Содержание

1 Равномерная непрерывность функции

Определение 1.0.1 *Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется равномерно непрерывной на множестве $D \subset E$, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x_1, x_2 \in D :\ |x_1 - x_2| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Полезно сравнить определения равномерной непрерывности и непрерывности функции на множестве. Функция $f : E \to \mathbb{R}$ непрерывна на множестве $D \subset E$, если она непрерывна в каждой точке $x_0 \in D$, то есть

$$\forall x_0 \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in D :\ |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Отличие определения равномерной непрерывности от непрерывности на множестве состоит в том, что в определении равномерной непрерывности число δ зависит только от ε, тогда как в определении непрерывности функции δ зависит от ε и от точки x_0.

Пример 1.0.1 *Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ на множестве $[0, +\infty)$. Докажем, что на этом множестве данная функция будет равномерно непрерывна.*

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и два значения аргумента из промежутка $[0, +\infty)$ и составим разность

$$f(x') - f(x'') = \frac{1}{1+x'^2} - \frac{1}{1+x''^2} = \frac{x''^2 - x'^2}{(1+x'^2)(1+x''^2)} = \frac{(x''-x')(x'+x'')}{(1+x'^2)(1+x''^2)}.$$

Оценим модуль этой разности, используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим $\left(x \leqslant \frac{1+x^2}{2}\right)$:

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant \left(\frac{x'}{1+x'^2} + \frac{x''}{1+x''^2}\right) \cdot |x' - x''| \leqslant \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) |x' - x''| = |x' - x''|.$$

Отсюда следует, что, если взять $\delta = \varepsilon$, то из неравенства $|x' - x''| < \delta$ будет следовать неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Лемма 1.0.1 *Если функция равномерно непрерывна на множестве D, то она непрерывна на этом множестве.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in D$. Так как функция f равномерно непрерывна на D, то по $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, что для любых $x_1, x_2 \in D$: $|x_1 - x_2| < \delta$ будет выполнено $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. В частности, для $x_1 = x_0$ это утверждение верно, что и означает непрерывность f в точке x_0. □

Обратное, вообще говоря, неверно.

Пример 1.0.2 *Пусть $f(x) = x^2$ и $G = [0, +\infty)$. Отметим, что данная функция будет непрерывной в каждой точке данного промежутка. Докажем, что эта непрерывность не будет равномерной на G.*

Возьмем два значения аргумента $x' = n + \frac{1}{n}$ и $x'' = n$ $n \in \mathbb{N}$, которые будут принадлежать заданному промежутку. Тогда будет справедливо неравенство

$$|f(x') - f(x'')| = \left|x'^2 - x''^2\right| = \frac{1}{n}\left(2n + \frac{1}{n}\right) > 2.$$

Следовательно, если взять $\varepsilon_0 = 2$, то, какое бы число $\delta > 0$ мы ни взяли, мы сможем найти число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $|x' - x''| = \frac{1}{n} < \delta$, но при этом $|f(x') - f(x'')| > \varepsilon_0$. Это означает, что равномерной непрерывности функции на данном промежутке нет.

Теорема 1.0.1 (Кантора) *Функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, равномерно непрерывна на нем.*

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$ и, пользуясь непрерывностью функции на $[a, b]$, для каждой точки $x_0 \in [a, b]$ найдем окрестность $U_{\delta_{x_0}}(x_0)$ так, что

$$\forall x \in [a, b]: \ |x - x_0| < \delta_{x_0} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Множество окрестностей $U_{\delta_x/2}$, $x \in [a, b]$ образует покрытие отрезка $[a, b]$ из которого, по теореме Бореля–Лебега, можно выделить конечное покрытие

$$U_{\delta_{x_1}/2},\ U_{\delta_{x_2}/2}, \ldots, U_{\delta_{x_n}/2}.$$

Пусть $\delta = \min\left(\frac{\delta_{x_1}}{2}, \ldots, \frac{\delta_{x_n}}{2}\right)$. Возьмем $x', x'' \in [a, b]$ и $|x' - x''| < \delta$. Найдется окрестность $U_{\delta_{x_i}/2}$, содержащая x'. Тогда

$$|x'' - x_i| \leqslant |x'' - x'| + |x' - x_i| < \delta + \frac{\delta_{x_i}}{2} < \delta_{x_i},$$

то есть $x', x'' \in U_{\delta_{x_i}}$. Но тогда

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и означает равномерную непрерывность f на $[a, b]$. $\square$

Заметим, что в условии Теоремы отрезок нельзя заменить на интервал или полуинтервал.

Функция f не является равномерно непрерывной на множестве D, если

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall \delta > 0 \ \exists x_1, x_2 \in D : \ |x_1 - x_2| < \delta, \ |f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \varepsilon.$$

Пример 1.0.3 *Функция $f(x) = 1/x$ непрерывна на $(0, 1)$, но не является равномерно непрерывной на нем.*

Возьмем $x_1 = \frac{1}{n}$, $x_2 = \frac{1}{2n}$. Так как $|x_1 - x_2| = \frac{1}{2n} \to 0$, то эту разность можно сделать сколь угодно малой, выбрав достаточно большое n. В то же время, $|f(x_1) - f(x_2)| = 2n - n = n$ становится сколь угодно большим и не может быть $< \varepsilon$.

2 Неопределенный интеграл

2.1 Понятие первообразной, неопределённого интеграла

Ранее была изучена операция дифференцирования, сопоставляющая функции ее производную. В этом разделе будет изучаться обратная задача, в которой производная известна, а функцию нужно найти.

Замечание 2.1.1 *Ниже под обозначением $\langle a, b \rangle$ будет пониматься произвольный промежуток: отрезок, интервал или полуинтервал.*

Определение 2.1.1 *Первообразной функции $f(x)$ на промежутке $\langle a, b \rangle$ называется функция $F(x)$ такая, что для всех $x \in \langle a, b \rangle$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.*

Пример 2.1.1 *Функция $F_1(x) = \frac{x^3}{3}$ будет первообразной для функции $f(x) = x^2$ при $x \in (-\infty, +\infty)$, но эта первообразная не единственна. Так, функции $F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 5$ или $F_3(x) = \frac{x^3}{3} - \pi^e$ также будут ее первообразными.*

Пример 2.1.2 *Функция $F(x) = \operatorname{arctg} x$ является первообразной для функции $\frac{1}{1+x^2}$ при всех $x \in \mathbb{R}$, так как $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.*

Пример 2.1.3 *Функция $F(x) = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$ является первообразной для функции $\frac{1}{1+x^2}$ как при $x > 0$, так и при $x < 0$.*

Вопрос об описании всех первообразных данной функции решается с помощью следующей теоремы.

Теорема 2.1.1 *Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$. Для того, чтобы $\Phi(x)$ также была первообразной для $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$F(x) - \Phi(x) \equiv C, \quad x \in \langle a, b\rangle.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\Psi(x) = F(x) - \Phi(x)$, где $F(x)$ и $\Phi(x)$ – первообразные для $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$. Тогда $\forall x \in \langle a, b\rangle$

$$\Psi'(x) = (F(x) - \Phi(x))' = F'(x) - \Phi'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Согласно теореме Лагранжа, для любых $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ таких, что $x_1 < x_2$,

$$\Psi(x_2) - \Psi(x_1) = \Psi'(\xi)(x_2 - x_1) = 0, \ \xi \in (x_1, x_2).$$

Значит, $\Psi(x) \equiv C$.
Достаточность. Пусть на $\langle a, b\rangle$ выполнено условие $F(x) - \Phi(x) = C$. Тогда на этом промежутке $\Phi(x) = F(x) + C$, а следовательно

$$\Phi'(x) = F'(x) + C' = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x).$$

То есть $\Phi(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$. □

Определение 2.1.2 *Неопределённым интегралом функции $f(x)$ на промежутке $\langle a, b\rangle$ называется множество всех её первообразных на этом промежутке. Неопределенный интеграл обозначается следующим образом:*

$$\int f(x)dx \quad \text{или} \quad \int f dx,$$

где

- $\int$ - *знак неопределенного интеграла;*
- $f(x)$ - *подынтегральная функция;*
- $f(x)dx$ - *подынтегральное выражение;*
- x - *переменная интегрирования.*

Следствие 2.1.2 *Если $F(x)$ – какая-либо первообразная функции $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$, то неопределенный интеграл функции $f(x)$ на промежутке $\langle a, b\rangle$ равен*

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что для краткости информацию о том, что рассматривается промежуток $\langle a, b\rangle$, часто опускают. Например, вместо

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \begin{cases} c_1, & x<0 \\ c_2, & x>0 \end{cases}$$

пишут

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

подразумевая, что C – кусочно-постоянная.

Замечание 2.1.2 *Если dx трактовать, как дифференциал, то ниже приведенные формулы интегрирования по частям и замены переменной становятся совершенно «механическими».*

Замечание 2.1.3 *Полезно отметить, что не каждая функция имеет первообразную. Так как производная дифференцируемой функции не может иметь разрывов первого рода, то любая функция, имеющая на $\langle a, b\rangle$ разрыв первого рода, не имеет на $\langle a, b\rangle$ первообразной.*

Позже, при изучении определенного интеграла Римана будет показано, что каждая непрерывная на $\langle a, b\rangle$ функция имеет на этом множестве первообразную.

Замечание 2.1.4 *Первообразные существуют не только у непрерывных функций. Производная дифференцируемой функции может иметь разрывы второго рода. Например,*

$$f(x) = \begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

Детали остаются читателю.

Для практических целей часто полезно следующее определение.

Определение 2.1.3 *Функция $F(x)$ называется обобщенной первообразной функции $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$, если $F(x) \in C\langle a, b\rangle$ и $F'(x) = f(x)$ всюду на $\langle a, b\rangle$, кроме не более чем конечного числа точек.*

Пример 2.1.4 *Легко проверить, что обобщенной первообразной функции $y = \operatorname{sign} x$ на $\mathbb{R}$ является функция $y = |x|$.*

2.2 Таблица неопределённых интегралов

Ниже приведена таблица интегралов, часто используемых на практике.

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1 \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \qquad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C, \quad a \neq 0 \text{ («длинный логарифм»)}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \text{ («высокий логарифм»)}$$

Доказательство. В качестве примера приведено доказательство для формулы

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C, \quad a \neq 0.$$

Для доказательства достаточно показать, что производная правой части равна подынтегральной функции.

$$\left(\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C\right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \left(\frac{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}.$$

$\square$

Важно отметить, что каждая из формул, написанных выше, рассматривается на тех промежутках вещественной оси, на которых определена соответствующая подынтегральная функция. Если таких промежутков несколько, то произвольные постоянные в правой части, вообще говоря, различны.

2.3 Свойства неопределенного интеграла

Теорема 2.3.1 (Интеграл и производная) *Пусть существует $\int f(x)dx$ на $\langle a, b\rangle$, тогда на $\langle a, b\rangle$:*

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

Доказательство. 1. Так как $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x).$$

2. Доказывается аналогично и предлагается в качестве упражнения. □

Прямо из определения легко получается и следующая важная лемма:

Лемма 2.3.1 *Если $F(x)$ дифференцируема на $\langle a, b\rangle$, то $\int dF(x) = F(x) + C$.*

Следующая теорема широко применяется на практике.

Теорема 2.3.2 (Линейность неопределенного интеграла) *Пусть на $\langle a, b\rangle$ существуют неопределенные интегралы $\int f(x)dx$ и $\int g(x)dx$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Тогда*

$$\int (\alpha f + \beta g)dx = \alpha \int f dx + \beta \int g dx.$$

Доказательство. По предыдущему свойству,

$$\left(\alpha \int f dx + \beta \int g dx\right)' = \alpha f(x) + \beta g(x),$$

то есть $\alpha \int f dx + \beta \int g dx$ – первообразная для $\alpha f + \beta g$ на $\langle a, b\rangle$, а значит равенство установлено. □

Пример 2.3.1 *Вычислить интеграл*

$$\int \frac{x^2 + \sqrt[3]{x^2} + 5}{x} dx.$$

По свойству линейности,

$$\int \frac{x^2 + \sqrt[3]{x^2} + 5}{x} dx = \int x dx + \int x^{-1/3} dx + 5 \int \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} x^{2/3} + 5 \ln|x| + C.$$

Пример 2.3.2 *Вычислить интеграл*

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$

Так как $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, *то*

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

Теорема 2.3.3 (Формула замены переменной) *Пусть на* $\langle a, b\rangle$ *существует неопределенный интеграл* $\int f(x)dx$, $\varphi(t) : \langle \alpha, \beta\rangle \to \langle a, b\rangle$, *дифференцируема на* $\langle \alpha, \beta\rangle$, *тогда*

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$, тогда, согласно теореме о производной сложной функции, $F(\varphi(t))$ – первообразная для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на $\langle \alpha, \beta\rangle$, откуда и следует равенство. □

Пример 2.3.3 *Вычислить интеграл*

$$\int xe^{x^2} dx.$$

Пусть $x^2 = t$, *тогда* $d(x^2) = dt$ *или* $2xdx = dt$, *а значит*

$$\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

Пример 2.3.4 *Вычисление предыдущего интеграла можно оформить и иначе, если* dx *трактовать, как дифференциал.*

$$\int xe^{x^2} dx = \int e^{x^2} d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2} \int e^{x^2} dx^2 = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

Данный способ оформления называется занесением под знак дифференциала.

Теорема 2.3.4 (Формула интегрирования по частям) *Пусть* u, v *дифференцируемы на* $\langle a, b\rangle$ *и на* $\langle a, b\rangle$ *существует неопределенный интеграл* $\int vdu$, *тогда на* $\langle a, b\rangle$

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Доказательство. Действительно, если рассмотреть дифференциал от правой части равенства, то получим

$$d\left(uv - \int vdu\right) = d(uv) - d\left(\int vdu\right) = d(uv) - vdu = udv,$$

так как $d(uv) = udv + vdu$. Отсюда следует требуемое. $\square$

Пример 2.3.5 *Вычислить интеграл*

$$\int x \sin x dx.$$

Пусть $u = x$, *тогда* $du = dx$, $dv = \sin x dx$ *и* $v = -\cos x$. *Значит,*

$$\int x \sin x dx = \left| \begin{array}{c} u = x \\ du = dx \\ dv = \sin x dx \\ v = -\cos x \end{array} \right| = -x\cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Пример 2.3.6 *Вычислить интеграл*

$$\int (x^2 + 2x)e^x dx.$$

Проинтегрируем по частям, получим

$$\int (x^2+2x)e^x dx = \left| \begin{array}{c} u = x^2 + 2x \\ du = (2x+2)dx \\ dv = e^x dx \\ v = e^x \end{array} \right| = (x^2+2x)e^x - \int (2x+2)e^x dx.$$

В результате степень многочлена перед экспонентой уменьшилась. Проинтегрируем по частям снова,

$$\int (2x+2)e^x = \left| \begin{array}{c} u = 2x + 2 \\ du = 2dx \\ dv = e^x dx \\ v = e^x \end{array} \right| = (2x+2)e^x - 2\int e^x dx = (2x+2)e^x - e^x + C.$$

Окончательно,

$$\int (x^2+2x)e^x dx = (x^2+2x)e^x - (2x+2)e^x + e^x + C.$$

Замечание 2.3.1 *Формулу интегрирования по частям удобно применять для интегралов вида*

$$\int P_n(x)a^{\alpha x}dx, \int P_n(x)\sin(\alpha x)dx, \int P_n(x)\cos(\alpha x)dx,$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n.

Пример 2.3.7 *Вычислить интеграл*

$$\int e^x \sin x dx.$$

Проинтегрируем по частям, получим

$$\int e^x \sin x dx = \left| \begin{array}{c} u = e^x \\ du = e^x dx \\ dv = \sin x dx \\ v = -\cos x \end{array} \right| = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$$

еще раз проинтегрируем по частям, получим

$$\int e^x \cos x dx = \left| \begin{array}{c} u = e^x \\ du = e^x dx \\ dv = \cos x dx \\ v = \sin x \end{array} \right| = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.$$

В итоге,

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx,$$

откуда

$$\int e^x \sin x dx = \frac{-e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + C.$$

Интегралы такого типа, как рассмотрен выше, называются самосводящимися.

2.4 Интегрирование рациональных дробей

2.5 Некоторые сведения из теории многочленов

В дальнейшем, под многочленом (полиномом) $P_n(x)$ степени $n \geqslant 1$ будет подразумеваться функция

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

где $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Под многочленом нулевой степени будет подразумеваться константа.

Определение 2.5.1 *Рациональной дробью называется дробь* $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$*, где* $P_n(x)$ *– многочлен степени* n*,* $Q_m(x)$ *– многочлен степени* m*.*

Определение 2.5.2 *Рациональная дробь называется правильной, если* $n < m$*, иначе она называется неправильной.*

Лемма 2.5.1 *Пусть* $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *– неправильная дробь. Тогда существует единственное представление*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R_{n-m}(x) + \frac{T_k(x)}{Q_m(x)},$$

где $R_{n-m}(x)$ *– многочлен степени* $(n-m)$*,* $T_k(x)$ *– многочлен степени* k*, причем* $k < m$*.*

В теории многочленов доказывается следующая теорема.

Теорема 2.5.1 *Пусть* $P_n(x)$ *– многочлен* n*-й степени, у которого коэффициент при старшей степени равен единице. Тогда он может быть разложен на множители следующим образом*

$$P_n(x) = (x-a_1)^{k_1} \cdot (x-a_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x-a_p)^{k_p} \cdot (x^2+b_1x+c_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+b_mx+c_m)^{l_m},$$

где

$$k_p,\ l_m \in \mathbb{N},\ D = b_m^2 - 4c_m < 0,\ k_1 + k_2 + \ldots + k_p + 2 \cdot (l_1 + \ldots + l_m) = n.$$

Замечание 2.5.1 *Условия* $b_i^2 - 4c_i < 0$ *означают, что квадратные трехчлены* $x^2 + b_ix + c_i$ *не имеют вещественных корней. В этом случае они имеют два комплексно-сопряженных корня* $\alpha \pm \beta i$*.*

2.6 Разложение рациональной дроби на простейшие

Определение 2.6.1 *Простейшими дробями называют дроби вида*

$$\frac{A}{(x-a)^k},\ \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k},$$

где $k \in \mathbb{N}$*.*

Оказывается, любая правильная рациональная дробь может быть разложена в сумму простейших. Этой теореме предпошлем две леммы.

Лемма 2.6.1 *Пусть* $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *– правильная рациональная дробь и* $Q_m(x) = (x-a)^k \cdot \widetilde{Q}(x)$*, где* $\widetilde{Q}(a) \neq 0$*. Существует число* $A \in \mathbb{R}$ *и многочлен* $\widetilde{P}(x)$*, такие что*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{\widetilde{P}(x)}{(x-a)^{k-1} \cdot \widetilde{Q}(x)},$$

причем это представление единственно.

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} - \frac{A}{(x-a)^k} = \frac{P_n(x)}{(x-a)^k \cdot \widetilde{Q}(x)} - \frac{A}{(x-a)^k} = \frac{P_n(x) - A \cdot \widetilde{Q}(x)}{(x-a)^k \cdot \widetilde{Q}(x)}$$

и выберем число A так, чтобы число a было корнем числителя.

$$P_n(a) - A \cdot \widetilde{Q}(a) = 0 \Rightarrow A = \frac{P_n(a)}{\widetilde{Q}(a)},$$

где последнее равенство корректно, так как по условию $\widetilde{Q}(a) \neq 0$. При данном A в числителе стоит многочлен $P_n(x) - A \cdot \widetilde{Q}(x)$ с корнем a, значит его можно разложить на множители $(x-a) \cdot \widetilde{P}(x)$, а тогда

$$\frac{P_n(x) - A \cdot \widetilde{Q}(x)}{(x-a)^k \cdot \widetilde{Q}(x)} = \frac{(x-a) \cdot \widetilde{P}(x)}{(x-a)^k \cdot \widetilde{Q}(x)} = \frac{\widetilde{P}(x)}{(x-a)^{k-1} \cdot \widetilde{Q}(x)}.$$

Существование разложения доказано.
Докажем единственность такого разложения. От противного, пусть существует два разложения

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{\widetilde{P}_1(x)}{(x-a)^{k-1} \cdot \widetilde{Q}(x)} = \frac{A_2}{(x-a)^k} + \frac{\widetilde{P}_2(x)}{(x-a)^{k-1} \cdot \widetilde{Q}(x)}.$$

Домножив на $(x-a)^k \cdot \widetilde{Q}(x)$, имеем

$$A_1 \cdot \widetilde{Q}(x) + \widetilde{P}_1(x) \cdot (x-a) = A_2 \cdot \widetilde{Q}(x) + \widetilde{P}_2(x) \cdot (x-a),$$

причем это равенство верно при всех $x \in \mathbb{R}$. Пусть $x = a$, тогда равенство превращается в

$$A_1 \cdot \widetilde{Q}(a) = A_2 \cdot \widetilde{Q}(a),$$

и так как $\widetilde{Q}(a) \neq 0$ то $A_1 = A_2$. Но тогда коэффициенты многочлена $\widetilde{P} = P_n(x) - A \cdot \widetilde{Q}(x)$ тоже вычисляются однозначно. Противоречие. □

Лемма 2.6.2 *Пусть* $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *– правильная рациональная дробь и* $Q_m(x) = (x^2+px+q)^k \cdot \widetilde{Q}(x)$, $p^2-4q<0$, $\alpha \pm \beta i$ *– комплексно-сопряженные корни квадратного трехчлена* x^2+px+q, *причем* $\widetilde{Q}(\alpha \pm \beta i) \neq 0$. *Существуют единственные числа* $A, B \in \mathbb{R}$ *и многочлен* $\widetilde{P}(x)$ *такие, что*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} + \frac{\widetilde{P}(x)}{(x^2+px+q)^{k-1} \cdot \widetilde{Q}(x)},$$

причем это представление единственно.

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} - \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} = \frac{P_n(x) - (Ax+B)\cdot\widetilde{Q}(x)}{(x^2+px+q)^k \cdot \widetilde{Q}(x)}$$

Выберем числа A, B так, чтобы число $\alpha+\beta i$ было корнем числителя, то есть чтобы

$$P_n(\alpha+\beta i) - (A(\alpha+\beta i)+B)\cdot\widetilde{Q}(\alpha+\beta i) = 0.$$

Так как значение многочлена в комплексной точке дает комплексное число, то

$$P_n(\alpha+\beta i) = P_1 + iP_2,$$
$$\widetilde{Q}(\alpha+\beta i) = \widetilde{Q}_1 + i\widetilde{Q}_2,$$

где $P_1, P_2, \widetilde{Q}_1, \widetilde{Q}_2 \in \mathbb{R}$ и $\widetilde{Q}_1^2 + \widetilde{Q}_2^2 \neq 0$, так как по условию $\widetilde{Q}(\alpha+\beta i) \neq 0$. Тогда последнее уравнение примет вид

$$P_1 + iP_2 - (A\alpha + iA\beta + B)\cdot(\widetilde{Q}_1 + i\widetilde{Q}_2) = 0.$$

Отделив вещественную и мнимую части, получим

$$(P_1 - A(\alpha\widetilde{Q}_1 - \beta\widetilde{Q}_2) - B\widetilde{Q}_1) + i(P_2 - A(\alpha\widetilde{Q}_2 + \beta\widetilde{Q}_1) - B\widetilde{Q}_2) = 0 + 0\cdot i$$

Таким образом,

$$\begin{cases} P_1 - A(\alpha\widetilde{Q}_1 - \beta\widetilde{Q}_2) - B\widetilde{Q}_1 = 0 \\ P_2 - A(\alpha\widetilde{Q}_2 + \beta\widetilde{Q}_1) - B\widetilde{Q}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(\alpha\widetilde{Q}_1 - \beta\widetilde{Q}_2) + B\widetilde{Q}_1 = P_1 \\ A(\alpha\widetilde{Q}_2 + \beta\widetilde{Q}_1) + B\widetilde{Q}_2 = P_2 \end{cases}$$

Вычислим определитель данной системы:

$$\Delta = (\alpha\widetilde{Q}_1 - \beta\widetilde{Q}_2)\widetilde{Q}_2 - \widetilde{Q}_1(\alpha\widetilde{Q}_2 + \beta\widetilde{Q}_1) = -\beta(\widetilde{Q}_1^2 + \widetilde{Q}_2^2) \neq 0.$$

Значит из системы единственным образом могут быть найдены числа A и B такие, что $\alpha+\beta i$ - корень числителя. Если $\alpha+\beta i$ корень многочлена с вещественными коэффициентами, то $\alpha - \beta i$ – тоже его корень, значит при найденных A и B числитель $P_n(x) - (Ax+B)\cdot\widetilde{Q}(x)$ может быть разложен на множители

$$P_n(x) - (Ax+B)\cdot\widetilde{Q}(x) = (x^2+px+q)\cdot\widetilde{P}(x),$$

причем

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} - \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} = \frac{(x^2+px+q)\cdot\widetilde{P}(x)}{(x^2+px+q)^k\cdot\widetilde{Q}(x)} = \frac{\widetilde{P}(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}\cdot\widetilde{Q}(x)}.$$

Тем самым, существование разложения доказано.
Единственность доказывается аналогично доказательству предыдущей леммы и остается в качестве упражнения. □
Две данные леммы позволяют доказать теорему, которая и является основной целью данного параграфа.

Теорема 2.6.1 *Любая рациональная дробь может быть представлена единственным образом в виде*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R_{n-m}(x) + \frac{A_{11}}{(x-a_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)} +$$
$$+\frac{A_{s1}}{(x-a_s)^{k_s}} + \ldots + \frac{A_{sk_s}}{(x-a_s)} + \frac{B_{11}x+C_{11}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \ldots + \frac{B_{1l_1}x+C_{1l_1}}{x^2+p_1x+q_1} +$$
$$+\frac{B_{t1}X+C_{t1}}{(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}} + \ldots + \frac{B_{tl_t}X+C_{tl_t}}{x^2+p_tx+q_t},$$

где $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \in \mathbb{R}, R_{n-m}(x)$ – многочлен степени $(n-m)$ и знаменатель исходной дроби имеет разложение

$$Q_m(x) = (x-a_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-a_s)^{k_s}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}.$$

Доказательство. Пусть в рациональной дроби $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ степень $n > m$, тогда по лемме 2.5.1 ее можно представить в виде суммы многочлена $R_{n-m}(x)$ и правильной дроби $\frac{T_k(x)}{Q_m(x)}$, где $k < m$. Таким образом достаточно рассмотреть случай правильной и несократимой дроби $\frac{T_k(x)}{Q_m(x)}$. По лемме 2.6.1 дробь можно представить в виде

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_{11}}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{\widetilde{P}^{(11)}(x)}{(x-a_1)^{k_1-1}\cdot\widetilde{Q}^{(1)}(x)},$$

где $\widetilde{Q}^{(1)}(x) = (x-a_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_s)^{k_s}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}$. Далее по лемме 2.6.1 также можно найти число A_{12} и многочлен $\widetilde{P}^{(12)}(x)$ такие, что

$$\frac{\widetilde{P}^{(11)}(x)}{(x-a_1)^{k_1-1}\cdot\widetilde{Q}^{(1)}(x)} = \frac{A_{12}}{(x-a_1)^{k_1-1}} + \frac{\widetilde{P}^{(12)}(x)}{(x-a_1)^{k_1-2}\cdot\widetilde{Q}^{(1)}(x)}.$$

Продолжая аналогичные рассуждения получим

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_{11}}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^{k_1-1}} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)} + \frac{\widetilde{P}^{(1k_1)}(x)}{\widetilde{Q}^{(1)}(x)}.$$

Аналогично, для всех вещественных корней знаменателя a_i кратности k_i, $i = 1...s$, получим

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_{11}}{(x-a_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)} + \frac{A_{21}}{(x-a_2)^{k_2}} + \ldots + \frac{A_{2k_1}}{(x-a_2)} + \ldots +$$

$$\frac{A_{s1}}{(x-a_s)^{k_s}} + \ldots + \frac{A_{sk_s}}{(x-a_s)} + \frac{\widetilde{P}^{(sk_s)}(x)}{\widetilde{Q}^{(s)}(x)},$$

где $\widetilde{Q}^{(s)}(x) = (x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}$, при этом дробь $\frac{\widetilde{P}^{(sk_s)}(x)}{\widetilde{Q}^{(s)}(x)}$ – правильная. Далее используем лемму 2.6.2, получим

$$\frac{\widetilde{P}^{(sk_s)}(x)}{\widetilde{Q}^{(s)}(x)} = \frac{B_{11}x+C_{11}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \frac{\hat{P}^{(11)}(x)}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1-1}\cdot\hat{Q}^{(1)}(x)},$$

где $\hat{Q}^{(1)}(x) = (x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}$. Продолжая рассуждения таким же образом получим, что каждой t паре комплексно-сопряженных корней знаменателя кратности l_t, будут соответствовать l_t простейших дробей третьего и четвертого типа, и окончательно:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_{11}}{(x-a_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)} + \frac{A_{21}}{(x-a_2)^{k_2}} + \ldots + \frac{A_{2k_1}}{(x-a_2)} + \ldots +$$

$$\frac{A_{s1}}{(x-a_s)^{sk_s}} + \ldots + \frac{A_{sk_s}}{(x-a_s)} + \frac{B_{11}x+C_{11}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \ldots + \frac{B_{1l_1}x+C_{1l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)} +$$

$$\frac{B_{21}x+C_{21}}{(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}} + \ldots + \frac{B_{2l_2}x+C_{2l_2}}{(x^2+p_2x+q_2)} + \ldots + \frac{B_{t1}x+C_{t1}}{(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}} + \ldots + \frac{B_{tl_t}x+C_{tl_t}}{x^2+p_tx+q_t}.$$

□

2.7 Интегрирование простейших дробей

В данном пункте в общем виде показывается, как можно вычислить интеграл от простейших рациональных дробей. Для начала рассмотрим интеграл

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx,\ k \geqslant 1.$$

1. При $k=1$ имеем

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$$

2. При $k>1$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) = A\frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + C.$$

Теперь покажем, как вычисляются интегралы

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx,\ k \geqslant 1,\ p^2-4q<0.$$

3. Пусть $k=1$. Дополним знаменатель до полного квадрата,

$$x^2+px+q = x^2+2x\frac{p}{2}+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4} = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4}.$$

Так как выражение

$$\frac{4q-p^2}{4} > 0,$$

то его можно обозначить, как a^2. Кроме того, положим $t = x+\frac{p}{2}$, тогда $dt = dx$ и

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{A(t-\frac{p}{2})+B}{t^2+a^2}dt = \int \frac{At+(B-\frac{Ap}{2})}{t^2+a^2}dt =$$

$$A\int \frac{tdt}{t^2+a^2} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{A}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln|t^2+a^2| + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C =$$

$$= \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{B-\frac{Ap}{2}}{\sqrt{\frac{4q-p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{\frac{4q-p^2}{4}}} + C.$$

4. Пусть $k > 1$. Используя обозначения, введенные в пункте 3, получим

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx = A\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}.$$

Сначала рассмотрим первый интеграл:

$$\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{2}\frac{(t^2+a^2)^{1-k}}{1-k} + C.$$

Теперь рассмотрим второй интеграл, обозначив его I_k:

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2}{(t^2+a^2)^k}dt = \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2+a^2-t^2}{(t^2+a^2)^k}dt =$$

$$\frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^k}dt = \frac{1}{a^2}I_{k-1} - \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^k}dt.$$

Последний интеграл вычислим по частям

$$\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^k}dt = \left| \begin{array}{c} u = t \\ du = dt \\ dv = \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{2}\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k} \\ v = \frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}.$$

Тем самым,

$$I_k = \frac{1}{a^2}\left(I_{k-1}\left(1 + \frac{1}{2(1-k)}\right) - \frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}\right).$$

Таким образом, получена рекуррентная формула, выражающая I_k через I_{k-1}. Так как

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C,$$

то схема вычисления интеграла полностью изложена.

Следствие 2.7.1 *Интеграл от рациональной дроби может быть выражен через элементарные функции.*

2.8 Метод Остроградского

Вычисление интеграла от последнего типа дроби – задача трудоемкая. Полезно пользоваться следующей формулой (в случае, когда дробь под интегралом – правильная):

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx.$$

В этой формуле $Q_2(x)$ – многочлен, имеющий те же корни, что и $Q(x)$, но первой кратности. Многочлен $Q_1(x)$ – это частое от деления $Q(x)$ на $Q_2(x)$. Все написанные дроби являются правильными.

Доказательство. Остается в качестве упражнения □

2.9 Интегрирование иррациональностей

Пусть $R(x_1, x_2, ..., x_n)$ – рациональная функция относительно каждой из переменных $x_1, x_2, ..., x_n$.

1. Интегралы вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_2}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_n}\right) dx,$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $p_i \in \mathbb{Q}$. Подстановка

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m,$$

m – общий знаменатель $p_1, p_2, ..., p_n$.

2. Интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx, \ a \neq 0.$$

Функция под интегралом с помощью алгебраических преобразований приводится к виду:

$$R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) = \frac{R_1(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + R_2(x),$$

где $R_1(x), R_2(x)$ – рациональные дроби. С интегралом от рациональной дроби все ясно. Как вычислить интеграл от первой дроби?

Разложив дробь на простейшие, придем к дробям (и интегралам) трех типов. Первый тип:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$$

Этот интеграл может быть вычислен, как

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где коэффициенты ищутся после дифференцирования методом неопределенных коэффициентов.

Второй тип:

$$\int \frac{dx}{(x-p)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Этот интеграл сводится к интегралу предыдущего типа подстановкой $t = (x-p)^{-1}$.

Третий тип:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$$

Если $ax^2+bx+c = \alpha(x^2+px+q)$, то приходим к интегралу

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^{k+1/2}}dx = E\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^{k+1/2}}dx + F\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{k+1/2}}.$$

Второй интеграл вычисляется, используя подстановку Абеля:

$$t = \left(\sqrt{x^2+px+q}\right)'.$$

Иначе

$$x = \frac{\alpha t+\beta}{t+1}$$

и коэффициенты подбираются так, чтобы в квадратных трехчленах исчезли члены, содержащие t. Приходим к интегралу

$$\int \frac{P_{k-1}(x)}{(x^2+a)^k\sqrt{sx^2+r}}dx.$$

Раскладывая дробь на простейшие, имеем либо

$$\int \frac{x}{(x^2+a)^k\sqrt{sx^2+r}}dx,$$

либо

$$\int \frac{dx}{(x^2+a)^k\sqrt{sx^2+r}}.$$

Последний интеграл снова вычисляется подстановкой Абеля

$$t = \left(\sqrt{sx^2+r}\right)'.$$

3. Дифференциальный бином

$$\int x^m(ax^n+b)^p dx,$$

$a, b \in \mathbb{R}$, $m, n, p \in \mathbb{Q}$.

Если $p \in \mathbb{Z}$, то $x = t^N$, N – общий знаменатель m, n.

Если $(m+1)/n \in \mathbb{Z}$, то $ax^n + b = t^s$, s – знаменатель p.

Если $(m+1)/n + p \in \mathbb{Z}$, то $a + bx^{-n} = t^s$, s – знаменатель p.

В других случаях интеграл в элементарных функциях не выражается (см. ниже про “Неберущиеся интегралы”.)

2.10 Интегралы от тригонометрических функций

В этом разделе будут рассмотрены интегралы от некоторых классов тригонометрических функций.

