

Теоремы о классическом исчислении высказываний.

# Корректность и полнота

## Определение (корректность теории)

*Теория корректна, если любое доказуемое в ней утверждение общезначимо. То есть, какова бы ни была  $\alpha$ , имеем  $\vdash \alpha$  влечёт  $\models \alpha$ .*

## Определение (полнота теории)

*Теория семантически полна, если любое общезначимое в ней утверждение доказуемо. То есть, какова бы ни была  $\alpha$ ,  $\models \alpha$  влечёт  $\vdash \alpha$ .*

## Контекст, метаязык

Будем обозначать большими греческими буквами середины алфавита, возможно с индексами,  $(\Gamma, \Delta_1, \dots)$  списки формул. Будем использовать, где удобно:

$$\Gamma \vdash \alpha$$

## Контекст, метаязык

Будем обозначать большими греческими буквами середины алфавита, возможно с индексами,  $(\Gamma, \Delta_1, \dots)$  списки формул. Будем использовать, где удобно:

$$\Gamma \vdash \alpha$$

Списки можно указывать через запятую:

$$\Gamma, \Delta, \zeta \vdash \alpha$$

## Контекст, метаязык

Будем обозначать большими греческими буквами середины алфавита, возможно с индексами,  $(\Gamma, \Delta_1, \dots)$  списки формул. Будем использовать, где удобно:

$$\Gamma \vdash \alpha$$

Списки можно указывать через запятую:

$$\Gamma, \Delta, \zeta \vdash \alpha$$

это означает то же, что и

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m, \zeta \vdash \alpha$$

если

$$\Gamma := \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}, \quad \Delta := \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$$

## Теорема о дедукции

Theorem (О дедукции, Жак Эрбран, 1930)

*Каковы бы ни были  $\Gamma$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ :  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$  выполнено тогда и только тогда, когда выполнено  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$*

## Теорема о дедукции

### Theorem (О дедукции, Жак Эрбран, 1930)

*Каковы бы ни были  $\Gamma$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ :  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$  выполнено тогда и только тогда, когда выполнено  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$*

Доказательство «в две стороны», сперва «справа налево». Фиксируем  $\Gamma, \alpha, \beta$ . Пусть  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ , покажем  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

## Теорема о дедукции

### Theorem (О дедукции, Жак Эрбран, 1930)

*Каковы бы ни были  $\Gamma$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ :  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$  выполнено тогда и только тогда, когда выполнено  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$*

Доказательство «в две стороны», сперва «справа налево». Фиксируем  $\Gamma, \alpha, \beta$ . Пусть  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ , покажем  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

То есть по условию существует вывод:

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \alpha \rightarrow \beta$$



## Теорема о дедукции

### Theorem (О дедукции, Жак Эрбран, 1930)

*Каковы бы ни были  $\Gamma$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ :  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$  выполнено тогда и только тогда, когда выполнено  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$*

Доказательство «в две стороны», сперва «справа налево». Фиксируем  $\Gamma, \alpha, \beta$ . Пусть  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ , покажем  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

То есть по условию существует вывод:

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \alpha \rightarrow \beta$$

Тогда следующая последовательность — тоже вывод:

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \alpha \rightarrow \beta, \alpha, \beta$$

Доказательство:  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$  влечёт  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

№ п/п	формула	пояснение
(1)	$\delta_1$	в соответствии с исходным доказательством
	$\dots$	
$(n-1)$	$\delta_{n-1}$	в соответствии с исходным доказательством
$(n)$	$\alpha \rightarrow \beta$	в соответствии с исходным доказательством
$(n+1)$	$\alpha$	гипотеза
$(n+2)$	$\beta$	Modus Ponens $n+1, n$

Доказательство:  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$  влечёт  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

№ п/п	формула	пояснение
(1)	$\delta_1$	в соответствии с исходным доказательством
	$\dots$	
$(n-1)$	$\delta_{n-1}$	в соответствии с исходным доказательством
$(n)$	$\alpha \rightarrow \beta$	в соответствии с исходным доказательством
$(n+1)$	$\alpha$	гипотеза
$(n+2)$	$\beta$	Modus Ponens $n+1, n$

Вывод  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$  предоставлен, первая часть теоремы доказана.

Доказательство:  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$  влечёт  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Пусть даны формулы вывода

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \beta$$

Аналогично предыдущему пункту, перестроим вывод.

