

$$1) (a) \quad yy' = x, \quad y = \sqrt{x^2 + c}$$

$$\sqrt{x^2 + c} \cdot \left((x^2 + c)^{\frac{1}{2}} \right)' = x$$

$$\sqrt{x^2 + c} \cdot \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + c}} = x$$

$$x = x \quad \checkmark$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, c > 0 \quad \text{u} \quad \sqrt{-c} < x < -\sqrt{-c}, \quad c \leq 0$$

$$(b) \quad y'' - 5y' + 6y = 0, \quad y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

$$y' = 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x}$$

$$y'' = 4C_1 e^{2x} + 9C_2 e^{3x}$$

$$4C_1 e^{2x} + 9C_2 e^{3x} - 10C_1 e^{2x} - 15C_2 e^{3x} + 6(C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}) = 0$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

$$2) (a) \quad y = x + c$$

$$y' = 1$$

$$(b) \quad y = x^2 + C_1 x + C_2$$

$$y'' = 2$$

$$3) (a) \quad y' = 2x\sqrt{y}$$

$$x \in \mathbb{R}, y \geq 0 \quad \mathcal{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$(b) \quad y' = \tan y$$

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$(c) \quad y' = \arcsin x$$

$$\mathcal{D} = [-1, 1] \times \mathbb{R}$$

$$(d) (1-x) dx + x^2 y dy = 0$$

$$g = \mathbb{R}^2$$



$$(e) g = \mathbb{R}_+^2 \setminus \{0\}$$

$$4) (a) y' = \cos^2 x$$

$$y = \int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C$$

$$(b) y' = 2 - y$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 - y$$

$$dy = (2 - y) dx$$

$$\int \frac{dy}{2-y} = -\int dx \quad \leftarrow \text{можно найти решение } y=2$$

$$\ln|2-y| = -x + C$$

$$|y-2| = e^{-x+C} \Leftrightarrow |y-2| = C \cdot e^{-x}$$

$$y = 2 + C \cdot e^{-x} \quad \text{и } y=2 \text{ также в решение}$$

$$(c) y' = y^2(y^2+1)$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2(y^2+1)$$

$$dy = y^2(y^2+1) dx$$

$$\frac{dy}{y^2(y^2+1)} = dx \quad / y=0$$

$$\int \frac{1}{y^2} dy - \int \frac{1}{y^2+1} dy = \int dx$$

$$\text{отв: } \begin{cases} -\frac{1}{y} - \arctan y = x + C \\ y = 0 \end{cases}$$

$$(d) \frac{x dx}{\cos^2 x} + \frac{dy}{\sqrt{9+y^2}} = 0$$

$$\int x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} du = dx \\ v = \tan x \end{array}$$

$$= x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x - \int \frac{d \cos x}{\cos x} = x \tan x - \ln |\cos x| + C$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{9+y^2}} = \ln |y + \sqrt{9+y^2}| + C$$

$$\ln (y + \sqrt{9+y^2}) = x \tan x + \ln |\cos x| + C$$

(e)

$$\frac{dx}{8+2x^2} + \frac{e^y dy}{\sqrt{4-e^{2y}}} = 0$$

$$\frac{1}{4} \arctan \frac{x}{2} + \int \frac{de^y}{\sqrt{4-e^{2y}}} = C$$

$$\frac{1}{4} \arctan \frac{x}{2} + \arcsin \frac{e^y}{2} = C$$

$$(f) \frac{dy}{y^2} = dx$$

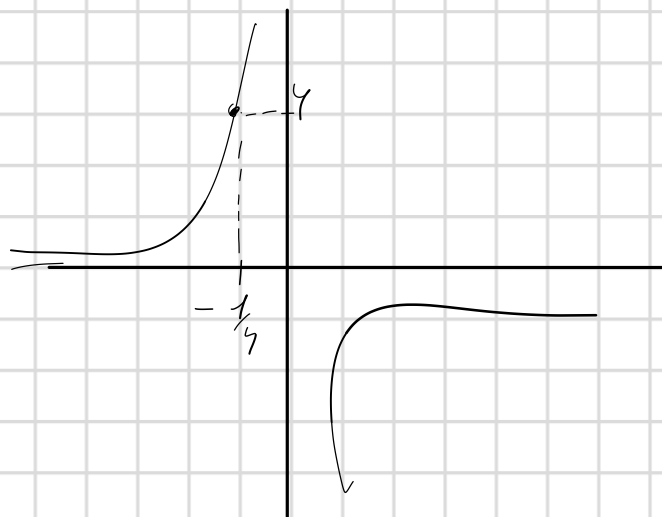
$$y(-\frac{1}{4}) = 4$$

$$-\frac{1}{y} = x + C$$

$$-\frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + C$$

$$\underline{C = 0}$$

$$-\frac{1}{y} = x, \quad x < 0$$



$$5) \quad dy = \frac{dx}{\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}}$$

$$y\left(\frac{9\pi^2}{16}\right) = -4$$

Найти x , —? (интегр. кривь пересека. OX)

