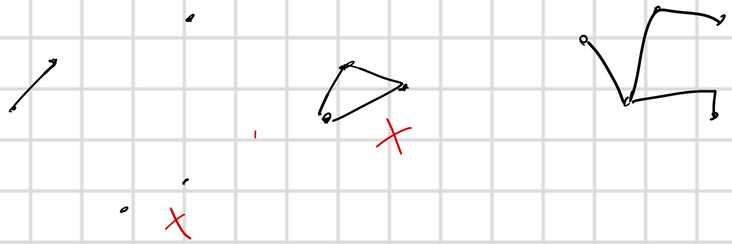
Деревья

Опр.: Дерево — связный граф без циклов



Опр.:

Висячая вершина — вершина $\deg(v) = 1$ (лист)

Лемма

Если $n \geq 2$, G - дерево $\Rightarrow$ $\exists$ вис. вершина (≥ 2)

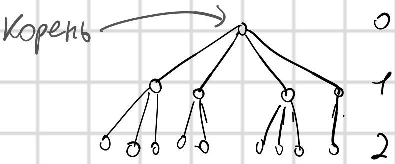
▷ Совершим $n+1$ шагов фишкой и где-то застопимся $\Rightarrow$ висяч

обратно идем из висячей $\to$ найти другую ◀

еще вар

▷ возьмем макс. простой путь и в концах будут висяч ◀

▷ подвесим граф



- не бывает спуз вверх
- циклов нет

идем вниз до упора и находим висяч. ◀

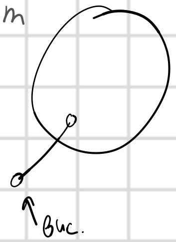
Теорема

1) G связен
2) в G нет циклов
3) n вершин и $n-1$ ребро

Если верны любые 2, 3 тоже верно

▷ $\boxed{1+2 \Rightarrow 3}$

$\exists\, n, m$ удалим вис $\to n-1,\ m-1$ и дерево также



$n \to n-1$

$m \quad\ \ m-1$

предположим

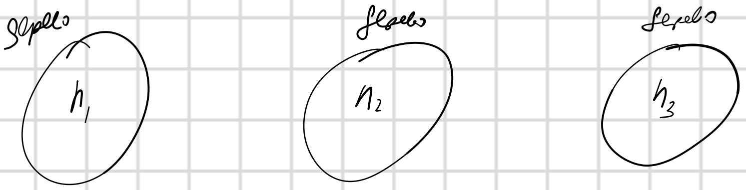
$(n-1) = (m-1) - 1$

$\Rightarrow m = n-1$

База: $n=1$ $m=0$, верно

$\boxed{2+3 \Rightarrow 1}$

Лес



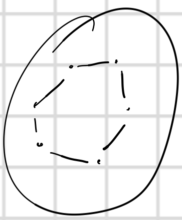
$m_1 = n_1 - 1$ $\qquad m_2 = n_2 - 1$ $\qquad m_3 = n_3 - 1$

$$\sum (n_i - 1) = \sum n_i - \underbrace{C}_{\text{к.с.}} = n - C$$

$\Rightarrow C = 1$ т.к. $m = n-1 \Rightarrow$ связен

$\boxed{1+3 \Rightarrow 2}$

идём по циклу и выкидываем петли $\to$ простой



n

$n-1$

$\exists$ путь $\Rightarrow \exists$ пр. путь между $u \dots v$ (док-во очев)

- Удаление ребра из цикла не ломает связности

и делаем пока $\exists$ циклы

$G \xrightarrow{-k\ \text{ребер}} T$ дерево

$n \qquad\qquad\qquad n$

$\underbrace{n+k-1 \qquad\qquad n-1}$

$\Rightarrow k=0 \quad \Rightarrow$ циклов не было ◀

Теорема

G - дерево $\Leftrightarrow \forall u,v \ \exists!$ путь $u \rightsquigarrow v$

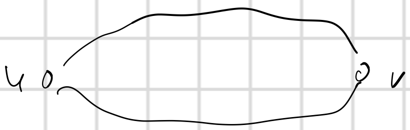
▷ $\Rightarrow$

⅃ u,v

Среди всех пар (u,v), где $\exists$ 2 пути $u \rightsquigarrow v$, берем такую пару и такие 2 пути $u \rightsquigarrow v$, что $len(P) + len(Q) \to \min$

