СДНФ, ДНФ

СДНФ

С помощью „¬" „∧" „∨"

	f
0 1 0 1	1
1 1 0 0	1
. . . .	0
1 1 0 1	0
1 1 1 1	1

$(\vec{x} = 0101) \vee (\vec{x} = 1100) \vee (\vec{x} = 1111)$

берем равенство 1

$(x_1 = 0 \wedge x_2 = 1 \wedge x_3 = 0 \wedge x_4 = 1) =$

$= (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge x_4) \vee (\ldots) \vee (\ldots)$

нет двух один. формул

СДНФ – единственна

ДНФ

$(x \wedge \bar{y} \wedge ..) \vee (\ldots) \vee ()$

Полином Жегалкина

$\{ 1, \wedge, \oplus \}$ – базис (жегалкина)

1) $\neg x = x \oplus 1$

2) $x \wedge y = x \wedge y$

3) $x \vee y =$ де морган $(\wedge, \neg)$

$a \wedge b \wedge a \wedge c \oplus a \wedge b \oplus a \oplus 1$ – типич. формула этого базиса

Свойства П.Ж.С.:

1) $\wedge \to \cdot$ $a\,b\,a\,c$

2) $\oplus \to +$

3) $\wedge$ и $\oplus$ — ассоц.; коммут-ны; дистриб-но

4) $a \wedge a = a$

5) $a^k = a$, $k \geq 1$

6) $abc \oplus abc = 0$

7) $a \oplus a = 0$

8) $a \wedge (b \oplus c) = ab \oplus ac$

$(a \oplus b) \wedge (a \oplus c \oplus 1) = \cancel{a} \oplus ab \oplus ac \oplus bc \oplus \cancel{a} \oplus b$

СДНФ $f = (a \wedge \bar{b} \wedge c) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c})$

$\neg f = \neg(a \wedge \bar{b} \wedge c) \wedge \neg(\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c}) =$

приводим к Жегалкину через дизъюнкц

$\neg f = (a(b \oplus 1)c \oplus 1)((a \oplus 1)b(c \oplus 1) \oplus 1)$

$f = ((a(b \oplus 1)c \oplus 1)((a \oplus 1)b(c \oplus 1) \oplus 1)) \oplus 1$

Однозначность ПЖ

ноз. v

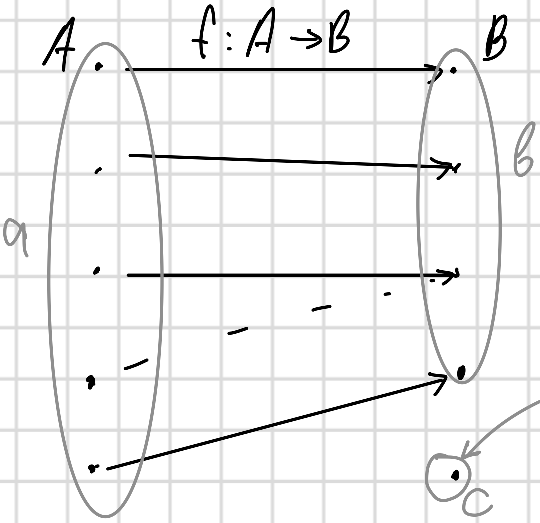
Приведенный знак:

1) раскрыты все скобки

2) все один. слаг.. сокращены

3) нет степеней: $a^{2}bc \to abc$

Док-во единственности П.Ж.



f - инъекция

$|A| = |B| \Rightarrow$ f - биекция ?

$g: A \to f(A)$ g - биекция

(выбросили сюръекцию)

g - биекция т.к. $|A| \leq |B|$

$$\left.\begin{matrix} a = b + c \\ a = b \end{matrix}\right\} \Rightarrow c = 0$$

Теорема которое доказывается сейчас

1)

$\exists$ A - все булевые ф-ии

$\exists$ B - мн-во Привед. Полином. Жег.

берем бул. ф-ю f → строим П.Ж. для f

f - инъекция?

$f_1 \to$ П.Ж.

$f_2 \to$ П.Ж.

