Сложность ф-ии:

схема S; $size_{B_1} S = size_{B_2} S = size\, S$

т.к асимптотика при смене базиса сохр.

сложность ф-ии

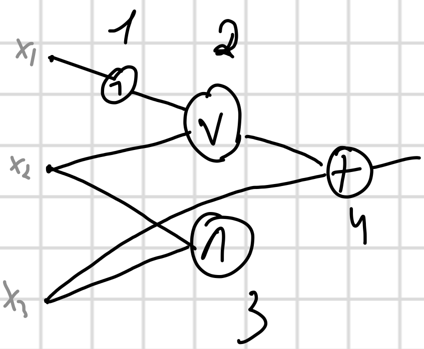
$$size\, f = \min size\, S$$

Линейная программа

есть $x_1 \dots x_n$ n переменных

$x_{n+1} \dots x_{n+t}$ T вспом. эл-ов

$$x_{n+1} = f_1(x_1, x_n)$$
$$x_{n+2} = f_2(x_{n+1}, x_1, x_2)$$
$$x_{n+t} = f_t(\dots)$$



$x_1 \dots x_3$

$x_4 = \neg x_1$

$x_5 = x_4 \vee x_2$

$x_6 = x_2 \wedge x_3$

$\vdots$

$x_7 = \oplus(\dots)$

$\frac{2^n}{n}$ функц. эл.

базис $F = \{\overset{nor}{\downarrow}\}$

$f(x_1, x_2 \dots x_n)$

$x_1\ x_2 \dots x_n$

t строчек

$$f = x_{n+t}$$

i - строка номер - $x_{n+i} = x_{a_i} \downarrow x_{b_i}$

$1 \le a_i \le n+i-1 \quad 1 \le b_i \le n+i+1$

Теорема:

Для f в базисе F имеет лин. пр. из T строк тогда и т.т. когда f имеет схему из t эл.

Пр.:

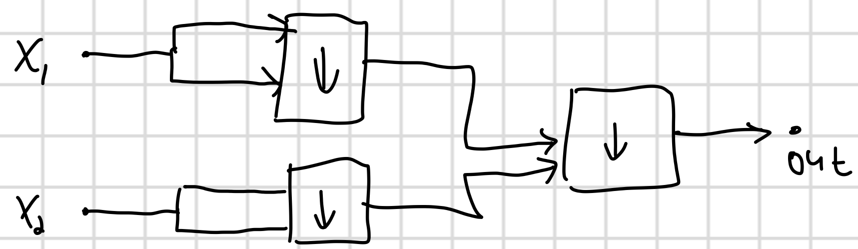
$x_2 = x_1 \downarrow x_1$

$a \wedge b = (a \downarrow a) \downarrow (b \downarrow b)$

x_1, x_2

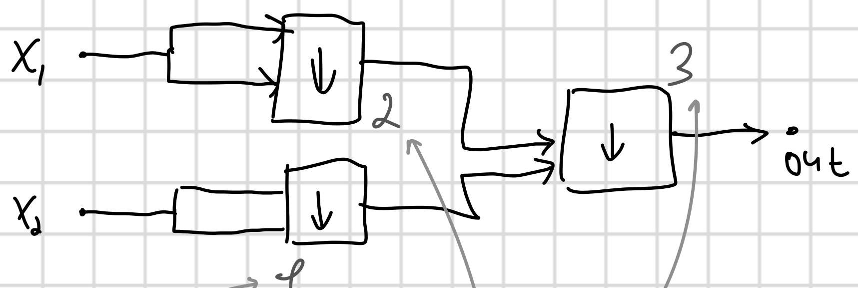
$x_3 = (x_1 \downarrow x_1)$ $\qquad$ $x_5 = x_3 \downarrow x_4 = a \wedge b$