(u,x) - меньший контрпример $\Rightarrow$ нет общ. верш. $\Rightarrow$

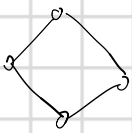
только



— простой цикл $\Rightarrow$ противоречие с деревом

$\Leftarrow$ граф связный

⅃ $\exists$ цикл



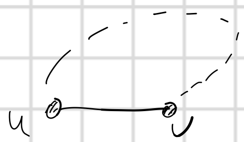
$\Rightarrow 2$ пути пр ◀

Теорема

G - дерево $\Leftrightarrow$ G - связен и $\forall$ ребро - мост

▷ $\Rightarrow$

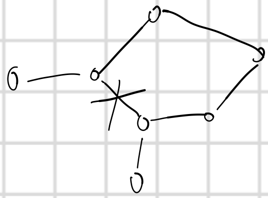
⅃ нет



цикл если убрать

$\Rightarrow$ не дерево

$\Leftarrow$] $\exists$ цикл



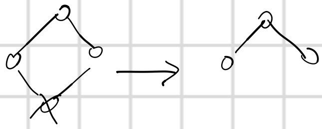
$\Rightarrow$ не мост

◀

Подграфы

] G – граф

- H получили удалением вершин и ребер из G – подграф
- H получили удалением только вершин

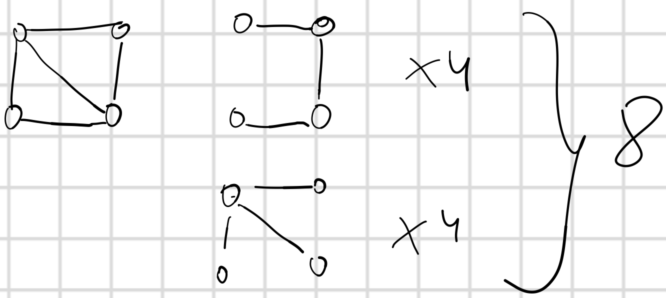


– индуцированный подграф

- H получили удалением ребер (но с сохранением связности)

остовный подграф

Остовное дерево – остовный подграф, явл. деревом



м. смежности:

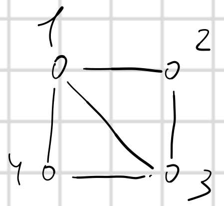
$$n\left(\quad \right)_n, \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{если } i,j \in E \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Матрица Кирхгофа (М.К)

$$n\left(\begin{matrix} \deg & & & \\ & \deg & & \\ & & \deg \ddots & \\ & & & \deg \end{matrix}\right)_{n}$$

$a_{ii} = \deg i$

$$a_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если } ij \in E \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



	1	2	3	4
1	3	-1	-1	-1
2	-1	2	-1	0
3	-1	-1	3	-1
4	-1	0	-1	2

$$\det \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 2 - 2 = 8$$

Теорема

Кол-во ост. деревьев в графе G(св-ый) $= \hat{A}_{ij}$, A — матрица Кирхгофа

$\hat{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot$ минор(i,j).

▷ $\vec{I}_6 \times \vec{I}_6^{T} = A$ (М.К)

Т. (без док-ва) Формула Коши-Бине

$A_{n\times m} \cdot B_{m\times n} = C$, $n \le m$

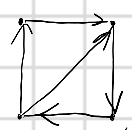
$$\det C = \sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_n\le m} (\det A, \text{по столбцам } i_1 \dots i_n) \cdot (\det B, \text{по строкам } i_1 \dots i_n)$$

$I_6 \cdot I_6^{T}$

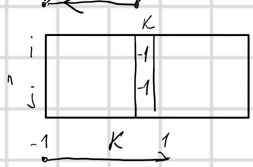
$A_{ii} = \sum_{k=1}^{m} 0^2$ или $1^2 = \deg i$

$A_{ij} = \sum_{k=1}^{m}$ $0\cdot 0$ $\quad 0\cdot 1$ $\quad 1\cdot 0$ $\quad 1\cdot 1$

$= 1$ или 0 соед / не соед

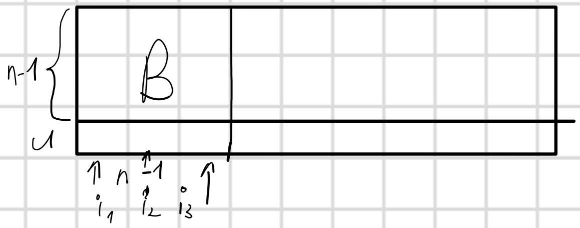


правиль. ориент. граф



св G и

n-1 ребро

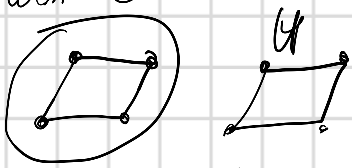


$B_{n-1 \times n-1}$

det $B = 0$ если $i_1 i_2 \dots i_{n-1}$ ребра не сост ост дер (1)

± 1 если сост (2)

(1) слом, св



рассм к св, где нет и

(2) no time to aprove that point ^_^ ◀

Attention!!!

Женя лох и пидор хихи