Доказательство:  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$  влечёт  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Пусть даны формулы вывода

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \beta$$

Аналогично предыдущему пункту, перестроим вывод.

Построим «черновик» вывода, приписав  $\alpha$  слева к каждой формуле:

$$\alpha \rightarrow \delta_1, \alpha \rightarrow \delta_2, \dots, \alpha \rightarrow \delta_{n-1}, \alpha \rightarrow \beta$$

Доказательство:  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$  влечёт  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Пусть даны формулы вывода

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \beta$$

Аналогично предыдущему пункту, перестроим вывод.

Построим «черновик» вывода, приписав  $\alpha$  слева к каждой формуле:

$$\alpha \rightarrow \delta_1, \alpha \rightarrow \delta_2, \dots, \alpha \rightarrow \delta_{n-1}, \alpha \rightarrow \beta$$

Данная последовательность формул не обязательно вывод:  $\Gamma := \emptyset, \alpha := A$

$$\delta_1 := A \rightarrow B \rightarrow A$$

Доказательство:  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$  влечёт  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Пусть даны формулы вывода

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \beta$$

Аналогично предыдущему пункту, перестроим вывод.

Построим «черновик» вывода, приписав  $\alpha$  слева к каждой формуле:

$$\alpha \rightarrow \delta_1, \alpha \rightarrow \delta_2, \dots, \alpha \rightarrow \delta_{n-1}, \alpha \rightarrow \beta$$

Данная последовательность формул не обязательно вывод:  $\Gamma := \emptyset, \alpha := A$

$$\delta_1 := A \rightarrow B \rightarrow A$$

припишем  $A$  слева — вывод не получим:

$$\alpha \rightarrow \delta_1 \equiv A \rightarrow (A \rightarrow B \rightarrow A)$$

# Последовательности, странная нумерация

Определение (конечная последовательность)

Функция  $\delta : 1 \dots n \rightarrow \mathcal{F}$

Определение (конечная последовательность, индексированная дробными числами)

Функция  $\zeta : I \rightarrow \mathcal{F}$ , где  $I \subset \mathbb{Q}$  и  $I$  конечно.

Пример (странный мотивационный пример: язык Фокал)

Программа		Вывод	
10.1	t n, !	=	0.0000
10.15	s n = n+1	=	1.0000
10.17	i (n-3) 10.1, 11.0, 11.0	=	2.0000
11.0	t "That's all"		That's all



Доказательство:  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$  влечёт  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Доказательство.

(индукция по длине вывода). Если  $\delta_1, \dots, \delta_n$  — вывод  $\Gamma, \alpha \vdash \delta_n$ , то найдётся вывод  $\zeta_k$  для  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \delta_n$ , причём  $\zeta_1 \equiv \alpha \rightarrow \delta_1, \dots, \zeta_n \equiv \alpha \rightarrow \delta_n$ .

- ▶ База ( $n = 1$ ): частный случай перехода (без M.P.).
- ▶ Переход. Пусть  $\delta_1, \dots, \delta_{n+1}$  — исходный вывод. И пусть (по индукционному предположению) уже по начальному фрагменту  $\delta_1, \dots, \delta_n$  построен вывод  $\zeta_k$  утверждения  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \delta_n$ .

Но  $\delta_{n+1}$  как-то был обоснован — разберём случаи:

1.  $\delta_{n+1}$  — аксиома или  $\delta_{n+1} \in \Gamma$
2.  $\delta_{n+1} \equiv \alpha$

Доказательство:  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$  влечёт  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Доказательство.

(индукция по длине вывода). Если  $\delta_1, \dots, \delta_n$  — вывод  $\Gamma, \alpha \vdash \delta_n$ , то найдётся вывод  $\zeta_k$  для  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \delta_n$ , причём  $\zeta_1 \equiv \alpha \rightarrow \delta_1, \dots, \zeta_n \equiv \alpha \rightarrow \delta_n$ .

- ▶ База ( $n = 1$ ): частный случай перехода (без M.P.).
- ▶ Переход. Пусть  $\delta_1, \dots, \delta_{n+1}$  — исходный вывод. И пусть (по индукционному предположению) уже по начальному фрагменту  $\delta_1, \dots, \delta_n$  построен вывод  $\zeta_k$  утверждения  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \delta_n$ .

