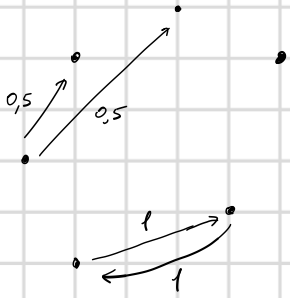
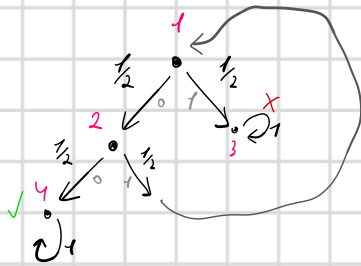


Марковские цепи



opp. граф



кр. марковской цепи

0 шаг: $(1, 0, 0, 0) = b^0$

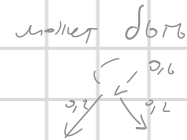
1 шаг: $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) = b^1$

2 шаг: $(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}) = b^2$

...

b^k расп. вер-ей после k -го шага

P -матрица $n \times n$; P_{ij} - вер-ть $i \rightarrow j$



с каждой вер-тью сложим b и после k

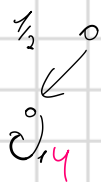
$$b_i^{k+1} = \sum_{j=1}^n p(i \rightarrow j) \cdot p(\text{на пред. шаге } b_j) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^n P_{ji} \cdot b_j^k = \sum_{j=1}^n b_j^k \cdot P_{ji} = (b^k \cdot P)_i$$

$$b^{k+1} = b^k \cdot P$$

$$b^k = b^0 \cdot P^k$$

	1	2	3	4
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
2	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1



← поглощающее состояние (т.к. не выйдем)

остальные — непоглощающие

Марковские цепи наз. поглощающей, если из любого состояния есть

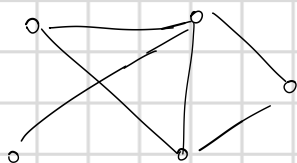
пути в поглощающее сост.

Пр.:



непоглощающее состояние

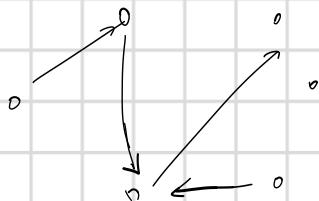
Неориентированный граф



aRb — \exists путь из a в b отсюда $ЖКВ$

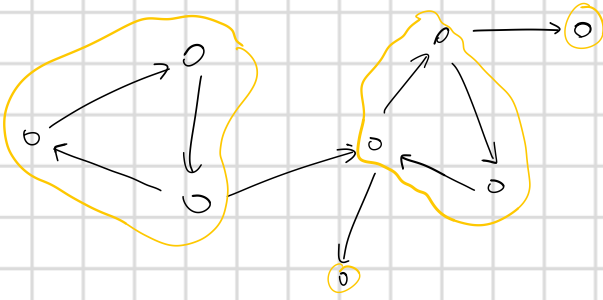
V/R — компоненты связности

Ориентированный граф



aRb — \exists путь из $a \rightarrow b$ и $\exists b \rightarrow a$ отсюда $ЖКВ$

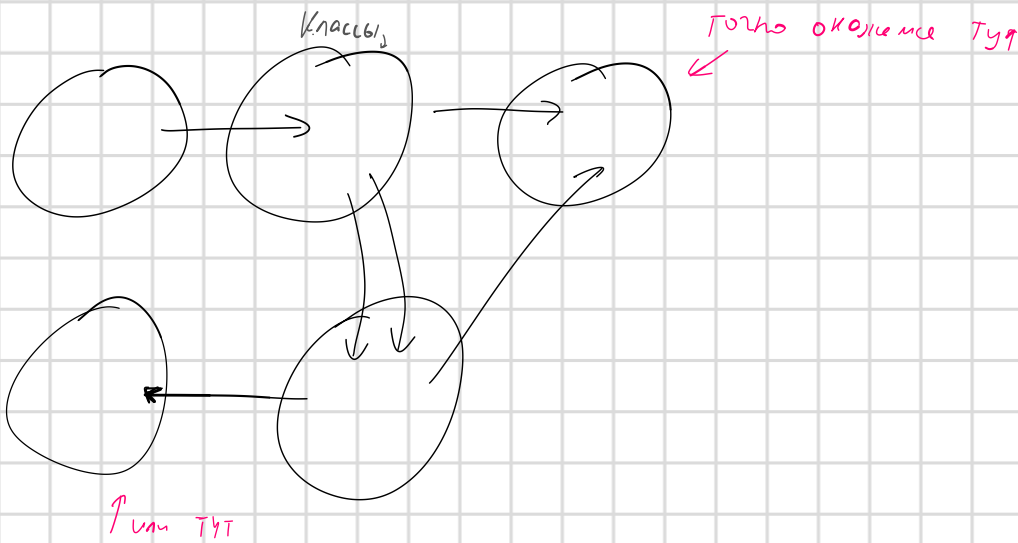
V/R — компоненты сильной связности



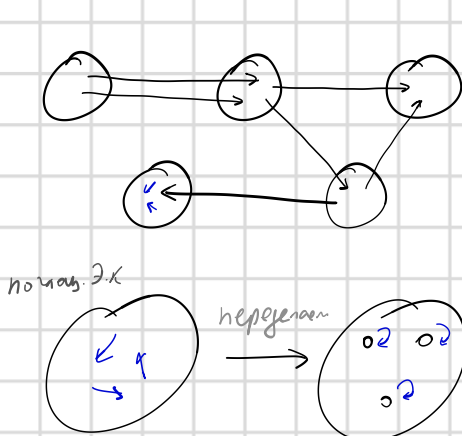
Эргодический класс - компоненты сильной связности

нормируемый Эргодический класс - класс из которого нельзя попасть

в другие классы



- 1) вер-ть попасть в норм. Эр.к.?
- 2) распределение вых-и норм. Эр.к.?
- 3) мат. ожидание шагов до нормирования



нормируемый марк. ген.

$$P = \begin{pmatrix} \text{норм. сост.} & \text{норм. сост.} \\ \text{норм. сост.} & \text{норм. сост.} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m & m+1 \\ Q & R & I \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b^k = b^0 \cdot p^k$$

$$b = \underbrace{\quad}_{\text{norm.}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{norm.}}$$

$$b \cdot p = \underbrace{\quad} \cdot \underbrace{\quad}_{Q}$$

$$a^k = a^0 \cdot Q^k$$

$$p(\text{norm. } b \text{ } i) = \sum_{j=1}^m \overbrace{p(j \rightarrow i)}^{p_{ji}} \cdot p(\text{на первом шаге добра } b \text{ } j) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{t=0}^{\infty} p(\text{norm. } b \text{ } i \text{ после } t \text{ шагов}) = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{j=1}^m p(j \rightarrow i) p(\text{добра } b \text{ } j \text{ после } t \text{ шагов}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{j=1}^m R_{j, i-m} (a^0 \cdot Q^t)_j = \sum_{j=1}^m \sum_{t=0}^{\infty} R_{j, i-m} (a^0 \cdot Q^t)_j = \sum_{j=1}^m R_{j, i-m} \sum_{t=0}^{\infty} (a^0 \cdot Q^t)_j =$$

$$= \sum_{j=1}^m R_{j, i-m} \left(\sum_{t=0}^{\infty} a^0 \cdot Q^t \right)_j = \sum_{j=1}^m R_{j, i-m} \left(a^0 \left(\sum_{t=0}^{\infty} Q^t \right) \right)_j = \sum_{j=1}^m R_{j, i-m} (a^0 \cdot N)_j \Leftrightarrow$$

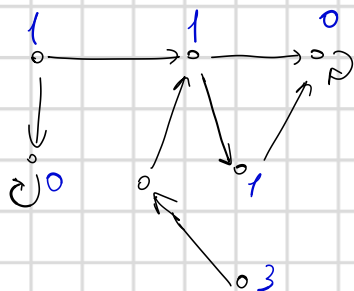
$$N = (I - Q)^{-1} - \text{функ. матр}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^m (a^0 \cdot N)_j \cdot R_{j, i-m} \stackrel{?}{=} (a^0 \cdot N \cdot R)_i$$

вектор распределения нормализации $a^0 \cdot N \cdot R$

$$Q^n \xrightarrow{\lim} 0$$

$$a^k = a^0 \cdot Q^k$$



■ - мин. длина пути по нормализации

L - макс. чл. пути мин. пути

$$Q_{ij}^L = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{L-1}} Q_{i, k_1} \cdot \underbrace{Q_{k_1, k_2} \cdot Q_{k_2, k_3} \cdot \dots \cdot Q_{k_{L-1}, j}}_{Q_{k_1, j}^{L-1}}$$

$$X = Q^L$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k_1 \dots k_{L-1}} Q_{ik_1} \dots Q_{k_{L-1}j}$$

берётся попарно i
в k попарно за L раз

$$\forall i \sum_{j=1}^m X_{ij} < 1 \quad \delta = \max, \delta < 1$$

$$Q^n = Q^{n-L} \cdot Q^L$$

$$Q_{ij} = \sum_{k=1}^m Q_{ik}^{n-L} \cdot Q_{kj}^L \leq M \cdot \sum_k Q_{ki}^{n-L} \leq M \cdot \delta$$

$$Q^n = Q^L \cdot Q^L \dots Q^L \sim ?$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} Q^t$$

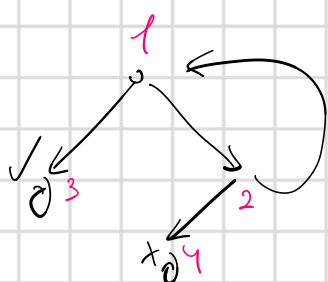
$$(I - Q^{n+1})(I - Q)^{-1}$$

T_i - мат. ожид. кол-во посещения i -го состояния

$$T_i = \sum_{j=0}^{\infty} T_{ij}, \quad T_{ij} - \text{посещение } i \text{ в } j \text{ момент}$$

$$Q^0 \checkmark = T$$

$Q^0 N \cdot \vec{1}$ - мат. ожидание по переходу.



