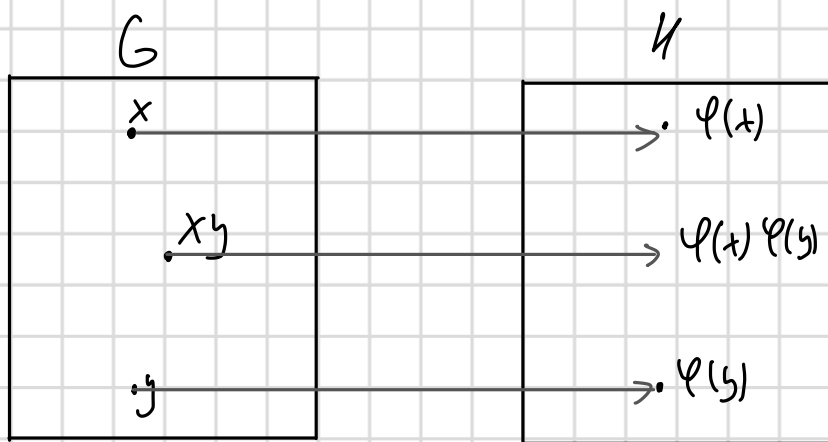


# Группы

$\varphi: G \rightarrow H$  наз. гомоморфизмом групп  $\Leftrightarrow$

$$\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) * \varphi(y)$$



двухэлементный гомом-м наз. изоморфизмом

изоморфизм на себе — автоморфизм

$$[\simeq / \cong]$$

Пр.:

одномерный тор  $\simeq \mathbb{T}$  (группа  $\text{mod}$ )

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad} & \frac{\mathbb{R}}{2\pi} \end{array}$$

$$\langle \mathbb{R}, + \rangle \simeq \langle \mathbb{R}_{>0}, \cdot \rangle$$

exp:  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ x & \mapsto & e^x \end{array}$$



$$x+y = e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

$\uparrow$   $\uparrow$   
 $\exp \in \mathbb{R}$   $\exp \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\ln: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \ln(x)$$

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

$$\langle \mathbb{Z}_n, + \rangle$$

Опр.:  $|G|$  - порядок группы (мощность) кон-то эл. в ее носители

Пр.:  $|\mathbb{N}| = \infty$   
 $|\mathbb{Z}_n| = n$   
 $|\mathbb{R}^*| = \infty$

Опр.: порядок элемента  $f \in G$  - наим.  $n \in \mathbb{N}$ ,  
 такое что  $f^n = 1$  (нейтральный),  
 $|f| = \text{ord}(f) = o(f)$   
 если нет, то  $\text{ord}(f) = \infty$

Пр.:  $\langle \mathbb{R}, + \rangle$

1)  $f + f + \dots + f = nf = 0$

$$\text{ord}(0) = 1$$

$$\text{ord}(x) = \infty$$

$$x \neq 0$$

$$2) \langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$$

$$\text{ord}(1) = 1$$

$$\text{ord}(-1) = 2$$

$$\text{ord}(x) = \infty$$

$$x \neq \pm 1$$

$$3) \langle \mathbb{Z}_3, + \rangle$$

$$\text{ord}(0) = 1$$

$$\text{ord}(1) = 3$$

$$\text{ord}(2) = 3$$

Дпр.:

$\langle G, * \rangle$  е нормална група  $\langle H, * \rangle$  на

неговата група  $G$  ако  $H$  е подгрупа на  $G$  и  $H$  е нормална група на  $G$ .

$$\text{нормална} \quad [H \subseteq G] \quad [H \trianglelefteq G]$$

$$1) H \text{ замкнута в } *$$

$$2) x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$$

$$3) e \in H$$

Пр.:

$$1) \langle \{+1\}, \cdot \rangle \trianglelefteq \langle \mathbb{Q}^*, \cdot \rangle \trianglelefteq \langle \mathbb{R}^*, \cdot \rangle$$

$$2) \{e\} \trianglelefteq \langle G, * \rangle$$

$$3) \langle G, * \rangle \trianglelefteq \langle G, * \rangle$$

$$4) \quad n \in \mathbb{N} \quad n\mathbb{Z} = \{nx \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

$$\text{группа } \mathbb{Z}$$

$$n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$$

$$5) \quad \langle \mathbb{N}, + \rangle \not\leq \langle \mathbb{Z}, + \rangle$$