Введение в теорию обыкновенных дифференциальных уравнений

§1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Предположим, что мы изучаем некоторое явление окружающего мира. Пусть в этом явлении нас интересует величина y. Это может быть температура тела, атмосферное давление, количество особей в биологической популяции или напряжение на участке электрической цепи. Существенно, что величина y зависит от некоторых параметров, например, от момента времени или положения в пространстве. Другими словами, это не просто число, а функция.

Определить интересующую функцию непосредственно удаётся не всегда. Но часто возможно установить связь между функцией, её производными и независимой переменной. Уравнение, выражающее такую связь, называется дифференциальным.

Рассмотрим простую модель, описывающую изменение численности биологической популяции. Обозначим через $y(t)$ количество её особей в момент времени t. Пусть эксперименты показывают, что прирост числа особей пропорционален их количеству. Более точно: при малом изменении времени Δt выполняется приближённое равенство

$$y(t+\Delta t) - y(t) \approx a y(t). \tag{1}$$

Пусть экспериментальные данные указывают также, что коэффициент a пропорционален временному шагу: $a \approx k\Delta t$. Разделив обе части равенства (1) на Δt, получаем

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} \approx ky.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, находим

$$y' = ky. \tag{2}$$

Таким образом, мы получили дифференциальное уравнение. Функция, описывающая численность популяции, которая ищется на основе исходных предположений о приросте числа особей, должна удовлетворять этому уравнению.

Что означают слова «функция удовлетворяет уравнению»? Если взять, например, функцию $\varphi(t) = kt$ и подставить её в уравнение (2) вместо y, то придём к равенству $k = k^2 t$, верному при $t = 1/k$, и только при таком значении t. Однако, в рассматриваемом примере, нас интересует закон, справедливый при *любых* значениях t. Другими словами, искомая функция должна при подстановке обращать уравнение в *тождество*.

Легко убедиться, что подстановка $y = e^{kt}$ обращает уравнение (2) в тождество (верное при $t \in \mathbb{R}$). Функцию e^{kt} разумно назвать решением. Такая функция не единственная: всевозможные решения даются формулой

$$y = Ce^{kt},$$

где C — произвольная постоянная (рис. 1). Для выяснения значения постоянной нужно воспользоваться дополнительной информации.

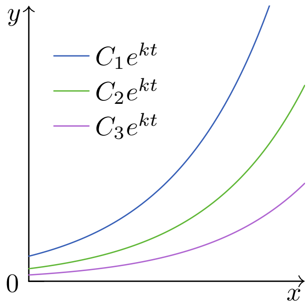

Рис. 1. Графики некоторых решений уравнения $y' = ky$

Пример 1.1. Дрожжи массой 25 г поместили в раствор сахара. Через полчаса их масса увеличилась до 42 г. В какой момент времени масса дрожжей будет в два раза больше изначальной?

Решение. Для решения задачи воспользуемся только что построенной моделью. А именно, считаем, что масса дрожжей $m(t)$ удовлетворяет уравнению

$$m' = km.$$

Значит, $m = Ce^{kt}$. Поскольку $m(0) = 25$, то $C = m(0) = 25$, следовательно,

$$m(t) = 25e^{kt}.$$

Найдём ещё коэффициент k. Из условия $m(30) = 42$ получаем

$$k = \frac{\ln(42/25)}{30} \approx 0{,}0173.$$

Таким образом, масса дрожжей в момент времени t равна

$$m(t) = 25e^{0{,}0173t}.$$

Требуется найти такое значение t_2, что $m(t_2) = 2 \cdot 25 = 50$. Имеем $50 = 25\exp(0{,}0173t_2)$, отсюда

$$t_2 = \frac{\ln 2}{0{,}0173} \approx 40,$$

то есть примерно через 40 минут следует ожидать удвоение массы дрожжей.

