

II. Подпространства, связанные с эндоморфизмом

1. $\mathcal{A} \in \text{End } V$, $V \supseteq U = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$. Докажите, что U инвариантно относительно \mathcal{A} тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}(x_1), \dots, \mathcal{A}(x_k) \in U$.
2. Инвариантно ли подпространство U пространства V относительно \mathcal{A} ? Если да, найдите матрицу оператора $\mathcal{A}|_U$ в каком-нибудь базисе:
 - а) $V = M_2(\mathbb{R})$, $U = M_2^+(\mathbb{R})$, $\mathcal{A}: X \mapsto X - X^T$;
 - б) $V = M_2(\mathbb{R})$, $U = M_2^-(\mathbb{R})$, $\mathcal{A}: X \mapsto X - X^T$;
 - в) $V = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f''' = 0\}$, $U = \{f \in V \mid f(1) = 0\}$, $\mathcal{A}: f \mapsto f(1 - x)$;
 - г) $V = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f''' = 0\}$, $U = \{f \in V \mid f(0) = f(1)\}$, $\mathcal{A}: f \mapsto f(1 - x)$;
3. Инвариантно ли подпространство U пространства \mathbb{R}^n относительно оператора \mathcal{A} , заданного в стандартном базисе матрицей:

а) $n = 3$, $U: x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$,
$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix};$$

б) $n = 4$, $U = \langle (4, 0, -1, 1)^T, (-2, 2, 3, 1)^T, (0, 4, 5, 3)^T \rangle$,
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

в) $n = 4$, $U = \langle (1, 1, 1, 1)^T, (1, -1, 3, 5)^T, (3, 2, 4, 5)^T \rangle$,
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Найдите все инвариантные подпространства оператора $\mathcal{A}(f) = e^{-1} \cdot f(x + 1)$ в вещественном пространстве $V = \langle e^x \cos x, e^x, e^x \sin x, e^{2x} \rangle$.
5. Найдите собственные значения и собственные подпространства линейных операторов в вещественном пространстве \mathbb{R}^n , заданных в стандартном базисе матрицами:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix};$ б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix};$ в) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix};$

г) $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix};$ д) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix};$ е) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$

6. Найдите собственные значения и собственные векторы линейных операторов в трёхмерном пространстве геометрических векторов:

а) $x \mapsto \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$; б) $x \mapsto (x, \mathbf{i})\mathbf{i}$; в) $x \mapsto \mathbf{i} \times x$.

7. Найдите собственные значения и собственные векторы линейных операторов в пространстве $\mathbb{R}[x]_n$:

а) $f \mapsto xf'$; б) $f \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$.

8. Пусть f — произвольный фиксированный вещественный многочлен, отличный от константы. Преобразование \mathcal{A} пространства $\mathbb{R}[x]$ сопоставляет произвольному многочлену его остаток от деления на f .

а) Докажите, что \mathcal{A} является линейным оператором, причём проектором. Проектором на какое подпространство?

б) Найдите все собственные значения и собственные векторы оператора \mathcal{A} ;

в) В подпространстве $\mathbb{R}[x]_3$ найдите собственный базис и запишите матрицу оператора \mathcal{A} в этом базисе, если 1) $f = x$, 2) $f = x^2 + 1$, 3) $f = (x - 1)^3$.

9. Операторы заданы матрицами в стандартном базисе. Выясните, какие из них диагонализуются над полем \mathbb{R} или над полем \mathbb{C} . Если оператор диагонализуем над \mathbb{R} , найдите собственный базис, соответствующую диагональную матрицу и спектральное разложение оператора:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

10* $\mathcal{A} \in \text{End } V$, $\dim V < \infty$. Докажите, что если $\text{Ker } \mathcal{A} \neq \text{Ker } \mathcal{A}^2$, то \mathcal{A} не диагонализуем.

11. Найдите $(n - 1)$ -мерные инвариантные подпространства оператора $\mathcal{A} \in \text{End } \mathbb{R}^n$, заданного матрицей в стандартном базисе:

а) $n = 3$, $\begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 5 \\ 4 & -9 & 9 \end{pmatrix}$; б) $n = 3$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$; в) $n = 4$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Указание: вспомните о связи U , U^0 и инвариантности.

12* Последовательность (x_n) задана рекуррентно $x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}x_{n-1}$, $x_0 = a \in \mathbb{R}$, $x_1 = b \in \mathbb{R}$. Докажите, что последовательность сходится и найдите её предел.

1. $\mathcal{A} \in \text{End } V$, $V \supseteq U = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$. Докажите, что U инвариантно относительно \mathcal{A} тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}(x_1), \dots, \mathcal{A}(x_k) \in U$.

1.

$$\triangleright \exists x_1, \dots, x_k - \text{базис}$$

$$\mathcal{A}(x_1 + \dots + x_k) = \mathcal{A}(x_1) + \mathcal{A}(x_2) + \dots + \mathcal{A}(x_k) \quad \blacktriangleleft$$

2. Инвариантно ли подпространство U пространства V относительно \mathcal{A} ? Если да, найдите матрицу оператора $\mathcal{A}|_U$ в каком-нибудь базисе:

а) $V = M_2(\mathbb{R})$, $U = M_2^+(\mathbb{R})$, $\mathcal{A}: X \mapsto X - X^T$;

б) $V = M_2(\mathbb{R})$, $U = M_2^-(\mathbb{R})$, $\mathcal{A}: X \mapsto X - X^T$;

в) $V = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f''' = 0\}$, $U = \{f \in V \mid f(1) = 0\}$, $\mathcal{A}: f \mapsto f(1-x)$;

