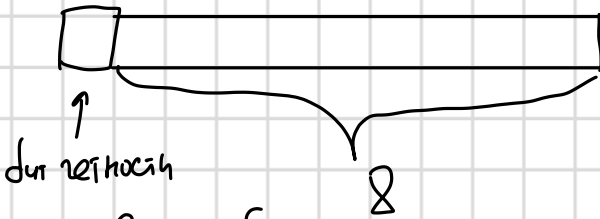


# Избыточное кодирование

## Бит четности



⊕ все 8 байт

$$c: B^8 \rightarrow B^8$$

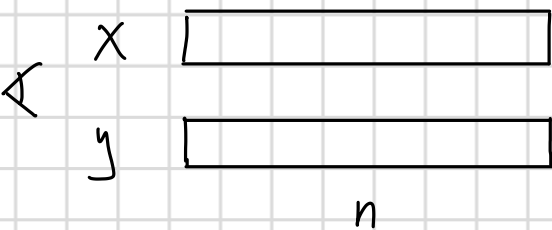
расчетчик четности

$H(x, y)$  — кол-во позиций

$$i: x[i] \neq y[i]$$

$$H\left(\begin{array}{ccccccccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) = 3$$

↑    ↑    ↑



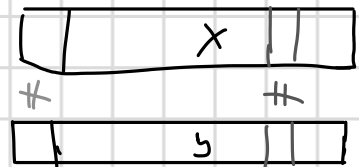
расстояние:

$$1) d(x, y) \geq 0$$

$$2) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$3) d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$$

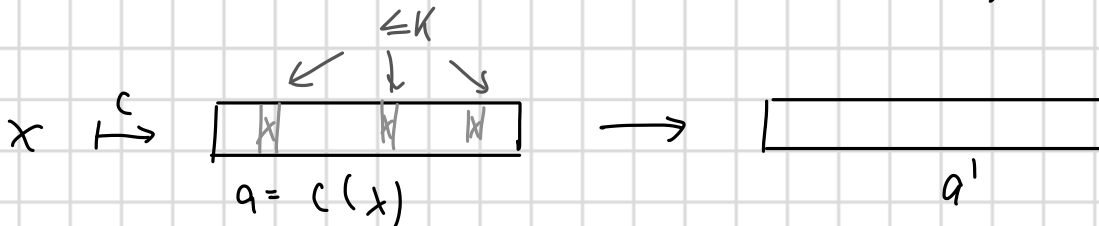
$$\exists d(c) = 2$$



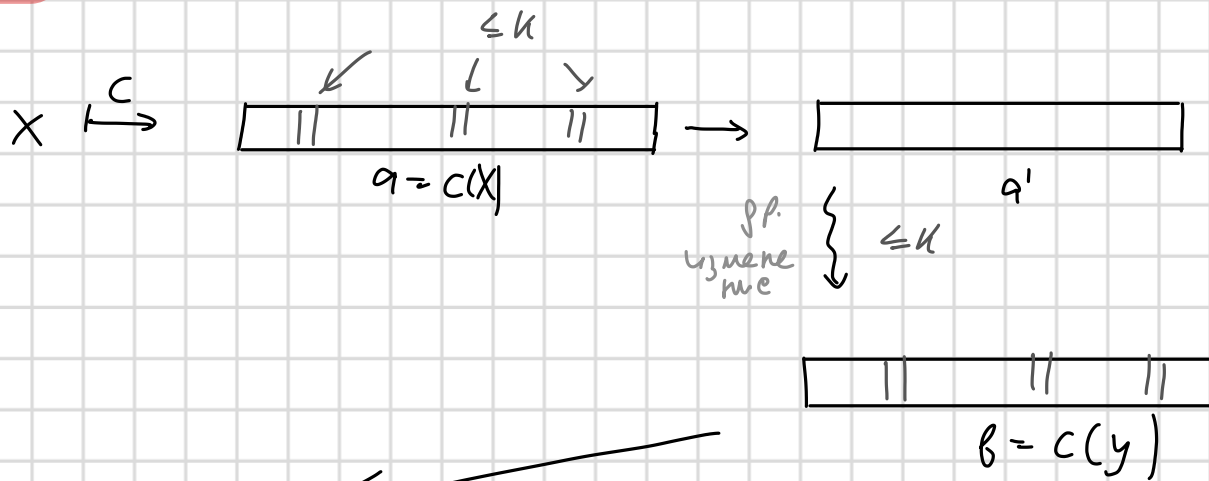
$$\nabla c: \Sigma \rightarrow B^n$$

$$\min_{x, y \in \Sigma} H(c(x), c(y)) = d(c)$$

Опр:  $c$  обнаруживает  $k$  ошибок, если  $d(c) > k$



**Дп:**  $c$  исправляет  $K$  ошибок если  $d(c) > 2K$



$$\left. \begin{array}{l} H(a, a') \leq K \\ H(a', b) \leq K \end{array} \right\} H(a, b) \leq 2K \text{ противоречие}$$