Покажем, что интегралы вида

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

всегда сводятся к интегралам от рациональных функций подстановкой $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Для этого обратимся к формулам выражение синуса и косинуса через тангенс половинного угла, а тем самым представим их через t:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

А также

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2\operatorname{arctg} t, dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Таким образом исходный интеграл будет выражен через рациональные функции:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

2.11 “Неберущиеся” интегралы

Позже мы докажем, что непрерывная функция всегда имеет первообразную. Но эта первообразная не всегда выражается через элементарные функции.

Ниже приведены некоторые интегралы, не выражающиеся элементарными функциями:

1. $\int \frac{\sin x}{x} dx$;
2. $\int \frac{\cos x}{x} dx$;
3. $\int \frac{e^x}{x} dx$;
4. $\int e^{\pm x^2} dx$;
5. $\int \sin x^2 dx$;
6. $\int \cos x^2 dx$;
7. $\int \frac{dx}{\ln x}$;
8. $\int \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 x} dx$;
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-\alpha^2 \sin^2 x}}$.

3 Понятие интеграла Римана

3.1 Интегральные суммы и интеграл

Определение 3.1.1 *Говорят, что на отрезке $[a, b]$ введено разбиение τ, если введена система точек x_i, $i \in \{0, 1, ..., n\}$, удовлетворяющая условию*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b.$$

Замечание 3.1.1 *Обычно вводят следующие обозначения:*

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta_i = [x_{i-1}, x_i], \quad i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Определение 3.1.2 *Величина $\lambda(\tau) = \max\limits_{i \in \{1,2,...,n\}} \Delta x_i$ называется мелкостью (рангом) разбиения (дробления).*

Определение 3.1.3 *Говорят, что на отрезке $[a, b]$ введено разбиение (или оснащенное разбиение) (τ, ξ), если на нем введено разбиение τ и выбрана система точек ξ_i, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ таким образом, что $\xi_i \in \Delta_i$.*

Определение 3.1.4 *Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $f(x)$ и введено разбиение (τ, ξ). Величина*

$$\sigma_\tau(f, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

называется интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, отвечающей разбиению (τ, ξ).

Определение 3.1.5 *Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$. Говорят, что число I является интегралом Римана от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : \ \forall \tau : \ \lambda(\tau) < \delta, \ \forall \xi \Rightarrow |\sigma_\tau(f, \xi) - I| < \varepsilon.$$

При этом пишут

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Замечание 3.1.2 *Проще, но с некоторыми оговорками, последнее определение можно переписать в виде*

$$I = \lim_{\lambda(\tau)\to 0} \sigma_\tau(f,\xi).$$

Замечание 3.1.3 *Понятие предела интегральных сумм, вообще говоря, не является частным случаем понятия предела функции, так как интегральная сумма является функцией разбиения, а не его мелкости. В дальнейшем мы часто будем писать $\lambda(\tau) \to 0$, оставляя детальную расшифровку читателю.*

Замечание 3.1.4 *Аналогично определению предела функции по Гейне, сформулируем равносильное определение интеграла с помощью последовательностей:*
Число I называется интегралом Римана функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$, если для любой последовательности оснащенных разбиений (τ_n, ξ_n) отрезка $[a,b]$ такой, что мелкость разбиений $\lambda(\tau_n) \to 0$ при $n \to +\infty$ выполнено $\sigma_{\tau_n}(f,\xi_n) \to I$ при $n \to +\infty$.

Определение 3.1.6 *Функция $f(x)$, для которой существует интеграл Римана по отрезку $[a,b]$ называется интегрируемой по Риману на этом отрезке (или просто интегрируемой) и обозначается $f \in R[a,b]$.*

Пример 3.1.1 *Легко показать, что постоянная функция $y = C$ интегрируема по любому отрезку $[a,b]$, причем*

$$\int\limits_a^b C dx = C(b-a).$$

Действительно, вводя произвольное разбиение (τ,ξ) отрезка $[a,b]$,

$$\sigma_\tau(y,\xi) = \sum_{i=1}^n C\Delta x_i = C\sum_{i=1}^n \Delta x_i = C(b-a),$$

откуда и следует требуемое.

Пример 3.1.2 *Не всякая функция интегрируема. Оказывается, что функция Дирихле*

$$d(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

не интегрируема ни на каком отрезке. Для примера будем рассматривать отрезок $[0, 1]$ и пусть τ – разбиение этого отрезка.
Выберем в каждом отрезке Δ_i точку $\xi_i \in \mathbb{Q}$. Тогда

$$\sigma_\tau(d, \xi) = \sum_{i=1}^{n} d(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1.$$

Теперь выберем в каждом отрезке Δ_i точку $\xi_i \in \mathbb{I}$. Тогда

$$\sigma_\tau(d, \xi) = \sum_{i=1}^{n} d(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0\Delta x_i = 0.$$

Тем самым, при стремлении $\lambda(\tau) \to 0$, предел зависит от выбора средних точек ξ, что противоречит определению интеграла.

Для дальнейшего изложения удобно немного расширить определение интеграла Римана.

Определение 3.1.7 *По определению полагают*

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0,$$

$$\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx, \ a < b.$$

3.2 Суммы Дарбу и их свойства. Необходимое условие интегрируемости

Для изучения вопросов существования интеграла Римана, полезно рассмотреть две «крайние интегральные суммы», которые, на самом деле, интегральными являются не всегда.

Определение 3.2.1 *Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a,b]$ и τ – некоторое разбиение этого отрезка. Величины*

$$S_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \quad M_i = \sup_{x \in \Delta_i} f(x),$$

$$s_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \quad m_i = \inf_{x \in \Delta_i} f(x)$$

называют верхней и нижней суммами Дарбу для функции $f(x)$, отвечающими разбиению τ, соответственно.

Замечание 3.2.1 *Из определения верхней и нижней сумм Дарбу очевидно неравенство*

$$s_\tau(f) \leqslant \sigma_\tau(f,\xi) \leqslant S_\tau(f)$$

для любых оснащенных разбиений (τ,ξ) отрезка $[a,b]$.

Лемма 3.2.1 *Ограниченность f сверху (снизу) равносильна конечности верхней суммы $S_\tau(f)$ (нижней суммы $s_\tau(f)$).*

Доказательство. Очевидно. □

Замечание 3.2.2 *Если $f \in C[a,b]$, то, согласно теореме Вейерштрасса, $m_i = \min\limits_{x\in\Delta_i} f(x)$, $M_i = \max\limits_{x\in\Delta_i} f(x)$, а потому нижняя и верхняя суммы Дарбу для непрерывной функции являются ее наименьшей и наибольшими интегральными суммами, соответственно.*

В общем случае последне замечание, конечно, не выполняется, но справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.2.2 *Справедливы равенства*

$$S_\tau(f) = \sup_{\xi} \sigma_\tau(f,\xi), \quad s_\tau(f) = \inf_{\xi} \sigma_\tau(f,\xi).$$

Доказательство. Докажем первое равенство. То, что $S_\tau(f) \geqslant \sigma_\tau(f,\xi)$ уже отмечено в замечании 3.2.1. Пусть f ограничена сверху на $[a,b]$. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, по определению супремума,

$$\exists \xi_i \in \Delta_i : M_i - \frac{\varepsilon}{b-a} < f(\xi_i), \quad i = 1...n.$$

Домножим каждое неравенство на Δx_i и сложим по i, получим

$$\sum_{i=1}^{n}\left(M_i-\frac{\varepsilon}{b-a}\right)\Delta x_i<\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

или

$$\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i-\varepsilon<\sigma_\tau(f,\xi),$$

что и означает, что для любого $\varepsilon>0$ найдется набор точек ξ такой, что

$$S_\tau(f)-\varepsilon<\sigma_\tau(f,\xi),$$

и $S_\tau(f)\geqslant\sigma_\tau(f,\xi)$. Тем самым проверено, что

$$S_\tau(f)=\sup_{\xi}\sigma_\tau(f,\xi).$$

Если же f не ограничена сверху на $[a,b]$, то f не ограничена хотя бы на одном Δ_i. Пусть, для определенности, на Δ_1. Тогда существует последовательность ξ_1^n, что $f(\xi_1^n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$. Пусть $\xi_i\in\Delta_i$, $i\geqslant 2$. Тогда

$$\sup_{\xi}\sigma_\tau(f,\xi)\geqslant\lim_{n\to+\infty}\left(f(\xi^n)\Delta x_1+\sum_{i=2}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\right)=+\infty=S_\tau(f)$$

$\square$

Определение 3.2.2 *Пусть на отрезке $[a,b]$ введены разбиения τ_1 и τ_2. Говорят, что разбиение τ_1 является измельчением разбиения τ_2, если $\tau_2\subset\tau_1$.*

Лемма 3.2.3 *Пусть $\tau_2\subset\tau_1$, тогда*

$$S_{\tau_2}(f)\geqslant S_{\tau_1}(f),\quad s_{\tau_1}(f)\geqslant s_{\tau_2}(f),$$

то есть при измельчении разбиения верхние суммы Дарбу не увеличиваются, а нижние – не уменьшаются.

Доказательство. Достаточно доказать лемму для случая, когда измельчение τ_1 получается из τ_2 добавлением одной точки $\hat{x}\in(x_{k-1},x_k)$. Тогда

$$S_{\tau_2}(f)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i=\sum_{i=1,\ i\neq k}^{n}M_i\Delta x_i+M_k\Delta x_k.$$

Пусть
$$M_k^{'} = \sup_{x\in[x_{k-1},\hat{x}]} f(x), \quad M_k^{''} = \sup_{x\in[\hat{x},x_k]} f(x),$$
тогда
$$M_k \geqslant M_k^{'}, \quad M_k \geqslant M_k^{''}$$
и
$$M_k\Delta x_k = M_k(\hat{x}-x_{k-1}) + M_k(x_k-\hat{x}) \geqslant M_k^{'}(\hat{x}-x_{k-1}) + M_k^{''}(x_k-\hat{x}),$$
откуда
$$S_{\tau_2}(f) \geqslant \sum_{i=1,\ i\neq k}^{n} M_i\Delta x_i + M_k^{'}(\hat{x}-x_{k-1}) + M_k^{''}(x_k-\hat{x}) = S_{\tau_1}(f).$$
Второе неравенство доказывается аналогично. □

Лемма 3.2.4 *Пусть τ_1 и τ_2 – разбиения отрезка $[a,b]$, тогда*
$$s_{\tau_1}(f) \leqslant S_{\tau_2}(f),$$
то есть любая нижняя сумма Дарбу не превосходит любой верхней суммы Дарбу.

Доказательство. Разбиение $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ является разбиением отрезка $[a,b]$, причем $\tau_1 \subset \tau$, $\tau_2 \subset \tau$. По лемме 3.2.3 и замечанию 3.2.1,
$$s_{\tau_1}(f) \leqslant s_{\tau}(f) \leqslant S_{\tau}(f) \leqslant S_{\tau_2}(f),$$
что и доказывается утверждение. □

Определение 3.2.3 *Пусть функция задана и ограничена на $[a,b]$. Величины*
$$I^*(f) = \inf_{\tau} S_{\tau}(f), \quad I_*(f) = \sup_{\tau} s_{\tau}(f)$$
называются верхним и нижним интегралами Дарбу соответственно.

Замечание 3.2.3 *Для любых разбиений τ_1 и τ_2 отрезка $[a,b]$ выполнено неравенство*
$$s_{\tau_1}(f) \leqslant I_*(f) \leqslant I^*(f) \leqslant S_{\tau_2}(f).$$

Теорема 3.2.1 (Необходимое условие интегрируемости) *Пусть $f \in R[a,b]$, тогда f ограничена на $[a,b]$.*

Доказательство. Пусть f, например, не ограничена сверху. Тогда $S_{\tau}(f) = +\infty$ для любого разбиения τ. Поэтому для любого числа I и разбиения τ, найдется такое оснащенное разбиение (τ,ξ), что
$$\sigma_{\tau}(f,\xi) > I + 1.$$
Значит, никакое число I пределом интегральных сумм не является. □

3.3 Критерии Дарбу и Римана интегрируемости функции

Теорема 3.3.1 (Критерии интегрируемости) *Пусть f задана на $[a,b]$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1. $f \in R[a,b]$;
2. *Критерий Дарбу:*
$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \forall \tau:\ \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon;$$
3. *Критерий Римана:*
$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists \tau:\ S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon;$$
4. $$I_* = I^* \quad (= I).$$

Доказательство.

- Докажем 1 $\Rightarrow$ 2. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $\varepsilon > 0$. Тогда
$$\exists\ \delta > 0:\ \forall \tau:\ \lambda(\tau) < \delta\ \forall \xi \quad \Rightarrow \quad |\sigma_\tau(f,\xi) - I| < \frac{\varepsilon}{3},$$
откуда
$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_\tau(f,\xi) < I + \frac{\varepsilon}{3}.$$
Переходя в правой части неравенства к супремуму по ξ, а в левой части к инфимуму, получается
$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leqslant s_\tau(f) \leqslant S_\tau(f) \leqslant I + \frac{\varepsilon}{3},$$
откуда
$$S_\tau(f) - s_\tau(f) \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$
- Переход 2 $\Rightarrow$ 3 очевиден.
- Докажем 3 $\Rightarrow$ 4. Пусть $\varepsilon > 0$ и разбиение τ такое, что $S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$. Заметим, что тогда f ограничена. Так как (из определения и свойств интегралов Дарбу)
$$s_\tau \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S_\tau,$$
то $0 \leqslant I^* - I_* < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. Следовательно, $I_* = I^*$.

- И, наконец, докажем $4 \Rightarrow 1$. Пусть $I^* = I_* = I$. Тогда для $\varepsilon > 0$

$$I_* = \sup_{\tau} s_\tau \quad \Rightarrow \quad \exists \tau_1 : \; s_{\tau_1} > I_* - \varepsilon/4,$$

$$I^* = \inf_{\tau} S_\tau \quad \Rightarrow \quad \exists \tau_2 : \; S_{\tau_2} < I^* + \varepsilon/4.$$

Пусть теперь τ – произвольное разбиение мелкости $\lambda(\tau) < \delta$ (значение δ выберем позже). Дополним его точками разбиений τ_1 и τ_2 и рассмотрим разбиение $\widetilde{\tau} = \tau \cup \tau_1 \cup \tau_2$.

Пусть k – число точек в разбиении $\tau_1 \cup \tau_2$, $M = \sup_{[a,b]} f$, $m = \inf_{[a,b]} f$. Будем считать, что $m < M$ (иначе $f = \text{const} \in R[a,b]$).

Оценим наибольшее отклонение нижней суммы Дарбу разбиения τ по сравнению с его измельчением $\widetilde{\tau}$. Так как к τ добавились k точек, то значение слагаемых суммы s_τ могло измениться на k отрезках разбиения. На каждом таком отрезке слагаемое $m_i \Delta x_i$ увеличилось не более, чем на $\delta(M_i - m_i) \leqslant \delta(M - m)$. Значит, вся сумма s_τ могла вырасти не больше, чем на $\delta k(M - m)$:

$$s_{\widetilde{\tau}} - s_\tau \leqslant k\delta(M - m).$$

Аналогично, верхняя сумма S_τ при добавлении точек $\tau_1 \cup \tau_2$ может уменьшиться не более, чем на такую же величину:

$$S_\tau - S_{\widetilde{\tau}} \leqslant k\delta(M - m).$$

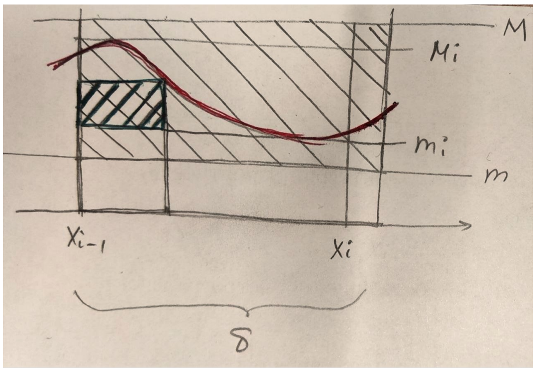

Рис. 1: Изменение нижней суммы s_τ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ при добавлении одной точки. Зеленая штриховка – реальное изменение, серая штриховка – максимально возможное изменение (с запасом)

Таким образом, имеем

$$s_\tau \geqslant s_{\widetilde{\tau}} - k\delta(M - m) \geqslant s_{\tau_1} - k\delta(M - m) > I - k\delta(M - m) - \varepsilon/4,$$

$$S_\tau \leqslant S_{\tilde{\tau}} + k\delta(M-m) \leqslant S_{\tau_2} + k\delta(M-m) < I + k\delta(M-m) + \varepsilon/4,$$

откуда

$$S_\tau - s_\tau < 2k\delta(M-m) + \varepsilon/2.$$

Теперь понятно, как надо выбирать δ. Возьмем

$$\delta = \min\left\{\lambda(\tau_1), \lambda(\tau_2), \frac{\varepsilon}{4k(M-m)}\right\}.$$

Тогда для любого τ мелкостью меньше δ имеем $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$.

Осталось заметить, что из неравенств

$$s_\tau \leqslant \sigma_\tau(\xi) \leqslant S_\tau, \quad s_\tau \leqslant I_* = I = I^* \leqslant S_\tau$$

следует для любого оснащения ξ: $|\sigma_\tau(\xi) - I| < S_\tau - s_\tau < \varepsilon$, что и означает $f \in R[a,b]$.

□

Определение 3.3.1 *Пусть функция $f(x)$ задана на множестве E. Колебанием функции на этом множестве называется величина*

$$\omega(f, E) = \sup_{x,y \in E} |f(x) - f(y)|.$$

Из определений верхней и нижней граней легко получить, что

$$\omega(f, E) = \sup_{x \in E} f(x) - \inf_{x \in E} f(x).$$

Замечание 3.3.1 *В критериях Дарбу и Римана разность $S_\tau - s_\tau$ можно заменять на*

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i,$$

где $\omega_i(f) = M_i - m_i$ – колебание функции f на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$.

3.4 Свойства интегрируемых функций

Ниже приведены основные свойства интегрируемых функций, используемые в дальнейшем.

Теорема 3.4.1 (Свойства интегрируемых функций) *Пусть $f(x), g(x) \in R[a,b]$, тогда*

1. $\alpha f(x) + \beta g(x) \in R[a, b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2. $f(x)g(x) \in R[a, b]$.

3. $|f(x)| \in R[a, b]$.

4. *Если* $|f(x)| \geqslant C > 0$ *на* $[a, b]$, *то* $\frac{1}{f(x)} \in R[a, b]$.

5. *Пусть* $[c, d] \subset [a, b]$, *тогда* $f(x) \in R[c, d]$.

Доказательство. 1. Так как

$$|\alpha f(x) + \beta g(x) - \alpha f(y) - \beta g(y)| \leqslant |\alpha||f(x) - f(y)| + |\beta||g(x) - g(y)| \leqslant$$
$$\leqslant |\alpha|\omega(f, E) + |\beta|\omega(g, E),$$

то, переходя к супремуму в левой части получается, что

$$\omega(\alpha f + \beta g, E) \leqslant |\alpha|\omega(f, E) + |\beta|\omega(g, E).$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $f \in R[a, b]$, то по следствию 3.3.1

$$\exists \delta_1 : \ \forall \tau : \ \lambda(\tau) < \delta_1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \omega(f, \Delta_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(|\alpha| + 1)}.$$

Аналогично, так как $g \in R[a, b]$, то по следствию 3.3.1

$$\exists \delta_2 : \ \forall \tau : \ \lambda(\tau) < \delta_2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \omega(g, \Delta_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(|\beta| + 1)}$$

Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, тогда для любого τ такого, что $\lambda(\tau) < \delta$ выполняется

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(\alpha f + \beta g)\Delta x_i \leqslant |\alpha| \sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i + |\beta| \sum_{i=1}^{n} \omega_i(g)\Delta x_i \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|\alpha|\varepsilon}{2(|\alpha| + 1)} + \frac{|\beta|\varepsilon}{2(|\beta| + 1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Значит, по критерию Дарбу, $\alpha f + \beta g \in R[a, b]$.
2. Так как $f, g \in R[a, b]$, то по необходимому условию они ограничены на $[a, b]$, то есть

$$\exists C : \ |f(x)| < C, \ |g(x)| < C, \ \forall x \in [a, b].$$

Кроме того, так как

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| = |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \leqslant$$

$$\leqslant |f(x)||g(x)-g(y)|+|g(y)||f(x)-f(y)| \leqslant C(\omega_i(f)+\omega_i(g)),$$

то, переходя к супремуму в левой части неравенства, получим, что

$$\omega_i(fg) \leqslant C(\omega_i(f)+\omega_i(g)).$$

Дальнейшие обоснования проводятся так же, как в пункте 1, и остаются в качестве упражнения.

3. Так как

$$||f(x)|-|f(y)|| \leqslant |f(x)-f(y)| \leqslant \omega_i(f),$$

то, переходя к супремуму в левой части неравенства, получается, что

$$\omega_i(|f|) \leqslant \omega_i(f).$$

Дальнейшие обоснования проводятся так же, как в пункте 1, и остаются в качестве упражнения.

4. Так как

$$\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(y)}\right| = \left|\frac{f(x)-f(y)}{f(x)f(y)}\right| \leqslant \frac{|f(x)-f(y)|}{C^2} \leqslant \frac{\omega_i(f)}{C^2},$$

то, переходя к супремуму в левой части неравенства, получается, что

$$\omega_i\left(\frac{1}{f}\right) \leqslant \frac{\omega_i(f)}{C^2}.$$

Дальнейшие обоснования проводятся так же, как в пункте 1, и остаются в качестве упражнения.

5. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $f \in R[a,b]$, то, согласно теореме Дарбу,

$$\exists \delta : \ \forall \tau : \ \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i < \varepsilon.$$

Пусть τ' – произвольное разбиение отрезка $[c,d]$ такое, что $\lambda(\tau') < \delta$. Дополним его до разбиения τ отрезка $[a,b]$ так, чтобы $\lambda(\tau) < \delta$, введя разбиения отрезков $[a,c]$ и $[d,b]$, но не добавляя новых точек в отрезок $[c,d]$. Тогда

$$\sum_{[c,d]} \omega_i(f)\Delta x_i \leqslant \sum_{[a,b]} \omega_i(f)\Delta x_i < \varepsilon,$$

так как все слагаемые, входящие в левую сумму, входят и в правую, и $\omega_i(f) \geqslant 0$. Тем самым показано, что $f \in R[c,d]$. $\square$

Для дальнейшего изложения потребуется еще одно важное свойство интегрируемых функций, которое сформулировано ниже.

Теорема 3.4.2 *Пусть* $f(x) \in R[a,c]$, $f(x) \in R[c,b]$, *тогда* $f(x) \in R[a,b]$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как функция $f \in R[a,c]$, то по критерию Римана
$$\exists \tau_1 : \sum_{[a,c]} \omega_i(f)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Так как $f \in R[c,b]$, то по критерию Римана
$$\exists \tau_2 : \sum_{[c,b]} \omega_i(f)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Разбиение $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ является разбиением отрезка $[a,b]$, причем
$$\sum_{[a,b]} \omega_i(f)\Delta x_i = \sum_{[c,b]} \omega_i(f)\Delta x_i + \sum_{[c,b]} \omega_i(f)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
Значит, по критерию Римана, $f \in R[a,b]$. □

3.5 Классы интегрируемых функций

Теорема 3.5.1 (Интегрируемость непрерывной функции) *Непрерывная на отрезке* $[a,b]$ *функция интегрируема на нем, т.е.*
$$(f \in C[a,b]) \Rightarrow (f \in R[a,b]).$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на нем по теореме Кантора, а значит
$$\exists\ \delta > 0 :\ \forall x_1, x_2 \in [a,b] :\ |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$
Пусть τ – разбиение отрезка $[a,b]$, причем $\lambda(\tau) < \delta$, тогда
$$\omega_i(f) < \frac{\varepsilon}{b-a}$$
и
$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon.$$
Значит, по критерию Римана, $f \in R[a,b]$. □

Теорема 3.5.2 (Конечное число точек разрыва) *Пусть* f *задана и ограничена на* $[a,b]$. *Пусть, кроме того, множество точек разрыва функции* f *конечно. Тогда* $f \in R[a,b]$.

Доказательство. Так как функция ограничена, то $|f| \leqslant C$. Тогда $\omega(f,[a,b]) \leqslant 2C$. Пусть $\varepsilon > 0$. Построим вокруг каждой точки разрыва интервал радиуса $\delta_1 = \varepsilon/(16Ck)$, где k – количество точек разрыва.

Дополнение к этому набору интервалов – это набор отрезков, на каждом из которых функция f непрерывна, а значит и равномерно непрерывна. Значит, так как число отрезков конечно, то существует δ_2, что если x', x'' из какого-то отрезка, причем $|x' - x''| < \delta_2$, то

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ и τ – разбиение отрезка $[a,b]$ такое, что $\lambda(\tau) < \delta$.

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i = \sum{}' \omega_i(f)\Delta x_i + \sum{}'' \omega_i(f)\Delta x_i,$$

где первая сумма идет по отрезкам, не имеющим общих точек с построенными интервалами, а вторая – по всем остальным. Поэтому

$$\sum{}' \omega_i(f)\Delta x_i \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Сумма длин оставшихся частей меньше, чем

$$(\delta + 2\delta_1 + \delta)k \leqslant \frac{\varepsilon}{4C},$$

а значит

$$\sum{}'' \omega_i(f)\Delta x_i \leqslant \frac{\varepsilon}{4C} 2C = \frac{\varepsilon}{2}.$$

В итоге получаем требуемое. □

Теорема 3.5.3 (Об интегрируемости монотонной функции)
Заданная и монотонная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ интегрируема на этом отрезке.

Доказательство. Интегрируемость постоянной функции уже известна. Пусть функция $f(x)$ не постоянна, не убывает и $\varepsilon > 0$. Тогда положив $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ и взяв разбиение τ отрезка $[a,b]$ такое, что $\lambda(\tau) < \delta$, выполняется

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \sum_{i=1}^{n} \omega_i(f) = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \varepsilon.$$

Значит, согласно критерию Римана, $f \in R[a,b]$. □

Замечание 3.5.1 *Монотонная функция может иметь счетное число точек разрыва. Например,*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 1 - \frac{1}{2^n}, & \frac{1}{2^n} \leqslant x < \frac{1}{2^{n-1}} \end{cases}.$$

3.6 Свойства интеграла Римана. Первая теорема о среднем.

Справедливо свойство линейности интеграла.

Теорема 3.6.1 (Линейность определенного интеграла) *Пусть* $f, g \in R[a, b]$, *тогда*

$$\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int\limits_a^b f(x) dx + \beta \int\limits_a^b g(x) dx.$$

Доказательство. То, что $\alpha f + \beta g \in R[a, b]$ известно из теоремы 3.4.1. Пусть $I_f = \int_a^b f(x)dx$, $I_g = \int_a^b g(x)dx$. Тогда для разбиения (τ, ξ) имеем

$$\Big|\sigma_\tau(\alpha f + \beta g, \xi) - \alpha I_f - \beta I_g\Big| \leqslant |\alpha| \Big|\sigma_\tau(f, \xi) - I_f\Big| + |\beta| \Big|\sigma_\tau(g, \xi) - I_g\Big|.$$

Пользуясь определением интеграла Римана для I_f и I_g и интегрируемостью функции $\alpha f + \beta g$, получаем требуемое. □

Теорема 3.6.2 (Аддитивность по промежутку интегрирования) *Пусть* $f \in R[a, b]$, $c \in [a, b]$, *тогда*

$$\int\limits_a^b f(x) dx = \int\limits_a^c f(x) dx + \int\limits_c^b f(x) dx$$

Доказательство. Интегрируемость функции f на промежутках $[a, c]$ и $[c, b]$ известна из теоремы 3.4.1. Пусть τ – разбиение отрезка $[a, b]$, содержащее точку c. Тогда оно порождает разбиения τ_1 отрезка $[a, c]$ и τ_2 отрезка $[c, b]$, причем $\lambda(\tau_1) \leqslant \lambda(\tau)$ и $\lambda(\tau_2) \leqslant \lambda(\tau)$. Так как

$$\sum_{[a,b]} f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{[a,c]} f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{[c,b]} f(\xi_i) \Delta x_i,$$

и при $\lambda(\tau) \to 0$ одновременно $\lambda(\tau_1) \to 0$ и $\lambda(\tau_2) \to 0$, то получаем требуемое. □

Следствие 3.6.3 *Пусть* $f \in R(\min(a,b,c), \max(a,b,c))$. *Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Доказательство. Доказательство моментально следует из предыдущей теоремы и соглашений о том, что

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0, \ \int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$$

$\square$

Следующее свойство интеграла часто называют его монотонностью.

Теорема 3.6.4 (Монотонность интеграла) *Пусть* $a \leqslant b$, $f, g \in R[a,b]$, *причем* $f(x) \leqslant g(x)$, $x \in [a,b]$, *тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Для интегральных сумм справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i.$$

Переходя к пределу при $\lambda(\tau) \to 0$, получается требуемое. $\square$

Следствие 3.6.5 *Пусть* $a \leqslant b$, $f \in R[a,b]$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, *тогда*

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a).$$

Замечание 3.6.1 *В теореме о монотонности интеграла из строгого неравенства* $f(x) < g(x)$ *на* $[a,b]$ *следует строгое неравенство между интегралами:* $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$. *Доказательство этого факта значительно сложнее (попытайтесь!)*

Теорема 3.6.6 (Об отделимости от нуля) *Пусть $a < b$, $f \in R[a,b]$, $f \geqslant 0$ и существует точка $x_0 \in [a,b]$ такая, что $f(x_0) > 0$, причем f непрерывна в x_0. Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)dx > 0$$

Доказательство. Так как $f(x_0) > 0$ и f непрерывна в точке x_0, то существует окрестность $U(x_0)$, что при $x \in U(x_0)$ выполняется $f(x) > f(x_0)/2$. Тогда, в силу монотонности интеграла,

$$\int\limits_a^b f(x)dx \geqslant \int\limits_{[a,b]\cap U(x_0)} f(x)dx > \frac{f(x_0)}{2} \int\limits_{[a,b]\cap U(x_0)} dx > 0.$$

□

Теорема 3.6.7 *Пусть $f \in R[a,b]$, тогда*

$$\left| \int\limits_a^b f(x)dx \right| \leqslant \left| \int\limits_a^b |f(x)|dx \right|.$$

Доказательство. Интегрируемость функции $|f|$ известна из теоремы 3.4.1. Так как

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \right| \leqslant \left| \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)|\Delta x_i \right|,$$

то переходя к пределам получается требуемое. □

Теорема 3.6.8 (Первая теорема о среднем) *Пусть $f, g \in R[a,b]$, $g(x)$ не меняет знак на $[a,b]$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, тогда*

$$\exists \mu \in [m, M] : \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Кроме того, если $f(x) \in C[a,b]$, то

$$\exists \xi \in [a,b] : \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Пусть $g(x) \geqslant 0$ на отрезке $[a, b]$, тогда

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x), \ x \in [a, b]$$

и по теореме 3.6.4

$$m\int\limits_a^b g(x)dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M\int\limits_a^b g(x)dx.$$

Если $\int\limits_a^b g(x)dx = 0$, то в качестве μ можно взять любое число из отрезка $[m, M]$, так как из неравенства выше следует, что

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Если же $\int\limits_a^b g(x)dx \neq 0$, то $\int\limits_a^b g(x)dx > 0$ и, поделив на этот интеграл, получается неравенство

$$m \leqslant \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx} \leqslant M.$$

Положив

$$\mu = \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx},$$

получается требуемое.
Если предположить, что $f(x) \in C[a, b]$, то по теореме Больцано-Коши для каждого $\mu \in [m, M]$ существует $\xi \in [a, b]$, что $f(\xi) = \mu$, что доказывает вторую часть утверждения. $\square$

Замечание 3.6.2 *Можно доказать, что в в условиях теоремы в предположении, что $f \in C[a, b]$, $\exists\ \xi \in (a, b)$:*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)dx.$$

Обязательно проделайте это!

3.7 Интеграл с переменным верхним пределом и его свойства

Определение 3.7.1 *Пусть* $f \in R[a,b]$ *и* $x \in [a,b]$. *Функция*

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$$

называется интегралом с переменным верхним пределом.

Ниже будут рассмотрены стандартные свойства функции $\Phi(x)$: ее непрерывность и дифференцируемость.

Теорема 3.7.1 (О непрерывности $\Phi(x)$)

$$\Phi(x) \in C[a,b].$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in [a,b]$, $x_0 + \Delta x \in [a,b]$. Так как функция $f \in R[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке, то есть

$$|f(x)| \leqslant C,\ x \in [a,b].$$

Тогда

$$|\Phi(x_0+\Delta x) - \Phi(x_0)| = \left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x)dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(x)|dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant C\left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} dx\right| = C|\Delta x|.$$

Значит, при $\Delta x \to 0$ выполняется $\Phi(x_0+\Delta x) \to \Phi(x_0)$, что и означает непрерывность функции $\Phi(x)$ в точке x_0. Так как x_0 – произвольная точка отрезка $[a,b]$, то утверждение доказано. □

Теорема 3.7.2 (О производной $\Phi(x)$) $\Phi(x)$ *дифференцируема в точках непрерывности функции* $f(x)$, *причем*

$$(\Phi(x))'(x_0) = f(x_0).$$

Доказательство. Пусть $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $x_0 + \Delta x \in [a, b]$.

$$\left|\frac{\Phi(x_0+\Delta x)-\Phi(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x)dx - f(x_0)\right| = \\ = \left|\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}(f(x)-f(x_0))dx\right|.$$

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда (в силу непрерывности функции $f(x)$)

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in [a, b] : \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Пусть $\Delta x < \delta$, тогда

$$\left|\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}(f(x)-f(x_0))dx\right| \leqslant \left|\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}|f(x)-f(x_0)|dx\right| < \varepsilon\left|\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}dx\right| = \varepsilon,$$

что и означает, что

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x_0+\Delta x)-\Phi(x_0)}{\Delta x} = \Phi'(x_0) = f(x_0).$$

□

Следствие 3.7.3 *Всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную, причем любая ее первообразная имеет вид*

$$F(x) = \int\limits_a^x f(x)dx + C = \Phi(x) + C.$$

3.8 Формула Ньютона-Лейбница

Ниже приведена основная формула интегрального исчисления.

Теорема 3.8.1 (Формула Ньютона-Лейбница) *Пусть $f \in C[a, b]$ и $F(x)$ – ее первообразная. Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Согласно следствию 3.7.3, любая первообразная непрерывной функции имеет вид

$$F(x) = \int\limits_a^x f(x)dx + C.$$

Так как

$$F(a) = \int\limits_a^a f(x)dx + C = C,$$

то $C = F(a)$. Положив в равенстве

$$F(x) = \int\limits_a^x f(x)dx + F(a)$$

$x = b$, получается

$$F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx + F(a) \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

□

Формула Ньютона-Лейбница справедлива и при предположении наличия первообразной у интегрируемой функции, а именно справедлива следующая теорема.

