Модуль

Опр.: $\exists x \in \mathbb{R}$ $\quad |x| := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

Св-ва модуля:

1) $|x| \geq 0$, $\quad |x| = 0 \iff x = 0$
2) $|x| = |-x|$
3) $-|x| \leq x \leq |x|$
4) $|x| = |y| \iff \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = -y \end{array}\right.$
5) $|xy| = |x| \cdot |y|$
6) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
7) $|x+y| \leq |x| + |y|$
8) $|x-y| \geq ||x| - |y||$

можно возвести в квадрат

док-ть

§ Ограниченность мн-ва

$\exists X \in \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$

Опр.: X – огр. сверху, если $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in X : x \leq M$

M – верхняя граница

Опр.: X — огр. снизу, если $\exists m \in \mathbb{R}: \forall x \in X: m \le x$

m — нижняя граница

Опр.: X — огр-но $\Leftrightarrow$ X — огр. сверху и снизу

Лемма: X — огран. $\Leftrightarrow$ $\exists C \in \mathbb{R}: |x| \le C \quad \forall x \in X$

$\triangleright$ Необход-ть: $\exists X$ — огр $\Rightarrow$ $m \le x \le M \quad \forall x \in X$

$C = \max\{|m|, |M|\}$

$-C \le -|m| \le m \le x \le M \le |M| \le C$

Достаточность: $\exists$ $|x| \le C \Rightarrow \underbrace{-C}_{= m} \le x \le \underbrace{C}_{= M}$ $\blacktriangleleft$

Опр.: если $X_{max} \in X$ и $X_{max} \ge x$, $\forall x \in X$, то

X_{max} — наиб. эл.

Опр.: если $X_{min} \in X$ и $X_{min} \le x$, $\forall x \in X$, то

X_{min} — наим. эл.

Пр.: $X = [0, 1)$

$X_{min} = 0$, $\nexists X_{max}$

Опр.: $\sup X$ наз. наименьшая верхнее граница X

Опр.: $\inf X$ наз. наибольшая нижнее граница X

Пр.: $X = [0, 1)$

$\inf X = 0 \quad \sup X = 1$

! sup и inf не всегда могут быть

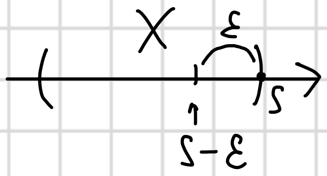
Если X — неогр. сверху, то $\sup X = +\infty$

X — неогр. снизу, то $\inf X = -\infty$

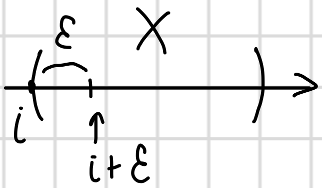
Лемма (Равносильное опр. sup/inf):

Пусть X — огр. сверху (/снизу), тогда

$$S = \sup X \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ \forall x \in X: \quad x \le S \\ 2)\ \forall \varepsilon > 0: \exists x \in X: \quad x > S - \varepsilon \end{cases}$$



$$i = \inf X \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ \forall x \in X: \quad i \le x \\ 2)\ \forall \varepsilon > 0: \exists x \in X: \quad x < i + \varepsilon \end{cases}$$



Теорема (Принцип точной грани):

Пусть $X \neq \varnothing$ и огр сверху (/снизу). Тогда $\exists \sup X \in \mathbb{R}$

$(/ \exists \inf X \in \mathbb{R})$

▷ Пусть $Y = \{M : M$ — верхнее гр. $X\} \neq \varnothing$

$\forall x \in X$, $\forall y \in Y$: $x \le y$ $\Rightarrow$ по аксиоме непрерывности

$\exists c: x \le c \le y \quad \forall x \in X, \forall y \in Y$

$\Rightarrow c = \sup X$ ◀

Лемма о наибольшем эл-те:

Если $\exists$ наиб. эл мн-ва X, то $\sup X = \max X$

Лемма (о наименьшем эл-те):