Конечно, полученная зависимость имеет ограниченную область применимости. Имеем $m(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$, однако, в реальности дрожжи не могут неограниченно размножаться. Дифференциальное уравнение решено верно. Причина неполного соответствия найденной зависимости и настоящей в том, что само исходное уравнение описывает действительность лишь приближённо. Многие факторы не были учтены при его выводе. Поэтому пользоваться найденной функцией можно лишь до тех пор, пока влияние этих факторов незначительно. $\triangle$

Многие законы физики формулируются в виде дифференциальных уравнений. Например, второй закон Ньютона

$$F = ma,$$

связывающий ускорение тела a, его массу m и приложенные силы F, есть ни что иное, как дифференциальное уравнение, поскольку ускорение — это вторая производная от перемещения.

Пример 1.2. Рассмотрим пружину с коэффициентом упругости k, один конец которой закреплён, а к другому подвешен груз массой m (рис. 2). Пружину оттягивают на небольшое расстояние и отпускают. Каков закон движения груза?

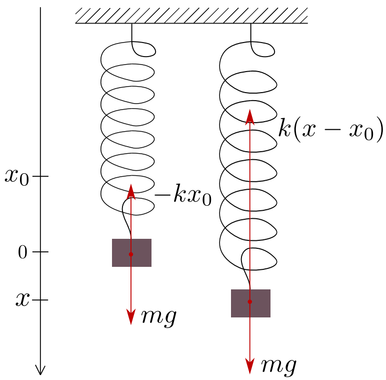

Рис. 2. Колебания пружины

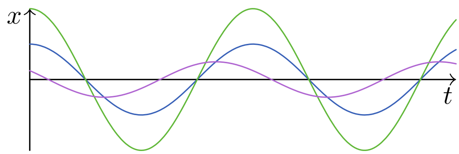

Рис. 3. Графики некоторых решений уравнения $mx'' = -kx$.

Решение. Направим ось Ox вертикально вниз, а за начало отсчёта примем положение равновесия груза. В любой момент времени на груз действует сила тяжести mg, а также сила упругости пружины $-k\Delta x$, по закону Гука пропорциональная величине растяжения $\Delta x = x - x_0$, где x_0 — координата свободного конца пружины в нерастянутом положении.

Применяя второй закон Ньютона, находим уравнение движения груза

$$mx'' = -k(x - x_0) + mg.$$

Если груз покоится в положении равновесия, то

$$0 = -k(0 - x_0) + mg,$$

поэтому $kx_0 = -mg$. Исключая mg из уравнения движения, находим

$$mx'' = -kx.$$

Нетрудно убедиться непосредственной подстановкой, что функции вида

$$x(t) = C_1 \cos\left(t\sqrt{k/m} + C_2\right).$$

подходят в качестве решений. △

В отличие от предыдущего примера, здесь имеется две произвольных постоянных. Причина в том, что полученное уравнение движения содержит вторую производную. Постоянные C_1 и C_2 определятся однозначно, если известны начальные условия, то есть положение груза и скорость в момент, когда его отпустили.

Дифференциальные уравнения возникают при моделировании эволюции какого-либо процесса. Данный курс посвящён изучению уравнений, в которых неизвестная функция зависит только от одной вещественной переменной, то есть *обыкновенных дифференциальных уравнений*. Кроме обыкновенных существуют и другие виды (в частных производных, стохастические). Под дифференциальными уравнениями в нашем курсе будем понимать обыкновенные, если не оговорено противное.

§2. Уравнение в нормальной форме

Определение. Пусть $f\colon G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. ***Нормальное уравнение*** (уравнение в нормальной форме или уравнение, разрешённое относительно производной):

$$y' = f(x, y). \tag{3}$$

Определение. ***Область определения*** *нормального уравнения* — область определения его правой части. Обозначение: $\operatorname{dom}(3) = G$.

Пример 2.1. Примеры уравнений и соответствующих областей определения:

(а) $y' = x\sqrt{y}$, $G = \mathbb{R} \times [0, +\infty)$;

(б) $y' = y$, $G = \mathbb{R}^2$;

(в) $y' = -\frac{1}{x^2}$, $G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\right\}$.

