

I. Алгебраические системы и алгебраические операции. Группы

1. Являются ли алгебраическими системами следующие объекты:
 - а) $\langle \mathbb{Q}_{>0}, \sqrt{} \rangle$; б) $\langle \mathbb{R}_{>0}, \sqrt{} \rangle$; в) $\langle \mathbb{N}, - \rangle$; г) $\langle \mathbb{Z}, : \rangle$; д) $\langle \mathbb{Q}, : \rangle$; е) $\langle \mathbb{Q} \setminus \{0\}, : \rangle$?
2. Относительно каких операций, заданных на множестве \mathbb{Z} , замкнуты множества $2\mathbb{Z}$ и $2\mathbb{Z} + 1$? Рассмотрите бинарные операции: сложение, умножение, взятие НОДа; а также унарные операции: взятие противоположного элемента, удвоение, утроение.
3. Найдите все конечные подсистемы алгебраических систем:
 - а) $\langle \mathbb{Z}, f \rangle$, где f — унарная операция удвоения;
 - б) $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$;
 - в) $\langle X, f \rangle$, где X — множество точек плоскости, f — тернарная операция, сопоставляющая трём точкам A, B, C точку пересечения медиан треугольника ABC (возможно, вырожденного).
4. Ассоциативна ли операция $*$ на множестве M , если:
 - а) $M = \mathbb{N}$, $x * y = x^y$;
 - б) $M = \mathbb{N}$, $x * y = \text{НОД}(x, y)$;
 - в) $M = \mathbb{N}$, $x * y = 2xy$;
 - г) $M = \mathbb{Z}$, $x * y = x - y$;
 - д) $M = \mathbb{Z}$, $x * y = x^2 + y^2$;
 - е) $M = \mathbb{R}$, $x * y = \sin x \cdot \sin y$;
 - ж) $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x * y = x \cdot y^{\frac{x}{|x|}}$?
5. Составьте таблицу Кэли для операций на множестве $M = \{1, 2, 3, 4\}$:
 - а) $a * b = \min\{2a, b\}$;
 - б) $a * b = a + b - \max\{a, b\}$.

Являются ли операции коммутативными? Имеют ли они нейтральный элемент?
6. На множестве M определена операция $*$ по правилу $x * y = x$. Докажите, что $\langle M, * \rangle$ является полугруппой. Что можно сказать о её нейтральных и обратимых элементах? В каких случаях она является группой?

7. Какие из указанных структур являются группами:

а) $\langle \{-1, 1\}, \cdot \rangle$;

б) $\langle \mathbb{Z}_6, \cdot \rangle$.

в) множество степеней данного ненулевого вещественного числа с натуральными показателями относительно умножения;

г) множество всех непрерывных монотонно возрастающих функций из $[0, 1]$ в $[0, 1]$, для которых $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, относительно операции композиции;

д) функции $x, -x, \frac{1}{x}, -\frac{1}{x}$ на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ относительно операции композиции;

е) множество $\mathcal{P}(M)$ всех подмножеств некоторого множества M относительно операции симметрической разности $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (B \cap A)$?

Какие из групп являются абелевыми?

8. Составьте таблицу Кэли для:

а) группы симметрий правильного треугольника;

б) множества функций $x, 1 - x, \frac{1}{x}, \frac{x-1}{x}, \frac{x}{x-1}, \frac{1}{1-x}$ на $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ с операцией композиции. Убедитесь, что эта структура является группой.

Абелевы ли эти группы? Сравните их таблицы Кэли.

9. Докажите, что если в группе выполнено тождество $x^2 = e$, то эта группа абелева.

10. Докажите, что любая группа третьего порядка абелева.

11* Каждой паре вещественных чисел x и y поставлено в соответствие некоторое число $x * y$. Найдите $2024 * 2025$, если известно, что для любых трёх чисел x, y и z выполнены тождества: $x * x = 0$ и $x * (y * z) = (x * y) + z$.

12* На доске написано 2024 числа:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{2024}.$$

За один ход требуется стереть любые два числа a и b и вместо них написать число $a + b + ab$. Сделано 2023 хода и на доске осталось одно число. Какое это число может быть? Укажите все варианты.