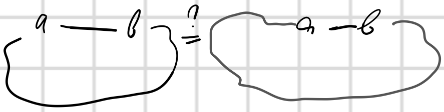
Эйлеровы графы

Эйлеров путь – путь L $\forall e \in E$: $L \ni e$ ровно 1 раз

при ориент. графе нужно пройти .

Эйлеров цикл – путь, явл. циклом

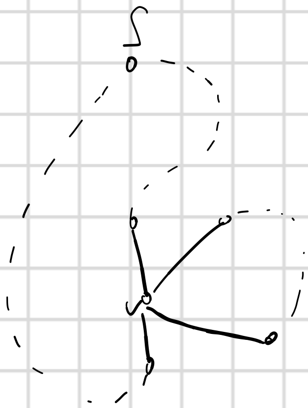
Как отличить 2 цикла: берем $a - b$ и накладываем и смотрим совпадение

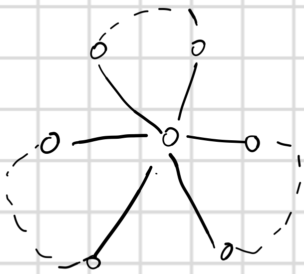


Граф наз. Эйлеровым если в графе есть Э.Ц

Необх. условие Эйлерова Графа

- G связен (кроме изолирован. вершин)
- $\forall v \in V$: $\deg v \vdots 2$ (случай с неор. графом)

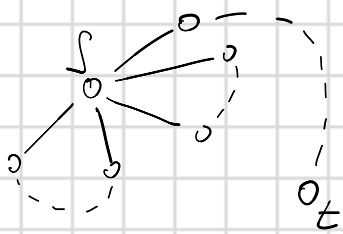




- $\forall v$: $\deg_{in} v = \deg_{out} v$ (случай с ор. графом)

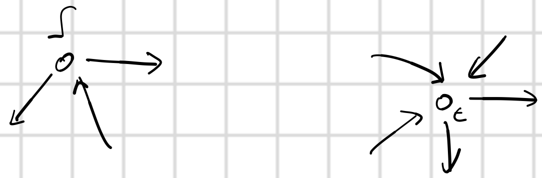
Э.П $\Rightarrow$

- G – связен*
- все вершины $\deg v \vdots 2$ кроме концов ≤ 2



$\deg s \vdots 2$

- $1+\deg_{in} S = \deg_{out} S$



$\deg_{in} t = \deg_{out} t + 1$

Лемма

Если $\deg \vdots 2$, то $\exists$ Э.П. явл. Э.Ц. (для ор тоже)

! в лабе проверить $\exists$ Э.Ц.: 1) проверить связность
2) проверить степени

Достаточные условия

- G – св.
- $\deg V \vdots 2$

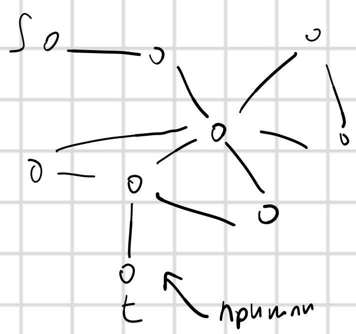
$\Rightarrow \exists$ Э.Ц.

▷ индукция по $|V|+|E|$

Лемма

$\deg V \vdots 2$, $|E| > 0 \Rightarrow \exists$ цикл

▷ $\exists$ o—o идём пока можем без повторений рёбер



$t \neq S \Rightarrow \deg t \not\vdots 2$ противоречие с $\deg V \vdots 2$ ◀

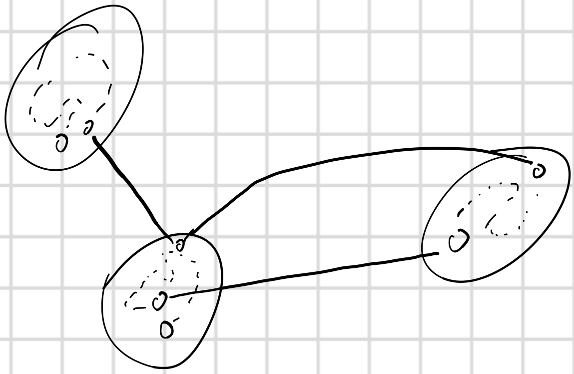
1) находим простой цикл → удаляем

$\Rightarrow$ четность $V \vdots 2$ сохранилась

⊳ КС → связный граф + $\deg v \vdots 2$

2) предполож. инд. там все норм (в каждой есть Э.Ц)

