Случайные величины

$\xi : \Omega \to \mathbb{R}$

ξ – сл. величина

Пр.:

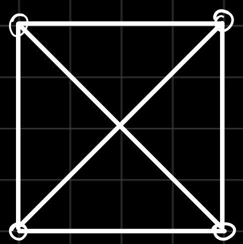
1) $D = \{1, 2, \dots, 6\}$

I $\Omega = D^2$ $\quad p(\langle i, j \rangle) = 1/36$

$\xi : \Omega \to \mathbb{R}$

$\xi(\langle i, j \rangle) = i + j$

2) $G(4, 1/2)$



$p(G) = 1/64$

3) $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$

$\xi(w) = w \iff id(w) = w$

4) $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$

$E = \{2, 4, 6\}$

χ_E – индикаторная случайная величина события

$$\chi_E(w) = \begin{cases} 1, & w \in E \\ 0, & w \notin E \end{cases}$$

$\exists\ \Omega, P, \xi$

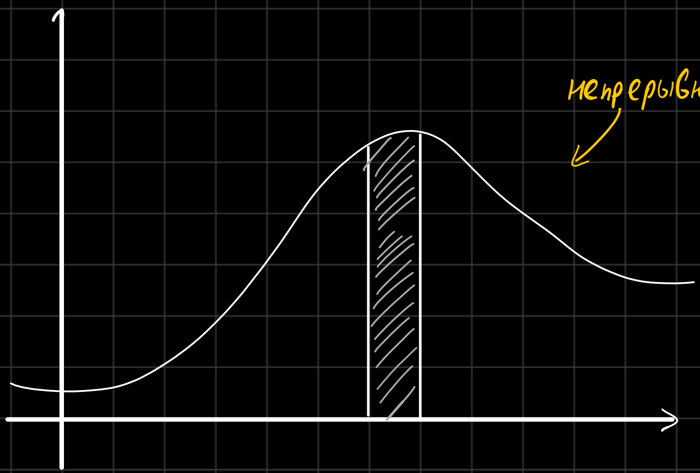
$$[\xi = i] = \{ w \mid \xi(w) = i \} \subset \Omega$$

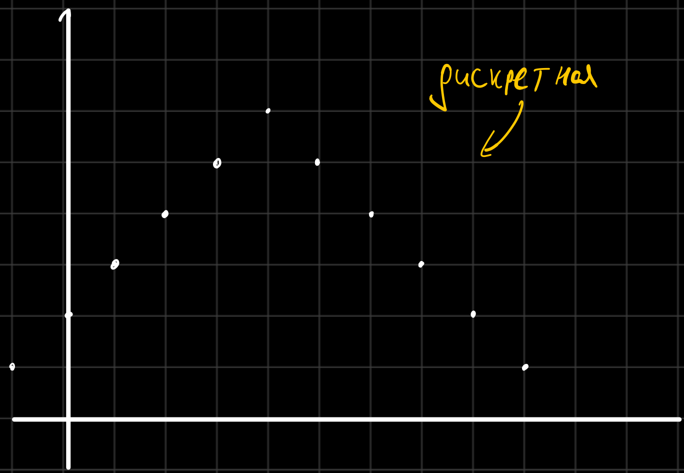
$$P([\xi = i]) = P(\xi = i)$$

$$f_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

важно

$f_\xi(i) = P(\xi = i) \leftarrow$ дискретная плотность вероятности

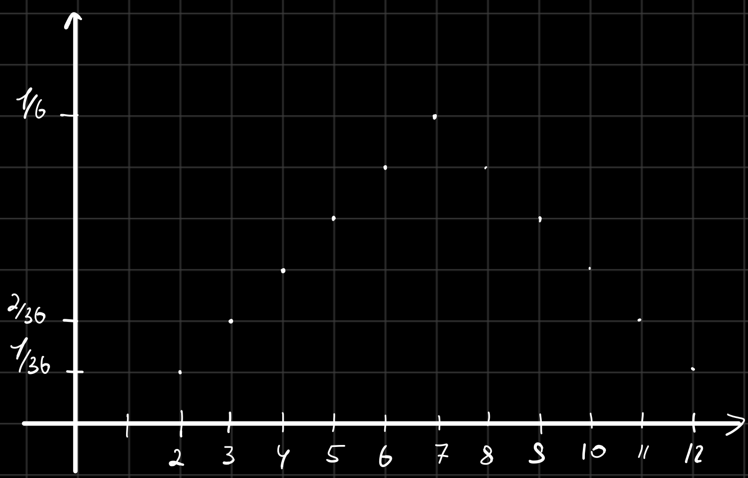




Пр.:

