

Случайные величины

$$\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

ξ - сл. величина

Пр:

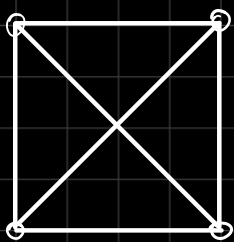
$$1) D = \{1, 2, \dots, 6\}$$

$$\Omega = D^2 \quad p(\langle i, j \rangle) = \frac{1}{36}$$

$$\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\xi(\langle i, j \rangle) = i + j$$

$$2) G(4, \frac{1}{2})$$



$$p(G) = \frac{1}{64}$$

$$3) \Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$$

$$\xi(w) = w \Leftrightarrow id(w) = w$$

$$4) \Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$$

$$E = \{2, 4, 6\}$$

χ_E - индикаторная случайная величина события

$$\chi_E(w) = \begin{cases} 1, & w \in E \\ 0, & w \notin E \end{cases}$$

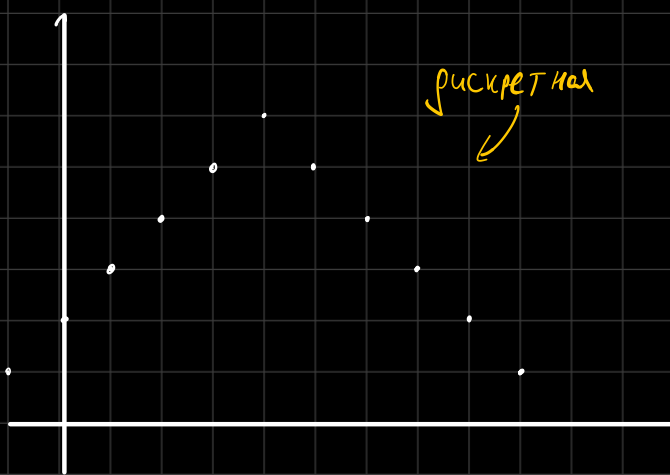
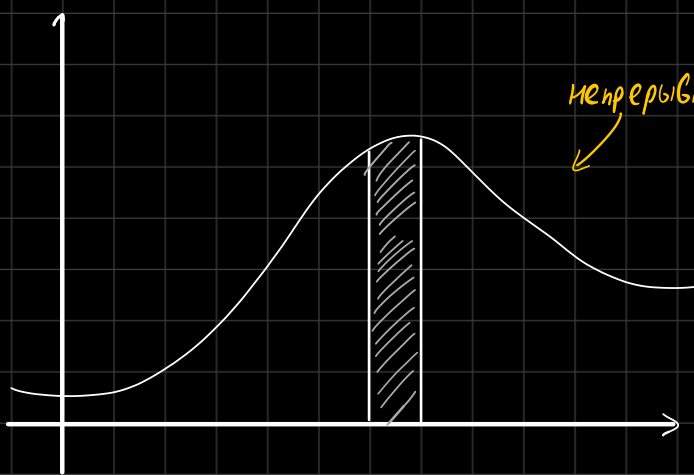
$$\Omega, \mathcal{P}, \mathbb{P}$$

$$[\xi = i] = \{\omega \mid \xi(\omega) = i\} \subset \Omega$$

$$\mathbb{P}([\xi = i]) = \mathbb{P}(\xi = i)$$

$$f_{\xi}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_{\xi}(i) = \mathbb{P}(\xi = i) \leftarrow \text{дискретная плотность вероятности}$$



Пр:

