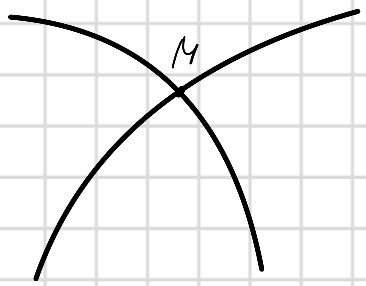
Производная

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$



$M(x_0, y_0)$

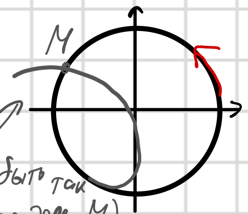
$t_1 = \ldots$

$t_2 = \ldots$

Пр.:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

при $t \in (0, 2\pi]$ делаем по окр-ти



$$y_{кас}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

?

y_0

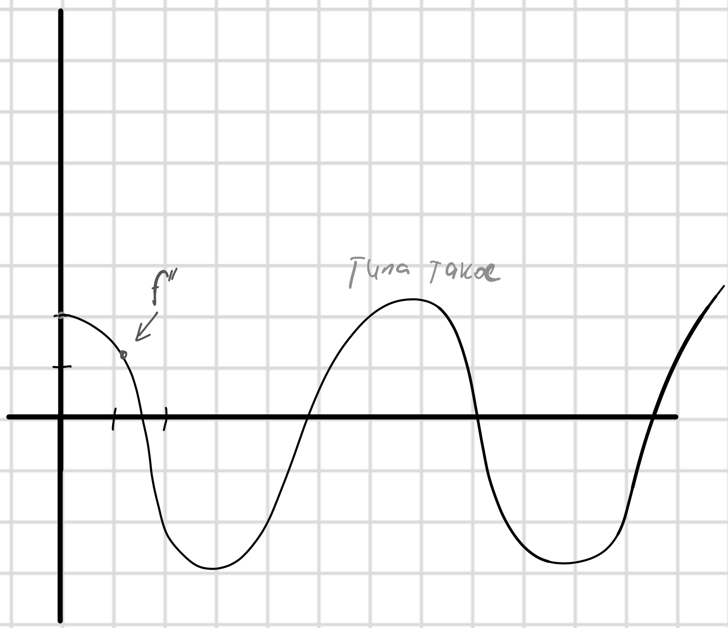
$$f'(x_0) = \frac{y'(t_1)}{x'(t_1)}$$

1. $$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 2\cos t \end{cases}$$

$y = f(x)$

$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = ?$

$x'(t) = 1 - \cos t \geq 0$



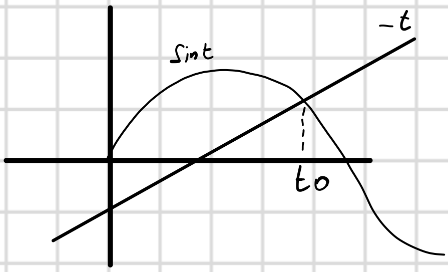
$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = -\dfrac{2\sin t}{1-\cos t} \\ x(t) = t - \sin t \end{cases}$$

и $f''(x_0) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{\left(-\frac{2\sin t}{1-\cos t}\right)'}{x'(t)} = -2\,\frac{\cos(1-\cos t) - \sin^2 t}{(1-\cos t)^3} = \frac{2}{(1-\cos t)^2}\Bigg|_{t=t_0}$$

$\frac{\pi}{4} = t - \sin t$

$\sin t = t - \frac{\pi}{4}$



Ответ: $\dfrac{2}{(1-\cos t_0)^2}$

2. Ф-ла Тейлора до $o(x^n)$, $x \to 0$

а) $f(x) = \dfrac{1}{2x+3}$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x_n)$$

Как не надо:

$$f(x) = \frac{1}{2x+3} = \frac{1}{1+(2x+2)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (2x+2)^k + o\left((2x+2)^n\right)$$

нужно $o(x^n)$ и $x \to x_0 = 0 \Rightarrow$ ф-ла Маклорена в (.) 0, а получили $(2(x+1))^n$ и $o\left((2(x+1))^n\right)$, т.е $x_0 = -1$ а хотим x^k

Правильно

$$f(x) = \frac{1}{2x+3} = \frac{1}{3(1+\frac{2}{3}x)} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\tfrac{2}{3}x\right)^k + o(x^n)$$ ← ответ

