7 Числовые ряды

Будем сразу рассматривать числовые ряды с комплексными членами.

7.1 Понятие ряда и его суммы

Важным примером применения теории пределов числовой последовательности является понятие числового ряда.

Определение 7.1.1 *Пусть дана последовательность a_n ($a_n \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Символ*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется числовым рядом, последовательность a_n – общим членом ряда.

Определение 7.1.2 *Последовательность S_k: сумма первых k членов ряда*

$$S_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$$

называется частичной суммой ряда, а её предел, если он существует в $\bar{\mathbb{C}}$, называется суммой ряда:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} S_k.$$

Если последовательность S_k сходится, то ряд называется сходящимся, иначе – расходящимся. Разность $R_k = S - S_k$ называется остатком ряда.

Пример 7.1.1

1. *$\sum_{n=1}^{\infty} 0$ сходится и его сумма равна 0.*
2. *$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ ($q \in \mathbb{C}$) – геометрическая прогрессия. Сходится, если $|q| < 1$, и его сумма равна $\frac{1}{1-q}$.*
3. *$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Рассмотрим частичную сумму*

$$S_k = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1,$$

следовательно, ряд сходится, и его сумма равна 1.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ *расходится, т.к. последовательность частичных сумм состоит из чередующихся* 0 *и* -1.

5. *При* $x \in \mathbb{R}$ *из соответствующих формул Тейлора следуют равенства*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos x.$$

Написанные ряды называются рядами Тейлора (Маклорена) функций e^x, $\sin x$, $\cos x$.

Замечание 7.1.1 *Изменение, отбрасывание или добавление конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость.*

Лемма 7.1.1 (Критерий сходимости через остаток) *Ряд сходится тогда и только тогда, когда его остаток стремится к нулю.*

► Запишем для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_k + R_k.$$

Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = S$ равносильно тому, что $\lim\limits_{k\to\infty} R_k = 0$. ◄

7.2 Основные свойства рядов

Теорема 7.2.1 (Критерий Коши сходимости ряда) *Для того, чтобы ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого* ε *можно было найти номер* k_0 *такой, что для всех* $k \geqslant k_0$ *и для всех* $p \in \mathbb{N}$ *выполнялось неравенство* $\left|\sum\limits_{n=k+1}^{k+p} a_n\right| < \varepsilon$.

Доказательство. Доказательство следует из критерия Коши для частичных сумм. □

Пример 7.2.1 *Гармонический ряд:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Запишем

$$S_{2k} - S_{k-1} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{2k} > \frac{1}{2k}\cdot k = \frac{1}{2}.$$

Это означает, что критерий Коши не выполняется и ряд расходится.

Теорема 7.2.2 (Необходимое условие сходимости ряда) *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то* $a_n \to 0$.

► Запишем $a_n = S_n - S_{n-1}$. Так как $S_n \to S$ и $S_{n-1} \to S$, то $a_n \to S - S = 0$. ◄

Замечание 7.2.1 *Условие* $a_n \to 0$ *не является достаточным для сходимости ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Но если* $a_n \not\to 0$, *то* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Лемма 7.2.1 (Линейность суммирования) *Пусть сходятся ряды с общими членами* a_k *и* b_k. *Тогда при любых* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *сходится ряд с общим членом* $\alpha a_k + \beta b_k$, *причем*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Доказательство. Обозначим $S^A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $S_n^A = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $S^B = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, $S_n^B = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$. Тогда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha S_n^A + \beta S^B \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha S^A + \beta S^B,$$

что и доказывает утверждение. □

Лемма 7.2.2 (Монотонность суммирования) *Пусть* $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ *и* $a_k \leqslant b_k$ *и ряды с общими членами* a_k *и* b_k *сходятся в* $\overline{\mathbb{R}}$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Доказательство. Обозначим $S^A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $S_n^A = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $S^B = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, $S_n^B = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$. Тогда, согласно условию,

$$S_n^A \leqslant S_n^B \;\Rightarrow\; \lim_{n\to+\infty} S_n^A \leqslant \lim_{n\to+\infty} S_n^B \;\Rightarrow\; S^A \leqslant S^B.$$

□

Определение 7.2.1 *Пусть дан ряд с общим членом* a_k *и* $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ *– возрастающая последовательность номеров. Положим* $n_0 = 0$ *и*

$$A_j = \sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} a_k.$$

Тогда ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j$$

называется группировкой исходного ряда.