Но  $\delta_{n+1}$  как-то был обоснован — разберём случаи:

1.  $\delta_{n+1}$  — аксиома или  $\delta_{n+1} \in \Gamma$
2.  $\delta_{n+1} \equiv \alpha$
3.  $\delta_{n+1}$  — Modus Ponens из  $\delta_j$  и  $\delta_k \equiv \delta_j \rightarrow \delta_{n+1}$ .

В каждом из случаев можно дополнить черновик до полноценного вывода.



Доказательство:  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$  влечёт  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ , случай аксиомы

№ п/п	новый вывод	пояснение
	...	
(1)	$\alpha \rightarrow \delta_1$	
	...	
(2)	$\alpha \rightarrow \delta_2$	
	...	
(n)	$\alpha \rightarrow \delta_n$	
	$\alpha \rightarrow \delta_{n+1}$	$\delta_{n+1}$ — аксиома, либо $\delta_{n+1} \in \Gamma$

Доказательство:  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$  влечёт  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ , случай аксиомы

№ п/п	НОВЫЙ ВЫВОД	ПОЯСНЕНИЕ
	...	
(1)	$\alpha \rightarrow \delta_1$	
	...	
(2)	$\alpha \rightarrow \delta_2$	
	...	
$(n + 0.3)$	$\delta_{n+1} \rightarrow \alpha \rightarrow \delta_{n+1}$	схема аксиом 1
$(n + 0.6)$	$\delta_{n+1}$	аксиома, либо $\delta_{n+1} \in \Gamma$
$(n + 1)$	$\alpha \rightarrow \delta_{n+1}$	М.Р. $n + 0.6, n + 0.3$

Доказательство:  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$  влечёт  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ , случай  $\delta_{n+1} \equiv \alpha$

№ п/п	новый вывод	пояснение
	...	
(1)	$\alpha \rightarrow \delta_1$	
	...	
(2)	$\alpha \rightarrow \delta_2$	
	...	
$(n + 0.2)$	$\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$	Сх. акс. 1
$(n + 0.4)$	$(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$	Сх. акс. 2
$(n + 0.6)$	$(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$	М.Р. $n + 0.2, n + 0.4$
$(n + 0.8)$	$\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$	Сх. акс. 1
$(n + 1)$	$\alpha \rightarrow \alpha$	М.Р. $n + 0.8, n + 0.6$

Доказательство:  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$  влечёт  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ , случай Modus Ponens

№ п/п	НОВЫЙ ВЫВОД	ПОЯСНЕНИЕ
	...	
(1)	$\alpha \rightarrow \delta_1$	
	...	
(2)	$\alpha \rightarrow \delta_2$	
	...	
(j)	$\alpha \rightarrow \delta_j$	
	...	
(k)	$\alpha \rightarrow \delta_j \rightarrow \delta_{n+1}$	
	...	
(n + 0.3)	$(\alpha \rightarrow \delta_j) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta_j \rightarrow \delta_{n+1}) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta_{n+1})$	Сх. акс. 2
(n + 0.6)	$(\alpha \rightarrow \delta_j \rightarrow \delta_{n+1}) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta_{n+1})$	M.P. j, n + 0.3
(n + 1)	$\alpha \rightarrow \delta_{n+1}$	M.P. k, n + 0.6

## Некоторые полезные правила

### Лемма (Правило контрапозиции)

*Каковы бы ни были формулы  $\alpha$  и  $\beta$ , справедливо, что  $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$ .*

## Некоторые полезные правила

### Лемма (Правило контрапозиции)

*Каковы бы ни были формулы  $\alpha$  и  $\beta$ , справедливо, что  $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$ .*

### Лемма (правило исключённого третьего)

*Какова бы ни была формула  $\alpha$ ,  $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$ .*

### Лемма (об исключении допущения)

*Пусть справедливо  $\Gamma, \rho \vdash \alpha$  и  $\Gamma, \neg\rho \vdash \alpha$ . Тогда также справедливо  $\Gamma \vdash \alpha$ .*

### Доказательство.

Доказывается с использованием лемм, указанных выше.





# Теорема о полноте исчисления высказываний

## Теорема

*Если  $\models \alpha$ , то  $\vdash \alpha$ .*

## Специальное обозначение

### Определение (условное отрицание)

Зададим некоторую оценку переменных, такую, что  $\llbracket \alpha \rrbracket = x$ .

