Числовые мн-ва и их св-ва

I Аксиомы сложения

$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1) $x + y = y + x$
2) $(x+y) + z = x + (y + z)$
3) $\exists 0 \in \mathbb{R} : \ x + 0 = x$
4) $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists -x : \ x + (-x) = 0$

II Аксиомы умножения

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1) $x \cdot y = y \cdot x$
2) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
3) $\exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \ x \cdot 1 = x$
4) $\forall x \neq 0 : \ \exists x^{-1} : \ x \cdot x^{-1} = 1$

III Дистрибутивность $\cdot$ отн $+$

$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

IV Аксиомы порядка

1) $x \leq x$
2) $x \leq y, \ y \leq x \Rightarrow y = x$

3) $x \leq y,\ y \leq z \Rightarrow x \leq z$

4) $x \leq y$ или $y \leq x$

Замечание: $x > y \Leftrightarrow y < x \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq x \\ y \neq x \end{cases}$

$$x \geq y \Leftrightarrow y \leq x$$

V Связь порядка и сложение

$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$$

VI Связь порядка и умножение

$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq x,\ 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$$

VII Аксиома непрерывности

$\exists\, X, Y \neq \varnothing,\ X, Y \subset \mathbb{R}$

$\forall\, x \in X,\ y \in Y$:

$x \leq y \Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}:\ x \leq c \leq y$

Следствия:

1) $\forall x \in \mathbb{R}: \quad x \cdot 0 = 0$

2) $x \cdot y = 0 \iff x = 0 \lor y = 0$

3) $-x = (-1) \cdot x$

4) $(-1)(-x) = x$

5) $\forall x, y \in \mathbb{R}:$

$x < y \lor x = y \lor x > y$

6) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}:$

а) $x < z \land y \leq z \Rightarrow x < z$

б) $x \leq z \land y < z \Rightarrow x < z$

7) $\forall x, y, z, k \in \mathbb{R}$

1) $x < y \Rightarrow x + z < y + z$

2) $0 < x \Rightarrow -x < 0$

3) $x \leq y \land z < k \Rightarrow x + z \leq y + k$

4) $x < y \land z \leq k \Rightarrow x + z < y + k$

5) $0 < x \land 0 < y \Rightarrow 0 < xy$

6) $0 > x \land 0 < y \Rightarrow 0 > xy$

7) $x < y \land z > 0 \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z$

8) $0 < 1$