Алгебра. Контрольная работа «Евклидовы пространства». Вариант II

1. Найдите QR-разложение матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.

2. $x = (2,1,0,2)^T$, $u = (2,3,2,7)^T$, $v = (0,1,0,1)^T \in \mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением, $U = \langle u, v \rangle$. Найдите:

   а) ортогональную проекцию $\mathrm{pr}_U x$ и ортогональную составляющую $\mathrm{ort}_U x$;

   б) расстояние от вектора x до подпространства U;

   в) угол между вектором x и подпространством U.

3. Приведите квадратичную форму $7x^2 + 16xy - 23y^2$ к главным осям и найдите соответствующее ортогональное преобразование.

4. Найдите канонический вид и соответствующий канонический базис ортогонального оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \\ 7 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

5. Оператор $\mathscr{K}$ — кососимметрический, $\mathscr{E}$ — тождественный, оператор $\mathscr{E} + \mathscr{K}$ обратим. Докажите, что оператор $(\mathscr{E} - \mathscr{K})(\mathscr{E} + \mathscr{K})^{-1}$ — ортогональный.

5. $K^T = -K$

$U = (\mathcal{E} - K)(\mathcal{E} + K)^{-1}$, $\quad U^T \overset{?}{=} U^{-1}$

$U^T = \left[(\mathcal{E} - K)(\mathcal{E} + K)^{-1}\right]^T = (\mathcal{E} - K)^T(\mathcal{E} + K)^{-T} = (-K^T + \mathcal{E})(K^T + \mathcal{E})^{-1} =$

$= (\mathcal{E} + K)(\mathcal{E} - K)^{-1}$

Алгебра. Контрольная работа «Евклидовы пространства». Вариант I

1. Найдите QR-разложение матрицы $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $x = (6, -1, 4, 1)^T$, $u = (2, 4, 1, 1)^T$, $v = (1, 1, 0, 0)^T \in \mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением, $U = \langle u, v \rangle$. Найдите:

   а) ортогональную проекцию $\mathrm{pr}_U x$ и ортогональную составляющую $\mathrm{ort}_U x$;

   б) расстояние от вектора x до подпространства U;

   в) угол между вектором x и подпространством U.

3. Приведите квадратичную форму $5x^2 + 4xy + 8y^2$ к главным осям и найдите соответствующее ортогональное преобразование.

4. Найдите канонический вид и соответствующий канонический базис ортогонального оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Оператор $\mathscr{A}$ — эрмитов, $\mathscr{E}$ — тождественный, оператор $\mathscr{E} - i\mathscr{A}$ обратим. Докажите, что оператор $(\mathscr{E} + i\mathscr{A})(\mathscr{E} - i\mathscr{A})^{-1}$ — унитарный.

Алгебра. Контрольная работа «Евклидовы пространства». Вариант IV

1. Найдите QR-разложение матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

2. $x = (1, -2, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, $u = (1, 3, 1, 5)^{\mathrm{T}}$, $v = (2, -3, 2, 1)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением, $U = \langle u, v \rangle$. Найдите:

   а) ортогональную проекцию $\mathrm{pr}_U x$ и ортогональную составляющую $\mathrm{ort}_U x$;

   б) расстояние от вектора x до подпространства U;

   в) угол между вектором x и подпространством U.

3. Приведите квадратичную форму $x^2 + 10xy + 3y^2$ к главным осям и найдите соответствующее ортогональное преобразование.

4. Найдите канонический вид и соответствующий канонический базис ортогонального оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Оператор $\mathscr{A}$ — ортогональный, $\mathscr{E}$ — тождественный, оператор $\mathscr{E} + \mathscr{A}$ обратим. Докажите, что оператор $(\mathscr{E} - \mathscr{A})(\mathscr{E} + \mathscr{A})^{-1}$ — кососимметрический.

5. $\mathcal{A}$ орт $\iff$ $\mathcal{A}^T = \mathcal{A}^{-1}$

$U = (\mathcal{E} - \mathcal{A})(\mathcal{E} + \mathcal{A})^{-1}$

$U^T \overset{?}{=} -U$

▷ $\left[(\mathcal{E} - \mathcal{A})(\mathcal{E} + \mathcal{A})^{-1}\right]^T = (\mathcal{E} + \mathcal{A})^{-T}(\mathcal{E} - \mathcal{A})^T = (\mathcal{E} + \mathcal{A}^T)^{-1}(\mathcal{E} - \mathcal{A}^T) =$

$= (\mathcal{E} + \mathcal{A}^{-1})^{-1}(\mathcal{E} - \mathcal{A}^{-1}) = (A \cdot (\mathcal{E} + \mathcal{A}^{-1}))^{-1}(A(\mathcal{E} - \mathcal{A}^{-1})) = (A + \mathcal{E})^{-1}(\mathcal{A} - \mathcal{E})$ ◀