Теорема 3.8.2 (Усиленная формула Ньютона-Лейбница) *Пусть* $f \in R[a,b]$ *и существует* $F(x)$ *– некоторая первообразная данной функции на* $[a,b]$*, тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Положим $x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$, $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$ – разбиение отрезка $[a,b]$. Тогда

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \left(F(x_k) - F(x_{k-1})\right).$$

Согласно теореме Лагранжа, существует $\xi_k^n \in (x_{k-1}, x_k)$, что

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(\xi_k^n)(x_k - x_{k-1}),$$

а тогда

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^n)\Delta x_k$$

и мы получаем интегральную сумму для функции f по отрезку $[a, b]$ с оснащенным разбиением (τ, ξ). Так как $f \in R[a, b]$ и так как при $n \to +\infty$ выполняется $\lambda(\tau) \to 0$, то

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^n)\Delta x_k = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

С другой стороны,

$$F(b) - F(a) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^n)\Delta x_k,$$

а значит

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

□

Замечание 3.8.1 *Доказанная формула Ньютона-Лейбница справедлива для любой первообразной интегрируемой функции. Ясно, что значение интеграла не зависит от выбора этой первообразной, ведь если выбрана первообразная $F(x) + C$, то*

$$F(b) - F(a) = F(b) + C - F(a) - C.$$

Оказывается, формула Ньютона-Лейбница справедлива и для обобщенных первообразных.

Теорема 3.8.3 (Обобщение формулы Ньютона-Лейбница) *Пусть $f(x) \in R[a, b]$ и $F(x)$ – обобщенная первообразная функции $f(x)$ на $[a, b]$. Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1}$ – точки внутри (a, b), в которых нарушено условие $F'(x) = f(x)$. Добавим к ним $\alpha_0 = a$, $\alpha_k = b$. Так как интеграл – непрерывная функция по обоим пределам, то

$$\int\limits_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_p} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\alpha_{p-1}+\varepsilon}^{\alpha_p-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(F(\alpha_p-\varepsilon) - F(\alpha_{p-1}+\varepsilon)\right) =$$

$$= F(\alpha_p) - F(\alpha_{p-1}),$$

где последнее равенство справедливо ввиду того, что F – непрерывная функция. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_{p=1}^k \int\limits_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_p} f(x)dx = \sum_{p=1}^k \left(F(\alpha_p) - F(\alpha_{p-1})\right) =$$

$$= F(\alpha_k) - F(\alpha_0) = F(b) - F(a)$$

□

Замечание 3.8.2 *Не каждая интегрируемая функция имеет первообразную, и не каждая функция, имеющая первообразную, интегрируема.*

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x = 0\end{cases}$$

дифференцируема, а значит имеет первообразную, но $f'\notin R[-1,1]$ (в силу неограниченности).

С другой стороны, функция $f(x) = \operatorname{sign} x \in R[-1,1]$, но не имеет первообразной на этом промежутке. Она имеет обобщенную первообразную.

Обязательно придумайте пример интегрируемой функции, не имеющей даже обобщенной первообразной.

Вывод: интегрируемость и наличие первообразной - вещи разные.

3.9 Формулы замены переменной и интегрирования по частям

Теорема 3.9.1 (Формула интегрирования по частям) *Пусть u, v дифференцируемы на $[a,b]$, причем $u', v'\in R[a,b]$, тогда*

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu.$$

Доказательство. Согласно теоремам о действиях с интегрируемыми функциями, $uv' \in R[a,b]$ и $u'v \in R[a,b]$. Кроме того, $(uv)' = u'v + uv' \in R[a,b]$, а значит, по усиленной формуле Ньютона-Лейбница,

$$\int\limits_a^b u'vdx + \int\limits_a^b uv'dx = \int\limits_a^b (u'v + uv')\,dx = \int\limits_a^b (uv)'dx = uv\Big|_a^b.$$

□

Пример 3.9.1 *Вычислить интеграл*

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n xdx.$$

Пусть

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n xdx.$$

Ясно, что $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$. *Пусть* $n > 1$, *тогда*

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n xdx = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-1}(x)d(-\cos(x)) = (n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\cos^2 xdx =$$

$$= (n-1)(I_{n-2} - I_n),$$

откуда

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Ясно, что тогда

$$I_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}, & n = 2k \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n = 2k-1 \end{cases}$$

Теорема 3.9.2 (Первый вариант формулы замены переменной) *Пусть* $f(x) \in C[a,b]$, $x = \varphi(t) : [\alpha,\beta] \to [a,b]$, $\varphi(t)$ *дифференцируема и* $\varphi'(t) \in R[\alpha,\beta]$, *тогда*

$$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Доказательство. Ясно, что интеграл от правой функции определен, так как $f(\varphi(t)) \in C[\alpha, \beta] \Rightarrow f(\varphi(t)) \in R[\alpha, \beta]$. По свойствам интегрируемых функций, $f(\varphi(t))\varphi'(t) \in R[\alpha, \beta]$, причем $F(\varphi(t))$ – первообразная этой функции, если $F(x)$ – первообразная $f(x)$. Тогда

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx.$$

□

Пример 3.9.2 *Вычислить интеграл ($a > 0$)*

$$\int\limits_{0}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}dx.$$

Из геометрических соображений ответ $\frac{\pi}{4}a^2$. Проверим это. Сделаем замену $x = a\sin t$. Тогда

$$\int\limits_{0}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}dx = \int\limits_{0}^{\pi/2} a^2\cos^2 tdt = a^2\int\limits_{0}^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt = \frac{\pi}{4}a^2.$$

Часто теорему о замене переменной дают и в более общей форме.

Теорема 3.9.3 (Второй вариант формулы замены переменной) *Пусть $\varphi(t)$ дифференцируема и строго монотонна на $[\alpha, \beta]$, а $f \in R[\varphi(\alpha), \varphi(\beta)]$. Тогда*

$$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Ясно, что здесь от функции φ больше требований, а от f – меньше. Примем эту теорему без доказательства.

3.10 Интегралы от четной, нечетной и периодической функций

Теорема 3.10.1 *Пусть $f \in R[0, a]$ и является четной. Тогда*

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx.$$

Доказательство. Ясно, что $f \in R[-a, a]$, так как $f(-x) = f(x)$.

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx.$$

В первом интеграле можно сделать замену $t = -x$, $dt = -dx$, откуда

$$\int\limits_{-a}^{0} f(x)dx = -\int\limits_{a}^{0} f(-t)dt = \int\limits_{0}^{a} f(t)dt,$$

значит

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{0}^{a} f(t)dt + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx.$$

□

Теорема 3.10.2 *Пусть $f \in R[0, a]$ и является нечетной. Тогда*

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.10.1 и предлагается в качестве упражнения. □

Теорема 3.10.3 *Пусть $f \in R[0, T]$ и является периодической с периодом T, тогда*

$$\int\limits_{a}^{a+T} f(x)dx = \int\limits_{0}^{T} f(x)dx, \ a \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Воспользуемся аддитивностью интеграла:

$$\int\limits_{a}^{a+T} f(x)dx = \int\limits_{a}^{0} + \int\limits_{0}^{T} + \int\limits_{T}^{a+T} =$$

и в последнем интеграле сделаем замену $x = t + T$

$$= \int\limits_{a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{T} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(t+T)dt =$$

(периодичность f: $f(t+T) = f(t)$)

$$= \int\limits_a^0 f(x)dx + \int\limits_0^T f(x)dx + \int\limits_0^a f(t)dt = \int\limits_0^T f(x)dx.$$

$\square$

3.11 Формула Валлиса

Теорема 3.11.1 (Формула Валлиса)

$$\pi = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$$

Доказательство. Ясно, что при $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $n \in \mathbb{N}$, выполняется цепочка неравенств

$$\sin^{2n+1}(x) < \sin^{2n}(x) < \sin^{2n-1}(x).$$

Обозначив

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x dx,$$

получим

$$I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1} \Leftrightarrow \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

или

$$\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 < \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2.$$

Пусть

$$x_n = \frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2,$$

тогда

$$\pi < x_n < \frac{2n+1}{2n}\pi,$$

откуда и получается требуемое. $\square$

4 Приложения определенного интеграла

Рассмотрим применение интеграла Римана для вычисления площади фигуры и длины кривой.

Понятие площади некоторых геометрических фигур известно из школьного курса геометрии. Определение площади для более широкого класса множеств и критерии квадрируемости (то есть существование площади) мы дадим позже (с помощью теории меры).

4.1 Площадь в декартовых координатах

Определение 4.1.1 *Пусть* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \geqslant 0$. *Множество*

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b],\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

называется подграфиком функции f. *Если функция* f *непрерывна, то подграфик называют криволинейной трапецией.*

Для функции $f \in R[a, b]$ и $f \geqslant 0$ на $[a, b]$ из геометрического смысла определения интеграла Римана имеем выражение для площади подграфика:

$$S(G_f) = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Для функции $f \in R[a, b]$ и $f \leqslant 0$ на $[a, b]$ площадь надграфика будет равна

$$S(G_f) = -\int\limits_a^b f(x)dx,$$

где $G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b],\ f(x) \leqslant y \leqslant 0\}$.

Теорема 4.1.1 *Пусть* $f, g \in R[a, b]$, $f \leqslant g$, *тогда площадь фигуры* $S(G_{f,g})$

$$G_{f,g} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b],\ f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}$$

вычисляется по формуле

$$S(G_{f,g}) = \int\limits_a^b (g - f)dx.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно перенести фигуру выше оси абсцисс, добавив к f и g такую постоянную c, чтобы $f + c \geqslant 0$. Тогда

$$S(G_{f,g}) = S(G_{f+c,g+c}) = S(G_{g+c}) - S(G_{f+c}) =$$

$$= \int_a^b (g+c)dx - \int_a^b (f+c)dx = \int_a^b (g-f)dx.$$

□

4.2 Площадь в полярных координатах

Полярные координаты (r, φ), согласованные с декартовыми координатами (x, y) задаются равенствами

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi; \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Пусть точка M имеет декартовы координаты (x, y). Тогда её полярные координаты (r, φ) имеют следующий смысл: r – расстояние от точки M до полюса O, φ – угол, образованный радиус вектором OM и полярной осью OX. При этом

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Аналогом криволинейной трапеции будет криволинейный сектор.

Определение 4.2.1 *Пусть* $0 < \beta - \alpha \leqslant 2\pi$, $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, $f \geqslant 0$. *Множество*

$$\widetilde{G_f} = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 : \ \varphi \in [\alpha, \beta], \ 0 \leqslant r \leqslant f(\varphi)\}$$

называется подграфиком функции f в полярных координатах. Если функция f непрерывна, то подграфик называется криволинейным сектором.

Предположим, что $f \in R[\alpha, \beta]$ и подграфик данной функции в полярных координатах имеет площадь. Пусть $\tau = \{\varphi_k\}_{k=0}^n$ – разбиение $[\alpha, \beta]$, $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$,

$$m_i = \inf_{\varphi \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]} f(\varphi), \ M_i = \sup_{\varphi \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]} f(\varphi).$$

Воспользовавшись тем, что площадь сектора радиусом r и углом φ равна $\frac{1}{2}r^2\varphi$, составим суммы

$$s_\tau = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n m_i^2 \Delta\varphi_i, \ S_\tau = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n M_i^2 \Delta\varphi_i.$$

Геометрически очевидно, что $s_\tau \leqslant S(\widetilde{G_f}) \leqslant S_\tau$.

Кроме того, s_τ и S_τ – суммы Дарбу функции $\frac{1}{2}f^2(\varphi)$. Так как эта функция интегрируема, то при $\lambda(\tau) \to 0$ выполняется $S_\tau - s_\tau \to 0$, а значит

$$S(\widetilde{G_f}) = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} f^2 d\varphi.$$

4.3 Понятие длины кривой и ее вычисление

Определение 4.3.1 *Путем в пространстве* $\mathbb{R}^n$ *называется отображение* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, *все координатные функции которого непрерывны на* $[a, b]$.

Замечание 4.3.1 *Путь* γ *задается* n *непрерывными функциями* $x_i(t) : [a, b] \to \mathbb{R}$, $i = 1...n$,

$$\gamma(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)).$$

Определение 4.3.2 *Точка* $\gamma(a)$ *называется началом пути, а точка* $\gamma(b)$ *концом пути.*

Определение 4.3.3 *Если* $\gamma(a) = \gamma(b)$, *то путь называется замкнутым.*

Определение 4.3.4 *Если равенство* $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ *возможно лишь при* $t_1 = t_2$ *или* $t_1, t_2 \in \{a, b\}$, *то путь называется простым (или несамопересекающимся).*

Определение 4.3.5 *Множество* $\gamma([a, b])$, *то есть образ отрезка* $[a, b]$, *называется носителем пути.*

Замечание 4.3.2 *Разные пути могут иметь один носитель. Например, верхняя полуокружность* $x^2 + y^2 = 1,\ y \geqslant 0$ *является носителем как пути* $\gamma_1(t) = (t, \sqrt{1 - t^2}),\ t \in [-1, 1]$, *так и пути* $\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t),\ t \in [0, \pi]$.

Определение 4.3.6 *Говорят, что* $\gamma(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ – *путь гладкости* m, *если* $x_i(t) \in C^m[a, b]$, $i = 1...n$. *Если* $m = 1$, *то путь часто называют просто гладким.*

Определение 4.3.7 *Если отрезок* $[a, b]$ *можно разбить точками* $a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b$ *так, что сужение пути* $\gamma(t)$ *на каждый отрезок* $[t_{i-1}, t_i]$ – *гладкий путь, то путь называется кусочно-гладким.*

Определение 4.3.8 *Два пути* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *и* $\widetilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ *называются эквивалентными, если существует непрерывная строго возрастающая биекция* $u : [a, b] \to [\alpha, \beta]$, *что*

$$\gamma(t) = \widetilde{\gamma}(u(t)).$$

Заметим, что введенное отношение – отношение эквивалентности.

Определение 4.3.9 *Класс эквивалентных путей называют кривой и обозначают* $\{\gamma\}$, *а каждый представитель класса* γ *– параметризация кривой.*

Определение 4.3.10 $\{\gamma^-\}$ *– кривая с противоположной ориентацией, если*

$$\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t),\ t \in [a, b]$$

Носители эквивалентных путей совпадают и носители противоположных путей совпадают.

Определение 4.3.11 *Кривая называется гладкой (m-гладкой, кусочно-гладкой), если у нее существует гладкая (m-гладкая, кусочно-гладкая) параметризация.*

4.3.1 Вычисление длины пути

Дадим определение длины пути. Определение должно удовлетворять нескольким естественным требованиям. Во-первых, длина пути должна быть аддитивной. Во-вторых, длина пути, соединяющего точки A и B, должна быть не меньше длины отрезка AB.
Для простоты и геометрической наглядности, пусть $\gamma(t) = (x(t), y(t)) : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ – путь, τ – разбиение отрезка $[a, b]$ точками $t_0, t_1, ..., t_n$.

Определение 4.3.12 *Множество отрезков, соединяющих точки* $\gamma(t_k)$ *и* $\gamma(t_{k-1})$, *называется ломаной, вписанной в путь* γ, *отвечающей разбиению* τ. *Эту ломаную будем обозначать* P_τ.

Длина отрезка, соединяющего точки $\gamma(t_k)$ и $\gamma(t_{k-1})$, вычисляется по теореме Пифагора и равна, очевидно,

$$\sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}.$$

Тогда длина $|P_\tau|$ ломаной P_τ вычисляется по формуле

$$|P_\tau| = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}.$$

Определение 4.3.13 *Длиной пути γ называется величина*

$$l_\gamma = \sup_\tau |P_\tau|.$$

Если $l_\gamma < +\infty$, то путь γ называется спрямляемым.

Лемма 4.3.1 (О равенстве длин эквивалентных путей) *Длины эквивалентных путей равны.*

Доказательство. Пусть $\gamma(t) = \widetilde{\gamma}(u(t))$, $u(t) : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ – возрастающая биекция. Пусть $\tau = \{t_i\}_{i=0}^k$ – дробление $[a, b]$, тогда $\widetilde{t}_k = u(t_k)$ – дробление $[\alpha, \beta]$.

$$P_\gamma = \sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |\widetilde{\gamma}(\widetilde{t}_k) - \widetilde{\gamma}(\widetilde{t}_{k-1})| = P_{\widetilde{\gamma}} < l_{\widetilde{\gamma}}.$$

Значит, $l_\gamma \leqslant l_{\widetilde{\gamma}}$. Меняя их местами, придем к требуемому. □

Аналогично можно показать, что длины противоположных путей равны. Теперь является корректным определение длины кривой.

Определение 4.3.14 *Длиной кривой называют длину любой ее параметризации.*

Покажем, что путь аддитивен, а именно справедлива следующая лемма.

Лемма 4.3.2 (Аддитивность длины пути) *Пусть $\gamma(t) : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $c \in (a, b)$, $\gamma^1(t) : [a, c] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma^2(t) : [c, b] \to \mathbb{R}^2$. Путь $\gamma(t)$ спрямляем тогда и только тогда, когда спрямляемы пути $\gamma^1(t)$ и $\gamma^2(t)$, причем*

$$l_\gamma = l_{\gamma^1} + l_{\gamma^2}.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть τ – разбиение $[a, b]$, содержащее точку c. Ясно, что $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$, где τ_1 – разбиение $[a, c]$ и τ_2 – разбиение $[c, b]$. Тогда ломаная P_τ – объединение ломаных P_{τ_1} и P_{τ_2}, причем

$$|P_{\tau_1}| + |P_{\tau_2}| = |P_\tau| \leqslant l_\gamma.$$

Отсюда сразу следует, что каждый из путей γ^1 и γ^2 спрямляемы. Переходя в предыдущем неравенстве сначала к супремуму по τ_1, а потом по τ_2, получим

$$l_{\gamma^1} + l_{\gamma^2} \leqslant l_\gamma.$$

Докажем достаточность и обратное неравенство. Пусть τ – разбиение отрезка $[a, b]$. Если оно не содержит точку c, то добавим ее, получив разбиение $\tau' =$

$\tau_1 \cup \tau_2$, где τ_1 – разбиение $[a, c]$ и τ_2 – разбиение $[c, b]$. Пусть $c \in (t_{i-1}, t_i)$. Длина ломаной, отвечающей разбиению τ', могла только увеличиться, так как согласно неравенству треугольника,

$$\sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} \leqslant$$

$$\sqrt{(x(c) - x(t_{i-1}))^2 + (y(c) - y(t_{i-1}))^2} + \sqrt{(x(t_i) - x(c))^2 + (y(t_i) - y(c))^2}.$$

Значит,

$$|P_\tau| \leqslant |P_{\tau'}| = |P_{\tau_1}| + |P_{\tau_2}| \leqslant l_{\gamma^1} + l_{\gamma^2}$$

и, тем самым, кривая γ спрямляема. Переходя к супремуму в левой части неравенства по τ, получим

$$l_\gamma \leqslant l_{\gamma^1} + l_{\gamma^2}.$$

Объединяя это неравенство и последнее в пункте необходимости, заключаем

$$l_\gamma = l_{\gamma^1} + l_{\gamma^2},$$

и теорема полностью доказана. $\square$

Теорема 4.3.1 (Длина гладкого пути) *Пусть путь $\gamma \in C^1[a, b]$, тогда он спрямляем и его длина*

$$l_\gamma = \int\limits_a^b |\gamma'| dt.$$

Доказательство. 1. докажем спрямляемость. Пусть $\tau = \{t_i\}$ – разбиение отрезка $[a, b]$,

$$|P_\tau| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}.$$

По теореме Лагранжа, найдутся точки $\xi_i, \eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ такие, что

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\xi_i)\Delta t_i,\ y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\eta_i)\Delta t_i,\ \Delta t_i = t_i - t_{i-1},$$

откуда

$$|P_\tau| = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\eta_i)} \cdot \Delta t_i.$$

Пусть

$$M_x = \max_{t \in [a,b]} |x'(t)|,\ M_y = \max_{t \in [a,b]} |y'(t)|, m_x = \min_{t \in [a,b]} |x'(t)|,\ m_y = \min_{t \in [a,b]} |y'(t)|,$$

тогда
$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{m_x^2+m_y^2}\cdot\Delta t_i\leqslant|P_\tau|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\sqrt{M_x^2+M_y^2}\cdot\Delta t_i,$$
откуда
$$\sqrt{m_x^2+m_y^2}\cdot(b-a)\leqslant|P\tau|\leqslant\sqrt{M_x^2+M_y^2}\cdot(b-a).$$
Переходя к супремуму по τ, имеем
$$\sqrt{m_x^2+m_y^2}\cdot(b-a)\leqslant l_\gamma\leqslant\sqrt{M_x^2+M_y^2}\cdot(b-a).$$
и правое неравенство дает возможность заключить, что путь спрямляем.

2. Рассмотрим функцию $l_\gamma(t)$ для $t\in[a,b]$, показывающую длину участка пути γ от точки $\gamma(a)$ до точки $\gamma(t)$.

Пусть $\Delta t>0$ и $t_0,\ t_0+\Delta t\in[a,b]$. Согласно последнему неравенству предыдущей теоремы, сохраняя те же обозначения для отрезка $[t_0,t_0+\Delta t]$ выполнено
$$\sqrt{m_x^2+m_y^2}\cdot\Delta t\leqslant l_\gamma(t_0+\Delta t)-l_\gamma(t_0)\leqslant\sqrt{M_x^2+M_y^2}\cdot\Delta t.$$
Деля на $\Delta t>0$, получим
$$\sqrt{m_x^2+m_y^2}\leqslant\frac{l_\gamma(t_0+\Delta t)-l_\gamma(t_0)}{\Delta t}\leqslant\sqrt{M_x^2+M_y^2}.$$
Так как $M_x=\max\limits_{t\in[t_0,t_0+\Delta t]}|x'(t)|$, и функция $x'(t)$ непрерывна, то
$$\lim_{\Delta t\to0+0}M_x=x'(t_0).$$
Аналогично,
$$\lim_{\Delta t\to0+0}m_x=x'(t_0),\ \lim_{\Delta t\to0+0}M_y=y'(t_0),\ \lim_{\Delta t\to0+0}m_y=y'(t_0).$$
Значит,
$$\sqrt{x'^2(t_0)+y'^2(t_0)}\leqslant\lim_{\Delta t\to0+0}\frac{l_\gamma(t_0+\Delta t)-l_\gamma(t_0)}{\Delta t}\leqslant\sqrt{x'^2(t_0)+y'^2(t_0)}.$$
и $l'_{\gamma+}(t_0)=\sqrt{x'^2(t_0)+y'^2(t_0)}$. Аналогично рассматривается случай $\Delta t<0$, а значит, в силу произвольности t_0,
$$l'_\gamma(t)=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}.$$

3. Из полученного выражения для $l'_\gamma(t)$ и $l_\gamma(a)=0$ получаем по формуле Ньютона–Лейбница требуемое. □

Замечание 4.3.3 *Все вышеизложенное относится не только к путям в $\mathbb{R}^2$, но и к путям в $\mathbb{R}^n$ для произвольных $n \in \mathbb{N}$, доказательства сохраняются.*

Замечание 4.3.4 *Формула длины пути верна и для кусочно-гладких кривых.*

Следствие 4.3.2 *Для длины кривой $\{\gamma\}$, заданной в полярных координатах функцией $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$ верно равенство*

$$l_\gamma = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi.$$

5 Несобственный интеграл

5.1 Понятие несобственного интеграла

Определение 5.1.1 *Говорят, что функция f локально интегрируема на промежутке E, и пишут $f \in R_{loc}(E)$, если $f \in R[a, b]$ для любого $[a, b] \subset E$.*

Иными словами, локально интегрируемая функция интегрируема на любом отрезке, содержащемся в E.

Определение 5.1.2 *Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$. Тогда символ*

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

называется несобственным интегралом от функции f по множеству $[a, b)$. Предел

$$\lim_{\omega \to b-} \int\limits_a^\omega f(x)dx,$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется значением несобственного интеграла. Если этот предел существует в $\mathbb{R}$, то несобственный интеграл называется сходящимся. Иначе – расходящимся.

Пример 5.1.1 *Интеграл* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ *сходится, когда* $\alpha > 1$, *и расходится иначе. Более точно,*

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1 \\ +\infty, & \alpha \leqslant 1. \end{cases}$$

Аналогично, $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^\alpha}$ *сходится, когда* $\alpha < 1$, *и расходится иначе. Более точно,*

$$\int\limits_0^{1} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ +\infty, & \alpha \geqslant 1. \end{cases}$$

5.2 Свойства несобственного интеграла

Свойства несобственного интеграла во многом аналогичны свойствам классического интеграла Римана.

Теорема 5.2.1 (О линейности несобственного интеграла) *Пусть* $f, g \in R_{loc}[a, b)$. *Если существуют в* $\bar{\mathbb{R}}$ $\int\limits_a^b f(x)dx$ *и* $\int\limits_a^b g(x)dx$, *то*

$$\int\limits_a^b (f+g)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx,$$

если соответствующая операция определена в $\bar{\mathbb{R}}$.

Доказательство. Для доказательства достаточно перейти к пределу при $\omega \to b-$ в равенстве

$$\int\limits_a^\omega (f+g)dx = \int\limits_a^\omega f(x)dx + \int\limits_a^\omega g(x)dx.$$

$\square$

Замечание 5.2.1 *Из теоремы следует, что сумма двух сходящихся интегралов сходится. Верно и такое утверждение. Если* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *сходится, а* $\int\limits_a^b g(x)dx$ *расходится, то* $\int\limits_a^b (f(x)+g(x))dx$ *тоже расходится. При этом если оба интеграла расходятся, то сумма может как сходиться, так и расходиться (Приведите соответствующие примеры).*

Теорема 5.2.2 (Монотонность несобственного интеграла) *Пусть* $f, g \in R_{loc}[a, b)$, $f(x) \leqslant g(x)$ *на* $[a, b)$ *и существуют в* $\bar{\mathbb{R}}$ *оба интеграла* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *и* $\int\limits_a^b g(x)dx$. *Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно перейти к пределу при $\omega \to b-$ в неравенстве

$$\int\limits_a^\omega f(x)dx \leqslant \int\limits_a^\omega g(x)dx.$$

□

Теорема 5.2.3 (Об аддитивности по промежутку) *Пусть* $f \in R_{loc}[a, b)$. *Тогда для любого* $c \in (a, b)$ *справедливо равенство*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx,$$

причем интегралы

$$\int\limits_a^b f(x)dx \quad \text{и} \quad \int\limits_c^b f(x)dx$$

существуют в $\bar{\mathbb{R}}$ *или нет одновременно.*

Доказательство. Для доказательства достаточно перейти к пределу при $\omega \to b-$ в равенстве

$$\int\limits_a^\omega f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^\omega f(x)dx.$$

□

Замечание 5.2.2 *Из теоремы следует, что при любом* $c \in (a, b)$ *сходимость интеграла* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *равносильна сходимости интеграла* $\int\limits_c^b f(x)dx$. *Последний интеграл часто называют* ***хвостом*** *или* ***остатком*** *первого интеграла.*

Теорема 5.2.4 (Формула интегрирования по частям) *Пусть u, v дифференцируемы на $[a, b)$ и $u', v' \in R_{loc}[a, b)$. Тогда*

$$\int\limits_a^b uv'dx = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vu'dx,$$

причем последнее равенство справедливо тогда и только тогда, когда существует хотя бы два предела из трех.

Здесь используется короткая запись:

$$uv\Big|_a^b = \lim_{\omega \to b-0} uv\Big|_a^\omega = \lim_{\omega \to b-0} u(\omega)v(\omega) - u(a)v(a).$$

Доказательство. Для доказательства достаточно перейти к пределу при $\omega \to b-$ в равенстве

$$\int\limits_a^w uv'dx = uv\Big|_a^w - \int\limits_a^w vu'dx.$$

$\square$

Теорема 5.2.5 (Формула замены переменной) *Пусть $x = \varphi(t) : [\alpha, \beta) \to [a, b)$ дифференцируема на $[\alpha, \beta)$, причем $\varphi'(t) \in R_{loc}[\alpha, \beta)$, $f \in C[a, b)$ и существует $\varphi(\beta-) \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда*

$$I_1 = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(x)dx = I_2,$$

причем если существует один интеграл (в $\overline{\mathbb{R}}$), то существует и другой.

Доказательство. 1) Пусть существует $I_2 \in \overline{\mathbb{R}}$. Для $\omega \in (\alpha, \beta)$, пользуясь формулой замены переменной для определенного (собственного) интеграла, имеем

$$I_1 = \lim_{\omega \to \beta-} \int\limits_\alpha^\omega f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \lim_{\omega \to \beta-} \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(\omega)} f(x)dx = I_2.$$

2) Пусть теперь существует $I_1 \in \overline{\mathbb{R}}$. Докажем существование интеграла I_2 пользуясь определением предела по Гейне.

Если $\varphi(\beta-) \in [a, b)$, то интеграл существует, как собственный. Равенство же справедливо из доказанного первого пункта.

Пусть теперь $\varphi(\beta-) = b$. Возьмем произвольную последовательность $x_n \in [a, b)$, причем $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$. Будем считать, что $x_n \in [\varphi(\alpha), b)$. Тогда, по теореме Больцано–Коши, найдутся точки $\gamma_n \in [\alpha, \beta)$ такие, что $\varphi(\gamma_n) = x_n$.

Покажем, что $\gamma_n \to \beta-$. От противного, пусть выполнено отрицание определения предела:

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall n_0 \, \exists n \geqslant n_0 : \ \gamma_n \in [\alpha, \beta - \varepsilon].$$

Тогда для указанных ε и n имеем $\varphi(\gamma_n) \leqslant \max\limits_{[\alpha,\gamma]} \varphi = b' < b$, что противоречит тому, что $\varphi(\gamma_n) = x_n \to b - 0$.

Значит $\gamma_n \to \beta-$ и

$$I_2 = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{x_n} f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\alpha}^{\gamma_n} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = I_1.$$

□

Так как несобственный интеграл – это предел, то, как обычно, справедлив критерий Коши.

Теорема 5.2.6 (Критерий Коши сходимости интеграла) *Пусть* $f \in R_{loc}[a, b)$. *Для сходимости интеграла* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \Delta \in (a, b) : \ \forall \delta_1, \delta_2 \in (\Delta, b) \Rightarrow \left| \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Обозначим

$$F(\omega) = \int\limits_a^{\omega} f(x)dx.$$

Согласно определению, сходимость интеграла равносильна существованию предела функции $F(\omega)$ при $\omega \to b - 0$. Согласно критерию Коши существования предела функции это выполнено тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \Delta \in (a, b) : \ \forall \delta_1, \delta_2 \in (\Delta, b) \Rightarrow |F(\delta_2) - F(\delta_1)| < \varepsilon.$$

Последнее же неравенство, в силу свойств интеграла, переписывается, как

$$|F(\delta_2) - F(\delta_1)| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)dx \right| < \varepsilon,$$

откуда и следует требуемое. □

5.3 Признаки сходимости интегралов от функций, сохраняющих знак

В этом пункте будем считать, что рассматриваемые функции не меняют знак. Всюду мы будем пользоваться следующей леммой.

Лемма 5.3.1 (О возрастании интеграла неотрицательной функции) *Пусть $f \in R_{loc}[a,b)$, $f \geqslant 0$. Тогда функция $F(\omega) = \int\limits_a^{\omega} f(x)dx$, возрастает на $[a,b)$, и сходимость интеграла $\int\limits_a^{b} f(x)dx$ равносильна ограниченности функции $F(\omega)$.*

Доказательство. Ясно, что если $a \leqslant \omega_1 \leqslant \omega_2 < b$, то, так как

$$\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)dx \geqslant 0,$$

то

$$\int\limits_{a}^{\omega_2} f(x)dx = \int\limits_{a}^{\omega_1} f(x)dx + \int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)dx \geqslant \int\limits_{a}^{\omega_1} f(x)dx,$$

откуда $F(\omega_2) \geqslant F(\omega_1)$, а значит $F(\omega)$ не убывает. Тогда сходимость несобственного интеграла, то есть существование конечного предела, по теореме Вейерштрасса равносильна ограниченности $F(\omega)$. $\square$

Теорема 5.3.1 (Признаки сравнения) *Пусть $f, g \in R_{loc}[a,b)$ и $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ при $x \in [a,b)$. Тогда*

1. *Если сходится $\int\limits_a^b g(x)dx$, то сходится и $\int\limits_a^b f(x)dx$.*

2. *Если расходится $\int\limits_a^b f(x)dx$, то расходится и $\int\limits_a^b g(x)dx$.*

3. *Если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to b-$, то интегралы*

$$\int\limits_a^b f(x)dx \text{ и } \int\limits_a^b g(x)dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. 1. Докажем первый пункт. Согласно предыдущей лемме, функция $F(\omega) = \int\limits_a^\omega f(x)dx$ возрастает. По свойствам интеграла Римана, а также используя теорему Вейерштрасса, при каждом $\omega \in [a, b)$,

$$F(\omega) = \int\limits_a^\omega f(x)dx \leqslant \int\limits_a^\omega g(x)dx \leqslant \sup_{\omega\in[a,b)} \int\limits_a^\omega g(x)dx = \int\limits_a^b g(x)dx < +\infty,$$

где последнее неравенство справедливо, исходя из условия (несобственный интеграл сходится). Но тогда $F(\omega)$ ограничена, а значит, по предыдущей лемме, интеграл сходится.

2. Второй пункт докажем от противного. Если предположить, что интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходится, то, по только что доказанному первому пункту, сходится и $\int\limits_a^b f(x)dx$, что противоречит условию.

3. Согласно определению, $f(x) \sim g(x)$ при $x \to b-$ означает, что существует $\alpha(x)$, что

$$f(x) = \alpha(x)g(x), \quad \lim_{x\to b-} \alpha(x) = 1.$$

Тогда существует $\Delta > a$, что при $x \in [\Delta, b)$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{2} \leqslant \alpha(x) \leqslant \frac{3}{2},$$

откуда, при $x \in [\Delta, b)$

$$\frac{1}{2}g(x) \leqslant f(x) \leqslant \frac{3}{2}g(x).$$

Кроме того, сходимость интегралов

$$\int\limits_a^b f(x)dx, \int\limits_a^b g(x)dx$$

равносильна сходимости интегралов

$$\int\limits_\Delta^b f(x)dx, \int\limits_\Delta^b g(x)dx.$$

Для последних же рассуждения проводятся с использованием пунктов 1 и 2 данной теоремы, опираясь на неравенство

$$\frac{1}{2}g(x) \leqslant f(x) \leqslant \frac{3}{2}g(x).$$

Скажем, если сходится интеграл от $g(x)$, то, используя правое неравенство, сходится и интеграл от $f(x)$. Если же расходится интеграл от f, то, опять же, по правому неравенству, расходится и интеграл от g. Аналогичные рассуждения относительно левого неравенства завершают доказательство. $\square$

Пример 5.3.1 *Исследовать на сходимость интеграл*

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x^7}}dx.$$

Ясно, что у этого интеграла особенность на верхнем пределе – это $+\infty$. Для исследования интеграла на сходимость вовсе не обязательно его вычислять. Заметим, что функция под интегралом положительна и упростим подынтегральную функцию при $x \to +\infty$:

$$\frac{x}{\sqrt[3]{1+x^7}} = \frac{x}{x^{7/3}\sqrt[3]{1/x^7+1}} \sim \frac{x}{x^{7/3}} = \frac{1}{x^{4/3}}, \ x \to +\infty.$$

Так как интеграл

$$\int^{+\infty} \frac{dx}{x^{4/3}}$$

сходится, то, по 3 пункту теоремы сравнения, сходится и исходный интеграл.

