1. $\begin{cases} x+y+u+v=0 & =F_1 \\ x^2+y^2+u^2+v^2=4 & =F_2 \end{cases}$

$(\cdot)\ A(\overset{x}{1}, \overset{y}{-1}, \overset{u}{1}, \overset{v}{-1})$

Док-ть: 1) $\exists (x,y) \longmapsto (u,v)$ в окр-ти A

2) Найти $\frac{\partial u}{dx}, \frac{\partial v}{dx}(A)$

3) Найти одну из $\frac{\partial^2 \cdot}{\partial \cdot^2}(A)$

1)

$$F'_y(A) = \frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}\Bigg|_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = J,$$ det $\neq 0 \Rightarrow$ по Т. все работает

2) $f'(x) = -(F'_y(x, f(x)))^{-1} \cdot F'_x(x, f(x))$

$$J^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}\Bigg|_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -J^{-1}B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(A) = -1; \quad \frac{\partial v}{\partial x}(A) = 0$$

3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =$

$$J^{-1} = \frac{1}{2v-2u}\begin{pmatrix} 2v & -1 \\ -2u & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -\frac{1}{2v-2u}\begin{pmatrix} 2v & -1 \\ -2u & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2v-2u}(2v-2x) = \frac{x-v}{v-u}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{(1-\overset{0}{v'_x})(v-u)-(\overset{0}{v'_x}-\overset{1}{u'_x})(x-v)}{(v-u)^2}\Bigg|_A = \frac{-2-2}{4} = -1$$

2. $f(x,y,z) = xyz$

Иссл. на усл. экстр. $x^2+y^2+z^2=3$

функ-ия Лагранжа $L(x,\lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(x)$

$L(x,y,z,\lambda) = xyz - \lambda(x^2+y^2+z^2-3)$

$$\begin{cases} L'_x: & yz - 2\lambda x = 0 \\ L'_y: & xz - 2\lambda y = 0 \\ L'_z: & xy - 2\lambda z = 0 \\ & x^2+y^2+z^2=3 \end{cases}$$

$(x+y)z - 2\lambda(x+y) = 0$

1) $x+y=0$ 2) $z=2\lambda$

$y=-x$ $xy = 4\lambda^2$

$-x^2-2\lambda z=0$ $2\lambda y - 2\lambda x = 0$

$z = -\frac{x^2}{2\lambda}$

$2x^2 + \frac{x^4}{4\lambda^2} = 3$

$x^4 + 8\lambda^2x^2 - 12\lambda^2 = 0$

$D/4 = 16\lambda^4 - 12\lambda^2 = 4\lambda^2(4\lambda^2-3)$

$\left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ x = y \end{array}\right.$

$\lambda = 0:$ $\begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$

$x = y = \pm 2\lambda$

$z = 2\lambda$

$(1,1,1)$ $\lambda = 1/2$ $(1,-1,-1)$ $\lambda = -1/2$

$(-1,1,1)$ $(-1,1,-1)$

d^2L

#2 Практика 08.09

~ Неявные экстремумы ~

1) $\begin{cases} x+y+u+v=0 & = F_1 \\ x^2+y^2+u^2+v^2-4=0 & = F_2 \end{cases}$

(·)$A(1,-1,1,-1)$
$x \; y \; u \; v$

Док-ть: 1) $\exists\, (x,y) \longrightarrow (u,v)$ в окр. (·)A

2) Найти: $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ (A)

3) Найти: одну из $\frac{\partial^2 ..}{\partial ..^2}$ (A)

Решение:

1)

u, v – функции

x, y – аргументы

$$J = \underbrace{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}}_{\text{обозначение}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}\Bigg|_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$ – не вырожд.

$\Rightarrow$ г.т.д.

2)

$$J^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}\Bigg|_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -J^{-1}\cdot B = +\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(A) = -1 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}(A) = 0$$

3) $\triangleleft \; \frac{d^2u}{dx^2}$

• нужно для первой производной в окр. A нужно выразить

$$J^{-1} = \frac{1}{2v-2u}\begin{pmatrix} 2v & -1 \\ -2u & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -\frac{1}{2v-2u}\begin{pmatrix} 2v & -1 \\ -2u & 1 \end{pmatrix}\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}}^{B} = \begin{pmatrix} \circ & \\ & \end{pmatrix}$$

ищем u_x

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2v-2u}\cdot(2v-2x) = \frac{x-v}{v-u}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{(1-v_x'')(v-u) - (v_x' - u_x'')(x-v)}{(v-u)^2}\Bigg|_A = \frac{-2-2}{4} = -1$$ Ответ.

~ условн. ~

(2). $f(x,y,z) = xyz$ $\qquad x^2+y^2+z^2=3$ – шар

Иссл. на усл. экстремум

одно ур-ие связи ⇒ λ одна

+3 переменных

⟶ 4 аргумента у ф. Лагранжа

$L(x,y,z,\lambda) = xyz - \lambda(x^2+y^2+z^2-3)$

Ищем точки удовл. необх. усл. — услов. обязательна

$$\begin{cases} L_x': & yz - 2\lambda x = 0 \\ L_y': & xz - 2\lambda y = 0 \\ L_z': & xy - 2\lambda z = 0 \\ L_\lambda': & x^2+y^2+z^2 = 3 \end{cases}$$

ур-ие связи

$(y+x)z - 2\lambda(x+y) = 0$

$(x+y)(z-2\lambda) = 0$

1) $x+y=0$

2) $z=2\lambda$

1) $y=-x$

$$\left[\begin{array}{l} -x^2 - 2\lambda z = 0 \\ z = -\frac{x^2}{2\lambda} \end{array}\right.$$

$2x^2 + \frac{x^4}{4\lambda^2} = 3$

$x^4 + 8\lambda^2 x^2 - 12\lambda^2 = 0$

$\frac{D}{4} = 16\lambda^4 - 12\lambda^2 = 4\lambda^2(4\lambda^2-3)$

$2x^2+z^2=3$

$2(-2\lambda z) + z^2 = 3$

$z^2 - 4\lambda z - 3 = 0$

$\lambda = \frac{3}{z^2-4z}$ (короче кринже)

2) $z = 2\lambda$

$xy = 4\lambda^2$

$2\lambda y - 2\lambda x = 0$

$\lambda = 0$ $\qquad x=y$

$$\begin{cases} z=0 \\ y=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

4 случ.