Тогда условным отрицанием формулы  $\alpha$  назовём следующую формулу  $\langle \alpha \rangle$ :

$$\langle \alpha \rangle = \begin{cases} \alpha, & x = \text{И} \\ \neg \alpha, & x = \text{Л} \end{cases}$$

Аналогично записи для оценок, будем указывать оценку переменных, если это потребуется / будет неочевидно из контекста:

$$\langle \neg X \rangle^{X:=\text{Л}} = \neg X \qquad \langle \neg X \rangle^{X:=\text{И}} = \neg \neg X$$

Также, если  $\Gamma := \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ , то за  $\langle \Gamma \rangle$  обозначим  $\langle \gamma_1 \rangle, \langle \gamma_2 \rangle, \dots, \langle \gamma_n \rangle$ .

## Таблицы истинности и высказывания

Рассмотрим связку «импликация» и её таблицу истинности:

$\llbracket A \rrbracket$	$\llbracket B \rrbracket$	$\llbracket A \rightarrow B \rrbracket$	формула
Л	Л	И	$\neg A, \neg B \vdash A \rightarrow B$
Л	И	И	$\neg A, B \vdash A \rightarrow B$
И	Л	Л	$A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$
И	И	И	$A, B \vdash A \rightarrow B$

## Таблицы истинности и высказывания

Рассмотрим связку «импликация» и её таблицу истинности:

$\llbracket A \rrbracket$	$\llbracket B \rrbracket$	$\llbracket A \rightarrow B \rrbracket$	формула
Л	Л	И	$\neg A, \neg B \vdash A \rightarrow B$
Л	И	И	$\neg A, B \vdash A \rightarrow B$
И	Л	Л	$A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$
И	И	И	$A, B \vdash A \rightarrow B$

Заметим, что с помощью условного отрицания данную таблицу можно записать в одну строку:

$$\langle A \rangle, \langle B \rangle \vdash \langle A \rightarrow B \rangle$$

# Полнота исчисления высказываний

Теорема (О полноте исчисления высказываний)

*Если  $\models \alpha$ , то  $\vdash \alpha$*

# Полнота исчисления высказываний

## Теорема (О полноте исчисления высказываний)

Если  $\models \alpha$ , то  $\vdash \alpha$

1. Построим таблицы истинности для каждой связки ( $\star$ ) и докажем в них каждую строку:

$$\models \varphi, \models \psi \vdash \models \varphi \star \psi$$

# Полнота исчисления высказываний

## Теорема (О полноте исчисления высказываний)

Если  $\models \alpha$ , то  $\vdash \alpha$

1. Построим таблицы истинности для каждой связки ( $\star$ ) и докажем в них каждую строку:

$$\langle \varphi \rangle, \langle \psi \rangle \vdash \langle \varphi \star \psi \rangle$$

2. Построим таблицу истинности для  $\alpha$  и докажем в ней каждую строку:

$$\langle \Xi \rangle \vdash \langle \alpha \rangle$$

# Полнота исчисления высказываний

## Теорема (О полноте исчисления высказываний)

Если  $\models \alpha$ , то  $\vdash \alpha$

1. Построим таблицы истинности для каждой связки ( $\star$ ) и докажем в них каждую строку:

$$\langle \varphi \rangle, \langle \psi \rangle \vdash \langle \varphi \star \psi \rangle$$

2. Построим таблицу истинности для  $\alpha$  и докажем в ней каждую строку:

$$\langle \Xi \rangle \vdash \langle \alpha \rangle$$

3. Если формула общезначима, то в ней все строки будут иметь вид  $\langle \Xi \rangle \vdash \alpha$ , потому от гипотез мы сможем избавиться и получить требуемое  $\vdash \alpha$ .