$$P = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 2 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$I - Q = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & 2/3 \\ 2/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

$$b^0 = (1000)$$

$$c^0 = (10) \text{ (нормализ.)}$$

$$a^0 N = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

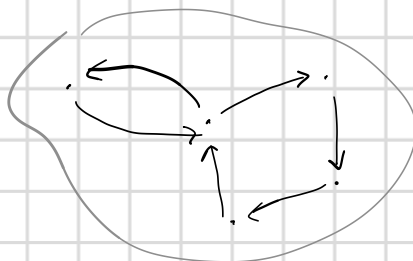
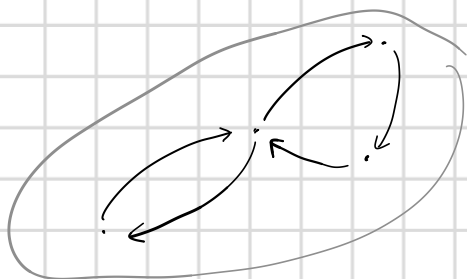
$$a^0 N \vec{r} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$$

$$a^0 N R = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$a^0 N$ - вектор из матрицы посещения (1.м)

$a^0 N \vec{r}$ - матрица шагов до нуля

$a^0 N R$ - распр. по нулю осей.



Распределение зависит от времени t и зависит от b^0

класс уникальный т.е. $\exists d > 1: \forall \text{ циклы } d \Rightarrow \uparrow$

и ациклический: $\text{Ког. всех циклов} = 1$

Теорема (эффект "забывания")

для Стохастической цепи: $\forall i, j: P_{ij} > 0$

1) $\exists b: \forall b^0 \quad b^0 P^t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} b$ (распределение после t -го шага не зависит ни от чего)

2) $b = bP$ (как найти)

$$\triangleright (2) \quad bI = bP$$

$$b(I - P) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum b_k = 1 \\ b(I - P) = 0 \end{array} \right.$$

как искать b

$$\text{rk}(I - P) = n - 1$$

докажем с помощью (1)

$$? \quad b = bP$$

$$b^0 P^t \rightarrow b \Rightarrow b^0 P^{t+1} \rightarrow bP$$

$$b \Rightarrow b = bP$$

$$(1) \quad b^0 p^t \rightarrow b$$

$$(b^0 A)_i = \sum_{k=1}^n b_k^0 \cdot A_{ki} \quad \textcircled{=}$$

$$\exists A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{ij} = a_j$$

$$\textcircled{=} \sum_{k=1}^n b_k^0 a_i = a_i \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^n b_k^0}_{=1} = a_i$$

$$? \quad p^t \rightarrow A$$

↙ i-i строки

$\exists M_i^t$ - макс в i-ой строке у p^t ; m_i^t - мин в i-ой строке у p^t ;

$$M_i^t - m_i^t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} ?$$

? - эффект максимума

$$p_{ji}^{t+1} = \sum_{k=1}^n p_{jk} \cdot (p^t)_{ki} \leq \left(\underbrace{\sum_{k=1}^n p_{jk}}_1 \cdot M_i^t \right) - p_{j?} \cdot M_i^t + p_{j?} \cdot m_i^t = M_i^t - p_{j?} (M_i^t - m_i^t) \quad \textcircled{\leq}$$

$$\exists \delta = \min(p_{ij}) \quad (\delta > 0)$$

$$\textcircled{\leq} M_i^t - \delta (M_i^t - m_i^t)$$

$$\Rightarrow M_i^{t+1} \leq M_i^t - \delta (M_i^t - m_i^t)$$

? - эффект максимума

$$p_{ji}^{t+1} = \sum_{k=1}^n p_{jk} (p^t)_{ki} \geq \sum_{k=1}^n p_{jk} \cdot m_i^t - p_{j?} \cdot m_i^t + p_{j?} \cdot M_i^t = m_i^t + p_{j?} (M_i^t - m_i^t) \quad \textcircled{\geq}$$

$$\textcircled{\geq} m_i^t + \delta (M_i^t - m_i^t)$$

$$\Rightarrow m_i^{t+1} \geq m_i^t + \delta (M_i^t - m_i^t)$$

$$M_i^t + \delta (M_i^t - m_i^t) + \underbrace{m_i^{t+1}}_{\geq m_i^t + \delta (M_i^t - m_i^t)} \geq M_i^{t+1} + m_i^t + \delta (M_i^t - m_i^t)$$

$$M_i^{t+1} - m_i^{t+1} \leq (M_i^t - m_i^t) (1 - 2\delta) \quad \text{при } \delta > 0 \quad M_i^t - m_i^t \leq (1 - 2\delta)^t$$

! чем больше δ , тем быстрее сходимость