

# СДНФ, ДНФ

СДНФ

с помощью

"и" "или" "не"

	f
0 1 0 1	1
1 1 0 0	1
...	0
1 1 0 1	0
1 1 1 1	1

$$(\vec{x} = 0101) \vee (\vec{x} = 1100) \vee (\vec{x} = 1111)$$

декарт равенство 1 1

нет букв отриц. формул

$$(x_1 = 0 \wedge x_2 = 1 \wedge x_3 = 0 \wedge x_4 = 1) =$$

$$= (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge x_4) \vee (\dots) \vee (\dots)$$

СДНФ - единственна

ДНФ

$$(x \wedge \bar{y} \wedge \dots) \vee (\dots) \vee (\dots)$$

## Полном Язык ки ки

$\{1, \wedge, \oplus\}$  - базис (язык ки ки)

$$1) \neg x = x \oplus 1$$

$$2) x \wedge y = x \wedge y$$

$$3) x \vee y = \text{де мортан } (\wedge, \neg)$$

а л в л а л с  $\oplus$  а л в  $\oplus$  а  $\oplus$  1 - типич. формула это в базиса

## Свойства П.ЖС:

1)  $1 \rightarrow \cdot$        $a \vee a = a$

2)  $\oplus \rightarrow +$

3)  $\wedge$  и  $\oplus$  — ассоц.; коммут.-кб; дистрибу-но

4)  $a \wedge a = a$

5)  $a^k = a$ ,  $k \geq 1$

6)  $a \vee b \oplus a \vee b = 0$

7)  $a \oplus a = 0$

8)  $a \wedge (b \oplus c) = ab \oplus ac$

$$(a \oplus b) \wedge (a \oplus c \oplus 1) = \cancel{1} \oplus ab \oplus ac \oplus bc \oplus \cancel{1} \oplus b$$

СДНФ  $f = (a \wedge \bar{b} \wedge c) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c})$

приводим к жонглеру  $\neg f = \neg(a \wedge \bar{b} \wedge c) \wedge \neg(\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c}) =$

через дистрибу  $\neg f = (a(b \oplus 1)c \oplus 1)((a \oplus 1)b(c \oplus 1) \oplus 1)$

$$f = ((a(b \oplus 1)c \oplus 1)((a \oplus 1)b(c \oplus 1) \oplus 1)) \oplus 1$$

## Однотонность ПЖС

ноз. ↓

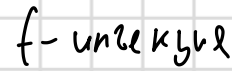
Привести к единому знаменателю:

1) раскрыть все скобки

2) все отриц. ст. сокращены

3) нет степеней:  $a^2 bc \rightarrow abc$

?



$g: A \rightarrow f(A)$   $g$ -инъекция  
(выберем связь)

$$\left. \begin{array}{l} a = b + c \\ a = b \end{array} \right\} \Rightarrow c = 0$$

1)

В - <sup>мн-во</sup> Прыбе г. Полюны. Жел.

f - интеллект?

$f_1$   $\rightarrow$   $\pi$ .  $\pi$   $\leftarrow$   $f_2$

2) <sup>зонация</sup> 147610  $|A| = |B|$

a	b	c	d	
x	✓	✓	x	→ bc
✓	✓	✓	✓	→ abcd
x	x	x	✓	→ d
x	x	x	x	→ a

коп-во разн.  $n$   
случаевых: 2

ПЖС - составлены  $2^{2^n}$

Кол-во ПЖС  $2^{2^n}$  и кол-во д.н. ф-ий  $2^{2^n} \rightarrow$  для  
каждой д.н. ф-ии существует ПЖС

## Критерии Поста

из  $\{ \wedge, \vee \}^F$  построить ф-ии

алг-м:

1) <sup>примем</sup> сб-во  
для ф-ии

$$f(000) = 0$$

$$f(x, x) = 0 \text{ как пример сб-ва}$$

2) все ф-ии из  $F$  одн <sup>знач</sup> сб-ом

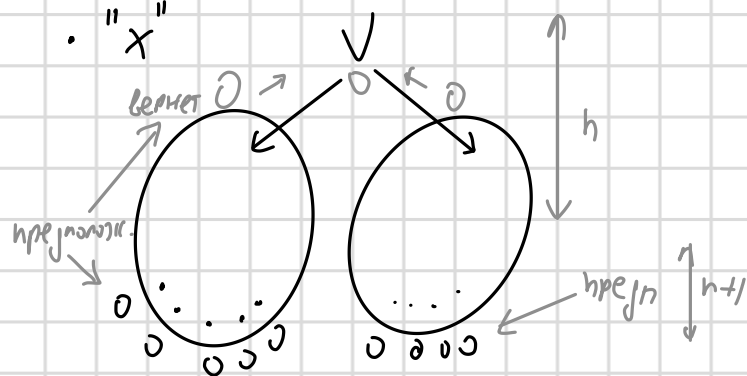
3)  $\forall$  ф-ия замыкает с помощью  $F$   
одн. сб-ом

