Теория вероятности

конечное или счетное

вероятностное пр-во: Ω (мн-во элементарных исходов)

$$p: \Omega \to [0;1]$$

$$\sum_{w \in \Omega} p(w) = 1$$

D_6 $\quad \Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$$p(w_i) = \frac{1}{6}$$

C $\quad \Omega = \{Р, О\}$

$$p(Р) = p(О) = \frac{1}{2}$$

$\Omega = \{Р, О\}$ нечестная монетка

$p(Р) = p \qquad p(О) = 1-p$

$\Omega = \{$кол-во бросков до первой „Р"$\}$

$p(w_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \boxed{\underbrace{OOOOOOO}_{i-1}\overset{i}{P}}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 \qquad \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

Произведение вер-ых прост-в.

$\Omega_1 \qquad p_1$

$\Omega_2 \qquad p_2$

$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$

$p(\langle w_1, w_2 \rangle) = p_1(w_1) \cdot p_2(w_2)$ $\rightarrow$

Пр.: $D_6 \times D_6$ $\quad$ i раз кинуть монетку

$\{w_1, w_2\}$ $\quad$ $\underbrace{C \times C \times C \ldots}_{i}$

$$\Rightarrow \sum_{\langle w_1, w_2\rangle} p(\langle w_1, w_2\rangle) = \sum_{\langle w_1, w_2\rangle} p_1(w_1)\, p_2(w_2) = \sum_{w_1}\sum_{w_2} p_1(w_1) p_2(w_2) =$$

$$= \underbrace{\sum_{w_1} p_1(w_1)}_{1} \underbrace{\sum_{w_2} p_2(w_2)}_{1} = 1$$

Событие

событие $A \subset \Omega$

D_6 $\overset{\text{событие}}{\{2, 4, 6\}} = \frac{1}{2} = E$ $\quad$ $p(\{5, 6\}) = \frac{1}{3} = VB$

$\overset{\text{событие}}{\{4, 5, 6\}} = \frac{1}{2} = B$

$$\underset{\frac{1}{2}}{\{2, 4, 6\}} \cap \underset{\frac{1}{2}}{\{1, 4, 6\}} \cap \underset{\frac{1}{2}}{\{1, 2, 4\}} = \{4\} \quad // \ \frac{1}{6}$$

$$P(A) = \sum_{w \in A} p(w)$$

$E \cap B = \{4, 6\}$ $\quad p = \frac{1}{3}$

$E \cap VB = \{6\}$ $\quad p = \frac{1}{6}$

Независимое событие

A и B наз. независ-и при $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

$p(E \cap B) = \frac{1}{3}$ $\quad p(E) \cdot p(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$p(E \cap VB) = \frac{1}{6}$ $\quad p(E) \cdot p(VB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

Случайная величина

С.В → $x: \Omega \to \mathbb{R}$

С: $\{P, O\}$ $x(P) = 1$

$x(O) = 0$

D_6 $\{1..6\}$ $x(i) = i$

$D_6 \times D_6$ $x(\langle w_1; w_2 \rangle) = w_1 + w_2$

a_1	P получить $a_1/36$
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
7	6
8	5
9	4
10	2
11	1
12	1

Перестановка

1	2	3	$n-3$

$$\frac{(n-3)!}{n!}$$

3г 7б

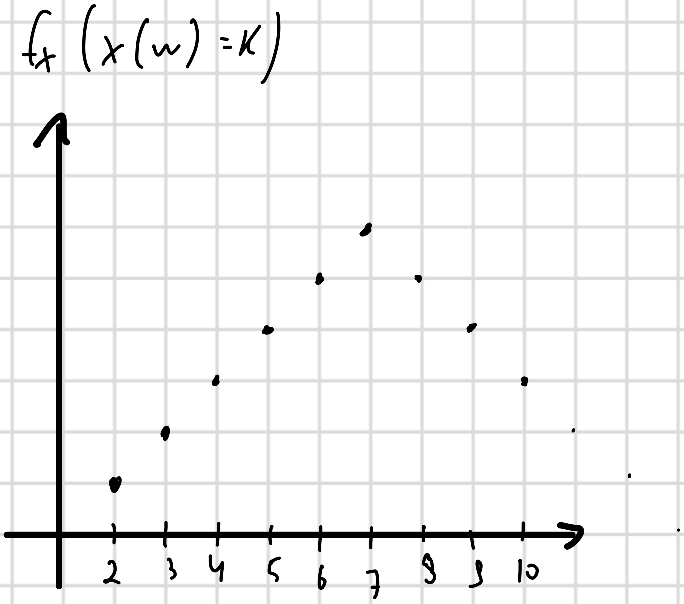
г г г

$$\frac{C_3^3}{C_{10}^3}$$

г г б

$$\frac{C_3^2 \cdot C_7^1}{C_{10}^3}$$

K	f
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
7	6
8	5
9	4
10	2
11	1
12	1



Мат. ожидание случайной величины

$$E(X) = \sum_{w \in \Omega} x(w)p(w)$$

Пр.:

$$E(X(D_6)) = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5$$

$$E(X_{D_6 \times D_6}) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} \dots + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7$$

случайная величина = „в среднем будет выпадать это значение"

$$E(X_c) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Св-ва мат. ожидания

1) $E(\lambda X) = \lambda E(x)$

2) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

▷ (1) $E(\lambda X) = \sum_w \lambda X(w) \cdot p(w) = \lambda \sum_w X(w)p(w)$ ◀

▷ (2) $E(x+y) = \sum_w (x(w)+y(w)) \cdot p(w) = \sum_w x(w) \cdot p(w) + \sum_w y(w) \cdot p(w)$ ◀

неподвижные $a[i]=i$

1 4 5 3 2 6

p

$a[i]=i$

$$E(\#\text{ неподвижн}) = \sum_{i=1}^{n} 1\!\!1_i \cdot p = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \frac{1}{n} = 1$$

$p(1) = \frac{1}{n}$

$$1\!\!1_i \begin{cases} 1, & a_i = i \\ 0, & a_i \neq i \end{cases}$$

$E(\#\text{ инверсий})$

$p(1) = \frac{1}{2}$

$$1\!\!1_{i<j} \begin{cases} 1, & a_i > a_j \\ 0, & a_i \leq a_j \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} E(1\!\!1_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1+j}^{n} \frac{1}{2} = \frac{n(n-1)}{4}$$

ГО[illegible]