$x_4 = (x_2 \downarrow x_2)$



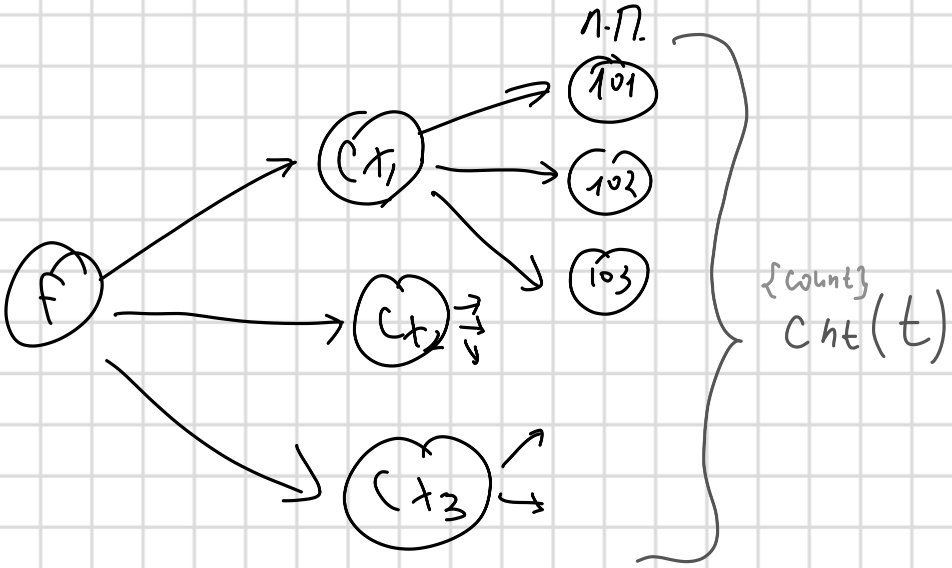
если в обратном порядке:

Топологическая сор-ка



$x_3 = x_2 \downarrow x_2$

$x_4 = x_1 \downarrow x_1$ $\qquad$ $x_5 = x_4 \downarrow x_3$



Теорема о нижней оценке на размер схемы:

$$cnt(t) \leq n \cdot n \cdot (n+1)(n+1)(n+2)(n+2)\ldots(n+t-1)(n+t-1) \leq (n+t)^{2t}$$

$$c(t) = \sum_{i=1}^{t} cnt(t) \leq t(n+t)^{2t} \leq (n+t)^{2t+1}$$

$$(n+t)^{2t+1} < \alpha\, 2^{2^n}$$

$$0 < \alpha < 1$$

$$t = \frac{c \cdot 2^n}{n}$$

$$\left(\frac{c \cdot 2^n}{n} + n\right)^{\frac{2c \cdot 2^n}{n} + 1}$$

н.с.н n

$$\log_2\left(\left(\frac{c \cdot 2^n}{n} + n\right)^{\frac{2c \cdot 2^n}{n} + 1}\right) = \left(\frac{2c \cdot 2^n}{n} + 1\right)\log_2\left(\frac{c \cdot 2^n}{n} + n\right) \leq$$

$$\leq \frac{4c \cdot 2^n}{n} \log_2\left(\frac{2c \cdot 2^n}{n}\right) \leq \frac{4c \cdot 2^n}{n} \log_2\left(2^n\right) \leq$$

$$\leq 4c \cdot 2^n$$

∢ $\alpha 2^{2^n}$

$$\log_2(\alpha 2^{2^n}) = \log_2(\alpha) + \log_2(2^{2^n}) = 2^n + \log_2 \alpha$$

если $c < \frac{1}{4}$, то $t = \frac{c \cdot 2^n}{n} \Longleftrightarrow t < \frac{2^n}{4n}$