**УТВ 1:** Если  $K_0, c$  испр  $K$  ошибок тогда  $c$  одр.  $2K$  ошибок

**УТВ 2:** Если  $K_0, c$  одр.  $K$  ошибок тогда  $c$  испр  $\lfloor \frac{K}{2} \rfloor$  ошибок

**УТВ 3:**  $\forall K \exists K_0$ , однар.  $K$  ошибок

$$\forall \Sigma \quad |\Sigma| \leq 2^n$$

$$\Sigma = \{c_1, c_2, \dots, c_s\} \quad S \leq 2^n$$

|       |           |       |  |  |
|-------|-----------|-------|--|--|
| $c_1$ | 0 0 ... 0 | $c_1$ | $\frac{0 \dots 0}{K+1} \mid \frac{0 \dots 0}{K+1} \dots \frac{0 \dots 0}{K+1}$ | $\rightarrow$ Каждое слово $j$ и $c_j$ |
| $c_2$ | 0 0 ... 1 | $c_2$ | $\frac{0 \dots 0}{K+1} \mid \frac{0 \dots 0}{K+1} \dots \frac{1 \dots 1}{K+1}$ |  |
| $c_3$ | 0 ... 1 0 |       |  |  |
| $c_s$ | ...       |       |  |  |

$(2K+1)h$   
 $c: \Sigma \rightarrow B^{(K+1)h}$  можно  
 неэффективно, т.е.  
 однажды к ошибкам (испр)

Опр.:  $B^n$  — гамильтоновы шар  $x \in B^n, r \in \mathbb{Z}^+$

$$S(x, r) = \{y \mid H(x, y) \leq r\}$$

$$S(0000, 1) = \{0000, 0001, 0010, 0100, 1000\} \text{ — шар}$$

Опр.:  $V(n, r)$  — объем шара в  $B^n$ , радиус  $r$

Замечание:  $V(n, r) = |S(x, r)| \quad \forall x \in B^n$

$$S(x, r) = \{z \mid z = t \oplus x \oplus y, t \in S(y, r)\}$$

$$H(x, z) = |\{i \mid x[i] \neq z[i]\}|$$

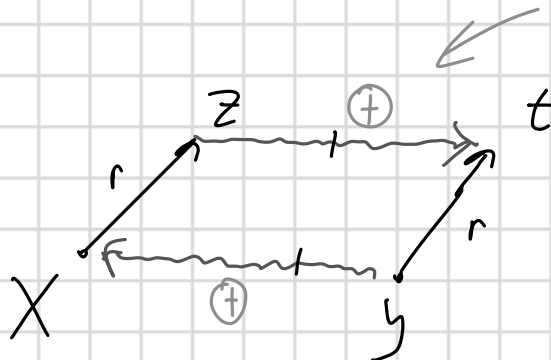
$$y = x \oplus (x \oplus y)$$

$$t = z \oplus (x \oplus y)$$

$$H(y, t) = |\{i \mid y[i] \neq t[i]\}| = |\{i \mid x_i \oplus (x_i \oplus y_i) \neq z_i \oplus (x_i \oplus y_i)\}|$$

$$\neq z_i \oplus (x_i \oplus y_i)\} = |\{i \mid x_i \neq z_i\}| = \\ = H(x, z)$$

если равен xor  
то равны



Лема:  $x \neq y \in \Sigma$

$C$  - код истр  $K$  симбока

$$\text{то } S(C(x), K) \cap S(C(y), K) = \emptyset$$

$$\exists z \in S(C(x), K) \cap S(C(y), K)$$



$$\left. \begin{array}{l} H(C(x), z) \leq K \\ H(C(y), z) \leq K \end{array} \right\} H(C(x), C(y)) \leq 2K \quad \text{противоречие}$$

Теорема (Граница Хемминга)

