Конспект по линейной алгебре

Содержание

1 Пространства

1.1 Модуль над кольцом. Подмодуль, фактормодуль. Гомоморфизм модулей. Свободный модуль

Определение модуля над кольцом:

Пусть R — ассоциативное кольцо, M — абелева группа.

M называется **правым R-модулем**, если определена операция $R \times M \to M$, такая что:

- $a * (b * x) = (a * b) * x$ *(внешняя ассоциативность)*,
- $(a + b) * x = a * x + b * x$,
- $a * (x + y) = a * x + a * y$ *(дистрибутивность)*.

Здесь $a, b \in R$*,* $x, y \in M$*.*
Аналогично определяется **левый R-модуль**.

Унитальный модуль: Если R — кольцо с единицей, то модуль называется *унитальным (унитарным)*, если выполнено дополнительное свойство:

$$1 * x = x \quad \text{для всех} \quad x \in M.$$

Противоположное кольцо: R^o — противоположное кольцо, для которого умножение определяется как:

$$a * b(R^o) = b * a(R).$$

Правый R^o-модуль эквивалентен левому R-модулю.

Определение подмодуля

Подгруппа N абелевой группы M называется **подмодулем**, если $\forall x \in N$ и $\forall a \in R$ выполняется $a * x \in N$.

Определение фактормодуля

Фактормодуль M/N определяется как множество смежных классов:

$$\overline{m} = m + N = \{x \in M \mid x - m \in N\},$$

где:

$$\overline{m} + \overline{n} = \overline{m + n}, \quad a * \overline{m} = \overline{a * m}.$$

Гомоморфизм модулей

Отображение $\varphi : M \to M'$ называется **гомоморфизмом R-модулей**, если:

1. φ — гомоморфизм абелевых групп,
2. $\varphi(a * x) = a * \varphi(x)$ для всех $a \in R$ и $x \in M$.

Свободный модуль

Элементы $x_1, x_2, \dots, x_n$ порождают модуль M, если любой элемент $x \in M$ представляется в виде конечной линейной комбинации:

$$x = a_1 * x_1 + a_2 * x_2 + \dots + a_n * x_n,$$

где $a_i \in R$. Если это представление единственно, то множество $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ называется **базисом** модуля.

Модуль с базисом называется **свободным**.

Пусть одно и то же значение x можно представить в виде двух различных линейных разложений:

$$x = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n, \quad x = b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n.$$

Тогда, приравнивая эти разложения, получаем:

$$0 = (a_1 - b_1)x_1 + (a_2 - b_2)x_2 + \cdots + (a_n - b_n)x_n.$$

Линейная комбинация называется **нетривиальной**, если хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля.

Элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются **линейно зависимыми**, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = 0, \quad \text{где не все } c_i = 0.$$

Принцип компактности: Бесконечная система векторов называется линейно зависимой, если какая-либо конечная подсистема линейно зависима.

1.2 Векторные пространства. Подпространство. Линейные комбинации. Критерий линейной независимости. Линейная оболочка

Определение векторного пространства:
Если $R = F$ — поле, то M называется **векторным пространством** над F.

Следствия:

1. $0 * x = 0$,
2. $-(a * x) = (-a) * x$,
3. $(x - y) * a = x * a - y * a$,
4. **Обобщённая дистрибутивность для левого R-модуля:**

$$(a_1 + \cdots + a_n)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \sum a_i * x_j.$$

Подпространство U пространства V: если $x + y \in U$ и $a * x \in U$.

Критерий линейной зависимости в векторных пространствах: Система векторов $x_1, \ldots, x_n$ линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один вектор выражается через остальные.
Пусть $x_1, \ldots, x_n$ линейно зависимы, тогда существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю:

$$a_1 * x_1 + \cdots + a_n * x_n = 0.$$

Пусть у x_i ненулевой коэффициент, тогда поделим все на a_i, получим:

$$x_i = -\left(\frac{a_1}{a_i} * x_1 + \cdots + \frac{a_n}{a_i} * x_n\right).$$

Линейная оболочка: Линейная оболочка векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in V$ — это множество всех линейных комбинаций этих векторов. Обозначается как:

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle.$$

Если $V = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$, то $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются порождающими пространство V.

1.3 Принадлежность вектора линейной оболочке: метод Гаусса. Совокупность всех решений однородной СЛАУ — подпространство. Теорема о структуре решения неоднородной СЛАУ. Линейное многообразие.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n \in F^k$ и $b \in F^k$. Задача состоит в том, чтобы определить, принадлежит ли b линейной оболочке $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$.

Перепишем это условие в виде системы линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{k2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, у нас есть система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n$.

Определения

- **СЛАУ совместна**, если существует хотя бы одно решение.
- **СЛАУ определена**, если существует единственное решение.
- **СЛАУ несовместна**, если решений нет.
- **Эквивалентные СЛАУ** — это такие СЛАУ, которые имеют одинаковые множества решений.
- **Ведущий элемент строки** — первый ненулевой элемент строки.
- **Ступенчатая матрица** — матрица, в которой номера столбцов ведущих элементов образуют строго возрастающую последовательность, а все нулевые строки находятся в конце.

