Док-во вспомогательных фактов

Б.М.П + Б.М.П = Б.М.П

] $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ т.е. a_n и b_n – беск. мал. пос-ти

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = 0$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n| < \varepsilon$

и $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n'_\varepsilon : |b_n| < \varepsilon$

$\triangleright \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n''_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, n'_\varepsilon\} : \forall n \geq n''_\varepsilon : |a_n + b_n| \leq$

$\leq |a_n| + |b_n| \leq 2\varepsilon$ ◀

Б.М.П × ОГР.П = Б.М.П

] a_n – огр. т.е. $\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| < M$

] α_n – Б.М.П т.е. $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon : |\alpha_n| < \varepsilon$

] $b_n = a_n \cdot \alpha_n$

$\triangleright \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |b_n| < M \cdot \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 \Rightarrow b_n$ – б.м.п. ◀

Равносильность посл. и Б.М.П.

] $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \iff \alpha_n = a_n - a$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \overbrace{|a_n - a|}^{=\alpha_n} < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \underbrace{|\alpha_n|}_{=a_n - a} < \varepsilon$

равносильные утверждения

Арифм. св-ва пределов

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

1) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

$\triangleright$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow a_n - a = \alpha_n$; $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \Leftrightarrow b_n - b = \beta_n$

$\leftarrow$ беск. мал. посл

$(a_n - a) + (b_n - b) = (a_n + b_n) - (a + b) = \alpha_n + \beta_n$

$\Rightarrow$ $a_n + b_n$ стремится к $a + b \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$ $\blacktriangleleft$

2) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$

$\triangleright$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow a_n - a = \alpha_n$; $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \Leftrightarrow b_n - b = \beta_n$

$(a_n - a) - (b_n - b) = (a_n - b_n) - (a - b) = \alpha_n - \beta_n = \alpha_n + \beta_n \cdot (-1)$

$\measuredangle$ $\beta_n \cdot (-1)$: β_n – беск. мал. п ; -1 – огранич

беск. мал. пос-ть $\times$ огранич. посл-ть = беск. мал. послед-ть $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $-\beta_n$ – беск. мал. посл. $\Rightarrow$ $\alpha_n - \beta_n$ – беск. мал. посл-ть

$\Rightarrow$ $a_n - b_n$ стремится к $a - b \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$ $\blacktriangleleft$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$

$\triangleright$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b \Leftrightarrow a_n b_n - ab = a_n b_n - a b_n + a b_n - ab =$

$$= b_n(a_n - a) + a(b_n - b) = \underbrace{b_n \cdot \alpha_n}_{\text{беск. мал. п}} + \underbrace{a \cdot \beta_n}_{\text{беск. мал. посл.}} = \text{беск. мал. посл} \Rightarrow$$

так b_n – огранич

$\Rightarrow$ $a_n b_n - ab$ беск. мал. посл. $\Rightarrow$ $a_n b_n$ сходится к ab ◀

Лемма (о сохр. знака):

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$

то уа $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |b_n| > \frac{|b|}{2}$ и знак(b_n) = знак(b)

▶ $\exists b > 0$ и $\exists \varepsilon = \frac{b}{2}$

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |b_n - b| < \frac{b}{2}$

$$\Updownarrow$$

$$-\frac{b}{2} < b_n - b < \frac{b}{2} \Rightarrow b_n > \frac{b}{2}$$ ◀

то же самое и для $b<0$:

только $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ при $b \neq 0$, $b_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a_n b - a b_n}{b_n b}\right| = \left|\frac{a_n b - ab + ab - a b_n}{b_n b}\right| = \left|\frac{b \cdot \alpha_n - a \cdot \beta_n}{b_n \cdot b}\right| <$$

начиная с нект-ого n $< \dfrac{|b \cdot \alpha_n - a \cdot \beta_n|}{\frac{|b|^2}{2}}$

$b \cdot \alpha_n - a \cdot \beta_n$ – беск. мал. посл т.к. α_n и β_n – б.м.п, а a и b – const

$\frac{|b|^2}{2}$ – const $\Rightarrow \frac{\text{б.м.п}}{\text{const}} = \text{б.м.п.} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{a_n}{b_n}$ сходится к $\frac{a}{b}$