Отметим, что группировка ряда сохраняет исходный порядок членов ряда, но меняет общий член ряда.

Замечание 7.2.2 *Мы знаем на примере ряда с общим членом* $a_k = (-1)^k$, *что группировка ряда может сходиться даже в том случае, когда ряд расходится:*

$$(-1+1) + (-1+1) + \ldots + (-1+1) + \ldots = 0.$$

Ответим на вопрос, как связаны сходимость ряда и сходимость его группировок.

Теорема 7.2.3 (О группировках ряда)

1. *Пусть ряд с общим членом* a_k *имеет сумму* $S \in \overline{\mathbb{R}}$ *или* $\overline{\mathbb{C}}$. *Тогда и любая его группировка имеет сумму* S, *то есть*

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j = S.$$

2. *Пусть группировка* $\sum\limits_{j=0}^{\infty} A_j$ *ряда с общим членом* a_k *имеет сумму* $S \in \overline{\mathbb{R}}$ *или* $\overline{\mathbb{C}}$, *причем* $a_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ *и каждая группа содержит не более* $L \in \mathbb{N}$ *членов. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S.$$

3. *Пусть группировка* $\sum\limits_{j=0}^{\infty} A_j$ *ряда с общим членом* $a_k \in \mathbb{R}$ *имеет сумму* $S \in \overline{\mathbb{R}}$, *а все члены внутри каждой группы имеют один и тот же знак. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S.$$

Доказательство. 1. Пусть $\widetilde{S}_p$ – частичная сумма группировки:

$$\widetilde{S}_p = \sum_{j=0}^{p} A_j = \sum_{k=1}^{n_p} a_k = S_{n_p},$$

то есть является подпоследовательностью последовательности $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Следовательно,

$$\lim_{p\to+\infty} \widetilde{S}_p = \lim_{p\to+\infty} S_{n_p} = \lim_{n\to+\infty} S_n = S.$$

2. Рассмотрим случай $S \in \mathbb{C}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $a_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, то существует k_0, что при $k > k_0$ выполняется

$$|a_k| < \frac{\varepsilon}{2L}$$

Так как перестановка имеет сумму S, то существует j_0 такой, что при $j > j_0$ выполняется

$$|\widetilde{S}_j - S| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $n > \max(k_0, n_{j_0+1})$. Тогда существует t, что $n_t < n \leqslant n_{t+1}$, причем $n_t \geqslant n_{j_0+1}$. Но тогда

$$|S_n - S| \leqslant |S_n - \widetilde{S}_t| + |\widetilde{S}_t - S| = \left|\sum_{k=n_t+1}^{n} a_k\right| + |\widetilde{S}_t - S| < \frac{\varepsilon}{2L}L + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Случаи $S = \pm\infty$ ответственный студент разберет самостоятельно.

3. Рассмотрим случай $S \in \mathbb{R}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как перестановка имеет сумму S, то найдется j_0 такой, что при $j > j_0$ выполняется

$$|\widetilde{S}_j - S| < \varepsilon.$$

Пусть $n > n_{j_0+1}$. Тогда найдется t, что $n_t < n \leqslant n_{t+1}$, причем $n_t \geqslant n_{j_0+1}$. Если все члены группы A_t неотрицательны, то

$$\widetilde{S}_t \leqslant S_n \leqslant \widetilde{S}_{t+1},$$

а если неположительны, то

$$\widetilde{S}_{t+1} \leqslant S_n \leqslant \widetilde{S}_t.$$

В любом из двух описанных случаев,

$$|S_n - S| \leqslant \max(|\widetilde{S}_t - S|, |\widetilde{S}_{t+1} - S|) < \varepsilon.$$

Не забудьте рассмотреть случаи $S = \pm\infty$ и $S = \infty$. $\square$

Положительные ряды

$\exists\ a_n \geq 0$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

Лемма.