3) ∃ Э.Ц. в исх графе



◀

Ор. граф.

- G – св
- $\deg_{in} = \deg_{out}$

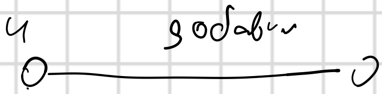
⇒ ∃ Э.Ц

▷ также ◀

- g – св
- ∀ v $\deg \vdots 2$, кроме 2

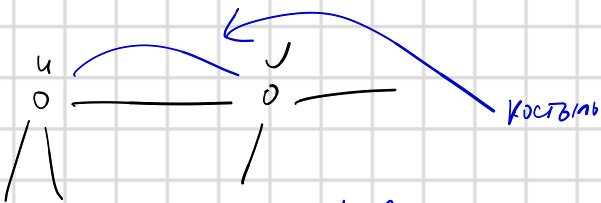
⇒ ∃ Э.П.

▷

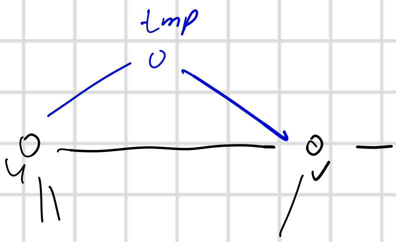


⇒ ∃ Э.Ц

проблема: u и v могут быть соединены



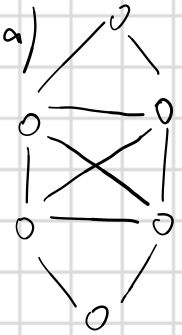
либо

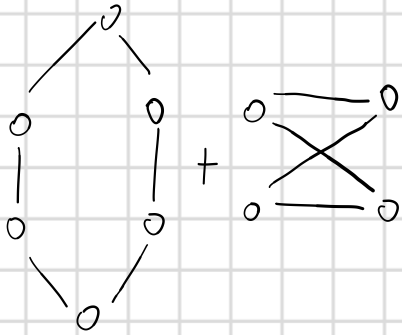


◀

Покрытие ребер графа путями

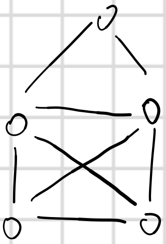
а)





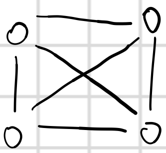
за 0

в)



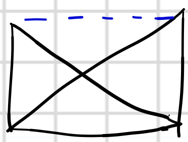
за 0

с)



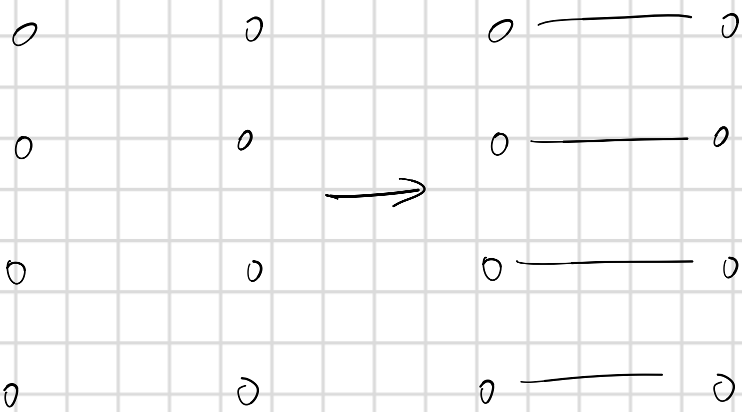
за 0 нельзя

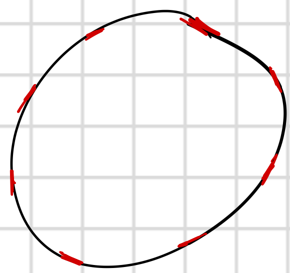
за 1:



