Алгебра. КТ. Осенний семестр

VIII. Векторные пространства. Базисы

1. Является ли $\mathbb{Z}_n$ свободным $\mathbb{Z}$-модулем?

2. Найдите все гомоморфизмы из $\mathbb{Z}_n$ в $\mathbb{Z}$.

3. Пусть в кольце R нет делителей нуля. Элемент x из R-модуля M называется *элементом кручения*, если $\lambda x = 0$ для некоторого ненулевого $\lambda \in R$. Докажите, что элементы кручения образуют подмодуль. Он называется *подмодулем кручения*.

4. Если подмодуль кручения нулевой, то сам модуль называется *модулем без кручения*. Докажите, что любой гомоморфизм $M \to N$ в модуль без кручения N переводит подмодуль кручения модуля M в нуль.

5. В каких из следующих случаев указанные операции на множестве X задают структуру векторного пространства над полем F?

   а) $F = \mathbb{R}$, X — полуплоскость $\{(x, y)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0\}$, операции сложения и умножения на числа стандартные (покоординатные);

   б) $F = \mathbb{R}$, X — множество геометрических векторов в трёхмерном пространстве, выходящих из начала координат, концы которых лежат на заданной плоскости, операции стандартные;

   в) $F = \mathbb{R}$, $X = (0, +\infty)$, операции сложения $\oplus$ и умножения на числа $\odot$ заданы формулами $u \oplus v = uv$, $\lambda \odot u = u^\lambda$;

   г) $F = \mathbb{R}$, X — множество многочленов f с вещественными коэффициентами, удовлетворяющих условию $f(0) = 0$, операции стандартные;

   д) $F = \mathbb{R}$, X — множество симметрических квадратных матриц порядка n со стандартными операциями. Если да, то какова размерность этого пространства?

   е*) $F = \mathbb{Q}$, X — множество бесконечных последовательностей (a_n) вещественных чисел, удовлетворяющих условию $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, операции стандартные. Если да, то какова размерность этого пространства?

6. Исследуйте на линейную зависимость следующие системы функций ($n > 0$) над $\mathbb{R}$:

   а) $1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n$; б*) $1,\ e^x,\ e^{2x},\ \ldots,\ e^{nx}$; в) $1,\ \ln x,\ \ln 2x,\ \ldots,\ \ln nx$;

   г) $1, \sin x, \cos x, \sin^2 x, \cos^2 x, \ldots, \sin^n x, \cos^n x$; д*) $1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx$.

7*. Докажите линейную независимость всех геометрических прогрессий, начинающихся с единицы, в векторном пространстве бесконечных последовательностей.

8. Проверьте, что система векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ образует базис пространства $\mathbb{R}^n$ и найдите координаты вектора x в этом базисе:

   а) $e_1 = (1,5,3)^{\mathrm{T}}$, $e_2 = (2,7,3)^{\mathrm{T}}$, $e_3 = (3,9,4)^{\mathrm{T}}$, $x = (2,1,1)^{\mathrm{T}}$;

   б) $e_1 = (1,2,-1,2)^{\mathrm{T}}$, $e_2 = (2,3,0,-1)^{\mathrm{T}}$, $e_3 = (1,2,1,4)^{\mathrm{T}}$, $e_4 = (1,3,-1,0)^{\mathrm{T}}$, $x = (7,14,-1,2)^{\mathrm{T}}$.

9. Докажите, что многочлены 1, $t-1$, $(t-1)^2$, $(t-1)^3$, $(t-1)^4$, $(t-1)^5$ образуют базис в пространстве $\mathbb{R}[t]_5$. Найдите координаты многочлена $t^5 - t^4 + t^3 - t^2 + t - 1$ в этом базисе.

10. Докажите, что матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ образуют базис в пространстве $M_2(\mathbb{R})$ и найдите координаты матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ в этом базисе.

11. Докажите, что последовательности $u = (2,3,5,8,13,\ldots)$ и $v = (1,2,3,5,8,\ldots)$ образуют базис в пространстве последовательностей (a_n), удовлетворяющих условию $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, и разложите последовательность $w = (1,1,2,3,5,8,\ldots)$ по этому базису.

12. В пространстве $\mathbb{Q}[x]_2$ перешли от базиса $x^2, x, 1$ к новому базису с помощью матрицы перехода $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите новый базис.

13. Найдите матрицу перехода от базиса $e_1 = (2,3,-2)^{\mathrm{T}}$, $e_2 = (5,0,-1)^{\mathrm{T}}$, $e_3 = (2,1,-1)^{\mathrm{T}}$ к базису $\tilde{e}_1 = (1,1,-1)^{\mathrm{T}}$, $\tilde{e}_2 = (1,-1,0)^{\mathrm{T}}$, $\tilde{e}_3 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

14. В пространстве $\mathbb{R}[t]_3$ найдите матрицу перехода от базиса 1, $1+t$, $1+t^2$, $1+t^3$ к базису $1+t^3$, $t+t^3$, t^2+t^3, t^3.

15.* V — n-мерное векторное пространство над полем F, состоящим из q элементов. Найдите:

   а) число векторов в пространстве V;

   б) число базисов пространства V;

   в) число невырожденных матриц порядка n над полем F;

   г) число вырожденных матриц порядка n над полем F.