1) $S_n \uparrow$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \sup S_n$

3) $\sum^{\infty} a_n$ сх-ся $\Leftrightarrow$ S_n – огр. сверху

$\triangleright$ лекция $\blacktriangleleft$

Теорема (Признаки сравнения)

$\exists\ a_n, b_n \geq 0$ Тогда:

① Если $0 \leq a_n \leq b_n$ и $\sum^{\infty} b_n$ сх-ся, то $\sum^{\infty} a_n$ сх-ся

можно н.с.н.м

② Если $0 \leq a_n \leq b_n$ и $\sum^{\infty} a_n$ расх, то $\sum^{\infty} b_n$ расх-ся

③ Если $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n$, то $\sum^{\infty} a_n$ и $\sum^{\infty} b_n$ оба сх-ся или расх-ся

$\triangleright$ Как для интегралов $\blacktriangleleft$

Теорема (Радикальный признак Коши)

$\exists\ a_n \geq 0$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = l$. Тогда:

1) Если $l > 1$, то $\sum^{\infty} a_n$ расх-ся

2) Если $l < 1$, то $\sum^{\infty} a_n$ сх-ся

③ Если $l = 1$, то признак не работает

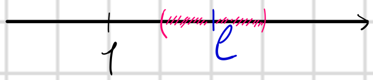
Пр.:

1) $\sum^{\infty} \frac{1}{n}$ $\qquad \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}} \to 1$, но ряд расх-ся

2) $\sum^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сх-ся т.к. $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} \leftarrow$ сх-ся, но $\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \to 1$

▷ (1) т.к. $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1$, то $\exists a_{n_k} : \sqrt[n_k]{a_{n_k}} \to \ell > 1 \Rightarrow a_{n_k} > 1$ н.с.н.н. $\Rightarrow$

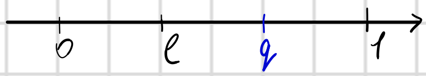
$\Rightarrow$ и $a_{n_k} > 1$



$\Rightarrow a_n \not\to 0 \qquad a_n > 1 \qquad \Rightarrow \sum a_n$ расх-ся ◀

▷ (2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \ell < 1$

Ǝ $q = \frac{\ell+1}{2} \in (\ell, 1)$



$\Rightarrow \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < q$

$a_n < q^n$ и $\sum q^n$ сх-ся (т.к. $0 < q < 1$)

$\Rightarrow$ по пр. сравнения $\sum^{\infty} a_n$ сх-ся ◀

Теорема (признак Даламбера)

Ǝ $a_n > 0$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда:

1) Если $\ell > 1$, то $\sum^{\infty} a_n$ расх-ся

2) Если $\ell < 1$, то $\sum^{\infty} a_n$ сх-ся

③ Если $\ell = 1$, то признак не работает

▷ (1) Если $\ell > 1$, то н.с.н.н. $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow a_n \not\to 0$ и ряд расх-ся (т.к. не вып. необх. ус-е) ◀

▷ (2) Ǝ $\ell < 1$ и $q = \frac{\ell+1}{2} \in (\ell, 1)$

$\exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \quad \frac{a_{n+1}}{n} < q$

$$\left.\begin{array}{l} a_{n_0+1} < q \cdot a_{n_0} \\ \vdots \\ a_{n_0+p} < q^p \cdot a_{n_0} \end{array}\right\} \quad a_n < q^{n-n_0} \cdot a_{n_0} \quad \text{и} \quad \sum^{\infty} q^{n-n_0} \text{ сх-ся} \Rightarrow \sum^{\infty} a_n \text{ сх-ся}$$

◀

ⓩ Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$, но в обратную сторону не работает

(Коши сильнее)

Теорема (Признак Куммера)

$\exists\, a_n, b_n > 0$, $\sum^{\infty} \frac{1}{b_n}$ расх-ся и $\lim\limits_{n\to\infty} \left(b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1}\right) = \ell$. Тогда:

1) Если $\ell > 0$, то $\sum^{\infty} a_n$ сх-ся

2) Если $\ell < 0$, то $\sum^{\infty} a_n$ расх-ся

ⓩ при $b_n = 1$ получаем пр. Даламбера

▷ (1) $\ell > 0 \Rightarrow$ н.с.н.н. $b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} > \frac{\ell}{2}$

$$\downarrow$$

$$a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1} > \frac{\ell}{2} \cdot a_{n+1} > 0 \Rightarrow a_n b_n \downarrow \text{ и } a_n b_n > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n \in \mathbb{R}$

но $\sum\limits_{n=1}^{N} (a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1}) = \underbrace{a_1 b_1}_{\text{const}} - \underbrace{a_{N+1} b_{N+1}}_{\exists \lim \to \text{const}}$ сх-ся

$\Rightarrow \sum a_n$ сх-ся ◀

▷ (2) $\exists\, \ell < 0 \Rightarrow$ н.с.н.н. ($\forall n \geq n_0$) $b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} < 0$

$$\downarrow$$

$$b_n \cdot a_n - b_{n+1} a_{n+1} < 0 \Rightarrow a_n b_n \uparrow$$

$$a_{n+1} > a_n b_n \cdot \frac{1}{b_{n+1}} \geq \underbrace{a_{n_0} b_{n_0}}_{\text{const}} \cdot \underbrace{\frac{1}{b_{n+1}}}_{\text{расх-ся}} \leftrightarrow \sum \frac{1}{b_{n+1}} \text{ расх-ся}$$

$\Rightarrow \sum^{\infty} a_{n+1}$ расх-ся ◀

Теорема (признак Раабе)

$\exists\, a_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \ell$. Тогда:

1) $\ell >\quad \Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ сх-ся

2) $\ell <\quad \Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ расх-ся

$\triangleright$ (1,2) подставим в пр. Куммера $b_n = n$:

$$\left(n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - n - 1\right) = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1 \to \ell - 1 \quad \blacktriangleleft$$

Пр.:

1) $\sum^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 2^n} = \frac{2}{n+1} \longrightarrow 0 < 1 \Rightarrow \text{сх-ся}$$

Теорема (Признак Бертрана)

$\exists\ a_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \ln n \cdot \left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right) = \ell$ Тогда:

1) Если $\ell > 1 \Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ сх-ся

2) Если $\ell < 1 \Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ расх-ся

$\triangleright$ в пр. Куммера подставим $b_n = n \cdot \ln n$

?: $\sum^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

$\triangleleft\ \ln\ln(n+1) - \ln\ln n \ \textcircled{=}$ Т. Лагранжа

$\exists\ f(x) = \ln\ln x,\ f' = \frac{1}{x \ln x}$

$\textcircled{=} \frac{1}{\xi \cdot \ln \xi} \ \textcircled{\leq}\ \xi \in [n, n+1] \ \textcircled{\leq} \ \frac{1}{n \ln n}$

$$\sum_{n=2}^{N} \left(\ln\ln(n+1) - \ln\ln n\right) = \ln\ln(N+1) - \ln\ln 2 \to +\infty$$

$+\infty$

$\Rightarrow \sum^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ расх-ся $\blacktriangleleft$

Теорема (Признак Гаусса)

$\exists\ a_n > 0$ и $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\gamma}}\right),\ \gamma > 0,\ n \to \infty$ Тогда:

1) Если $\lambda > 1$, то $\sum^{\infty} a_n$ сх-ся

2) Если $\lambda < 1$, то $\sum^{\infty} a_n$ расх-ся

3) Если $\lambda = 1$, то:

3.1) $\mu > 1$, то $\sum^{\infty} a_n$ сх-ся

3.2) $\mu \le 1$, то $\sum^{\infty} a_n$ расх-ся

▷ (1, 2) признак Даламбера ◀

▷ (3.1, 3.2) признак Раабе при $\mu \ne 1$ ◀

▷ (3.1, 3.2) признак Бертрана при $\mu = 1$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \alpha_n \cdot \frac{1}{n^{1+\delta}}, \quad \alpha_n \text{ — огр.}$$

$$n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1 = \frac{\alpha_n}{n^{\delta}} \quad \Big| \ln n$$

◀ смотреть лекцию

$$\ln n \cdot \left(n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right) = \frac{\alpha_n}{n^{\delta}} \ln n$$

(!) Нельзя заменить $O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right)$ на $o\left(\frac{1}{n}\right)$

Интегральный признак Коши.

