

Множества

- у мн-ва нет определения. Это набор, совокупность и т.д.
- \emptyset — пустое мн-во

Операции над множествами

1) Объединение

$$C = A \cup B = \{x: (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

2) Пересечение

$$C = A \cap B = \{x: (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

3) Разность

$$C = A \setminus B = \{x: (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

4) Подмножество

$$(\forall x \in A) \Rightarrow (x \in B) \Leftrightarrow A \subset B$$

5) Дополнение до универсального

$$U \setminus A = A^c$$

Св-ва мн-в:

1) $X \cup Y = Y \cup X$ из опр

2) $X \cap Y = Y \cap X$ из опр

3) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$ из опр

4) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$

5) $X \cup X = X \cup \emptyset = X$

$$6) X \cap X = X; X \cap \emptyset = \emptyset$$

$$7) X \cup X^c = U; X \cap X^c = \emptyset; (X^c)^c = X$$

Законы де Моргана:

$$1) Y \setminus \bigcup_{a \in A} X_a = \bigcap_{a \in A} (Y \setminus X_a)$$

$$\Delta x \in Y \setminus \bigcup_{a \in A} X_a \Leftrightarrow (x \in Y) \wedge (x \notin \bigcup_{a \in A} X_a) \Leftrightarrow (x \in Y) \wedge (x \notin X_a, \forall a \in A) \Leftrightarrow (x \in Y \setminus X_a, \forall a \in A) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{a \in A} (Y \setminus X_a) \blacktriangleleft$$

$$2) Y \setminus \bigcap_{a \in A} X_a = \bigcup_{a \in A} (Y \setminus X_a)$$

$$\Delta x \in Y \setminus \bigcap_{a \in A} X_a \Leftrightarrow (x \in Y) \wedge (x \notin \bigcap_{a \in A} X_a) \Leftrightarrow (x \in Y) \wedge (x \notin X_a, \forall a \in A) \Leftrightarrow (x \in Y \setminus X_a, \forall a \in A) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{a \in A} (Y \setminus X_a)$$

Дистрибутивные объединения и пересечения

$$1) Y \cup \bigcap_{a \in A} X_a = \bigcap_{a \in A} (Y \cup X_a)$$

$$\Delta x \in Y \cup \bigcap_{a \in A} X_a \Leftrightarrow (x \in Y) \vee (x \in \bigcap_{a \in A} X_a) \Leftrightarrow (x \in Y) \vee (x \in X_a, \forall a \in A) \Leftrightarrow (x \in Y \cup X_a, \forall a \in A) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{a \in A} (Y \cup X_a) \blacktriangleleft$$

$$2) Y \cap \bigcup_{a \in A} X_a = \bigcup_{a \in A} (Y \cap X_a)$$

$$\Delta x \in Y \cap \bigcup_{a \in A} X_a \Leftrightarrow (x \in Y) \wedge (x \in \bigcup_{a \in A} X_a) \Leftrightarrow (x \in Y) \wedge (x \in X_a, \forall a \in A) \Leftrightarrow (x \in Y \cap X_a, \forall a \in A) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{a \in A} (Y \cap X_a) \blacktriangleleft$$

Контрольные вопросы

1.4 Контрольные вопросы и задачи

1. Покажите, что пустое множество содержится в каждом множестве.
2. Проиллюстрируйте декартово произведение двух отрезков, двух прямых, прямой и окружности, прямой и круга.
3. Докажите, что для произвольных множеств A, B, C выполнено $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
4. Докажите, что для произвольных множеств A, B, C выполнено $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.
5. Докажите, что для произвольных множеств A, B, C выполнено $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
6. Пусть даны множества A, B, C . Выразить следующие множества через A, B, C , используя операции \cap, \cup, \setminus :

- Множество элементов, принадлежащих ровно двум из множеств A, B и C ;
- Множество элементов, принадлежащих ровно одному из множеств A, B и C ;
- Множество элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A, B , но не принадлежащих C .

$$1) \quad \emptyset \notin A, \quad A - \text{любое мн-во}$$

$$\Leftrightarrow \exists x : (x \in \emptyset) \wedge (x \notin A)$$

$$x \in \emptyset - \text{противоречие с опр} \Rightarrow$$

$$\emptyset \subseteq A$$

$$3) \quad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$\triangleright x \in (A \cup B) \cap C \Leftrightarrow$$

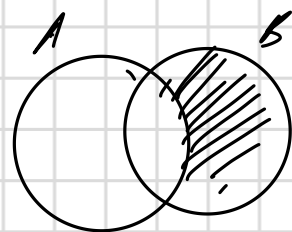
$$\Leftrightarrow ((x \in (A \cup B)) \wedge (x \in C)) \Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge$$

$$(x \in C) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in C)) \vee ((x \in B) \wedge (x \in C)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \cap C) \vee (x \in B \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C) \blacktriangleleft$$

$$4) \quad A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$$

$$\triangleright x \in (A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$$



$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B)$$

$$x \in A \setminus (A \setminus B) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin A \setminus B) \Leftrightarrow$$

$$(x \in A) \wedge (x \in B) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \blacktriangleleft$$

$$5) \quad (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \cup B) \times C \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge y \in C \Leftrightarrow$$

$$(x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C)$$

Функции и отображения

X и Y — мн-ва

функции

$$f: X \rightarrow Y \Leftrightarrow \forall x \in X \exists! y \in Y : y = f(x)$$

Опр.: $\exists A \subset X,$