Алгебра. КТ. Осенний семестр

III. Гомоморфизмы групп. Нормальные подгруппы. Факторгруппы

1. Приведите примеры плоских фигур, группы симметрий которых изоморфны:

   а) $\mathbb{Z}_2$; б) $\mathbb{Z}_3$; в) S_3; г) V_4.

2. Докажите, что группы $\langle \mathscr{P}(M), \cap \rangle$ и $\langle \mathscr{P}(M), \cup \rangle$ изоморфны.

3. Изоморфны ли группы:

   а) $\mathbb{Z}_4$ и D_4;

   б) $\mathbb{Z}_4$ и V_4;

   в) $\mathbb{Z}_4$ и R_4;

   г) $\mathbb{Z}_{24}$ и S_4;

   д) $\langle 3\mathbb{Z}, + \rangle$ и $\langle 5\mathbb{Z}, + \rangle$;

   е) $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ и $\langle \mathbb{R}^*, \cdot \rangle$?

4. Является ли отображение φ гомоморфизмом групп? В случае положительного ответа найдите его ядро и образ:

   а) $\varphi\colon \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$, $\varphi(x) = |x|$;

   б) $\varphi\colon \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$, $\varphi(x) = -|x|$;

   в) $\varphi\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $\varphi(x) = x^2$;

   г) $\varphi\colon \mathbb{Z}_{36} \to \mathbb{Z}_8$, $\varphi(x)$ равно остатку от деления числа $2x$ на 8.

5. Докажите, что в абелевой группе любая подгруппа является нормальной.

6. Верно ли, что

   а) $A_n \trianglelefteq S_n$;

   б) $S_4^1 \trianglelefteq S_4$ (S_4^1 — все перестановки, оставляющие на месте 1)?

7. Найдите левое и правое разложения:

   а) группы $\mathbb{Z}$ по подгруппе $5\mathbb{Z}$;

   б) группы D_3 по подгруппе R_3;

   в) группы S_3 по подгруппе $\{\varepsilon, (12)\}$;

   г) группы D_4 по подгруппе отражений относительно центра;

   д) группы D_4 по подгруппе отражений относительно одной из диагоналей;

8. Докажите, что подгруппа является нормальной тогда и только тогда, когда левое и правое разложения группы по этой подгруппе совпадают.

9. Докажите, что если порядок подгруппы в два раза меньше порядка группы, то эта подгруппа является нормальной.

10. Найдите:

    а) $3\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$;

    б) $\mathbb{Z}_{12}/\mathbb{Z}_3$;

    в) $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$;

    г) факторгруппы по ядрам гомоморфизмов задачи 4.

11. Найдите все нормальные подгруппы и соответствующие факторгруппы группы симметрий правильного треугольника.

12. Среди функций $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ рассмотрим функции вида $y = kx + b$ $(k \neq 0)$, которые образуют группу относительно композиции (проверьте это!). Докажите, что функции

    а) вида $y = x + b$;

    б) вида $y = kx$

    образуют нормальные подгруппы и найдите соответствующие факторгруппы.

13. Пусть R — группа всех вращений плоскости вокруг центра правильного n-угольника. Докажите, что $R_n \trianglelefteq R$ и найдите R/R_n.

14.* Может ли группа иметь неизоморфные нормальные подгруппы, факторгруппы по которым изоморфны?

15.* Является ли отношение «быть нормальной подгруппой» транзитивным?

4. 2) $\varphi: \mathbb{Z}_{36} \to \mathbb{Z}_8$

$$x = 36k_1 + a \mapsto 72k_1 + 2a \pmod 8) = 2a \pmod 8$$

$$y = 36k_2 + b \mapsto 72k_2 + 2b \pmod 8 = 2b \pmod 8$$

$$\Downarrow$$

$$x+y = 36(k_1+k_2) + \underbrace{a+b}_{\,} \overset{(\text{mod } 8)}{} \mapsto (36(k_1+k_2) + 2(a+b)) = 2(a+b) \pmod 8$$

6. d) $S_4^1 \trianglelefteq S_4^4$

$$\sigma_1^{-1}\sigma_2(1) = 1 \qquad\qquad \sigma_1\sigma_2^{-1}(1) = 1$$

$$\sigma_2(1) = \sigma_1(1) \qquad\qquad \sigma_2^{-1}(1) = \sigma^{-1}(1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & \ldots & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & \ldots & & \end{pmatrix} \nearrow \qquad \begin{pmatrix} 2 & \ldots \\ 1 & \ldots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & \ldots \\ 1 & \ldots \end{pmatrix}$$

$$g\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & 3 \\ 1 & \ldots & & \ldots \end{pmatrix} g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots \\ 1 & \ldots \end{pmatrix}$$

$$g^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & 3 \\ 1 & \ldots & & \ldots \end{pmatrix} g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots \\ 1 & \ldots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

