Алгебра. КТ. Осенний семестр

VII. Определители и их приложения

1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} (-1+i)x & - & iy & = & 3-3i, \\ (1+3i)x & + & (1-2i)y & = & -3+i; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (-1-2i)x & + & iy & = & 2-4i, \\ (2+i)x & + & (1+3i)y & = & 3-i. \end{cases}$

2. α, β, γ — корни уравнения $x^3+px^2+qx+r=0$. Вычислите

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}.$$

3. При каких значениях λ система уравнений над $\mathbb{R}$ имеет единственное решение:

а) $\begin{cases} \lambda x + y & = & 1, \\ x+\lambda y + z & = & 2, \\ y + \lambda z & = & 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \lambda x + 2y + 3z + 4v & = & 1, \\ (3-\lambda)x + 2y + 3z + 4v & = & 2, \\ (2+\lambda)x + 3y + (4-\lambda)z + v & = & 3, \\ 2x + 3y + 4z + v & = & 4. \end{cases}$

4. Вычислите определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 21 & 11 & 63 & 211163 \\ 57 & 45 & 97 & 574597 \\ 73 & 26 & 80 & 732680 \\ 30 & 18 & 29 & 301829 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 3 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

5. Найдите матрицу, обратную данной:

а) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, E — единичная матрица четвёртого порядка. При каких $x \in \mathbb{R}$ матрица $A + xE$ обратима?

7. Решите матричные уравнения:

   а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$;

   в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; г) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Вычислите определители порядка n, элементы которых заданы условиями:

   а) $a_{ij} = \min\{i, j\}$; б) $a_{ij} = \max\{i, j\}$; в*) $a_{ij} = |i - j|$.

9.* Если заменить любой столбец квадратной матрицы A на столбец из π, определитель получившейся матрицы будет равняться 0. Чему равен определитель A?

10.* Баба Яга и Кощей Бессмертный играют в такую игру: по очереди ставят произвольные действительные числа в матрицу 100 на 100. Баба Яга хочет сделать определитель матрицы каким угодно, но только не нулевым, а Кощей Бессмертный хочет помешать ей в этом. Баба Яга настояла на том, что будет ходить первой. Может ли кто-нибудь из них гарантированно победить?

1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} (-1+i)x - iy = 3-3i, \\ (1+3i)x + (1-2i)y = -3+i; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (-1-2i)x + iy = 2-4i, \\ (2+i)x + (1+3i)y = 3-i. \end{cases}$

а)

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1+i & -i \\ 1+3i & 1-2i \end{vmatrix} = (-1+i)(1-2i) - (1+3i)(-i) =$$

$$= (-1\cdot 1 + (-1)(-2i) + i\cdot 1 + i\cdot(-2i)) - (-i + (3i\cdot(-i))) =$$

$$= -1 + 2i + i + 2 - i - 3 = 2i - 2$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 3-3i & -i \\ -3+i & 1-2i \end{vmatrix} = (3-3i)(1-2i) - (-3+i)(-i) =$$

$$= 3 - 6i - 3i - 6 - 3i - 1 = -12i - 4$$

$$x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{-12i-4}{2i-2} = \frac{(-12i-4)(-2i-2)}{8} = \frac{(12i+4)(2i+2)}{8} = \frac{-24+8i+24i+8}{8} = 4i-2$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} -1+i & 3-3i \\ 1+3i & -3+i \end{vmatrix} = (-1+i)(-3+i) - (1+3i)(3-3i) =$$

$$= \cancel{3} - i - \cancel{3i} - 1 - \cancel{3} + \cancel{3i} - 9i - 9 = -10i - 10 \qquad \times 3$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-10i-10}{2i-2} = \frac{(-10i-10)(-2i-2)}{8} = \frac{(10i+10)(2i+2)}{8} = -20i + 20i + 20i + 20$$

3. При каких значениях λ система уравнений над $\mathbb{R}$ имеет единственное решение:

а) $\begin{cases} \lambda x + y = 1, \\ x + \lambda y + z = 2, \\ y + \lambda z = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \lambda x + 2y + 3z + 4v = 1, \\ (3-\lambda)x + 2y + 3z + 4v = 2, \\ (2+\lambda)x + 3y + (4-\lambda)z + v = 3, \\ 2x + 3y + 4z + v = 4. \end{cases}$

по т. Крамера

а)

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) =$$

$$= \lambda^3 - \lambda - \lambda = \lambda^3 - 2\lambda$$

коэф $\neq 0$?

$$\lambda^3 - 2\lambda = 0 \iff \lambda(\lambda^2 - 2) = 0$$

$$\left[\begin{array}{ll} \lambda = 0 & \lambda = 0 \\ \lambda^2 = 2 & \lambda = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Ответ: $\mathbb{R} \setminus \{0, \pm\sqrt{2}\}$