## Шаг 1. Лемма о связках

Запись

$$\langle \varphi \rangle, \langle \psi \rangle \vdash \langle \varphi \star \psi \rangle$$

сводится к 14 утверждениям:

$$\neg\varphi, \neg\psi \vdash \neg(\varphi \& \psi)$$

$$\neg\varphi, \psi \vdash \neg(\varphi \& \psi)$$

$$\varphi, \neg\psi \vdash \neg(\varphi \& \psi)$$

$$\varphi, \psi \vdash (\varphi \& \psi)$$

$$\neg\varphi, \neg\psi \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$$

$$\neg\varphi, \psi \vdash (\varphi \vee \psi)$$

$$\varphi, \neg\psi \vdash (\varphi \vee \psi)$$

$$\varphi, \psi \vdash (\varphi \vee \psi)$$

$$\neg\varphi, \neg\psi \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$$

$$\neg\varphi, \psi \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$$

$$\varphi, \neg\psi \vdash \neg(\varphi \rightarrow \psi)$$

$$\varphi, \psi \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$$

$$\varphi \vdash \neg\neg\varphi$$

$$\neg\varphi \vdash \neg\varphi$$

## Шаг 2. Обобщение на любую формулу

### Лемма (Условное отрицание формул)

*Пусть пропозициональные переменные  $\Xi := \{X_1, \dots, X_n\}$  — все переменные, которые используются в формуле  $\alpha$ . И пусть задана некоторая оценка переменных. Тогда,  $(\Xi) \vdash (\neg\alpha)$*

## Шаг 2. Обобщение на любую формулу

### Лемма (Условное отрицание формул)

*Пусть пропозициональные переменные  $\Xi := \{X_1, \dots, X_n\}$  — все переменные, которые используются в формуле  $\alpha$ . И пусть задана некоторая оценка переменных. Тогда,  $(\Xi) \vdash (\alpha)$*

### Доказательство.

Индукция по длине формулы  $\alpha$ .

- ▶ База: формула  $\alpha$  — атомарная, т.е.  $\alpha \equiv X_i$ . Тогда при любом  $\Xi$  выполнено  $(\Xi)^{X_i:=И} \vdash X_i$  и  $(\Xi)^{X_i:=Л} \vdash \neg X_i$ .
- ▶ Переход:  $\alpha \equiv \varphi \star \psi$ , причём  $(\Xi) \vdash (\varphi)$  и  $(\Xi) \vdash (\psi)$

## Шаг 2. Обобщение на любую формулу

### Лемма (Условное отрицание формул)

Пусть пропозициональные переменные  $\Xi := \{X_1, \dots, X_n\}$  — все переменные, которые используются в формуле  $\alpha$ . И пусть задана некоторая оценка переменных. Тогда,  $(\Xi) \vdash \langle \alpha \rangle$

### Доказательство.

Индукция по длине формулы  $\alpha$ .

- ▶ База: формула  $\alpha$  — атомарная, т.е.  $\alpha \equiv X_i$ . Тогда при любом  $\Xi$  выполнено  $(\Xi)^{X_i:=\text{И}} \vdash X_i$  и  $(\Xi)^{X_i:=\text{Л}} \vdash \neg X_i$ .
- ▶ Переход:  $\alpha \equiv \varphi \star \psi$ , причём  $(\Xi) \vdash \langle \varphi \rangle$  и  $(\Xi) \vdash \langle \psi \rangle$

Тогда построим вывод:

(1) ... (n)	$\langle \varphi \rangle$	индукционное предположение
(n + 1) ... (k)	$\langle \psi \rangle$	индукционное предположение
(k + 1) ... (l)	$\langle \varphi \star \psi \rangle$	лемма о связках: $\langle \varphi \rangle$ и $\langle \psi \rangle$ доказаны выше, значит, их можно использовать как гипотезы



## Шаг 3. Избавляемся от гипотез

### Лемма

*Пусть при всех оценках переменных  $(\Xi) \vdash \alpha$ , тогда  $\vdash \alpha$ .*

## Шаг 3. Избавляемся от гипотез

### Лемма

Пусть при всех оценках переменных  $(\Xi) \vdash \alpha$ , тогда  $\vdash \alpha$ .

### Доказательство.

Индукция по количеству переменных  $n$ .

- База:  $n = 0$ . Тогда  $\vdash \alpha$  есть из условия.

## Шаг 3. Избавляемся от гипотез

### Лемма

Пусть при всех оценках переменных  $(\Xi) \vdash \alpha$ , тогда  $\vdash \alpha$ .

### Доказательство.

Индукция по количеству переменных  $n$ .