1) сумма на двух костях

$2 \to 1/36$
$3 \to 2/36$
4
5
6
$7 \to 1/6$



$\exists\ \Omega, P, \xi$

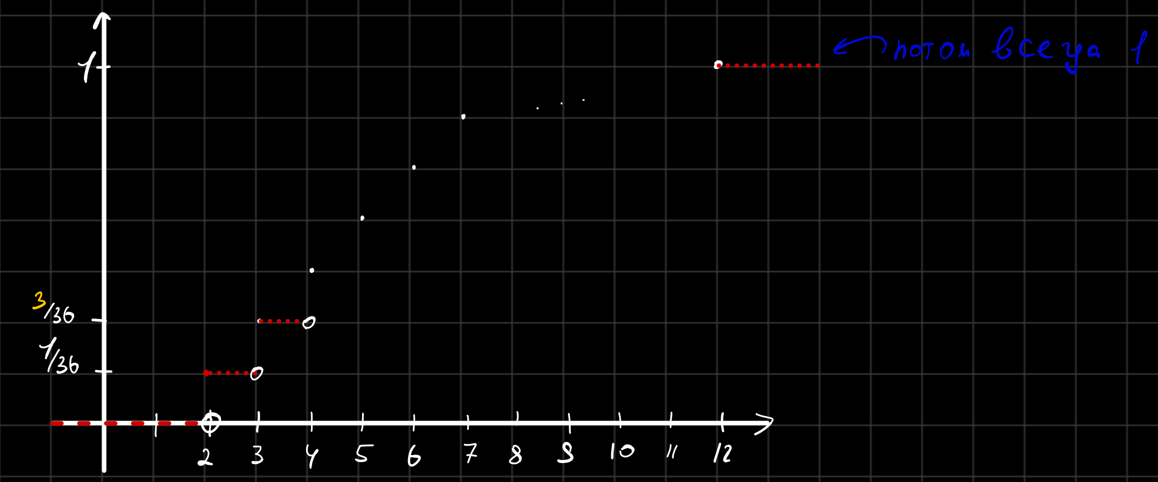
$$[\xi \le i] = \{ w \mid \xi(w) \le i \} \subset \Omega$$

и тоже можно посчитать вер-ть: $P(\xi \le i)$

и это тоже ф-ия: $F_\xi(i): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

функция распределения

На том же примере:



Обобщенные ф-ии:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases} \quad и \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1$$

это по приколу, можно забыть.

не „очень" корректная ф-ия

$$f_\xi(x) = \sum_i P(\xi = i) \cdot \delta(x - i)$$

$$F_\xi(i): \mathbb{R} \to \mathbb{R} = P(\xi \leq i)$$ ← ф-ия распределения

Пр.:

$\exists\ \Omega = \mathbb{B}^{1000} \qquad p(w) = \frac{1}{2^{1000}}$

$\xi(w) =$ число единиц в w

$|$мн-во значений $\xi| = 1001$

$$P(\xi = i) = \frac{C_{1000}^{i}}{2^{1000}}$$

$\exists\ \xi$ и η, то законы ξ^2; $2\cdot\xi$; $\xi+\eta$; $\xi\cdot\eta$; $\sin\xi$ и т.д.

Пр.:

1) $\exists\ \Omega = D^2$

$\xi_1(\langle i,j\rangle) = i$

$\xi_2(\langle i,j\rangle) = j$, но

$1 \to 1/6$
$2 \to 1/6$
$\vdots$
$6 \to 1/6$

2) $\exists\ \Omega = D$

$id(w) = w$

$1 \to 1/6$
$2 \to 1/6$
$\vdots$
$6 \to 1/6$

$\exists\ \eta = i + j = \xi_1 + \xi_2$

Математическое ожидание

Опр.: мат. ожидание

$$E\xi = \sum_{w} p(w)\cdot\xi(w)$$

Теорема

$$E\xi = \sum_{i} i\cdot P(\xi = i)$$

$\triangleright$ $E\xi = \sum\limits_{w} p(w)\cdot\xi(w) = \sum\limits_{i}\sum\limits_{w:\xi(w)=i} p(w)\cdot\xi(w) = \sum\limits_{i}\sum\limits_{w:\xi(w)=i} p(w)\cdot i =$

$= \sum\limits_{i} i \sum\limits_{w:\xi(w)=i} p(w) = \sum\limits_{i} i\cdot P(\xi = i)$ $\blacktriangleleft$

Пр.:

1) $\exists\ \Omega = D$ и $\xi = id$

$E\xi = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 4 + \frac{1}{6}\cdot 5 + \frac{1}{6}\cdot 6 = \frac{21}{6} = 3{,}5$ ← через определение

