Поле комплексных чисел

$\mathbb{R}$

$\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$

$(a,b) + (c,d) = (a+c,\ b+d)$

$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd,\ ad + bc)$

$\langle \mathbb{R}^2, +, \cdot \rangle$ $\quad (0,0) - e^{+} \quad (1,0) - e^{\cdot}$

$(a,b)(1,0) = (a,b)$

$(1,0)(c,d) = (c,d)$

Докажем $(a,b)(c,d) = (c,d)(a,b)$

$\triangleright$ $(ac - bd, ad + bc) = (ca - db, cb + da)$ $\triangleleft$

$\Rightarrow$ коммутативность есть

Док-ть ассоциативность
и дистрибутивность !

Док-во (любой ненулевой эл. обратим):

$\underset{z}{(a,b)}(x,y) = (1,0)$

$(a,b)(x,y) = (ax - by, ay + bx) = (1,0)$

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ ay + bx = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} ax - by = 1 & /\cdot(-b) \\ bx + ay = 0 & /\cdot a \end{cases}$$

чтобы выр x
$/\cdot a$
$/\cdot(-b)$

$b^2y + a^2y = -b$

$y(a^2+b^2) = -b$

$y = \frac{-b}{a^2+b^2} \qquad x = \frac{a}{a^2+b^2}$

$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

$\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел

Изоморфное вложение

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ \Psi & & \Psi \\ x & \mapsto & (x,0) \end{array} \Rightarrow \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

$(0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$

$(0,1)^2 = -1 \qquad (0,1) = i \qquad i^2 = -1$

$$(0,-1)(0,-1)=(-1,0) \Longleftrightarrow (-i)^2=-1$$

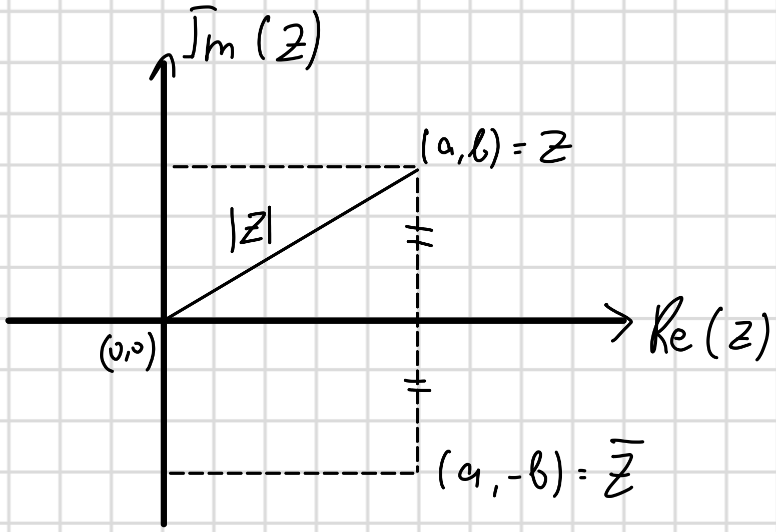
$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=a\underset{1}{(1,0)}+b\underset{i}{(0,1)}=a+b\cdot i=z$$

алгебраическая форма записи

$a=\mathrm{Re}(z)$ вещ-ая часть

$b=\mathrm{Im}(z)$ мнимая часть

$\overline{z}=a-b\cdot i$ Комплексное сопряжение



$$z+\overline{z}=a+bi+a-bi=$$
$$=2a=2\mathrm{Re}(z)$$

$$z\cdot\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=$$
$$=a^2-(bi)^2=a^2+b^2=$$
$$=|z|^2$$

$$z\in\mathbb{R} \Longleftrightarrow \overline{z}=z \qquad |z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\overline{}:\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}$$
$$z\mapsto\overline{z}$$

$\overline{(z_1+z_2)}=\overline{z}_1+\overline{z}_2$ Комплексное сопряжение это

$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2$ автоморфизм $\mathbb{C}$

$$\overline{(a+bi)(c+di)}=\overline{(ac-bd)+i(ad+bc)}=(ac-bd)-i(ad+bc)$$

$$(a-bi)(c-di)=(ac-bd)-i(ad+bc)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}$$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$|z| = \rho$

$(1+i)^{2024}$

$$a+bi = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i\right) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$

$$= \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$\varphi = \arg(z) \quad \varphi \in \Pi$

$\sin(\varphi+\psi) = \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi$

$$\boxed{\rho e^{i\varphi} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$ переход в тригц

$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$\rho \neq 0: \quad \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$

идея док-ва:

$e^x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \dots$

$e^0 = 1$

$(e^x)' = e^x = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots$

$e^0 = 1 = a_1 \qquad a_2 = \frac{1}{2} \qquad a_3 = \frac{1}{2\cdot 3} \qquad a_n = \frac{1}{n!}$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots$$