Лемма

Любую матрицу A над полем F можно привести к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк.

Доказательство

1. Если $A = 0$, то она уже имеет ступенчатый вид.
2. Если $A \neq 0$, то применяем следующий алгоритм:
   - Находим первый ненулевой столбец.
   - Меняем строки местами, чтобы ненулевой элемент оказался в первой строке.
   - Домножаем первую строку на подходящий коэффициент и вычитаем её из каждой последующей строки, чтобы в первом ненулевом столбце остался ненулевой элемент только в первой строке.
   - Повторяем процесс для оставшейся подматрицы, исключив первую строку и первый ненулевой столбец.

Метод Гаусса

Метод Гаусса заключается в приведении расширенной матрицы системы $[A|\mathbf{b}]$ к ступенчатому виду. Пусть r — число ненулевых строк в матрице A, $\overline{r}$ — число ненулевых строк в расширенной матрице $[A|\mathbf{b}]$, а n — число неизвестных. Возможны три случая:

1. Если $r < \overline{r}$, то система несовместна, так как получаем уравнение вида $0\cdot x_1+0\cdot x_2+\dots+0\cdot x_n = a$, где $a \neq 0$.

2. Если $r = \overline{r} = n$, то матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

   В этом случае система имеет единственное решение, которое находится обратным ходом метода Гаусса.

3. Если $r = \overline{r} < n$, то система имеет бесконечное множество решений. Выражаем одну переменную через другие и находим остальные переменные обратным ходом метода Гаусса.

Определения

- Система $A\mathbf{x} = 0$ называется **однородной СЛАУ**.
- Система $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ называется **неоднородной СЛАУ**.

Лемма

Однородная СЛАУ всегда совместна (например, нулевой вектор всегда является решением). Если количество уравнений меньше количества неизвестных, то существует ненулевое решение.

Теорема о структуре решений неоднородной СЛАУ

Пусть $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ — неоднородная СЛАУ. Рассмотрим соответствующую однородную систему $A\mathbf{x} = 0$. Общее решение неоднородной СЛАУ можно представить в виде:

$$\mathbf{x}_{\text{общ}} = \mathbf{x}_{\text{одн}} + \mathbf{x}_{\text{част}},$$

где $\mathbf{x}_{\text{одн}}$ — общее решение однородной СЛАУ, а $\mathbf{x}_{\text{част}}$ — частное решение неоднородной СЛАУ.

Линейное многообразие

Линейное многообразие — это подмножество линейного пространства, полученное сдвигом заданного подпространства на фиксированный вектор.

1.4 Основная лемма о линейной зависимости. Базис векторного пространства, существование базиса. Размерность и свойство её монотонности. Размерность факторпространства. Изоморфизм конечномерных векторных пространств.

Основная лемма линейной зависимости

Если векторы $b_1, b_2, \dots, b_m$ выражаются через векторы $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $m > n$, то векторы $b_1, \dots, b_m$ линейно зависимы.

Так как каждый вектор b_i можно представить в виде линейной комбинации векторов $a_1, a_2, \dots, a_n$, то:

$$b_1 = \mu_{11}a_1 + \mu_{12}a_2 + \dots + \mu_{1n}a_n, \; b_2 \quad = \mu_{21}a_1 + \mu_{22}a_2 + \dots + \mu_{2n}a_n, \; ... \; b_m = \mu_{m1}a_1 + \mu_{m2}a_2 + \dots + \mu_{mn}a_n.$$

Рассмотрим однородную систему линейных уравнений $Mx = 0$, где M — матрица коэффициентов:

$$\mu_{11}x_1 + \mu_{12}x_2 + \dots + \mu_{1n}x_n = 0, \; \mu_{21}x_1 + \mu_{22}x_2 + \dots + \mu_{2n}x_n \quad = 0, \; ... \; \mu_{m1}x_1 + \mu_{m2}x_2 + \dots + \mu_{mn}x_n = 0.$$

Так как система состоит из m уравнений с n неизвестными и $m > n$, она имеет ненулевое решение. Следовательно, существует ненулевая комбинация коэффициентов $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$, для которой выполняется равенство:

Это и означает, что векторы $b_1, b_2, \dots, b_m$ линейно зависимы.

Базис и размерность векторного пространства

Определение. Пусть S — множество векторов. Если линейная оболочка множества S совпадает с векторным пространством V, то говорят, что S порождает пространство V. Векторное пространство V называется конечномерным, если мощность множества S конечно, и бесконечномерным, если мощность S бесконечно.

Определение базиса. Базисом конечномерного векторного пространства V называется линейно независимая система векторов, порождающая всё пространство V.

Теорема о существовании базиса. В любом конечномерном векторном пространстве существует базис.

Доказательство. Пусть $V = \langle S \rangle$, где $|S| < \infty$. Если множество S линейно зависимо, то можно исключить из него один вектор, который выражается через остальные. Повторяя этот процесс, пока множество не станет линейно независимым, получаем базис.