Заметим, что область определения уравнения (3) — подмножество плоскости, даже если правая часть фактически не зависит от одной из переменных или является константой. △

Запись $E = \langle a, b\rangle$ в нашем курсе будет означать, что $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, $E \in \{(a,b), [a,b) \setminus \{-\infty\}, (a,b] \setminus \{+\infty\}, [a,b] \setminus \{\pm\infty\}\}$. То есть E — невырожденный промежуток вещественной оси. Символ $\equiv$ (тождество) означает равенство с применением квантора всеобщности: высказывание «$F(x) \equiv G(x)$ на D» равносильно «$\forall x \in D\ F(x) = G(x)$».

Определение. Функция $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ — ***решение*** уравнения (3), если $E = \langle a, b\rangle$ и

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)) \ \text{ на } E.$$

Другими словами, решением уравнения (3) называют всякую функцию, определённую на невырожденном промежутке, подстановка которой вместо y обращает уравнение в тождество.

Пример 2.2. Рассмотрим уравнение $y' = y$ и функции

- $\varphi_1(x) = e^x$ — решение на $\mathbb{R}$, так как $\mathbb{R}$ — невырожденный промежуток и $(e^x)' = e^x$ при любом $x \in \mathbb{R}$;
- $\varphi_2(x) = x$ — не решение ни на каком промежутке, поскольку равенство $x' = x$ выполнено только в одной точке $x = 1$;
- $\varphi_3(x) = e^x$ при $x < 0$ и $\varphi_3(x) = 2e^x$ при $x > 0$ — не решение, поскольку $\operatorname{dom}\varphi_3 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ — не промежуток;
- $\varphi_4(x) = e^x$ при $x < 0$ и $\varphi_4(x) = 2e^x$ при $x \geqslant 0$ — решение на $\mathbb{R}$? $\triangle$

Замечание 2.3. На протяжении всего курса будем придерживаться правила: если некоторый предикат $P(x)$ не определён при $x = x_0$, то считаем высказывание $P(x_0)$ ложным. Это позволит сократить формулировки некоторых определений и утверждений. Например, без этого правила в определение решения пришлось бы добавить требование дифференцируемости функции φ (именно так и поступают во многих учебниках). Иначе, в силу отстутствия значения $\varphi_4'(0)$, высказывание $\varphi_4'(0) = \varphi_4(0)$ не определено (не является ни истинным, ни ложным). Поэтому невозможно понять, является ли функция φ_4 решением на $\mathbb{R}$. Если же учесть приведённое правило, то высказывание $\varphi_4'(0) = \varphi_4(0)$ ложно, следовательно, функция φ_4 — не решение на $\mathbb{R}$.

Замечание 2.4. Учитывая замечание 2.3, любое решение уравнения (3) — дифференцируемая функция. Действительно, из истинности утверждения $\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$ на E следует, что выражение $\varphi'(x)$ определено для всех $x \in E$. Поскольку $\operatorname{ran} f \subset \mathbb{R}$, то $\varphi'(x) \in \mathbb{R}$.

Замечание 2.5. Если f — непрерывная функция, то любое решение уравнения (3) непрерывно дифференцируемо. Действительно, в силу замечания 2.4 решение φ дифференцируемо, а значит, непрерывно. Тогда $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ непрерывна как композиция непрерывных.

Замечание. В уравнении (3) символы x, y и y' — три различные *независимые* переменные. Пока не произведена подстановка функции, буква y никак не связана с буквой x, а символ y' не обозначает производную. Подстановка функции φ в уравнение означает, что нужно заменить символ y на функцию $\varphi(x)$, а символ y' — на производную $\varphi'(x)$.

Сейчас мы использовали букву φ для обозначения функции. Однако, часто для обозначения решения мы будем использовать тот же символ, который участвует в уравнении. То есть буквой y будет обозначаться как независимая переменная (или координата), так и функция, зависящая от x. Конкретный смысл символа y обычно ясен из контекста.

Определение. ***Интегральная кривая*** уравнения (3) — график его решения.

