

Теорвер. Введение

Вероятностное пр-во

Ω - ω -ы исходы (выпадение орла или монетки)

p - дискр. плотность вероят-и

$$p: \Omega \rightarrow [0, 1] \quad \text{и} \quad \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$$

дискр. вероят. пр-во: Ω - конечн или счетн.

Пр.:

1) честная монета

$$\Omega = \{\overset{\text{орел}}{0}, \overset{\text{решка}}{1}\}$$

$$p(0) = p(1) = \frac{1}{2}$$

2) нечестн. монета

$$\Omega = \{0, 1\}$$

$$p(1) = p \neq p(0) = q, \quad p + q = 1$$

3) чест. игр-ая кость

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$p(\omega) = \frac{1}{6}$$

(и случайное событие)

Событие - некоторое ω -во ω исхода

$$A \subset \Omega$$

Вероятность события: $P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$ или $|P(A)|$ или $P_r(A)$

Пр.:

$$1) E = \{2, 4, 6\}$$

$$P(E) = p(2) + p(4) + p(6) = \frac{1}{2}$$

Неверно: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ (только если вероятности равны)

В3) Не сущ. фин. вероят. нр-ва с фин. числом равновер-бих исходов

$$p(\omega) = 0 \Rightarrow \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 0 \neq 1$$

$$p(\omega) = a > 0 \Rightarrow \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = a \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$2) B = \{4, 5, 6\}$$

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

Независимые события:

A, B — независ. если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

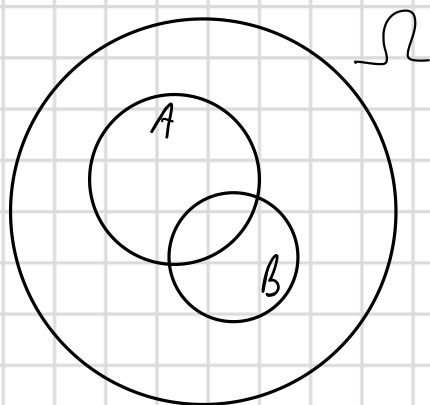
Пр.:

$$1) P(O \cap E) = 0$$

$$\text{но } P(O) \cdot P(E) = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \text{зависимые}$$

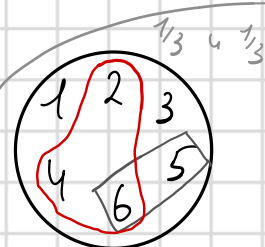
$$2) P(E) \cdot P(B) = \frac{1}{4}$$

$$P(E \cap B) = \frac{1}{3}$$



$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad | : P(B)$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(\Omega)}$$



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \leftarrow \text{условная вер-ть } A \text{ при уср. } B$$

$$P(A|B) = P(A) \leftarrow \text{случ. события или независимые события}$$

Пр.:

$$1) V = \{5, 6\}$$

$$P(V \cap E) = 1/6$$

$$P(V) = 1/3 \quad P(E) = 1/2$$

$$P(V) \cdot P(E) = 1/6$$

Произведение вероятностей нр-в.

$$\left. \begin{array}{l} \Omega_1, P_1 \\ \Omega_2, P_2 \end{array} \right\} \quad \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$$

$$P(\langle \omega_1, \omega_2 \rangle) = P_1(\omega_1) \cdot P_2(\omega_2)$$

Теорема:

$$\forall A_1 \subset \Omega_1 \text{ и } A_2 \subset \Omega_2:$$

$$A_1 \times \overset{\text{любое событие}}{\Omega_2} \text{ и } \Omega_1 \times A_2 - \text{независимые}$$

$$\begin{aligned} \triangleright P(A_1 \times \Omega_2 \cap \Omega_1 \times A_2) &= P(A_1 \times A_2) = \sum_{\substack{a \in A_1 \\ b \in A_2}} P(\langle a, b \rangle) = \sum_{a \in A_1} \sum_{b \in A_2} P_1(a) \cdot P_2(b) = \\ &= \sum_{a \in A_1} P_1(a) \left(\sum_{b \in A_2} P_2(b) \right) = P_1(A_1) \cdot P_2(A_2) \end{aligned}$$

$$P_1(A_1 \times \Omega_2) = P_1(A_1)$$

$$P_2(\Omega_1 \times A_2) = P_2(A_2)$$

13) A_1, A_2, \dots, A_n

1) попарно независимы (A_i и A_j независимы)

2) независимы в совокупности ($\forall I \subset \{1, 2, \dots, n\} : P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$)

Пр:

0 0

$A_1 = \{10, 11\}$

0 1

$A_2 = \{01, 11\}$

1 0

1 1

$A_3 = \{01, 10\}$

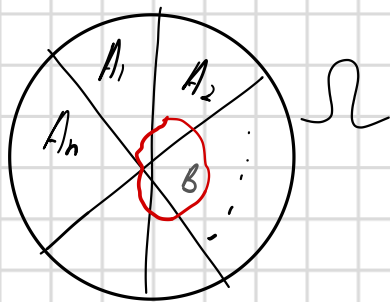
, но A_1, A_2, A_3 — независимы в совокупности

Формула полной вероятности:

$$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n, \quad i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$$

↑
полная система событий

Дано: $P(A_i), P(B|A_i)$



Найти: $P(B)$

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) \quad \ominus$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(B)}$$

$$\ominus \sum_{i=1}^n P(B|A_i) \cdot P(A_i) \leftarrow \text{формула полной вероятности}$$

Дано: $P(A_i)$ $P(B|A_i)$

Найти: $P(A_j|B)$

A_1 - здоров, A_2 - заражен

B - положительный результат теста

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_j) \cdot P(A_j)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i) \cdot P(A_i)} \leftarrow \text{формула Байеса}$$

$$A_1 = 0,02$$

$$A_2 = 0,98$$

$$P(B|A_1) = 0,6$$

$$P(B|A_2) = 0,04$$

$$P(A_1|B) = \frac{0,6 \cdot 0,02}{0,6 \cdot 0,02 + 0,04 \cdot 0,98} \approx \frac{12}{12+40} = 0,23$$