

Равномерная непрерывность

$$\exists f: D \rightarrow \mathbb{R}$$

Опр.: f равномерно непрерывна на D , если

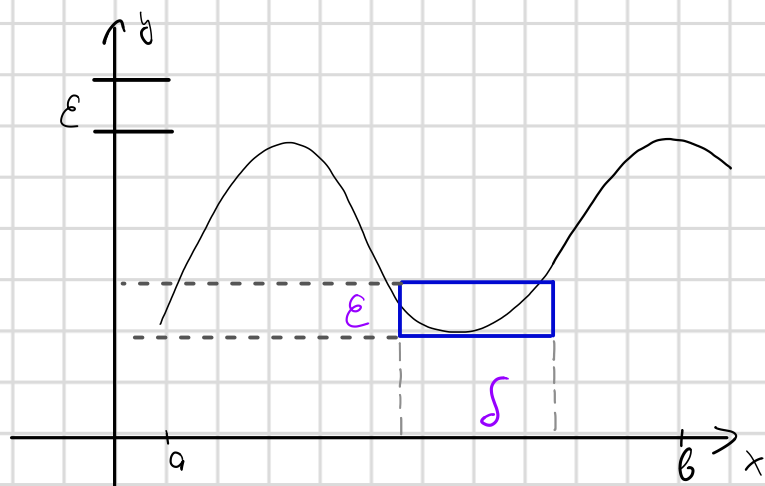
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in D, |x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Непрерывность: $\forall x_1 \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_2 \in D \cap U_\delta(x_1) \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

Лемма (связь непр. и равн. непр.):

Если f равн. непр. на D , то $f \in C(D)$

▷ Если найдется единое δ , то и для $\forall x \quad \exists \delta$ ◀



Пр.:

1) $f(x) = \text{const}$ — р.н. на \mathbb{R}

2) $f(x) = ax + b$ — р.н. на \mathbb{R}

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |a||x_1 - x_2| < |a|\delta = \varepsilon$$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$$

Теорема (Кантора о равн. непрерывности):

Если $f \in C([a, b])$, то f — равн-но непрерывна на $[a, b]$

$$\triangleright \forall x_0 \in [a, b] \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_{(x_0)}^{\circ}: \forall x \in U_{\delta_{(x_0)}} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

по л. Бореля-Лебега выберем конечное покрытие $U_{\frac{\delta_1}{2}}(x_1), \dots, U_{\frac{\delta_n}{2}}(x_n)$

$$\exists \delta = \min \left\{ \frac{\delta_1}{2}, \dots, \frac{\delta_n}{2} \right\}$$

$$\exists \tilde{x}, \tilde{\tilde{x}} \in [a, b] \Rightarrow \tilde{x} \in U_{\frac{\delta_k}{2}}(x_k), \quad \triangleleft |\tilde{\tilde{x}} - x_k| \leq |\tilde{\tilde{x}} - \tilde{x}| + |\tilde{x} - x_k| < \overset{\min\{\dots\}}{\delta} + \frac{\delta_k}{2} \leq$$

$$|\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}}| < \delta$$

$$\leq \frac{\delta_k}{2} + \frac{\delta_k}{2} = \delta_k \Rightarrow \tilde{x}, \tilde{\tilde{x}} \in U_{\delta_k}(x_k)$$

$$\text{т.е. } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta: |\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}}| < \delta_k \Rightarrow |f(\tilde{x}) - f(\tilde{\tilde{x}})| < \varepsilon \quad \blacktriangleleft$$