Теорема

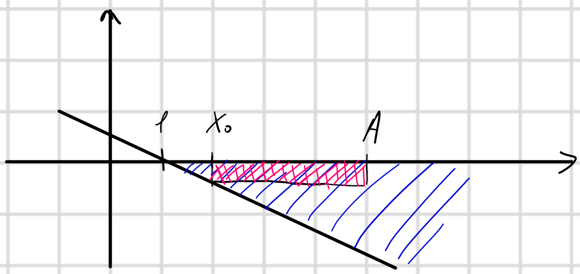
Пусть f — монотонна на $[1, +\infty)$. Тогда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ сх-ся} \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ сх-ся}$$

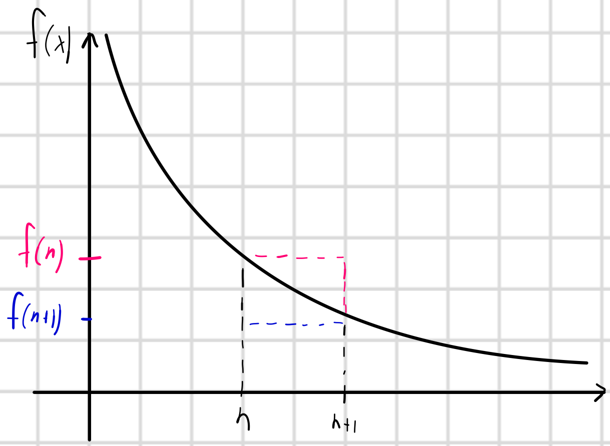
▷ Пусть $f \downarrow$

1) Если $f(x_0) < 0$, то $f(k) \le f(x_0)$ н.с.н.н. и $f(k) \not\to 0 \Rightarrow \sum^{\infty} f(k)$ расх-ся

$$\int_1^{+\infty} f\,dx = \lim_{A \to +\infty} \int_{x_0}^{A} f\,dx \le \lim_{A \to +\infty} f(x_0) \cdot (A - x_0)$$



2) $\exists\; f(x) \geq 0$



$$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n), \quad x \in [n, n+1]$$

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f\,dx \leq f(n)$$

$$\sum_{n=1}^{N} f(n+1) \leq \int_1^{N+1} f\,dx \leq \sum_{n=1}^{N} f(n) \quad *$$

Если $\sum^{\infty} f(n)$ сх-ся $\Rightarrow F(w) = \int_1^w f\,dx \uparrow$ $\quad F(N+1)$ – огр. сверху

$\Rightarrow F(w)$ имеет $\lim\limits_{w \to +\infty}$ ◀

Пр.:

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \ln \ln x \Big|^{\infty} = +\infty$$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$

$\alpha > 1: \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ сх-ся

$\alpha \leq 1: \frac{1}{n^{\alpha}} \geq \frac{1}{n}$ расх-ся

Следствие („Сравнение Σ и $\int$"):

$\exists\; f \geq 0$, $f(x) \downarrow$ на $[1, +\infty)$. Тогда:

$A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f\,dx$ имеет предел $A = \lim\limits_{n \to \infty} A_n \in \mathbb{R}$

▷ $A_n \geq 0$ по $*$

$\sphericalangle\; A_n - A_{n+1} = -f(n+1) + \int_{n+1}^{n+2} f\,dx \leq 0$

$f(x) \leq f(n+1)$ $\quad x \in [n+1, n+2] \Rightarrow A_n \uparrow$

$$A_N = \sum_{k=1}^{N} f(k) \xrightarrow{k=n+1} \sum_{n=0}^{N-1} f(n+1) - \int_1^{N+1} f\,dx = f(1) - f(N+1) + \underbrace{\sum_{n=1}^{N} f(n+1) - \int_1^{N+1} f\,dx}_{\leq 0} \leq$$

$\leq f(1) - f(N+1) \leq f(1)$

$\Rightarrow A_N \uparrow$ и огр. сверху $\Rightarrow \exists \lim\limits_{N\to\infty} A_N$ ◀

