Предел последовательности

1. $\lim \left(\frac{4n-3}{4n+5}\right)^{2n+2} = [1^{\infty}]$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$ $\qquad \lim e^{a_n} = e^{\lim a_n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$

$a_n \to +\infty$

$$= \lim \left(\left(1+\underbrace{\frac{-8}{4n+5}}_{=\frac{1}{a_n}}\right)^{\frac{4n+5}{-8}}\right)^{\frac{-8}{4n+5}\cdot(2n+2)} = e^{\lim \frac{-8(2n+2)}{4n+5}} = e^{-4}$$

2. $\lim\left(\frac{5n+3}{5n-2}\right)^{(3-4n)} = \lim\left(\frac{5n-2-5n+2+5n+3}{5n-2}\right)^{3-4n} = \left(1+\frac{5}{5n-2}\right)^{3-4n} =$

$$= \left(\left(1+\frac{5}{5n-2}\right)^{\frac{5n-2}{5}}\right)^{\frac{5}{5n-2}\cdot(3-4n)} = e^{\lim \frac{15-20n}{5n-2}} =$$

$$= e^{\lim \frac{\frac{15}{n}-20}{5-\frac{2}{n}}} = e^{-4}$$

3. $\lim\left(\frac{6n+2}{5n-1}\right)^{1-3n} = \lim\left[\left(1+\frac{n+3}{5n-1}\right)^{\frac{5n-1}{n+3}}\right]^{\frac{n+3}{5n-1}\cdot(1-3n)} =$

$a_n \to 5$

$\cancel{= e^{\lim \ldots}}$

$$= \left(\frac{6n+2}{5n-1}\right)^{1-3n} = \left(\frac{5n-1}{\underbrace{6n+2}_{\to\frac{5}{6}}}\right)^{3n-1} < \left(\frac{7}{8}\right)^{3n-1} \to 0$$

$\frac{5}{6} \Rightarrow$ н.с.п.п $< \frac{7}{8}$

4. $\lim \underbrace{\left(\frac{3n-1}{1-7n}\right)^{6-2n}}_{a_n} = +\infty \qquad a_n > 2^{2n-6} \to +\infty$

5. $\lim \left(\frac{3n^2+5}{3n^2+2n-1}\right)^{3n+2} = \left(\frac{3n^2+2n-1-3n^2-2n+1+3n^2+5}{3n^2+2n-1}\right)^{3n+2} =$

$\lim \left[\left(1+\frac{6-2n}{3n^2+2n-1}\right)^{\frac{3n^2+2n-1}{6-2n}}\right]^{\frac{6-2n}{3n^2+2n-1}\cdot(3n+2)} = e^{\lim \frac{(6-2n)(3n+2)}{3n^2+2n-1}} =$

$= e^{\lim \frac{18n+12-6n^2-4n}{3n^2+2n-1}} = e^{-2}$

6. $\lim \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right) = \lim\left(\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+\frac{4-3}{3\cdot 4}+\ldots+\right.$

$\left.+\frac{n+1-n}{n(n+1)}\right) = \lim\left(\frac{2}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) =$

$= \lim\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$

7. $\lim \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}\right) =$

$= \lim \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{\sqrt{1}-\sqrt{3}}{-2}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{-2}+\ldots+\frac{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}}{-2}\right) = \qquad \frac{2n+1}{4n}$

$= \lim \frac{1}{\sqrt{n}}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2n+1}}{2}\right) = \lim\left(-\frac{1}{2\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{n}}\right) =$ $\searrow 0$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$

8. Док-ть сходимость

$X_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \ominus$

$(2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)$

$(2n+1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)$

$$= \frac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}{3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{(2n+1)}$$

$$X_n = X_{n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1} < X_{n-1} \Rightarrow X_n \downarrow$$

и $X_n > 0 \Rightarrow$ по т. Вейерштрасса X_n - сходится

$<\frac{1}{2}$ $<\frac{1}{3\cdot2}$ $<\ldots$ из №6

9. $X_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$

$$X_n < 1+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{(n-1)\cdot n} = 1+\overbrace{\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\ldots+\frac{1}{n-1}}^{=0}-\frac{1}{n} =$$

