Комбинаторика

Скоб. посл.

n = 5:

((()))　　()(())

(()())　　()()()

(())()

Рекурентное соот-ие

Сочетания

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

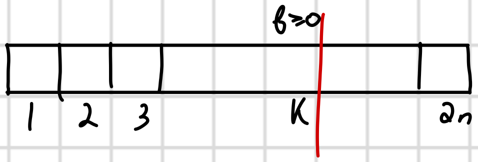
Перестановки

$$P_n = P_{n-1} \cdot n$$

Скобочные пос-ти

1) для $\forall$ префикс — баланс > 0

2) в конце баланс $= 0$



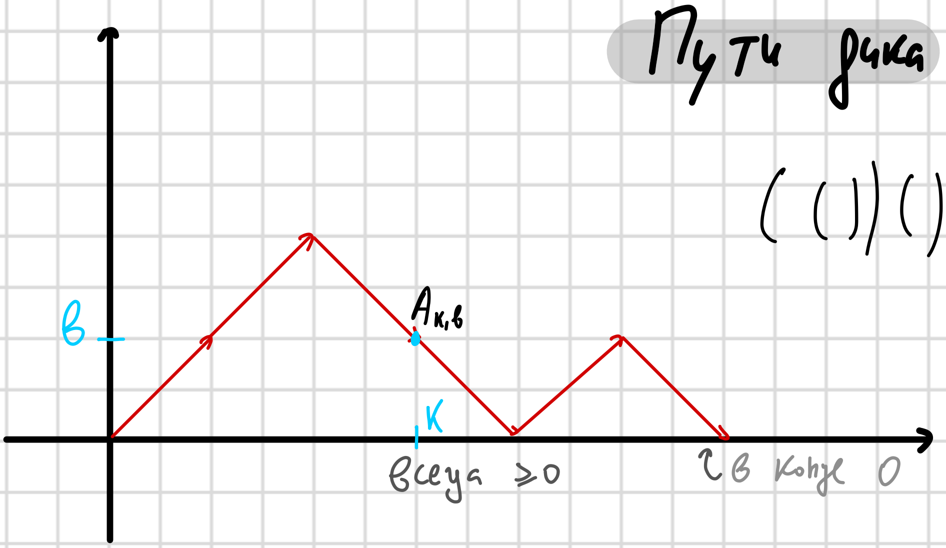
()) b=0

()(← нельзя

$A_{k,b}$ — кол-во префиксов пр. скоб пос-ей длины k, баланс в конце b

$C_n = A_{2n,0}$

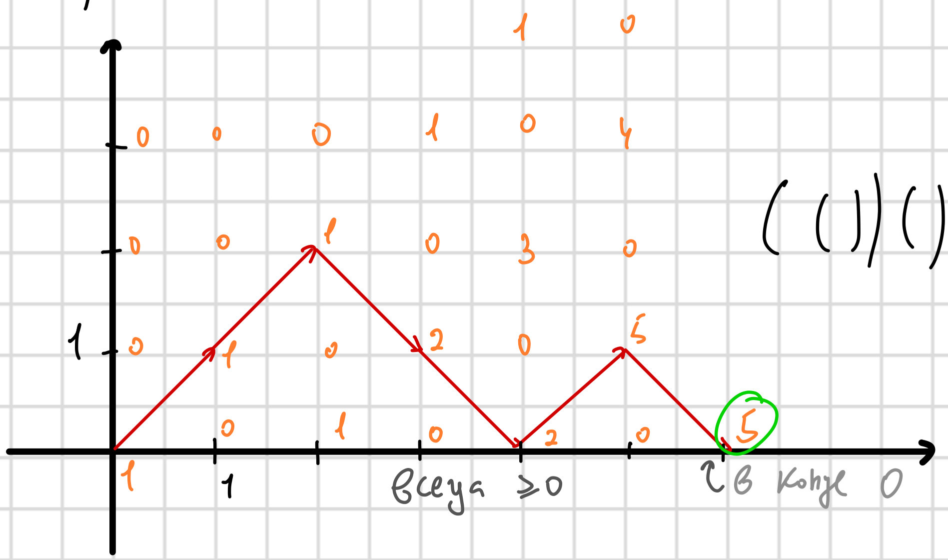
Пути Дика



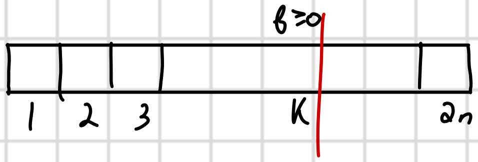
(())()

