Факторгруппа. Смежные классы

$\triangleleft \langle \mathbb{Z}_n, + \rangle$

$x, y \in \mathbb{Z}$

$x \equiv y \pmod{n} \iff (x-y) \vdots n$

$(x-y)+(y-z) = x-z = kn+sn = n(k+s) \vdots n$

$\downarrow$

отношение эквивалентности

$\exists \; n = 3$

-3	-2	-1
0	1	2
3	4	5
6	7	8
9	10	11
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

эквив $x \equiv y \pmod{3}$ – согласован с сложением на $\mathbb{Z}$

$\exists$ $\bar{a}$ $3x+a$

$\bar{b}$ $3y+b$

$$(3x+a)+(3y+b) = 3(x+y)+(a+b)$$
$$\shortparallel$$
$$(3x'+a)+(3y'+b) = 3(x'+y')+(a+b)$$

$\Downarrow$

$\mathbb{Z} \supseteq n\mathbb{Z}$

Опр.: мн-во классов эквивалентности наз <u>фактор-множеством</u>

$$G \geqslant H$$

$g_1 \quad g_2$

$$g_1 \equiv g_2 \pmod{H} \Leftrightarrow g_1^{-1} g_2 \in H$$

Пр.:

$$(-g_1) + g_2 \in n\mathbb{Z}$$

$g_1 \equiv g_2 \pmod{H}$ – отнош экв.

1) $g_1 \equiv_H g_1$

$$g_1^{-1} g = e \in H \quad \checkmark$$

2) $g_1 \equiv g_2 \overset{?}{\Rightarrow} g_2 \equiv g_1$

$$g_1^{-1} g_2 \in H \overset{?}{\Rightarrow} g_2^{-1} g_1 \in H$$

$$(xy)^{-1} = y^{-1} x^{-1}$$

ц$^{-1}$ – антиавтоморфизм т.к. $\varphi(xy) = \varphi(y)\varphi(x)$

$$(g_1^{-1} g_2)^{-1} = g_2^{-1} g_1 \in H \quad \checkmark$$

3) $g_1 \equiv g_2 \qquad g_2 \equiv g_3$

$$\Downarrow$$

$$g_1 \equiv g_3$$

$$g_1^{-1} g_2 \in H \qquad g_2^{-1} g_3 \in H$$

$$(g_1^{-1} g_2)(g_2^{-1} g_3) = g_1^{-1}(g_2 g_2^{-1}) g_3 = g_1^{-1} g_3 \in H \quad \checkmark$$

отнош. экв. ✓

разбивает G на непересек-е классы эквив-ти

$< \; gH = \{gh \mid h \in H\}$ → левый смежный класс

$g_1H = \{g_1 h \mid h \in H\}$

$g_2 = g_1 h \quad | \cdot g^{-1}$

$g_1^{-1} g_2 = h \in H$

Св-ва смеж. классов:

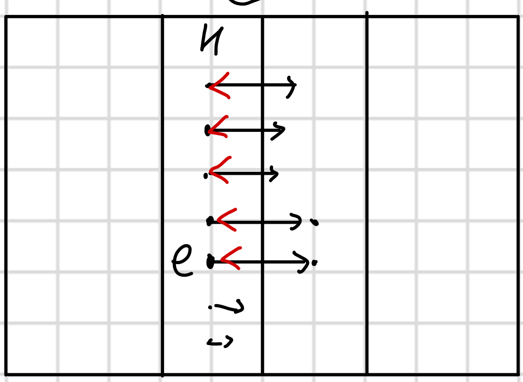
1) образуют разбиение G на непересек. классы

(левое разложение)

$G = G_1 \sqcup G_2 \sqcup \ldots$

2)

G



G/H

биекция

$$\begin{array}{ccc} H & \longleftrightarrow & gH \\ \Psi & & \Psi \\ h & \longmapsto & gh \end{array}$$

$\Rightarrow \; |H| = |gH|$

G/H — мн-во левых смежных классов

$\boxed{\text{Т. Лагранжа}}$

$\exists \; G$ — конеч. группа

$|G| = |H| \cdot |G/H|$

Число смежных классов — индекс подгруппы — H

∢ правые смежн. классы

$$Hg = \{hg \mid h \in H\} \qquad [H \backslash G]$$

$$g \mapsto g^{-1} \qquad (gH)^{-1} = Hg^{-1}$$

Нормальные подгруппы

$H \leq G$ $\quad H$ – нормальная $\Leftrightarrow \forall g \in G \quad gH = Hg$