Теорема о числе векторов в базисе. Во всех базисах конечномерного векторного пространства V одинаковое количество векторов.

Доказательство. Пусть e и $\overline{e}$ — два базиса пространства V. Не умаляя общности, предположим, что $|\overline{e}| > |e|$. Тогда, поскольку все векторы из $\overline{e}$ выражаются через векторы из e, по основной лемме о линейной зависимости множество $\overline{e}$ линейно зависимо, а значит, не может быть базисом. Противоречие.

Определение размерности. Размерностью конечномерного векторного пространства V называется количество векторов в любом его базисе. Размерность бесконечномерного пространства равна бесконечности.

Теорема о дополнении до базиса. Любую линейно независимую систему векторов в конечномерном пространстве V можно дополнить до базиса этого пространства.

Доказательство. Пусть S — линейно независимая система векторов в пространстве V. Если линейная оболочка множества S совпадает с V, то доказательство завершено. В противном случае добавим к S вектор, который не выражается через элементы S. Повторяя этот процесс, мы рано или поздно получим базис, поскольку пространство V конечно.

Монотонность размерности

Теорема о монотонности размерности. Пусть $U \subseteq V$ — подпространство пространства V. Тогда выполняется неравенство $\dim(U) \leq \dim(V)$.

Доказательство. Рассмотрим базис подпространства U. Если через него можно выразить все элементы пространства V, то $U = V$ и $\dim(U) = \dim(V)$. Если нельзя, то существует вектор из V, который нельзя выразить через базис U. Добавив этот вектор к базису U, получаем линейно независимую систему в пространстве V. Повторяя процесс, получаем, что мощность любой линейно независимой системы в U меньше или равна размерности V.

Изоморфизм конечномерных векторных пространств

Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем F и $\dim(V) = n$. Тогда V изоморфно пространству F^n.

Доказательство. Рассмотрим базис V: $e_1, e_2, \ldots, e_n$. В пространстве F^n выберем стандартный базис:

Каждому вектору $x \in V$ можно сопоставить столбец координат $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\intercal$ в F^n, где:

Осталось только убедиться, что $\phi(ax + by) = \phi(a) * x + \phi(b) * y$

$\phi(ax + by) = \phi(e_1 * (a_1 * x + b_1 * y)) + ... + (e_n * (a_n * x + b_n * y)))$, что при гомомрфизме переходит в столбец $\begin{pmatrix} a_1 * x + b_1 * y \\ ... \\ a_n * x + b_n * y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 * x \\ ... \\ a_n * x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 * y \\ ... \\ b_n * y \end{pmatrix}$

который при обратном гоморфизме перходит в $\phi(a) * x + \phi(b) * y$ ч.т.д

Замечание если пространства U и V конечномерны и определены над одним полем F, то они изоморфны.

1.5 Матрица перехода, её свойства. Изменение координат вектора при изменении базиса

Пусть у нас есть два базиса e и $\overline{e}$. Рассмотрим вектор x и его выражения через оба базиса:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x = \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix}.$$

Выразим новый базис $\overline{e_j}$ через старый базис e:

$$\overline{e_j} = e_1 c_{j1} + e_2 c_{j2} + \cdots + e_n c_{jn}.$$

Если матрица имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

то можно записать:

$$(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)C.$$

Матрицу C называют *матрицей перехода.*

Свойства матрицы перехода:

1. **Переход из базиса в тот же базис**:

$$(e \to e) = E,$$

где E — единичная матрица.

2. **Композиция матриц перехода**:

$$(e \to \tilde{e}) \cdot (\tilde{e} \to \tilde{\tilde{e}}) = (e \to \tilde{\tilde{e}}).$$

Доказательство:

$$(e \cdot (e \to \tilde{e})) \cdot (\tilde{e} \to \tilde{\tilde{e}}) = \tilde{e} \cdot (\tilde{e} \to \tilde{\tilde{e}}) = \tilde{\tilde{e}},$$

$$(e \cdot (e \to \tilde{e})) \cdot (\tilde{e} \to \tilde{\tilde{e}}) = e \cdot (e \to \tilde{\tilde{e}}).$$

Так как, мы должны получить $\tilde{\tilde{e}}$.

3. **Обратная матрица перехода**:

$$(e \to \tilde{e})^{-1} = (\tilde{e} \to e).$$

Изменение координат вектора при изменении базиса:

Пусть вектор x имеет координаты в базисе e:

$$x = (e_1, e_2, \ldots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Тогда в новом базисе $\tilde{e}$ его координаты будут:

$$x = (\tilde{e_1}, \tilde{e_2}, \ldots, \tilde{e_n}) \begin{pmatrix} \tilde{x_1} \\ \tilde{x_2} \\ \vdots \\ \tilde{x_n} \end{pmatrix}.$$

Так как

$$(\tilde{e_1}, \tilde{e_2}, \ldots, \tilde{e_n}) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)C,$$

то получаем:

$$x = (e_1, e_2, \ldots, e_n)C \begin{pmatrix} \tilde{x_1} \\ \tilde{x_2} \\ \vdots \\ \tilde{x_n} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, справедливо равенство:

$$X = C\tilde{X},$$

где X — координаты вектора в старом базисе, а $\tilde{X}$ — в новом базисе.