Пример 5.3.2 *Исследовать на сходимость интеграл*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$$

На первый взгляд может показаться, что у данного интеграла две особенности: в точках 0 и $+\infty$, но это не так. В окрестности нуля функция ограничена и интеграл может рассматриваться, как собственный. Значит, осталось выяснить поведение интеграла на $+\infty$. Перепишем интеграл в виде

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \int_0^{1} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$$

и исследуем на сходимость второй. Функция под интегралом неотрицательна, можно пользоваться сформулированными теоремами. Так как

$$\frac{\sin^2 x}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^2},$$

а интеграл от последней функции по $[1, +\infty)$ *сходится, то сходится и исходный интеграл.*

Замечание 5.3.1 *Отметим важный момент: из сходимости интеграла* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *не следует, что* $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ *даже в случае, когда* $f \geqslant 0$ *и* $f \in C[0, +\infty)$.

Пусть

$$E = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left(k - \frac{1}{k^2(k+1)}, k + \frac{1}{k^2(k+1)} \right).$$

положим $f(x) = 0$ *при* $x \in [0, +\infty)$, $x \notin E$. *Кроме того, пусть*

$$f(k) = k,\ \ f\left(k \pm \frac{1}{k^2(k+1)}\right) = 0$$

и f *линейна на*

$$\left(k - \frac{1}{k^2(k+1)}, k\right) \ \text{и}\ \left(k, k + \frac{1}{k^2(k+1)}\right).$$

Ясно, что такая функция непрерывна и неотрицательна на $x \in [0, +\infty)$. *Кроме того, если* $N \in \mathbb{N}$, *то*

$$\int\limits_0^{N+1/2} f(x)dx = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{k-\frac{1}{k^2(k+1)}}^{k-\frac{1}{k^2(k+1)}} f(x)dx = \sum_{k=1}^{N} k \cdot \frac{1}{k^2(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1.$$

Из последнего следует (ввиду монотонности интеграла от неотрицательной функции), что сходится и $\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$. *В то же время, очевидно,* $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ *не выполнено. Кроме того,* $f(x)$ *оказывается не ограниченной.*

5.4 Абсолютная и условная сходимости интеграла

Если функция не сохраняет знак вблизи особой точки, то выделяют дополнительный тип сходимости.

Определение 5.4.1 *Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$. Говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится абсолютно, если сходится интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|dx$.*

Как связаны абсолютная сходимость и сходимость интеграла?

Теорема 5.4.1 (Абсолютная сходимость – сходимость) *Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$. Если интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится абсолютно, то он сходится. При этом*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|dx.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как интеграл сходится асбсолютно, то, согласно критерию Коши,

$$\exists \Delta: \ \forall \delta_1, \delta_2 \in (\Delta, b) \Rightarrow \left|\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} |f(x)|dx\right| < \varepsilon.$$

Но согласно свойствам интеграла,

$$\left|\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} |f(x)|dx\right| < \varepsilon,$$

а значит, по критерию Коши, интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится. Неравенство следует из соответствующего неравенства для собственных интегралов и предельного перехода. $\square$

Замечание 5.4.1 *При исследовании интеграла на абсолютную сходимость можно пользоваться доказанными ранее признаками сходимости интегралов от знакопостоянных функций.*

Определение 5.4.2 *Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$. Если интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится, но абсолютной сходимости нет (то есть он не сходится абсолютно), то говорят, что интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится условно (или неабсолютно).*

Пример 5.4.1 *Исследовать на сходимость интеграл*

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Так как

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2},$$

а последний интеграл сходится, то исходный интеграл сходится абсолютно, а значит и просто сходится.

Пример 5.4.2 *Часто оказывается, что интеграл сходится лишь условно. Исследуем на сходимость интеграл*

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Во-первых, он сходится. Интегрируя по частям ($dv = \sin x dx$), получим

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \cos 1 - \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Последний интеграл, как мы только что показали, сходится.

Покажем, что абсолютной сходимости нет. Воспользуемся критерием Коши (его отрицанием):

$$\exists\ \varepsilon > 0: \ \forall \Delta \in (a, b)\ \exists \delta_1, \delta_2 \in (\Delta, b): \left|\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)dx\right| \geqslant \varepsilon_0.$$

Пусть $\delta_1 = \pi n$, $\delta_2 = 2\pi n$, $\delta_i \to +\infty$, тогда

$$\int\limits_{\pi n}^{2\pi n} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geqslant \frac{1}{2\pi n} \int\limits_{\pi n}^{2\pi n} |\sin x| dx = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin x dx = \frac{1}{\pi}.$$

Последнее равенство показывает, что абсолютной сходимости у интеграла нет. Значит, исходный интеграл сходится, но лишь условно.

Замечание 5.4.2 *Расходимость последнего интеграла можно установить и следующим образом. Ясно, что*

$$\frac{|\sin x|}{x} \geqslant \frac{\sin^2 x}{x},$$

причем

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{x} dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} - \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx,$$

где последний интеграл сходится (доказывается интегрированием по частям), а первый, очевидно, расходится. Значит и исходный интеграл расходится.

На практике часто бывает полезна ещё такая теорема.

Теорема 5.4.2 (О сумме с абсолютно сходящимся интегралом) *Пусть $f, g, h \in R_{loc}[a, b)$, причем*

$$f(x) = g(x) + h(x).$$

Если интеграл $\int\limits_a^b h(x)dx$ сходится абсолютно, то интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ ведут себя одинаково (одновременно либо расходятся, либо сходятся абсолютно, либо условно).

Доказательство. Пусть интеграл от g сходится абсолютно. Тогда, так как $|f| \leqslant |g| + |h|$, абсолютно сходится и интеграл от f. Наоборот, если сходится абсолютно интеграл от f, то, так как $g = f - h$ и $|g| \leqslant |f| + |h|$, абсолютно сходится и интеграл от g.

Пусть интеграл от g сходится условно. Тогда интеграл от f сходится. Если бы он сходился абсолютно, то по пред. пункту, абсолютно бы сходился и интеграл от g. Значит, он сходится условно. Аналогично разбираются и остальные случаи. $\square$

5.5 Признак Абеля–Дирихле

Рассмотрим признак, позволяющий устанавливать сходимость интеграла от произведения двух функций.

Теорема 5.5.1 (Признак Абеля-Дирихле) *Пусть* $f \in C[a, b)$, $g \in C^1[a, b)$. *Тогда для сходимости интеграла* $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ *достаточно, чтобы выполнялась любая из двух пар условий:*

1. *Функция* $F(\omega) = \int\limits_a^\omega f(x)dx$ *ограничена на* $[a, b)$.
2. $g(x) \to 0$ *при* $x \to b - 0$ *и* g *монотонна,*

или

1. *Интеграл* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *сходится.*
2. $g(x)$ *ограничена на* $[a, b)$ *и монотонна.*

Формулировка теоремы с первой парой условий иногда называют признаком Дирихле, а со второй – признаком Абеля.

Доказательство. 1) Пусть $F(\omega) = \int\limits_a^\omega f(x)dx$ и выполнена первая пара условий. Воспользуемся критерием Коши. Рассмотрим

$$\left|\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)g(x)dx\right| = \left|\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} g(x)dF(x)\right| = \left|F(\delta_2)g(\delta_2) - F(\delta_1)g(\delta_1) - \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} F(x)g'(x)dx\right| \leqslant$$

применим неравенство треугольника для модуля и воспользуемся ограниченностью $F(\omega)$: $|F(\omega)| \leqslant C$:

$$\leqslant \left|F(\delta_2)g(\delta_2)\right| + \left|F(\delta_1)g(\delta_1)\right| + \left|\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} F(x)g'(x)dx\right| \leqslant$$

оценим модуль интеграла интегралом от модуля

$$\leqslant C\Big(|g(\delta_1)| + |g(\delta_2)|\Big) + C\left|\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} |g'(x)|dx\right|$$

заметим, что в силу монотонности $g(x)$ $g'(x)$ одного знака, а значит $\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} |g'(x)|dx = \pm(g(\delta_2) - g(\delta_1))$. Воспользуемся неравенством треугольника еще раз и получим

$$\left|\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)g(x)dx\right| \leqslant 2C\Big(|g(\delta_1)| + |g(\delta_2)|\Big).$$

Так как $g(x) \to 0$ при $x \to b-$, то по любому $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, что $\forall x \in \dot{U}_\delta^-(b)$ $|g(x)| < \varepsilon/4C$, и

$$\left| \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)g(x)dx \right| < \varepsilon,$$

что и означает сходимость интеграла.

2) Так как g монотонна и ограничена, то $\exists \lim\limits_{x\to b-} g(x) = A$. Введем функцию $h(x) = g(x) - A$, $h(x) \to 0$ при $x \to b-$ и $h(x)$ монотонна. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \int\limits_a^b f(x)h(x)dx + A\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Первый интеграл сходится по п.1), а второй по условию. Следовательно, исходный интеграл сходится. $\square$

Замечание 5.5.1 *Можно ослабить условия на функции f и g в первой строке Теоремы, оставив только $f \in R_{loc}[a,b)$. Доказательство будет сложнее (требуется преобразование Абеля и вторая теорема о среднем).*

Пример 5.5.1 *Исследовать на абсолютную и условную сходимости*

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ясно, что если $\alpha > 1$, то интеграл сходится абсолютно, ведь

$$\frac{|\sin x|}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{x^\alpha},$$

а интеграл от последней функции по промежутку $[1, +\infty)$ при $\alpha > 1$ сходится.

Если $\alpha \leqslant 0$, то интеграл расходится, так как

$$\left| \int\limits_{2\pi n}^{\pi/4+2\pi n} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx \right| \geqslant (2\pi n)^{-\alpha} \int\limits_{2\pi n}^{\pi/4+2\pi n} \sin x dx = (1 - \sqrt{2}/2)(2\pi n)^{-\alpha},$$

где последняя величина не стремится к нулю с ростом n.

Если $\alpha \in (0,1]$, то интеграл сходится по признаку Абеля–Дирихле, так как

$$|F(\omega)| = \left|\int\limits_1^\omega \sin x dx\right| = |\cos\omega - \cos 1| \leqslant 2$$

и $1/x^\alpha$ монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$. С другой стороны,

$$\left|\int\limits_{\pi n}^{2\pi n} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx\right| \geqslant \frac{1}{(2\pi n)^\alpha} \int\limits_{\pi n}^{2\pi n} |\sin x| dx = \frac{n}{(2\pi n)^\alpha} 2 = C \cdot n^{1-\alpha},$$

где последнее выражение к нулю не стремится. Значит, абсолютной сходимости нет и интеграл при $\alpha \in (0,1]$ сходится условно.

Пример 5.5.2 *Исследовать на сходимость интеграл*

$$\int\limits_1^{+\infty} \sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Найдем асимптотику подынтегральной функции вблизи особой точки.

$$\sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)^3}{3!} + o\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)^3.$$

Тогда

$$\sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sin x}{x} - \frac{\frac{\sin^3 x}{x^2}}{3!} + o\left(\frac{\sin^3 x}{x^2}\right).$$

Ясно, что интеграл от функции $\frac{\frac{\sin^3 x}{x^2}}{3!} + o\left(\frac{\sin^3 x}{x^2}\right) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ сходится абсолютно. Значит, достаточно исследовать интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Как известно, он сходится условно. Значит, исходный интеграл сходится условно.

Пример 5.5.3 *Отказаться от условия монотонности в признаке Абеля-Дирихле нельзя.*

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} dx.$$

Если (неверно) использовать признак, то

$$|F(\omega)| = \left| \int\limits_1^{\omega} \sin x dx \right| \leqslant 2,$$

а $(\sqrt{x} - \sin x)^{-1} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$*, но не монотонно. Откуда можно сделать неверный вывод, что интеграл сходится (условно).*

В то же время,

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\sin x}{1 - \frac{\sin x}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin x \left(1 - \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2 x}{x} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$$

Интеграл же от $\frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2 x}{x}$ *расходится, так как интеграл от первой функции сходится, а от второй расходится (по доказанному ранее).*

5.6 Интегралы с несколькими особенностями

До сих пор особенность у нас была лишь на одном конце промежутка интегрирования. Обобщим.

Определение 5.6.1 *Пусть* $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ *и* $f \in R_{loc}(a, b)$*. Тогда полагают*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\omega_1 \to a+0} \int\limits_{\omega_1}^{c} f(x)dx + \lim_{\omega_2 \to b-0} \int\limits_{c}^{\omega_2} f(x)dx,$$

если оба предела существуют в $\overline{\mathbb{R}}$ *и не равны бесконечностям разных знаков. При этом интеграл называется сходящимся, если, как и ранее, его значение принадлежит* $\mathbb{R}$ *(то есть оба интеграла справа сходятся).*

Замечание 5.6.1 *Ясно, что определение не зависит от выбора точки* c*.*

Пусть теперь $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ и f задана на (a, b) за исключением не более чем конечного числа точек.

Определение 5.6.2 *Точка* $c \in (a, b)$ *называется особой точкой функции* f*, если*

$$\forall A, B: \ a < A < c < B < b \Rightarrow f \notin R[A, B].$$

Точка a *называется особой, если либо* $a = -\infty$*, либо* $f \notin R[a, B]$ *для любых* $a < B < b$*. Аналогично определяется особая точка* b*.*

Пусть число особых точек конечно и $c_1 < ... < c_{n-1}$ – особые точки внутри (a, b). Добавим $c_0 = a$ и $c_n = b$. Можно показать, что $f \in R_{loc}(c_{i-1}, c_i)$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)dx,$$

и интеграл слева называется сходящимся, если все интегралы справа сходятся.

5.7 Интеграл в смысле главного значения

Определение 5.7.1 (Особенность в конечной точке) *Пусть $-\infty < a < b < +\infty$, $c \in (a, b)$ – единственная особая точка. Предел*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx \right),$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется главным значением интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$. Если значение предела принадлежит $\mathbb{R}$, то говорят, что интеграл сходится в смысле главного значения. Обозначают

$$v.p. \int_a^b f(x)dx.$$

Замечание 5.7.1 *Если интеграл сходится, то он сходится и в смысле главного значения, но не наоборот.*

Пример 5.7.1 *Рассмотрим $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$. Ясно, что в классическом смысле он расходится, но*

$$v.p. \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{0+\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} \right) = \lim_{\varepsilon \to 0+} (\ln \varepsilon - \ln 1 + \ln 1 - \ln \varepsilon) = 0.$$

Определение 5.7.2 (Особенность в бесконечной точке) *Пусть $f \in R_{loc}(\mathbb{R})$. Интегралом в смысле главного значения по $\mathbb{R}$ называется предел*

$$\lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} f(x)dx,$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$. Если значение предела принадлежит $\mathbb{R}$, то говорят, что интеграл сходится в смысле главного значения. Обозначают

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Замечание 5.7.2 *Если интеграл сходится, то он сходится и в смысле главного значения, но не наоборот.*

Пример 5.7.2 *Рассмотрим $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xdx$. Ясно, что в классическом смысле он расходится, но*

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} xdx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{A} xdx = 0.$$

В случае нескольких особенностей можно поступать по-разному. Останавливаться на этом не будем.

6 Комплексные числа и сходимость в $\mathbb{C}$

6.1 Основные определения

Напомним здесь кратко, как определяется множество комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ определим как множество упорядоченных пар вещественных чисел:

$$\mathbb{C} := \{z = (x, y),\ x, y \in \mathbb{R}\}.$$

На $\mathbb{C}$ определены:

1. Равенство элементов:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2.$$

2. Сложение:

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

3. Умножение:

$$z_1 \cdot z_2 := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

4. Норма (модуль) и расстояние:

$$\|z\| = |z| := \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \rho(z_1, z_2) = \|z_1 - z_2\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

5. Комплексное сопряжение:

$$\bar{z} := (x, -y).$$

Заметим, что таким образом определенные операции сложения и умножения соответствуют аксиомам сложения и умножения (коммутативность, ассоциативность, существование нейтральных элементов, обратимость, дистрибутивность).

Обозначим базисные векторы следующим образом:

$$1 := (1, 0), \quad i := (0, 1).$$

Тогда любое комплексное число (или вектор в $\mathbb{R}^2$) можно записать в виде

$$z = (x, y) = x \cdot 1 + y \cdot i \text{ или короче } x + iy.$$

Заметим, что знак суммы в записи $z = x + iy$ корректен и соответствует сложению, определенному выше.

Числа вида $(x, 0) = x + 0i = x$ будем называть вещественными, а числа $(0, y) = iy$ – чисто мнимыми.

Для числа $z = x + iy$:

$$x = \operatorname{Re} z \text{ – вещественная часть,}$$

$$y = \operatorname{Im} z \text{ – мнимая часть.}$$

Заметим, что для вещественных чисел новое определение сложения и умножения соответствует этим операциям в $\mathbb{R}$.

Множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ можно изобразить точками на плоскости $\mathbb{R}^2$ с базисными ортами 1 и i, при этом (x, y) – декартовы координаты числа $z = x + iy$. Эту плоскость называют комплексной плоскостью.

Лемма 6.1.1 (Неравенство треугольника) *Для $\forall z_1, z_2 \in C$ выполнено*

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

Доказательство. Аккуратно расписать в координатах. $\square$

Переходя в комплексной плоскости к полярным координатам: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ определим модуль $|z| = r$ и аргумент $\arg z = \varphi$. Если $z = 0$, то $\arg z$ не определен, при $z \neq 0$ аргумент определяется неоднозначно с точностью до

$2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Главное значение аргумента выбирают в $(-\pi, \pi]$ или $[0, 2\pi)$ (в зависимости от удобства).

Тригонометрическая форма комплексного числа:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Легко получить правило умножения комплексных чисел в тригонометрической форме:

$$z_1 z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ = |z_1||z_2||z_1|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Формула Муавра:

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Определение 6.1.1 *Множество $E \subset \mathbb{C}$ будем называть ограниченным, если $\exists C > 0$: $|z| \leqslant C$ для $\forall z \in E$.*

Геометрически, ограниченность множества означает, что на комплексной плоскости его можно поместить в некоторый круг с центром в начале координат.

6.2 Сходимость в $\mathbb{C}$

Пусть $z_n \in \mathbb{C}$ – последовательность комплексных чисел ($n \in \mathbb{N}$), то есть отображение $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$.

Определение 6.2.1 *Определим предел $A \in \mathbb{C}$ последовательности z_n:*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = A \in \mathbb{C} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |z_n - A| = 0.$$

Заметим, что если $z_n = x_n + iy_n$, то

$$\lim_{n\to\infty} z_n = A \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \operatorname{Re} A \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} y_n = \operatorname{Im} A.$$

Дадим также определение бесконечного предела:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty.$$

Заметим, что

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \infty \ \vee \ \lim_{n\to\infty} y_n = \infty.$$

Пример 6.2.1 *Последовательность $z_n = z^n$, где $z \in \mathbb{C}$ – фиксированное число, сходится к 0, если $|z| < 1$ и расходится при $|z| > 1$.*

7 Числовые ряды

Будем сразу рассматривать числовые ряды с комплексными членами.

7.1 Понятие ряда и его суммы

Важным примером применения теории пределов числовой последовательности является понятие числового ряда.

Определение 7.1.1 *Пусть дана последовательность a_n ($a_n \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Символ*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется числовым рядом, последовательность a_n – общим членом ряда.

Определение 7.1.2 *Последовательность S_k: сумма первых k членов ряда*

$$S_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$$

называется частичной суммой ряда, а её предел, если он существует в $\bar{\mathbb{C}}$, называется суммой ряда:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} S_k.$$

Если последовательность S_k сходится, то ряд называется сходящимся, иначе – расходящимся. Разность $R_k = S - S_k$ называется остатком ряда.

Пример 7.1.1

1. $\sum_{n=1}^{\infty} 0$ *сходится и его сумма равна 0.*
2. $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ ($q \in \mathbb{C}$) *– геометрическая прогрессия. Сходится, если $|q| < 1$, и его сумма равна $\frac{1}{1-q}$.*
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. *Рассмотрим частичную сумму*

$$S_k = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1,$$

следовательно, ряд сходится, и его сумма равна 1.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ *расходится, т.к. последовательность частичных сумм состоит из чередующихся* 0 *и* -1.

5. *При* $x \in \mathbb{R}$ *из соответствующих формул Тейлора следуют равенства*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos x.$$

Написанные ряды называются рядами Тейлора (Маклорена) функций e^x, $\sin x$, $\cos x$.

Замечание 7.1.1 *Изменение, отбрасывание или добавление конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость.*

Лемма 7.1.1 (Критерий сходимости через остаток) *Ряд сходится тогда и только тогда, когда его остаток стремится к нулю.*

▶ Запишем для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_k + R_k.$$

Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = S$ равносильно тому, что $\lim\limits_{k\to\infty} R_k = 0$. ◀

7.2 Основные свойства рядов

Теорема 7.2.1 (Критерий Коши сходимости ряда) *Для того, чтобы ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого* ε *можно было найти номер* k_0 *такой, что для всех* $k \geqslant k_0$ *и для всех* $p \in \mathbb{N}$ *выполнялось неравенство* $\left|\sum\limits_{n=k+1}^{k+p} a_n\right| < \varepsilon$.

Доказательство. Доказательство следует из критерия Коши для частичных сумм. □

Пример 7.2.1 *Гармонический ряд:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Запишем

$$S_{2k} - S_{k-1} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{2k} > \frac{1}{2k} \cdot k = \frac{1}{2}.$$

Это означает, что критерий Коши не выполняется и ряд расходится.

Теорема 7.2.2 (Необходимое условие сходимости ряда) *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то* $a_n \to 0$.

▶ Запишем $a_n = S_n - S_{n-1}$. Так как $S_n \to S$ и $S_{n-1} \to S$, то $a_n \to S - S = 0$.
◀

Замечание 7.2.1 *Условие* $a_n \to 0$ *не является достаточным для сходимости ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Но если* $a_n \not\to 0$, *то* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Лемма 7.2.1 (Линейность суммирования) *Пусть сходятся ряды с общими членами* a_k *и* b_k. *Тогда при любых* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *сходится ряд с общим членом* $\alpha a_k + \beta b_k$, *причем*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Доказательство. Обозначим $S^A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $S_n^A = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $S^B = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, $S_n^B = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$. Тогда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha S_n^A + \beta S^B \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha S^A + \beta S^B,$$

что и доказывает утверждение. □

Лемма 7.2.2 (Монотонность суммирования) *Пусть* $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ *и* $a_k \leqslant b_k$ *и ряды с общими членами* a_k *и* b_k *сходятся в* $\overline{\mathbb{R}}$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Доказательство. Обозначим $S^A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $S_n^A = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $S^B = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, $S_n^B = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$. Тогда, согласно условию,

$$S_n^A \leqslant S_n^B \;\Rightarrow\; \lim_{n\to+\infty} S_n^A \leqslant \lim_{n\to+\infty} S_n^B \;\Rightarrow\; S^A \leqslant S^B.$$

□

Определение 7.2.1 *Пусть дан ряд с общим членом a_k и $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ – возрастающая последовательность номеров. Положим $n_0 = 0$ и*

$$A_j = \sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} a_k.$$

Тогда ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j$$

называется группировкой исходного ряда.

Отметим, что группировка ряда сохраняет исходный порядок членов ряда, но меняет общий член ряда.

Замечание 7.2.2 *Мы знаем на примере ряда с общим членом $a_k = (-1)^k$, что группировка ряда может сходиться даже в том случае, когда ряд расходится:*

$$(-1+1) + (-1+1) + \ldots + (-1+1) + \ldots = 0.$$

Ответим на вопрос, как связаны сходимость ряда и сходимость его группировок.

Теорема 7.2.3 (О группировках ряда)

1. *Пусть ряд с общим членом a_k имеет сумму $S \in \overline{\mathbb{R}}$ или $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда и любая его группировка имеет сумму S, то есть*
$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j = S.$$

2. *Пусть группировка $\sum\limits_{j=0}^{\infty} A_j$ ряда с общим членом a_k имеет сумму $S \in \overline{\mathbb{R}}$ или $\overline{\mathbb{C}}$, причем $a_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ и каждая группа содержит не более $L \in \mathbb{N}$ членов. Тогда*
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S.$$

3. *Пусть группировка $\sum\limits_{j=0}^{\infty} A_j$ ряда с общим членом $a_k \in \mathbb{R}$ имеет сумму $S \in \overline{\mathbb{R}}$, а все члены внутри каждой группы имеют один и тот же знак. Тогда*
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S.$$

Доказательство. 1. Пусть $\widetilde{S}_p$ – частичная сумма группировки:

$$\widetilde{S}_p = \sum_{j=0}^{p} A_j = \sum_{k=1}^{n_p} a_k = S_{n_p},$$

то есть является подпоследовательностью последовательности $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Следовательно,

$$\lim_{p\to+\infty} \widetilde{S}_p = \lim_{p\to+\infty} S_{n_p} = \lim_{n\to+\infty} S_n = S.$$

2. Рассмотрим случай $S \in \mathbb{C}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $a_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, то существует k_0, что при $k > k_0$ выполняется

$$|a_k| < \frac{\varepsilon}{2L}$$

Так как перестановка имеет сумму S, то существует j_0 такой, что при $j > j_0$ выполняется

$$|\widetilde{S}_j - S| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $n > \max(k_0, n_{j_0+1})$. Тогда существует t, что $n_t < n \leqslant n_{t+1}$, причем $n_t \geqslant n_{j_0+1}$. Но тогда

$$|S_n - S| \leqslant |S_n - \widetilde{S}_t| + |\widetilde{S}_t - S| = \left|\sum_{k=n_t+1}^{n} a_k\right| + |\widetilde{S}_t - S| < \frac{\varepsilon}{2L}L + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Случаи $S = \pm\infty$ ответственный студент разберет самостоятельно.

3. Рассмотрим случай $S \in \mathbb{R}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как перестановка имеет сумму S, то найдется j_0 такой, что при $j > j_0$ выполняется

$$|\widetilde{S}_j - S| < \varepsilon.$$

Пусть $n > n_{j_0+1}$. Тогда найдется t, что $n_t < n \leqslant n_{t+1}$, причем $n_t \geqslant n_{j_0+1}$. Если все члены группы A_t неотрицательны, то

$$\widetilde{S}_t \leqslant S_n \leqslant \widetilde{S}_{t+1},$$

а если неположительны, то

$$\widetilde{S}_{t+1} \leqslant S_n \leqslant \widetilde{S}_t.$$

В любом из двух описанных случаев,

$$|S_n - S| \leqslant \max(|\widetilde{S}_t - S|, |\widetilde{S}_{t+1} - S|) < \varepsilon.$$

Не забудьте рассмотреть случаи $S = \pm\infty$ и $S = \infty$. □

7.3 Положительные ряды

В этом разделе будем рассматривать ряды $\sum a_k$, где $a_k \in \mathbb{R}$ и $a_k \geqslant 0$ при $k \in \mathbb{N}$. Такие ряды принято называть положительными. Основной вопрос – как установить сходимость или расходимость такого ряда?

7.3.1 Признаки сравнения

Доказательство признаков сравнения опирается на следующую лемму.

Лемма 7.3.1 (О возрастании частичной суммы) *Пусть* $a_k \geqslant 0$. *Тогда последовательность* $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ *возрастает (нестрого) и*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} S_n.$$

Тем самым, сходимость ряда равносильна ограниченности последовательности его частичных сумм

Доказательство. Так как $a_k \geqslant 0$, то

$$S_{n+1} = S_n + a_n \geqslant S_n.$$

Тем самым, вопрос о наличии предела S_n сводится к вопросу ограниченности S_n (теорема Вейерштрасса). □

Теорема 7.3.1 (Признаки сравнения) *Пусть* $a_k, b_k \geqslant 0$. *Тогда:*

1. *Если* $0 \leqslant a_k \leqslant b_k$ *и ряд с общим членом* b_k *сходится, то сходится и ряд с общим членом* a_k.
2. *Если* $0 \leqslant a_k \leqslant b_k$ *и ряд с общим членом* a_k *расходится, то расходится и ряд с общим членом* b_k.
3. *Если* $a_k \sim b_k$ *при* $k \to +\infty$, *то ряды с общими членами* a_k *и* b_k *сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Обозначим $S_n^A = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $S^B = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, $S_n^B = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$.
1. Ясно, что в условиях теоремы

$$S_n^A \leqslant S_n^B \leqslant S^B < +\infty.$$

В силу ограниченности последовательности S_n^A, согласно доказанной лемме заключаем, что S_n^A имеет конечный предел.

2. От противного, если сходится ряд с общим членом b_k, то, по только что доказанному, сходится и ряд с общим членом a_k. Это противоречит условию.

3. Так как $a_k \sim b_k$, то $a_k = \alpha_k b_k$, где $\alpha_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$. Тогда

$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \Rightarrow \frac{1}{2}b_k \leqslant a_k \leqslant \frac{3}{2}b_k.$$

Дальнейшие рассуждения стандартны и остаются в качестве упражнения. □

Пример 7.3.1 *Исследовать на сходимость ряд Дирихле при $\alpha < 1$*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Как мы уже знаем, при $\alpha = 1$ ряд Дирихле – гармоническимй ряд, а значит он расходится. Так как при $\alpha < 1$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{n},$$

то, согласно признакам сравнения, при $\alpha < 1$ ряд Дирихле расходится.

Интересно задаться вопросом: нет ли какого-то “пограничного” ряда, с которым можно сравнить любой другой? Например, сходящегося (или расходящегося) медленнее любого другого сходящегося (расходящегося) ряда. Оказывается, что такого ряда нет. А именно, можно доказать следующие утверждения.

Лемма 7.3.2 *Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, где $a_k > 0$ и $a_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$. Тогда*

1. *Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, то существует последовательность b_k: $b_k > 0$, $b_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, такая, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ расходится.*

2. *Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то существует последовательность $b_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.*

Доказательство. 1) Положим $b_k = \frac{1}{\sqrt{S_k}+\sqrt{S_{k-1}}}$, где $S_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$. Тогда (при $k \geqslant 2$)

$$a_k b_k = \frac{a_k}{\sqrt{S_k}+\sqrt{S_{k-1}}} = \frac{S_k - S_{k-1}}{\sqrt{S_k}+\sqrt{S_{k-1}}} = \sqrt{S_k} - \sqrt{S_{k-1}}.$$

Ясно, что ряд с таким общим членом расходится.

2) Возьмем $b_k = \frac{1}{\sqrt{R_{k-1}}} = 1/\sqrt{\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n}$, тогда

$$a_k b_k = \frac{a_k}{\sqrt{R_{k-1}}} = \frac{R_{k-1} - R_k}{\sqrt{R_{k-1}}} = \frac{(\sqrt{R_{k-1}} - \sqrt{R_k})(\sqrt{R_{k-1}} + \sqrt{R_k})}{\sqrt{R_{k-1}}} \leqslant$$

$$\leqslant 2(\sqrt{R_{k-1}} - \sqrt{R_k}).$$

Ряд с общим членом $\sqrt{R_{k-1}} - \sqrt{R_k}$ сходится, а значит, согласно признаку сравнения, сходится и ряд $\sum\limits^{\infty} a_k b_k$. □

7.3.2 Радикальный признак Коши

Теорема 7.3.2 (Радикальный признак Коши) *Пусть $a_n \geqslant 0$ и*

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \in [0, +\infty].$$

Тогда

1. *Если $\ell > 1$, то ряд с общим членом a_n расходится.*

2. *Если $\ell < 1$, то ряд с общим членом a_n сходится.*

Доказательство. 1. Так как $\ell > 1$, то, начиная с некоторого n_0, выполняется

$$\sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow a_n > 1.$$

Отсюда следует, что a_n не стремится к нулю, а значит не выполнено необходимое условие сходимости, и ряд расходится.

2. Если $\ell < 1$, то выберем $\varepsilon = (1-\ell)/2$. По свойству верхнего предела,

$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0 \ \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < \ell + \frac{1-\ell}{2} = \frac{\ell+1}{2} < 1.$$

Из этого неравенства получаем, что при $n > n_0$ выполняется

$$a_n < \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^k$ сходится, то, по признаку сравнения, сходится и ряд

$$R_{n_0} = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n,$$

а значит сходится и исходный ряд. □

Замечание 7.3.1 *В случае, когда $\ell = 1$ признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Для рядов*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

признак Коши дает $\ell = 1$, но первый ряд расходится, а второй – сходится.

Замечание 7.3.2 *Как было показано в теореме, если признак Коши дает $\ell > 1$, это означает, что общий член не стремится к нулю. Если известно, что*

$$1 < \ell = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n},$$

то $a_n \to +\infty$.

Замечание 7.3.3 *Признак остается верным, если вместо предела взять верхний предел.*

7.3.3 Признак Даламбера

Теорема 7.3.3 (Признак Даламбера) *Пусть $a_n > 0$ и*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in [0, +\infty]$$

Тогда

1. *Если $\ell > 1$, то ряд с общим членом a_n расходится.*
2. *Если $\ell < 1$, то ряд с общим членом a_n сходится.*

Доказательство. 1. Так как $\ell > 1$, то, начиная с некоторого номера n_0, $a_{n+1} > a_n$, а значит $a_n \geqslant a_{n_0+1} > 0$, то есть a_n не стремится к нулю. Это противоречит необходимому условию.

2. Если $\ell < 1$, то выберем $\varepsilon = (1-\ell)/2$. Согласно свойству предела, найдется n_0, что при $n > n_0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \frac{1-\ell}{2} = \frac{\ell+1}{2} = q,$$

откуда $a_{n+1} < qa_n$. По индукции, при $n > n_0$ имеем $a_n \leqslant q^{n-n_0-1}a_{n_0+1}$. Отсюда, согласно признаку сравнения,

$$R_{n_0} = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$$

сходится (больший ряд – геометрическая прогрессия, причем $|q| < 1$). Значит, сходится и исходный ряд. □

Замечание 7.3.4 *В случае, когда $\ell = 1$, признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Для рядов*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

признак Даламбера дает $\ell = 1$, но первый ряд расходится, а второй – сходится.

Замечание 7.3.5 *Как было показано в теореме, если признак Даламбера дает $\ell > 1$, это означает, что общий член ряда стремится к бесконечности.*

Замечание 7.3.6 *Признаки Коши и Даламбера – завуалированные признаки сравнения с геометрической прогрессией.*

7.3.4 Признаки Куммера, Раабе, Бертрана

Для создания произвольного числа признаков разной тонкости полезна следующая теорема.

Теорема 7.3.4 (Признак Куммера) *Пусть $a_n > 0$, $b_n > 0$ и ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n} \quad \text{расходится.}$$

Пусть

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \left(b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \right),$$

тогда

1. *Если $\ell > 0$, то ряд с общим членом a_n сходится.*
2. *Если $\ell < 0$, то ряд с общим членом a_n расходится.*

Доказательство. 1. Так как $\ell > 0$, то существует n_0, что при $n > n_0$

$$b_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} > \frac{\ell}{2} > 0 \Rightarrow a_nb_n - a_{n+1}b_{n+1} > \frac{\ell}{2}a_{n+1} > 0.$$

В частности, $a_nb_n > a_{n+1}b_{n+1}$, а значит последовательность a_nb_n убывает при $n > n_0$ и ограничена снизу, значит имеет предел. Но тогда

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty}(a_nb_n - a_{n+1}b_{n+1}) = \lim_{k\to+\infty}\sum_{n=n_0+1}^{k}(a_nb_n - a_{n+1}b_{n+1}) =$$

$$= \lim_{k\to+\infty}(a_{n_0+1}b_{n_0+1} - a_{k+1}b_{k+1}) < +\infty.$$

Значит, сходится и $\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} a_{n+1}$, но тогда сходится и ряд с общим членом a_n.

