

## II. Группы. Группа перестановок

1. Найдите порядки всех элементов групп  $S_2$ ,  $D_3$ ,  $V_4$ ,  $\mathbb{Z}_6$ ,  $\mathbb{Z}$ .
2. Найдите порядок группы симметрий:
  - а) квадрата;
  - б) правильного тетраэдра.
3. Найдите порядки элементов группы  $S_n$ :
  - а)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ ;
  - б)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ ;
  - в)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 & 8 & 10 & 9 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ ;
  - г)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 11 & 4 & 5 & 6 & 7 & 3 & 9 & 8 & 10 & 12 & 1 \end{pmatrix}$ .
4.  $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ .
  - а) Найдите  $\pi\sigma$  и  $\sigma\pi$ ;
  - б) Найдите  $\pi^{2024}$  и  $\sigma^{2024}$ ;
  - в) Найдите  $\pi^{-1}$  и  $\sigma^{-1}$ .
5. Разложите перестановки в произведение независимых циклов:
  - а)  $(1753)(162)(46)(3574)$ ;
  - б)  $(184)(253)(67)(142635)(78)$ .
6. Определите чётность перестановки:
  - а)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ ;
  - б)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 9 & 6 & 1 & 8 & 3 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ ;
  - в)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

7. Решите уравнения в группе  $S_n$ :

а)  $x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 2 & 5 & 6 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 4 & 6 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix};$

б)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 5 & 6 & 4 & 9 & 2 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & 4 & 6 & 3 & 2 & 5 & 1 & 9 \end{pmatrix};$

в)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$

8. Докажите, что в любой группе чётного порядка имеется элемент порядка 2.

9. Найдите все элементы конечного порядка в группе монотонно возрастающих функций из  $[0, 1]$  в  $[0, 1]$ , для которых  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$  (групповая операция — композиция).

10\* Приведите пример двух элементов конечного порядка, произведение которых имеет бесконечный порядок.

11\* Приведите пример бесконечной группы, в которой все элементы имеют конечный порядок.

12\* Найди максимально возможный порядок элемента группы  $S_7$ .