Гомоморфизм

$\exists\ \varphi: G \to H$ гомоморфизм

$$Im(\varphi) = \{\varphi(g) \mid g \in G\} \text{ – образ}$$

$$Ker(\varphi) = \{g \in G \mid \varphi(g) = \underset{H}{\underset{\Uparrow}{e}}\} \text{ - ядро гомоморфизма}$$

Пр.: $sgn: \underset{\sigma}{\underset{\Uparrow}{S_n}} \to \{\pm 1\}$

$\sigma \mapsto sgn(\sigma)$

$$Im(sgn) = \{\pm 1\}$$

$$Ker(sgn) = A_n$$

$Ker(\varphi)$ – такие эл из G что $\varphi(G)$ дает нейтральный в H (с операц в H)

Св-ва:

1) $Im(\varphi) \leq H$
2) $Ker(\varphi) \trianglelefteq G$

$\triangleright$ (1) $\exists\ h_1, h_2 \in Im(\varphi)$

$h_1 = \varphi(g_1)$

$h_2 = \varphi(g_2)$

$h_1 \cdot h_2 = \varphi(g_1)\,\varphi(g_2)$ т.к. φ – гомоморфизм $\Rightarrow$

$\Rightarrow h_1 \cdot h_2 = \varphi(g_1 g_2)$ а значит их перемножение образ есть в H

Замкнутость ✓

$\forall\ \underset{Im(\varphi)}{\underset{\Uparrow}{h}} = \varphi(g)$ $\quad h^{-1} = \varphi(g^{-1}) \in Im(\varphi)$ $\quad\exists$ обратный ✓

$e = \varphi(e)$ из G $\quad\exists$ нейтрал ✓ ◀

▷ (2) $\exists\ g_1, g_2 \in Ker(\varphi)$

$$\varphi(g_1 g_2) = \underbrace{\varphi(g_1)}_{e}\ \underbrace{\varphi(g_2)}_{e} = e \Rightarrow g_1 g_2 \in Ker(\varphi)$$

т.к. это ядро

докажем $Ker(\varphi) \leq G$

◁ $g \in Ker(\varphi)$ $\quad \varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1} = e^{-1} = e \Rightarrow g^{-1} \in Ker\ \varphi$

обратный ✓

$e = \varphi(e) \Rightarrow e \in Ker\ \varphi$ нейтр ✓

нормальность:

◁ $\varphi(g x g^{-1}) = \varphi(g)\ \underbrace{\varphi(x)}_{e}\ \varphi(g^{-1}) = \varphi(g)\ (\varphi(g))^{-1} = e$

если $g, x, g^{-1} \in Ker(\varphi)$ → если возьмем сопряжение то опять попадем в ядро

$\Rightarrow g x g^{-1} \in Ker\ \varphi$ нормальность ✓

Теорема (о гомоморфизмах):

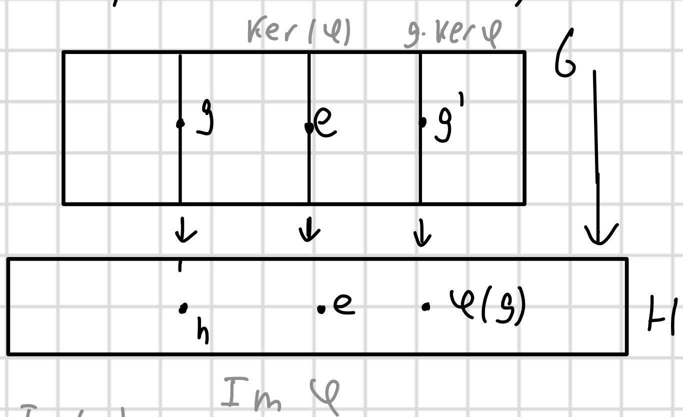
$\varphi : G \to H$ гомоморфизм тогда $G/Ker(\varphi) \simeq Im(\varphi)$

другими словами: $\exists$ изоморфизм $\psi : G/Ker\ \varphi \xrightarrow{\sim} Im(\varphi)$

что $\varphi = \overset{\text{пси}}{\psi} \circ \overset{\text{пи}}{\pi}$

$\pi : G \to G/Ker(\varphi)$

т.е. $\varphi(g) = \psi(g \cdot Ker(\varphi))$



получилась биекция

$G/Ker(\varphi) \leftrightarrow Im(\varphi)$

нужно

Доказать: 1) $h \in Im(\varphi)$ $\quad h = \varphi(g)$

2) $\varphi^{-1}(h) = g \cdot ker(\varphi)$

Док-во: $\triangle$ $\forall \tilde{g} \in G$ и $K = g^{-1}\tilde{g} \Rightarrow \hat{g} = Kg$ в каком случае равенство?

$$\varphi(\hat{g}) = \varphi(Kg) = \varphi(K) \cdot \underbrace{\varphi(g)}_{h}$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(K) = e \Rightarrow K \in Ker(\varphi)$$

$$g^{-1}\hat{g} \in Ker(\varphi)$$

$$\Downarrow$$

g и $\hat{g}$ лежат в одном классе

покажем что это гомоморфизм: (т.к. биекция уже доказана)

$$\psi(g_1 Ker(\varphi) \cdot g_2 ker(\varphi)) = \varphi((g_1 g_2) Ker(\varphi)) = \varphi(g_1 g_2) =$$

$$= \varphi(g_1)\ \varphi(g_2) = \psi(g_1 \cdot Ker\ \varphi) \cdot \psi(g_2\ Ker\ \varphi) \blacktriangleleft$$

Пр.: гр. $G = \mathbb{Z}$ $\quad$ под. гр. $H = n\mathbb{Z}$

$$\forall\ \mathbb{Z}/\underbrace{n\mathbb{Z}}_{\substack{\parallel \\ \text{если } ker\,\varphi}} \simeq Im\ \varphi = \mathbb{Z}_n$$

$$\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

$$x \mapsto x \pmod n$$

$Im\ \varphi = \mathbb{Z}_n$

$$n\mathbb{Z} = Ker(\varphi)$$

Пр.: $\overset{\text{гр.}}{G} = S_n$ $\qquad$ $\overset{\text{подгр.}}{H} = A_n$

$\sigma \in A_n$ $\qquad$ $g \in S_n$

сопряжение

$g \sigma g^{-1} \in A_n \longrightarrow A_n \trianglelefteq S_n$

одна четность

$S_n / A_n \simeq \mathbb{Z}_2$

Пр.: $\overset{\text{группа}}{G} = \mathbb{R}$ $\qquad$ $\overset{\text{подгрупп}}{H} = 2\pi\mathbb{Z}$

$\mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z} \simeq \mathbb{T}$ группа углов

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $\operatorname{Ker} \varphi = 2\pi\mathbb{Z}$

$x \longmapsto x \pmod{2\pi}$

$\operatorname{Im} \varphi = [0; 2\pi)$ $\qquad$ $\operatorname{Ker} \varphi = 2\pi\mathbb{Z}$