2. Пусть $\ell < 0$. Тогда существует n_0, что при $n > n_0$

$$b_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} < 0 \Rightarrow b_na_n - b_{n+1}a_{n+1} < 0.$$

Отсюда получаем, что $b_{n+1}a_{n+1} > b_na_n$ и последовательность b_na_n монотонно возрастает при $n > n_0$. Значит,

$$a_nb_n \geqslant a_{n_0+1}b_{n_0+1} \;\Rightarrow\; a_n \geqslant \frac{a_{n_0+1}b_{n_0+1}}{b_n}$$

и ряд $\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$ расходится. □

Замечание 7.3.7 *Можно заметить, что расходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}$$

использовалась только при доказательстве достаточности.

Замечание 7.3.8 *Если положить $b_n = 1$, то получится признак Даламбера.*

Теорема 7.3.5 (Признак Раабе) *Пусть $a_n > 0$ и*

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \ell.$$

Тогда

1. *Если* $\ell > 1$, *то ряд с общим членом* a_n *сходится.*

2. *Если* $\ell < 1$, *то ряд с общим членом* a_n *расходится.*

Доказательство. Для доказательства в признаке Куммера достаточно положить $b_n = n$. Детали остаются в качестве упражнения. □

Теорема 7.3.6 (Признак Бертрана) *Пусть* $a_n > 0$ *и*

$$\lim_{n\to+\infty} \ln n \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) = \ell.$$

Тогда

1. *Если* $\ell > 1$, *то ряд с общим членом* a_n *сходится.*

2. *Если* $\ell < 1$, *то ряд с общим членом* a_n *расходится.*

Доказательство. Сначала покажем, что ряд с общим членом $\frac{1}{n\ln n}$ расходится. Это следует из того, что, согласно теореме Лагранжа,

$$\ln\ln(n+2) - \ln\ln(n+1) = \frac{1}{\xi\ln\xi} \leqslant \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}, \quad \xi \in (n+1, n+2)$$

и того, что ряд с общим членом $\ln\ln(n+2) - \ln\ln(n+1)$ расходится, так как

$$\sum_{n=1}^{k} (\ln\ln(n+2) - \ln\ln(n+1)) = \ln\ln(k+2) - \ln\ln 2 \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty.$$

Положим в признаке Куммера $b_n = n\ln n$. Получим

$$n\ln n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\ln(n+1) =$$

$$= \ln n \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) + (n+1)\ln n - (n+1)\ln(n+1) =$$

$$= \ln n \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) - (n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Теперь признак Бертрана следует из того, что

$$\lim_{n\to+\infty} (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

□

7.3.5 Признак Гаусса

Теорема 7.3.7 (Признак Гаусса) *Пусть*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\gamma}}\right), \quad \gamma > 0.$$

Тогда:

1. *Если* $\lambda > 1$, *то ряд с общим членом* a_n *сходится.*
2. *Если* $\lambda < 1$, *то ряд с общим членом* a_n *расходится.*
3. *Если* $\lambda = 1$ *и* $\mu > 1$, *то ряд с общим членом* a_n *сходится.*
4. *Если* $\lambda = 1$ *и* $\mu \leqslant 1$, *то ряд с общим членом* a_n *расходится.*

Доказательство. Доказательство опирается на ранее доказанные признаки. Первые два пункта – это признак Даламбера. Третий и четвертый пункты в случае, когда $\mu \neq 1$ – это признак Раабе. Случай $\lambda = 1$, $\mu = 1$ доказывается по признаку Бертрана. $\square$

Замечание 7.3.9 *В формулировке признака Гаусса нельзя* $O\left(\frac{1}{n^{1+\gamma}}\right)$ *заменить на* $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

7.3.6 Интегральный признак Коши и асимптотика сумм

Теорема 7.3.8 (Интегральный признак Коши) *Пусть* $f(x)$ *монотонна на* $[1, +\infty)$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ *сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл* $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$.

Доказательство. Пусть, скажем, f не возрастает. Тогда если $f(x_0) < 0$, то, в силу монотонности, $f(x) \leqslant f(x_0) < 0$ при $x > x_0$, а значит $f(k)$ не стремится к 0 при $k \to +\infty$, то есть ряд с общим членом $f(k)$ расходится.

Кроме того,

$$\int\limits_{x_0}^{A} f(x)dx \leqslant f(x_0)(A - x_0) \xrightarrow[A \to +\infty]{} -\infty,$$

а значит расходится и интеграл. В итоге, $f(x) \geqslant 0$. В этом случае (вспоминая, что f не возрастает) очевидно следующее неравенство

$$f(k+1) \leqslant \int\limits_{k}^{k+1} f(x)dx \leqslant f(k),$$

которое влечет неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leqslant \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

Учитывая, что функция $F(\omega) = \int\limits_{1}^{\omega} f(x)dx$ не убывает, для существования предела $\lim\limits_{\omega\to+\infty} F(\omega)$ достаточно (и, конечно же, необходимо) существование предела $\lim\limits_{n\to+\infty} F(n+1)$ (докажите это!). Тогда утверждение теоремы легко получить предельным переходом при $n \to +\infty$. $\square$

Пример 7.3.2 *Теперь исследование ряда с общим членом* $\frac{1}{n\ln n}$, $n \geqslant 2$, *не представляет труда. Согласно интегральному признаку, достаточно рассмотреть сходимость интеграла*

$$\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}.$$

Так как интеграл, очевидно, расходится, то расходится и исследуемый ряд.

Идея, ипользованная при доказательстве интегрального признака Коши, часто помогает в исследовании асимптотики различных сумм. Докажем следующую лемму.

Лемма 7.3.3 *Пусть* $f(x) \geqslant 0$ *не возрастает на* $[1, +\infty)$. *Тогда последовательность*

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx$$

имеет предел.

Доказательство. Докажем, что A_n не убывает. Действительно,

$$A_{n+1} - A_n = f(n+1) - \int\limits_{n+1}^{n+2} f(x)dx \geqslant 0.$$

Покажем, что A_n ограничена сверху. Для этого сделаем следующее преобразование:

$$A_n = f(1) - f(n+1) + \sum_{k=2}^{n+1} f(k) - \int\limits_1^{n+1} f(x)dx.$$

Так как

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) = \sum_{k=1}^{n} f(k+1),$$

то, по доказанному в доказательстве интегрального признака Коши,

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) - \int\limits_1^{n+1} f(x)dx \leqslant 0,$$

откуда

$$A_n \leqslant f(1) - f(n+1) \leqslant f(1).$$

Согласно теореме Вейерштрасса, A_n имеет предел. $\square$

Замечание 7.3.10 *Применительно к поиску асимптотик, последняя лемма может быть использована следующим образом. Пусть* $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A$, *тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int\limits_1^{n+1} f(x)dx = A + \alpha_n \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} f(k) = \int\limits_1^{n+1} f(x)dx + A + \alpha_n,$$

где $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. *Особо интересны случаи, когда ряд, стоящий слева, расходится. Тогда (при* $n \to +\infty$*)*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \sim \int\limits_1^{n+1} f(x)dx.$$

Пример 7.3.3 *Рассмотрим гармонический ряд и найдем его асимптотику. Ясно, что*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \int\limits_1^{n+1} \frac{dx}{x} + A + \alpha_n = \ln(n+1) + A + \alpha_n.$$

Тем самым,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n+1) \sim \ln n.$$

Определение 7.3.1 *Постоянная A в равенстве*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \int_{1}^{n+1} \frac{dx}{x} + A + \alpha_n = \ln(n+1) + A + \alpha_n.$$

называется постоянной Эйлера и часто обозначается γ.

Замечание 7.3.11 *Полезно отметить, что написанное равенство дает способ вычисления постоянной Эйлера с любой точностью. Так как*

$$\ln(n+1) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right),$$

то

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right).$$

Замечание 7.3.12 *Для сходящихся рядов похожие рассуждения позволяют оценить скорость стремления остатка ряда к нулю. Пусть $f \geqslant 0$ и не возрастает на $[1, +\infty)$. Тогда*

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leqslant \int_{n}^{\infty} f(x)dx.$$

Например,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^a} \sim \frac{1}{(a-1)k^{a-1}}, \quad a > 1.$$

7.4 Ряды с произвольными членами

Будем рассматривать ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ с комплексными членами $a_k \in \mathbb{C}$.

Определение 7.4.1 *Говорят, что ряд с общим членом a_k сходится абсолютно, если сходится ряд с общим членом $|a_k|$.*

Заметим, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ положительный. А значит для исследования на абсолютную сходимость можно использовать признаки сходимости положительных рядов.

Теорема 7.4.1 (Абсолютная сходимость – это сходимость) *Если ряд с общим членом a_k сходится абсолютно, то он сходится.*

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши. Пусть $\varepsilon > 0$. Найдем n_0 такой, что

$$\forall n > n_0,\ \forall p \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon.$$

Но тогда и

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon,$$

откуда, согласно критерию Коши делаем вывод, что ряд с общим членом a_k сходится. □

Определение 7.4.2 *Если ряд с общим членом a_k сходится, но абсолютной сходимости нет, то говорят, что ряд с общим членом a_k сходится условно (или неабсолютно).*

Лемма 7.4.1 (Простые свойства абсолютно сходящихся рядов)

1. *Пусть $\operatorname{Re} a_k = x_k$, $\operatorname{Im} a_k = y_k$. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно тогда и только тогда, когда оба ряды $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ сходятся абсолютно.*

2. *Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ имеет сумму, то*

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

3. *Пусть $a_k = b_k + c_k$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ сходится абсолютно. Тогда ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ведут себя одинаково (либо одновременно сходятся условно, либо абсолютно, либо расходятся).*

Доказательство. Доказательства несложные и остаются в качестве лёгкого упражнения. □

Для исследования неположительных рядов на сходимость используют признаки Абеля–Дирихле, аналогичные соответствующим интегральным признакам. Для доказательства нам потребуется аналог формулы интегрирования по частям.

Лемма 7.4.2 (Преобразование Абеля) *Пусть $A_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i$. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = A_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1}).$$

Доказательство. Пусть $A_0 = 0$, тогда

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} (A_i - A_{i-1}) b_i = \sum_{i=1}^{n} A_i b_i - \sum_{i=1}^{n} A_{i-1} b_i =$$

$$= A_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i b_i - \sum_{i=0}^{n-1} A_i b_{i+1} = A_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1}).$$

$\square$

Теорема 7.4.2 (Признак Абеля-Дирихле) *Пусть даны последовательности $a_k \in \mathbb{C}$, $b_k \in \mathbb{R}$, причем b_k монотонна. Тогда для сходимости ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$$

достаточно выполнения любой из двух пар условий: либо

1. *Частичные суммы $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ ограничены, то есть $|A_n| \leqslant C$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*
2. *Последовательность b_k стремится к нулю, то есть $b_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$,*

либо

1. *Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.*
2. *Последовательность b_k ограничена, то есть $|b_k| \leqslant C$.*

Доказательство. 1. Воспользуемся преобразованием Абеля. В обозначениях теоремы,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

Так как $|A_n| \leqslant C$, в силу второго условия $A_n b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Тогда сходимость рассматриваемого ряда равносильна сходимости ряда с общим членом $A_k(b_k - b_{k+1})$. Покажем, что такой ряд сходится абсолютно. Это следует из теоремы сравнения и следующих выкладок:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k (b_k - b_{k+1})| \leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}| = C \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} |b_k - b_{k+1}| =$$

$$= C \lim_{n\to+\infty} |b_1 - b_{n+1}| = C|b_1|.$$

Итого, рассматриваемый ряд сходится.
2. Так как b_k монотонна и ограничена, то она имеет предел b. Рассмотрим последовательность $c_k = b_k - b$. Тогда для пары последовательностей a_k и c_k справедливы условия первого пункта, а значит сходится ряд с общим членом $a_k c_k$. Между тем,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k c_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k - b \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Итого, средний ряд сходится, так как сходятся два других ряда. □

Пример 7.4.1 *Неабсолютно сходящиеся ряды существуют. Рассмотрим*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Легко проверить, что абсолютной сходимости нет (ряд получается гармоническим). В то же время,

$$|A_n| = \left| \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \right| \leqslant 1, \quad \frac{1}{k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0, \text{ причем монотонно,}$$

а значит выполнена первая пара условий признака Абеля-Дирихле, и ряд сходится (условно).

Давайте найдем сумму этого ряда.

Лемма 7.4.3

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2.$$

Доказательство.

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = H_{2n} - H_n =$$

$$= \ln(2n) + \gamma + \alpha_{2n} - \ln n - \gamma - \alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2.$$

□

Пример 7.4.2 *Исследовать на абсолютную и условную сходимости ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^a}.$$

Ясно, что при $a \leqslant 0$ ряд расходится так как его общий член не стремится к нулю.

Если $a > 1$, то

$$\left|\frac{\sin k}{k^a}\right| \leqslant \frac{1}{k^a}$$

и, согласно признакам сравнения, исследуемый ряд сходится абсолютно.

Пусть теперь $a \in (0, 1]$. Сначала установим, что ряд сходится. Действительно,

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k = \frac{1}{2} \frac{\cos\frac{1}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\sin\frac{1}{2}},$$

а значит $|A_n| \leqslant \frac{1}{|\sin\frac{1}{2}|}$ и, так как $\frac{1}{k^a}$ монотонно стремится к нулю, то ряд сходится. Абсолютной сходимости нет, так как

$$\left|\frac{\sin k}{k^a}\right| \geqslant \frac{\sin^2 k}{k^a} = \frac{1 - \cos 2k}{2k^a} = \frac{1}{2k^a} - \frac{\cos 2k}{2k^a},$$

и ряд с общим членом $\frac{1}{2k^a}$ расходится, а с общим членом $\frac{\cos 2k}{2k^a}$ сходится (что доказывается аналогично только что проделанному).

Пример 7.4.3 *Условия монотонности в признаке Абеля-Дирихле важно. Рассмотрим ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{\sin k + \sqrt{k}}.$$

Рассмотрим цепочку преобразований

$$\frac{\sin k}{\sin k + \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin k \left(1 + \frac{\sin k}{\sqrt{k}}\right)^{-1} = \frac{\sin k}{\sqrt{k}} \left(1 - \frac{\sin k}{\sqrt{k}} + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sin k}{\sqrt{k}} - \frac{\sin^2 k}{k} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right).$$

Ясно, что ряд с общим членом $k^{-3/2}$ сходится, а значит ряд с общим членом $O(k^{-3/2})$ сходится абсолютно. Ряд с общим членом $\frac{\sin k}{\sqrt{k}}$ сходится (по доказанному ранее), а ряд с общим членом $\frac{\sin^2 k}{k}$ расходится. Значит, исходный ряд расходится.

Теорема 7.4.3 (Признак Лейбница) *Пусть рассматривается ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k,$$

где $a_k \in \mathbb{R}$, $a_k \geqslant 0$ *и* a_k *монотонно стремится к нулю. Тогда ряд сходится.*

Доказательство.

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} =$$

$$= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \geqslant S_{2n-2},$$

так как все слагаемые положительны (в силу невозрастания a_n) и, тем самым, S_{2n} не убывает. Кроме того,

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leqslant a_1,$$

откуда S_{2n} ограничена сверху. Значит, $S_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$. Но тогда

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} S,$$

так как общий член стремится к нулю. Тогда можно утверждать, что ряд сходится. $\square$

Определение 7.4.3 *Ряд, фигурирующий в условии теоремы, часто называют рядом лейбницевского типа или рядом Лейбница.*

Замечание 7.4.1 *Как показано в доказательстве теоремы,*

$$0 \leqslant S_{2n} \leqslant a_1.$$

Это значит, что $0 \leqslant S \leqslant a_1$.

Лемма 7.4.4 (Об остатке ряда лейбницевского типа) *Пусть рассматривается ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k,$$

где $a_k \geqslant 0$ *и* a_k *монотонно стремится к нулю. Тогда*

$$|R_n| \leqslant a_{n+1}, \quad R_n(-1)^n a_{n+1} \geqslant 0.$$

Иными словами, модуль остатка ряда лейбницевского типа не превосходит модуля первого отброшенного члена. Кроме того, остаток совпадает по знаку со знаком первого отброшенного члена.

Доказательство. Для доказательства достаточно применить к остатку ряда сформулированное выше замечание. $\square$

7.5 Перестановки ряда. Теорема Римана

Оказывается, над сходящимися рядами далеко не всегда можно проводить привычные нам операции.

Пример 7.5.1 *Рассмотрим ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots,$$

сумма которого вычислена выше и равна $\ln 2$*. Переставим его члены местами и рассмотрим следующий ряд*

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \ldots.$$

Рассмотрим частичную сумму нового ряда с номером $3n$*:*

$$\widetilde{S}_{3n} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} S_{2n},$$

где

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ln 2$*, то* $\widetilde{S}_{3n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ln 2}{2}$*. Легко понять, что* $\widetilde{S}_{3n+1}$ *и* $\widetilde{S}_{3n+2}$ *тоже сходятся к* $\frac{\ln 2}{2}$*, а значит можно утверждать, что*

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \ldots = \frac{\ln 2}{2}.$$

Итого, перестановка членов исходного ряда поменяла сумму.

Теорема 7.5.1 (Характерное свойство абсолютной сходимости) *Ряд с общим членом* $a_k \in \mathbb{R}$ *сходится абсолютно тогда и только тогда, когда сходятся ряды с общими членами*

$$a_k^+ = \begin{cases} a_k, & a_k \geqslant 0 \\ 0, & a_k < 0 \end{cases}, \quad \text{и} \quad a_k^- = \begin{cases} 0, & a_k \geqslant 0 \\ -a_k, & a_k < 0 \end{cases},$$

причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $S_n^{\pm} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{\pm}$ и

$$S_n^{|\cdot|} = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \xrightarrow[n\to+\infty]{} S^{|\cdot|}.$$

Тогда $S_n^{\pm} \leqslant S_n^{|\cdot|} \leqslant S^{|\cdot|}$, откуда (в силу возрастания $S_n^{\pm}$) $S_n^{\pm} \xrightarrow[n\to+\infty]{} S^{\pm}$. Кроме того, $S_n = S_n^{+} - S_n^{-}$, откуда, переходя к пределу при $n \to +\infty$, $S = S^{+} - S^{-}$
Докажем достаточность. Пусть $S_n^{\pm} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{\pm} \xrightarrow[n\to+\infty]{} S^{\pm}$. Тогда

$$S_n^{|\cdot|} = S_n^{+} + S_n^{-} \xrightarrow[n\to+\infty]{} S^{+} + S^{-} < \infty,$$

а значит ряд с общим членом a_k сходится абсолютно. Тогда он сходится, причем

$$S_n = S_n^{+} - S_n^{-}$$

и, переходя к пределу, получаем требуемое равенство для сумм. □

Следствие 7.5.2 *Если ряд с общим членом $a_k \in \mathbb{R}$ сходится условно, то $S^{\pm} = +\infty$.*

Теперь решим вопрос о перестановке абсолютно сходящегося ряда.

Определение 7.5.1 *Биекция $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ называется перестановкой множества натуральных чисел.*

Определение 7.5.2 *Пусть дан ряд с общим членом a_k и перестановка натуральных чисел φ. Тогда ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$$

называется перестановкой исходного ряда.

Теорема 7.5.3 (О перестановке абсолютно сходящегося ряда)
Пусть ряд с общим членом $a_k \in \mathbb{C}$ сходится абсолютно. Тогда любая его перестановка сходится абсолютно, причем к той же сумме.

Доказательство. Рассмотрим несколько случаев.
1. Пусть все $a_k \geqslant 0$. Тогда

$$\widetilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} \leqslant \sum_{k=1}^{p} a_k = S_p \leqslant S, \quad p = \max_{k\in\{1,2,\ldots,n\}} \varphi(k).$$

Значит, перестановка сходится, причем $\widetilde{S} \leqslant S$. Наоборот, так как $\widetilde{S} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$, то ряд с общим членом a_k – его перестановка $(a_k = a_{\varphi^{-1}(\varphi(k))})$, а значит, по доказанному, $S \leqslant \widetilde{S}$, откуда $S = \widetilde{S}$.
2. Пусть теперь $a_k \in \mathbb{R}$. Пусть a_k^+ и a_k^- – подпоследовательности a_k, состоящие только из неотрицательных и отрицательных членов, соответсвенно. Ряды, с общими членами a_k^+ и a_k^- сходятся абсолютно, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \sum_{k=1}^{\infty} (a_{\varphi(k)})^+ - \sum_{k=1}^{\infty} (a_{\varphi(k)})^- = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}.$$

3. Если $a_k \in \mathbb{C}$, то ряды с общими членами $x_k = \operatorname{Re} a_k$ и $y_k = \operatorname{Im} a_k$ сходятся абсолютно, а значит ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} x_{\varphi(k)} + i \sum_{k=1}^{\infty} y_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + i \sum_{k=1}^{\infty} y_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

□

Оказывается, для условно сходящихся рядов такая теорема уже не имеет места. Мы рассмотрим для вещественных рядов теорему Римана, а аналогичная ей теорема для комплексных рядов (теорема Сохоцкого) будет изучена нами позже.

Теорема 7.5.4 (Теорема Римана) *Пусть ряд с общим членом $a_k \in \mathbb{R}$ сходится условно. Тогда какое бы не взять $S \in \overline{\mathbb{R}}$, существует перестановка натуральных чисел φ, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = S.$$

Кроме того, существует такая перестановка исходного ряда, которая не имеет суммы в $\overline{\mathbb{R}}$.

Доказательство. Пусть a_k^+ и a_k^- – подпоследовательности a_k, состоящие только из неотрицательных и отрицательных членов, соответсвенно, причем оба ряда расходятся (к $+\infty$ и $-\infty$, соотвественно). Пусть $S \in \mathbb{R}$, $S \geqslant 0$, $a_0^+ = a_0^- = 0$. Пусть p_1 – наименьшее натуральное число, что

$$\sum_{k=0}^{p_1-1} a_k^+ \leqslant S < \sum_{k=0}^{p_1} a_k^+.$$

Пусть теперь q_1 – наименьшее натуральное число, что

$$\sum_{k=0}^{p_1} a_k^+ + \sum_{k=0}^{q_1} a_k^- < S \leqslant \sum_{k=0}^{p_1} a_k^+ + \sum_{k=0}^{q_1-1} a_k^-.$$

Пусть построены числа $p_1, ..., p_{l-1}$ и $q_1, ..., q_{l-1}$. Найдем наименьшее число p_l, что

$$\sum_{k=0}^{p_l-1} a_k^+ + \sum_{k=0}^{q_{l-1}} a_k^- \leqslant S < \sum_{k=0}^{p_l} a_k^+ + \sum_{k=0}^{q_{l-1}} a_k^-.$$

Теперь найдем наименьшее число q_l, что

$$\sum_{k=0}^{p_l} a_k^+ + \sum_{k=0}^{q_l} a_k^- < S \leqslant \sum_{k=0}^{p_l} a_k^+ + \sum_{k=0}^{q_l-1} a_k^-.$$

Все построения возможны в виду расходимости обоих рядов (из их членов можно набрать сколь угодно большую положительную и сколь угодно маленькую отрицательную суммы).

Рассмотрим ряд

$$A_1^+ + A_1^- + A_2^+ + A_2^- + ... + A_l^+ + A_l^- + ...,$$

где ($p_0 = q_0 = 0$)

$$A_i^+ = \sum_{k=p_{i-1}+1}^{p_i} a_k^+, \quad A_i^- = \sum_{k=q_{i-1}+1}^{q_i} a_k^-,$$

причем если $\widetilde{S}_n$ – его частичная сумма, то

$$a_{q_l}^- < \widetilde{S}_{2n} - S < 0,$$

а

$$0 < \widetilde{S}_{2n+1} - S < a_{p_{l+1}}^+.$$

Так как общий член ряда, в силу сходимости, стремится к нулю, то доказано, что

$$\lim_{n\to+\infty} \widetilde{S}_n = S.$$

Так как все члены в каждой группе одного знака, то перестановка рассматриваемого ряда сходится к S. Остальные случаи остаются в качестве упражнения. □

7.6 Произведение рядов

Для конечных сумм имеем

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_k b_j,$$

и для конечных m, n последнее выражение не зависит ни от порядка суммирования, ни от способа перемножения. У рядов сразу возникают вопросы: будет ли сходиться полученный ряд? В каком порядке можно складывать?

Определение 7.6.1 *Пусть даны ряды с общими членами a_k и b_k, (φ, ψ) – биекция $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}^2$. Тогда ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)}$$

называется произведением рядов с общими членами a_k и b_k.

Итак, произведение рядов – это ряд с произвольным порядком слагаемых вида $a_i b_j$.

Теорема 7.6.1 (Коши о произведении рядов) *Пусть ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = A$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = B$ сходятся абсолютно. Тогда их произведение абсолютно сходится к AB.*

Доказательство. Пусть (φ, ψ) – биекция $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}^2$. Тогда

$$\widetilde{S}_n^{|\cdot|} = \sum_{k=1}^{n} \left|a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{p} |a_k| \sum_{k=1}^{t} |b_k| \leqslant A^{|\cdot|} B^{|\cdot|},$$

$$p = \max_{k \in \{1,2,\ldots,n\}} \varphi(k),\ t = \max_{k \in \{1,2,\ldots,n\}} \psi(k),$$

$$A^{|\cdot|} = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|, \quad B^{|\cdot|} = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|.$$

В итоге, ряд с общим членом $a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)}$ сходится абсолютно. Значит, его сумма не зависит от перестановки. Тогда просуммируем «по квадратам».

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} b_j \xrightarrow[n \to +\infty]{} AB.$$

$\square$

Часто используется так называемое произведение по Коши (особенно – в степенных рядах).

Определение 7.6.2 *Ряд с общим членом c_k, где*

$$c_k = \sum_{j=1}^{k} a_j b_{k+1-j},$$

называется произведением по Коши рядов с общими членами a_k и b_j.

Замечание 7.6.1 *Часто произведение нумеруют с нуля. Тогда*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}.$$

Пример 7.6.1 *Ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$$

сходится по признаку Лейбница. А что с его квадратом по Коши?

$$c_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{\sqrt{j}} \frac{(-1)^{k-j}}{\sqrt{k+1-j}} = (-1)^{k-1} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{j(k+1-j)}}.$$

Тогда

$$|c_k| = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{j(k+1-j)}} \geqslant \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k}} = 1.$$

Итого, нарушено необходимое условие сходимости ряда.

Теорема 7.6.2 (Теорема Мертенса) *Если два ряда сходятся, причем хотя бы один из них – абсолютно, то их произведение по Коши тоже сходится, причем к произведению сумм.*

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится. Введем привычные обозначения

$$S_n^A = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad S^A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad S_n^{|A|} = \sum_{k=1}^{n} |a_k|, \quad S^{|A|} = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|,$$

$$S_n^B = \sum_{k=1}^{n} b_k, \quad S^B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Рассмотрим произведение по Коши – ряд с общим членом

$$c_k = \sum_{j=1}^{k} a_j b_{k-j+1}.$$

Ясно, что

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_j b_{k-j+1} = a_1 S_n^B + a_2 S_{n-1}^B + \ldots + a_n S_1^B.$$

Так как $S^B = S_n^B + R_n^B$, то, подставляя $S_n^B = S^B - R_n^B$, получим

$$S_n^C = S_n^A S^B - \alpha_n,$$

где

$$\alpha_n = a_1 R_n^B + a_2 R_{n-1}^B + \ldots + a_n R_1^B.$$

Для доказательства утверждения достаточно показать, что $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Так как ряд с общим членом b_k сходится, то

$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0 \ \Rightarrow \ |R_n^B| < \varepsilon.$$

Пусть $n > n_0$, тогда

$$|\alpha_n| = \left|\sum_{j=1}^{n} R_j^B a_{n-j+1}\right| \leqslant \left|\sum_{j=1}^{n_0} R_j^B a_{n-j+1}\right| + \left|\sum_{j=n_0+1}^{n} R_j^B a_{n-j+1}\right|.$$

Для второй суммы справедлива оценка:

$$\left|\sum_{j=n_0+1}^{n} R_j^B a_{n-j+1}\right| < \varepsilon \sum_{j=n_0+1}^{n} |a_{n-j+1}| \leqslant \varepsilon S^{|A|}.$$

Рассмотрим первую сумму. Так как $R_n^B \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, то $|R_n^B| \leqslant M$. Тогда

$$\left|\sum_{j=1}^{n_0} R_j^B a_{n-j+1}\right| \leqslant M \sum_{j=1}^{n_0} |a_{n-j+1}| = M \sum_{j=n-n_0+1}^{n} |a_j| =$$

$$= M\left(R_{n-n_0}^{|A|} - R_n^{|A|}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

в силу абсолютной сходимости ряда с общим членом a_k. Итого,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n^C = \lim_{n\to+\infty}\left(S_n^A S^B - \alpha_n\right) = S^A S^B.$$

$\square$

В заключение данного пункта, приведем следующий интересный пример.

Пример 7.6.2 *Произведение по Коши двух расходящихся рядов может быть даже абсолютно сходящимся. Рассмотрим ряды с общими членами*

$$a_k = \begin{cases} 1, & k = 1 \\ 2^{k-2}, & k > 1 \end{cases}, \quad b_k = \begin{cases} 1, & k = 1 \\ -1, & k > 1 \end{cases}$$

Рассмотрим произведение по Коши. $c_1 = 1$, *а при* $k > 1$

$$c_k = \sum_{j=1}^{k} a_j b^{k-j+1} = -1 - \sum_{j=2}^{k-1} 2^{j-2} + 2^{k-2} = -1 - \frac{1-2^{k-2}}{1-2} + 2^{k-2} = 0.$$

Итого, построенный ряд сходится абсолютно к сумме 1.

8 Пространство $\mathbb{R}^n$

Пространство, в котором будем работать – $\mathbb{R}^n$ – линейное пространство, состоящее из n-мерных векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in \mathbb{R}$.

Но многие понятия данного раздела используют для произвольных пространств. И читателю полезно представлять себе максимально абстрактные пространства.

8.1 Метрическое пространство

Определение 8.1.1 *Пусть* X *– некоторое множество. Функция* ρ: $X \times X \to \mathbb{R}$ *называется метрикой (или расстоянием) на* X*, если* $\forall x, y, z \in X$ *выполнено: 1)* $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *;*

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ *(аксиома симметрии);*

3) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$ *(аксиома треугольника).*

При этом пара (X, ρ) *называется метрическим пространством.*

Заметим, что из аксиомы треугольника при $x = z$ следует неотрицательность расстояния: $\forall x, y \in X \ \rho(x, y) \geqslant 0$.

На одном и том же множестве X можно задать разные метрики, получив тем самым разные метрические пространства.

Если понятно, какая метрика задана, то часто метрическое пространство (X, ρ) обозначают также, как и множество, на котором оно задано – X.

Пример 8.1.1 $X = \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = |x - y|$.

Пример 8.1.2 $X = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\rho_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} \quad \textit{Евклидова метрика, стандартна для } \mathbb{R}^n$$

Пример 8.1.3 $X = \mathbb{R}^n$, $p \geqslant 1$,

$$\rho_p(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p}$$

При $p = 1$ – *Манхеттеновское расстояние (расстояние городских кварталов).*

При $p = +\infty$*:* $\rho(x, y) = \max\limits_{i=1..n} |x_i - y_i|$ – *расстояние Чебышёва.*

Для доказательства того, что в последнем примере функция ρ действительно задает метрику, воспользуемся неравенством Минковского:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{1/p}$$

и проверим выполнение неравенства треугольника:

$$\rho(x, z) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i|^p} = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |(x_i - y_i) + (y_i - z_i)|^p} \leqslant$$

при $a_i = x_i - y_i$, $b_i = y_i - z_i$

$$\leqslant \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|^p} = \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Пример 8.1.4 *Дискретная метрика (для любого* X*)* $\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y; \\ 0, & x = y. \end{cases}$

Пример 8.1.5 *Для* $f, g \in C[a, b] = X$*:* $\rho(f, g) = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f - g|$.

Пример 8.1.6 *Для* $f, g \in C[a, b] = X$*:* $\rho(f, g) = \sqrt[p]{\int\limits_a^b |f - g|^p dx}$.

Заметим, что в последнем примере нельзя взять $X = R[a, b]$, так как расстояние между функциями, отличающимися в одной точке (а значит, различными), будет равно нулю, то есть не выполняется первая аксиома метрики.

8.2 Типы точек и множеств в метрическом пространстве

В этом пункте будем предполагать, что (X, ρ) – произвольное метрическое пространство.

Определение 8.2.1 ***Открытым (замкнутым) шаром*** *с центром $a \in X$ и радиусом r $(r > 0)$ называется множество*

$$B_r(a) = \{x \in X : \rho(x, a) < r\} \, (\bar{B}_r(a) = \{x \in X : \rho(x, a) \leqslant r\}),$$

сфера *с центром $a \in X$ и радиусом r $(r > 0)$:*

$$S_r(a) = \{x \in X : \rho(x, a) = r\} \, .$$

Пример 8.2.1 *Нарисуйте сферу $S_1(0, 0)$ в пространстве $\mathbb{R}^2$ с метриками ρ_2, ρ_1, $\rho_{+\infty}$ (см. Пример 8.1.3).*

Пусть $M \subset X$ – некоторое множество. По отношению к множеству M точку $x_0 \in X$ можно охарактеризовать следующим образом:

Определение 8.2.2

1. *Точка x_0 называется **внутренней** точкой множества M, если существует шар $B_r(x_0) \subset M$, то есть точка x_0 лежит в M вместе с некоторым открытым шаром.*

2. *Точка x_0 называется **внешней** точкой множества M, если она является внутренней для дополнения M^C.*

3. *Иначе точка x_0 называется **граничной** точкой множества M.*

Таким образом, внутренняя точка обязательно принадлежит множеству, внешняя – не принадлежит, а граничная точка – это такая точка, что в любом шаре с центром в этой точке есть точки как из данного множества, так и не принадлежащие ему.

Будем использовать следующие обозначения:

$$\operatorname{Int} M - \text{множество внутренних точек (внутренность) } M$$
$$\partial M - \text{множество граничных точек (граница) } M.$$

Лемма 8.2.1 *В метрическом пространстве $(\mathbb{R}^n, \rho)$ выполнено:*

1. $\partial \bar{B}_r(x_0) = \partial B_r(x_0) = \partial S_r(x_0) = S_r(x_0)$;

2. $\operatorname{Int} B_r(x_0) = \operatorname{Int} \bar{B}_r(x_0) = B_r(x_0)$;

3. $\operatorname{Int} S_r(x_0) = \emptyset$.

Доказательство. Доказательство основано на определениях. Проделайте самостоятельно (например, для $\mathbb{R}^2$). $\square$

Теперь определим понятие открытого и замкнутого множества.

Определение 8.2.3 *Множество $G \subset X$ называется **открытым** (в X), если все его точки – внутренние. Пустое множество $\emptyset$ считается открытым по определению.*

То есть, G – открыто, если

$$\forall x \in G \ \exists B_r(x) \subset G,$$

другими словами, вместе с каждой своей точкой оно содержит и некоторый открытый шар с центром в этой точке.

Пример 8.2.2 *$\emptyset$ и X – открыты в X; интервал (a,b) – открыт, а отрезок $[a,b]$ не открыт в (R,ρ_1).*

Лемма 8.2.2 *Открытый шар есть открытое множество.*

Доказательство. Пусть $\xi \in B_r(x_0)$. Возьмём $r_\xi = \frac{1}{2}(r - \rho(\xi,x_0))$ и покажем, что $B_{r_\xi}(\xi) \subset B_r(x_0)$.

