

# Теория вероятности

вероятностное пр-во:  $\Omega$  (конечное или счетное мн-во элементарных исходов)

$$p: \Omega \rightarrow [0; 1]$$

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$$

$$D_6 \quad \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$p(\omega_i) = \frac{1}{6}$$

$$C \quad \Omega = \{1, 0\}$$

$$p(1) = p(0) = \frac{1}{2}$$

$$\Omega = \{1, 0\} \quad \text{классическая монета}$$

$$p(1) = p \quad p(0) = 1 - p$$

$$\Omega = \{\text{кон-во дощечек до первой "1"}\}$$

$$p(\omega_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

$$\underbrace{\boxed{0000001}}_{i=1}^i$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1$$

$$\frac{b_1}{1 - q} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

Произведение вер-бх прст-в.

$$\Omega_1 \quad p_1$$

$$\Omega_2 \quad p_2$$

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$$

$$p(\langle \omega_1, \omega_2 \rangle) = p_1(\omega_1) \cdot p_2(\omega_2) \quad (\rightarrow)$$

Пр.:  $D_6 \times D_6$  i раз купит билет  
 $\{w_1, w_2\}$   $\underbrace{C \times C \times C \dots}_i$

$$\begin{aligned} \bigcirc \rightarrow \sum_{\langle w_1, w_2 \rangle} p(\langle w_1, w_2 \rangle) &= \sum_{\langle w_1, w_2 \rangle} p_1(w_1) p_2(w_2) = \sum_{w_1} \sum_{w_2} p_1(w_1) p_2(w_2) = \\ &= \underbrace{\sum_{w_1} p_1(w_1)}_1 \underbrace{\sum_{w_2} p_2(w_2)}_1 = 1 \end{aligned}$$

## Событие

событие  $A \subset \Omega$

$D_6$   $\overset{\text{событие}}{\{2, 4, 6\}} = \frac{1}{2} \stackrel{= E}{=}$

$p(\{5, 6\}) = \frac{1}{3} \stackrel{= VB}{=}$

$\overset{\text{событие}}{\{4, 5, 6\}} = \frac{1}{2} \stackrel{= B}{=}$

$$\underbrace{\{2, 4, 6\}}_{\frac{1}{2}} \cap \underbrace{\{1, 4, 6\}}_{\frac{1}{2}} \cap \underbrace{\{1, 2, 4\}}_{\frac{1}{2}} = \{4\} \stackrel{= \frac{1}{6}}{=}$$

$$P(A) = \sum_{w \in A} p(w)$$

$E \cap B = \{4, 6\} \quad p = \frac{1}{3}$

$E \cap VB = \{6\} \quad p = \frac{1}{6}$

## Независимое событие

$A$  и  $B$  наз. независ-и при  $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

$p(E \cap B) = \frac{1}{3} \quad p(E) \cdot p(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$p(E \cap VB) = \frac{1}{6} \quad p(E) \cdot p(VB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

# Случайная величина

$$C.B \rightarrow x: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$C: \{P, 0\} \quad x(P) = 1 \\ x(0) = 0$$

$$D_6 \{1..6\} \quad x(i) = i$$

$$D_6 \times D_6 \quad x(\langle w_1, w_2 \rangle) = w_1 + w_2$$

$a_i$	$P$	называть	$a_i/36$
2	1		
3	2		
4	3		
5	4		
6	5		
7	6		
8	5		
9	4		
10	2		
11	1		
12	1		

## Перестановка

1	2	3	$n-3$
---	---	---	-------

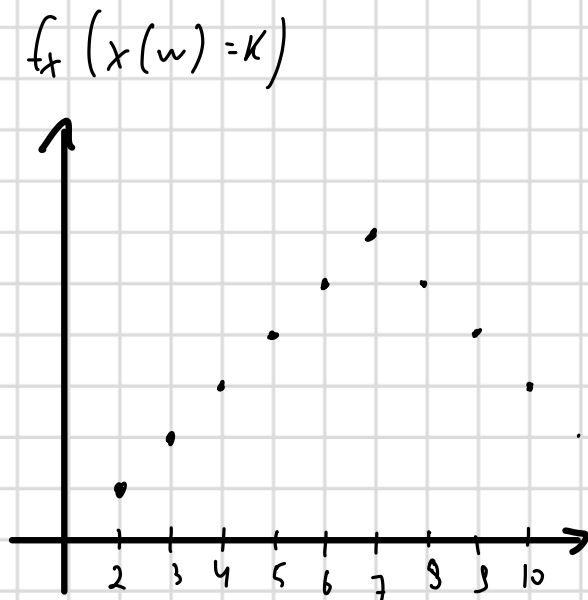
$$\frac{(n-3)!}{n!}$$

$$3! \quad 7!$$

$$\begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{1} \textcircled{2} \\ C_3^3 \\ \hline C_{10}^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \textcircled{2} \textcircled{2} \textcircled{6} \\ C_3^2 \cdot C_7^1 \\ \hline C_{10}^3 \end{array}$$

$k$	$f$
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
7	6
8	5
9	4
10	2
11	1
12	1



Мат. ожидание случайной величины

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} x(\omega) p(\omega)$$

Пр.:

$$E(X(D_6)) = \sum_{i=1}^6 i \cdot \frac{1}{6} = 3,5$$

$$E(X_{D_6 \times D_6}) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} \dots + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7$$

Случайная величина = "в среднем" будет выводить это значение"

$$E(X_c) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Св-ва мат. ожидания

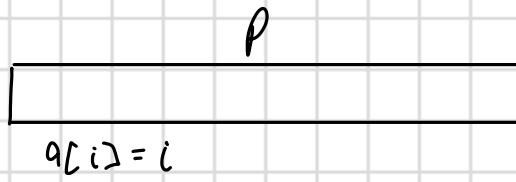
$$1) E(\lambda X) = \lambda E(X)$$

$$2) E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$$\triangleright (1) E(\lambda X) = \sum_{\omega} \lambda X(\omega) \cdot p(\omega) = \lambda \sum_{\omega} X(\omega) p(\omega) \blacktriangleleft$$

$$\triangleright (2) E(X+Y) = \sum_{\omega} (X(\omega) + Y(\omega)) \cdot p(\omega) = \sum_{\omega} X(\omega) \cdot p(\omega) + \sum_{\omega} Y(\omega) \cdot p(\omega) \blacktriangleleft$$

$a_1, a_2, \dots, a_n$   
 $a(i) = i$   
 $\downarrow \quad \quad \quad \uparrow$   
 1 4 5 3 2 6



$$E(\# \text{ inversions}) = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_i \cdot p = \sum_{i=1}^n 1 \cdot \frac{1}{n} = 1$$

$$\mathbb{1}_i = \begin{cases} 1, & p(i) = i \\ 0, & p(i) \neq i \end{cases}$$

$E(\# \text{ inversions})$

$$\mathbb{1}_{i < j} = \begin{cases} 1, & p(i) > p(j) \\ 0, & p(i) \leq p(j) \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n E(\mathbb{1}_{ij}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \frac{1}{2} = \frac{n(n-1)}{4}$$

FORM