- ▶ База:  $n = 0$ . Тогда  $\vdash \alpha$  есть из условия.
- ▶ Переход: пусть  $(X_1, X_2, \dots, X_{n+1}) \vdash \alpha$ . Рассмотрим  $2^n$  пар выводов:

$$(X_1, X_2, \dots, X_n), X_{n+1} \vdash \alpha \quad (X_1, X_2, \dots, X_n), \neg X_{n+1} \vdash \alpha$$

По лемме об исключении допущения тогда

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) \vdash \alpha$$

При этом,  $(X_1, X_2, \dots, X_n) \vdash \alpha$  при всех оценках переменных  $X_1, \dots, X_n$ . Значит,  $\vdash \alpha$  по индукционному предположению. □

## Заключительные замечания

Теорема о полноте — конструктивна. Получающийся вывод — экспоненциальный по длине.

Несложно по изложенному доказательству разработать программу, строящую вывод.

Вывод для формулы с 3 переменными — порядка 3 тысяч строк.



# Интуиционистская логика

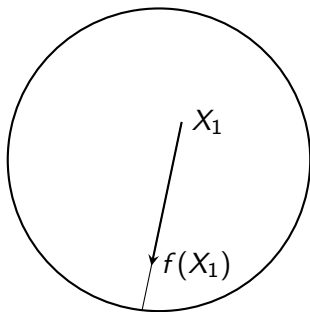
## Доказательства чистого существования

### Теорема (Брауэра о неподвижной точке)

*Любое непрерывное отображение  $f$  шара в  $\mathbb{R}^n$  на себя имеет неподвижную точку*

### Доказательство.

Не существует непрерывного отображения шара на границу (без доказательства),  
однако:



Один из примеров подробно

### Теорема

*Существует пара иррациональных чисел  $a$  и  $b$ , такая, что  $a^b$  — рационально.*

## Один из примеров подробно

### Теорема

*Существует пара иррациональных чисел  $a$  и  $b$ , такая, что  $a^b$  — рационально.*

- ▶  $2^5, 3^3, 7^{10}, \sqrt{2}^2$  — рациональны;
- ▶  $2^{\sqrt{2}}, e^{\pi}$  — иррациональны (как это доказать?);

## Один из примеров подробно

### Теорема

*Существует пара иррациональных чисел  $a$  и  $b$ , такая, что  $a^b$  — рационально.*

### Доказательство.

Рассмотрим  $a = b = \sqrt{2}$  и рассмотрим  $a^b$ . Возможны два варианта:

1.  $a^b = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  — рационально;
2.  $a^b = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  — иррационально; отлично, тогда возьмём  $a_1 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  и получим

$$a_1^b = \left( \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$



# Интуиционизм

“Over de Grondslagen der Wiskunde” (Брайэр, 1907 г.)

Основные положения:

1. Математика не формальна.
2. Математика независима от окружающего мира.
3. Математика не зависит от логики — это логика зависит от математики.

# ВНК-интерпретация логических связей

ВНК — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

## ВНК-интерпретация логических связок

ВНК — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть  $\alpha, \beta$  — некоторые конструкции, тогда:



# ВНК-интерпретация логических связей

ВНК — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть  $\alpha$ ,  $\beta$  — некоторые конструкции, тогда:

- ▶  $\alpha \ \& \ \beta$  построено, если построены  $\alpha$  и  $\beta$

# ВНК-интерпретация логических связей

ВНК — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть  $\alpha$ ,  $\beta$  — некоторые конструкции, тогда:

- ▶  $\alpha \& \beta$  построено, если построены  $\alpha$  и  $\beta$
- ▶  $\alpha \vee \beta$  построено, если построено  $\alpha$  или  $\beta$ , и мы знаем, что именно

# ВНК-интерпретация логических связей

ВНК — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть  $\alpha$ ,  $\beta$  — некоторые конструкции, тогда:

- ▶  $\alpha \& \beta$  построено, если построены  $\alpha$  и  $\beta$
- ▶  $\alpha \vee \beta$  построено, если построено  $\alpha$  или  $\beta$ , и мы знаем, что именно
- ▶  $\alpha \rightarrow \beta$  построено, если есть способ перестроения  $\alpha$  в  $\beta$

# ВНК-интерпретация логических связей

ВНК — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть  $\alpha$ ,  $\beta$  — некоторые конструкции, тогда:

- ▶  $\alpha \& \beta$  построено, если построены  $\alpha$  и  $\beta$
- ▶  $\alpha \vee \beta$  построено, если построено  $\alpha$  или  $\beta$ , и мы знаем, что именно
- ▶  $\alpha \rightarrow \beta$  построено, если есть способ перестроения  $\alpha$  в  $\beta$
- ▶  $\perp$  — конструкция, не имеющая построения

# ВНК-интерпретация логических связей

ВНК — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть  $\alpha, \beta$  — некоторые конструкции, тогда:

- ▶  $\alpha \& \beta$  построено, если построены  $\alpha$  и  $\beta$
- ▶  $\alpha \vee \beta$  построено, если построено  $\alpha$  или  $\beta$ , и мы знаем, что именно
- ▶  $\alpha \rightarrow \beta$  построено, если есть способ перестроения  $\alpha$  в  $\beta$
- ▶  $\perp$  — конструкция, не имеющая построения
- ▶  $\neg\alpha$  построено, если построено  $\alpha \rightarrow \perp$

## Дизъюнкция

Конструкция  $\alpha \vee \neg\alpha$  не имеет построения в общем случае. Что может быть построено:  $\alpha$  или  $\neg\alpha$ ?

## Дизъюнкция

Конструкция  $\alpha \vee \neg\alpha$  не имеет построения в общем случае. Что может быть построено:  $\alpha$  или  $\neg\alpha$ ?

Возьмём за  $\alpha$  нерешённую проблему, например,  $P = NP$

## Дизъюнкция

Конструкция  $\alpha \vee \neg\alpha$  не имеет построения в общем случае. Что может быть построено:  $\alpha$  или  $\neg\alpha$ ?

Возьмём за  $\alpha$  нерешённую проблему, например,  $P = NP$

Авторам в данный момент не известно, выполнено  $P = NP$  или же  $P \neq NP$ .



## Отличия импликации

Высказывание общезначимо в И.В. и не выполнено в ВНК-интерпретации:

$$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$$

## Отличия импликации

Высказывание общезначимо в И.В. и не выполнено в ВНК-интерпретации:

$$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$$

Давайте дадим следующий смысл пропозициональным переменным:

- ▶  $A$  — 13.09.2025 в Санкт-Петербурге идёт дождь;
- ▶  $B$  — 13.09.2025 в Санкт-Петербурге светит солнце;
- ▶  $C$  — во 2 семестре ровно 3 человека из группы 3239 получили «отлично» по матанализу.

## Отличия импликации

Высказывание общезначимо в И.В. и не выполнено в ВНК-интерпретации:

$$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$$

Давайте дадим следующий смысл пропозициональным переменным:

- ▶  $A$  — 13.09.2025 в Санкт-Петербурге идёт дождь;
- ▶  $B$  — 13.09.2025 в Санкт-Петербурге светит солнце;
- ▶  $C$  — во 2 семестре ровно 3 человека из группы 3239 получили «отлично» по матанализу.

Импликацию можно понимать как «формальную» и как «материальную».

- ▶ Материальная импликация  $A \rightarrow B$  — надо посмотреть в окно.

## Отличия импликации

Высказывание общезначимо в И.В. и не выполнено в ВНК-интерпретации:

$$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$$

Давайте дадим следующий смысл пропозициональным переменным:

- ▶  $A$  — 13.09.2025 в Санкт-Петербурге идёт дождь;
- ▶  $B$  — 13.09.2025 в Санкт-Петербурге светит солнце;
- ▶  $C$  — во 2 семестре ровно 3 человека из группы 3239 получили «отлично» по матанализу.

Импликацию можно понимать как «формальную» и как «материальную».

- ▶ Материальная импликация  $A \rightarrow B$  — надо посмотреть в окно.
- ▶ Формальная импликация  $A \rightarrow B$  места не имеет (причинно-следственной связи нет).

# Формализация

Формализация интуиционистской логики возможна, но интуитивное понимание — основное.

