

IV. Кольца и поля. Кольцо вычетов. Поле комплексных чисел

1. Постройте таблицы Кэли для колец \mathbb{Z}_5 , \mathbb{Z}_6 . Содержат ли они единицу? Найдите все пары делителей нуля. Является ли какое-либо из них полем?
2. Докажите, что всякое число сравнимо по модулю 9 с суммой своих цифр.
3. Найдите признак делимости числа $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1}$ на 11.
4. Найдите остаток от деления числа 2^{1001} : а) на 3; б) на 5; в) на 13.
5. Докажите, что уравнение $3x^2 - 4y^2 = 13$ не имеет целочисленных решений.
6. Докажите, что число $2222^{5555} + 5555^{2222}$ делится на 7.
- 7* Докажите теорему Вильсона: $(p-1)! + 1 : p \Leftrightarrow p$ — простое число.
8. Найдите остаток от деления а) 2^{100} на 101; б) 2^{900} на 29; в) $28!$ на 29; г) $56!!$ на 29.
9. Нарисуйте на плоскости $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ линии, заданные уравнениями: $y = kx$, $y = x^2$, $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = -1$.
10. Докажите, что множество $\{a + bx \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ является полем относительно операций обычного сложения многочленов и умножения, определённого следующим образом: $(a + bx) * (c + dx)$ равно остатку от деления $(a + bx)(c + dx)$ на $1 + x^2$. Найдите элемент, обратный $1 + x$ в этом поле.
11. Вычислите. Ответ запишите в алгебраической форме:
 а) $(2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}i)^{24}$; б) $\left(\frac{-\sqrt{3} + i}{1 + i}\right)^{27}$; в) $(1 + \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})^{32}$;
 г) $(\sqrt{2} + 1 + i)^8$; д) $((2 + \sqrt{3})i - 1)^{12}$.
12. Найдите корни из комплексных чисел. Ответ запишите в алгебраической форме и изобразите точками на комплексной плоскости:
 а) $\sqrt{1 - i}$; б) $\sqrt[4]{1}$; в) $\sqrt[3]{-64i}$; г) $\sqrt[3]{i}$; д) $\sqrt[6]{1}$.
13. Найдите суммы:
 а) $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots$; б) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots$
- 14* На вход автомата подаётся карточка с упорядоченной парой чисел, а затем каждую секунду автомат преобразует карточку (x, y) в карточку $(x^2 - y^2, 2xy)$. После минуты работы автомат получил карточку с исходной парой. Найдите все возможные значения чисел на изначальной карточке.

$$2. \overline{a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0} \equiv a_{n-1} + a_{n-2} \dots a_1 a_0 \pmod{9}$$

$$a_{n-1} 10^{n-1} + a_{n-2} 10^{n-2} + \dots + a_1 10 + a_0$$

$$a_0 \equiv a_0 \pmod{9} \quad 1 \equiv 1 \pmod{9} \quad 1 \equiv 1 \pmod{9}$$

$$a_1 \equiv a_1 \pmod{9} \quad 10 \equiv 1 \pmod{9} \quad a_1 \cdot 10 \equiv a_1 \pmod{9}$$

$$a_{n-1} \equiv a_{n-1} \pmod{9} \quad 10^{n-1} \equiv 1 \pmod{9} \quad a_{n-1} \cdot 10^{n-1} \equiv a_{n-1} \pmod{9}$$

$$a_{n-1} 10^{n-1} \equiv a_{n-1} \pmod{9}$$

$$3. a_0 \equiv a_0 \pmod{11} \quad 1 \equiv 1 \pmod{11} \quad a_0 = a_0 \pmod{11}$$

$$a_1 \equiv a_1 \pmod{11} \quad 10 \equiv -1 \pmod{11} \quad a_1 \cdot 10 \equiv -a_1 \pmod{11}$$

$$a_{n-1} \equiv a_{n-1} \pmod{11} \quad 10^{n-1} \equiv (-1)^{n-1} \pmod{11} \quad a_{n-1} \cdot 10^{n-1} \equiv (-1)^{n-1} a_{n-1} \pmod{11}$$