Пр.: $\frac{1^{=b_1}}{1-x_{=q}} = 1+x+x^2+x^3$

$x = 0: \quad 1 = 1$ а тут не работает!! а в sin и cos работает

$x = -1: \quad \frac{1}{2} = 1-1+1-1+1\dots$

$$\sin x = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \ldots$$

$$] \; x = 0 \Rightarrow b_0 = 0$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$\cos 0 = b_1 + b_2 \overset{0}{\overset{\shortparallel}{x}} + b_3 \overset{0}{\overset{\shortparallel}{x^2}} \Rightarrow b_1 = 1$$

$$b_2 = 0 \qquad b_3 = \frac{-1}{3!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots$$

$$\cos x = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

$$c_0 = 1$$

$$c_1 = 0 = c_3 = c_5$$

$$c_2 = -\frac{1}{2!} \qquad c_4 = \frac{1}{4!}$$

$$\cos x = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots$$

$$e^x = e^{i\varphi} = 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - i \cdot \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i\frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} \ldots =$$

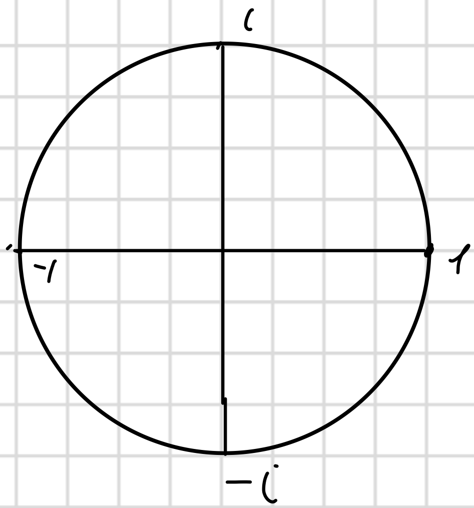
$$= \underbrace{\left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} \ldots\right)}_{\cos\varphi} + i\underbrace{\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \ldots\right)}_{\sin\varphi}$$

$i^0 = 1 \qquad i^4 = 1$

$i^1 = i \qquad i^5 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$



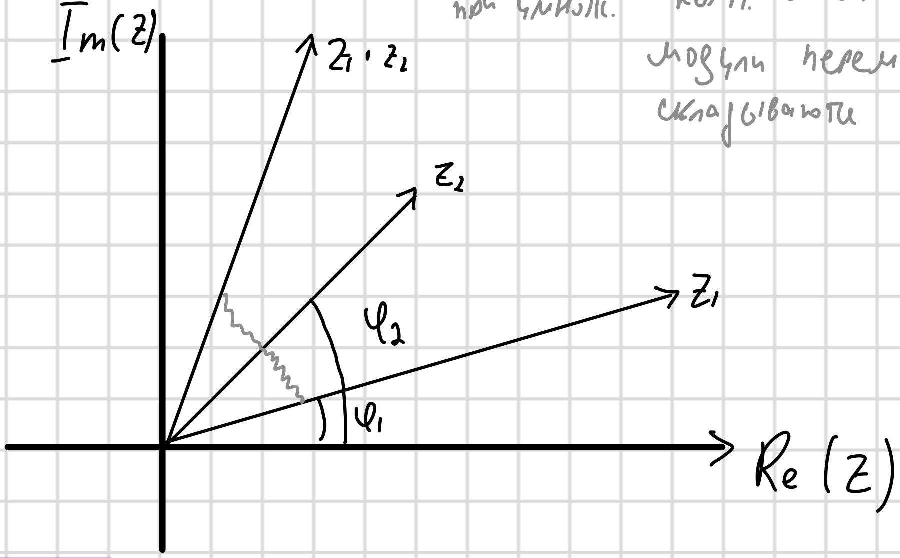
$$e^{i\pi} = -1$$

$$z_1 = \rho_1 (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1) = \rho_1 e^{i\varphi_1}$$

$$z_2 = \rho_2 (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2) = \rho_2 e^{i\varphi_2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = \rho_1 \rho_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$$

при множ. комп. чисел
модулі перемножаються, аргументи складаються



формула муавра:

$$z^n = (\rho(\cos\varphi + i \sin\varphi))^n = \rho^n (\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi))$$

$$(1 + i \cdot 1)^{2024} = \left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^{2024} = 2^{1012}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right)^{2024} =$$

$$= 2^{1012}\left(\cos\left(\underbrace{\frac{2024\pi}{4}}_{506\pi}\right) + i \cdot \sin\left(\underbrace{\frac{2024\pi}{4}}_{506\pi}\right)\right) = 2^{1012}(\cos 0 + i \sin 0) =$$

$$= 2^{1012}$$

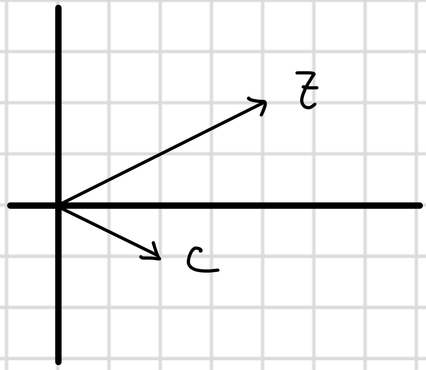
$$z = (\rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)) \quad : \quad \sqrt[n]{z} = c \in \mathbb{C}$$