г) $V = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f''' = 0\}$, $U = \{f \in V \mid f(0) = f(1)\}$, $\mathcal{A}: f \mapsto f(1-x)$;

а) $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$[\mathcal{A}|_U] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{т.е.} \quad \mathcal{A}|_U = 0$$

б) $U = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\mathcal{A}|_U] = (2)$$

B) $V = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f''' = 0\}$, $U = \{f \in V \mid f(1) = 0\}$, $\mathcal{A}: f \mapsto f(1-x)$;

$$V = \mathbb{R}[x]_2$$

$$U = (x-1) \mid a_x + b = a_x(x-1) + b(x-1)$$

$$U = \langle x(x-1), x-1 \rangle$$

$$\mathcal{A}(x(x-1)) = (1-x)(1-x-1) = (1-x)(-x) = x(x-1) \in U$$

$$\mathcal{A}(x-1) = x$$

$$x = a_x(x-1) + b(x-1) \text{ he nowhere} \Rightarrow x \notin U$$

r) $V = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f''' = 0\}$, $U = \{f \in V \mid f(0) = f(1)\}$, $\mathcal{A}: f \mapsto f(1-x)$;

$$V = \mathbb{R}[x]_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

$$U: a + b + c = c \Rightarrow a + b = 0 \quad \begin{array}{l} c - \text{const.} \\ b - \text{const.} \end{array}$$

$$a = -b$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ b \\ c \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$U(-x^2+x, 1)$$

$$\mathcal{A}(-x^2+x) = -(1-x)^2 + (1-x) = -x^2 + 2x - 1 + 1 - x = -x^2 + x \in U$$

$$[\mathcal{A}|_U] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{A}|_U = \mathcal{E}$$

3. Инвариантно ли подпространство U пространства \mathbb{R}^n относительно оператора \mathcal{A} , заданного в стандартном базисе матрицей:

а) $n = 3, U: x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix};$

б) $n = 4, U = \langle (4, 0, -1, 1)^T, (-2, 2, 3, 1)^T, (0, 4, 5, 3)^T \rangle, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$

в) $n = 4, U = \langle (1, 1, 1, 1)^T, (1, -1, 3, 5)^T, (3, 2, 4, 5)^T \rangle, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

а) $n = 3, U: x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix};$

$V = \mathbb{R}^3 \quad U$

Базис подпр-ва решений однородной СЛАУ это ФСР

$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$

$\exists t_2 \text{ и } t_3 - \text{свободы}$

$\Rightarrow x_1 = -2x_2 + x_3$

$U = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$Y = AX$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

и проверить нелиат ли в $U \Leftrightarrow$ коорд. упрн совпадают

$$-7 + 10 - 3 = 0 \quad \checkmark$$

$$3 - 4 + 1 = 0 \quad \checkmark$$

nodajun4

$$6) n = 4, U = \langle (4, 0, -1, 1)^T, (-2, 2, 3, 1)^T, (0, 4, 5, 3)^T \rangle, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$V = \mathbb{R}^4 \quad U = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{nodajun4}$$

UNU

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot 2 + I} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Найдите все инвариантные подпространства оператора $\mathcal{A}(f) = e^{-1} \cdot f(x+1)$ в вещественном пространстве $V = \langle e^x \cos x, e^x, e^x \sin x, e^{2x} \rangle_{\mathbb{R}}$.

$$f = (\overset{f_1}{f_1} \quad \overset{f_2}{f_2} \quad \overset{f_3}{f_3} \quad \overset{f_4}{f_4})^T$$

$$e^{-1} \cdot e^{x+1} \cos(x+1) = e^x \cos(x+1) = \underbrace{e^x \cos x \cos 1}_{f_1} - \underbrace{e^x \sin x \sin 1}_{f_3}$$

$$e^{-1} \cdot e^{x+1} = e^x = f_2$$

$$e^{-1} \cdot e^{x+1} \sin(x+1) = e^x \sin(x+1) = \underbrace{e^x \sin x \cos 1}_{f_3} + \underbrace{e^x \cos x \sin 1}_{f_1}$$

$$e^{-1} \cdot e^{2(x+1)} = e^{2x+2} = e \cdot \underbrace{e^{2x}}_{f_4}$$

$$[\mathcal{A}]_f = \begin{pmatrix} \cos 1 & 0 & \sin 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin 1 & 0 & \cos 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

$$[\mathcal{A}]_{(f_1, f_2, f_3, f_4)} = \begin{pmatrix} \cos 1 & \sin 1 & 0 & 0 \\ -\sin 1 & \cos 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

Т.к. f_1, f_3 линейно независимы, то

$$V = \langle f_1, f_3 \rangle \oplus \langle f_2 \rangle \oplus \langle f_4 \rangle$$

5. Найдите собственные значения и собственные подпространства линейных операторов в вещественном пространстве \mathbb{R}^n , заданных в стандартном базисе матрицами:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

д)

$$\chi(t) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0-t & 1 & 0 \\ -4 & 4-t & 0 \\ -2 & 1 & 2-t \end{vmatrix} = t^3 - 6t^2 + (4+8)t - 8 =$$

$$= t^3 - 6t^2 + 12t - 8 = (t-2)^3$$

$$\lambda = 2 \quad a(2) = 3$$

$$V_2 = \ker(A - 2E)$$

$$(A - 2E) \cdot X = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

\uparrow
3x2 - достигна

$$x_2 = 2x_1$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

9. Операторы заданы матрицами в стандартном базисе. Выясните, какие из них диагонализуются над полем \mathbb{R} или над полем \mathbb{C} . Если оператор диагонализуем над \mathbb{R} , найдите собственный базис, соответствующую диагональную матрицу и спектральное разложение оператора:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

а) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\chi_A = t^3 - 5t^2$$