Алгебра. КТ. Осенний семестр

IX. Подпространства и линейные многообразия

1. Решите СЛАУ над $\mathbb{R}$, найдите ФСР соответствующей ей однородной СЛАУ:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8; \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 20; \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 4; \end{cases}$
б) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 2; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 7; \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7; \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1; \end{cases}$
г) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 4; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2; \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 10; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2; \\ 11x_1 - 12x_2 + 17x_3 = 3; \end{cases}$
е) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5; \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7; \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18. \end{cases}$

Пусть U — подпространство решений соответствующей однородной СЛАУ. Найдите $\mathbb{R}^n/U$, где n — количество неизвестных в СЛАУ.

2. При каких значениях λ СЛАУ над $\mathbb{R}$

а) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1; \end{cases}$
б) $\begin{cases} (3-2\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = \lambda; \\ (2-\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 = 1; \end{cases}$

1) имеет единственное решение;

2) имеет бесконечно много решений;

3) имеет ровно 2 решения;

4) несовместна?

3. Составьте СЛАУ над $\mathbb{R}$, задающую линейную оболочку системы векторов:

а) $(1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $(1,2,3)^{\mathrm{T}}$;

б) $(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $(1,2,1,3)^{\mathrm{T}}$;

в) $(1,1,2,2)^{\mathrm{T}}$;

г) $(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $(1,2,1,3)^{\mathrm{T}}$, $(1,1,2,2)^{\mathrm{T}}$, $(1,1,1,3)^{\mathrm{T}}$;

д) $(0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$;

4. Найдите СЛАУ над $\mathbb{R}$, задающую линейное многообразие

$$L = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

5. Решите СЛАУ над полями $\mathbb{Z}_5$ и $\mathbb{Z}_7$:

$$\text{а)}\begin{cases} 3x+y+2z &= 1;\\ x+2y+3z &= 1;\\ 4x+3y+2z &= 1; \end{cases} \qquad \text{б)}\begin{cases} 3x+2y &= 1;\\ 3x+2y+z &= 2;\\ x+3y+4z &= 2. \end{cases}$$

6* Имеется СЛАУ над $\mathbb{Z}$

$$\begin{cases} \ldots x+\ldots y+\ldots z &= 0;\\ \ldots x+\ldots y+\ldots z &= 0;\\ \ldots x+\ldots y+\ldots z &= 0. \end{cases}$$

Матроскин и Шарик поочерёдно вписывают вместо многоточий числа. Матроскин ходит первым. Докажите, что он всегда может добиться существования у этой СЛАУ ненулевого целочисленного решения.

7. A и B — квадратные матрицы одинакового размера. Обязательно ли $\mathrm{rk}(AB) = \mathrm{rk}(BA)$?

8. Может ли при элементарных преобразованиях матрицы A измениться ранг матрицы A^2?

9* Пусть $a_{ij} = (i-j)^2$. Найдите ранг матрицы $A = (a_{ij})$ порядка $n \geqslant 3$.

10* Найдите наименьший возможный ранг вещественной квадратной матрицы n-го порядка, у которой все диагональные элементы равны нулю, а все остальные элементы положительны.