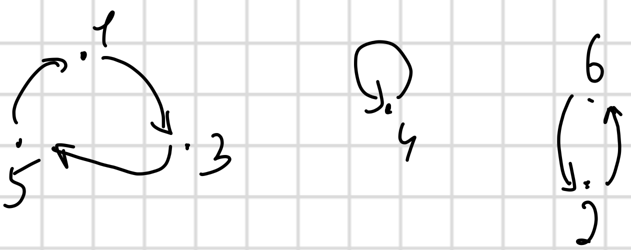
$$[H \trianglelefteq G]$$

Замечание: если G – абелева $\to$ в ней все подгруппы нормальны

Лемма: (из любого следует любое)

1) $H \trianglelefteq G$
2) $gHg^{-1} = H \quad \forall g \in G$
3) $ghg^{-1} \in H \quad \forall g \in G \quad \forall h \in H$

∢ $(1\ 3\ 5)(4)(2\ 6)$



] $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 & i_6 \end{pmatrix} = \pi$

$$\sigma : x \mapsto y$$
$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ \pi(x) & \mapsto & \pi(y) \end{array}$$

$\sigma\pi^{-1}$ — чтобы получить x из $\pi(x)$

$\pi\sigma\pi^{-1}$ чтобы получить $\pi(y)$

$$\Updownarrow$$

$g h g^{-1}$ из п.(3)

g — сопрягающий эл.

он — сопряжение

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto, "\sigma"] & y \\
\pi(x) \arrow[u, "\pi^{-1}"] \arrow[r, mapsto] \arrow[r, bend left=80] & \pi(y) \arrow[u, "\pi"']
\end{tikzcd}$$

$\triangleright$ (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\quad \exists\ gH = Hg \quad \big|\cdot g^{-1}$ (подгрупп, норм-ая)

$$gHg^{-1} = H \quad \big|\cdot g$$
$$gH = Hg \quad \blacktriangleleft$$

$\triangleright$ (3) $gHg^{-1} \subseteq H$ (более слабое) поэтому докажем (3) $\Rightarrow$ (2)

$$\forall g \in G \quad gHg^{-1} \subseteq H$$
$$\cdot g \big| \quad g^{-1}Hg \subseteq H \quad \big|\cdot g^{-1}$$
$$H \subseteq gHg^{-1}$$

$$\begin{cases} gHg^{-1} \subseteq H \\ H \subseteq gHg^{-1} \end{cases} \Rightarrow \quad gHg^{-1} = H \quad \blacktriangleleft$$

Опр.: $\exists\ H \trianglelefteq G$

<u>Факторгруппа</u> G/H (т.е. H — нормальна) — мн-во смежн-ых классов с операцией умножения смеж. классов

$A \qquad B$

смеж классы

$$AB = \{ab \mid a \in A,\ b \in B\}$$

$\exists\ A = g_1 H \qquad B = g_2 H$

$$AB = (g_1 H)(g_2 H) = g_1 (H g_2) H \overset{\text{т.к. } H \trianglelefteq G}{=} g_1 g_2 H H = g_1 g_2 H =$$

$= (g_1 g_2) H$ ← смеж класс H

проверим аксиомы группы

1) Ассоц: $\exists\ A = g_1 H \quad B = g_2 H \quad C = g_3 H$

$$(AB)C = (g_1 g_2 H)(g_3 H) = g_1 g_2 g_3 HH = (g_1 g_2 g_3) H =$$

$$= (g_1 (g_2 g_3)) H = (g_1 H)(g_2 g_3 H) = A(BC)\ \checkmark$$

2) нейтр

$eH = H$

3) обратн

т.к. H- группа

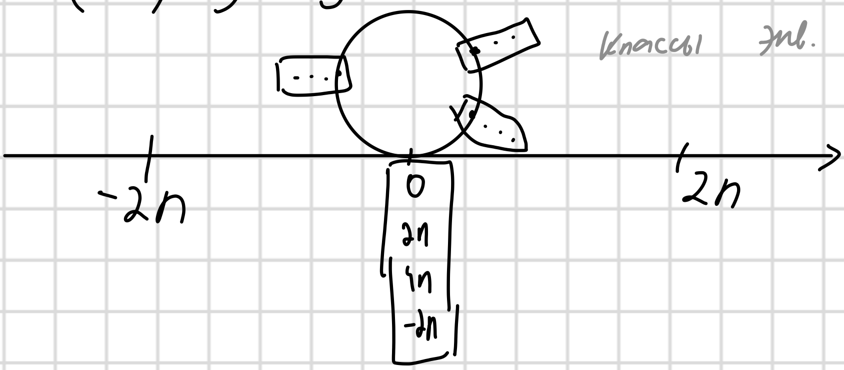
$$(gH)^{-1} = H^{-1} g^{-1} = H g^{-1} = g^{-1} H$$

Пр.: $G=\mathbb{R}$ $\quad H=2\pi\mathbb{Z}$

$H \trianglelefteq G$ т.к. $\mathbb{R}$ – абелева

$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

$(-x)+y = y-x \in 2\pi\mathbb{Z}$



Классы экв. т.к катимся по прямой с периодом 2π