4)  $\exists$  ф-ия не одн. сб-ом

$$\bullet f(000) = 0$$

$$\bullet 0 \cap 0 = 0 \quad \text{д.н.о} \quad \vee\text{-тоже } \wedge \text{ ф-ии}$$

• "x"



Зок-во по  $\wedge, \vee, \neg$

$$\bullet \text{ не одн. сб } \neg x \text{ т.к. } \neg(0, 0, \dots, 0) = 1$$

Если всего п.2)  $\rightarrow$  нет то проверим сб-во и если все  
"да" то это доказ

## Свойства:

1)  $F_0$  - ф-ии сохраняющие 0  $f: f(000) = 0$

$$\text{Пр.: } \wedge, \vee \in F_0 \mid \neg, \neg x, =, \downarrow \notin F_0$$

доказано по индукции

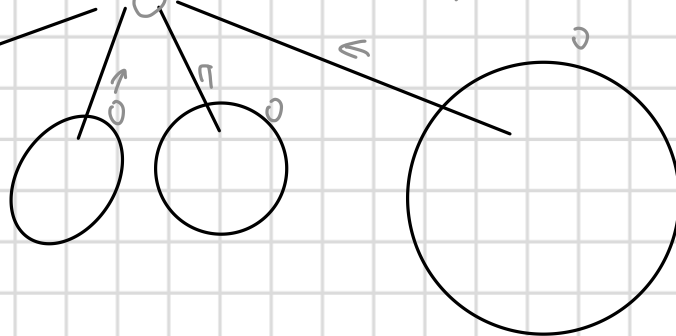
{ ... }

"x"

$$f(\dots) \Rightarrow f(0\dots 0) = 0$$

поэтому  
тогда

доказано  
по индукции  
= если  
для всех



2)  $F_1$  - функционал

$$f: f(1\dots 1) = 1$$

Пр.:  $\forall \wedge \vee \in F_1 \mid \neg, \oplus, \downarrow, \oplus \notin F_1$

доказано так же по индукции

3)  $F_5$  - самодвойственные

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \neg f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$$

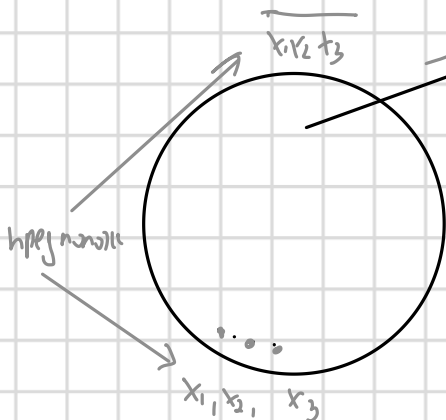
{ ... }

"x"

$$f(\dots)$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$$

т.к. f - самодв.  
то она всегда  
отрицание



Пр.:  $\bar{x}, <, >, \oplus_3 \in F_5$

$\downarrow \notin F_5$

#### 4) $F_2$ - линейные

$f$ : л. л. л.  $f$  - линейна (нет 2 строк)  $ab, \vee, \wedge, < >$

$$\oplus_n, a, b \in F_2$$

л. л. л. где:

$$a \wedge b = ab$$

$$a \vee b = ab \oplus 1 = (a \oplus 1) \cdot (b \oplus 1) = ab \oplus a \oplus b \oplus 0 = ab \oplus a \oplus b$$

$$< > = ab \oplus bc \oplus ac$$

но из-за того что нет 2 строк, то не все возможные состояния разрешены. Это означает  $\Rightarrow$   $f$  не является функцией

#### 5) $F_m$ - монотонность $\vec{x} \leq \vec{y} \Rightarrow f(\vec{x}) \leq f(\vec{y})$

доказано:  $\forall x, y: \vec{x} \leq \vec{y} : \forall i: x_i \leq y_i$

$$00 \leq 11$$

$$01 \not\leq 10$$

$$10 \geq 00$$

$\Rightarrow$   
вектора не сравнимы

0	$\leq$	0
0	$\leq$	1
1	$\leq$	1
1	$\not\leq$	0

как опр. мон-ти:

a	b	f	
0	0	0	0
0	1	1	0 = 1
1	0	1	0
1	1	1	1

доказано замкнутость л. л. л. и л. л. л.

