Факторгруппа. Смежные классы

$\triangleleft \langle \mathbb{Z}_n, + \rangle$

$x, y \in \mathbb{Z}$

$x \equiv y \pmod{n} \iff (x-y) \vdots n$

$(x-y)+(y-z) = x-z = kn+sn = n(k+s) \vdots n$

$\downarrow$

отношение эквивалентности

$\exists \quad n = 3$

экв $x \equiv y \pmod{3}$ — согласован с сложением на $\mathbb{Z}$

-3	-2	-1
0	1	2
3	4	5
6	7	8
9	10	11
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

$\exists \quad \bar{a} \quad 3x+a$

$\bar{b} \quad 3y+b$

$$(3x+a)+(3y+b) = 3(x+y)+(a+b)$$

$$\parallel$$

$$(3x'+a)+(3y'+b) = 3(x'+y')+(a+b)$$

$\Downarrow$

$\mathbb{Z} \supseteq n\mathbb{Z}$

Опр.: мн-во классов эквивалентности наз <u>фактор-множеством</u>

$G \geqslant H$

$g_1 \quad g_2$

$$g_1 \equiv g_2 \pmod H \Leftrightarrow g_1^{-1} g_2 \in H$$

Пр.:

$(-g_1) + g_2 \in n\mathbb{Z}$

$g_1 \equiv g_2 \pmod H$ – отном экв.

1) $g_1 \equiv_H g_1$

$g_1^{-1} g = e \in H$ ✓

2) $g_1 \equiv g_2 \overset{?}{\Rightarrow} g_2 \equiv g_1$

$g_1^{-1} g_2 \in H \overset{?}{\Rightarrow} g_2^{-1} g_1 \in H$

$(xy)^{-1} = y^{-1} x^{-1}$

$\sqcup^{-1}$ – антиавтоморфизм т.к. $\varphi(xy) = \varphi(y)\varphi(x)$

$(g_1^{-1} g_2)^{-1} = g_2^{-1} g_1 \in H$ ✓

3) $g_1 \equiv g_2 \qquad g_2 \equiv g_3$

$\Downarrow$

$g_1 \equiv g_3$

$g_1^{-1} g_2 \in H \qquad g_2^{-1} g_3 \in H$

$(g_1^{-1} g_2)(g_2^{-1} g_3) = g_1^{-1}(g_2 g_2^{-1}) g_3 = g_1^{-1} g_3 \in H$ ✓

отнош экв

разбивает G на непересек-е классы эквив-ти

$< gH = \{gh \mid h \in H\} \to$ левый смежный класс

$g_1 H = \{g_1 h \mid h \in H\}$

$g_2 = g_1 h \quad / \cdot g^{-1}$

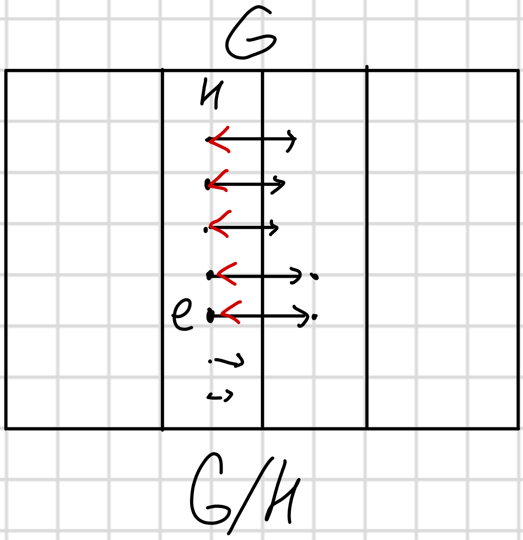
$g_1^{-1} g_2 = h \in H$

Св-ва смеж. классов:

1) образуют разбиение G на непересек. классы (левое разложение)

$G = G_1 \sqcup G_2 \sqcup \ldots$

2)



$$\begin{array}{ccc} H & \xleftrightarrow{\text{биекция}} & gH \\ \Psi & & \Psi \\ h & \mapsto & gh \end{array}$$

$\Rightarrow |H| = |gH|$

G/H - мн-во левых смежных классов

$\exists G$ - конеч. группа

$|G| = |H| \cdot |G/H|$

т. Лагранжа.