Если φ —решение уравнения (3) на E, то $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ для всех $x \in E$. Следовательно, $(x, \varphi(x)) \in G$ для всех $x \in E$. Это означает, что любая интегральная кривая уравнения (3) лежит в области его определения.

Определение. ***Общее решение*** уравнения (3) — множество всех его решений.

Если желают подчеркнуть, что речь идёт о каком-то одном конкретном решении, то говорят о *частном решении* уравнения. Во многих случаях решение не выражается в явном виде, а задаётся неявно из некоторого соотношения, которое иногда называют *частным интегралом*.

Определение. ***Общим интегралом*** уравнения (3) будем называть соотношение вида

$$\Phi(x, y, C) = 0,$$

которое неявно задаёт некоторые решения уравнения (3) при некоторых значениях вещественного параметра C.

Замечание. Общий интеграл не всегда описывает *общее решение* уравнения[1]. Множество всех решений может быть шире, чем множество решений, определяемых общим интегралом.

Пример 2.6. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = x.$$

Ясно, что его решением будет любая первообразная правой части[2]:

$$y = \int x\,dx + C = \frac{x^2}{2} + C.$$

Таким образом, мы имеем целое семейство решений (рис. 4).

[1]Существуют и другие определения понятий «общее решение» и «общий интеграл». В нашем курсе мы будем придерживаться определений, данных в этом параграфе.

[2]Под символом $\int f(x)\,dx$ или $\int f$ мы всегда будем понимать какую-нибудь одну первообразную, не важно какую, а постоянную интегрирования приписывать отдельно в качестве слагаемого.

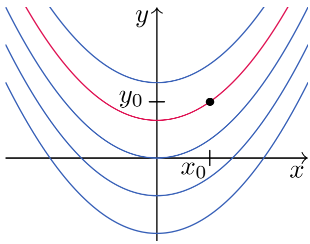

Рис. 4. Семейство решений уравнения $y' = x$ и частное решение, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$

Формально, *общее решение* — это множество

$$\left\{y\colon E \to \mathbb{R} \mid E = \langle a, b\rangle,\ y(x) = x^2/2 + C,\ C \in \mathbb{R}\right\}.$$

Но обычно мы будем записывать общее решение короче:

$$y = \frac{x^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Функции

$$y_1(x) = \frac{x^2}{2},\ \ y_2(x) = \frac{x^2}{2} + 2,\ \ y_3(x) = \frac{x^2}{2} - 5$$

представляют различные *частные решения*. Соотношение $x^2 - 2y + C = 0$ даёт пример *общего интеграла*. $\triangle$

§3. Уравнение в дифференциалах

Определение. Пусть $P, Q\colon G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. ***Уравнение в дифференциалах*** (уравнение в симметричной форме, уравнение Пфаффа на плоскости):

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0. \tag{4}$$

Определение. ***Область определения*** *уравнения в дифференциалах* (4) — область определения коэффициентов P и Q. Обозначение: $\mathrm{dom}(4) = G$.

Если на плоскости выбрана система координат, то через $\mathbb{R}_x, \mathbb{R}_y$ обозначаем множества точек соответствующих координатных осей, $\mathbb{R}^2_{x,y}$ — вся плоскость.

Определение. Пусть $E = \langle a, b\rangle$, $E \subset \mathbb{R}_x$. Функция $\varphi\colon E \to \mathbb{R}_y$ — ***решение уравнения*** (4), если

$$P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0 \text{ на } E.$$

Замечание. То есть решением называется функция φ, заданная на невырожденном промежутке оси Ox, подстановка которой в уравнение вместо y обращает его в тождество. При подстановке $y = \varphi(x)$ символ dy нужно понимать как дифференциал функции φ, а символ dx — как дифференциал переменной x.

Замечание. Переменные x и y входят в уравнение (4) равноправно, поэтому его решением называется не только функция вида $y = \varphi(x)$, но и функция вида $x = \psi(y)$. Соответствующее определение аналогично приведённому.