нельзя 2 ф-ии отобразить в П.Ж. (как факт)

$\Rightarrow$ f - инъекция

2) докажем нужно $|A| = |B|$

$|A| = 2^{2^n}$ 2^n - длина вектора

a	b	c	d	
×	✓	✓	×	→ bc
✓	✓	✓	✓	→ abcd
×	×	×	✓	→ d
×	×	×	×	→ 1

Кол-во разл. слагаемых: 2^n

ПЖС — слагаемых 2^{2^n}

Кол-во ПЖС 2^{2^n} и кол-во бул. ф-ий 2^{2^n} → все

Каждой бул. ф-ии соотв. единственный ПЖС

Критерии Поста

из $\{\wedge \; \vee\}$ "F" придумать ф-ии

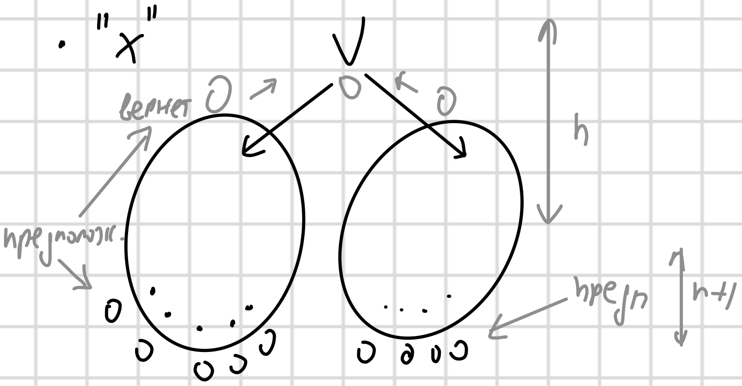
алг-м:

1) (придумываем) св-во все ф-ии $f(000)=0$

$f(x,x)=0$ как пример св-ва

2) все ф-ии из F обл. (этим) св-ом
3) ∀ ф-ия заданная с помощью F обл. св-ом
4) ∃ ф-ия не обл. св-ом

- $f(000)=0$
- $0 \wedge 0 = 0$ (верно) V-тоже удовл
- "x"



док-во по индукции

- не обл. св $\neg x$ т.к $\neg(0,0 \ldots 0)=1$

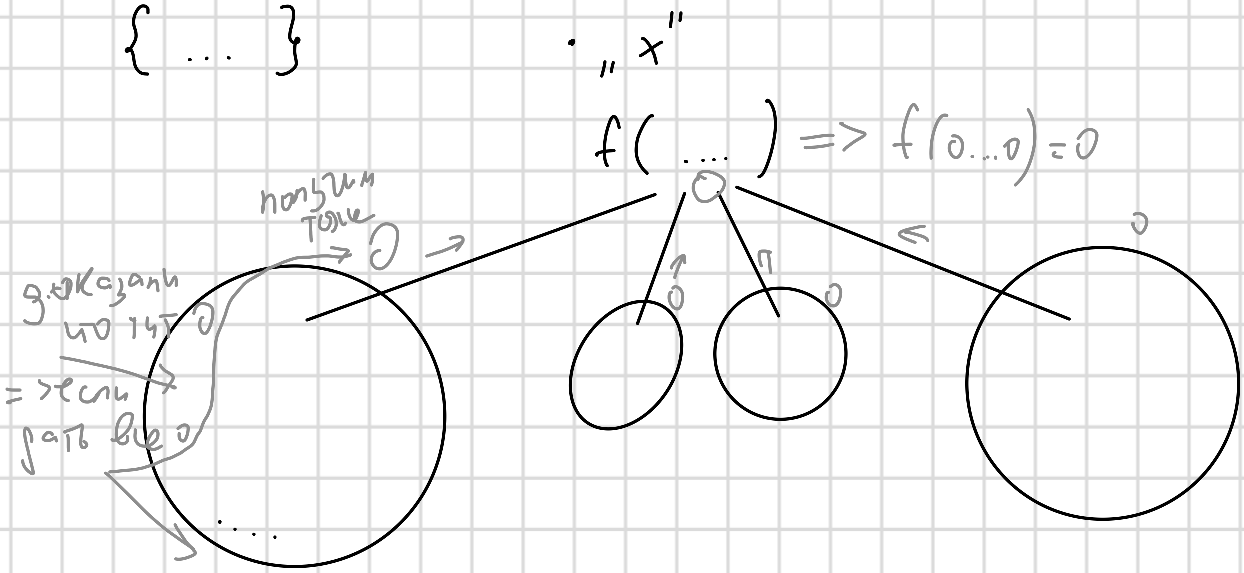
если везде п.2) → нет то проверяем 5 св-в и если все „да" то это базис

Свойства:

1) F_0 — ф-ии сохраняющие 0 $\quad f: f(000)=0$

Пр.: „V" „∧" $\in F_0$ | „0", „¬x", =, ↓ $\notin F_0$

Док-во по инд-ии



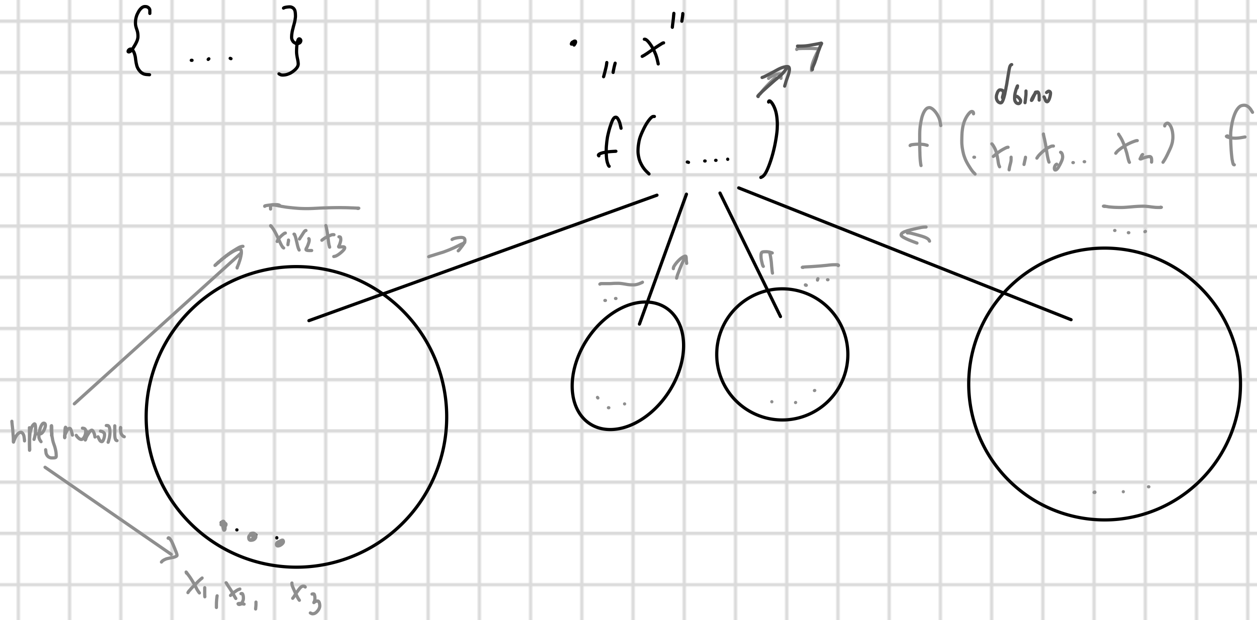
2) F_1 – ф-ии сохр 1 $f: f(1\dots1)=1$

Пр.: $\vee$ $\wedge$ $\square$ $\in F_1$ | $\neg$, $\oplus$, $\downarrow$, $\oplus$ $\notin F_1$

док-во так-же по индук-ии

3) F_S – самодвойственные

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = \neg f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots \bar{x}_n)$$



было $f(x_1, x_2 .. x_n)$ стало $f(\bar{x}_1 .. \bar{x}_n)$

т.к. f - самодв. то она выбросит отрицание

Пр.: $\bar{x}$, <, >, $\oplus_3$ $\in F_S$ $\downarrow \notin F_S$

4) F_ℓ – линейные

f: П.Ж. f – линейна (нет 2 степени) $ab, \vee, \wedge, \langle\ \rangle \notin F_\ell$

$\oplus_n, a, b \in F_\ell$

П.Ж. для:

$a \wedge b = ab$

$a \vee b = ab \oplus 1 = (a \oplus 1) \cdot (b \oplus 1) = ab \oplus a \oplus b \oplus 0 = ab \oplus a \oplus b$

$\langle\ \rangle = ab \oplus bc \oplus ac$

по инд. все сл слог не содержат запрещ. слагаемые => f вернет все разрешенные слагаемые

5) F_m – монотонность $\vec{x} \le \vec{y} \Rightarrow f(\vec{x}) \le f(\vec{y})$

Док-во: $\forall x, y$: $\vec{x} \le \vec{y}$: $\forall i$: $x_i \le y_i$

0	$\le$	0
0	$\le$	1
1	$\le$	1
1	$\nleq$	0

$00 \le 11$ $01 \not< \not> 10$ $\Downarrow$ вектора несравнимы

$10 \ge 00$

Как опр. мон-ть:

a b	f		
0 0	0	0	0
0 1	1	0 =	1
1 0	1	1	0
1 1	1	1	1

Док-во замкнутости через индук-ию

Пр.: $<, >, \vee, \wedge \in F_M$

$\downarrow, \uparrow, \oplus, \neg \notin F_m$

a	b	$\oplus$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$x = 10 \quad f(x) = 1$

