Множества

A – конечно если кол-во эл конечно

A – счетно если можно построить биекцию $A \leftrightarrow \mathbb{N}$

A – континуум, если $\exists$ биекция $A \leftrightarrow [0,1]$

① Опр. мощность мн-ва

1) $\mathbb{Z}$ – счетно: $0; -1; 1; 2; -2; 3; -3$

2) $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$ – счетно

q \ p	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$

3) $A = \{ x \in \mathbb{Z};\ x \vdots 3 \} = x = 3n,\ n \in \mathbb{Z}$

4) $A = \{$ мн-во двоичных посл-ей: $a_1, a_2, a_3 \ldots\ a_i \in \{0,1\} \}$

$0{,}010\ 1110\ 011\ldots \in [0,1]$ континуум

$$0,(9) = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \ldots = \lim_{n \to \infty} (0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + 0{,}00\ldots\underset{n}{9}) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{b_1 \cdot (1 - q^n)}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} = \frac{0{,}9}{1-0{,}1} = 1$$

$q = 0{,}1$

5) $[0,1) \longleftrightarrow [0,1]$

$\frac{1}{2} \longrightarrow 1$

$\frac{1}{4} \longrightarrow \frac{1}{2}$

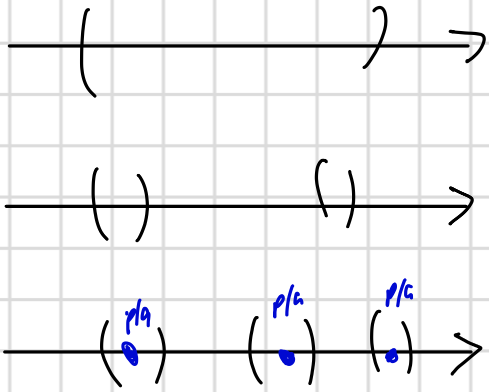
$\frac{1}{8} \longrightarrow \frac{1}{4}$

$\vdots \qquad \vdots$

$x \neq \frac{1}{2^n} \longrightarrow x$

$n \in \mathbb{N}$

6) A - мн-во вида $\bigcup (a_i, b_i)$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, (a_i, b_i) - попарно не пересек



в каждом интервале есть рац. число

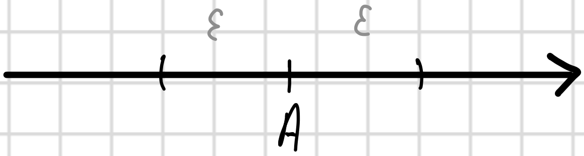
мн-во рац. чисел на прямой

$A \subset B C \subset \mathbb{Q}$

Пределы.

a_n

$A = \lim\limits_{n \to \infty} a_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon$



Док-ть

① $\lim \frac{1}{n} = 0$

$\triangleleft \ \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftarrow$ $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

$\forall n \geq n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$

② $\lim \frac{2n-3}{n+4} = 2$

$$\left|\frac{2n-3}{n+4} - 2\right| = \frac{11}{n+4} < \varepsilon \iff n > \frac{11}{\varepsilon} - 4$$

при $\varepsilon \geq \frac{11}{4}$: $n=1$

при $0 < \varepsilon < \frac{11}{4}$: $n_0 = \left[\frac{11}{\varepsilon} - 4\right] + 1$

③ $\lim \frac{2n+1}{(n+1)2^n} = 0 \iff \frac{2n+1}{(n+1)2^n} < \varepsilon \Leftarrow \frac{2n+2}{(n+1)2^n} < \varepsilon \iff$

$$\iff \frac{2}{2^n} < \varepsilon \iff 2^n > \frac{2}{\varepsilon} \iff n > \log_2 \frac{2}{\varepsilon} \Leftarrow n_0 = \left[\log_2 \frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$$

Упростить:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{2-1}{1\cdot 2} + \frac{3-2}{2\cdot 3} + \frac{4-3}{3\cdot 4} +$$

$$\ldots + \frac{n-(n-1)}{(n-1)n} + \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-1} -$$

$$- \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$