## Определение

*Аксиоматика интуиционистского исчисления высказываний в гильбертовском стиле: аксиоматика КИВ, в которой 10 схема аксиом*

$$(10) \quad \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$$

*заменена на*

$$(10и) \quad \alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$$

## Интуиционистское И.В. (натуральный, естественный вывод)

- ▶ Формулы языка (секвенции) имеют вид:  $\Gamma \vdash \alpha$ . Правила вывода:
- ▶ Аксиома:
$$\frac{\text{посылка 1} \quad \text{посылка 2} \quad \dots}{\text{заключение}} \quad (\text{аннотация})$$
$$\frac{}{\Gamma, \alpha \vdash \alpha} \quad (\text{акс.})$$
- ▶ Правила введения связок:
$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta} \quad \frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta}, \quad \frac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta} \quad \frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \& \beta}$$
- ▶ Правила удаления связок:
$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta}{\Gamma \vdash \beta} \quad \frac{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma \quad \Gamma \vdash \beta \rightarrow \gamma \quad \Gamma \vdash \alpha \vee \beta}{\Gamma \vdash \gamma}$$
$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \& \beta}{\Gamma \vdash \alpha} \quad \frac{\Gamma \vdash \alpha \& \beta}{\Gamma \vdash \beta} \quad \frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \alpha}$$
- ▶ Пример доказательства:
$$\frac{\frac{\frac{A \& B \vdash A \& B}{A \& B \vdash B} \quad (\text{акс.})}{A \& B \vdash B} \quad (\text{удал}\&) \quad \frac{\frac{\frac{A \& B \vdash A \& B}{A \& B \vdash A} \quad (\text{акс.})}{A \& B \vdash A} \quad (\text{удал}\&)}{A \& B \vdash B \& A} \quad (\text{введ}\&)$$

## Связь с продемонстрированным ранее гильбертовским вариантом КИВ

- ▶ Немного другой предметный язык: гипотезы включены в формулу (соответственно, в натуральном выводе  $\vdash$  есть часть предметного языка!), вместо одноместного  $\neg$  нульместный  $\perp$ , можно рассмотреть  $|\alpha|_г$  и  $|\alpha|_н$ .
- ▶ Для исключения различий, будем писать индексы снизу (метаязык):  $\vdash_и \alpha$ ,  $\vdash_к \alpha$ .
- ▶ Классический нормальный вывод получится при замене “принципа взрыва” на “снятие двойного отрицания”:

$$\frac{\Gamma \vdash (A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp}{\Gamma \vdash A}$$

- ▶ Можно показать эквивалентность при помощи индукции:
  - ▶  $\Gamma \vdash_{ги} \alpha$  влечёт выводимость  $|\Gamma|_н \vdash_{ни} |\alpha|_н$
  - ▶ Выводимость  $\Gamma \vdash_{ни} \alpha$  влечёт  $|\Gamma|_{ги} \vdash_г |\alpha|_{ги}$ .

Немного об общей топологии.



# Топологическое пространство

## Определение

Топологическим пространством называется упорядоченная пара  $\langle X, \Omega \rangle$ , где  $X$  — некоторое множество, а  $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$ , причём:

1.  $\emptyset, X \in \Omega$
2. если  $A_1, \dots, A_n \in \Omega$ , то  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \Omega$ ;
3. если  $\{A_\alpha\}$  — семейство множеств из  $\Omega$ , то и  $\bigcup_\alpha A_\alpha \in \Omega$ .

Множество  $\Omega$  называется топологией. Элементы  $\Omega$  называются открытыми множествами.

## Определение

Внутренность множества  $A^\circ$  — наибольшее  $T$ , что  $T \in \Omega$  и  $T \subseteq A$ .

# Топологические пространства как модель ИИВ

## Теорема

Если  $\langle X, \Omega \rangle$  — некоторое топологическое пространство, то следующий способ оценки высказываний даёт корректную модель ИИВ:  $V = \Omega$ ,  $i = X$  и

$$\llbracket \alpha \ \& \ \beta \rrbracket = \llbracket \alpha \rrbracket \cap \llbracket \beta \rrbracket$$

$$\llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket = \llbracket \alpha \rrbracket \cup \llbracket \beta \rrbracket$$

$$\llbracket \neg \alpha \rrbracket = (c \llbracket \alpha \rrbracket)^\circ$$

$$\llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket = (c \llbracket \alpha \rrbracket \cup \llbracket \beta \rrbracket)^\circ$$

## Определение

$\models \alpha$  в топологических моделях, если при всех  $\langle X, \Omega \rangle$  имеет место  $\llbracket \alpha \rrbracket = X$ .

## Теорема

Полнота топологических моделей ИИВ:  $\models \alpha$  тогда и только тогда, когда  $\vdash_i \alpha$ .