$$4. 1) 2^{1001} \quad 2 \equiv -1 \pmod{3}$$

$$2^{1001} \equiv (-1)^{1001} = -1 \pmod{3}$$

$$2) 2^2 \equiv -1 \pmod{5}$$

$$2^{2 \cdot 500} \equiv (-1)^{500} \pmod{5} \quad | \cdot 2$$

$$2^{1001} \equiv 2 \pmod{5}$$

$$3) 2^6 \equiv -1 \pmod{13} \quad | \cdot 66$$

$$2^{396} \equiv 1 \pmod{13} \quad | \cdot 2^5$$

$$2^{1001} \equiv 32 \equiv 6 \pmod{13}$$

$$8. 1) \text{ по 1. lemma } a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \text{ при } a \perp p \text{ берем } a=2$$

$$2^{100} \equiv 1 \pmod{101}$$

$$2) 2^{900} \equiv$$

$$2^{28} \equiv 1 \pmod{29} \quad | \cdot 32$$

$$2^{286} \equiv 1 \pmod{29} / \cdot 2^4$$

$$2^{200} \equiv 16 \pmod{29}$$

$$3) 28! \equiv \pmod{29}$$

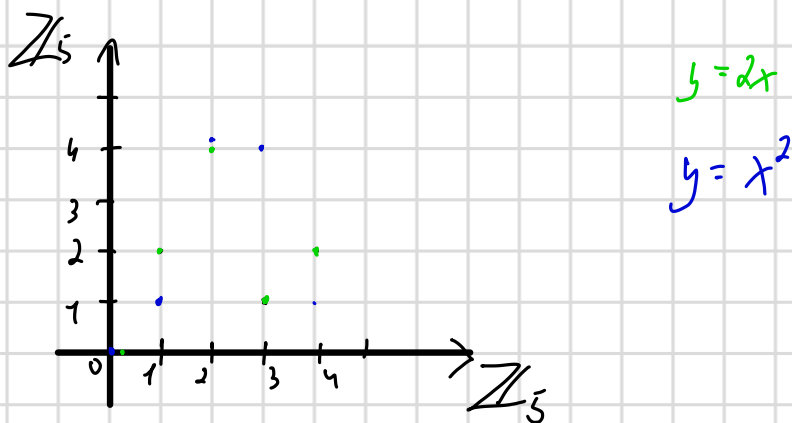
$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p} \quad p\text{-простое}$$

$$\text{по 1. формуле } 28! \equiv -1 \pmod{29}$$

$$28! \equiv -1 \pmod{29} \equiv 28$$

$$4) 56!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 54 \cdot 56 = 2^{28} \cdot 28! \equiv -1 \pmod{29} = 28$$

$$2^{28} \equiv 1 \pmod{29} \quad 28! \equiv -1 \pmod{29}$$



$$11) a) (2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}j)^{24} = (4\sqrt{2} (\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3})))^{24} \textcircled{=}$$

$$|2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}j| = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (-2\sqrt{6})^2} = \sqrt{8+24} = 4\sqrt{2}$$

$$\textcircled{=} 2^{60} (\cos(-8\pi) + i \cdot \sin(-8\pi)) = 2^{60}$$

$$d) \left(\frac{-\sqrt{3} + i}{1 + i} \right)^{27} = \left(\frac{2(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2})}{\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})} \right)^{27} = \left(\sqrt{2} \frac{\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}}{\cos \pi/4 + i \sin \pi/4} \right)^{27} \textcircled{=}$$

$$\frac{p_1 e^{i\varphi_1}}{p_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{p_1}{p_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

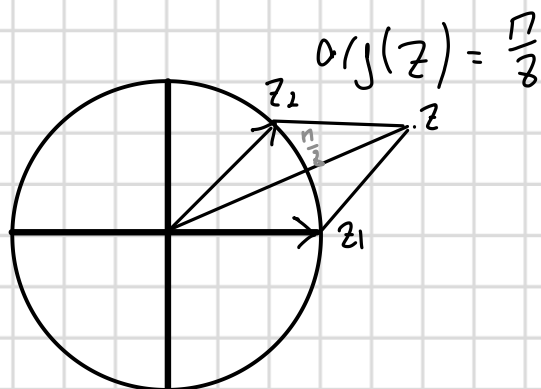
$$= \frac{p_1}{p_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{(-\sqrt{3} + i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{-\sqrt{3} + i + \sqrt{3} \cdot i + 1}{2} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i$$

$$\textcircled{=} \sqrt{2}^{27} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)^{27} = \sqrt{2}^{27} \left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4}) \right) =$$

$$= \sqrt[2]{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = 2^{1/4} (1 - i)$$

