

Система непер. мн-ств. (DSU)

① ② ③ ④ ... ⑤ ← мн-во

• $unite(a, b)$ объединить

Пр: ① ② ③ ④ ⑤ ⑥

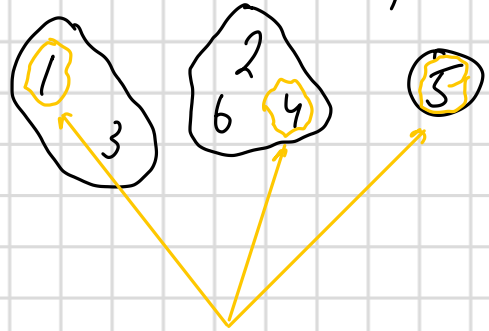
$unite(1, 3)$ ↓

①₃ ② ④ ⑤ ⑥

$unite(2, 4)$

①₃ ②₄ ⑤ ⑥

$unite(4, 6)$



] это представление мн-ва

• $get(a)$ получить представление мн-ва

• $unite(a, b)$ | $O(\log n)$

• $get(a)$ | $O(1)$

] 1: {1} + для каждого эл-та хранить его номер мн-ва

2: {2}

3: {3}

4: {4}

5: {5}

6: {6}

перекрывается/сбивает
меньшее в большее →

1: {1, 3}

2: {~~2~~}

3: {~~3~~}

4: {4, 2, 6}

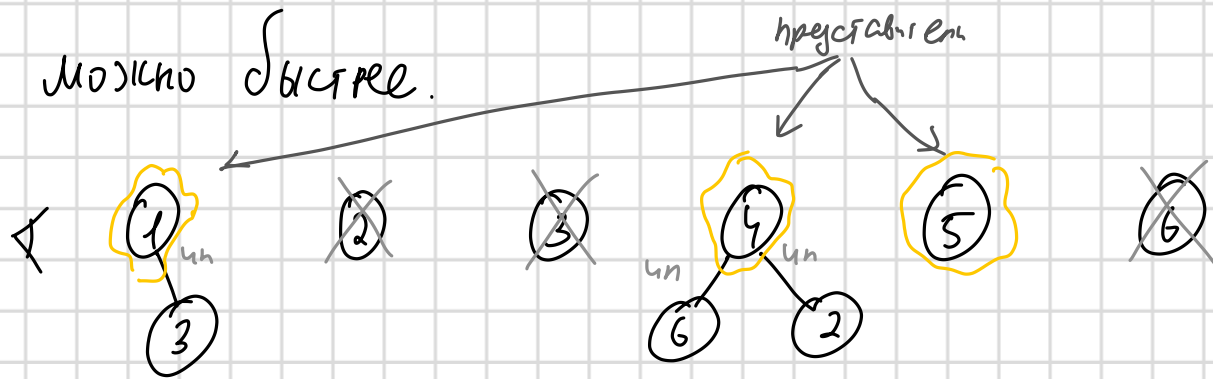
5: {5}

6: {~~6~~}

$O(\log n)$ Т.к. когда переключаемся, то длина раз мер ли н-ва уменьшается, аморт. оценка.

можно быстрее.

представлен



$p[V]$ - родитель вершины V
(если V - корень, то $p[V] = V$)

• $get(V)$:

```

if  $V == p[V]$ : return  $V$ 
return  $get(p[V])$ 
  
```

• $unite(a, b)$

```

 $a = get(a)$ 
 $b = get(b)$ 
  } неэффективная зависимость
  } т.к. get зависит от высоты
  } дерева
if  $a == b$ : return
 $p[a] = b$ 
  
```

это дает

• $unite(a, b)$ | $O(n)$

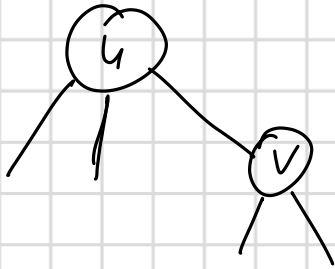
• $get(a)$ | $O(n)$

$p[v]$ - родитель v

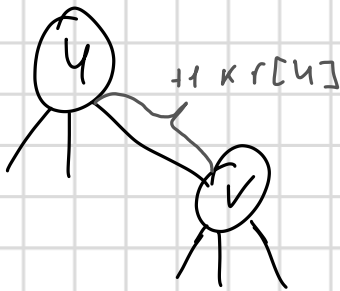
$r[v]$ - высота вершины v



1) $r[v] < r[u]$, тогда



2) $r[v] == r[u]$, тогда



• $unite(a, b)$

$a = get(a)$

$b = get(b)$

if $a == b$: return

if $r[a] > r[b]$: swap(a, b)