4. Вычислите определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 21 & 11 & 63 & 211163 \\ 57 & 45 & 97 & 574597 \\ 73 & 26 & 80 & 732680 \\ 30 & 18 & 29 & 301829 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 3 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

а) $$\det\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -2\,\mathrm{I} \\ +2\,\mathrm{I} \\ +3\,\mathrm{I} \end{matrix} \overset{\det}{=} \begin{vmatrix} 1 & & & \\ 2+(1\cdot -2) & 3+(2\cdot -2) & -2+(-1\cdot -2) & 0+(3\cdot -2) \\ -2+(1\cdot 2) & \dots & & \\ \dots & & & \end{vmatrix} \overset{\det}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -2 & 9 \end{vmatrix} =$$

(умножение на трансвекцию / полилинейность)

$$= \det\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -2 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +5\,\mathrm{II} \\ +4\,\mathrm{II} \end{matrix} \overset{\det}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -25 \\ 0 & 0 & -2 & -15 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ +2\,\mathrm{III} \end{matrix} \overset{\det}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & -65 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-65) = 65$$

в)

$$\begin{vmatrix} 21 & 11 & 63 & 211163 \\ 57 & 45 & 97 & 574597 \\ 73 & 26 & 80 & 732680 \\ 30 & 18 & 25 & \underbrace{301825}_{10000\,I + 100\,II + III} \end{vmatrix} -(10000\,I + 100\,II + III) = \begin{vmatrix} 21 & 11 & 63 & 0 \\ 57 & 45 & 97 & 0 \\ 73 & 26 & 80 & 0 \\ 30 & 18 & 25 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

б)

$$\overbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}^{\Delta_n} = \text{разложим} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} =$$

$$\det |2| = 2$$

$$\det \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$\det \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2^3 + 1\cdot 0\cdot 1 + 0\cdot 1\cdot 1 - (0\cdot 2\cdot 0 + 2\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 2) = 4$$

получили $2 \to 3 \to 4$

алг. доп.

$$= 2\cdot(-1)^{1+1} \overbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}}^{\Delta_{n-1}} + 1\cdot(-1)^{2+1} \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}^{\Delta_{n-2}} =$$

$$= 2\Delta_{n-1} - \text{разложим} = 2\Delta_{n-1} - 1 \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}^{\Delta_{n-2}}$$

т.е. $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$ — арифм. прогрессия $\Rightarrow \Delta_n = n+1$

$\Delta_n - \Delta_{n-1} = \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$

5. Найдите матрицу, обратную данной:

а) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

а) $\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}$

г) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} X^{-1} & & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{vmatrix} =$

X

$\det \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0 + 30 + 15 - 27 - 0 - 14 = 4$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} -4 & 1 & \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} -9 & 1 & 1 \\ 8 & -9 & 3 \\ -4 & 6 & -2 \end{vmatrix}$

в соответ. со знаками $(-1)^k$:

$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

$= \begin{vmatrix} -9/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 8/4 & -9/4 & 3/4 & 0 \\ -4/4 & 6/4 & -2/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{vmatrix}^{T} = \begin{vmatrix} -9/4 & 8/4 & -4/4 & 0 \\ 1/4 & -9/4 & 6/4 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & -2/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{vmatrix}$

7. Решите матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; г) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

а) $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \cdot X = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}}_{B}$

$\det A = -2 \neq 0 \Rightarrow$ имеет 1 решение

$AX = B$

$X = A^{-1}B$

$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} =$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} & \begin{matrix} -1 & -1 \\ +2 & +3 \end{matrix} \end{array}$$

$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ +2 & +3 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ либо решений нет либо не единственно

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + z = 2 \\ 2x + z = 2 \\ 2y + t = 1 \\ 2y + t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 2x+z & 2y+t \\ 2x+z & 2y+t \end{matrix} \end{array}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} 2x + z = 2 \\ 2y + t = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 2 - 2x \\ t = 1 - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ 2-2x & 1-2y \end{pmatrix} \; x, y \in \mathbb{R}$$

$\Downarrow$

бесконечно много решений

8. Вычислите определители порядка n, элементы которых заданы условиями
а) $a_{ij} = \min\{i, j\}$; б) $a_{ij} = \max\{i, j\}$; в*) $a_{ij} = |i - j|$.

а) $a_{ij} = \min\{i, j\}$

$(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$

$n = 1$:

$\det(1) = 1$

$n = 2$:

$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1$

$n = 3$:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{1} & \boxed{2} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = $$

$= 1$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & 3 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = 1$$

D3: 1 (d) 5 (d)

2 7 (d, 2)

4 (d, 2) 8 (d)