1.6 Ранг системы векторов. Столбцовый, строчный и минорный ранги матрицы. Теорема о базисном миноре. Вычисление ранга матрицы. Теорема Кронекера-Капелли. Теорема о «степени неопределённости» однородной СЛАУ. Фундаментальная система решений.

Определения:

- *Ранг системы векторов* — это размерность их линейной оболочки.
- *Строчный ранг матрицы* A — это размерность линейной оболочки строк матрицы A.
- *Столбцовый ранг матрицы* A — это размерность линейной оболочки столбцов матрицы A.

- *Минорный ранг матрицы* A — это наибольший порядок отличного от нуля минора матрицы A (такой минор называется *базисным*).

Формулировка: Строки и столбцы, пересекающие базисный минор, линейно независимы и называются *базисными.* Все остальные строки и столбцы выражаются через базисные строки и столбцы как их линейные комбинации.

Доказательство:

1. Если матрица является нулевой, то её минорный ранг равен нулю.

2. Пусть матрица A ненулевая. Без ограничения общности будем считать, что базисный минор расположен в левом верхнем углу матрицы и его порядок равен r.

Доказательство линейной независимости базисных строк:

Предположим, что первые r строк линейно зависимы. Тогда найдутся коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, такие что:

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_r \mathbf{a}_r = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{a}_i$ — строки матрицы. Рассмотрим подматрицу, составленную из первых r строк и r столбцов. Эта подматрица образует базисный минор порядка r. Поскольку строки этой подматрицы линейно зависимы, её определитель равен нулю. Это противоречит тому, что данный минор базисный (т.е. его определитель отличен от нуля).

Доказательство того, что остальные строки являются линейными комбинациями базисных:

Рассмотрим матрицу, состоящую из базисного минора и строки i и столбца j, которые не входят в минор:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & a_{2j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ir} & a_{ij} \end{pmatrix}.$$

Определитель данной матрицы равен нулю, так как этот минор больше базисного.

Посчитаем определитель матрицы разложением по правому столбцу:

$$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{rj}A_{rj} + a_{ij}A_{ij} = 0,$$

где A_{kj} — алгебраическое дополнение элемента a_{kj}.

Проходясь по всем j, получаем равенство:

$$(a_{11}, \ldots, a_{1r})\lambda_1 + \cdots + (a_{i1}, \ldots, a_{ij})\lambda_{r+1} = 0,$$

где $\lambda_k = A_{kj}$. Поскольку $\lambda_{r+1} \neq 0$, это означает, что строки линейно зависимы, и, следовательно, остальные строки выражаются через базисные строки.

Следствие: Столбцовый ранг = строчный ранг = минорный ранг.

Лемма о вычислении ранга матрицы:

Ранг матрицы равен количеству ненулевых строк в ступенчатой матрице, к которой она приводится элементарными преобразованиями.

Если в ступенчатой матрице первые r строк ненулевые, то можно взять минор из этих строк. Он гарантированно отличен от нуля (так как на главной диагонали нет нулей), а любой минор большего порядка будет равен нулю:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1r} \\ 0 & c_{22} & \ldots & c_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & c_{rr} \end{pmatrix}.$$

Теорема Кронекера-Капелли:

Формулировка: Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы коэффициентов равен рангу расширенной матрицы.

Доказательство: Следствие метода Гаусса.

Теорема о «степени неопределённости» однородной СЛАУ:

Формулировка: Размерность пространства решений однородной СЛАУ $Ax = 0$ равна $n - \operatorname{rank}(A)$, где n — количество неизвестных.

Доказательство: первые $\operatorname{rank}(A)$ переменных можно выразить через $n - \operatorname{rank}(A)$ свободных переменных, а через меньшее количество переменных выразить нельзя. Таким образом, размерность пространства решений действительно равна $n - \operatorname{rank}(A)$.

Фундаментальная система решений: Базис пространства решений однородной СЛАУ.

1.7 Гомоморфизмы векторных пространств. Образ и ядро гомоморфизма. Теорема о структуре прообраза гомоморфизма. Матрица гомоморфизма, её изменение при изменении базиса.

Определение:

Пусть U и V — векторные пространства над полем F. Отображение $\varphi : U \to V$ называется гомоморфизмом, если для всех $x, y \in U$ и всех $a, b \in F$ выполняется равенство:

$$\varphi(ax + by) = a\varphi(x) + b\varphi(y).$$

Свойства:

1. $\varphi(0) = 0$.
2. $\varphi(-x) = -\varphi(x)$.
3. $\varphi(x - y) = \varphi(x) - \varphi(y)$.

