

§ Мощность мн-ва

Опр.: мн-ва A и B наз. равномощными, если \exists биекция $A \leftrightarrow B$

Зам.: это отношение эквив-ти.

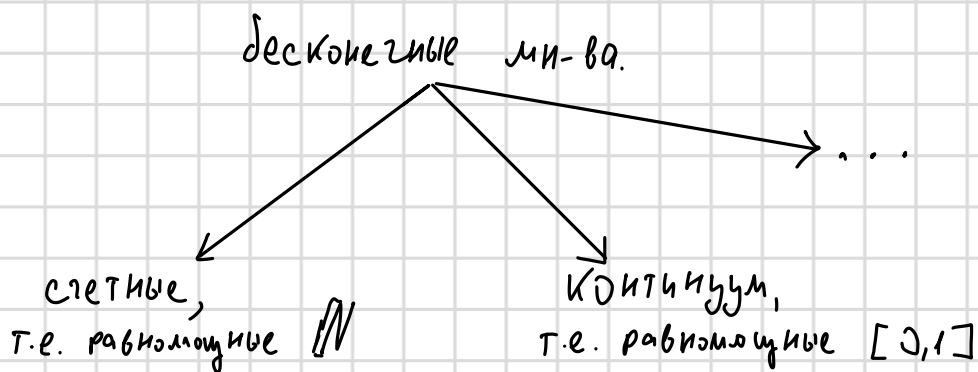
Опр.: Мощность мн-ва — это класс экв-ти по отн-ю равномощности

Пр.:

(1) Конечное мн-во.

$$|A| = \text{card } A = \text{число эл-ов}$$

(2)



Пр.: $\mathbb{Z} : \underset{1}{0}; \underset{2}{-1, 1}; \underset{3}{-2, 2}; \underset{4}{-3, 3}; \dots$

Опр.: Конечное или счетное = не более чем счетное

Св-ва счетных мн-в:

1. бескон-ое мн-во содержит счетное подмножество
2. бескон-ое подмн-во счетного мн-ва счетно
3. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ — счетно

$b \backslash a$	1	2	3	
1	(1,1) → (2,1)	
2	(1,2)	(2,2)
3	(1,3)	(2,3)

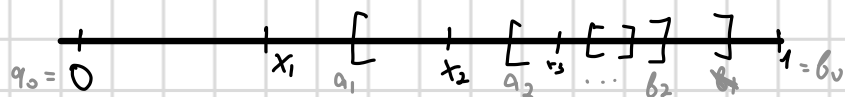
Следствие: \mathbb{Q} - счетно

4. Обозначение не более чем счетно (кон-ва ^{числа} \aleph_1) не более чем счетных мн-в \rightarrow не более чем счетное (представим в каждой строке по мн-ву и переставим их сверху вниз)

Теорема Кантора (о мощности отрезка):

Отрезок $[0, 1]$ не счетен

▷] Эnumерация: $x_n: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$



$\exists [a_1, b_1] \not\ni x; [a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]$

$[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$ на n -ом шаге (система вложенных отрезков)

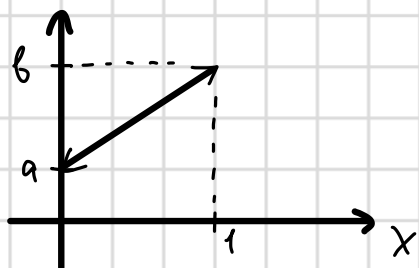
$\Rightarrow \exists x \in [a_n, b_n], \forall n \Rightarrow$ **противоречие** ◀

Следствие:

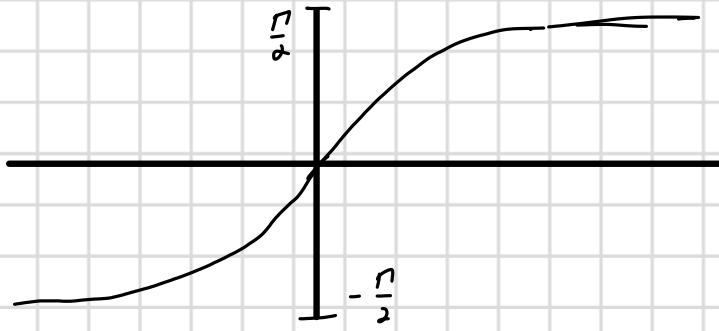
Мн-ва мощности континуума:

$[a, b], [a, b), (a, b], (a, b), \mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, A \setminus B$ (A -конт. B -счет)

$\gamma: [0, 1] \rightarrow [a, b]: g(x) = a + (b-a)x$



$$2) \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \quad \arctan x$$



$$3) [0,1] \rightarrow (0,1]$$

$$0 \rightarrow \frac{1}{2} \quad 1 \rightarrow 1$$

$$\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{4}$$

$$\vdots \rightarrow \vdots$$

$$\frac{1}{n} \rightarrow \frac{1}{n+1}$$

$$0 \neq x \neq \frac{1}{n} \rightarrow x$$

+
1