Отображения

1. в $\mathbb{R}$ метрика $\rho(x,y) = |x-y|$

$f(x) = a \cdot |x|$

$\rho(f(x), f(y)) \leq q \cdot \rho(x,y), \ 0<q<1$

$\rho(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = \big| a|x| - a|y| \big| = |a| \, |x-y| = \underbrace{|a|}_{q} \rho(x,y)$

$\Rightarrow \quad -1 < a < 1$

2. (а) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

$\rho(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = |\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+y^2}| = \dfrac{|\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+y^2}| \cdot |\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}|}{|\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}|} =$

$= \dfrac{x^2 - y^2}{|\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}|} < \dfrac{x^2 - y^2}{x+y} = x - y$

$\dfrac{(a-b)(a+b)}{(a+b)} = \dfrac{a^2 - b^2}{a+b}$

$x - y \leq q \cdot \rho(x,y) = q \cdot |x-y|$

т.е. $x - y \leq q \, |x-y|$, верно при $q = 1$

Нер-во Лагранжа: $\|f(b) - f(a)\| \leq \sup\limits_{\xi \in (a,b)} \|f'(\xi)\| \cdot \|b - a\|$

$\forall \ (\sqrt{1+x^2})' = \dfrac{2x}{2(1+x^2)^{1/2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \xrightarrow{!} 1 \quad \Rightarrow$ на $\mathbb{R}$ не сжимающее

$\forall$ на $[-a, a]$

должно < 1

$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \, |x-y| \leq \sup |f'(\xi)| \, |y-x|$

$\forall \left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0 \quad \Rightarrow f' \uparrow$

$\Rightarrow$ sup будет на границе $(b \ \ a)$ $\Rightarrow q = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}} < 1$

(б) $\cos x$

на $\mathbb{R}$ не сжим т.к. $\exists \, (\cdot) : (\cos x)' = 1$

∇ $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$

но $\sup = 1$ $\Rightarrow \left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon; \frac{3\pi}{2}-\varepsilon\right)$ и будет сжимающее

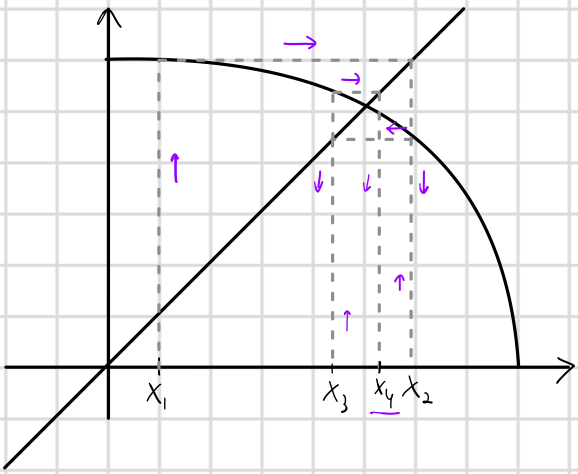
(в) $x/2$ на $[1, +\infty)$ с $\rho(x,y) = |\ln x - \ln y|$

$$\left|\ln\frac{x}{2} - \ln\frac{y}{2}\right| \le q\,|\ln x - \ln y|$$

$$|\ln x - \ln 2 - \ln y + \ln 2| \le q\,|\ln x - \ln y|$$

$|\ln x - \ln y| \le q\,|\ln x - \ln y|$ верно только при $q = 1$ $\Rightarrow$ нет

3. $\cos x = x$



4. $x^3 + 2x - 5 = 0$ на $[1, 2]$

т.к. $f(1) < 0$ и $f(2) > 0$ $\Rightarrow \exists$ корень

$x = \frac{5 - x^3}{2}$ и проверить что сжим.

∇ $\left(\frac{5-x^3}{2}\right)' = -\frac{3}{2}x^2 > 1$ (по мод) $\Rightarrow$ не сжим.

по-другому: $x = \sqrt[3]{5-2x}$

∇ $\left((5-2x)^{1/3}\right)' = \frac{-2}{3\cdot(5-2x)^{2/3}}$ ← монотон и непр на $[1,2]$

∇ $f'(2) = 2/3 < 1$ $\Rightarrow$ сжим.

Сжим. отобр: $x_n = \frac{5 - x_{n-1}^3}{2}$, $x_1 = 3/2 \in [1, 2]$

5.

$$f:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}0{,}2x+0{,}1y\\-0{,}3x+0{,}4y\end{pmatrix}$$ сжим. на $\mathbb{R}^2$?

Нер-во Лагранжа: $\|f(b)-f(a)\|\leq\sup\limits_{\varphi\in(a,b)}\|f'(\varphi)\|\cdot\|b-a\|$

$$\left\|\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}1\\-0{,}3 & 0{,}4\end{pmatrix}\right\|\leq(0{,}2^2+0{,}1^2+0{,}3^2+0{,}4^2)^{1/2}<1\Rightarrow \text{да}$$

матрица Якоби

6.

$$\begin{cases}x=2u+e^v-1\\y=v+e^u-1\end{cases}$$

? диффеоморфизм $U(0,0)\longleftrightarrow V(0,0)$

Найти $f'(0,0)$ где $f:(x,y)\mapsto(u,v)$

Т. об обратимости

$$J=\begin{pmatrix}x'_u & x'_v\\y'_u & y'_v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & e^v\\e^u & 1\end{pmatrix}\Bigg|_{(0,0)}=\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix},$$

$\det\ldots=1\neq0\Rightarrow$
$\Rightarrow$ обратима $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ диффеоморфизм

1-й способ $f'(0,0)$

$$\begin{cases}1=2u'_x+\overset{1}{e^v}\cdot v'_x\\0=2u'_y+\overset{1}{e^v}\cdot v'_y\\0=\overset{1}{e^u}\cdot u'_x+v'_x\\1=\overset{1}{e^u}\cdot u'_y+v'_y\end{cases}=\begin{array}{cccc|c}u'_x & u'_y & v'_x & v'_y & \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}2&0&1&0&1\\0&2&0&1&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\end{array}\right)$$

2-й способ:

$$\mathcal{J}_{f^{-1}} = (\mathcal{J})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{J}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{matrix} u'_x & u'_y \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} v'_x & v'_y \end{matrix} \end{array}$$