Замечание 3.1. Если $y = \varphi(x)$ — решение уравнения (4), то необходимо φ — дифференцируемая, а значит и непрерывная функция. Допустим, её график не проходит через точки, в которых $Q(x, y) = 0$. Тогда

$$\varphi'(x) = -\frac{P(x, \varphi(x))}{Q(x, \varphi(x))}.$$

Если функции P и Q непрерывны, то φ — непрерывно дифференцируемая функция. Если же для некоторого x_0 будет $Q(x_0, y_0) = 0$, где $y_0 = \varphi(x_0)$, то из определения решения следует, что $P(x_0, y_0) = 0$.

Определение. Точка $(x_0, y_0) \in G$ называется ***особой точкой*** уравнения (4), если $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$.

Пример 3.2. Рассмотрим уравнение

$$x\,dx + y\,dy = 0. \tag{5}$$

Область его определения — вся плоскость $\mathbb{R}^2_{x,y}$.

Убедимся, что функция $y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ при любом $R > 0$ является решением на интервале $(-R, R)$. Действительно, её дифференциал

$$dy = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,dx$$

определён при $x \in (-R, R)$. При подстановке в исходное уравнение получаем

$$x\,dx + \sqrt{R^2 - x^2}\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,dx = 0, \quad \forall x \in (-R, R).$$

Аналогично устанавливается, что функция $y(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$, а также функции $x(y) = \pm\sqrt{R^2 - y^2}$ — решения на интервале $(-R, R)$. △

Графики решений вида $y = \varphi(x)$ и $x = \psi(y)$ могут быть частями одной гладкой кривой. В рассмотренном примере графики всех упомянутых функций при одинаковом значении R — это части окружности радиуса R с центром в начале координат. Такую кривую естественно считать интегральной кривой, а её параметризацию — решением.

Определение. Пусть $T = \langle \alpha, \beta \rangle$. Вектор-функция $(u, v) \in C^1(T \to \mathbb{R}^2)$ — ***параметрическое решение*** уравнения (4), если

- $(u'(t), v'(t)) \neq (0, 0)$ для всех $t \in T$;
- $P(u(t), v(t))u'(t) + Q(u(t), v(t))v'(t) \equiv 0$ на T.

Например, при $R > 0$ вектор-функция $r(t) = (R\cos t, R\sin t)$ — параметрическое решение уравнения (5) на $[0, 2\pi)$.

Определение. ***Интегральной кривой*** уравнения (4) называют годограф[3] её параметрического решения.

Утверждение 3.3 (Связь между обычными и параметрическими решениями). *Пусть $P, Q \in C(G)$, множество G не содержит особых точек уравнения (4). Тогда*

(i) Если $y = \varphi(x)$ — решение уравнения (4) на E, то $r(t) = (t, \varphi(t))$ — параметрическое решение уравнения (4) на E.

(ii) Если $r = (u, v)$ — параметрическое решение уравнения (4) на T, то для любого $t_0 \in T$ найдётся окрестность $U(t_0)$, такая что функции $u(t)$ и $v(t)$ при $t \in U(t_0) \cap T$ параметрически задают решение (вида $y = \varphi(x)$ либо $x = \psi(y)$) уравнения (4).

Замечание. Пункт (i) говорит о том, что график обычного решения уравнения (4) совпадает с годографом некоторого параметрического решения, а значит, является интегральной кривой. Пункт (ii) говорит о том, что интегральные кривые уравнения (4) склеены из графиков обычных решений. Причём склеены гладко: любая точка интегральной кривой вместе со своими соседними образует график дифференцируемой функции.

Доказательство утверждения 3.3. (i) В силу замечания 3.1 и отсутствия особых точек, будет $\varphi \in C^1(E)$. Тогда функция r — параметрическое решение по определению.