$X_n \uparrow$

$$= 2-\frac{1}{n} < 2 \Rightarrow$$

X_n - огран $\Rightarrow$ сходится

10. Найти $\lim$

$X_1 = 13$, $X_{n+1} = \sqrt{12+X_n}$

$\lim X_n = A$ $\quad \lim X_{n+1} = A \Rightarrow$ $\cancel{A = \sqrt{12+A}}$

$\cancel{A^2 - A - 12 = 0}$

$\cancel{A = 4}$

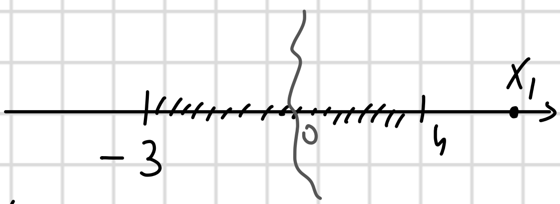
Сначала нужно, чтобы $\exists \lim$

Докажем что X_n - сходится

$X_n \uparrow$ $\quad X_{n+1} \ge X_n \Leftrightarrow \sqrt{12+X_n} \ge X_n \Leftrightarrow$

$$12+X_n \ge X_n^2 \Leftrightarrow X_n^2 - X_n - 12 \le 0$$

если $X_n > 4 \Rightarrow$



$12 + X_n > 16$

$X_{n+1} > 4 \Rightarrow X_n > 4 \ \forall n$

$\Rightarrow X_n \downarrow$ и огранич снизу $\Rightarrow \exists \lim$

11. $X_{n+1} = \frac{4}{3}X_n - X_n^2$

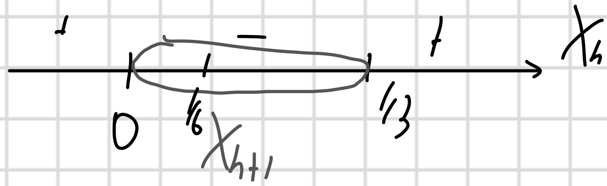
а) $X_1 = 1/6$

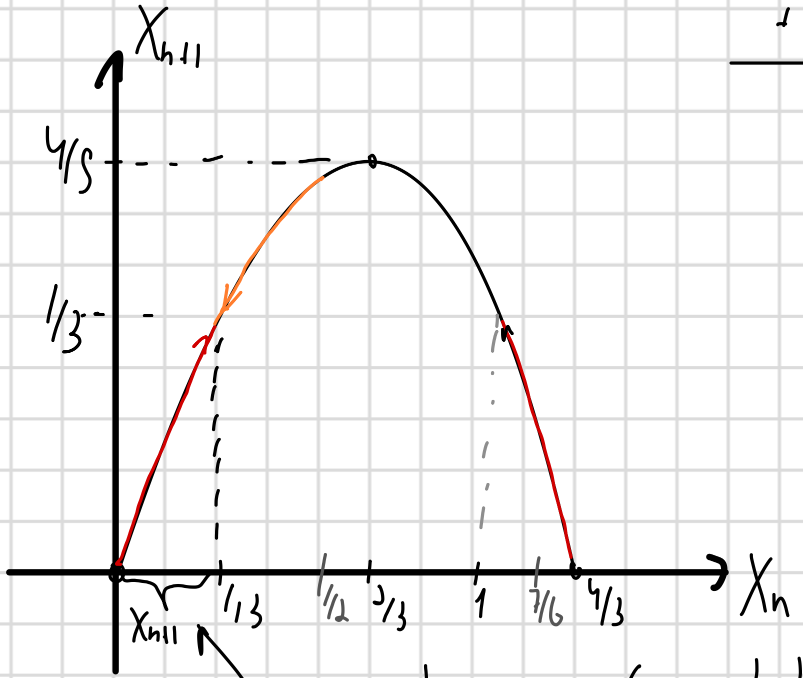
б) $X_1 = 1/2$

в) $X_1 = 7/6$

а) Докажем сходимость

$\exists\ X_{n+1} = \frac{4}{3}X_n - X_n^2 < X_n \iff X_n^2 - \frac{1}{3}X_n > 0$





$f(x) = \frac{4}{3}X_n - X_n^2$

$\Rightarrow$ а) $x_n \in (0; \frac{1}{3})$ $X_n \uparrow$ и огр

б) $X_n \in (\frac{1}{3}; \frac{4}{9})$ $X_n \downarrow$ и огр.

в) как а) т.к. $x_2 \in (0, \frac{1}{3})$

$\Rightarrow \exists \lim X_n = A$ и $A = \frac{4}{3}A - A^2$

$\left[\begin{array}{l} \cancel{A = 0} \\ A = \frac{1}{3} \checkmark \end{array}\right.$