$\forall \alpha\ \exists n_0 : n > n_0$: то схем из ФЭ

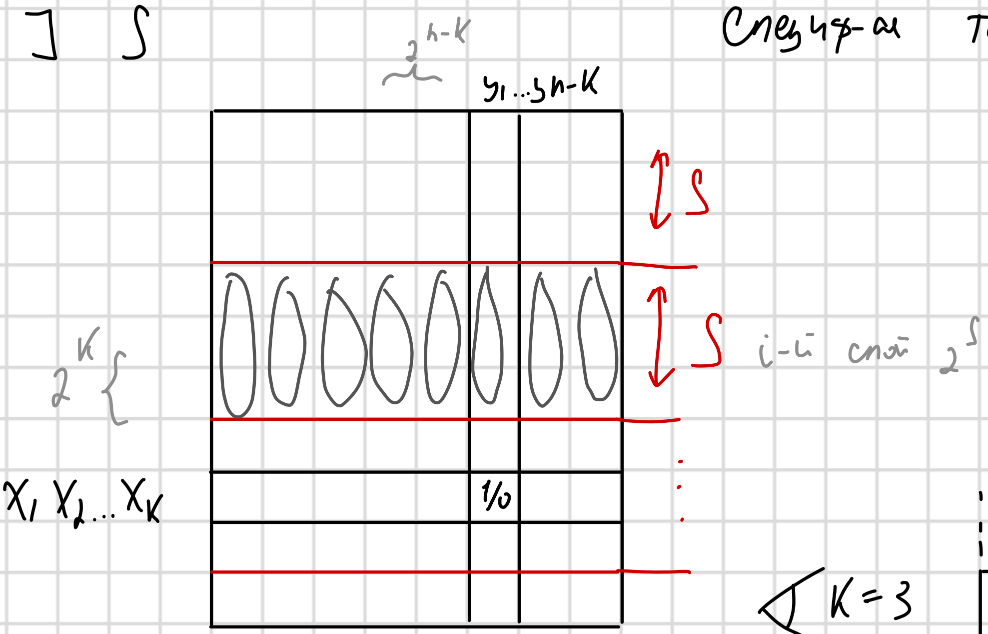
размера $\le t$ достаточно, чтобы задать $\le \alpha \cdot 2^{2^n}$ ф-ций

Теорема о верхней оценке на размер схемы:

$\forall$ б.ф. f от n арг $\exists$ сх из ФЭ сл. $\le \alpha \frac{2^n}{n}$ эл

$\exists K$, $f(x_1 x_2 \ldots x_K\ y_1 y_2 \ldots y_{n-K})$

$\exists S$ специф-ая таблица истинности



$$p = \left\lceil \frac{2^K}{S} \right\rceil$$

кол-во слоев (S)

