13. Найдите ядро и образ оператора $\mathscr{A}$, заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -7 \\ 6 & 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\left(A^T, E\right) \qquad rk\left(\begin{array}{c|c} \mathscr{A}(e_1) & e_1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathscr{A}(e_n) & e_n \end{array}\right) = n = \dim V$$

базис $Im\,\mathscr{A}$

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathscr{A}(e_1) & e_1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathscr{A}(e_n) & e_n \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} \mathscr{A}(x) & \equiv \\ \hline 0 & x \end{array}\right)$$

$\mathscr{A}(x)$ базис $Ker\,\mathscr{A}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -7 \\ 6 & 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & -7 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -7 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -9 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -16 & -23 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -3 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -3 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$Im\,\mathscr{A} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$Ker\,\mathscr{A} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

2. Как найти спектр и собственные векторы?

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A = t^3 \underbrace{-5}_{-trA} t^2 + \underbrace{(4-4+8)}_{\text{сумма миноров}} t - \underbrace{(8-20+16)}_{\det A} = t^3 - 5t^2 + 8t - 4$$

и $t=1$ - корень $\Rightarrow t^3-5t^2+8t-4 = (t-1)(x^2-4x+4) =$

$(t-1)\underline{(t-2)^2}$ $\quad \lambda_1 = 2 \;\dots\; \lambda_2 = 2 \;\dots\; \lambda_3 = 1$

$\Rightarrow$ $\lambda = 1$ и $\lambda = 2$ $\leftarrow$ собственные значения

при этом $a(1) = g(1) = 1$ т.е. $\lambda_3 = 1$

$2 = a(2) = \underline{g(2) = 2}$ т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

$\lambda_3 = 1$

$V = V_2 \oplus V_1$

$\underset{2}{\overset{\shortparallel}{a(2)}} \geq g(2)$

$V_2 : (A - 2E)\cdot X = 0$

$$\left(\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\right) X = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$

$x_3 = 3x_2 - 3x_1$

$\exists\, x_3$ - базисная, остальные свободные

$x_3 = -3x_1 + 3x_2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 3x_2 - 3x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}}_{e_1} \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{matrix},\ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{e_2} \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{matrix} \right\rangle$$

$V_1 : (A - E) X = 0$

$$V_1 = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_3} \right\rangle$$

собственный базис

$V = \langle e_1, e_2 \rangle \oplus \langle e_3 \rangle$

$$A = \overset{\lambda_{2+1}}{\overset{\parallel}{2}} \cdot P_{v_2} + 1 \cdot P_{v_1}$$ ← Спектральное разложение

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \overset{\lambda_1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \overset{\lambda_2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{P}_{v_2}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\tilde{P}_{v_1} \quad \lambda_3}$$

$$\tilde{A} = C^{-1} \cdot A \cdot C$$

$C =$ (ст. базис $\rightsquigarrow$ собств)

$$C = \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{A} = C \tilde{A} C^{-1} = C \tilde{P}_{v_2} C^{-1} + C \tilde{P}_{v_1} C^{-1}$$