$\Pi_p: <, >, \vee, \wedge \in F_M$

$\downarrow, \uparrow, \oplus, \neg \notin F_M$

$a \quad b \quad \oplus$

0 0 0

0 1 1

1 0 1

1 1 0

$x = 10 \quad f(x) = 1$

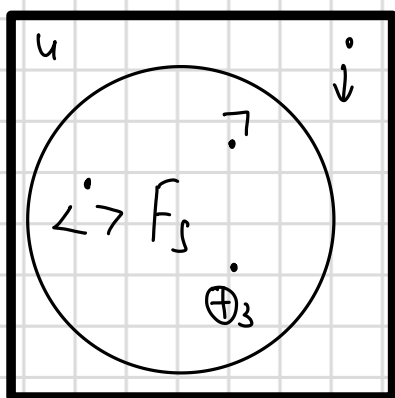
$y = 11 \quad f(y) = 0$

$x \leq y \quad f(x) > f(y)$

наоборот

$\{ \oplus_3; \neg; < > \} \rightarrow \downarrow$

т.к. все  $f$ -чи самодвойственны а  $\downarrow$  нет



- если все  $\varphi$ -чи левы в 1 классе то ответ нет
- иначе да

$\Pi_p: \text{гок-то же } \Pi_{JK}: \{ \neg; \oplus, \wedge \}$

$F_0 = \neg$  не отриц

$F_1 = \oplus$  не отриц

$F_L = \wedge$  не отриц

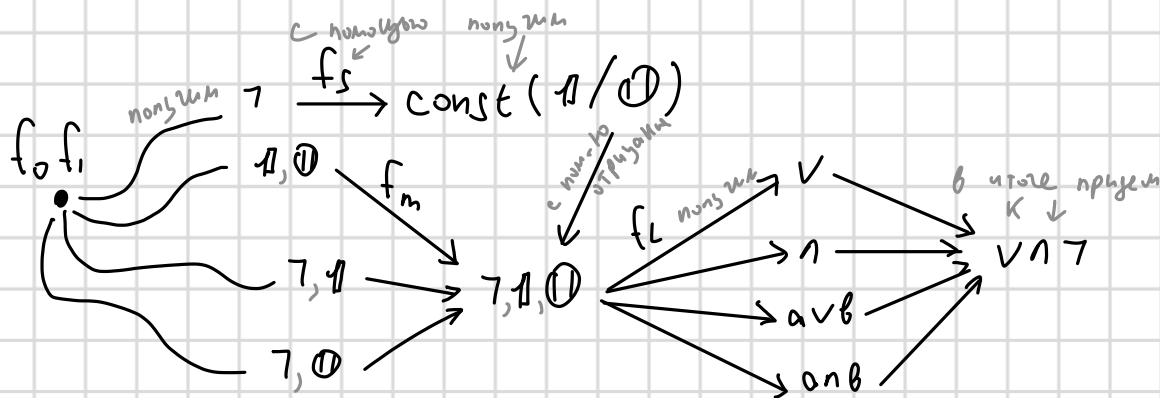
$F_S = \wedge$  не отриц

$F_M = \oplus$  не отриц в  $F_i$

# Теорема Поста

$$F = \{ \dots \}$$

$f_0 \quad f_1 \quad f_5 \quad f_m \quad f_L$



$$f_0(0000) = 1$$

$$f_0(1111) = 0 \quad / \quad f_0(1111) = 1$$

$$\forall g(x) = f_0(xxxx)$$

$$1) \quad g(x) = \neg x$$

$$2) \quad g(x) = \neg \neg x$$

$$f_1(1111) = 0$$

$$1) f_1(0000) = 0 \quad / \quad 2) f_1(1111) = 0$$

$$\forall g(x) = f_1(xxxx)$$

$$1) \quad g(x) = 1$$

$$2) \quad g(x) = \neg$$

- non-zeres:
- $a_1) \quad \neg, 1 \rightarrow \neg 1 = 0$
  - $a_2) \quad \neg, x \rightarrow \neg x$
  - $b_1) \quad 1, 1$
  - $b_2) \quad \neg, 1 \rightarrow \neg 1 = 0$



$$\exists x \leq y \quad f(x)=1 \quad f(y)=0$$

$$f(001101) = 1$$

$$g(x) = f(1, 0, 1, 1, x, 1)$$

$$f(001111) = 0$$

$$g(0) = 1$$

$$g(1) = 0$$

соседи  
1... 10... 0