$$A_{k,b} = A_{k-1,b+1} + \underbrace{A_{k-1,b-1}}_{\text{если } b>0}$$

$A_{0,0} = 1$



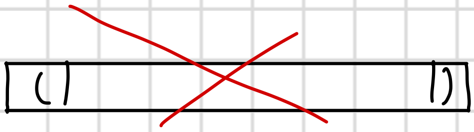
(())()

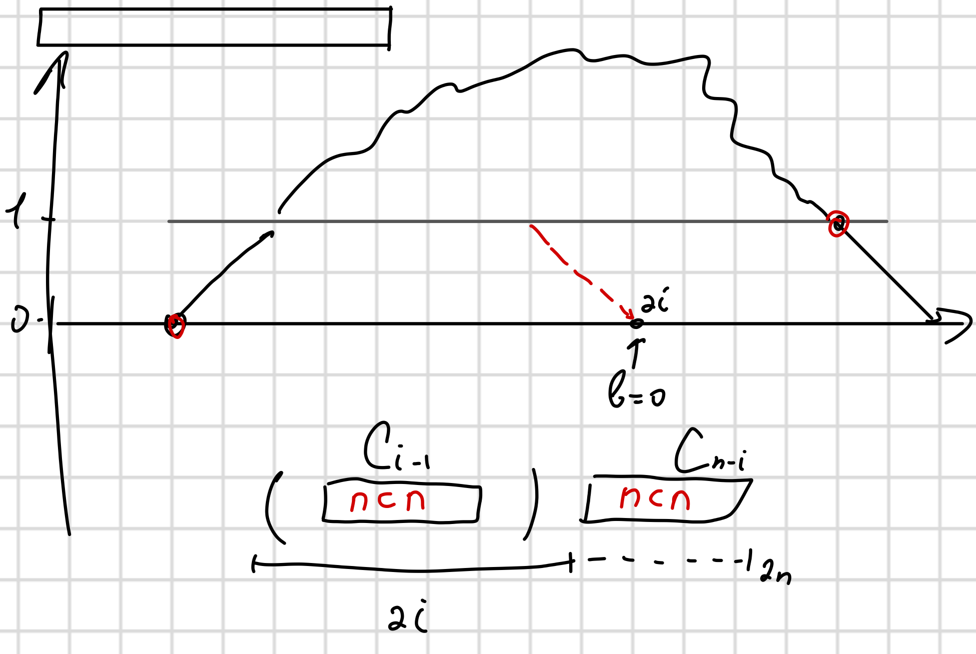


$$A_{k,b} = A_{k-1,b+1} + \underbrace{A_{k-1,b-1}}_{b\geq 0}$$

$$A_{0,0} = 1$$

еще одна формула





всего способов: $C_n = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1} C_{n-i}$

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}$$

C_n - число Каталана

1 1 2 5 14 42 ...