П $\exists \lim\limits_{N\to\infty} A_N = A$

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^{n+1} f\,dx + A + \alpha_n, \quad \alpha_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Следствие (Сумма гармонич. ряда)

$$\sum_{k=1}^{n} 1/k = \ln(n+1) + A + \alpha_n$$

$A = \gamma$ или C – постоянная Эйлера (Маскерони)

$\gamma = 0,577\ldots$, $\sum\limits_{k=1}^{n} 1/k \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n$

Признак Абеля-Дирихле

Лемма (Преобразование Абеля)

penis

П $a_n, b_n \in \mathbb{C}$, $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ Тогда:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k)$$

▷ $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum\limits_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k =$ $A_0 = 0$ $= A_n b_n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k b_k - \underbrace{\sum\limits_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k}_{\sum\limits_{k=\cancel{0}\,1}^{n-1} A_k b_{k+1}} = A_n b_n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$ ◀

Теорема (признак Абеля-Дирихле)

П $a_k \in \mathbb{C}$, $b_k \in \mathbb{R}$. Тогда для сх-ти $\sum\limits^{\infty} a_k b_k$ достаточно:

1) $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ огр., т.е. $|A_n| \leq C$
2) b_k - монотон. и $b_k \to 0$

Дирихле

Или

$$\begin{cases} 1)\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ сх-ся} \\ 2)\ b_k \text{ монот. и огр.} \end{cases}$$

Абель

▷ Дирихле: Кр. Коши $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| = \left|\sum\limits_{k=1}^{n+p} - \sum\limits_{k=1}^{n}\right| = \left|A_{n+p} b_{n+p} - \sum\limits_{k=1}^{n+p-1} A_k (b_{k+1} - b_k) - A_n b_n + \right.$

$\left. + \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k)\right| \le C \cdot \left(\underbrace{|b_{n+p}|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|b_n|}_{<\varepsilon} + \sum\limits_{k=n}^{n+p-1} \overset{\text{телескоп}}{\underset{\text{одного знака из-за монотонности}}{\boxed{|b_{k+1} - b_k|}}}\right) \le C \cdot (2\cdot\varepsilon + |b_{n+p}| + |b_n|) < 4 \cdot C \cdot \varepsilon$ ◀

▷ Абель: Сами :) ◀

Пр.:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^\alpha}$$

- $\alpha > 1$: $\left|\frac{\sin n}{n^\alpha}\right| \le \frac{1}{n^\alpha}$ и $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ сх-ся
- $0 \le \alpha \le 1$ $\quad |A_n| = \left|\sum\limits_{k=1}^{n} \sin k\right| = \left|\frac{\sin\frac{n+1}{2} \cdot \sin\frac{n}{2}}{\sin\frac{1}{2}}\right| \le \frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{n^\alpha} \downarrow$ и $\to 0 \Rightarrow$ по пр. Дирихле $\sum \frac{\sin n}{n^\alpha}$ сх-ся Как?

$\left|\frac{\sin n}{n^\alpha}\right| \ge \left|\frac{\sin^2 n}{n^\alpha}\right| = \underbrace{\frac{1}{2n^\alpha}}_{\sum \text{ расх-ся}} - \underbrace{\frac{\cos 2n}{2n^\alpha}}_{\sum \text{ сх-ся по Дирихле}} \Rightarrow$ абс. сх-ти нет

- $\alpha \le 0$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^\beta \sin n$, $\beta = -\alpha \ge 0$ расх-ся т.к. $n^\beta \sin n \not\to 0$

Теорема (Признак Лейбница)

$\triangleleft$ Знакочередующийся ряд $\leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$, $a_k \ge 0$

$\exists\ a_k \downarrow$ и $a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ сх-ся

▷ $\triangleleft$ $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} = \underbrace{1 - 1 + 1 - 1 + \ldots}_{n \text{ шт.}} = \begin{cases} 0, \text{ чет} \\ 1, \text{ нечет} \end{cases}$ – огр.

$a_k \downarrow$ и $\to 0$ $\Rightarrow$ сх-ся по пр. Дирихле ◀