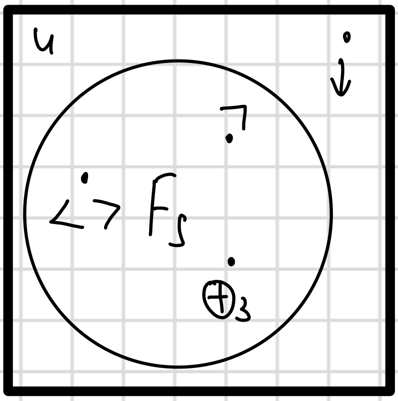
$y = 11 \quad f(y) = 0$

$x \leq y \quad f(x) > f(y)$

противоречие

$\{ \oplus_3 ; \neg ; < > \} \not\to \downarrow$

т.к. все ф-ии самодвойственны а $\downarrow$ нет



- если все ф-ии лежат в 1 классе то ответ нет
- иначе да

Пр.: док-во для П.Т.:

$\{ | ; \oplus , \wedge \}$

$F_0 = |$ не лежит

$F_1 = \oplus$ не лежит

$F_L = \wedge$ не лежит

$F_S = \wedge$ не лежит

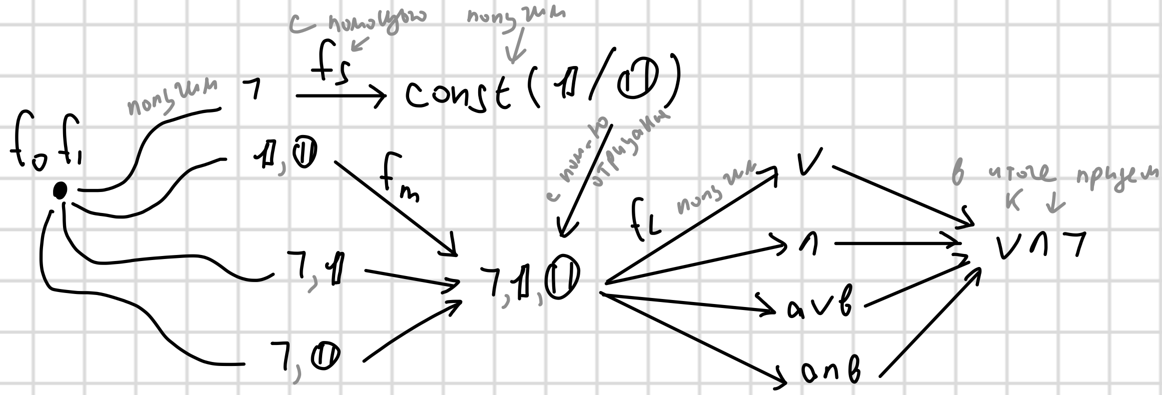
$F_M = \oplus$ не лежит

не лежит в F_i

Теорема Поста

$F = \{ \dots \}$

$f_0 \quad f_1 \quad f_s \quad f_m \quad f_L$



$f_0(0000) = 1$

$f_0(1111) = 0$ (= а) / $f_0(1111) = 1$ (= б)

$\exists\ g(x) = f_0(xxxx)$

1) $g(x) = \neg x$ — получили отрицание

2) $g(x) = 1$ — получили тожд. 1

$f_1(1111) = 0$

1) $f_1(0000) = 0$ / 2) $f_1(1111) = 0$

$\exists\ g(x) = f_1(xxxx)$

1) $g(x) = 0$ — получили тожд. 0

2) $g(x) = \neg$ — получили отриц.

получаем:

а$_1$) $\neg, 0 \to \neg 0 = 1$ (берем из; получаем)

а$_2$) $\neg, x \to \neg x$

б$_1$) $1, 0$

б$_2$) $\neg, 1 \to \neg 1 = 0$

$\exists \quad x \leq y \quad f(x) = 1 \quad f(y) = 0$

$f(001101) = 1 \qquad g(x) = f(0, 0, 1, 1, x, 1)$

$f(001111) = 0 \qquad g(0) = 1 \quad g(1) = 0$

$$\text{1} \ldots \overbrace{10}^{\text{соседние}} \ldots 0$$

$$\begin{tikzcd}
 & \neg \arrow[r, "f_s"] & 1\,0 \\
f_0 f_1 \bullet \arrow[ur, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[dr, bend right] & 1\,0 \arrow[r, "f_m"] & \neg \\
 & \neg\,1\,0 &
\end{tikzcd}$$