2 пары точек

$0, 0, \pm\sqrt{3}$

x, y, z местами пом.

$x = y = \pm 2\lambda$

$z = 2\lambda$

$(1,1,1)$ $\lambda=\frac{1}{2}$

$(-1,-1,1)$ $\lambda=\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}$

$(1,-1,-1)$

$(-1,1,-1)$

$\lambda = \frac{1}{2}$ – четное число "–"

$\lambda = -\frac{1}{2}$ – нечетное

$\lambda = 0$: $(\pm\sqrt{3}; 0; 0), \ldots$

$\Rightarrow$ $d^2L = L''_{xx}dx^2 + L''_{yy}dy^2 + L''_{zz}dz^2 + 2L''_{xz}dxdz + 2L''_{yz}dydz + 2L''_{xy}dxdy =$

$= -2\lambda dx^2 - 2\lambda dy^2 - 2\lambda dz^2 + 2ydxdz + 2xdydz + 2zdxdy$

$N: \; d\varphi(x_0, h) = 0 \qquad 2xdx + 2ydy + 2zdz = 0$) продифф-ли φ

отсюда можем выписать например дифференциалы

$\measuredangle$ (•) $(\sqrt{3}; 0; 0)$, $\lambda = 0$

тогда $N: \; 2\sqrt{3}dx = 0$

$dx = 0$

$d^2L = 2\sqrt{3}dydz$ – не опр

можем разные знаки брать

Нет усл. экстремума

$\measuredangle$ (•) $(1, 1, 1)$, $\lambda = 1/2$ $\qquad N: \; dz = -dx - dy$

$d^2L = -dx^2 - dy^2 - (dx+dy)^2 + 2dx(-dx-dy) + 2dy(-dx-dy) + 2dxdy =$

$= -4dx^2 - 4dy^2 - 4dxdy$

$-4(dx^2 + dxdy + dy^2) < 0$

$\Rightarrow$ усл. max.

---

(3) $f(x, y, z) = xy + yz$, $\quad x^2 + y^2 = 2$ – цилиндр, $\quad y + z = 2$ – плоскость, $\quad y > 0$

дают эллипс на пересеч. – он компакт $\to$ min и max достиг.

$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = xy + yz - \lambda_1(x^2 + y^2 - 2) - \lambda_2(y + z - 2)$

$$\begin{cases} L'_x: & y - 2\lambda_1 x = 0 \\ L'_y: & x + z - 2\lambda_1 y - \lambda_2 = 0 \\ L'_z: & y - \lambda_2 = 0 \\ & x^2 + y^2 = 2 \\ & y + z = 2 \end{cases}$$

$y = \lambda_2$

$z = 2 - \lambda_2$

$x = \dfrac{\lambda_2}{2\lambda_1}$

$(1, 1, 1) \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = 1$

$(-1, 1, 1) \quad \lambda_1 = -\frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = 1$

$$d^2L = 2\lambda_1 dx^2 = 2\lambda_1 dy^2 + 2dydz + 2dxdy$$

N: $\begin{cases} 2xdx + 2ydy = 0 \\ dy + dz = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} dz = -dy \\ dx = -\frac{y}{x}dy \end{cases}$

подставл

(·) $(1, 1, 1)$: $\begin{cases} dx = -dy \\ dz = -dy \end{cases}$ $d^2L = -dy^2 - dy^2 - 2dy^2 - 2dy^2 < 0$ отриц.

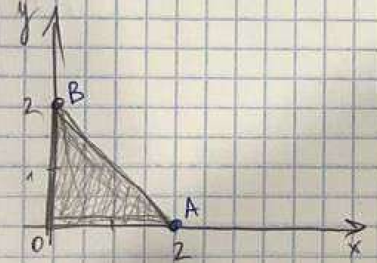
$\Rightarrow$ усл. max

4 функц. $u(x, y) = xy + x + y$

мн-во D : $0 \le x \le 2$
$0 \le y \le 2 - x$

Найти: min ~~по мн-ве D~~ ~~функции u~~

$\max\limits_{(x,y)\in D} u$, $\min\limits_{(x,y)\in D} u$



Решение:

1) Ищем безусловные экстремумы
2) Ищем на границах

1: Внутри D: $u'_x = y + 1 = 0$
$u'_y = x + 1 = 0$ $(-1, -1) \notin D$

$\Rightarrow$ внутри области нет точек экстр.

2: На границе:

- OA: $y = 0$; $x \in [0, 2]$
  $u = x$ $\rightarrow$ min в $(0,0) = 0$
  $\rightarrow$ max в $(2,0) = 2$

- AB: $y = 2 - x$, $x \in [0,2]$
  $u = x(2-x) + 2 = -x^2 + 2x + 2 = 3 - (x-1)^2$

  min в $(0,2)$ и $(2,0)$ $= 2$

  max в $(1,1) = 3$

- OB – аналогично OA

Отв

и выбираем max и min