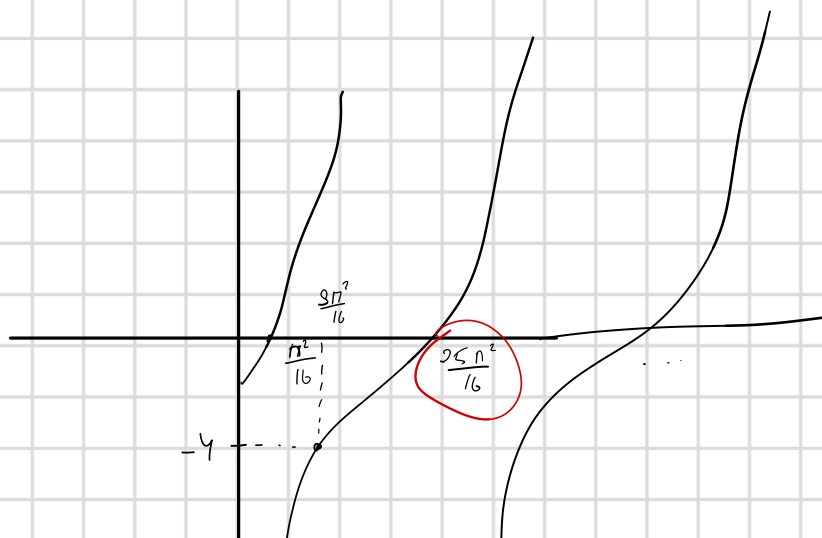
$$\int dy = \int \frac{dx}{\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}}$$

$$y = 2 \operatorname{tg} \sqrt{x} + C$$

$$-4 = 2 \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} + C$$

$$C = -2$$

$$y = 2 \operatorname{tg} \sqrt{x} - 2$$

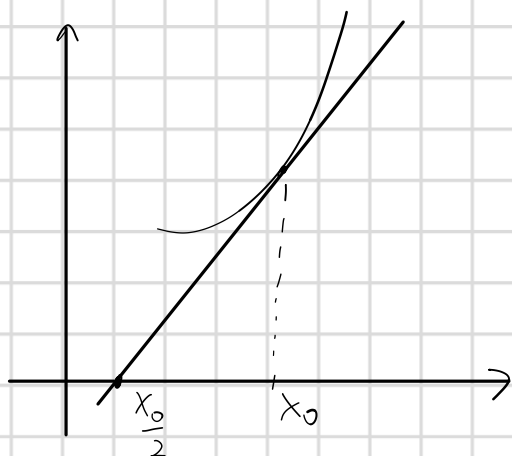


§2. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

2.1 В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак непрерывно подаётся вода (5 л/мин), которая перемешивается с имеющимся раствором. Смесь вытекает с той же скоростью. Сколько соли в баке останется через час?

2.2 Найти кривые, у которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу, вдвое меньшую абсциссы точки касания.

2.2



$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$0 = f'(x_0) \left(\frac{x_0}{2} - x_0 \right) + f(x_0)$$

$$f'(x_0) \cdot \frac{x_0}{2} = f(x_0)$$

$$y' \cdot \frac{x}{2} = y$$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \frac{2}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \quad | \int y=0$$

$$\ln|y| = 2 \ln|x| + C$$

$$y = Cx^2, \quad C, x \in \mathbb{R}$$

2.4 Тело охладилось за 10 мин от 100° до 60° . Температура окружающего воздуха поддерживается равной 20° . Когда тело остынет до 25° ? Примечание: принять, что скорость остывания (или нагревания) тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды.

$$\frac{dT}{dt} = K(T-20)$$

$$T(0) = 100$$

$$T(10) = 60$$

$$T(t_1) = 25, \quad t_1 = ?$$

$$\frac{dT}{K(T-20)} = dt$$

$$\frac{1}{K} \int \frac{d(T-20)}{T-20} = \int dt$$

$$\frac{1}{K} \ln|T-20| = t + C$$

$$\ln(T-20) = Kt + C$$

$$T-20 = e^{Kt}$$

$$T = 20 + Ce^{kt}$$

$$100 = 20 + Ce^0 \Rightarrow C = 80$$

$$60 = 20 + 80 \cdot e^{k \cdot 10} \Rightarrow e^{10k} = \frac{1}{2}$$

$$10k = \ln \frac{1}{2}$$

$$k = \frac{\ln \frac{1}{2}}{10} = -\frac{\ln 2}{10}$$

$$T = 20 + 80e^{-0,1 \ln 2 \cdot t}$$

$$25 = 20 + 80e^{-0,1 \ln 2 \cdot t}$$

$$\frac{1}{16} = e^{-0,1 \ln 2 \cdot t}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{t/10}$$

$$t = 40$$

$$t = 40$$

2.1 В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак непрерывно подаётся вода (5 л/мин), которая перемешивается с имеющимся раствором. Смесь вытекает с той же скоростью. Сколько соли в баке останется через час?

$$y(t + \Delta t) - y(t) = -\frac{1}{20} \Delta t (y(t) + 2)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} -\frac{1}{20} (y(t) + 2)^{\uparrow 0}$$

$$y' = -\frac{1}{20} y$$