $\qquad \overset{\text{подгрупп}}{H} = 2\pi\mathbb{Z}$

$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq \mathbb{T}$ группа углов

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \operatorname{Ker}\varphi = 2\pi\mathbb{Z}$

$x \longmapsto x \pmod{2\pi}$

$\operatorname{Im}\varphi = [0; 2\pi) \qquad \operatorname{Ker}\varphi = 2\pi\mathbb{Z}$