б) $f(x) = \ln\left(\dfrac{3+x}{4-x}\right)$

$$f(x)=\ln\left(\frac{3+x}{4-x}\right)=\ln\left(1+\frac{2x-1}{4-x}\right)$$ ← тоже плохо с таким x

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\cdot x^k}{k}+o(x^n)$$

$$\ln(3(1+1/3x))$$

$$f(x)=\ln\left(\frac{3+x}{4-x}\right)=\ln(3+x)-\ln(4-x)=\ln 3+\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)-\ln 4-\ln\left(1-\frac{x}{4}\right)=\ln\frac{3}{4}+$$

$$+\sum\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k\cdot 3^k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\overbrace{(-1)^{k-1}(-1)^k}^{=-1}x^k}{k\cdot 4^k}\underset{+o(x^n)}{=}\ln\frac{3}{4}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^{k-1}}{k\cdot 3^k}+\frac{1}{k\cdot 4^k}\right)x^k+o(x^n)$$

в) $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x^2+x-12}$

$$f(x)=\frac{x^2+5}{x^2+x-12}=\frac{x^2+5}{(x+4)(x-3)}=(x^2+5)\frac{1}{4+x}\cdot\frac{1}{-3+x}=-\frac{x^2+5}{12}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{4}}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}}\ \boxed{=}$$

$\exists$ для $o(x^3)$

$$\boxed{=}\ -\frac{1}{12}(x^2+5)\left(1-\frac{x}{4}+\left(\frac{x}{4}\right)^2-\left(\frac{x}{4}\right)^3+o(x^3)\right)\left(1-\left(\frac{x}{3}\right)+\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{x}{3}\right)^3+o(x^3)\right)\ \boxed{=}$$

раскрываем скобки и все что выше 3 степени уходит в $o(x^3)$

$$\boxed{=}\ -\frac{1}{12}(x^2+5)\left[1+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)x+\underbrace{\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{9}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\right)}_{A}x^2+\underbrace{\left(-\frac{1}{64}+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\right)}_{B}x^3+o(x^3)\right]=$$

$$=-\frac{1}{12}\left[5+\frac{5}{12}x+(5A+1)x^2+\left(5B+\frac{1}{12}\right)x^3+o(x^3)\right]$$

Или если по-честному

$$f(x)=\frac{x^2+5}{x^2+x-12}=1+\frac{-x+17}{x^2+x-12}\ \boxed{=}$$

$$\frac{-x+17}{(x+4)(x-3)}=\frac{A}{x+4}+\frac{B}{x-3}\ \Big|\cdot(x+4)(x-3)$$

$$-x+17=A(x-3)+B(x+4)$$

многочлены равны когда у них равны коэфф-ы при один. степенях

$$\begin{cases}-1=A+B & \text{при 1-ой степ}\\ 17=-3A+4B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-3\\ B=2\end{cases}$$

$\ominus\ 1-\frac{3}{x+4}+\frac{2}{x-3}=1-\frac{3}{4(1+x/4)}-\frac{2}{3(1-x/3)}=1-\frac{3}{4}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^k}{4^k}-\frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{3^k}+o(x^n)$

в*) Найти $\left(\frac{x^2+5}{x^2+x-12}\right)^{(15)}\Big|_{x=0}=15!\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4^{15}}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^{15}}\right)$

берем ф-лу Тейлора и $n>15$ и $\sphericalangle$ слагаемые x^{15}, коэфф при них

равен $\frac{\text{производная}}{15!}$ => Ответ: производ $\cdot 15!$

$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\frac{f^{(k)}(0)}{k!}}_{\text{коэфф}}x^k+o(x^n)$

2) $f(x)=e^{2x-3}$

$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n)$

$f(x)=e^{2x-3}=e^{-3}\cdot e^{2x}=e^{-3}\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k\cdot x^k}{k!}+o(x^n)$

3. Вычислить $\sqrt[8]{255}$ с помощью дифф-ла и оценить погрешность

$\rbrack$ $f(x)=\sqrt[8]{x}$, $x_0=256$, $\Delta x=-1$

$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+A\Delta x+o(\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$

$f'=(x^{1/8})'=1/8\ x^{-7/8}\Big|_{x_0=256}=1/8\ (2^8)^{-7/8}=2^{-3}\cdot 2^{-7}=2^{-10}$ ← значение производной в ()

$\sqrt[8]{255}=2-1/1024+\underbrace{f'(\xi)\cdot\Delta x}_{R_1}$, $\xi\in(255,256)$

$|R_1|=1/8\ \xi^{-7/8}<1/8\ (255)^{-7/8}$