- G - св
- $2K$ нечет верш

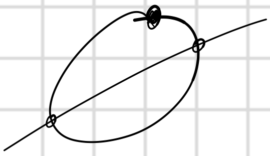
мин. число путей K



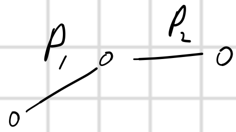


удаляем K ребер останется K путей

- $2K$ и $\leq K-1$ путей

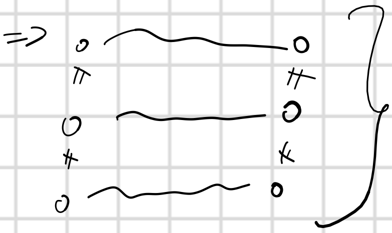


нет,

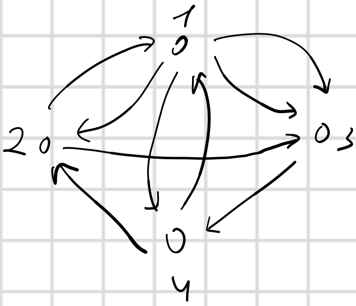


нет

$q = p_1 \circ p_2$

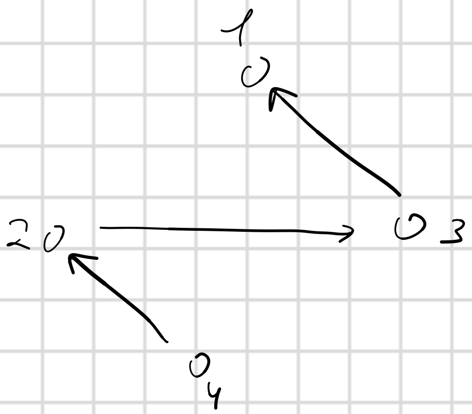


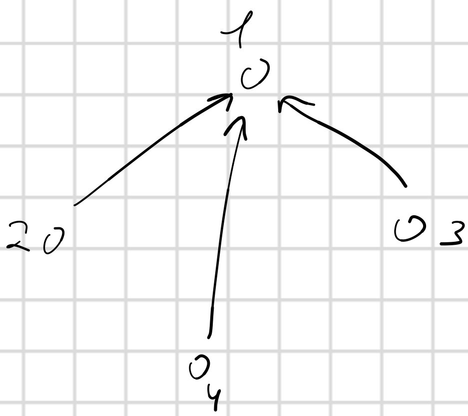
$\le k-1 \Rightarrow$ нечет. $\le 2k-2$



подвешенный ориент. остов:

- $n-1$ ребро
- $\forall u \ \exists$ путь в корень ✓





Теорема (Тутте)

$A_{ii} = \deg_{in} i$

$A_{ij} = -1, \ i \to j$

$\quad\ \ 0$ иначе

подвешенных ост. дер-в вниз в корне i = $\hat{A}_{ii}$

$$A = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{array}, \quad \hat{A}_{ii} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

Теорема (BEST)

Пусть G - сильно связн., $\forall v \ deg_{in} = deg_{out}$

$$\Rightarrow \# \text{Э.Ц}_G = t_v(G) \cdot \prod_{u \in V} (deg_{in} u - 1)!$$

ост. дер ↑ с к. v

Сл-ие: если G - эйлеров $\Rightarrow t_v(G) = t_u(G) \quad \forall u, v$

$$7 \cdot (2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1) = 14$$

▷ очень идейно и кратко

Э.Ц $\leftrightarrow$ (деревья ↑ с к. V, ...)