Рассмотрим пространства U и V над полем F, где $\dim U = m$ и $\dim V = n$. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^m$ — базис пространства U, а $\{f_j\}_{j=1}^n$ — базис пространства V. Тогда для всех $i \in \{1, \dots, m\}$ гомоморфизм φ действует следующим образом:

$$\varphi(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} f_j.$$

Эти коэффициенты можно записать в виде матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Тогда справедливо следующее равенство:

$$\varphi(e_1) + \varphi(e_2) + \dots + \varphi(e_m) = (f_1, f_2, \dots, f_n)A.$$

Теперь рассмотрим координаты. Пусть $x \in U$ и его координаты относительно базиса $\{e_i\}_{i=1}^m$ равны $\{x_i\}_{i=1}^m$, то есть:

$$x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i \quad \text{или} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Тогда $y = \varphi(x)$ имеет координаты относительно базиса $\{f_j\}_{j=1}^n$, которые можно вычислить следующим образом:

$$y = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы получили равенство $AX = Y$, где A — матрица гомоморфизма.

Изменение матрицы гомоморфизма при изменении базисов

Пусть в U базисы e и $\tilde{e}$, а в V базисы f и $\tilde{f}$. Обозначим матрицы перехода между базисами как P для перехода $e \to \tilde{e}$ и Q для перехода $f \to \tilde{f}$. Тогда новая матрица гомоморфизма $\tilde{A}$ выражается через старую матрицу A следующим образом:

$$\tilde{A} = Q^{-1}AP.$$

1.8 Векторное пространство гомоморфизмов, его размерность. Основная теорема о гомоморфизмах векторных пространств. Теорема о сумме размерностей ядра и образа.

Пусть $A, B \in \mathrm{Hom}(U, V)$. Определим следующие операции:

- *Сложение*: $(A + B)(x) = A(x) + B(x)$.
- *Умножение на скаляр*: $(\lambda A)(x) = \lambda A(x)$ для $\lambda \in F$.

Нетрудно заметить, что множество всех гомоморфизмов образует векторное пространство размерности $\dim U \cdot \dim V$.

Теперь найдём матрицу, соответствующую композиции гомоморфизмов. Пусть U, V, W — векторные пространства с базисами $\{e_i\}_{i=1}^k$, $\{f_j\}_{j=1}^n$, $\{g_l\}_{l=1}^m$ соответственно. Пусть $A \in \mathrm{Hom}(U, W)$, $B \in \mathrm{Hom}(V, U)$ и $C \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Тогда:

$$(A \circ B)(e_i) = A\left(\sum_{j=1}^n b_{ji} f_j\right) = \sum_{j=1}^n b_{ji} A(f_j) = \sum_{j=1}^n b_{ji} \sum_{l=1}^m a_{lj} g_l.$$

Преобразуем выражение:

$$(A \circ B)(e_i) = \sum_{l=1}^m g_l \left(\sum_{j=1}^n a_{lj} b_{ji}\right).$$

Следовательно, элементы матрицы C, соответствующей композиции, вычисляются как:

$$c_{li} = \sum_{j=1}^n a_{lj} b_{ji}, \quad \text{то есть} \quad C = AB.$$

Ядро и образ гомоморфизма:

- *Ядро*: $\ker(\varphi) = \{x \in U \mid \varphi(x) = 0\}$ — подпространство, задаваемое решением системы $AX = 0$.
- *Образ*: $\mathrm{Im}(\varphi) = \{y \in V \mid \exists x \in U : \varphi(x) = y\}$ — линейная оболочка столбцов матрицы A.

Размерности ядра и образа связаны следующим соотношением:

$$\dim U = \dim \ker(\varphi) + \dim \mathrm{Im}(\varphi).$$

Теорема: Гомоморфизм φ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\ker(\varphi) = \{0\}$ и $\mathrm{Im}(\varphi) = V$.

Пусть $y \in V$. Тогда полный прообраз элемента y задаётся как:

$$\varphi^{-1}(y) = x + \ker(\varphi),$$

где x — любой прообраз элемента y. Проверим:

$$\varphi(x + \ker(\varphi)) = \varphi(x) + \varphi(\ker(\varphi)) = y + 0 = y.$$

Так же, $\varphi(x - z) = y - y = 0$, следовательно, $x - z \in \ker(\varphi)$. Где z - тоже прообраз y

Теорема: Следующие условия эквивалентны:

- $\varphi \in \mathrm{Iso}(U, V)$;
- $\ker(\varphi) = \{0\}$;
- $\mathrm{Im}(\varphi) = V$.

ч.т.д.

1.9 Согласованный базис. Сумма и пересечение подпространств. Теорема Нётер об изоморфизме. Теорема Грассмана. Нахождение СЛАУ, задающей подпространство. Прямая сумма подпространств.

Факторпространство

Пусть $U \leq V$ — подпространство векторного пространства V над полем F.

Два вектора $x, \tilde{x} \in V$ называются эквивалентными, если их разность лежит в подпространстве U, то есть $x - \tilde{x} \in U$. Это отношение является отношением эквивалентности, а значит, разбивает пространство V на классы эквивалентности:

$$x + U = \{\tilde{x} \in V \mid \tilde{x} \sim x\}$$

Теперь определим операции над классами эквивалентности.