Пусть $y \in B_{r_\xi}(\xi)$. Тогда

$$\rho(y,x_0) \leqslant \rho(y,\xi) + \rho(\xi,x_0) < \frac{r-\rho(\xi,x_0)}{2} + \rho(\xi,x_0) = \frac{r+\rho(\xi,r_0)}{2} < \frac{2r}{2} = r$$

то есть, $y \in B_r(x_0)$. $\square$

Определение 8.2.4 ***Окрестностью** $U(x_0)$ точки $x_0 \in X$ называется любое открытое множество, содержащее эту точку.*

***Проколотой окрестностью** $\overset{o}{U}(x_0)$ называется разность окрестности и данной точки: $\overset{o}{U}(x_0) = U(x_0) \setminus \{x_0\}$.*

***Эпсилон-окрестностью** точки x_0 называется открытый шар радиуса ε: $U_\varepsilon(x_0) := B_\varepsilon(x_0)$.*

Определение 8.2.5 *Множество $F \subset X$ называется **замкнутым** в X, если его дополнение $F^C = X \setminus F$ открыто в X.*

Пример 8.2.3 *$\emptyset$ и X – замкнуты в X; интервал (a,b) – не замкнут, а отрезок $[a,b]$ замкнут в (R,ρ_1).*

Заметим, что в $\mathbb{R}^n$ (с евклидовой метрикой) только два множества $\emptyset$ и X являются открытыми и замкнутыми одновременно.

Пример 8.2.4 *Пусть* $X = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$. *Тогда* $M = (-\infty, 0)$ *– открыто и замкнуто в* X. *В англоязычной литературе такие множества называются clopen set.*

Лемма 8.2.3 *Замкнутый шар есть замкнутое множество.*

Доказательство. Докажите самостоятельно. □

В следующей Лемме все множества – подмножества X.

Лемма 8.2.4 (Свойства открытых и замкнутых множеств)

1. *Если* G_α, $\alpha \in A$ *– открыты, тогда* $\bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$ *– открыто.*
2. *Если* $G_1, \ldots, G_n$ *– открыты, тогда* $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$ *– открыто.*
3. *Если* F_α, $\alpha \in A$ *– замкнуты, тогда* $\bigcap\limits_{\alpha \in A} F_\alpha$ *– замкнуто.*
4. *Если* $F_1, \ldots, F_n$ *– замкнуты, тогда* $\bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i$ *– замкнуто.*
5. *Если* G *– открыто, а* F *– замкнуто, то* $G \setminus F$ *– открыто, а* $F \setminus G$ *– замкнуто в* X.

Доказательство. 1. Пусть $x \in G = \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$. Тогда $x \in G_\alpha$ для некоторого $\alpha \in A$, а значит $\exists B(x) \subset G_\alpha \subset G$, откуда следует, что G – открыто.

2. Пусть $x \in F = \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$. Тогда $x \in G_i$ $\forall i = 1..n$ и $\exists r_1, \ldots, r_n$: $B_{r_i}(x) \in G_i$. Тогда $B_r(x) \in G$, где $r = \min\limits_{i=1..n} r_i$.

3,4. Доказательство следует из доказанного и законов де Моргана.

5. Доказательство основано на равенствах:

$$G \setminus F = G \cap F^C, \qquad F \setminus G = F \cap G^C.$$

□

Пример 8.2.5 *Пересечение открытых множеств может не быть открытым, а объединение замкнутых – замкнутым:*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(0,\ 1 + \frac{1}{n}\right) = (0, 1], \qquad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right] = (0, 2).$$

Очевидно, что сфера – замкнутое множество, так как представима в виде разности замкнутого и открытого шаров: $S_r(a) = \bar{B}_r(a) \setminus B_r(a)$.

Определение 8.2.6 *Точка x_0 называется* ***предельной точкой*** *множества M, если в любой её проколотой окрестности точки есть точки из множества M. Множество предельных точек обозначают M'.*

Предельная точка не обязательно принадлежит множеству. Понятно, что в любой окрестности предельной точки имеется бесконечно много точек данного множества.

Определение 8.2.7 *Если к множеству M добавить все его предельные точки, то полученное множество называется* ***замыканием*** *множества M. Замыкание обозначают $\operatorname{cl} M$ или $\bar{M}$.*

$$\operatorname{cl} M = M \cup M', \quad M' \text{ – мн-во предельных точек .}$$

Следующую теорему часто используют как другое определение замкнутого множества.

Теорема 8.2.1 (Критерий замкнутости множества) *Множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.*

Другими словами, F – замкнуто $\Leftrightarrow F = \operatorname{cl} F$.

Доказательство. 1. Пусть F – замкнуто, $x \in F' \setminus F$. Тогда $x \in F^C$ и F^C – открыто, а значит некоторая окрестность $U(x_0)$ целиком лежит в F^C и не может содержать точек из F, что противоречит тому, что x_0 – предельная для F.

2. Пусть теперь $F = \operatorname{cl} F$. Докажем, что F^C – открыто. Пусть $x \in F^C$. Тогда $x \notin F = \operatorname{cl} F$, то есть точка x не предельная для F. Тогда существует шар $B_r(x) \subset F^C$, не содержащий точек F, откуда следует, что точка x – внутренняя для F^C. То есть F^C – открыто. □

Определение 8.2.8 *Точка $x \in M$ и не являющаяся предельной точкой множества M называется* ***изолироанной точкой*** *множества M.*

Для изолированной точки существует окрестность, не содержащая других точек из M. Каждая точка множества M является либо его предельной точкой, либо изолированной.

Еще несколько простых свойств произвольного множества $M \subset X$:

1. $\operatorname{cl} M$ – замкнуто;
2. $\operatorname{Int} M$ – открыто;
3. ∂M – замкнуто.

8.3 Нормированные линейные пространства

Здесь мы вспомним понятие нормированного пространства и свойства нормы.

Пространство является ***линейным*** (или ***векторным***), если в нем определены операции сложения элементов и умножение элемента на число (для нас вещественное). Эти операции должны удовлетворять аксиомам сложения и умножения, и их результаты должны лежать в этом же пространстве.

Нормой $\|\cdot\|$ называется отображение $X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее аксиомам нормы:

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
3. $\forall x, y \in X \quad \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ – неравенство треугольника.

Линейное пространство, на котором задана норма называется **нормированным пространством**.

Заметим, что условие $\|x\| \geqslant 0$ следует из неравенства треугольника при $y = -x$.

Всякое нормированное пространство можно сделать метрическим, если ввести метрику:

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Таким образом на нормированные пространства переносятся все понятия, имеющиеся для метрических пространств.

Отметим ещё одно свойство нормы:

$$\|x - y\| \geqslant \Big| \|x\| - \|y\| \Big|.$$

Приведем примеры стандартных норм (сравните с Примером 8.1.3):

Пример 8.3.1 *1. На множестве $\mathbb{R}$ естественная норма $\|x\| = |x|$.*

2. В пространстве $\mathbb{R}^n$ с элементами $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно ввести следующие нормы:

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}, \qquad (\textit{при } p = 2 \textit{ евклидова норма});$$

$$\|x\|_\infty = \max |x_i|.$$

3. $X = C[a,b]$*:*

$$\|f\| = \max |f(x)| \quad \text{– } \textit{равномерная норма};$$

или

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p dx} \quad \text{– } \textit{интегральная норма.}$$

Ещё один пример рассмотрим более подробно.

О норме линейного оператора

Множество линейных операторов, действующих из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$ будем обозначать $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Это множество является линейным пространством. Норма определяется следующим образом:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|},$$

то есть, $\|A\|$ – это инфимум таких чисел C, для которых при всех $x \in \mathbb{R}^m$ верно неравенство

$$\|Ax\| \leqslant C\|x\|.$$

Почему указанный супремум существует, будет ясно из п.4 следующей леммы, описывающей свойства нормы линейного оператора.

Лемма 8.3.1 (Свойства нормы линейного оператора) *Для линейного оператора* $A \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ *верны свойства:*

1. $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$*;*

2. $\|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|$*;*

3. $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$*;*

4. $\|A\| \leqslant C_A$*, где* $C_A = \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2\right)^{1/2}$*, где* $\{a_{ij}\}$ *– матрица оператора* A*.*

Доказательство. 1. Так как для любого $x \neq 0$ верно $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$, то

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Тогда требуемое равенство следует из неравенства

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| \geqslant \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|A\|.$$

2. Сразу следует из определения нормы линейного оператора.
3. Следует из цепочки неравенств: $\|ABx\| \leqslant \|A\| \cdot \|Bx\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\|$.
4. Воспользуемся неравенством Коши–Буняковского:

$$\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \Big)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2 \sum_{j=1}^{m} x_j^2 \Big) = \Big(\sum_{i,j} a_{ij}^2 \Big) \sum_{j=1}^{m} x_j^2 = C_A \|x\|^2.$$

□

8.4 Компактные множества

Здесь везде (X, ρ) – метрическое пространство.

Определение 8.4.1 *Говорят, что система множеств E_α, $\alpha \in A$, образует* ***покрытие*** *множества X, если $X \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} E_\alpha$.*

Определение 8.4.2 *Множество $K \subset X$ называется компактным (или компактом), если из любого его покрытия множествами, открытыми в X, можно выделить конечное покрытие.*

Пример 8.4.1 *Отрезок $[a, b]$ – компакт в $\mathbb{R}$ (по лемме Бореля–Лебега: из любого покрытия отрезка интервалами можно выделить конечное покрытие), $[a, b)$ – не компакт в $\mathbb{R}$.*

Множество

$$\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n : \; a_i \leqslant x_i \leqslant b_i\}$$

будем называть **n-мерным параллелепипедом** (или **брусом**).

Лемма 8.4.1 *Брус Π – компакт.*

Доказательство. Пусть существует покрытие бруса $\Pi_0 = \Pi$ открытыми множествами E_α, $\alpha \in A$ такое, что из них нельзя выделить конечное покрытие.

Поделим каждую сторону Π_0 пополам. Получим 2^n новых параллелепипедов. Хотя бы один из них не допускает конечного покрытия, пусть это параллелепипед Π_1. Продолжаем и т.д.

$$\Pi = \Pi_0 \supset \Pi_1 \supset \Pi_2 \supset ...\Pi_p \supset ...$$

$$\Pi_p = \{x \in \mathbb{R}^n : \; a_i^p \leqslant x_i \leqslant b_i^p\}, \quad b_i^p - a_i^p \to 0 \text{ при } p \to \infty.$$

Получаем систему вложенных отрезков по p: $I_p^i = [a_i^p,\ b_i^p]$. По теореме Кантора найдется

$$\exists \eta_i \in \bigcap_{p=0}^{\infty} I_p^i$$

$$\eta = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n) \in \Pi_i \quad \forall i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \Rightarrow$$

$$\exists E_{\alpha_0} :\ \eta \in E_{\alpha_0},\ E_{\alpha_0} \text{ – открыто} \quad \Rightarrow \quad B(\eta, r) \subset E_{\alpha_0} \quad \Rightarrow$$

$$\exists p_0 :\ \forall p > p_0\ \Pi_p \subset B(\eta, r) \subset E_{\alpha_0} \quad \Rightarrow \text{ Противоречие с построением } \Rightarrow$$

Π – компакт. □

Теорема 8.4.1 (Критерий компактности в $\mathbb{R}^n$) *Множество компактно в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено в $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. 1. Пусть K – компакт в $\mathbb{R}^n$. Докажем замкнутость. Пусть $x \notin K$ – предельная точка K. Тогда $\forall y \in K$ найдем пару окрестностей $U_y(y)$, $O_y(x)$: $U_y(y) \cap O_y(x) = \emptyset$. Множество окрестностей $U_y(y)$, $y \in \mathbb{R}$ образует открытое покрытие K. Выделим из него конечное покрытие

$$U(y_1), ..., U(y_m); \quad K \subset \bigcup_{i=1}^{m} U(y_i),$$

которому соответствует конечный набор окрестностей $\{O_i(x)\}$. Рассмотрим

$$O(x) = \bigcap_{i=1}^{m} O_i(x) \text{ – окрестность } x,$$

причем $O(x)$ не пересекается с $\bigcup_{i=1}^{m} U(y_i) \supset K$, значит $O(x) \cap K = \emptyset \Rightarrow x$ – не предельная. Противоречие. И значит K замкнуто.

Докажем ограниченность. Ограниченность множества $K \subset \mathbb{R}^n$ равносильна $\exists B(0, r) \supset K$. Рассмотрим множество шаров $B(x, n)$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(x, n) \supset K \quad \text{– открытое покрытие } K.$$

Можно выбрать конечное покрытие $B(x, n_1), ..., B(x, n_p)$. Тогда

$$K \subset B(x, \max\{n_1, ..., n_p\}).$$

2. Обратно. Пусть K – замкнуто и ограничено в $\mathbb{R}^n$ и G_α – открытое покрытие K.

Так как K ограничено, то найдётся брус Π, содержащий K: $K \subset \Pi$. Пусть $G = \mathbb{R}^n \setminus K$ – открыто. Тогда объединение $\bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha \cup G$ образует открытое покрытие бруса Π. Так как брус компактен, то выделим из этого покрытия конечное, которое будет и покрытием K. Значит K – компакт. □

8.5 Сходимость последовательности

Введем понятие расширенного пространства $\mathbb{R}^n$, дополнив его бесконечно удаленной точкой.

Определение 8.5.1 $\bar{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. *При этом эпсилон-окрестностью бесконечности называется*

$$U_\varepsilon(\infty) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \rho(x, 0) > 1/\varepsilon\}.$$

Заметим, что $\bar{\mathbb{R}}^1 \neq \bar{\mathbb{R}}$, так как в $\bar{\mathbb{R}}$ содержатся точки $+\infty$ и $-\infty$.

Определение 8.5.2 *Последовательностью x^k в $\mathbb{R}^n$ называется отображение $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$.*

Обозначать будем так:

$$x^k = \left(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k\right).$$

Определение 8.5.3 *Последовательность называется ограниченной, если существует шар $B_r(0)$, содержащий все члены последовательности.*

Заметим, что для ограниченности последовательности достаточно наличие шара, содержащего члены последовательности начиная с некоторого номера.

Замечание 8.5.1 *Ограниченность x^k равносильна ограниченности всех x_i^k, $\forall i \in \{1, ..., n\}$.*

Определение 8.5.4 *Пусть $A \in \bar{\mathbb{R}}^n$. Говорят, что A – предел последовательности x^k, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 \in N : \ \forall k > k_0 \ \Rightarrow \ x^k \in U_\varepsilon(A).$$

Если $A \in \mathbb{R}^n$, то $x^k \in U_\varepsilon(A) \Leftrightarrow \|x^k - A\| < \varepsilon$ или $\rho(x^k, A) < \varepsilon$.
Если $A = \infty$, то $x^k \in U_\varepsilon(A) \Leftrightarrow \|x^k\| > 1/\varepsilon$ или $\rho(x^k, 0) > 1/\varepsilon$.

Определение 8.5.5 *Если $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = A \in \mathbb{R}^n$, то x^k называется сходящейся последовательностью.*

Замечание 8.5.2 *Сходимость последовательности зависит от введенной метрики и нормы. Так при одной метрике данная последовательность может сходиться, а при другой – расходиться.*

Замечание 8.5.3 *Далее, говоря про пространство $\mathbb{R}^n$, используем по умолчанию естественную норму:*

$$\|x\| := \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}.$$

Свойства сходящихся последовательностей в $\mathbb{R}^n$:

1. Если существует предел последовательности в $\bar{\mathbb{R}}$, то он единственен.

2. Пусть $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, $A = \{A_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$x^{(k)} \to A \Leftrightarrow \lim x_i^{(k)} = A_i, i = 1, \ldots, n,$$

то есть, сходимость последовательности в $\mathbb{R}^n$ равносильна сходимостям в $\mathbb{R}^1$ последовательностей каждой координаты.

Доказательство. Пусть $x^k \to A = (A_1, ..., A_n)$. Тогда

$$0 \leqslant |x_i^k - A_i| \leqslant \sqrt{(x_i^k - A_i)^2 + ... + (x_n^k - A_n)^2} \longrightarrow 0,$$

откуда следует $x_i^k \to A_i$.

Обратно. Пусть теперь $x_i^k \to A_i$, тогда

$$0 \leqslant \sqrt{(x_i^k - A_i)^2 + ... + (x_n^k - A_n)^2} \leqslant \sqrt{n \cdot \max(x_i^k - A_i)^2} = \\ = \sqrt{n} \cdot \max |x_i^k - A_i| \longrightarrow 0.$$

$\square$

3. Если последовательность сходится, то она ограничена.

4. Линейность. Пусть $x^k \to x$, $y^k \to y$ $(x, y \in \mathbb{R}^n)$, $\lambda_k \to \lambda$ $(\lambda_k, \lambda \in \mathbb{R})$. Тогда

   (a) $x^k + y^k \longrightarrow x + y$;

   (b) $\lambda_k \cdot x^k \longrightarrow \lambda x$;

   (c) $\alpha x^k + \beta y^k \longrightarrow \alpha x + \beta y$.

5. Пусть $x^k \to A \in \bar{\mathbb{R}}^n$, тогда любая её подпоследовательность $x^{k_p} \longrightarrow A$.

Свойство 1 доказывается также, как в $\mathbb{R}$. Доказательства Свойств 3–5 удобно провести, сославшись на Свойство 2.

Заметим, что Свойство 2 не выполнено для $A = \infty$. Например, $(n, 0) \to \infty \in \mathbb{R}^2$.

Теорема 8.5.1 (Больцано–Вейерштрасса) *Если последовательность ограничена в $\mathbb{R}^n$, то существует её сходящаяся подпоследовательность. У неограниченной последовательности существует подпоследовательность, стремящаяся к бесконечности.*

Доказательство. Докажем для $\mathbb{R}^2$. Пусть $x^k = (x_1^k, x_2^k)$ – ограничена. Следовательно, x_1^k – ограничена (в $\mathbb{R}$) и по теореме Больцано–Вейерштрасса (для $\mathbb{R}$) в ней можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x_1^{k_p}$. Рассмотрим теперь последовательность $x_2^{k_p}$ (она ограничена, т.к. x_2^k ограничена) и выделим в ней сходящуюся подпоследовательность $x_2^{k_{p_t}}$. Получаем сходящуюся в $\mathbb{R}^2$ подпоследовательность исходной последовательности $(x_1^{k_{p_t}}, x_2^{k_{p_t}})$. □

Определение 8.5.6 *Последовательность $x_n \in X$ в метрическом пространстве (X, ρ) называется **фундаментальной** (или **последовательностью Коши**), если*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall k, m > N \quad \rho\left(x^k, x^m\right) < \varepsilon.$$

Теорема 8.5.2 (Критерий Коши) *В $\mathbb{R}^n$ последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Доказательство. 1. Пусть $x^k \to A$. Тогда фундаментальность следует из неравенства:

$$\|x^k - x^m\| \leqslant \|x^k - A\| + \|x^m - A\|.$$

2. Пусть x^k – фундаментальна. Тогда каждая её координатная последовательность фундаментальна, т.к. $\|x_i^k - x_i^m\| \leqslant \|x^k - x^m\|$. И по критерию Коши в $\mathbb{R}$ все последовательности x_i^k $(i = 1, .., n)$ сходятся, следовательно, x^k сходится. □

Замечание 8.5.4 *В любом метрическом пространстве утверждение неверно.*

Определение 8.5.7 *Метрическое пространство, в котором любая фундаментальная последовательность сходится, называется **полным**.*

Таким образом, пространство $\mathbb{R}^n$ – полное.

Пример 8.5.1 *Пространство $(\mathbb{Q}, \rho)$, $\rho(x, y) = |x - y|$ – не полное, так как существует фундаментальная последовательность рациональных чисел $x_n \in \mathbb{Q}$, сходящаяся к иррациональному числу (в $\mathbb{R}$) и, значит, не сходящаяся в $\mathbb{Q}$.*

9 Предел и непрерывность отображения

9.1 Предел

Сформулируем понятие предела для более общего случая: отображения из подмножества $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$. Определение предела функции получается как частный случай при $n = 1$.

Рассмотрим отображение $f : \mathbb{R}^m \supset E \to \mathbb{R}^n$ (действующее из множества $E \subset \mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$). Оно каждой точке $x = (x_1, ..., x_m) \in E \subset \mathbb{R}^m$ ставит в соответствие точку $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$f : \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, ..., x_m) \\ y_2 = f_2(x_1, ..., x_m) \\ ... \\ y_n = f_n(x_1, ..., x_m) \end{cases}$$

Определение 9.1.1 (По Коши) *Пусть $f : \mathbb{R}^m \supset E \to \mathbb{R}^n$, x_0 – предельная точка E. Говорят, что $A \in \bar{R}^n$ – предел отображения f при $x \to x_0$ (по Коши), если*

$$\forall V(A)\ \exists \overset{o}{U}(x_0) :\ \forall x \in \overset{o}{U} \cap E\ \Rightarrow\ f(x) \in V(A)$$

или

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x \in E :\ 0 < \rho(x, x_0) < \delta\ \Rightarrow\ \rho(f(x), A) < \varepsilon.$$

Замечание 9.1.1 *Неравенства $0 < \rho(x, x_0) < \delta$ и $\rho(f(x), A) < \varepsilon$ равносильны неравенствам $0 < \|x - x_0\| < \delta$ и $\|f(x) - A\| < \varepsilon$, соответственно.*

Замечание 9.1.2 *В определении предела на языке ε-окрестностей функции расстояния ρ вообще говоря, разные (одно в R^m, другое в $\mathbb{R}^n$).*

Замечание 9.1.3 *Для случая $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ можно записать*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x \in E :\ \rho(x, 0) > \frac{1}{\delta}\ \Rightarrow\ \rho(f(x), 0) > \frac{1}{\varepsilon}$$

или

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x \in E :\ \|x\| > \frac{1}{\delta}\ \Rightarrow\ \|f(x)\| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Определение 9.1.2 (По Гейне) *Пусть $f : \mathbb{R}^m \supset E \to \mathbb{R}^n$ и $x_0 \in \bar{R}^m$ – предельная для E. Говорят, что $A \in \bar{R}^n$ – предел отображения f при $x \to x_0$ (по Гейне), если*

$$\forall x^k \in E,\ x^k \neq x_0,\ x^k \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0\ \Rightarrow\ f(x^k) \xrightarrow[k\to\infty]{} A.$$

Теорема 9.1.1 *Определения предела по Коши и по Гейне эквивалентны.*

Доказательство. Доказывается аналогично случаю функции одной переменной. Полезно это проделать самостоятельно. □

Лемма 9.1.1 *Пусть $f : \mathbb{R}^m \supset E \to \mathbb{R}^n$, x_0 – предельная точка для E. Тогда*

1. $f \xrightarrow[x \to x_0]{} A \in \mathbb{R}^n \;\Leftrightarrow\; f_i \xrightarrow[x \to x_0]{} A_i,\ i \in \{1, ..., n\}$ *(сходимость покоординатная);*
2. *Если* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ *и* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B$, *то* $A = B$ $(A, B \in \bar{R}^n)$ *(единственность предела);*
3. *Если* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}^n$, *то* $\exists U(x_0)$: f *– ограничена в* $E \cap U(x_0)$.

Доказательство. Из определения по Гейне. □

Теорема 9.1.2 (Арифметические свойства) *Пусть $f, g : \mathbb{R}^m \supset E \to \mathbb{R}^n$, x_0 – предельная точка для E, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$. Тогда*

1. $\lim\limits_{x \to x_0} (f + g) = A + B$;
2. *Пусть* λ: $E \to \mathbb{R}$, $\lambda(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \lambda$, *тогда* $\lim\limits_{x \to x_0} (\lambda(x) f(x)) = \lambda A$;
3. *Если* $n = 1$, *то* $\lim\limits_{x \to x_0} (f \cdot g) = AB$ *и* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, $B \neq 0$.

Доказательство. Упражнение. □

Пример.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Докажем, что $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$ не существует.

$$x_1^n = \left(0, \frac{1}{n}\right) \longrightarrow (0, 0), \quad \lim_{n \to \infty} f\left(0, \frac{1}{n}\right) = 0,$$

$$x_2^n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \longrightarrow (0, 0), \quad \lim_{n \to \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2},$$

следуя определений по Гейне, двойной предел $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$ не существует.

Рассмотрим повторные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = 0, \quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0.$$

Пример.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим повторные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = 1, \quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = -1.$$

Двойной предел не существует, так как

$$f\left(0, \frac{1}{n}\right) \longrightarrow -1, \quad f\left(\frac{1}{n}, 0\right) \longrightarrow 1.$$

Пример.

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y \cdot \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим повторные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = 0,$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) \text{ – не существует (кроме } y = 0).$$

Двойной предел:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \text{ (произведение беск. малой на ограниченную).}$$

Пример.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

$$f\left(\frac{1}{n}, 0\right) \longrightarrow 0, \quad f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим предел по направлению $x = \alpha t$, $y = \beta t$, $t \to 0+$:

$$f(\alpha t, \beta t) = \frac{\alpha^2\beta t^3}{\alpha^4 t^4 + \beta^2 t^2} \longrightarrow 0,$$

т.е. по любому направлению предел равен нулю, но двойной предел не существует, т.к.

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Теорема 9.1.3 (О повторном пределе) *Пусть* $f\colon \mathbb{R}^2 \supset \overset{o}{U}(x_0, y_0) \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$ *и*

$$\exists \delta > 0 : \ \forall y : \ 0 < |y - y_0| < \delta \ \ \exists \lim_{x\to x_0} f(x,y) = \varphi(y).$$

Тогда

$$\lim_{y\to y_0} \varphi(y) = A.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists \delta_1 : \forall (x,y) \in \overset{o}{U}_{\delta_1}(x_0, y_0) \cap \overset{o}{U}(x_0, y_0) \ \Rightarrow \ |f(x,y) - A| < \varepsilon.$$

Возьмем $\delta_2 = \min\{\delta_1, \delta\}$. Тогда перейдем к пределу при $0 < |y - y_0| < \delta_2$:

$$\lim_{x\to x_0} |f(x,y) - A| = |\varphi(y) - A| \leqslant \varepsilon \ \Leftrightarrow \ \lim_{y\to y_0} \varphi(y) = A.$$

$\square$

Теорема 9.1.4 (О вычислении двойного предела в полярных координатах) *Пусть* $f(x,y)\colon \overset{o}{U}(x_0, y_0) \to \mathbb{R}$. *Если* $\exists \rho_0 > 0 : \ \forall \varphi \in [0, 2\pi), \ \forall \rho \in (0, \rho_0) \quad \Rightarrow$

$$\big|f(x_0 + \rho\cos\varphi, y_0 + \rho\sin\varphi) - A\big| \leqslant F(\rho),$$

где $F(\rho) \to 0$ *при* $\rho \to 0+$, *то*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists \delta > 0 : \forall \rho \in (0, \delta) \ \Rightarrow \ \big|f(x_0 + \rho\cos\varphi, y_0 + \rho\sin\varphi) - A\big| \leqslant F(\rho) < \varepsilon,$$

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \rho < \delta.$$

$\square$

Пример.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

$$\left|\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}\right| = \rho\cos^2\varphi|\sin\varphi| \leqslant \rho \to 0.$$

Теорема 9.1.5 (Критерий Коши) *Пусть* $f\colon \mathbb{R}^m \supset E \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}^m$ *– предельная для* E. *Тогда*

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x, y \in E \cap \overset{o}{U}_\delta(x_0) : \Rightarrow \ \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

Доказательство. Докажите самостоятельно. $\square$

9.2 Непрерывность отображения

Определение 9.2.1 *Пусть $f : \mathbb{R}^m \supset E \to \mathbb{R}^n$. Говорят, что f непрерывно в точке $x_0 \in E$, если*

$$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0):\ \ f(U(x_0)) \subset V(f(x_0)).$$

Для $x_0 \in E$ возможно два случая:

1. x_0 – предельная точка для E. Тогда непрерывность f в x_0 равносильна тому, что $\lim\limits_{x\to x_0} = f(x_0)$.
2. x_0 – изолированная точка E. Тогда f непрерывно в x_0 всегда, так как в достаточно маленькой окрестности x_0 нет других точек из E.

Теорема 9.2.1 (Локальные свойства непрерывных отображений) *Пусть $f, g : \mathbb{R}^m \supset E \to \mathbb{R}^n$, f и g непрерывны в точке $x_0 \in E$. Тогда*

1. *$f + g$ непрерывно в x_0;*
2. *пусть λ: $E \to \mathbb{R}$ и λ непрерывно в x_0, тогда λf непрерывно в x_0;*
3. *f ограничено в $U(x_0)$;*
4. *при $n = 1$ $f \cdot g$ непрерывно в x_0;*
5. *при $n = 1$ f/g непрерывно в x_0, если $g(x_0) \neq 0$.*

Доказательство. Для предельной точки доказательство непосредственно следует из локальных свойств предела. Для изолированной – предоставляется читателю в качестве упражнения. □

Теорема 9.2.2 (О непрерывности композиции) *Пусть $f : \mathbb{R}^m \supset E_1 \to E_2 \subset \mathbb{R}^n$, g: $E_2 \to \mathbb{R}^k$, $x_0 \in E_1$, f непрерывно в x_0, g непрерывно в $f(x_0)$. Тогда $g \circ f$ непрерывно в x_0.*

Доказательство. Так как g непрерывно в $f(x_0)$, то

$$\forall U(g(f(x_0)))\ \exists U(f(x_0)):\ \forall x \in U(f(x_0)) \cap E_2\ \Rightarrow g(f(x)) \in U(g(f(x_0))).$$

Так как f непрерывно в x_0, то по окрестности $U(f(x_0))$

$$\exists U(x_0):\ \forall x \in U(x_0) \cap E_1\ \Rightarrow\ f(x) \in U(f(x_0)),$$

это и означает непрерывность $g(f)$ в x_0. □

Замечание 9.2.1 *Если $f(x)$ непрерывно на X, то $f(x,y) = f(x)$ (при $y \in \mathbb{R}$) непрерывно на $X \times \mathbb{R}$.*

Пример. Функция

$$f(x,y) = 1 + e^{-xy} \cdot \log_2 (1 + |x| + 4|y|)$$

непрерывна на $\mathbb{R}^2$, так как получается из непрерывных функций конечным числом арифметических операций и суперпозиций.

Определение 9.2.2 *Пусть $F \subset E \subset \mathbb{R}^n$.*

1. *Говорят, что $x_0 \in F$ является внутренней точкой для F в E, если*
$$\exists B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n: \ B(x_0, r) \cap E \subset F;$$
2. *F называется открытым в E, если все точки F внутренние в E;*
3. *F называется замкнутым в E, если $E \setminus F$ открыто в E.*

Пример. $E = [0,1] \subset \mathbb{R}$, $F = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$. Точка 1 является внутренней точкой для F в E, а множество F открыто в E.

Определение 9.2.3 *Пусть $f: \mathbb{R}^m \supset E \to \mathbb{R}^n$ и f непрерывно в каждой точке $F \subset E$. Тогда говорят, что f непрерывно на F и пишут $f \in C(F)$.*

Теорема 9.2.3 (Критерий непрерывности) *Пусть $f: \mathbb{R}^m \supset E \to \mathbb{R}^n$. f непрерывно на E тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого в $\mathbb{R}^n$ множества открыт в E.*

Доказательство. 1. Пусть $f \in C(E)$ и G – открыто в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим $F = f^{-1}(G)$ – не пусто. Пусть $x_0 \in F$ и $V(f(x_0))$ – окрестность точки $f(x_0)$ из G. Тогда

$$\exists U_V(x_0): \ \forall x \in U_V(x_0) \cap E \ \Rightarrow \ f(x) \in V(f(x_0)) \ \Rightarrow \ U_V(x_0) \cap E \subset f^{-1}(G).$$

2. Пусть прообраз любого открытого множества открыт в E и $x_0 \in E$:

$$\forall U(f(x_0)) \ \Rightarrow \ f^{-1}\Big(U(f(x_0))\Big) \text{ – открыт в } E$$

и является окрестностью точки x_0. □

Замечание 9.2.2 *Аналогичное утверждение верно для замкнутого множества.*

Теорема 9.2.4 *Пусть $f : \mathbb{R}^m \supset E \to \mathbb{R}^n$, $f \in C(E)$ и E – компакт. Тогда $f(E)$ – компакт.*

Другими словами, образ компакта при непрерывном отображении – компакт.
Доказательство. Пусть G_α, $\alpha \in A$ – открытое покрытие $f(E)$. Так как f непрерывно, то множества $f^{-1}(G_\alpha)$ открыты в E и образуют покрытие E. Выделим конечное покрытие: $E \subset \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(G_{\alpha_i})$. Следовательно, $f(E) \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$, а значит, $f(E)$ – компакт. □

Замечание 9.2.3 *Прообраз компакта при непрерывном отображении не обязательно компакт. Например, непрерывное биективное отображение полуинтервала на окружность $[0, 2\pi) \to S_1(0)$. При этом обратное отображение не является непрерывным.*

Замечание 9.2.4 *Отрезок в $\mathbb{R}^n$ – компакт.*

Доказательство. Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$[a, b] = \{x : x = a + t(b - a), t \in [0, 1]\}$$

и функция $x(t)$ – непрерывна на компакте $[0, 1]$. □

Определение 9.2.4 *Множество $G \subset \mathbb{R}^n$ называется линейно-связным (связным), если для любых $a, b \in G$ существует непрерывное отображение (путь) γ с концами a и b и носителем в G.*

Определение 9.2.5 *Областью в $\mathbb{R}^n$ называется открытое связное множество.*

Определение 9.2.6 *Пусть $f : \mathbb{R}^m \supset E \to \mathbb{R}^n$. Говорят, что f равномерно непрерывно на $D \subset E$, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x_1, x_2 \in D : \ \|x_1 - x_2\| < \delta \ \Rightarrow \ \|f(x_1) - f(x_2)\| < \varepsilon.$$

Теорема 9.2.5 (Глобальные свойства непрерывных отображений) *Пусть $f : \mathbb{R}^m \supset E \to \mathbb{R}^n$ и $f \in C(E)$.*

1. ***Теорема Кантора.*** *Если E – компакт, то f равномерно непрерывно на E.*

2. ***Теорема Вейерштрасса.*** *Если $n = 1$ и E – компакт, то f достигает наибольшего и наименьшего значений.*

3. ***Теорема Больцано-Коши.*** *Если $n = 1$ и E – связно, то $\forall a, b \in E$ и $\forall \gamma$, лежащего между $f(a)$ и $f(b)$: $\exists c \in E$: $f(c) = \gamma$.*

Доказательство. Докажем Теорему Больцано–Коши. Пусть $\varphi : \ [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \to E$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. $f(\varphi(t))$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$ как композиция непрерывных функций. $f(\varphi(\alpha)) = f(a)$, $f(\varphi(\beta)) = f(b)$. Применим теорему Больцано–Коши для функции в $\mathbb{R}$. □

10 Многомерное дифференциальное исчисление

10.1 Производная и дифференциал

Определение 10.1.1 *Пусть $f : \mathbb{R}^m \supset E \to \mathbb{R}^n$, x_0 – внутренняя точка E. Если существует такой линейный оператор $A_f \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, что*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A_f h + o(\|h\|), \quad h \to 0,$$

то говорят, что f дифференцируемо в точке x_0.