∢ $K = 3$, $S = 2$

0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	1

S

тип столбца номер j

в i-ом слое $\rightarrow m_{ij}$

$0 \le m_{ij} \le 2^S - 1$

t — маска

в i-ом слое маска t, а снаружи нули

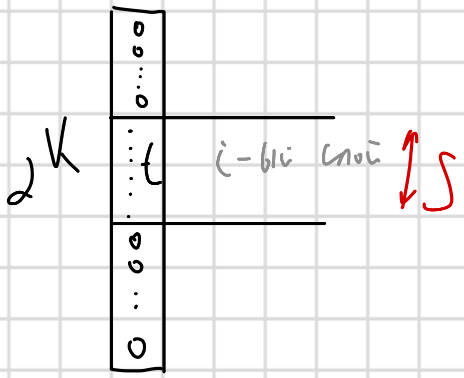


Таблица ист-ти ф-ий от K арг-ов

$$g_{it}(x_1 \dots x_K)$$

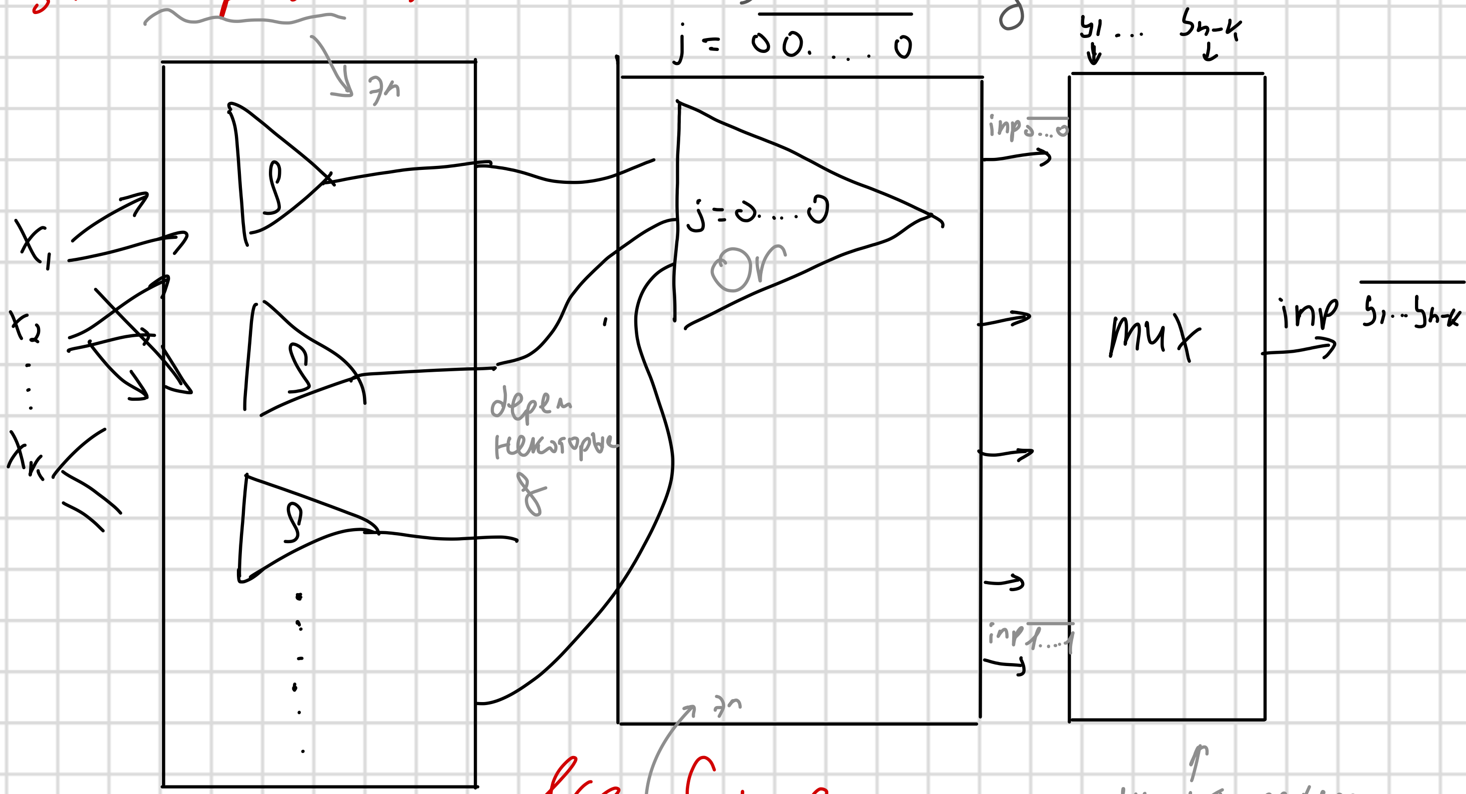
$p \cdot 2^S$ ф-ий

$$f(x_1 \dots x_K\; y_1 \dots y_{n-K}) = \overset{or}{\bigvee_{i=1}^{p}} g_{i m_{ij}}(x_1 \dots x_K)$$

$$j = \overline{y_1 y_2 \dots y_{n-K}}$$

все g_{it} можно реализовать за $\underbrace{2^K \cdot p \cdot 2^S}_{\text{эл}}$ эл.

все возможные $g \to 2^S \cdot p$



мультиплексор

все f из g за $p \cdot 2^{n-K}$ эл

mux: $2^{n-K} + n - K$ эл.

$\exists\ k = \log_2 n$

$\Rightarrow \quad 2^{n-k} + n - k \sim \dfrac{2^n}{n}$

$p \cdot 2^{n-k} \sim \dfrac{2^n}{s} \sim \dfrac{2^n}{n}$

$2^k \cdot p \cdot 2^s \sim \dfrac{n \cdot 2^s \cdot s}{s} = 2^s \cdot s = 2^{n-2\log_2 n} \cdot (n - 2\log_2 n) \sim$

$= \dfrac{2^n}{n^2} \cdot n = \dfrac{2^n}{n}$

$\exists\ s = n - 2\log_2 n$