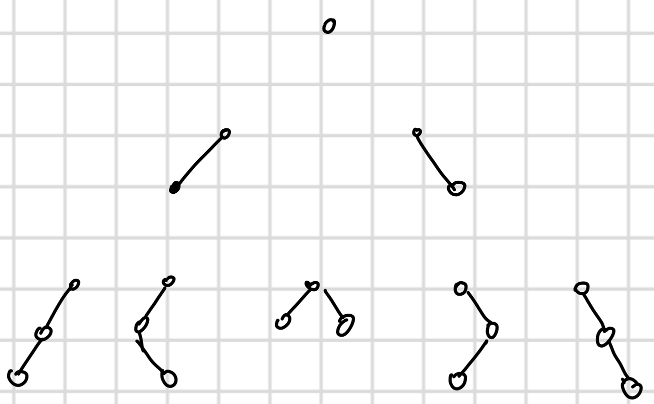
Деревья

1) Двоичные деревья

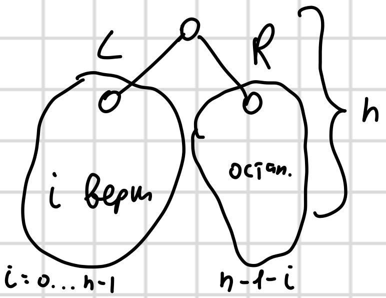
1

2

5



$\exists$ n вершин



$$T_n = \sum_{i=0}^{n-1} T_i T_{n-1-i}$$

$T_0 = 1$ и $C_0 = 1$

$T_1 = 1$ $\quad$ $C_1 = 1$

\# дв. дерев. = числу Каталана

Разбиения

n шаров

Корзины

Пр.: $5 = 1+1+1+1+1$ $\qquad$ $5 = 2+2+1$

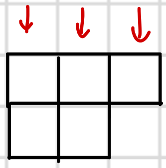
$5 = 5$ $\qquad$ $5 = 2+1+1+1$

$5 = 4+1$ (= 1+4) $\qquad$ $5 = 3+2$

$5 = 3+1+1$

Кол-во шаров в корзине

Диаграмма Юнга (Ферре)



2+2+1

3+2

Как посчитать # разбиений ?

$$100 = 83 \mid \underbrace{2\ \ 2\ \ 1\ \ 1\ \ 1}_{7}$$

$P_{n,k}$ – # разбиений числа n на слагаемые, каждые $\leq K$

$P_n = P_{n,n}$

$\forall\ n = s + \dots$

$s \leq K$

1) $s = K$:

2) $s < K$:

$$P_{n,k} = P_{n-k,k} + P_{n,k-1}$$

$P_{0,k} = 1 \qquad \underbrace{P_{n,0}}_{n>0} = 0$

n \ K	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
2	0	1	2	2	2	2
3	0	1	2	3	3	3
4	0	1	3	4	5	5
5	0	1	3	5	6	7

$O(n^2)$ можно за $O(n\sqrt{n})$

Число Белла B_n

① ② ③ … ⓝ шаров

$\exists\, n=3$

$\lfloor 1\ 2\ 3 \rfloor$

$\lfloor 1 \rfloor\ \lfloor 2\ 3 \rfloor$

$\lfloor 2 \rfloor\ \lfloor 1\ 3 \rfloor$

$\lfloor 3 \rfloor\ \lfloor 1\ 2 \rfloor$

$\lfloor 1 \rfloor\ \lfloor 2 \rfloor\ \lfloor 3 \rfloor$

$n=4$

1234	
1	234
2	134
3	124
4	123
12	34
13	24
14	23

12	3	4	
13	2	4	
14	2	3	
23	1	4	
24	1	3	
34	1	2	
1	2	3	4

$\left\{ {4 \atop 3} \right\}$

$S_2(n, k)$ или $\left\{ {n \atop k} \right\}$ — # разбиений n эл-в мн-ва на k непустых мн-в

Число Стирлинга второго рода

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$$

① 1 в отдельном мн-ве

1 в одном из мн-в с другими

в каком мн-ве

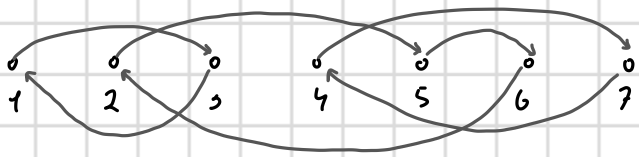
$$\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$$

B_n	$n \backslash k$	0	1	2	3	4
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
2	2	0	1	1	0	0
5	3	0	1	3	1	0
15	4	0	1	7	6	1

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}$$

Разбиение на циклы = перест. n эл. с k циклами

3 5 1 7 6 2 4



циклический граф перестановки

$$i \to a[i]$$

7 эл. 3 цикла

Число Стирлинга первого рода

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}}_{\text{1 отдельн. цикл}} + \underbrace{(n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}}_{\text{1 в цикле длины} > 1}$$

$n!$	$n \backslash k$	0	1	2	3	4
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
2	2	0	1	1	0	0
6	3	0	2	3	1	0
24	4	0	6	11	6	1

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n!$$