Замечание 10.1.1 *В определении выше запись $o(\|h\|)$ означает функцию, представимую в виде $\alpha(h)\|h\|$, где $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$. При этом значение $\alpha(0)$ может быть не определено. Будем полагать $\alpha(0) = 0$, тогда α непрерывна в нуле.*

Определение 10.1.2 *Линейный оператор A_f в определении выше называется производной отображения f в точке x_0, а величина $A_f h$ – дифференциалом f в точке x_0:*

$$f'(x_0) = A_f, \quad df(x_0, h) = A_f h.$$

Также будем использовать обозначения $A_f(x_0)$, $A(x_0)$, $A_f(x_0)h$ и т.п.

Пример. Функция двух переменных $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x, y) = x^2 + xy$ в точке (x_0, y_0). Зададим приращение $h = (h_x, h_y)$ и рассмотрим

$$\begin{aligned} f(x_0 + h_x, y_0 + h_y) &= (x_0 + h_x)^2 + (x_0 + h_x)(y_0 + h_y) = \\ &= f(x_0, y_0) + (2x_0 + y_0)h_x + x_0 h_y + h_x^2 + h_x h_y. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $A_f = (2x_0 + y_0,\ x_0)$ и

$$|h_x^2 + h_x h_y| \leqslant |h_x| \cdot \big(|h_x| + |h_y|\big) \leqslant 2(h_x^2 + h_y^2) = o(\|h\|).$$

Лемма 10.1.1 (Необходимое условие дифференцируемости) *Пусть f – дифференцируемо в точке x_0. Тогда f непрерывно в точке x_0.*

Доказательство. По определению имеем

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = A_f h + \alpha(h)\|h\|,$$

и при $h \to 0$ оба слагаемых стремятся к 0, следовательно, $f(x_0+h) - f(x_0) \to 0$, что и означает непрерывность f в точке x_0. □

Определение 10.1.3 *Пусть $f : \mathbb{R}^m \supset E \to \mathbb{R}^n$, x_0 – внутренняя точка множества E. И пусть $e \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Производной f по направлению e называется*

$$\frac{\partial f}{\partial e} = \lim_{t \to 0+} \frac{f(x_0 + t \cdot e_0) - f(x_0)}{t},$$

где e_0 – орт вектора e: $e_0 = e/\|e\|$.

Определение 10.1.4 *Пусть $f : \mathbb{R}^m \supset E \to \mathbb{R}^n$, x_0 – внутренняя точка множества E. Частной производной отображения f по переменной x_i в точке x_0 будем называть*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t \cdot e_i) - f(x_0)}{t},$$

где e_i – i-ый базисный орт пространства $\mathbb{R}^m$.

Замечание 10.1.2 *Частные производные не равны производным по направлениям соответствующих базисных ортов. Если (иногда такие определения удобны) в определении производной по направлению рассматривать двусторонни предел при $t \to 0$, то частные производные будут совпадать с производными по направлениям соответствующих ортов.*

Если $f = (f_1, ..., f_n)$, то частная производная по x_i – это вектор в $\mathbb{R}^n$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \frac{\partial f_2}{\partial x_i}, \ ..., \ \frac{\partial f_n}{\partial x_i} \right).$$

Пример 10.1.1 *Пусть $f(x, y) = x^y$: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\} \to \mathbb{R}$. Тогда*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \cdot \ln x.$$

Теорема 10.1.1 (Необходимое условие дифференцируемости) *Пусть $f : \mathbb{R}^m \supset E \to \mathbb{R}^n$, x_0 – внутренняя точка множества E. Если f дифференцируемо в точке x_0, то для любого вектора $e \neq 0$ существует $\frac{\partial f}{\partial e}$, а также существуют все частные производные.*

Доказательство. Рассмотрим $h = t \cdot e$, где $\|e\| = 1$:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + \alpha(h) \cdot \|h\|, \quad h \to 0,$$

воспользуемся линейностью A,

$$f(x_0 + te) - f(x_0) = Ate + \alpha(te) \cdot \|te\| = t \cdot Ae + \alpha(te) \cdot |t| \cdot \|e\|,$$

разделим на t:

$$\frac{f(x_0+te)-f(x_0)}{t} = Ae + \alpha(te)\cdot\|e\|\cdot\frac{|t|}{t} \to Ae, \quad t\to 0,$$

так как второе слагаемое стремится к нулю как произведение бесконечно малой $\alpha(te)$ на ограниченную $\|e\|\operatorname{sign} t$. $\square$

Величина Ah выражается матрицей

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix},$$

которую принято называть матрицей Якоби.

Другими словами, вектор приращения функции должен иметь вид

$$\Delta f = \begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \vdots \\ \Delta f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix} + o\left(\|h\|\right).$$

Для отображения $f(x)=x$ имеем

$$x_i + h_i - x_i = 1\cdot h_i \ \Leftrightarrow\ h_i = dx_i(x_0,h), \quad i=1,...,m.$$

И тогда для произвольного дифференцируемого f пишут

$$df(x_0,h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1(x_0,h) \\ \vdots \\ dx_m(x_0,h) \end{pmatrix},$$

или короче:

$$df = f'dx = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_m \end{pmatrix}.$$

10.2 Правила дифференцирования

Теорема 10.2.1 (Арифметические свойства) *Пусть* $f, g\colon \mathbb{R}^m \supset E \to \mathbb{R}^n$, f, g *дифференцируемы в точке* $x_0 \in E$. *Тогда*

1. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$: $\lambda f + \mu g$ *дифференцируема в* x_0, *причем*
$$A_{\lambda f+\mu g} = \lambda \cdot A_f + \mu \cdot A_g.$$

2. *Пусть* $\lambda\colon E \to \mathbb{R}$, *дифференцируема в* x_0. *Тогда*
$$A_{\lambda f} = f \cdot A_\lambda + \lambda \cdot A_f.$$

3. *Пусть* $\lambda\colon E \to \mathbb{R}$, *дифференцируема в* x_0 *и* $\lambda(x_0) \neq 0$. *Тогда*
$$A_{f/\lambda} = \frac{\lambda \cdot A_f - f \cdot A_\lambda}{\lambda^2}.$$

Доказательство. 1. Имеем
$$f(x_0+h) - f(x_0) = A_f h + o(\|h\|), \quad g(x_0+h) - g(x_0) = A_g h + o(\|h\|),$$
тогда
$$(\lambda f+\mu g)(x_0+h)-(\lambda f+\mu g)(x_0) = \lambda(f(x_0+h)-f(x_0))+\mu(g(x_0+h)-g(x_0)) = \\ = (\lambda A_f + \mu A_g)h + (\lambda+\mu)o(\|h\|) = (\lambda A_f + \mu A_g)h + o(\|h\|).$$
2. Аналогично:
$$(\lambda f)(x_0+h) - (\lambda f)(x_0) = \lambda(x_0+h)f(x_0+h) - \lambda(x_0)f(x_0) = \\ = \Big(\lambda(x_0) + A_\lambda h + o(\|h\|)\Big)\Big(f(x_0) + A_f h + o(\|h\|)\Big) - \lambda(x_0)f(x_0) = \\ = \lambda(x_0)A_f h + A_\lambda h f(x_0) + o(\|h\|) = (\lambda(x_0)A_f + f(x_0)A_\lambda)h + o(\|h\|),$$
где для получения $o(\|h\|)$ мы воспользовались непрерывностью линейных операторов A_λ и A_f.
3. Докажите самостоятельно. ☐

Теорема 10.2.2 (Дифференцирование композиции) *Пусть* $g\colon \mathbb{R}^m \supset E \to F \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon F \to \mathbb{R}^k$, g *– дифференцируема в точке* x_0, f *– дифференцируема в точке* $g(x_0)$. *Тогда* $f \circ g$ *дифференцируема в точке* x_0 *и* $A_{f\circ g} = A_f \circ A_g$, *то есть*
$$(f(g))'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Доказательство. Запишем определения дифференцируемости

$$f(x_0+h)-f(x_0)=A_f h+\alpha(h)\cdot\|h\|,\quad \alpha(h)\xrightarrow[h\to 0]{}0,\ \alpha(0)=0,$$

$$g\left(f(x_0)+t\right)-g\left(f(x_0)\right)=A_g t+\beta(t)\cdot\|t\|,\quad \beta(t)\xrightarrow[t\to 0]{}0,\ \beta(0)=0.$$

Пусть $t=f(x_0+h)-f(x_0)$. Заметим, что при $h\to 0$ выполнено $t\to 0$. Тогда

$$g\left(f(x_0+h)\right)-g\left(f(x_0)\right)=A_g\left(A_f h+\alpha(h)\|h\|\right)+\beta(t)\cdot\|t\|=$$

подставим $\|t\|=\Big\|A_f h+\alpha(h)\|h\|\Big\|$

$$=A_g\cdot A_f h+A_g(\alpha(h))\cdot\|h\|+\beta(t)\cdot\Big\|A_f h+\alpha(h)\cdot\|h\|\Big\|.$$

Рассмотрим второе слагаемое и применим свойство ограниченности линейного оператора

$$\|A_g(\alpha(h))\cdot\|h\|\|\leqslant C_g\|\alpha(h)\|\cdot\|h\|=o(\|h\|),$$

где $C_g=\left(\sum_{i,j}a_{ij}^2\right)^{1/2}$ и $\{a_{ij}\}$ – матрица оператора A_g.

Для третьего слагаемого имеем аналогично

$$\Big\|\beta(t)\cdot\Big\|A_f h+\alpha(h)\cdot\|h\|\Big\|\ \Big\|=o(\|h\|),$$

и тогда $g\left(f(x_0+h)\right)-g\left(f(x_0)\right)=A_g\cdot A_f h+o(\|h\|)$. □

Следствие 10.2.3 (Инвариантность формы первого дифференциала) *Выражение для дифференциала отображения $df=A_f dx=f'dx$ не зависит от того, является ли x зависимой или независимой переменной, а также от того, независимы ли компоненты x_1, …, x_m вектора x.*

Теперь зададимся вопросом о производной обратного отображения. Для его существования необходимо равенство размерностей $m=n$.

Теорема 10.2.4 (О производной обратного отображения) *Пусть $f\colon\mathbb{R}^m\supset E\to\mathbb{R}^m$, x_0 – внутренняя точка множества E, $f(x_0)$ – внутренняя для $f(E)$, f дифференцируемо в x_0 и имеет обратное отображение f^{-1} – непрерывное в $f(x_0)$, и оператор A_f обратим. Тогда*

$$A_{f^{-1}}=A_f^{-1}.$$

Доказательство. Пусть $y_0 = f(x_0)$. Зададим приращение h и

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = A_f h + \alpha(h) \cdot \|h\|, \quad \alpha(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0,\ \alpha(0) = 0.$$

Зададим точке $f(x_0)$ приращение t и возьмём

$$h = f^{-1}\left(f(x_0) + t\right) - f^{-1}\left(f(x_0)\right).$$

В силу непрерывности f^{-1} имеем $t \to 0 \Leftrightarrow h \to 0$. Тогда

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = t = A_f h + \alpha(h) \cdot \|h\|$$

или

$$A_f h = t - \alpha(h) \cdot \|h\|.$$

Подействуем оператором A_f^{-1}:

$$h = A_f^{-1} t - A_f^{-1}\left[\alpha(h)\right] \cdot \|h\|.$$

Так как $\left\|A_f^{-1}[\alpha(h)]\right\| \leqslant \left\|A_f^{-1}\right\| \cdot \|\alpha(h)\| \to 0$, то $A_f^{-1}\left[\alpha(h)\right] \cdot \|h\| = o(\|t\|)$, и осталось доказать, что $\frac{\|h\|}{\|t\|}$ ограничено. Будем считать, что $\left\|A_f^{-1}[\alpha(h)]\right\| < \frac{1}{2}$ и рассмотрим

$$\frac{\|h\|}{\|t\|} = \frac{\left\|A_f^{-1} t - A_f^{-1}\left[\alpha(h)\right] \cdot \|h\|\right\|}{\|t\|} \leqslant \frac{\|A_f^{-1} t\|}{\|t\|} + \frac{\left\|A_f^{-1}\left[\alpha(h)\right]\right\| \cdot \|h\|}{\|t\|} \leqslant$$

$$\leqslant \|A_f^{-1}\| + \frac{1}{2}\frac{\|h\|}{\|t\|} \quad \Rightarrow \quad \frac{\|h\|}{\|t\|} \leqslant 2\|A_f^{-1}\|,$$

откуда следует, что $A_f^{-1}\left[\alpha(h)\right] \cdot \|h\| = o(\|t\|)$ и

$$h = f^{-1}\left(f(x_0) + t\right) - f^{-1}\left(f(x_0)\right) = A_f^{-1} t + o(\|t\|),$$

что и означает $A_{f^{-1}} = A_f^{-1}$. □

10.3 Достаточное условие дифференцируемости

Определение 10.3.1 *Будем говорить, что f дифференцируемо на E, если f дифференцируемо в каждой точке $x_0 \in E$.*

Теорема 10.3.1 (Достаточное условие дифференцируемости)
Пусть $f\colon \mathbb{R}^m \supset E \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in E$ – внутренняя точка множества E. Если все частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $i = 1, \ldots, m$ определены в окрестности точки x_0 и непрерывны в точке x_0, то функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0.

Доказательство. Так как дифференцируемость отображения f равносильна дифференцируемости всех f_i, то докажем для случая $n = 1$. И пусть $m = 2$ (при $m > 2$ доказательство аналогично).

Пусть $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ определены в шаре $B_\delta(x_0, y_0)$ и непрерывны в точке (x_0, y_0).

Пусть $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$. Запишем полное приращение функции:

$$\Delta f\left(x_0, y_0\right) = f(x, y) - f\left(x_0, y_0\right) = \left(f(x, y) - f\left(x_0, y\right)\right) + \left(f\left(x_0, y\right) - f\left(x_0, y_0\right)\right).$$

Рассмотрим функцию $f(x, y)$ как функцию одной переменной x. Тогда по теореме Лагранжа (для функции одной переменной) найдется точка ξ, лежащая между x и x_0 такая, что

$$f(x, y) - f\left(x_0, y\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)\left(x - x_0\right).$$

Так как $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ непрерывна в точке (x_0, y_0), то

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0\right) + \alpha(\xi, y), \quad \alpha(\xi, y) \to 0 \quad \text{при } (x, y) \to \left(x_0, y_0\right).$$

Аналогично по переменной y получим

$$f\left(x_0, y\right) - f\left(x_0, y_0\right) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, \psi\right)\left(y - y_0\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, \psi\right) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0\right) + \beta(\psi), \quad \beta(\psi) \to 0 \quad \text{при } (x, y) \to \left(x_0, y_0\right).$$

Тогда приращение функции имеет вид

$$\Delta f\left(x_0, y_0\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0\right)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0\right)\Delta y + \alpha(\xi, y)\Delta x + \beta(\psi)\Delta y.$$

Докажем, что $\alpha(\xi, y)\Delta x + \beta(\psi)\Delta y = o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Имеем

$$\left|\frac{\alpha(\xi, y)\Delta x + \beta(\psi)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\right| \leqslant \left|\frac{\alpha(\xi, y)\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\right| + \left|\frac{\beta(\psi)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\right| \leqslant |\alpha(\xi, y)| + |\beta(\psi)| \to 0.$$

$\square$

Замечание 10.3.1 *Функции, имеющие непрерывные частные производные в E (а значит и дифференцируемые в E) называют непрерывно-дифференцируемыми на E и обозначают $C^1(E)$.*

Замечание 10.3.2 *Непрерывность частных производных не является необходимым условием дифференцируемости функции.*

Например, функция

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2>0; \\ 0, & x^2+y^2=0, \end{cases}$$

Дифференцируема в точке $(0,0)$, так как

$$\Delta f(0,0) = 0\cdot x + 0\cdot y + o\left(x^2+y^2\right) \quad \text{при} (x,y)\to(0,0),$$

но частная производная

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

не имеет предела при $(x,y)\to(0,0)$ (доказать это можно, рассмотрев предел по множеству $y=0$ - он не существует), а значит, и не является непрерывной в точке $(0,0)$ функцией.

Пример 10.3.1 *Для функции $f(x,y)$ получить выражения для производных в полярных координатах, т.е. найти $\dfrac{\partial f}{\partial r}$, $\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}$.*

Напомним формулы перехода в полярные координаты: $x = r\cos\varphi$, $r\sin\varphi$. Получаем

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}\left(-r\sin\varphi\right) + \frac{\partial f}{\partial y} r\cos\varphi = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}.$$

10.4 Градиент и касательная плоскость

Рассмотрим вещественнозначную функцию $f : \mathbb{R}^m \subset E \to \mathbb{R}$, дифференцируемую во внутренней точке x_0 множества E.

Дифференциал $df(x_0,h) = f'(x_0)h$ является линейной функцией вектора приращения h, а значит найдется такой вектор $\xi \in \mathbb{R}^m$, что дифференциал выражается скалярным произведением вектора : $df(x_0,h) = \xi\cdot h$.

Определение 10.4.1 *Градиентом функции f в точке x_0 называется вектор $\operatorname{grad} f(x_0)$ такой, что*

$$df(x_0,h) = \operatorname{grad} f(x_0)\cdot h.$$

Так как в координатном представлении дифференциал имеет вид

$$df(x_0,h)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)h_2+...+\frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0)h_m,$$

то градиент имеет вид

$$\operatorname{grad} f(x_0)=f'(x_0)=\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0),\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0),...,\frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0)\Big).$$

Свойства градиента:

1. Производная по направлению:

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\operatorname{grad} f\cdot l_0=\operatorname{Pr}_l \operatorname{grad} f=df(l_0),$$

т.е. производная по направлению равна скалярному произведению градиента на орт направления или проекции градиента на вектор направления, что тоже самое, что и значение дифференциала на орте направления.

2. $\max\limits_l \dfrac{\partial f}{\partial l}=\dfrac{\partial f}{\partial(\operatorname{grad} f)}=|\operatorname{grad} f|.$
Т.е. в направлении градиента производная по направлению максимальна и равна норме градиента.

3. $\operatorname{grad} f(x_0)$ ортогонален любой гладкой кривой, лежащей на поверхности уровня $f(x)=C$ и проходящей через точку x_0.

Доказательство. 1. Так как f дифференцируема в точке x_0, то $f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+o(\|h\|)$. Применим для $h=tl_0$:

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0)=\lim_{t\to 0+}\frac{f(x_0+tl_0)-f(x_0)}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{f'(x_0)(tl_0)+o(|t|)}{t}=$$
$$=f'(x_0)l_0=\operatorname{grad} f(x_0)\cdot l_0.$$

3. Пусть кривая $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^m$ лежит на поверхности уровня $f(x)=C$ и задается дифференцируемой функцией $\gamma(t)=(\gamma_1(t),...\gamma_m(t))$. Точке x_0 соответствует t_0: $\gamma(t_0)=x_0$, $f(x_0)=C$.

Тогда при всех $t\in[a,b]$ верно равенство $f(\gamma(t))=C$. Дифференцируя его по t как суперпозицию отображений, получим в точке $t=t_0$:

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1},...,\frac{\partial f}{\partial x_m}\Big)\cdot\Big(\gamma_1',...,\gamma_m'\Big)=0,$$

что и означает ортогональность векторов $\operatorname{grad} f$ и направляющего вектора γ' в точке t_0. $\square$

Рассмотрим поверхность уровня в $\mathbb{R}^3$, заданную равенством $F(x,y,z) = C$. Пусть точка $M_0 = (x_0, y_0, z_0, C)$ лежит на поверхности, т.е. $F(x_0, y_0, z_0) = C$.

Из свойства 3 следует, что если $\operatorname{grad} F(M_0) \neq 0$, то касательные ко всем гладким кривым, лежащим на поверхности уровня $F(x,y,z) = C$ и проходящим через точку M_0 имеют общую нормаль $\operatorname{grad} F(M_0)$, а значит, лежат в одной плоскости. Эта плоскость называется **касательной плоскостью** (гиперплоскостью) к поверхности $F(x,y,z) = C$ в точке M_0.

Прямая, проходящая через точку M_0 перпендикулярно касательной плоскости, называется **нормалью** к поверхности.

Тогда касательная плоскость в точке M_0 имеет нормаль $\operatorname{grad} F(x_0)$ и уравнение касательной плоскости в точке M_0 имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(M_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(M_0)(z - z_0) = 0.$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(M_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(M_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(M_0)}.$$

11 Производные и дифференциалы высших порядков

11.1 Частные производные высших порядков

Рассмотрим функцию двух переменных $u = f(x,y) : \mathbb{R}^2 \supset E \to \mathbb{R}$. Пусть в окрестности точки (x,y) существуют частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$. Эти частные производные также являются функциями двух переменных от x и y. Если существуют частные производные от этих функций, то они называются частными производными второго порядка от функции f и обозначаются:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Другое обозначение:

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad f''_{xy} = (f'_x)'_y = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f''_{yx} = \left(f'_y\right)'_x = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Производные, взятые по разным переменным, называются **смешанными производными**.

Пример 11.1.1 $f(x,y) = x^3y^2 + xy^4$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 + y^4, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y + 4xy^3.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(3x^2y^2 + y^4\right)'_x = 6xy^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(2x^3y + 4xy^3\right)'_y = 2x^3 + 12xy^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \left(3x^2y^2 + y^4\right)'_y = 6x^2y + 4y^3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \left(2x^3y + 4xy^3\right)'_x = 6x^2y + 4y^3.$$

Следует заметить, что в данном случае смешанные производные оказались равными: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$*. Этот результат не случайный (см. теорему чуть ниже).*

Для функций большего числа переменных и для производных более высоких порядков определения аналогичны. Например, для функции $u = f(x,y,z)$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^2 \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial z} f\right)\right)\right)$$

или, что то же самое,

$$f^{(4)}_{zyyx} = \left(\left(\left(f'_z\right)'_y\right)'_y\right)'_x.$$

Теорема 11.1.1 (О равенстве смешанных производных) *Пусть функция $f : \mathbb{R}^m \supset G \to \mathbb{R}$ имеет в окрестности точки x_0 смешанные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$. Если эти производные непрерывны в точке x_0, то*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0).$$

Доказательство. Так как при вычислении смешанных производных по переменным x_i и x_j остальные переменные фиксируются, то можно сразу рассматривать функцию двух переменных $f(x,y)$ и точку $(x,y) \in G \subset \mathbb{R}^2$.

Зададим приращение: $h = (\Delta x, \Delta y)$. Рассмотрим величину

$$\omega = \Big(f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)\Big) - \Big(f(x, y+\Delta y) - f(x,y)\Big).$$

Введем функцию $\varphi(x) = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$. Тогда

$$\omega = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)$$

Функция $\varphi(x)$ дифференцируема и $\varphi'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y+\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.

По теореме Лагранжа для функции $\varphi(x)$ имеем

$$\exists x_1 \in (x, x+\Delta x): \quad \omega = \varphi'(x_1)\Delta x,$$

$$\omega = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y+\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y)\right)\Delta x =$$

опять по теореме Лагранжа $\exists y_1 \in (y, y+\Delta y):$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1)\right)\Delta x \Delta y = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_1, y_1)\Delta x \Delta y.$$

Теперь перепишем ω в виде

$$\omega = \Big(f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)\Big) - \Big(f(x+\Delta x, y) - f(x,y)\Big)$$

и введем функцию $\psi(y) = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$. Тогда $\omega = \psi(y+\Delta y) - \psi(y)$. Используя дважды теорему Лагранжа, получим

$$\exists x_2 \in (x, x+\Delta x), y_2 \in (y, y+\Delta y): \quad \omega = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y_2)\Delta x \Delta y,$$

т.е.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_1, y_1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y_2).$$

Устремляя $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ и учитывая непрерывность f''_{xy} и f''_{yx} получим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y).$$

$\square$

Замечание 11.1.1 *Случай, рассмотренный в теореме легко обобщить на случай смешанных производных любого порядка. А именно, результат вычисления смешанной производной не зависит от порядка дифференцирования (в случае их непрерывности).*

Замечание 11.1.2 *Условие непрерывности для равенства смешанных производных обязательно.*

Пример 11.1.2 *Рассмотрим функцию*

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

Докажем, что $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.

Для первых производных имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0, (\textit{по определению})$$

при $x^2+y^2\neq 0$*:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\frac{2x\left(x^2+y^2\right)-2x\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\frac{4x^3y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Тогда для смешанных производных:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{y}=-1,$$

т.е. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.

Определение 11.1.1 *Множество функций $f:E\to\mathbb{R}$, имеющих все частные производные вплоть до k-го порядка непрерывные на E, будем обозначать $C^k(E)$. При этом, $C^1(E)$ – множество непрерывно дифференцируемых функций.*

11.2 Дифференциалы высших порядков

Пусть $f:\mathbb{R}^m\subset E\to\mathbb{R}$ – дифференцируемая функция.

Для удобства записи, введем формальный дифференциальный оператор d:

$$d = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_k} dx_k.$$

Тогда дифференциал функции f на векторе $h = (dx_1, ..., dx_m)$ можно записать так:

$$df = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\Big)f = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_m}dx_m.$$

Этот дифференциал является функцией точки и вектора приращений h.

Определение 11.2.1 *Дифференциалом второго порядка $d^2 f$ функции f называется $d^2 f := d(df)$. Более того, дифференциал n-го порядка определяется индуктивно: $d^n f = d(d^{n-1} f)$.*

В операторном виде имеет место запись

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^n f.$$

При этом возведение в степень n происходит формально. Произведение операторов определяется как композиция: $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$.

Пример 11.2.1 *Для функции $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ вида $u = f(x, y) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ имеем*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Далее будем считать приращение (dx, dy) постоянным. Тогда

$$d^2 f = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dy =$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dydx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2.$$

Пользуясь равенством смешанных производных и обозначением $(dx)^2 = dx^2$, $(dy)^2 = dy^2$, получим

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2.$$

Для дифференциала порядка n будет верна формула, аналогичная биному Ньютона:

$$d^n f = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k} dx^{n-k} dy^k.$$

Заметим, что дифференциал второго порядка функции $f(x_1, ..., x_m)$ является квадратичной формой относительно dx_1, ... dx_m.

Пример 11.2.2 *Найти d^3f, если $f(x, y) = x^3y + x^2y^3 + y^4$.*

Распишем, вначале, выражение для d^3f:

$$d^3f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 f =$$

$$= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3.$$

Найдем частные производные до третьего порядка:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + 2xy^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 3x^2y^2 + 4y^3;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy + 2y^3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^2y + 12y^2;$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 6y, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 6x + 6y^2, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 12xy, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 6x^2 + 24y.$$

Окончательно,

$$d^3f = 6ydx^3 + 18(x + y^2)dx^2dy + 36xydxdy^2 + (x^2 + 4y)dy^3.$$

11.3 Формула Тейлора для функции многих переменных

Вспомним и запишем в удобном виде формулу Тейлора для функции $f(x)$ одной переменной, имеющей производные вплоть до $(n + 1)$-го порядка. В точке $x_0 + \Delta x$ имеем

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2!}f''(x_0)(\Delta x)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^(n)(x_0)(\Delta x)^n + R_n,$$

где остаток запишем в форме Лагранжа:

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(\Delta x)^{n+1}, \quad \xi \in (x_0, x_0 + \Delta x).$$

Или можно записать через дифференциалы:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + df(x_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}d^nf(x_0) + R_n.$$

Получим обобщение для случая функции $f : \mathbb{R}^m \subset E \to \mathbb{R}$.

Теорема 11.3.1 *Пусть* $f : \mathbb{R}^m \subset E \to \mathbb{R}$, $f \in C^{n+1}(E)$, x_0 *– внутренняя точка* E. *Тогда для* h *такого, что* $x_0 + h \in E$ $\exists \theta \in (0,1)$ *такая, что*

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{d^k f(x_0,h)}{k!} + \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1}\left(x_0 + \theta h, h\right).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(t) = f(x_0+th)$ одной переменной. Она дифференцируема на $t \in [0,1]$ и

$$\varphi'(t) = f'(x_0+th)h = df(x_0+th, h).$$

Вычисляя вторую производную, получим

$$\varphi''(t) = d^2 f(x_0+th, h).$$

Продолжая далее по индукции, получим

$$\varphi^{(n)}(t) = d^n f(x_0+th, h).$$

Запишем формулу Тейлора для функции $\varphi(t)$ в точке 0:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{\varphi''(0)}{2!}t^2 + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!}t^{n+1},$$

где $\theta \in (0,1)$.

Имеем $\varphi(0) = f(x_0)$, $\varphi(1) = f(x_0+h)$. Подставляя в формулу Тейлора для $\varphi(t)$ значение $t = 1$, получаем

$$f(x) = f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(x_0)}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1}\left(x_0 + \theta h\right).$$

□

Замечание 11.3.1 *Для остатка можно записать форму Пеано:*

$$R_n = o\left(\|h\|^n\right), \quad h \to 0.$$

Пример 11.3.1 *Написать формулу Маклорена для функции* $f(x,y) = \dfrac{\sin x}{\cos y}$ *в точке* $(0,0)$ *с* $o(\|h\|^3)$.

1-ый способ. Найдем все частные производные в точке $(0,0)$ *до третьего порядка включительно:*

$$f'_x(0,0) = 1, \quad f'_y(0,0) = 0;$$

$$f''_{xx}(0,0) = 0, \quad f''_{xy}(0,0) = 0, \quad f''_{yy}(0,0) = 0;$$
$$f'''_{xxx}(0,0) = -1, \quad f'''_{xxy}(0,0) = 0, \quad f'''_{xyy}(0,0) = 1, \quad f'''_{yyy}(0,0) = 0.$$

Тогда

$$\frac{\sin x}{\cos y} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{xy^2}{2} + o(\|h\|^3).$$

2-ой способ. Воспользуемся известными формулами Маклорена для функций одной переменной:

$$\frac{\sin x}{\cos y} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 - \frac{y^2}{2} + o(y^3)} = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 + \frac{y^2}{2} + o(y^3)\right) =$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{xy^2}{2} + o(x^3) + xo(y^3) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{xy^2}{2} + o(\|h\|^3).$$

В последнем действии мы воспользовались тем, что

$$o(x^3) = o\left(\|h\|^3\right), \quad o(y^3) = o\left(\|h\|^3\right).$$

12 Экстремумы функции многих переменных

12.1 Необходимое условие экстремума

Рассмотрим функцию $u = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ в окрестности точки $x^0 = \left(x_1^0, \dots, x_n^0\right)$.

Напомним определение локального экстремума.

Определение 12.1.1 *Функция $f(x)$ имеет* ***локальный максимум (минимум)*** *в точке x^0, если существует окрестность $U(x^0)$ этой точки, что для $\forall x \in U(x^0)$ выполнено $f(x) \leqslant f(x^0)$ $\left(f(x) \geqslant f(x^0)\right)$.*

Точки локального максимума и локального минимума называются ***точками экстремума****.*

Если в определении взять проколотую окрестность точки x^0 и взять строгие неравенства: $f(x) < f(x^0)$ $\left(f(x) > f(x^0)\right)$, то получится ***строгий*** экстремум.

Теорема 12.1.1 (Необходимое условие экстремума) *Если функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ имеет экстремум в точке x^0, то любая ее частная производная первого порядка обращается в точке x^0 в ноль или не существует.*

□ Зафиксируем в точке x^0 все переменные функции f кроме x_1. Функция $g(t) = f(t, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ имеет экстремум в точке x_1^0 и, следовательно, $g'(x_1^0) = 0$ или не существует. Но $g'(x_1^0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)$. Аналогично для производных по другим переменным. ■

Замечание 12.1.1 *Это необходимое условие не является достаточным.*

Точка, в которой функция дифференцируема, и все частные производные первого порядка обращаются в ноль (т.е. $df = 0$), называется ***стационарной точкой***.

Точка, в которой частные производные первого порядка обращаются в ноль или не существуют (т.е. df не существует), называется ***критической точкой***.

Пример. Функция $u = x^2 - y^2$ в точке $(0,0)$:

$$u(0,0) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial y}(0,0) = 0,$$

но в окрестности точки $(0,0)$ при $x = 0 : u(0,y) = -y^2 < 0$, а при $y = 0$: $u(x,0) = x^2 > 0$. Значит, в точке $(0,0)$ экстремума нет.

12.2 Достаточное условие экстремума функции n переменных

Здесь нам потребуются понятия алгебры, касающиеся квадратичных форм.

Квадратичная форма

$$\Phi(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j,$$

где $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $a_{ij} = a_{ji} \in R$, называется

а) ***положительно определенной***, если $\forall \xi \neq 0 \quad \Phi(\xi) > 0$;

б) ***отрицательно определенной***, если $\forall \xi \neq 0 \quad \Phi(\xi) < 0$;

в) ***неопределенной (знакопеременной)*** , если $\exists \xi_1, \xi_2 : \quad \Phi(\xi_1) > 0, \Phi(\xi_2) < 0$.

Существуют также квадратичные формы, не являющиеся ни одной из перечисленных. Например, если она принимает нулевое и положительные (отрицательные) значения. Такие формы называют *полуопределенными.*

Примеры.

1. $\Phi_1(\xi) = \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + 3\xi_2^2 = (\xi_1 + \xi_2)^2 + 2\xi_2^2$ – положительно определенная;

2. $\Phi_2(\xi) = -\xi_1^2 - 3\xi_2^2$ – отрицательно определенная;

3. $\Phi_3(\xi) = \xi_1^2 - \xi_2^2$ – неопределенная;

4. $\Phi_4(\xi) = \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2 = (\xi_1 + \xi_2)^2$ – полуопределенная.

Квадратичная форма определяется симметричной матрицей $A = \{a_{ij}\}_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,n}$.

Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы: Квадратичная форма положительно определена тогда и только тогда, когда все главные миноры ее матрицы положительны, т.е.

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots.$$

Для отрицательной определенности квадратичной формы A необходимо и достаточно положительная определенность формы $-A$. Это означает, что знаки главных миноров будут чередоваться, начиная с первого $a_{11} < 0$.

Невырожденная квадратичная форма является неопределенной, если выполнено хотя бы одно из условий:

1. один из главных миноров равен нулю;

2. главный минор чётного порядка отрицателен;

3. два главных минора нечётного порядка имеют разные знаки.

Теорема 12.2.1 (Отделимость от нуля положительно опр. кв. формы) *Пусть $\Phi(\xi)$ – положительно определенная квадратичная форма. Тогда*

$$\exists C > 0 : \quad \forall \xi \quad \Phi(\xi) \geqslant C\|\xi\|^2,$$

где $\|\xi\| = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}$.

Доказательство. Рассмотрим значения квадратичной формы $\Phi(\xi)$ на сфере $S = \{x : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$. При $\xi \in S \quad \Phi(\xi) > 0$.

Так как S есть компакт в $\mathbb{R}^n$ (оно замкнуто и ограничено), то функция $\Phi(\xi)$ достигает на S свое наименьшее значение (т. Вейерштрасса), обозначим это значение C.

Следовательно, для $\forall \xi \in S \quad \Phi(\xi) \geqslant C$.