7. a)

$$5\mathbb{Z} = \{0, \pm 5, \pm 10, \ldots\}$$

$$1+5\mathbb{Z} = \{1, -4, 6, -9, 11 \ldots\}$$

$$2+5\mathbb{Z} = \{2, -3, 12, 17, -13 \ldots\}$$

$3+5\mathbb{Z} = \{3, -2, 8, -7, 13 \dots\}$

$4+5\mathbb{Z} = \{4, -1, -11, \dots\}$

$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_5$$

б) D_3 группа симметрий прав. треугольника

R_3 повороты

$D_3 \geq R_3$

$D_3 = \{0, 120, 240, a, b, c\}$

$R_3 = \{0, 120, 240\}$

$D_3 = R_3 \sqcup \{a, b, c\}$ $\sqcup$ - дизъюнктное объединение

объединение без общих эл.

в) $S_3 = \{\varepsilon, (123), (132), (12), (13), (23)\}$

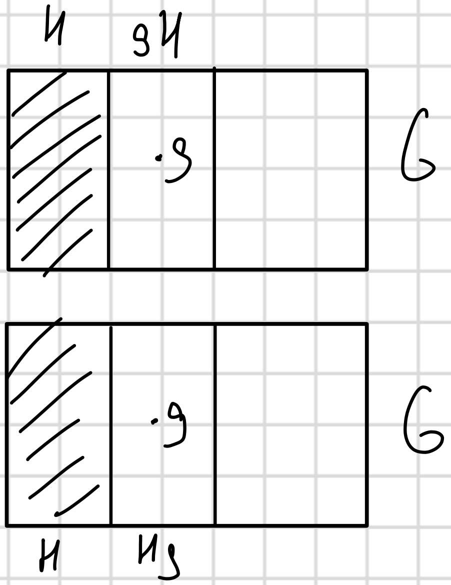
$H = \{\varepsilon, (12)\}$ gH

$S_3 = \{\varepsilon, (12)\} \sqcup \{(123), (13)\} \sqcup \{(132), (23)\}$

$S_3 = \{\varepsilon, (12)\} \sqcup \{(123), (23)\} \sqcup \{(132), (13)\}$

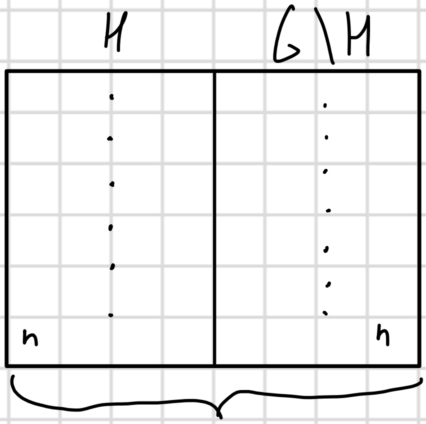
$gh = hg$ $gh \leq$

8.



$gH = Hg \quad \forall g \in G$

9.



10. a) $3\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$

$\varphi: 3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_5 \qquad \ker\varphi = 15\mathbb{Z}$

$x \mapsto x \pmod 5$

по т. $\varphi: G \to H$

$G/\ker\varphi \simeq \operatorname{Im}\varphi$

б) $R/\mathbb{Z}$ $\qquad \ker\varphi =$

$\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \{x\}$

$\ker\varphi = \mathbb{Z}$

$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq [0, 1)$ одномерный тор

$x - y \in \mathbb{Z}$

11. $D_3 \simeq S_3$

S_3, $\{\varepsilon\}$, $\{\varepsilon, (123), (123)\}$, $\{\varepsilon, (12)\}$, $\{\varepsilon, (13)\}$, $\{\varepsilon, (23)\}$

$S_3 / S_3 \simeq \{e\}$

$S_3 / \{e\} \simeq S_3$

$S_3 / R_3 = \mathbb{Z}_2$

12. a) $\underbrace{(ax+c)}_{g} \circ \underbrace{(x+b)}_{h} \circ \underbrace{\left(\frac{x}{a} - \frac{c}{a}\right)}_{g^{-1}}$