# Булевые функции

$\mathbb{B}$ – булеан (обоз)
$= \{0,1\}$

$f: \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$

## Задание бул. ф-ии

| | x | y | z | f |
|---|---|---|---|---|
| 1. | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 0 | 0 | 1 | 1 |
| | 0 | 1 | 0 | 1 |
| | . | . | . | ⋮ |
| $2^n$. | 1 | 1 | 1 | 0 |

$\underbrace{x\ y\ z}_{n}$, строк: $2^n$

$f = 01101\ldots1$ (вектор функции)

**Сколько n-арных функций?**

$$\boxed{2^{2^n}}$$

## Пр. ф-ий:

при $n = 0$

1.

| ... | f |
|---|---|
| | 0 |

$\to \mathbb{O}_0$

2.

| ... | f |
|---|---|
| | 1 |

$\to \mathbb{1}_0$

при $n=1$

3.

| x | f |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 0 |

$\to \mathbb{O}_1$ Тожд. ноль

4.

| x | f |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 1 |

$\to \mathbb{1}_1$ Тожд. ед

---

5. дизъюнкция

| x | y | $\vee$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

$a \vee b = a + b$

6. конъюнкция

| x | y | $\wedge$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

$a \wedge b = a \cdot b$

7. исключающее „или" (xor)

| x | y | $\oplus$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

$a \oplus b = a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b$

8. Импликация

| x | y | $\to$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

$a \to b = \bar{a} + b$

9. импликация влево

| x | y | $\leftarrow$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

10. стрелка Пирса (не или)
nor

| x | y | $\downarrow$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

$x \downarrow y = \overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$

11. штрих Шеффера (не и)
nand

| x | y | $\uparrow$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

$a \uparrow b = \overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$

12. эквивалентность

| x | y | $\equiv$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

13. медиана большинство

| x | y | z | $\langle xyz \rangle$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

14. switch

$x \, ? \, y : z$

если $x = 1$, то $y$
иначе $z$

| x | y | z | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

## Формулы

аргумент

„x" — формула

„0", „1" — формула

F - набор функций $\{\neg, \wedge, \vee\}$

$\{\neg, \langle\,\rangle\}$

$f : B^k \to B$ ← k аргументов        $f \in F$

и $\alpha_1 \dots \alpha_k \to f(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k)$ — формула

функция — объект ⟷ формула    $x \to y$

строка    $\neg x \vee y$

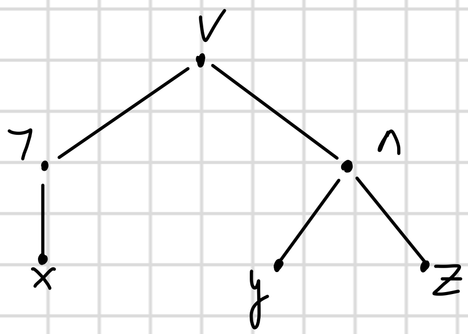
Приоритеты:

1) not        3) $\vee$

2) $\wedge$        4) скобки

# Дерево разбора

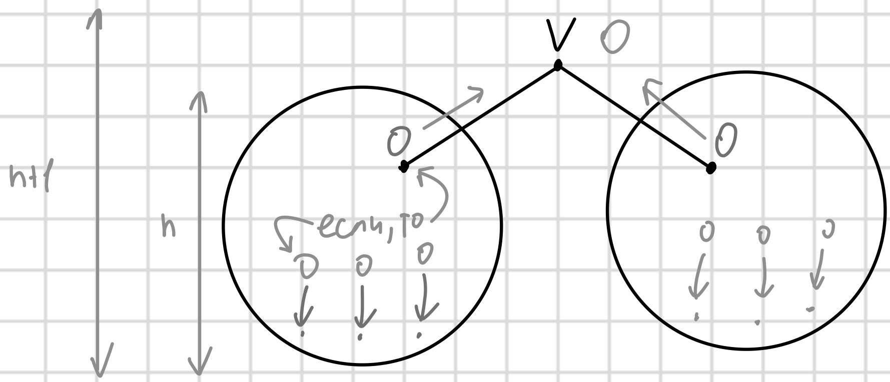
$\exists$ $\neg x \vee y \wedge z$




$\exists$ ф-ла содерж. „x" и „∨" — $f(\dots)$

док-м $f(0 \dots 0) = 0$

если глубина дерева раз-ра $f \le n$, то $f(0 \dots 0) = 0$



# СДНФ

$\{\vee \; \wedge \; \neg\}$ СДНФ (совершенная дизъюнктивная нормальная форма)

каждый арг-т в скобке по разу

$(x \wedge \ldots \wedge \ldots) \vee (\;\wedge\;\wedge\;\wedge\;) \vee (\;) \vee (\;)$

| $\vec{x}$ | $f$ |
|---|---|
| 00 | 0 |
| 01 | 1 |
| 10 | 0 |
| 11 | 1 |

формула: „$(\vec{x} = 01) \vee (\vec{x} = 11)$"

$\vec{x} = 01 = (x=0 \wedge y=1) = (\neg x \wedge y)$

$\parallel$

$\overline{xy} = 01$

в СДНФ

$x_i = 0 \longrightarrow \neg x_i$

$x_i = 1 \longrightarrow x_i$

ДНФ: $(x \wedge \overline{x}) = 0$ потому что $x$ повторяется

набор, из которого можно создать все функции — базис