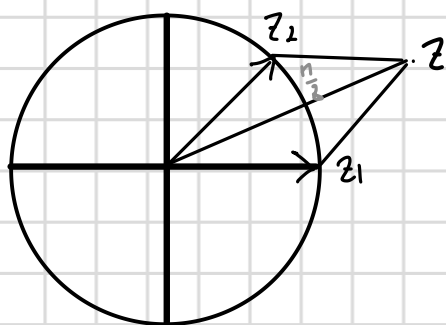
$$b) \left(1 + \cos \frac{n}{4} + i \cdot \sin \frac{n}{4} \right)^{32} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$\left| 1 + \cos \frac{n}{4} + i \cdot \sin \frac{n}{4} \right| = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$



$$\underbrace{1}_{z_1} + \underbrace{\left(\cos \frac{n}{4} + i \cdot \sin \frac{n}{4} \right)}_{z_2}$$

$$c) (\sqrt{2} + 1 + i)^8 = \left(\underbrace{\sqrt{2}}_{z_1} + \underbrace{(1 + i)}_{z_2} \right)^8 = 3 + 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{n}{8} + i \cdot \sin \frac{n}{8} \right)^8 = - (3 + 2\sqrt{2})$$



$$12. a) \sqrt{1-i} = x + iy$$

$$1 - i = x^2 + 2xyi - y^2$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = -1 \end{cases}$$

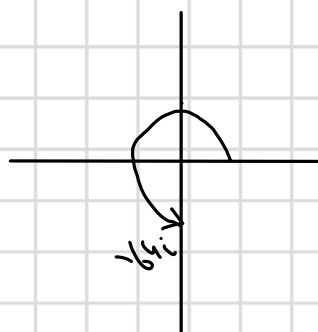
$$x = \frac{-1}{\sqrt{2} - \sqrt{2}}$$

$$y = \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}}$$

$$b) \sqrt[3]{-64i}$$

$$\rho = |-64i| = 64$$

$$\varphi = \arg(-64i) = \frac{3\pi}{2}$$

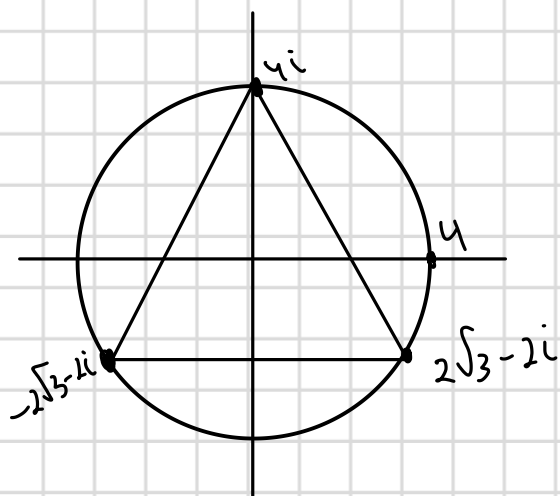


$$k=0: 4i$$

$$k=1: -2\sqrt{3} - 2i$$

$$k=2: 2\sqrt{3} - 2i$$

$$\sqrt[3]{64} \cdot \left(\cos \frac{\frac{3n}{2} + 2\pi k}{3} + i \cdot \sin \frac{\frac{3n}{2} + 2\pi k}{3} \right) = 4e^{\frac{3\pi/2 + 2\pi k}{n}}$$



13. $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots$

$$\begin{aligned} (i+1)^n &= 1 + C_n^1 i + C_n^2 i^2 + C_n^3 i^3 + C_n^4 i^4 + \dots + C_n^n i^n = \\ &= \left(1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots \right) + i \left(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots \right) = \\ &\quad \sqrt{2}^n \cos \frac{\pi n}{4} + i \sqrt{2}^n \sin \frac{\pi n}{4} = \\ &= \sqrt{2}^n \left(\cos \frac{\pi n}{4} + i \sin \frac{\pi n}{4} \right) \end{aligned}$$