Сходимость интегралов

$\lim \dfrac{\int_0^x f(t)dt}{\int}$ – лопиталь

$\left(\int_a^x f dt\right)' = f(x)$ т. Барроу

1. $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^4+1} dx$

$|f(x)| \le \frac{1}{x^4+1} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{x^4}$ $\int^\infty \frac{dx}{x^4}$ сх-ся => исходный сх-ся

2. $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}$

Точка $x=0$ не особая т.к. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$

$\frac{\sin^2 x}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$ сх-ся

3. $\int_0^2 \sqrt{\frac{16+x^4}{16-x^4}} dx$

$\sqrt{\frac{16+x^4}{16-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2-x}} \cdot \sqrt{\frac{16+x^4}{(2+x)(4+x^2)}} \sim \frac{C}{\sqrt{2-x}}$, $\sqrt{\frac{16+x^4}{(2+x)(4+x^2)}} \xrightarrow[x\to 2]{} C$

$\int^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx = -\int^0 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ сх-ся

$\frac{1}{2} < 1$

4. $\int_0^8 \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x}}$

$\frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ сх-ся

5. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x}}$ $\frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$ сх-ся

6. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\ln(x+1)} = \int_{-1}^{-1/2} + \int_{-1/2}^{0} + \int_0^1$ $x\to 0$: $\frac{1}{\ln(x+1)} \sim \frac{1}{x}$ расх-ся

$x\to -1$: $\frac{1}{\ln t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$

Ɉ $t = x+1$

$t \to 0$

7. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}}$

$\alpha = 1: \quad I = \int_2^{\infty} \frac{d\ln x}{(\ln x)^{\beta}} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t^{\beta}}$ $\quad \beta > 1$ сх-ся $\quad \beta \le 1$ расх-ся

$\alpha > 1: \quad \frac{1}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}} \le \frac{1}{x^{\alpha}}$ $\quad$ Сх-ся

$\beta \ge 0: \quad \ln x \uparrow \Rightarrow (\ln x)^{\beta} \uparrow$

$\alpha > 1$ и $\beta < 0: \quad \frac{(\ln x)^{\gamma}}{x^{\alpha}} \le \frac{x^{\alpha-1-\varepsilon}}{x^{\alpha}} = \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}$ $\quad \varepsilon = \frac{\alpha-1}{2}$ $\quad$ Сх-ся

$\gamma = -\beta > 0$

$\ln x < x^{\delta} \quad \forall \delta > 0$

при больших x

$\alpha < 1: \quad \frac{1}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}} > \frac{1}{x^{1-\varepsilon}}$ $\quad$ расх-ся

$\beta > 0$

$(\ln x)^{\beta} < x^{1-\alpha-\varepsilon}$

$\beta \le 0 \quad : \quad \frac{1}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}} \ge \frac{1}{x^{\alpha}}$ $\quad$ расх-ся

8. $\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sh} x}{\exp x^2 - \cos x}\, dx$

$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$x \to 0: \quad \operatorname{sh} x \sim x$

$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(1 + x + x^2 + o(x) - 1 + x + o(x)\right) = x + o(x)$

$f(x) = \frac{x + o(x)}{1 + x^2 + o(x) - (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))} = \frac{x + o(x)}{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)} \sim \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x}$

9. $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{\ln x}\, dx$

$x \to 1: \quad \frac{\cos x}{\ln x} \sim \frac{c}{x-1}$ $\quad$ расх-ся

$x \to \infty: \quad f(x)$ меняет знак !

$$\cancel{\frac{|\cos x|}{\ln x} \leq \frac{1}{\ln x}} \quad \text{~~расх~~}$$

Пр. Дирихле: $\int\limits_1^{\omega} \cos x\,dx$ — огр

$\frac{1}{\ln x} \downarrow$ и $\xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow \int$ сх-ся **как?**

абс: $\frac{|\cos x|}{\ln x} \geq \frac{\cos^2 x}{\ln x} = \frac{1+\cos 2x}{2\ln x} = \underbrace{\frac{1}{2\ln x}}_{\text{расх-ся}} + \underbrace{\frac{\cos 2x}{2\ln x}}_{\text{сх-ся}} \Rightarrow$ расх-ся

сх-ся $F(\omega) = \int\limits_1^{\omega} \cos 2x\,dx \leq C$

$\frac{1}{2\ln x}$ $\downarrow$ и $\xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow$ сх-ся условно

10. $\int\limits_0^{\infty} \sin(x^2)\,dx \ominus$

$x^2 = t$

$2x\,dx = dt$

$\ominus \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ сх-ся

$1/t$ монот и $\to 0$

$\int\limits_0^{\omega} \sin t\,dt$ огр.

$\frac{|\sin t|}{t} > \frac{\sin^2 t}{t} = \frac{1-\cos 2t}{2t} = \underbrace{\frac{1}{2t}}_{\text{расх-ся}} - \underbrace{\frac{\cos 2t}{2t}}_{\text{сх-ся}}$

$\Rightarrow$ сх.-ся условно

2-ой способ

$\int\limits_1^{\infty} \sin x^2\,dx = \int\limits_1^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2x}}_{\text{монот }\to 0} \overbrace{2x\sin x^2}^{\int = -\cos x^2 |^{\omega} \text{ - огр}}\,dx$

11. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x \, \operatorname{arctg} x}{x}\,dx \Rightarrow$ сх-ся

$g(x)$ — $\operatorname{arctg} x$; $f(x)$ — $\frac{\sin x}{x}$

Пр. Абеля: $\int\limits^{\infty} f\,dx$ сх-ся и g монот. и огр

$$\frac{|\sin x|}{x}\cdot \operatorname{arctg} x \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}\,\frac{|\sin x|}{x} \quad \text{расх-ся}$$

$$12 \quad \int_0^1 \frac{\cos^3(\ln x)}{x\ln x}\,dx = \int_{\infty}^{0} \frac{\cos^3 t}{t}\,dt = -\int_0^{\infty} \frac{\cos^3 t}{t}\,dt$$

$\exists\ t = -\ln x$

$$t\to 0:\ \frac{\cos^3 t}{t} \sim \frac{1}{t} \quad \text{расх-ся}$$

$$t\to\infty:\ \int^{\omega} \cos^3 t\,dt = \int^{\omega} (1-\sin^2 t)\,d\sin t = \sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\Big|^{\omega} \quad \text{огр.}$$

$1/t \downarrow \to 0$