Сложение:

$$(x_1 + U) + (x_2 + U) = (x_1 + x_2) + U.$$

Умножение на скаляр:

$$\lambda \cdot (x + U) = (\lambda \cdot x) + U.$$

Теперь проверим корректность этих операций.

Пусть $x \sim \tilde{x}$ и $y \sim \tilde{y}$. Тогда:

$$\tilde{x} + \tilde{y} = (x + U_1) + (y + U_2) = x + y + (U_1 + U_2) = x + y + U_3,$$

где $U_3 = U$. Следовательно, $x + y \sim \tilde{x} + \tilde{y}$.

Умножение на скаляр проверяется аналогично. Также необходимо убедиться, что множество классов эквивалентности образует векторное пространство. Это остаётся как упражнение читателю.

Так введённое пространство называется *факторпространством.*

—

Пусть $U \leq V$. Базис пространства V называется *согласованным* с подпространством U, если U является линейной оболочкой части базисных векторов.

Теорема:

Если пространство V конечномерно, то размерность факторпространства $\dim(V/U)$ равна разности $\dim V - \dim U$. Эта величина называется *коразмерностью* подпространства U в V.

Доказательство:

Выберем базис, согласованный с подпространством U:

$$(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$$

— базис пространства V, где начиная с e_{k+1} базисные векторы принадлежат подпространству U.

Докажем, что множество $(e_1 + U, \ldots, e_k + U)$ является базисом факторпространства V/U.

Действительно, возьмём произвольный вектор $x \in V$. Тогда:

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_k e_k + x_{k+1} e_{k+1} + \cdots + x_n e_n,$$

причём $x_{k+1} e_{k+1} + \cdots + x_n e_n \in U$. Следовательно:

$$x + U = x_1(e_1 + U) + \cdots + x_k(e_k + U).$$

Это означает, что $(e_1 + U, \ldots, e_k + U)$ порождает V/U.

Теперь докажем линейную независимость этого набора. Пусть:

$$\lambda_1(e_1 + U) + \cdots + \lambda_k(e_k + U) = U.$$

Тогда:

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k \in U.$$

Так как векторы $e_{k+1}, \ldots, e_n$ образуют базис U, это означает, что:

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k = 0.$$

Поскольку $e_1, \ldots, e_k$ — линейно независимы, получаем $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$. Следовательно, $(e_1 + U, \ldots, e_k + U)$ — линейно независимы.

Таким образом, $(e_1 + U, \ldots, e_k + U)$ — базис V/U. Доказано.

—

Теорема: Факторпространство по ядру гомоморфизма изоморфно образу этого гомоморфизма.

Доказательство:

Рассмотрим отображение $x + \ker(\varphi) \mapsto \varphi(x)$. Ранее мы доказали, что:

$$\varphi^{-1}(y) = x + \ker(\varphi),$$

то есть это отображение биективно. Остаётся убедиться, что оно является гомоморфизмом. Действительно:

$$\varphi(x) + \varphi(\tilde{x}) = (x + Ker\varphi) + (\tilde{x} + Ker\varphi) = (x + \tilde{x}) + Ker\varphi = \varphi(x + \tilde{x})$$

Таким образом, факторпространство $V/\ker(\varphi)$ изоморфно образу φ.

—

Геометрия подпространств

Пусть $U, V \leq W$.

Пересечение подпространств:

$$U \cap V = \{x \in W \mid x \in U \text{ и } x \in V\}.$$

Сумма подпространств:

$$U + V = \{x + y \mid x \in U, y \in V\} = \langle U \cup V \rangle.$$

—

Теорема Нётер об изоморфизме:

Пусть $U, V \leq W$. Тогда:

$$(U+V)/U \cong V/(U \cap V).$$

Доказательство:

Рассмотрим гомоморфизм $\varphi : V \to (U+V)/U$, заданный как: 1. $v \mapsto v + 0$ для всех $v \in V$; 2. $(u+v) \mapsto (u+v) + U$ для всех $u \in U$ и $v \in V$.

Этот гомоморфизм сюръективен, следовательно, его образ равен $(U+V)/U$. А ядро этого гомоморфизма равно $U \cap V$. Применяя теорему об изоморфизме, получаем требуемое.

—

Теорема Грассмана:

$$\dim((U+V)/U) = \dim(V/(U \cap V)).$$

Это следствие теоремы Нётер.

Также имеем:

$$\dim(U+V) - \dim U = \dim V - \dim(U \cap V).$$

А следовательно:

$$\dim U + \dim V = \dim(U+V) + \dim(U \cap V).$$

Это и есть теорема Грассмана.

—

Линейная независимость подпространств

Подпространства $U_1, U_2, \ldots, U_k$ называются линейно независимыми, если из равенства:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = 0,$$

где $x_i \in U_i$, следует, что $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_k = 0$.