Число смежных классов - индекс подгруппы - H

∢ правые смежн. классы

$$Hg = \{hg \mid h \in H\} \qquad [H \backslash G]$$

$$g \mapsto g^{-1} \qquad (gH)^{-1} = Hg^{-1}$$

Нормальные подгруппы

$H \le G$ H – нормальная $\iff \forall g \in G \quad gH = Hg$

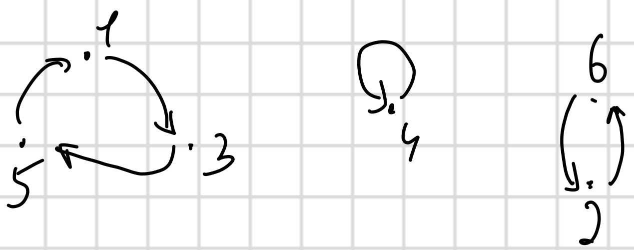
$[H \trianglelefteq G]$

Замечание: если G – абелева → в ней все подгруппы нормальны

Лемма: (из любого следует любое)

1) $H \trianglelefteq G$
2) $gHg^{-1} = H \quad \forall g \in G$
3) $ghg^{-1} \in H \quad \forall g \in G \quad \forall h \in H$

∢ $(1\,3\,5)(4)(2\,6)$



$$] \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 & i_6 \end{pmatrix} = \pi$$

$\sigma : x \mapsto y$

$\uparrow \qquad \uparrow$

$\pi(x) \mapsto \pi(y)$

$\sigma\pi^{-1}$ — чтобы получить x из $\pi(x)$

$\pi\sigma\pi^{-1}$ чтобы получить $\pi(y)$

$\Updownarrow$

ghg^{-1} из п.(3)

g — сопрягающий эл.

он — сопряжение

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "\sigma"] & y \arrow[d, "\pi"] \\ \pi(x) \arrow[u, "\pi^{-1}"] \arrow[r, mapsto] \arrow[ur, bend left, start anchor=north west, end anchor=east] & \pi(y) \end{tikzcd}$$

подгрупп норм-ал

$\triangleright$ $(1) \Leftrightarrow (2)$ $\quad \exists\ gH = Hg \quad | \cdot g^{-1}$

$gHg^{-1} = H \quad | \cdot g$

$gH = Hg$ $\blacktriangleleft$

$\triangleright$ (3) $gHg^{-1} \subseteq H$ (более слабое) поэтому докажем $(3) \Rightarrow (2)$

$\forall g \in G \qquad gHg^{-1} \subseteq H$

$\cdot g \,|\, g^{-1}Hg \subseteq H \,|\, \cdot g^{-1}$

$H \subseteq gHg^{-1}$

$$\begin{cases} gHg^{-1} \subseteq H \\ H \subseteq gHg^{-1} \end{cases} \Rightarrow gHg^{-1} = H \quad \blacktriangleleft$$

Опр.: $\exists\ H \trianglelefteq G$

Факторгруппа G/H (т.е. H — нормальна) — мн-во смеж-ых классов с операцией умножения смеж. классов

$A \quad B$ — смеж классы

$$AB = \{ab \mid a \in A,\ b \in B\}$$

$\exists\ A = g_1 H \qquad B = g_2 H$

$$AB = (g_1 H)(g_2 H) = g_1 (H g_2) H \overset{\text{т.к. } H \trianglelefteq G}{=} g_1 g_2 H H = g_1 g_2 H =$$

$= (g_1 g_2) H \leftarrow$ смеж класс H

проверим аксиомы группы

1) Ассоц: $\exists\ A = g_1 H \quad B = g_2 H \quad C = g_3 H$

$$(AB)C = (g_1 g_2 H)(g_3 H) = g_1 g_2 g_3 HH = (g_1 g_2 g_3) H =$$

$$= (g_1 (g_2 g_3)) H = (g_1 H)(g_2 g_3 H) = A(BC) \checkmark$$

2) нейтр

$eH = H$

3) обратн

т.к. H- группа

$$(gH)^{-1} = H^{-1} g^{-1} = H g^{-1} = g^{-1} H$$

Пр.: $G = \mathbb{R}$ $\quad H = 2\pi\mathbb{Z}$

$H \trianglelefteq G$ т.к. $\mathbb{R}$ – абелева

$\mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z}$

$(-x) + y = y - x \in 2\pi\mathbb{Z}$

Классы экв. т.к катимся по прямой с периодом 2π