(ii) Возьмём $t_0 \in T$. По определению параметрического решения будет $(u'(t_0), v'(t_0)) \neq (0, 0)$. Пусть, для определённости, $u'(t_0) > 0$. В силу непрерывности функции u' будет $u'(t) > 0$ при $t \in U(t_0) \cap T$, где $U(t_0)$ — некоторый интервал. Значит, функция u строго монотонна на множестве $U(t_0) \cap T$. Следовательно, существует функция $\varphi = v \circ u^{-1}$ на множестве $X = u(U(t_0) \cap T)$. Производная этой функции

$$\varphi'(x) = \frac{v'(u^{-1}(x))}{u'(u^{-1}(x))} = \frac{v'(t)}{u'(t)},$$

где $x = u(t)$. Отсюда и из тождества

$$P(u(t), v(t))u'(t) + Q(u(t), v(t))v'(t) \equiv 0$$

вытекает, что $y = \varphi(x)$ — решение на промежутке X. □

[3] *Годограф* вектор-функции — это множество её значений.

Замечание. Условие $(u'(t), v'(t)) \neq (0, 0)$ существенно для отсутствия точек излома или возврата на интегральной кривой. Рассмотрим уравнение

$$dy = 3y^{2/3}\,dx.$$

Вектор-функция $r(t) = (u(t), v(t))$, где $u(t) = t^2$ для $t \in \mathbb{R}$, $v(t) = 0$ при $t < 0$ и $v(t) = t^6$ при $t \geqslant 0$, была бы параметрическим решением, если убрать первое условие из определения. При $t = 0$ имеем точку возврата, поэтому пункт (ii) утверждения 3.3 был бы неверным.

Определение. Два дифференциальных уравнения ***эквивалентны*** (или ***равносильны***) на множестве G, если они имеют одинаковое семейство интегральных кривых на множестве G.

Теорема 3.4. *Пусть* $f \in C(G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$. *Тогда уравнение*

$$y' = f(x, y) \tag{6}$$

эквивалентно на множестве G *уравнению*

$$dy = f(x, y)\,dx. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть γ — интегральная кривая уравнения (6). Тогда, по определению, γ — график некоторого решения $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ уравнения (6). Следовательно,

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)) \text{ на } E.$$

Это тождество означает, что φ — решение уравнения (7). По утверждению 3.3, пункт (i), кривая γ — интегральная кривая уравнения (7).

Обратно, пусть γ — интегральная кривая уравнения (7). Тогда, по определению, кривая γ допускает параметризацию $x = u(t)$, $y = v(t)$, $t \in T$. При этом

$$v'(t) \equiv f(u(t), v(t))u'(t) \text{ на } T. \tag{8}$$

Заметим, что $u'(t) \neq 0$ для любого $t \in T$. Действительно, если $u'(t_0) = 0$ для некоторого t_0, то из тождества (8) имеем $v'(t_0) = 0$. Но по определению параметрического решения производные u' и v' не обращаются в ноль одновременно.

Из непрерывности функции u' следует её знакопостоянность. Поэтому функция u строго монотонна, а значит, имеет обратную $t = u^{-1}(x)$. График функции $y = v(u^{-1}(x))$ совпадает с кривой γ. Используя теорему о дифференцировании обратной функции, имеем

$$(v \circ u^{-1})'(x) = \frac{v'(u^{-1}(x))}{u'(u^{-1}(x))}.$$

Отсюда и из соотношения (8) при $t = u^{-1}(x)$ находим

$$(v \circ u^{-1})'(x) = \frac{v'(t)}{u'(t)} = f(u(t), v(t)) = f(x, v \circ u^{-1}(x)).$$

Следовательно, $v \circ u^{-1}$ — решение уравнения (6), а γ — соответствующая интегральная кривая уравнения (6). $\square$

Следствие 3.5. *Пусть* $P, Q \in C(G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$. *Тогда уравнение (4) равносильно уравнениям*

$$y'_x = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \quad \text{на множестве } G \setminus \{(x,y) \mid Q(x,y) = 0\},$$

$$x'_y = -\frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \quad \text{на множестве } G \setminus \{(x,y) \mid P(x,y) = 0\}.$$