9.1. Решите Слау, найдите ФСР

а) $\begin{cases} X_1 - X_2 + X_3 - X_4 = 4 \\ X_1 + X_2 + 2X_3 + 3X_4 = 8 \\ 2X_1 + 4X_2 + 5X_3 + 10X_4 = 20 \\ 2X_1 - 4X_2 + X_3 - 6X_4 = 4 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 10 & 20 \\ 2 & -4 & 1 & -6 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 12 & 12 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} X_1 - X_2 + X_3 - X_4 = 4 \\ 2X_2 + X_3 + 4X_4 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} X_1 - X_2 + X_3 - X_4 = 4 \\ X_3 = 4 - 4X_4 - 2X_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 - X_2 + 4 - 4X_4 - 2X_2 = 4 \\ X_3 = 4 - 4X_4 - 2X_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} X_1 = 3X_2 + 4X_4 \\ X_3 = 4 - 4X_4 - 2X_2 \end{cases}$$

ФСР

част. оп.

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3X_2 + 4X_4 \\ X_2 \\ 4 - 4X_4 - 2X_2 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3X_2 \\ X_2 \\ -2X_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4X_4 \\ 0 \\ -4X_4 \\ X_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \underset{\in \mathbb{R}}{X_2} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \underset{\in \mathbb{R}}{X_4} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

9.3.

а) $(1,1,1)^T, (1,2,3)^T$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 + 2x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 2x_3 - x_3 = x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ФСР}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad B^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$B^T \cdot X = 0$ ← решение будет лин. оболочкой

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$\{ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ ← лин. об.

9.4. лин. многообразие

$$L = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$A = 0$

$$\begin{cases} X_1 - X_2 + X_3 = 0 \\ 2X_2 - X_3 + X_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 - X_2 + 2X_2 + X_4 = 0 \\ X_3 = 2X_2 + X_4 \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 = -X_2 - X_4 \\ X_3 = 2X_2 + X_4 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X_2 - X_4 \\ X_2 \\ 2X_2 + X_4 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X_2 \\ X_2 \\ 2X_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -X_4 \\ 0 \\ X_4 \\ X_4 \end{pmatrix} = X_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + X_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \text{ФСР} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$B^T \cdot X = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \longrightarrow \begin{cases} -X_1 + X_2 + 2X_3 = \\ -X_1 + X_3 + X_4 = \end{cases}$$ подставим $L[1]$ в X

лин. мн. $\begin{cases} -X_1 + X_2 + 2X_3 = -1+1+2\cdot 1 = 2 \\ -X_1 + X_3 + X_4 = -1+1+1 = 1 \end{cases}$

8.8.

a) $e_1\lambda_1 + e_2\lambda_2 + e_3\lambda_3 = 0$

$$\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}\lambda_1 + \begin{pmatrix}2\\7\\3\end{pmatrix}\lambda_2 + \begin{pmatrix}3\\8\\4\end{pmatrix}\lambda_3 = 0$$

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\5&7&8\\3&3&4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}7&8\\3&4\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}5&8\\3&4\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}5&7\\3&3\end{vmatrix} = 28-27+2\cdot 7-3\cdot 6 =$$

$$= 1+14-18 = -3 \neq 0$$ базис есл

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\5&7&8&1\\3&3&4&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&-3&-6&-8\\0&-3&-5&-5\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&1&2&3\\0&0&1&4\end{array}\right)$$

10.1

$$U = \langle (1,2,1)^T, (1,1,-1)^T, (1,3,3)^T \rangle$$

$$V = \langle (2,3,-1)^T, (1,2,2)^T, (1,1,-3)^T \rangle$$

$$U: \begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&-1\\1&3&3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&-2\\0&1&2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\end{pmatrix} \Rightarrow \dim U = 2$$

$$V: \begin{pmatrix}2&3&-1\\1&2&2\\1&1&-3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&-3\\1&2&2\\2&3&-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&-3\\0&1&5\\0&1&5\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&-3\\0&1&5\end{pmatrix} \Rightarrow \dim V = 2$$

$$U+V: \begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&-3\\0&1&2\\0&1&5\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&-4\\0&1&2\\0&1&5\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&4\\0&0&-2\\0&0&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow \dim(U+V) = 3$$

$$U+V = \mathbb{R}^3$$

$$\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$$

$$\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U+V) = 3$$

Базисы:

$$U: \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 2 & 1 & x_2 \\ 1 & 2 & x_3 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2-2x_1 \\ 0 & 2 & x_3-x_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2-2x_1 \\ 0 & 0 & x_3-x_2-2(x_2-2x_1) \end{pmatrix}$$

$-3x_1-2x_2+x_3=0$ задает U

$$V: \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 2 & 1 & x_2 \\ 2 & 5 & x_3 \end{array}\right) \sim \ldots$$

$$8x_1 - 5x_2 + x_3 = 0$$

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 8x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

10.1

б) $U: \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= -x_3 - x_4 + x_5 \\ x_2 &= x_4 \end{aligned}$$

$$X = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \langle (-1,0,1,0,0)^T, (-1,1,0,1,0)^T, (1,0,0,0,1)^T \rangle \Rightarrow \dim U = 3$$

$$V: \begin{cases} x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_5 = 0 \end{cases}$$

$$V = \langle (1,1,-1,0,0)^T, (0,0,0,1,0)^T, (1,0,0,0,1)^T \rangle \quad \dim V = 3$$