Лемма: Следующие условия эквивалентны: 1. Подпространства $U_1, \ldots, U_k$ линейно независимы. 2. Объединение базисов $U_1, \ldots, U_k$ линейно независимо. 3.

$$\dim(U_1 + U_2 + \cdots + U_k) = \dim U_1 + \cdots + \dim U_k.$$

—

Прямая сумма подпространств

Пространство V раскладывается в *внутреннюю* прямую сумму подпространств $U_1, \ldots, U_k$, если: 1. $V = U_1 + U_2 + \cdots + U_k$; 2. Подпространства $U_1, \ldots, U_k$ линейно независимы.

Внешняя прямая сумма:

$$U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k = \{(x_1, \ldots, x_k) \mid x_i \in U_i\}.$$

Лемма $C = M_{n*d}$ её столбцы - базис пространства U тогда существует СЛАУ $AX = b$ состоящая из $n - d$ уравнений множеством решений которой совпадает с многообразием $M = x^0 + U$

Доказательство: Вначале заметим, что $d <= n$ так как U - подпространство. Также заметим, что $rankC = d$

у нас есть матрица $(C|x - x_0)$ Теперь приведём матрицу к ступенчатому виду так как ранг матрицы d у нас будет сверху d ненулевых строк. Так как $x \in x^0 + U$

$x - x^0 \in U$

$x - x^0 \in <$ столбцы матрицы С $>$

$rankC = rank(C|x - x^0)$

$Ax + b = 0$ ч.т.д.

1.10 Линейные функции, формы и функционалы. Сопряжённое пространство. Сопряжённый базис. Второе сопряжённое пространство, его естественный изоморфизм с исходным. Аннулятор подпространства. Теорема о размерности аннулятора. Критерий базисности для набора линейных форм.

Линейные функции представляют собой отображения вида $\mathrm{Hom}(U, F)$, где U — векторное пространство над полем F.

Если рассматривать F как векторное пространство над самим собой, то $\dim F = 1$. Поскольку $\dim \mathrm{Hom}(U, V) = \dim U \cdot \dim V$, получаем, что

$$\dim \mathrm{Hom}(U, F) = \dim U.$$

Пространство $\mathrm{Hom}(U, F)$ называется сопряжённым пространством к U и обозначается U^*.

Его размерность равна $\dim U$, а значит U изоморфно U^*.

Пусть $x \in U$, $w \in U^*$, а $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис пространства U. Тогда

$$w(x) = w\left(\sum_{i=1}^{n} e_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} w(e_i) x_i.$$

Выражение $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ называется линейной формой.

Определим функцию $e_i^*(x) = x_i$, где x_i — i-тая координата в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Теорема. Набор функций $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ образует базис пространства U^*.

Доказательство. Этих функций n, а $\dim U^* = n$. Осталось показать, что они линейно независимы.

Предположим, что

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^* = 0.$$

Возьмём эту функцию от базисного вектора e_j. Тогда получаем $\lambda_j = 0$. Так как j произвольно, все коэффициенты λ_i равны нулю. Следовательно, $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ — линейно независимы.

Второе сопряжённое пространство обозначим U^{**}. Оно имеет размерность n, а значит изоморфно U. Построим этот изоморфизм:

$$\forall x \in U, \quad \forall w \in U^*, \quad x \mapsto f_x, \quad f_x(w) = w(x).$$

Докажем, что это биективный гомоморфизм, если $\dim U < \infty$.

Гомоморфизм:

$$f_{x+y}(w) = w(x+y) = w(x) + w(y) = f_x(w) + f_y(w),$$
$$f_{\lambda x}(w) = w(\lambda x) = \lambda w(x) = \lambda f_x(w).$$

Биективность:

Пусть $\{e_i\}$ — базис U, $\{e_i^*\}$ — базис U^* и $\{(e_i^*)^*\}$ — базис U^{**}. Заметим, что

$$e_i^*(e_j) = (e_j^*)^*(e_i^*),$$

а значит каждому столбцу координат x соответствует столбец координат f_x.

Следствие. Так как изоморфизм не зависит от выбора базиса, можно отождествить x и f_x, то есть векторы исходного пространства U можно рассматривать как линейные функции сопряжённого пространства U^*. Элементы U^{**} называются ковекторами.

Замечание. Теорема неверна в бесконечномерном пространстве, так как размерность уже первого сопряжённого пространства больше, чем размерность исходного.

Аннулятор подпространства. Аннулятором подпространства U называется множество всех линейных функций из V^*, которые обнуляются на всех векторах из U:

$$U^0 = \{w \in V^* \mid w(x) = 0, \quad \forall x \in U\}.$$

Аннулятор является подпространством в V^*.