$p[a] = b$

if $r[a] == r[b]$: $r[b] += 1$

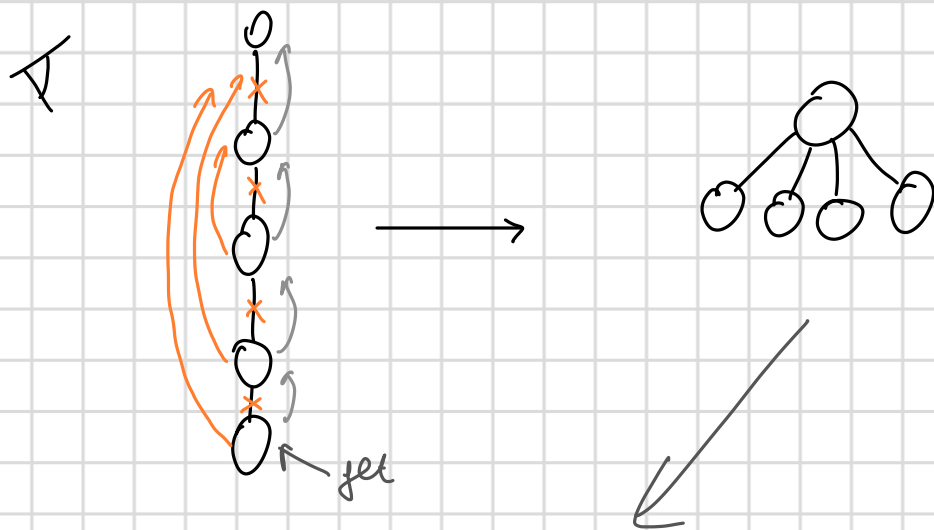
Ранговая
структура

Теперь	
• unite (a,b)	$O(\log n)$
• get (a)	$O(\log n)$

Лемма 1

В дереве с рангами r хотя бы 2^r вершин

Факт: $\forall v$ (кроме корня) $r[p[v]] > r[v]$



• get (v):

if $v == p[v]$: return v

и теперь рани дерева
исчезают

$p[v] = \text{get}(p[v])$

return p[v]

Эвристика сжатия
пути

Факт: если убрать рани, но оставить сжатие путей, то работает

за амортизованный $O(\log n)$

Теперь

• unite (a,b)	$O(\log^* n)$
---------------	---------------

• get (a)	$O(\log^* n)$
-----------	---------------

Опр.: $F(0) = 1, F(n) = 2^{F(n-1)} (\forall n > 0)$

n	0	1	2	3	4	5
$F(n)$	1	2	4	16	65536	2^{65536}
		\parallel 2^1	\parallel 2^{2^1}	\parallel $2^{2^{2^1}}$	\parallel $2^{2^{2^{2^1}}}$	

$\log_2^* n$ — Итерированный логарифм

$$\log_2^* n = \min K: F(K) \geq n$$

$$\log_2^* 1000 = 4 \quad ; \quad \log_2^* 4 = 2$$

Лемма 2

Кол-во вершин с рангом r не превосходит $\frac{n}{2^r}$

$\exists K$ вершин с рангом r из л.л. $\geq K \cdot 2^r$ вершин

$$K \cdot 2^r \leq n$$

\Downarrow

$$K \leq \frac{n}{2^r}$$

Опр.: $g(v)$ — глубина вершины v

$$g(v) = \log_2^*(r[v])$$

всего есть $\leq \log_2^* n$ уровней

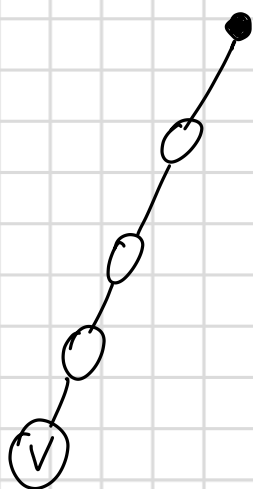
Лемма 3:

Кон-во вершин в узле $g \leq \frac{n}{F(g)}$

в узле g раны выбираются от $F(g-1)+1$ до $F(g)$

$$\sum_{r=F(g-1)+1}^{F(g)} \frac{n}{2^r} \leq \frac{n}{2^{F(g-1)+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) = \frac{2n}{2^{F(g-1)+1}} = \frac{n}{2^{F(g-1)}} = \frac{n}{F(g)}$$

если суммируем по всем узлам g \rightarrow получим $O(m \log^* n)$ (при $m \geq n$)



$A = \{\text{корень или сын корня}\}$ $2m$

$B = \{v: g(v) \neq g(p[v])\}$ $m \log^* n$

$C = \{v: g(v) = g(p[v])\}$ $n \log^* n$

$g(v) = g$ $r[v] \in [F(g-1)+1, F(g)]$

$F(g-1)+2 \dots F(g) \rightarrow F(g) - (F(g-1)+2) + 1$
узелами

$$\sum_{g=0}^{\log^* n} \frac{n}{F(g)} \cdot (F(g) - F(g-1) - 1) \leq \sum_{g=0}^{\log^* n} \frac{n}{F(g)} \cdot \cancel{F(g)}$$

$\max \{A, B, C\} = m \log^* n$