1) Сумма на двух костях

$$2 \rightarrow 1/36$$

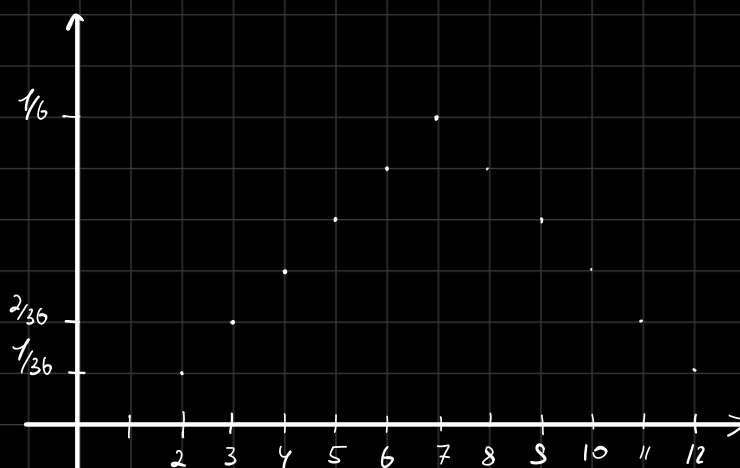
$$3 \rightarrow 2/36$$

$$4$$

$$5$$

$$6$$

$$7 \rightarrow 1/6$$



$$\Omega, \mathcal{P}, \mathbb{P}$$

$$[\xi \leq i] = \{\omega \mid \xi(\omega) \leq i\} \subset \Omega$$

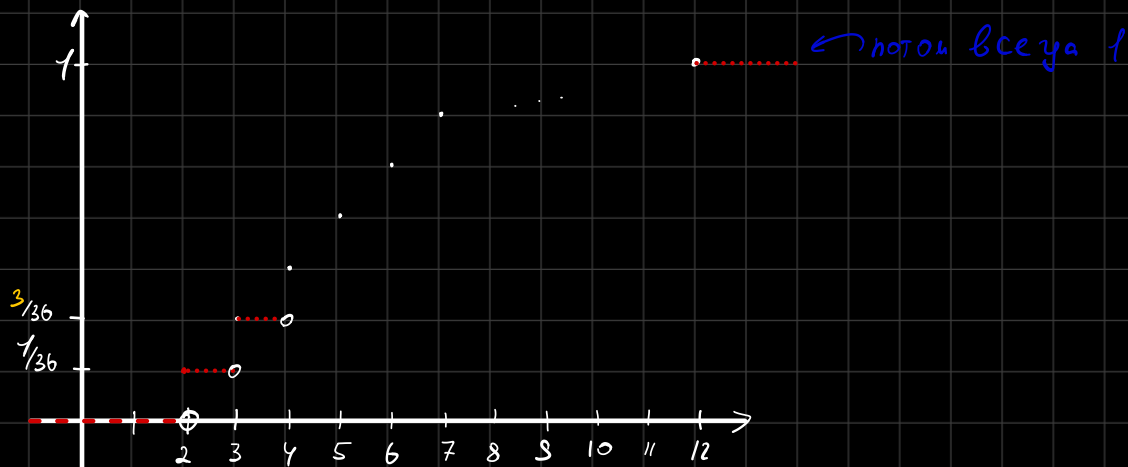
и тогда можно считать вер-ть: $\mathbb{P}(\xi \leq i)$

и это тоже ф-ия:

$$F_{\xi}(i): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

функция распределения

на том же примере:



Обобщенные ф-ии:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases}$$

$$\text{и } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

не "очень" корректная ф-ия

это по приложению,
можно забыть.

$$f_{\xi}(x) = \sum_i P(\xi = i) \cdot \delta(x - i)$$

$$F_{\xi}(i): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} = P(\xi \leq i) \leftarrow \text{ф-ия распределения}$$

Пр:

$$\Omega = B^{1000} \quad p(w) = \frac{1}{2^{1000}}$$

$$\xi(w) = \text{число единиц в } w$$

$$|\text{мн-во значений } \xi| = 1001$$

$$P(\xi=i) = \frac{C_{1000}^i}{2^{1000}}$$



$\exists \xi \in \mathcal{H}$, то законы ξ^2 ; $2 \cdot \xi$; $\xi + \mathcal{H}$; $\xi \cdot \mathcal{H}$; $\sin \xi$ и т.д.

Пр:

$$1) \exists \Omega = D^2$$

$$\xi_1(\langle i, j \rangle) = i$$

$$\xi_2(\langle i, j \rangle) = j, \text{ то}$$

$$1 \rightarrow 1/6$$

$$2 \rightarrow 1/6$$

$$\vdots$$

$$6 \rightarrow 1/6$$

$$2) \exists \Omega = D$$

$$id(w) = w$$

$$1 \rightarrow 1/6$$

$$2 \rightarrow 1/6$$

$$\vdots$$

$$6 \rightarrow 1/6$$

$$\exists \mathcal{H} = i + j = \xi_1 + \xi_2$$

Математическое ожидание

Опр.: мат. ожидание

$$E_{\xi} = \sum_w p(w) \cdot \xi(w)$$

Теорема

$$E_{\xi} = \sum_i i \cdot P(\xi=i)$$

$$\begin{aligned} \triangleright E_{\xi} &= \sum_w p(w) \cdot \xi(w) = \sum_i \sum_{w: \xi(w)=i} p(w) \cdot \xi(w) = \sum_i \sum_{w: \xi(w)=i} p(w) \cdot i = \\ &= \sum_i i \sum_{w: \xi(w)=i} p(w) = \sum_i i \cdot P(\xi=i) \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Пр.

$$1) \exists \Omega = D \text{ и } \mathcal{G} = id$$

$$E_{\mathcal{G}} = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{21}{6} = 3,5 \leftarrow \text{через определение}$$

$$2) \exists \Omega = D^2 \quad \mathcal{G}(\langle i, j \rangle) = i + j$$

$$2 \rightarrow \frac{1}{36}$$

$$5 \rightarrow \frac{4}{36}$$

$$8 \rightarrow \frac{5}{36}$$

$$11 \rightarrow \frac{2}{36}$$

$$3 \rightarrow \frac{2}{36}$$

$$6 \rightarrow \frac{5}{36}$$

$$9 \rightarrow \frac{4}{36}$$

$$12 \rightarrow \frac{1}{36}$$

$$4 \rightarrow \frac{3}{36}$$

$$7 \rightarrow \frac{6}{36}$$

$$10 \rightarrow \frac{3}{36}$$

$$E_{\mathcal{G}} = \frac{1}{36} (2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 3 + 11 \cdot 2 + 12 \cdot 1) = 7 \leftarrow \text{через теорему}$$