$$c^n = z$$

$$\exists\, c = r(\cos\psi + i \sin\psi) \quad \Big| \; ^n$$

$$c^n = r^n (\cos(n\psi) + i \sin(\psi n)) = \rho(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

$$\rho = r^n$$



$n\psi = \varphi + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}$

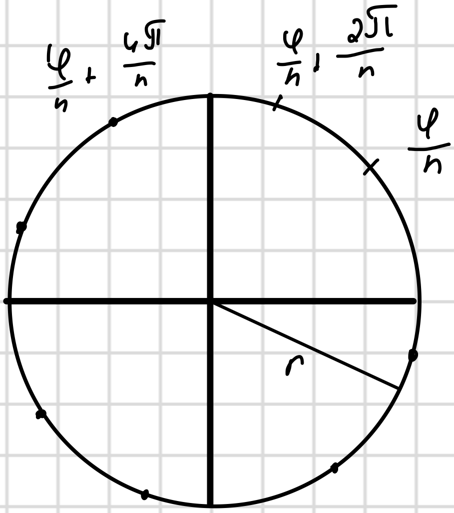
арифм корень

$r = \sqrt[n]{\rho} \qquad \psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$

$C = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos \dfrac{\varphi+2\pi k}{n} + i \cdot \sin \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$

K=

Корни = $0, 1, 2 \ldots n-1$



Вывод: корней комплексного числа всего n штук и они располагаются в вершинах прав. n-угол-ка

$\sqrt[2]{1}$: $1, -1$

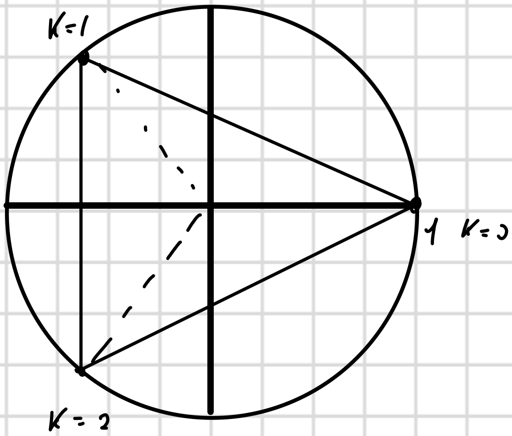
$\sqrt[4]{1}$: $1, -1, i, -i$

$\sqrt[3]{1}$: $1 = 1 + 0 \cdot i = 1(\underbrace{1}_{\cos\varphi} + \underbrace{0}_{\sin\varphi} \cdot i) = 1(\cos 0 + i \sin 0) = 1$

$K=0$: $\cos \dfrac{0 + 2\pi \cdot 0}{3} + i \cdot \sin\left(\dfrac{0+2\pi \cdot 0}{3}\right) = 1$

$K=1$: $\cos \dfrac{0+2\pi \cdot 1}{3} + i \cdot \sin \dfrac{0 + 2\pi \cdot 1}{3} = -\dfrac{1}{2} + i \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$K=2: \quad \cos \frac{0+2\pi\cdot 2}{3} + i \cdot \sin \frac{0+2\pi\cdot 2}{3} = -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$



$$\sqrt[n]{1} = \left\{ e^{\frac{i\cdot 2\pi K}{n}} \in \mathbb{C} \mid K = 0, 1 \dots n-1 \right\}$$

$$e^{\frac{i\cdot 2\pi K_1}{n}} \cdot e^{\frac{i\cdot 2\pi K_2}{n}} = e^{\frac{i\, 2\pi (K_1+K_2) \bmod n}{n}}$$

$K=0 \quad e^0 = 1$ ← нейтральный

$$\left(e^{i\frac{2\pi K}{n}}\right)^{-1} = e^{i\frac{2\pi(n-K)}{n}}$$ ← обратный

$$\sqrt[n]{1} = \left\{ e^{\frac{i\cdot 2\pi K}{n}} \in \mathbb{C} \mid K = 0, 1 \dots n-1 \right\} \overset{\text{мн-во}}{=} \mathcal{M}_n = U_n$$

Группа корней из 1-цы n-ой степени

$|\mathcal{M}| = n \qquad \mathcal{M}_n \simeq \mathbb{Z}_n$

$$\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \} = \{ e^{i\varphi} \} \simeq \overset{\text{группа углов}}{\mathbb{T}}$$

$$e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2) \bmod 2\pi}$$

$\sin 3\varphi$

$$(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi$$

$$(\cos\varphi)^3 + 3(\cos\varphi)^2(i\cdot\sin\varphi) + 3\cos\varphi(i\cdot\sin\varphi)^2 + (i\cdot\sin\varphi)^3$$

$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi \cdot \sin^2\varphi$

$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi \cdot \sin\varphi - \sin^3\varphi = 3(1-\sin^2\varphi)\sin\varphi - \sin^3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$