Теорема о размерности аннулятора.

$$\dim U^0 = \dim V - \dim U.$$

Доказательство. Пусть $\{e_i\}$ — согласованный базис V, в котором первые k векторов образуют базис U. Пусть $\{e_i^*\}$ — дуальный базис в V^*. Тогда для любого $w \in U^0$ имеем:

$w(u) = w(e_1 * u_1 + ... + e_k * u_k) = (e_1^* + ... + e_k^* + e_{k+1}^* + ... + e_n^*)(e_1 * u_1 + ... + e_k * u_k) = (e_{k+1}^* + ... + e_n^*)(e_1 * u_1 + ... + e_k * u_k)$ значит все функции аннулятора можно выразить через последние $n - k$ векторов

Следствие.

$$U^0 \cong V/U.$$

Теорема о втором аннуляторе.

$$dim(U^0)^0 = dimV - dimU^0 = dimV - (dimV - dimU) = dimU$$

Поскольку $(U^0)^0 \subseteq U$, то $(U^0)^0 = U$.

Критерий базисности. Набор функций $\{w_1, \dots, w_n\}$ является базисом в V^* тогда и только тогда, когда

$$\bigcap_{i=1}^{n} \ker w_i = \{0\}.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}&\{w_1, \dots, w_n\} \text{ — базис в } V^* \iff \langle w_1, \dots, w_n\rangle = V^* \iff \\ &\langle w_1, \dots, w_n\rangle^0 = (V^*)^0 \iff (V^*)^0 = \{0\}.\end{aligned}$$

.

1.11 Сопряжённые гомоморфизмы и их свойства. Матрица сопряжённого гомоморфизма. Связь между образами и ядрами изначального гомоморфизма и сопряжённого к нему. Равенство столбцового и строчного рангов матрицы.

Сопряжённый гомоморфизм A^*. Пусть $A \in \mathrm{Hom}(U, V)$ — гомоморфизм из пространства U в V. Тогда сопряжённый гомоморфизм A^* — это отображение

$$A^* \in \mathrm{Hom}(V^*, U^*)$$

и определяется следующим образом:

$$\forall w \in V^*, \quad A^*(w) : \forall x \in U, \quad A^*(w)(x) = w(Ax).$$

Докажем, что A^* является гомоморфизмом.

$$\begin{aligned}A^*(w_1 + w_2)(x) &= (w_1 + w_2)(Ax) = w_1(Ax) + w_2(Ax) \\ &= A^*(w_1)(x) + A^*(w_2)(x).\end{aligned}$$

Умножение на скаляр доказывается аналогично:

$$A^*(\lambda w)(x) = (\lambda w)(Ax) = \lambda w(Ax) = \lambda A^*(w)(x).$$

Следовательно, A^* — линейный оператор из V^* в U^*.

Также аналогично можно показать, что если $A, B \in \mathrm{Hom}(U, V)$, то

$$(A+B)^* = A^* + B^*, \quad (\lambda A)^* = \lambda A^*.$$

Сопряжённый к композиции гомоморфизмов. Пусть $A \in \mathrm{Hom}(U, V)$ и $B \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Докажем, что

$$(BA)^* = A^* B^*.$$

Рассмотрим произвольные $w \in W^*$ и $x \in U$:

$$((BA)^*(w))(x) = w(BAx) = w(B(Ax)) = (B^*(w))(Ax) = (A^*(B^*(w)))(x).$$

Следовательно, $((BA)^*)(w) = A^*(B^*(w))$, то есть $(BA)^* = A^* B^*$.

Теорема. Матрица сопряжённого гомоморфизма — это транспонированная матрица исходного гомоморфизма.

Пусть A — матрица линейного оператора $\phi : U \to V$ в базисах $\{e_i\}$ и $\{f_j\}$. Элемент матрицы a_{ij} равен i-й координате вектора $\phi(e_j)$ в базисе $\{f_i\}$, то есть

$$a_{ij} = f_i^*(\phi(e_j)).$$

Элемент матрицы сопряжённого гомоморфизма A^* равен j-й координате вектора $\phi^*(f_i^*)$ в базисе $\{e_j^*\}$, то есть

$$a_{ji}^* = e_j^*(\phi^*(f_i^*)).$$

Так как $a_{ij} = a_{ji}^*$, матрица A^* — это транспонированная матрица A.

Связь между ядром и образом сопряжённого гомоморфизма.

Ядро сопряжённого гомоморфизма — это аннулятор образа исходного гомоморфизма:

$$\ker(A^*) = (\mathrm{Im}\, A)^0.$$

Рассмотрим $w \in \ker(A^*)$. Тогда для любого $x \in U$ выполняется

$$A^*(w)(x) = w(Ax) = 0.$$

Это означает, что w обращается в ноль на всём образе A, то есть $w \in (\mathrm{Im}\, A)^0$. Следовательно, $\ker(A^*) = (\mathrm{Im}\, A)^0$.

Теперь рассмотрим образ сопряжённого гомоморфизма:

$$\mathrm{Im}\, A^* = (\ker A)^0.$$

Теорема о ранге матрицы. Столбцовый ранг матрицы равен строчному рангу.

Пусть A — матрица линейного оператора. Тогда

$$dim(< \text{столбцов матрицы А} >) = dimImA = dimU - dimKerA = (dimKerA)^0 = dimImA^* = dim(< \text{строк матрицы}$$

ч.т.д.