Теорема всегда

$$1. E_{\lambda \mathcal{G}} = \lambda \cdot E_{\mathcal{G}}$$

$$2. E(\mathcal{G} + \mathcal{H}) = E_{\mathcal{G}} + E_{\mathcal{H}}$$

$$\triangleright (1) E_{\lambda \mathcal{G}} = \sum_{\omega} p(\omega) \cdot \lambda \cdot \mathcal{G}(\omega) = \lambda \cdot E_{\mathcal{G}} \blacktriangleleft$$

$$\triangleright (2) E(\mathcal{G} + \mathcal{H}) = \sum_{\omega} p(\omega) (\mathcal{G}(\omega) + \mathcal{H}(\omega)) = E_{\mathcal{G}} + E_{\mathcal{H}} \blacktriangleleft$$

Лемма

Если \mathcal{G} и \mathcal{H} одинаково распределены, то $E_{\mathcal{G}} = E_{\mathcal{H}}$

Пр.

1) \triangleleft играем костью

\mathcal{G}_1 - число сверху; \mathcal{G}_2 - число снизу

$$E(\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2) = 7$$

$$2) \Omega = S_n \Rightarrow p(\omega) = \frac{1}{n!}$$

$$\mathcal{G}(\pi) = \{i \mid \pi[i] = i\}$$

0 ... n кроме n-1, но

$$\mathbb{I} \mathcal{G}_i(\pi) = \begin{cases} 1, & \pi[i] = i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$E_{\mathcal{X}_A} = P(A)$$

$$E_{\mathcal{G}_i} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

$$\mathcal{G} = \sum_{i=1}^n \mathcal{G}_i \quad \text{и} \quad E_{\mathcal{G}} = \sum_{i=1}^n E_{\mathcal{G}_i} = 1$$

Независимые случайные величины

Опр: \mathcal{G} и \mathcal{H} — независимые, если:

$$[\mathcal{G} = \alpha] \text{ и } [\mathcal{H} = \beta] \text{ — независ. } \forall \alpha, \beta$$

← удобное определение

Опр: $[\mathcal{G} \leq \alpha]$ и $[\mathcal{H} \leq \beta]$ — независимые $\forall \alpha, \beta$

← правильное определение

Пр:

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$$

$$\mathcal{G}_1(\langle \omega_1, \omega_2 \rangle) = f(\omega_1)$$

$$\mathcal{G}_2(\langle \omega_1, \omega_2 \rangle) = f(\omega_2)$$

Лемма:

Если A и B — независ., то \mathcal{X}_A и \mathcal{X}_B — тоже независ.

Теорема

Если ξ и η — независимы, то $E(\xi \cdot \eta) = E\xi \cdot E\eta$

$$\triangleright E_{\xi \cdot \eta} = \sum_{\omega} \omega \cdot P(\xi \cdot \eta = \omega) = \sum_{\omega} \sum_{\substack{i, j: \\ 1) i \cdot j = \omega \\ 2) i \in R_{\xi} \\ 3) j \in R_{\eta}}} \omega \cdot P(\xi = i \cap \eta = j) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\omega} \sum_i \sum_{\substack{j: i \cdot j = \omega}} i \cdot j \cdot P(\xi = i) \cdot P(\eta = j) = \sum_i i P(\xi = i) \cdot \sum_j j \cdot P(\eta = j) = \\ = E_{\xi} \cdot E_{\eta} \quad \blacktriangleleft$$

вексл. монета $\Omega = \{0, 1\}$ $p = \frac{1}{2}$

$$\xi(i) = 2 \cdot i$$

$$E_{\xi} = 1$$

и $\Omega = S_n$, $p = \frac{1}{n}$

$\xi = \#$ независим. точек

$$E_{\xi} = 1$$

Дисперсия

Опр.: Дисперсия:

$$D_{\xi} = \text{Var}(\xi) = E(\xi - E_{\xi})^2 \Leftrightarrow$$

$$E(\xi - E_{\xi}) = E_{\xi} - E(E_{\xi}) = E_{\xi} - E_{\xi} = 0$$

$$\Leftrightarrow E(\xi^2 - 2\xi E_{\xi} + (E_{\xi})^2) = E_{\xi}^2 - 2E_{\xi} \cdot E_{\xi} + (E_{\xi})^2 = E_{\xi}^2 - (E_{\xi})^2$$

Теорема

1. $D_{c\varphi} = c^2 \cdot D_{\varphi}$

2. $D(\varphi + \psi) = D_{\varphi} + D_{\psi}$, если φ и ψ — преобразования