Если $\xi \notin S$ и $\xi \neq 0$, то точка $\dfrac{\xi}{\|\xi\|} \in S$ и тогда

$$\Phi\left(\frac{\xi}{\|\xi\|}\right) \geqslant C.$$

Теперь воспользуемся однородностью квадратичной формы (однородность означает, что $\forall t$: $\Phi(tx) = t^k\Phi(x)$, здесь $k = 2$):

$$\Phi\left(\frac{\xi}{\|\xi\|}\right) = \frac{1}{\|\xi\|^2}\Phi(\xi) \quad \Rightarrow \quad \Phi(\xi) \geqslant C\|\xi\|^2.$$

□

Дифференциал второго порядка $d^2f(x^0)$ является квадратичной формой переменных $dx_1, \ldots, dx_n$.

Теорема 12.2.2 (Достаточное условие экстремума) *Пусть функция $f(x)$ имеет в окрестности точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$ непрерывные частные производные второго порядка и $df(x^0) = 0$. Тогда*

1. *если $d^2f(x^0)$ – положительно определенная квадратичная форма, то в точке (x_0, y_0)* ***строгий минимум*** *$f(x)$;*
2. *если $d^2f(x^0)$ – отрицательно определенная квадратичная форма, то в точке (x_0, y_0)* ***строгий максимум*** *$f(x)$;*
3. *если $d^2f(x^0)$ – неопределенная квадратичная форма, то в точке (x_0, y_0)* ***экстремума нет****.*

Доказательство. Запишем формулу Тейлора в точке x^0:

$$\Delta f(x^0) = \frac{1}{2}d^2f(x^0) + o\left(\|h\|^2\right).$$

1. Пусть $d^2f(x^0)$ – положительно определенная квадратичная форма. Тогда в силу предыдущей теоремы, $\exists C > 0$, что

$$d^2f(x^0) \geqslant C\|h\|^2.$$

Тогда

$$\Delta f(x^0) \geqslant \frac{1}{2}C\|h\|^2 + o\left(\|h\|^2\right) = \frac{1}{2}C\|h\|^2\left(1 + \alpha(h)\right),$$

где $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Следовательно, в некоторой окрестности точки x^0 $(1 + \alpha(h) > 0$ и тогда $\Delta f(x^0) > 0$, что означает, что в точке (x_0, y_0) минимум.

2. Если $d^2f(x^0)$ – отрицательно определенная квадратичная форма, применим рассуждения предыдущего пункта к форме $-d^2f(x^0)$.

3. Пусть $\Phi(h) = d^2f(x^0)$ - неопределенная квадратичная форма. Тогда

$$\exists h', h'': \quad \Phi(h') > 0, \quad \Phi(h'') < 0.$$

Тогда для любой окрестности $U(x^0)$ найдётся такое $t > 0$, что точки $x^0 + th'$ и $x^0 + th'' \in U(x^0)$ и

$$\Delta_1 f = f(x^0 + th') - f(x^0) > 0, \quad \Delta_2 f = f(x^0 + th'') - f(x^0) < 0,$$

что и означает, что в точке x^0 экстремума нет. □

Замечание 12.2.1 *Если квадратичная форма полуопределена, то возможно как наличие экстремума, так и его отсутствие. Например, функции $f(x, y) = x^2 + y^4$ и $g(x, y) = x^2 - y^4$ имеют в точке $(0, 0)$ второй дифференциал, равный $2dx^2$ (полуопределенная положительно квадратичная форма), но f имеет минимум в точке $(0, 0)$, а g не имеет экстремума в точке $(0, 0)$.*

Пример 12.2.1 $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - 4z$. *Исследовать на экстремум.*

Найдем стационарные точки:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 6y = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y + 6x = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = 2z - 4 = 0. \end{cases}$$

Этой системе удовлетворяют две точки: $A(6, -18, 2)$ и $B(0, 0, 2)$. Найдем вторые производные:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 6, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2,$$

и составим матрицу квадратичной формы второго дифференциала:

$$\begin{pmatrix} 6x & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Для точки $A(6, -18, 2)$ получаем:

$$\begin{pmatrix} 36 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_1 = 36 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 36 & 6 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 36 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} > 0,$$

следовательно, в точке $A(6, -18, 2)$ *- локальный минимум функции* $u(x, y, z)$.

Теперь рассмотрим точку $B(0, 0, 2)$. *В ней квадратичная форма имеет матрицу*

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим значения функции вблизи точки $B(0, 0, 2)$:

$$u(0, 0, 2) = -4,$$

при $x = \Delta x$, $y = \Delta y$, $z = 2 + \Delta z$ *имеем*

$$\Delta u = u(x, y, z) - u(0, 0, 2) = \Delta x^3 + \Delta y^2 + 6\Delta x \Delta y + \Delta z^2 = \Delta x(\Delta x^2 + 6\Delta y) + \Delta y^2 + \Delta z^2.$$

Возьмем $\Delta y = \Delta z = 0$. *Тогда знак* Δu *будет совпадать со знаком* Δx, *то есть принимать в окрестности точки* $B(0, 0, 2)$ *и положительные и отрицательные значения. Следовательно, в точке* $B(0, 0, 2)$ *экстремума нет.*

Замечание 12.2.2 *Матрица квадратичной формы, соответствующей дифференциалу второго порядка, называется* ***матрицей Гессе***, *а ее определитель –* ***гессианом***.

13 Неявное отображение и обратное отображение

13.1 Теорема Лагранжа о среднем

Теорема Лагранжа о среднем (или о конечном приращении) играет важную роль в математическом анализе. Обобщим ее на случай функций нескольких переменных.

Теорема 13.1.1 (Теорема Лагранжа о среднем) *Пусть* $f : \mathbb{R}^m \supset G \to \mathbb{R}$, G *– область и отрезок* $[x, x + h] \subset G$. *Если* f *непрерывна на* $[x, x + h]$ *и дифференцируема на* $(x, x + h)$, *то найдется точка* $\xi \in (x, x + h)$ *такая, что*

$$f(x + h) - f(x) = f'(\xi)h.$$

Замечание 13.1.1 *Множество, для которого отрезок, соединяющий любые две его точки, содержится в нем, называется* ***выпуклым****. В условии теоремы можно требовать выпуклость области.*

Доказательство. Введем вспомогательную функцию

$$\varphi(t) = f(x + th), \quad t \in [0, 1].$$

Функция $\varphi(t)$ удовлетворяет теореме Лагранжа: непрерывна на $[0, 1]$, дифференцируема на $(0, 1)$ как суперпозиция непрерывных/дифференцируемых отображений. Тогда найдется $\theta \in (0, 1)$:

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta),$$

откуда получаем $f(x + h) - f(x) = f'(x + \theta h)h$ и нашлось $\xi = x + \theta h$. $\square$

Следствие 13.1.2 *Если f дифференцируемо в области G и $df = 0$ в любой точке G, то $f \equiv \mathrm{const}$ в G.*

Замечание 13.1.2 *Для векторнозначных отображений теорема Лагранжа не верна. Например, для $f(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ имеем на отрезке $[0, 2\pi]$: $f(2\pi) - f(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, но при этом ни в одной точке $f'(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}$ не равно 0.*

13.2 Производная функции, заданной неявно

Напомним понятие неявно заданной функции для функции одной переменной. Уравнение $F(x, y) = 0$ в прямоугольнике $G = \{(x, y) : x_0 - a < x < x_0 + a, \quad y_0 - b < y < y_0 + b\}$ задает функцию $y = y(x)$, если для $\forall x \in (x_0 - a, x_0 + a)$ $\exists! y \in (y_0 - b, y_0 + b)$ такой, что $F(x, y) = 0$.

Теорема 13.2.1 (О неявной функции) *Пусть функция $F(x, y)$: $\mathbb{R}^2 \supset U(x_0, y_0) \to \mathbb{R}$ и выполнены следующие условия:*

1) $F \in C^1(U(x_0, y_0))$;
2) $F(x_0, y_0) = 0$;
3) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда существует прямоугольник $K = \{(x, y) : x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a, \quad y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b\}$, в котором уравнение $F(x, y) = 0$ задает y как неявную функцию от x: $y = f(x)$. При этом функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на $(x_0 - a, x_0 + a)$ и ее производная

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

Доказательство. 1) Докажем существование неявной функции.

Пусть $F'_y > 0$ (если меньше, то переобозначим $F(x,y) = -F(x,y)$). Так как F'_y непрерывна, то существует прямоугольник K_1:

$$K_1 = \{(x,y) : x_0 - a_1 \leqslant x \leqslant x_0 + a_1,\ y_0 - b_1 \leqslant y \leqslant y_0 + b_1\} : \quad F'_y(x,y) > 0.$$

Рассмотрим функцию $\psi(y) = F(x_0, y)$: $\psi'(y) = F'_y(x_0, y) > 0$, следовательно, $\psi(y)$ возрастает. $\psi(y_0) = F(x_0, y_0) = 0$ и найдётся такое b, что $\psi(y_0 + b) > 0$, $\psi(y_0 - b) < 0$. Тогда существует такое a, что для всех $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$ выполнено $F(x, y_0 - b) < 0$ и $F(x, y_0 + b) > 0$.

Зафиксируем $x^* \in [x_0 - a, x_0 + a]$. Введём функцию $\varphi(y) = F(x^*, y)$ – непрерывна, $\varphi(y_0 - b) < 0$, $\varphi(y_0 + b) > 0$, $\varphi'(y) > 0$ и $\varphi(y)$ – возрастает. Отсюда следует, что найдётся единственный y^*, такой, что $\varphi(y^*) = F(x^*, y^*) = 0$. То есть, в прямоугольнике $K = \{(x,y) : x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a,\ y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b\}$ уравнение $F(x,y) = 0$ задает функцию $y = f(x)$.

2) Докажем дифференцируемость и формулу для производной.

Возьмём две точки (x,y) и $(x + \Delta x, y + \Delta y)$: $F(x,y) = F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$. По теореме Лагранжа найдется точка $\xi \in \mathbb{R}^2$, лежащая на отрезке, соединяющем точки (x,y) и $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ такая, что:

$$\Delta F = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x,y) = F'_x(\xi)\Delta x + F'_y(\xi)\Delta y = 0,$$

отсюда

$$\Delta y = -\frac{F'_x(\xi)}{F'_y(\xi)}\Delta x.$$

Так как $F'_y(x_0, y_0) > 0$, то $\exists \alpha > 0$: $F'_y(x,y) \geqslant \alpha$.

Так как F'_x непрерывна на компактном множестве, то $\exists \beta > 0$: $|F'_x(x,y)| \leqslant \beta$.

Тогда $|\Delta y| \leqslant \frac{\beta}{\alpha}|\Delta x| \to 0$ при $x \to 0$. То есть, $y = f(x)$ – непрерывна. Так как F'_x и F'_y непрерывны, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F'_x(\xi)}{F'_y(\xi)} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

□

Замечание 13.2.1 *Для функции n переменных $y = y(x_1, \ldots, x_n)$, заданной неявно уравнением*

$$F(y, x_1, \ldots, x_n) = 0$$

будет выполнено

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}(x,y)}{F'_y(x,y)}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Пример 13.2.1 *$e^y - e^x + x^2 + y^2 = 0$. Найти y'_x.*

1-ый способ. Воспользуемся доказанной теоремой.

$$F(x, y) = e^y - e^x + x^2 + y^2, \quad F'_x = -e^x + 2x, \quad F'_y = e^y + 2y.$$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{e^x - 2x}{e^y + 2y}.$$

2-ой способ. Продифференцируем равенство $e^y - e^x + x^2 + y^2 = 0$ по x, считая y функцией от x:

$$e^y y'_x - e^x + 2x + 2yy'_x = 0.$$

Отсюда выразим y'_x:

$$y'_x = \frac{e^x - 2x}{e^y + 2y}.$$

13.3 Производная отображения, заданного неявно

Нам будет удобно использовать прямоугольные окрестности. Пусть $a = (a_1, ..., a_m) \in \mathbb{R}^m$. Прямоугольной окрестностью точки $x_0 = (x_1^0, ..., x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ будем называть множество

$$I_a(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^m : \ |x_i - x_i^0| < a_i, \ i = 1, .., m\},$$

которое можно представить декартовым произведением одномерных окрестностей:

$$I_a(x_0) = U_{a_1}(x_1^0) \times ... \times U_{a_m} x_m^0.$$

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и есть система уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1 ..., x_m, y_1, ..., y_n) = 0, \\ \ldots \\ F_n(x_1 ..., x_m, y_1, ..., y_n) = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad F(x, y) = 0, \qquad (*)$$

где отображение $F = (F_1, ..., F_n)$: $\mathbb{R}^{m+n} \supset G \to \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемо и якобиан $\det F'_y \neq 0$ в G.

Зададимся вопросом, при каких условия эта система разрешима относительно функций y_1, ..., y_n?

Определение 13.3.1 *Будем говорить, что система (*) в окрестности точки (x_0, y_0) задает неявное отображение $y = f(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, если для каждого $x \in U(x_0)$ найдется единственный $y \in V(y_0)$ такой, что $F(x, y) = 0$.*

Для краткости обозначим

$$F'_x(x,y) = \begin{pmatrix} (F_1)'_{x_1} & \dots & (F_1)'_{x_m} \\ \vdots & & \\ (F_n)'_{x_1} & \dots & (F_n)'_{x_m} \end{pmatrix}_{(x,y)}, \quad F'_y(x,y) = \begin{pmatrix} (F_1)'_{y_1} & \dots & (F_1)'_{y_n} \\ \vdots & & \\ (F_n)'_{y_1} & \dots & (F_n)'_{y_n} \end{pmatrix}_{(x,y)}.$$

Заметим, что матрица F'_y квадратная. А значит, она обратима тогда и только тогда, когда $\det F'_y \neq 0$.

Теорема 13.3.1 (О неявном отображении) *Пусть отображение* $F : \mathbb{R}^{m+n} \supset U(x_0,y_0) \to \mathbb{R}^n$ *удовлетворяет условиям:*

1) $F \in C^1(U(x_0,y_0))$*;*

2) $F(x_0,y_0) = 0$*;*

3) $\det F'_y(x_0,y_0) \neq 0$.

Тогда существует $(m+n)$*-мерная прямоугольная окрестность* $I(x_0,y_0) = I_\alpha(x_0) \times I_\beta(y_0) \subset U(x_0,y_0)$*, в которой система (*) задает неявно отображение* $y = f(x)$*, причем* $f \in C^1(I_\alpha(x_0))$ *и*

$$f'(x) = -\Big[F'_y(x,f(x))\Big]^{-1} \cdot F'_x(x,f(x)).$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции по числу уравнений n. При $n=1$ утверждение выполнено (теорема о неявной функции 13.2.1).

Пусть утверждение выполнено для размерности $n-1$. Докажем ее выполнение для n.

Так как определитель n-го порядка $\det F'_y(x_0,y_0) \neq 0$, то хотя бы один из элементов последней строки отличен от нуля. Пусть это $(F_n)'_{y_n} \neq 0$.

Тогда по теореме о неявной функции (13.2.1), последнее уравнение $F_n(x,y_1,..,y_n)$ определяет в некоторой окрестности $\tilde{I}(x_0,y_0)$ функцию $y_n = \tilde{f}(x_1,..,x_m,y_1,..,y_{n-1})$ класса C^1 в соответствующей окрестности точки $x_0, y_1^0, ..., y_{n-1}^0)$.

Подставим теперь найденное y_n в первые $(n-1)$ уравнения системы (*). Получим систему из $n-1$ уравнения и обозначим:

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1,..,x_m,y_1,..,y_{n-1}) := F_1(x_1...,x_m,y_1,...,y_{n-1},\tilde{f}(x,y_1,..,y_{n-1})) = 0, \\ \qquad\dots \\ \Phi_{n-1}(x_1,..,x_m,y_1,..,y_{n-1}) := F_n(x_1...,x_m,y_1,...,y_{n-1},\tilde{f}(x,y_1,..,y_{n-1})) = 0. \end{cases} \quad (**)$$

Покажем, что для этой системы выполнено индукционное предположение. Имеем: Φ_i класса C^1 в соответствующей окрестности точки $(x_0,y_1^0,..,y_{n-1}^0)$, а также $\Phi_i(x_0, y_1^0, .., y_{n-1}^0) = 0$. Рассмотрим

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k} = \frac{\partial F_i}{\partial y_k} + \frac{\partial F_i}{\partial y_n}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_k}, \quad i = 1, .., n-1$$

и докажем, что определитель, состоящий из $\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_j}$ отличен от нуля. Положим

$$\Phi_n(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_{n-1}) = F_n(x_1..., x_m, y_1, ..., y_{n-1}, \tilde{f}(x, y_1, .., y_{n-1}) \equiv 0,$$

но тогда

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial y_k} = \frac{\partial F_n}{\partial y_k} + \frac{\partial F_n}{\partial y_n}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_k} \equiv 0.$$

Тогда можем записать

$$\begin{pmatrix} (F_1)'_{y_1} + (F_1)'_{y_n}\tilde{f}'_{y_1} & \dots & (F_1)'_{y_{n-1}} + (F_1)'_{y_n}\tilde{f}'_{y_1} & (F_1)'_{y_n} \\ \vdots & & & \\ (F_n)'_{y_1} + (F_n)'_{y_n}\tilde{f}'_{y_1} & \dots & (F_n)'_{y_{n-1}} + (F_n)'_{y_n}\tilde{f}'_{y_{n-1}} & (F_n)'_{y_n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\Phi_1)'_{y_1} & \dots & (\Phi_1)'_{y_{n-1}} & (F_1)'_{y_n} \\ \vdots & & & \\ (\Phi_{n-1})'_{y_1} & \dots & (\Phi_{n-1})'_{y_{n-1}} & (F_{n-1})'_{y_n} \\ 0 & \dots & 0 & (F_n)'_{y_n} \end{pmatrix}$$

По нашему предположению $(F_n)'_{y_n} \neq 0$ и его минор отличен от нуля, следовательно, в некоторой окрестности точки $x_0, y_1^0, ..., y_{n-1}^0$:

$$\begin{vmatrix} (\Phi_1)'_{y_1} & \dots & (\Phi_1)'_{y_{n-1}} \\ \vdots & & \\ (\Phi_{n-1})'_{y_1} & \dots & (\Phi_{n-1})'_{y_{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда в силу индукционного предположения система (**) в некоторой окрестности точки $x_0, y_1^0, ..., y_{n-1}^0$ задает функции

$$y_i = f_i(x), i = 1, .., n-1.$$

Для y_n получаем

$$y_n = \tilde{f}(x, f_1(x), ..., f_{n-1}(x)) =: f_n(x).$$

Осталось доказать формулу для производной. Для найденного отображения f имеем в окрестности точки x_0:

$$F(x, f(x)) \equiv 0.$$

Дифференцируя это равенство, получим

$$F'_x(x,y) + F'_y(x,y)f'(x,y) = 0, \qquad \text{где } y = f(x),$$

откуда следует требуемое. □

Пример 13.3.1 *Функции $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ заданы системой уравнений*

$$\begin{cases} xu + yv - u^3 = 0, \\ x + y + u + v = 0. \end{cases}$$

Найти u'_x, u'_y, v'_x, v'_y в точке $A(x,y;u,v) = (1,0;1,-2)$.
Имеем

$$F_1 = xu + yv - u^3, \quad F_2 = x + y + u + v,$$

$$\begin{pmatrix} (F_1)'_u & (F_1)'_v \\ (F_2)'_u & (F_2)'_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 3u^2 & y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\Bigg|_A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} (F_1)'_x & (F_1)'_y \\ (F_2)'_x & (F_2)'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\Bigg|_A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}\Bigg|_A = -\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

13.4 Обратимость отображения

Определение 13.4.1 *Пусть $G \in \mathbb{R}^m$ – область, т.е. открытое связное множество. Отображение $f : \mathbb{R}^m \supset G \to \mathbb{R}^m$ называется регулярным в G, если $f \in C^1(G)$ и его якобиан $\det f' \neq 0$ в G.*

Теорема 13.4.1 (о локальной обратимости отображения) *Пусть $G \subset \mathbb{R}^m$ – открытое множество, отображение $f : G \to \mathbb{R}^m$ регулярно. Тогда в любой точке $x_0 \in G$ оно* ***локально регулярно обратимо****, т.е. найдутся такие окрестности $A(x_0) \subset G$ и $B(y_0) \subset f(G)$, $y_0 = f(x_0)$, что отображение $f : A(x_0) \to B(y_0)$ взаимно однозначно, и обратное отображение $f^{-1} : B(y_0) \to A(x_0)$ регулярно.*

Доказательство. Пусть отображение f задается системой

$$\begin{cases} y_1 - f_1(x) = 0, \\ \dots \\ y_m - f_m(x) = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Обозначим $F_i(x,y) = y_i - f_i(x)$, $i = 1..m$, – непрерывно дифференцируемые функции в области G.

Рассмотрим якобиан

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_m}(x) \end{vmatrix}_{(x^0,y^0)} = (-1)^m \begin{vmatrix} -\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & -\frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & -\frac{\partial f_m}{\partial x_m}(x) \end{vmatrix}_{(x^0,y^0)} \neq 0.$$

Значит для системы (*) выполнены условия теоремы о неявном отображении. Тогда существуют клеточные окрестности $K(x^0)$ и $Q(y^0)$, в которых система (*) определяет переменные $x_1, ..., x_m$ как неявные (непрерывно-дифференцируемые) функции переменных $y_1, ..., y_m$. Обозначим эти функции $x_i = \varphi_i(y)$, $i = 1..m$.

Регулярность обратного отображения следует из равенства
$f'(x_0) \cdot (f')^{-1}(x_0) = I$. □

Следствие 13.4.2 *Для регулярного отображения образ открытого множества есть открытое множество.*

Пример 13.4.1 *Отображение, задающее полярные координаты* $(\rho, \varphi) \xrightarrow{f} (x, y)$*:*

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi, \qquad & \rho &\in [0, +\infty] \\ y &= \rho\sin\varphi, \qquad & \varphi &\in [0, 2\pi). \end{aligned}$$

Найдем якобиан:

$$\det f' = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

Следовательно, локально отображение f регулярно обратимо в окрестности любой точки кроме $(0,0)$. Также оно обратимо как отображение:

$$(0, +\infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : (x,0), x \geqslant 0\}.$$

Пример 13.4.2 *Отображение* $(\rho, \varphi, \theta) \xrightarrow{f} (x, y, z)$*, определяемое функциями*

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi\sin\theta, \qquad & \rho &\in [0, +\infty] \\ y &= \rho\sin\varphi\sin\theta, \qquad & \varphi &\in [0, 2\pi) \\ z &= \rho\cos\theta, \qquad & \theta &\in [0, \pi] \end{aligned}$$

соответствует переходу от декартовых координат к сферическим. Найдем дифференциал и якобиан этого отображения.

Матрица Якоби:

$$J(\rho,\varphi,\theta)=\begin{pmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'_\theta \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_\theta \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\rho\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Якобиан равен (используем разложение по первой строке):

$$|J|=-\rho^2\sin\theta.$$

Таким образом, при $\rho>0$ и $\theta\in(0,\pi)$ это отображение локально обратимо.

Также оно будет обратимым как отображение

$$(0,+\infty)\times(0,2\pi)\times(0,\pi)\to\mathbb{R}^3\setminus\{(x,y,z):(x,0,z),x\geqslant 0,z\in\mathbb{R}\}.$$

14 Условный экстремум

Пусть $f\colon \mathbb{R}^m\supset E\to\mathbb{R}$ и $\varphi(x)=(\varphi_1(x),...,\varphi_n(x))\colon \mathbb{R}^m\supset E\to\mathbb{R}^n$. При этом $m>n$. Ограничим аргумент функции f условием $\varphi(x)=0$ и обозначим

$$\Omega=\{x\in E:\varphi_i(x)=0,i\in\{1,...,n\}\}.$$

Определение 14.0.1 *Точка $x_0\in E$ называется точкой* ***условного максимума*** *функции $f(x)$ при выполнении условий $\varphi(x)=0$, если существует окрестность $U(x_0)$, что для $\forall x\in U(x_0)\cap\Omega$ выполнено $f(x_0)\geqslant f_0(x)$.*

Аналогичным образом определяется точка условного минимума и точки строгих условных экстремумов.

Прямой метод нахождения условного экстремума заключается в следующем.

Из системы связей $\varphi(x)=0$ выразим переменные $x_1,\dots,x_n$ (или любые n переменных) $(x=(x_1,\dots,x_n)$ через $x_{n+1},\dots,x_m$ и подставим в функцию $f(x)$. Получим функцию от $m-n$ переменных $x_{n+1},\dots,x_m$. Далее остается найти обычный (безусловный) экстремум этой функции.

Пример 14.0.1 *Найти экстремумы функции $f(x,y)=x^2+y^2$ при условии $x+y-1=0$.*

Выразим из уравнения связи y: $y=1-x$ и подставим в функцию:

$$f(x,y)=f(x,1-x)=x^2+(1-x)^2=2x^2-2x+1.$$

Этот квадратный трехчлен имеет минимум в точке $x_0 = \dfrac{1}{2}$*, что соответствует точке* $(x_0, y_0) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Заметим, что выражение каких-либо n переменных из уравнений связи часто бывает довольно сложно или вовсе невозможно. Для таких случаев применяют метод Лагранжа. Опишем его.

Теорема 14.0.1 (Необходимое условие условного экстремума)
Пусть f, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$*:* $\mathbb{R}^m \supset E \to \mathbb{R}$*,* $f, \varphi_i \in C^1(E)$*,* $\operatorname{rang} \varphi'(x_0) = n$ *(*$m, n \in \mathbb{N}$*,* $m > n$*). Если* x_0 *– точка условного экстремума* f *с уравнениями связи* $\varphi = 0$*, то существует* $\lambda \in \mathbb{R}^n$*:*

$$\operatorname{grad} f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \operatorname{grad} \varphi_i(x_0).$$

Доказательство. Условие $\operatorname{rang} \varphi'(x_0) = n$ означает, что в матрице Якоби $\varphi'(x_0)$ есть ненулевой минор максимального порядка n. Будем считать, что это самый правый минор, содержащий последние n столбцов. Обозначим переменные удобным образом.

Будем рассматривать $\mathbb{R}^m$ как $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n$, где элементы пространства $\mathbb{R}^{m-n}$ назовем $x = (x_1, \dots, x_{m-n}) \in \mathbb{R}^{m-n}$, а элементы $\mathbb{R}^n$ назовем $y = (y_1, \dots, y_n)$. При этом точка $x_0 = (x^0, y^0)$, где $x^0 \in \mathbb{R}^{m-n}$, $y^0 \in \mathbb{R}^n$. При этом данная функция $f = f(x, y)$ и уравнения связи $\varphi(x, y) = 0$.

Тогда выполнены условия теоремы о неявном отображении и система уравнений $\varphi(x, y) = 0$ задает неявно y как функции от x, то есть в некоторой окрестности $U(x^0)$ существует отображение ψ: $U(x^0) \to \mathbb{R}^n$ непрерывно-дифференцируемое и такое, что уравнение $\varphi(x, y) = 0$ равносильно $y = \psi(x)$.

Введём функцию $F(x) = f(x, \psi(x))$, $x \in U(x^0)$. Она имеет экстремум в точке x^0. Тогда для неё выполняется необходимое условия экстремума

$$F'_x(x^0) = f'_x(x^0, \psi(x^0)) + f'_y(x^0, \psi(x^0)\psi'(x_0)) = 0 \tag{*}$$

Но также в окрестности $U(x^0)$ выполнено $\varphi(x, \psi(x)) \equiv 0$. Продифференцируем:

$$\varphi'_x(x^0, \psi(x^0)) + \varphi'_y(x^0, \psi(x^0)) \cdot \psi'(x^0) = 0$$

Умножим это равенство на $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ слева (как на строку):

$$\lambda \cdot \varphi'_x(x_0) + \lambda \cdot \varphi'_y(x_0) \cdot \psi'(x_0) = 0 \tag{**}$$

Составим разность (*) и (**):

$$\Big(f'_x(x_0) - \lambda \cdot \varphi'_x(x_0)\Big) + \Big(f'_y(x_0) - \lambda \cdot \varphi'_y(x_0)\Big)\psi'(x^0) = 0$$

Выберем $\lambda = f'_y(x_0)\Big(\varphi'_y(x_0)\Big)^{-1}$. Тогда

$$f'_x(x_0) = \lambda \cdot \varphi'_x(x_0), \quad f'_y(x_0) = \lambda \cdot \varphi'_y(x_0),$$

откуда и следует требуемое. □

Определение 14.0.2 *В условиях теоремы функция*

$$L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(x)$$

называется функцией Лагранжа. "Хорошо" найденные λ_i называются множителями Лагранжа.

Теорема 14.0.2 (Достаточное условие условного экстремума) *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $m > n$, E – открыто в $\mathbb{R}^m$, $f \in C^2(E)$, $\varphi \in C^2(E)$, $\varphi(x_0) = 0$, $x_0 \in E$, $\operatorname{rang} \varphi'(x_0) = n$. Пусть также $N = \{h \in \mathbb{R}^m : d\varphi(x_0, h) = 0\}$, L – функция Лагранжа с хорошо найденными λ. Тогда*

1. *Если $d^2L(x_0, h)$ положительно определена на N, то x_0 – точка условного минимума.*
2. *Если $d^2L(x_0, h)$ отрицательно определена на N, то x_0 – точка условного максимума.*
3. *Если $d^2L(x_0, h)$ принимает значения разных знаков на N, то x_0 не является точкой условного экстремума.*

Доказательство. Докажем для случая $m = 2$, $n = 1$. $x_0 = (x^0, y^0)$.

$$f'_x(x_0) = \lambda \cdot \varphi'_x(x_0), \quad f'_y(x_0) = \lambda \cdot \varphi'_y(x_0).$$

Пусть $\varphi'_y(x_0) \neq 0$, тогда $\exists U(x_0) \subset \mathbb{R}^2$ и $V(x_0) \subset \mathbb{R}$ ψ: $V(x^0) \to \mathbb{R}$, $\psi \in C^2(V(x_0))$

$$\Big\{(x, y) \in U(x_0) : \ \varphi(x, y) = 0\Big\} = \Big\{(x, \psi(x)), \ x \in V(x^0)\Big\}$$

Аналогично предыдущей теореме, введём функцию $F(x) = f(x, \psi(x))$ и

$$F'(x) = f'_x(x, \psi(x)) + f'_y(x, \psi(x))\psi'(x)$$

И из $\varphi(x, \psi(x)) \equiv 0$ получаем

$$\varphi'_x + \varphi'_y \cdot \psi' = 0.$$

Продифференцируем еще раз:

$$F''(x) = f''_{xx}(x,\psi(x))+2f''_{xy}(x,\psi(x))\cdot\psi'(x)+f''_{yy}(x,\psi(x))\cdot(\psi'(x))^2+f'_y(x,\psi(x))\cdot\psi''(x),$$

$$0 = \varphi''_{xx}(x,\psi(x))+2\varphi''_{xy}(x,\psi(x))\cdot\psi'_x+\varphi''_{yy}(x,\psi(x))\cdot(\psi'(x))^2+\varphi'_y(x,\psi(x))\cdot\psi''(x).$$

Умножим второе на λ, вычтем из первого и воспользуемся тем, что $f'_y-\lambda\varphi'_y = 0$ в точке y^0. Получим в точке x_0:

$$F''(x) = L''_{xx} + 2L''_{xy}\cdot\psi'_x + L''_{yy}\cdot\psi'^2 = 0$$

Пусть $h = (dx, dy) \in N$. Тогда имея равенство

$$\varphi'_x(x_0)dx + \varphi'_y(x_0)dy = 0$$

выразим dy:

$$dy = -\Big(\varphi'_y(x_0)\Big)^{-1}\cdot\varphi'_x(x_0)dx$$

$$dy = \psi'(x^0)dx.$$

Запишем дифференциал второго порядка функции F:

$$d^2F(x_0,h) = F''_{xx}(x_0)dx^2 = L''_{xx}\cdot dx^2 + 2L''_{xy}\cdot\psi'(x)\cdot dx^2 + L''_{yy}\cdot\psi'^2\cdot dx^2 =$$

$$= L''_{xx}\cdot dx^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}dy^2 = d^2L\Big(x_0,(h,\psi'(x_0)\cdot h)\Big).$$

Далее пользуемся достаточным условием экстремума (безусловного) для функции F. □

Пример 14.0.2 *Найти экстремумы функции при данных уравнениях связи*

$$u = xyz,\quad x+y-z=3,\ x-y-z=8.$$

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = xyz - \lambda_1(x+y-z-3) - \lambda_2(x-y-z-8)$$

$$\begin{cases} yz-\lambda_1-\lambda_2=0\\ xz-\lambda_1+\lambda_2=0\\ xy+\lambda_1+\lambda_2=0\\ x+y-z-3=0\\ x-y-z-8=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad x=\frac{11}{4},\ y=-\frac{5}{2},\ z=-\frac{11}{4}$$

$$d^2L = 0dx^2+0dy^2+0dz^2+2zdxdy+2ydxdz+2xdydz = -\frac{11}{2}dxdy-5dxdz+\frac{11}{2}dydz$$

$$d\Phi(x_0)=0\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}dx+dy-dz=0\\ dx-dy-dz=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}dx=dz\\ dy=0\end{cases}$$

$$d^L\Big|_N = -5dx^2 < 0$$

следовательно, точка $\left(\frac{11}{4},-\frac{5}{2},-\frac{11}{4}\right)$ – *точка условного максимума.*

Пример 14.0.3 *Найти экстремумы функции* $f(x,y) = x^2 + 12xy + 2y^2$ *при условии* $4x^2 + y^2 = 25$.

Запишем матрицы Якоби для функции $f_1(x,y) = 4x^2 + y^2 - 25$:

$$\begin{pmatrix} 8x & 2y \end{pmatrix}.$$

Её ранг равен 1 и равен числу уравнений связи.

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + 12xy + 2y^2 + \lambda(4x^2 + y^2 - 25).$$

Найдем ее стационарные точки:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + 12y + 8\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 4y + 12x + 2\lambda y = 0, \\ \qquad\qquad 4x^2 + y^2 = 25. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+4\lambda)x + 6y = 0, \\ 6x + (2+\lambda)y = 0, \\ 4x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$$

Первые два уравнения умеют ненулевое решение при условии

$$\begin{vmatrix} 1+4\lambda & 6 \\ 6 & 2+\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

что дает $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -\frac{17}{4}$.

При $\lambda_1 = 2$ *получаем две точки* $A(2,-3)$ *и* $B(-2,3)$.

При $\lambda_2 = -\frac{17}{4}$ *получаем* $C(\frac{3}{2},4)$, $D(-\frac{3}{2},-4)$.

Для проверки достаточных условий, запишем второй дифференциал функции Лагранжа:

$$d^2_{xx}L = (2+8\lambda)dx^2 + 24dxdy + (4+2\lambda)dy^2.$$

Дифференцируя уравнение связи, получим

$$8xdx + 2ydy = 0.$$

В точке $A(2,-3)$ *при* $\lambda_1 = 2$ *имеем:*

$$16dx - 6dy = 0 \Leftrightarrow dy = \frac{8}{3}dx,$$

$$d^2_{xx}L(A) = 18dx^2 + 24dxdy + 8dy^2 = 2(3dx + 2dy)^2 = 2\left(3 + \frac{8}{3}\right)^2 dx^2 > 0.$$

Следовательно, в точке $A(2,-3)$ *условный минимум.*

Аналогичным образом получаем, в точке $B(-2,3)$ *условный минимум, в точках* $C(\frac{3}{2},4)$ *и* $D(-\frac{3}{2},-4)$ *– условные максимумы.*