2) $\exists\ \Omega = D^2 \quad \xi(\langle i,j\rangle) = i+j$

$2 \to \frac{1}{36}$	$5 \to \frac{4}{36}$	$8 \to \frac{5}{36}$	$11 \to \frac{2}{36}$
$3 \to \frac{2}{36}$	$6 \to \frac{5}{36}$	$9 \to \frac{4}{36}$	$12 \to \frac{1}{36}$
$4 \to \frac{3}{36}$	$7 \to \frac{6}{36}$	$10 \to \frac{3}{36}$	

$E\xi = \frac{1}{36}\left(2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 3 + 5\cdot 4 + 6\cdot 5 + 7\cdot 6 + 8\cdot 5 + 9\cdot 4 + 10\cdot 3 + 11\cdot 2 + 12\cdot 1\right) = 7$ ← через теорему

Теорема

всегда

1. $E_{\lambda\xi} = \lambda\cdot E\xi$
2. $E(\xi+\eta) = E\xi + E\eta$

$\triangleright$ (1) $E_{\lambda\xi} = \sum_\omega p(\omega)\cdot\lambda\cdot\xi(\omega) = \lambda\cdot E\xi$ $\blacktriangleleft$

$\triangleright$ (2) $E(\xi+\eta) = \sum_\omega p(\omega)\left(\xi(\omega)+\eta(\omega)\right) = E\xi + E\eta$ $\blacktriangleleft$

Лемма

Если ξ и η одинаково распределены, то $E\xi = E\eta$

Пр.:

1) $\triangleleft$ игральную кость

ξ_1 – число сверху ; ξ_2 – число снизу

$E(\xi_1+\xi_2) = 7$

2) Пусть $\Omega = S_n \Rightarrow p(w) = \frac{1}{n!}$

$\xi(\pi) = \{ i \mid \pi[i] = i \}$

0 ... n кроме n-1, но?

Пусть $\xi_i(\pi) = \begin{cases} 1, & \pi[i] = i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$E\chi_A = P(A)$

$E\xi_i = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$

$\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ и $E\xi = \sum_{i=1}^{n} E\xi_i = 1$

Независимые случайные величины

Опр.: ξ и η – независимые, если:

$[\xi = \alpha]$ и $[\eta = \beta]$ – независ. $\forall \alpha, \beta$

удобное определение

Опр.: $[\xi \le \alpha]$ и $[\eta \le \beta]$ – независимые $\forall \alpha, \beta$

правильное определение

Пр.:

Пусть $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$

$\xi_1(\langle w_1, w_2 \rangle) = f(w_1)$

$\xi_2(\langle w_1, w_2 \rangle) = f(w_2)$

Лемма:

Если A и B – независ., то χ_A и χ_B – тоже независ.

Теорема

Если ξ и η – независ, то $E(\xi\cdot\eta) = E\xi \cdot E\eta$

$$\triangleright\ E_{\xi\cdot\eta} = \sum_{\alpha} \alpha \cdot P(\xi\cdot\eta = \alpha) = \sum_{\alpha} \sum_{\substack{i,j: \\ 1)\, i\cdot j=\alpha \\ 2)\, i\in R_\xi \\ 3)\, j \in R_\eta}} \overset{i\cdot j}{\boxed{\alpha}} \cdot P([\xi=i]\cap[\eta=j]) \ominus$$

$$\ominus \sum_{\alpha} \sum_{i} \sum_{j:\, i\cdot j=\alpha} i\cdot j \cdot P(\xi=i)\cdot P(\eta=j) = \sum_i i\, P(\xi=i) \cdot \sum_j j\cdot P(\eta=j) =$$

$$= E\xi \cdot E\eta \ \blacktriangleleft$$

чест. монета $\Omega = \{0,1\}$ $p = 1/2$

$\xi(i) = 2\cdot i$

$E\xi = 1$

и $\measuredangle$ $\Omega = S_n$, $p = 1/n!$

$\xi = \#$ неподвиж. точек

$E\xi = 1$

Дисперсия

Опр.: Дисперсия:

$$D\xi = Var(\xi) = E(\xi - E\xi)^2 \ominus$$

$$E(\xi - E\xi) = E\xi - E(E\xi) = E\xi - E\xi = 0$$

$$\ominus E(\xi^2 - 2\xi E\xi + (E\xi)^2) = E\xi^2 - 2E\xi\cdot E\xi + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

Теорема

1. $D c\xi = c^2 \cdot D\xi$

2. $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$, если ξ и η – независимы