Равномерная непрерывность

$\exists\ f: D \to \mathbb{R}$

Опр.: f равномерно непрерывна на D, если

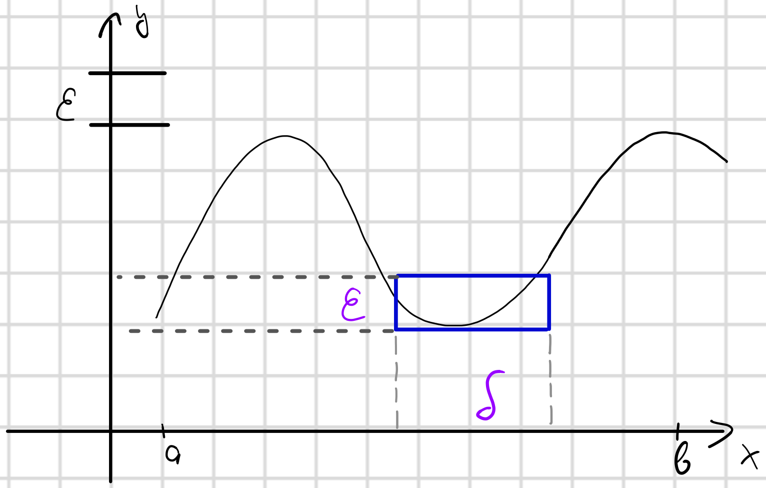
$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in D,\ |x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Непрерывность: $\forall x_1 \in D\ \ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall x_2 \in D \cap U_\delta(x_1) \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

Лемма (связь непр. и равн. непр):

Если f равн. непр на D, то $f \in C(D)$

▷ Если нашлась единая δ, то и для $\forall x\ \exists \delta$ ◀



Пр.:

1) $f(x) = \text{const}$ — р.н. на $\mathbb{R}$

2) $f(x) = ax + b$ — р.н. на $\mathbb{R}$

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |a||x_1 - x_2| < |a|\delta = \varepsilon$$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$$

Теорема (Кантора о равн. непр):

Если $f \in C([a,b])$, то f — равн-на непр на $[a,b]$

$\triangleright$ $\forall x_0 \in [a,b]$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_{(x_0)} > 0$: $\forall x \in U_{\delta_{(x_0)}}(x_0) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

по л. Бореля-Лебега выделим конечное покрытие $U_{\frac{\delta_1}{2}}(x_1), \ldots, U_{\frac{\delta_n}{2}}(x_n)$

$\exists\ \delta = \min\{\frac{\delta_1}{2}, \ldots, \frac{\delta_n}{2}\}$

$\exists\ \tilde{x}, \tilde{\tilde{x}} \in [a,b] \Rightarrow \tilde{x} \in U_{\frac{\delta_k}{2}}(x_k)$, $\triangleleft$ $|\tilde{\tilde{x}} - x_k| \leq |\tilde{\tilde{x}} - \tilde{x}| + |\tilde{x} - x_k| < \delta + \frac{\delta_k}{2} \leq$

$|\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}}| < \delta$

$\leq \frac{\delta_k}{2} + \frac{\delta_k}{2} = \delta_k \Rightarrow \tilde{x}, \tilde{\tilde{x}} \in U_{\delta_k}(x_k)$

т.е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta$: $|\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}}| < \delta_k \Rightarrow |f(\tilde{x}) - f(\tilde{\tilde{x}})| < \varepsilon$ $\blacktriangleleft$