$y(t)$

$F(t, y(t), y'(t)) = 0$

Δt

$y(t+\Delta t) - y(t) \approx a y(t)$, $a \approx K\Delta t$

$y(t+\Delta t) - y(t) \approx K \Delta t\, y(t) \quad \Big/ \cdot \frac{1}{\Delta t}$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = Ky$$

т.е. $y' = Ky$

$y = Kt$

$K = K^2 t$ только в $t = 1/K$

$y = e^{Kt}$

$Ke^{Kt} = Ke^{Kt} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$

$y = Ce^{Kt}$, $C \in \mathbb{R}$

Уравнения в нормальной форме

Опр.:

$\exists\, f: g \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, тогда $y' = f(x, y)$ $(*)$ — уравнение норм-ой формы

Опр.:

Область опр-ия ур-ия $(*)$ — это область опред-ия $f(x, y)$

т.е. $\operatorname{dom}(*) = g$

Пр.:

1) $y' = x\sqrt{y}$

$g = \mathbb{R} \times [0, +\infty)$

2) $y' = y$

$g = \mathbb{R}^2$

3) $y' = -\frac{1}{x^2}$

$g = \mathbb{R}^2 \setminus \{x = 0\}$

Опр.:

$\exists\, E = \langle a, b \rangle$ – невырожденный промежуток, $a < b$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \forall x \in E \quad f(x) = g(x)$

Опр.:

$\varphi(x) : E \to \mathbb{R}$ – решение $(*)$, если $\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$

Пр.:

$y' = y$

1) $\varphi(x) = e^x$ ✓

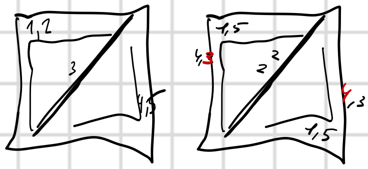
2) $\varphi(x) = x$ ✗

3) $\varphi(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ e^{2x}, & x > 0 \end{cases}$ из-за 0 ф-ия не опр. $\Rightarrow$ не промежуток $\Rightarrow$ ✗

4) $\varphi(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ e^{2x}, & x \geq 0 \end{cases}$ ✗

Опр.:

Интегральная кривая (*) — график его решение



Опр.:

Общее решение (*) — совокупность (множество) всех его решений

$\Phi(x, y, C) = 0$ — общий интеграл

Пр.:

1) $-\frac{1}{y} + \operatorname{arctg} y = C \cdot e^x$ (не выразить y)

если C — конкретное → частный интеграл

2) $y' = x$

$y = \frac{x^2}{2} + C$ общ. реш.

$y = \frac{x^2}{2} + 2$ частный инт

$2y - x^2 = C$ общ. инт

Уравнения в дифференциалах

Опр.:

$\exists\ P, Q : \mathbb{R}^2 \supset g \to \mathbb{R}$, тогда $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ (*) наз. уравнение в дифференциалах

Опр.:

область решения (*) — область g, где P и Q определены одновременно

Пр.:

$$\sqrt{y}\,dx + \sqrt{x}\,dy = 0$$

О.О.: $x \geq 0,\ y \geq 0$

$$\vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$$

Опр.:

$\exists\ E = \langle a, b \rangle,\ E \subset \mathbb{R}_x.\quad \varphi : E \to \mathbb{R}_y$ явл. решение $(*)$, если

$$P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \equiv 0 \quad \text{на } E$$

$$\varphi'(x) = -\frac{P(x, \varphi(x))}{Q(x, \varphi(x))}, \quad \text{при } Q \neq 0,\ x, y \in g$$

Опр.:

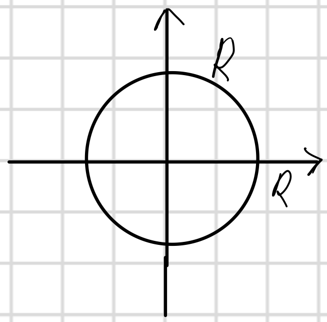
(x_0, y_0) – особая точка, если $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$

Пр.:

$$x\,dx + y\,dy = 0, \quad g = \mathbb{R}$$

$$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{на } (-R, R)$$

$$x\,dx \pm \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{\mp x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,dx = 0$$



Опр.: Ф. урри Порнушкие

$P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0$ – уравнение с разделенными переменными

$$\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy = C$$

Опр.:

$\exists\ T = \langle \alpha, \beta \rangle.$ Вектор-функция $(u, v) \in C^1(T \to \mathbb{R}^2)$ – наз. параметрическое решение ур-е $(*)$, если:

1) $(u'(t), v'(t)) \neq (0, 0) \quad \forall t \in T$

2) $P(u(t), v(t))\, u'(t) + Q(u(t), v(t))\, v'(t) \equiv 0$ на T

Пр.:

$x\,dx + y\,dy = 0$

$r(t) = (R\cos t, R\sin t)$ – параметризация ур-я

Опр.:

Интегральное решение наз. годограф ее функции (мн-во ее знач)

Теорема (связь между обычным и парам. реш. (*))

$\exists\, P, Q \in C(g)$, мн-во C не содержит особых точек (*). Тогда:

1) Если $\varphi(x)$ – реш. (*) на E, то $r(t) = (t, \varphi(t))$ – парам-ое решение (*) на E

2) Если $r = (u, v)$ – парам-ое реш-е (*) на T, то $\forall t_0 \in T$ $\exists\, U(t_0)$: $u(t)$ и $v(t)$ $\forall t \in U(t_0) \cap T$ – парам-и задают реш-е ур-я (*) (вида $y = \varphi(x)$ или $x = \psi(y)$)

Опр.:

Дифф ур-я наз. эквивалентными на g, если они имеют одинаковое мн-во решений на g

Теорема

$\exists\, f \in C(\mathbb{R}^2 \supset g \to \mathbb{R})$. Тогда $y' = f(x,y)$ экв-но $dy = f(x,y)\,dx$ на g

Пример:

1) $\sin x\, dy - y \ln y\, dx = 0$

$$y = e^{tg\frac{x}{2}}$$

$$\sin x \cdot e^{tg\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = e^{tg\frac{x}{2}} \, tg\,\frac{x}{2}$$