$C$  - код где  $m$ -симв. алфв. истр ав.  $K$  симвока и

$$C: \Sigma \rightarrow B^n, \text{ то } m \cdot V(n, K) \leq 2^n$$

Пр.: 3 символа, истр 1 сиб.,  $m=3, K=1,$

$$n=3?$$

$$3 \cdot V(3, 1) \leq 2^3$$

$$3 \cdot 4 \leq 2^3 \text{ неверно } \Rightarrow \text{ код не } \exists$$

$$\log_2 m + \log_2 V(n, K) \leq n$$

$$\frac{\log_2 m}{n} \leq 1 - \frac{\log_2 V(n, K)}{n}$$

↑  
пропуск информации  
в код

испр к ошдк

$\Delta B^h$

$$x_1 = c(1)$$

$S(x_1; 2K)$  — небыл сфот

$$x_2 \in B^h \setminus S(x_1; 2K)$$

$$x_2 = c(2)$$

$S(x_2; 2K)$  — небыл

$$x_3 \in B^h \setminus \left( \bigcup_{i=1}^2 S(x_i; 2K) \right)$$

$\vdots$

✓  $m=3, K=1, n=3$

$$x_1 = 000 \quad \text{тогда} \quad x_2 = 111 \Rightarrow x_3 = \emptyset$$

Теорема (Лемма Гиндлста)

$$\text{m. } V(n; 2K) \leq 2^h, \text{ то } \exists c: \Sigma \rightarrow B^h,$$

исправляющий к ошдк,  $|\Sigma| = m$

$$V(n, r) = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \dots + C_n^r$$

$r=1$

$$V(n, 1) = 1 + n$$

$$m(n+1) \leq 2^h \Leftrightarrow m \leq \frac{2^h}{n+1}$$

## Код Хемминга

$$K=2 \quad \langle \sim \rangle \quad m. V(n, 1) \leq 2^h$$

$K > 1$   $CNO/CNO$  и неволежно

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10  
 a | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |  
 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11  
 0001 0010 0011 0100 0101 0110 0111 1000 1001 1010 1011  
 информативные и контрольные биты

4 Контроль холх 2<sup>й</sup> нзз

7 - информация не введена

$$\Rightarrow |\Sigma| \leq 128$$

Код остаточной группы  $\rightarrow B^7$

Контроль на  $2^i$  соот. позиции  $P_i = \{j \mid j \& 2^i = 2^i\}$

$$\{4, 3, 5, 7, 9, 11\} = P_0$$

$$\{2, 3, 6, 7, 10, 11\} = P_1$$

$$\{4, 5, 6, 7\} = P_i$$

$$\{8, 9, 10, 11\} = P_3$$

Котировки на 24.05.2024

$$\sum_{j \in P_i} \textcircled{+} a_j = 0$$

$100111 \rightarrow 0011001111$

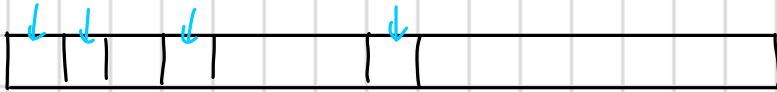
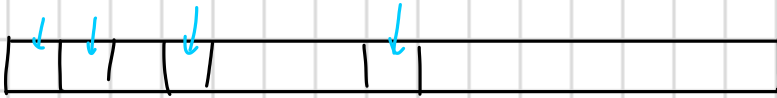
Diagram illustrating the addition of two 4-bit numbers (5 and 3) to produce an 8-bit result (8):

| Bit Position | Bit 4 | Bit 3 | Bit 2 | Bit 1 | Bit 0 |
|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Number 1 (5) | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     |
| Number 2 (3) | 0     | 0     | 1     | 1     | 0     |
| Result (8)   | 1     | 0     | 0     | 0     | 0     |

The result 1000 (8) is shown in red, indicating it is the final output. The carry bit 1 is shown in blue above the result line.

Теорема Кэ Хенрича ии 1 оууууу

$$H(x, y) \geq 3$$



Результат 3 из 3 → ОК

Результат 1 шаг дан



j    $\triangleleft$ 

|  |   |  |   |  |
|--|---|--|---|--|
|  | 1 |  | 1 |  |
|--|---|--|---|--|

 $\text{bin}(j)$

## ≥ 2 Kontp. Jutob

Результат 2 прироста

$u_1$    
 $u_2$  

$\Rightarrow$  100% der 5-er Kontributionen  
der p.p.z.