Равномерная непрерывность

1. Док-ть равн. непр.:

1) $f(x) = 1/x$, $x \in [1, +\infty)$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_1, x_2 \in D,\ |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

т.к. $|x_1 x_2| \geq 1$

$$\left| 1/x_1 - 1/x_2 \right| = \left| \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \right| \leqslant \delta = \varepsilon \checkmark$$

$$|\sin x| \leq |x|$$

2) $f(x) = \sin x$, $\mathbb{R}$

$$|\sin x_1 - \sin x_2| = \left| 2 \underbrace{\sin \frac{x_1 - x_2}{2}}_{\leq \frac{x_1 - x_2}{2}} \cdot \underbrace{\cos \frac{x_1 + x_2}{2}}_{\leq 1} \right| \leq 2\, \frac{|x_1 - x_2|}{2} \cdot 1 = |x_1 - x_2| < \delta = \varepsilon \checkmark$$

3) $f(x) = \sqrt{x}$, $[4, +\infty)$

$$|\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}| = \left| \frac{x_2 - x_1}{\underbrace{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}}_{> 1}} \right| \leq |x_2 - x_1| < \delta = \varepsilon \checkmark$$

4) $f(x) = e^x$, $(0, 1)$

$$|e^{x_1} - e^{x_2}| \ominus \text{по т. Лагранжа } \exists c: \ominus\ e^c \cdot |x_1 - x_2| < e \cdot \delta = \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\delta = \varepsilon / e \checkmark$$

2. Док-ть, что нет равн. непр

1) $\operatorname{sign} x$, $[-1, 1]$

из равн. непр $\Rightarrow$ непр, но $\operatorname{sign} x$ разрывен $\Rightarrow$ ✓

2) $1/\sqrt{x}$, $(0,1)$

f – не явл. равн. непр на D, если:
$\exists \varepsilon>0 \ \forall \delta>0 \ \exists x_1, x_2 \in D, \ |x_1-x_2|<\delta$ и $|f(x_1)-f(x_2)| \geq \varepsilon$

$f(x)=1/\sqrt{x}$ на $(0,1)$

$x_1 = 1/n$

$|x_1-x_2| = \frac{3/4}{n} \to 0 < \delta$

$x_2 = \frac{1}{4n}$

$|f(x_1)-f(x_2)| = \left|\frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{\sqrt{x_2}}\right| = \sqrt{4n}-\sqrt{n} = \sqrt{n} > 1 = \varepsilon$

3) x^2, $\mathbb{R}$

$x_1 = n$

$x_2 = n + 1/n$

$|x_1-x_2| = 1/n < \delta$

$(n+1/n)^2 - n^2 = 1/n^2 + 2 > 2$

4) $\sin x \, 1/x$, $(0,1)$

$x_1 = \frac{1}{2\pi n} \to 0$

$\Rightarrow |x_1-x_2|<\delta$

$x_2 = \frac{1}{2\pi n + \pi/2} \to 0$

$|\sin(2\pi n) - \sin(2\pi n + \pi/2)| = 1 = \varepsilon$

3. Доказать:

f и g – равн. непр на D $\Rightarrow$ $f+g$ р.н. на D

$\triangleright$ $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \forall x_1, x_2 \in D, \ |x_1-x_2|<\delta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta_1>0 \ \forall x_1, x_2 \in D, \ |x_1-x_2|<\delta_1 \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

$\forall\ |x_1, x_2| < \min\{\delta, \delta_1\} \Rightarrow \varepsilon > |f(x_1) - f(x_2)| + |g(x_1) + g(x_2)| \geqslant$

$\geqslant |(f(x_1) + g(x_1)) - (f(x_2) + g(x_2))|$ ✓ ◀

4. Доказать:

f и g – равн. непр и огр. на $D \Rightarrow f \cdot g$ р.н. на D

▷ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 > 0\ \forall x_1, x_2 \in D,\ |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_2 > 0\ \forall x_1, x_2 \in D,\ |x_1 - x_2| < \delta_1 \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

$\forall\ |x_1, x_2| < \min\{\delta, \delta_1\},$

$|f(x_1) \cdot g(x_1) - f(x_2) \cdot g(x_2)| = |f(x_1) \cdot g(x_1) - f(x_2) \cdot g(x_2) + f(x_1) \cdot g(x_2) - f(x_2) \cdot g(x_2)|$

$= |f(x_1)||g(x_1) - g(x_2)| + |g(x_2)||f(x_1) - f(x_2)| \leqslant f(x_1) \cdot \varepsilon + g(x_1) \cdot \varepsilon <$

$< \varepsilon \cdot (C_1 + C_2)$ из ограниченность ◀

5. f – равн. непр. на $[a, c]$ и на $[c, b]$, то f равн. непр. на $[a, b]$

▷ непр. на $[a, b]$ т.к. из $[a, c]$ $\forall(\cdot)$ непр и из $[c, b]$ тоже + т. Кантора ◀

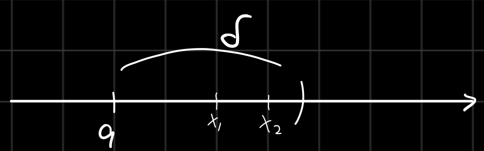
6. f – равн. непр. на $(a, b) \Leftrightarrow f \in C(a, b)$ и $\exists$ в $\mathbb{R}$ $f(a+0)$ и $f(b-0)$

▷ $\boxed{\Leftarrow}$ доопределим $f(a) = f(a+0)$ и $f(b) = f(b-0) \Rightarrow f \in C([a, b]) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т. Кантора

$\boxed{\Rightarrow}$ $\exists \lim\limits_{x \to a+0} f(x) \Leftrightarrow$ кр. Коши: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall x_1, x_2 \in (a, b) \cap \overset{+}{U}_\delta(a) \Rightarrow$

$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ и у нас есть равн. непр



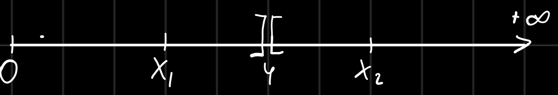
$\Rightarrow$ они удовл. усл. $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

для b аналогично ◀

7. $\sqrt{x}$ равн. непр. на $[0, +\infty)$

Было: $\sqrt{x}$ на $[4, +\infty)$ р.н.

▷



и $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |x_1 - \overset{\text{как } x_2}{4}| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(4)| < \varepsilon/2$

$|x_2 - \overset{\text{как } x_1}{4}| < \delta \Rightarrow |f(x_2) - f(4)| < \varepsilon/2$

$\triangleleft$ $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(4)| + |f(x_2) - f(4)| < \varepsilon$ ◀

8. Если f - дифф-ма и f' огр. на (a,b), то f - равн. непр. $(a, b \in \overline{\mathbb{R}})$

▷ по т. Лагранжа $|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(c)|\,|x_1 - x_2| \leq C \cdot \delta = \varepsilon$

$\delta = \varepsilon / C$ ◀