Если $\exists$ наим. эл. мн-ва X, то $\inf X = \min X$

Лемма (о переходе к sup в нер-ве):

⅃ $\forall x \in X: \ x < a \ (/ x > a)$, тогда $\sup X \leq a \ (/ \inf X \geq a)$

§ Принцип Архимеда

Лемма (о неогр. $\mathbb{Z}$):

$\mathbb{Z}$ неогр. ни сверху, ни снизу

▷ ⅃ $\exists M \in \mathbb{R}: \ \forall x \in \mathbb{Z}: \ x \leq M$

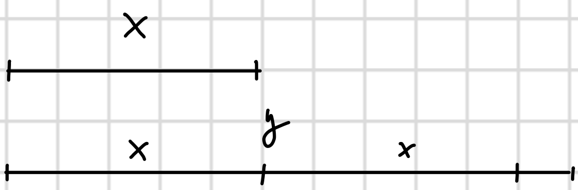
$\exists x \in \mathbb{Z}: \ x > M - 1$

$x \leq M < x + 1 \in \mathbb{Z}$ т.к. $\mathbb{Z}$ – индуктивно ◀

Замечание: $\mathbb{N}$ неогр. сверху

Теорема (Принцип Архимеда):

⅃ $x \in \mathbb{R}, \ x > 0$. Тогда $\forall y \in \mathbb{R} \ \exists! k \in \mathbb{Z}: (k-1)x \leq y < kx$



▶ $\sphericalangle$ $T = \{ t \in \mathbb{Z} : \frac{y}{x} < t \}$

домножаем на x

$y < tx = y < kx$

$\Uparrow$

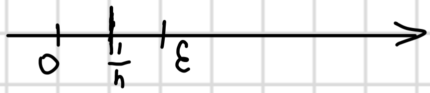
$T \neq \varnothing$ и огр. снизу $\Rightarrow \exists \ m = \inf T$

$\exists k \in T: \ m \leq k \leq m+1 \Rightarrow k - 1 < m, \ k - 1 \notin T \Rightarrow$

$k = \min T = m = \inf T$ ◀

Следствия:

1) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}: \ 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$



2) Если $\forall \varepsilon > 0: \ 0 \leq x \leq \varepsilon$, то $x = 0$

3) $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists! \, k \in \mathbb{Z}: \ k \leq x < k+1$

$k = [x]$ – целая часть

Лемма (о плотности $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$):

$\forall a, b \in \mathbb{R}, \ a < b \ \exists q \in \mathbb{Q}: \ a < q < b$

$\triangleright$ $b - a = \varepsilon > 0$

$\exists n \in \mathbb{N}: \ \frac{1}{n} < \varepsilon$

$q = \frac{[na]+1}{n}$

$[na] \leq na < [na]+1 \iff \frac{[na]}{n} \leq a < q \to a < q$

$q \leq \frac{na+1}{n} = a + \frac{1}{n} < a + \varepsilon = b$ $\blacktriangleleft$ $\quad q < b \to a < q < b$

Лемма (о плотности $\mathbb{I}$ в $\mathbb{R}$):

$\forall a, b \in \mathbb{R}, \ a < b \ \exists i \in \mathbb{I}: \ a < i < b$

по прошлой лемме

$\triangleright$ $\exists q \in \mathbb{Q}: \ a - \sqrt{2} < q < b - \sqrt{2} \Rightarrow a < \underbrace{q + \sqrt{2}}_{\in \mathbb{I}} < b$ $\blacktriangleleft$

т.к. $x + y \in \mathbb{I}$

$\forall x \in \mathbb{Q} \ \forall y \in \mathbb{I}$

§ т. Кантора; л. Бореля-Лебега; л. о предельной точки

Опр.: $\exists\ [a_n; b_n] \overset{\text{включает в себя}}{\supset} [a_{n+1}; b_{n+1}] \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(система вложеных отрезков) $\quad a_n, b_n \in \mathbb{R}$

Теорема Кантора о вложенных отрезках:

$\exists\ [a_n; b_n]$ — влож. отр-и тогда $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [a_n; b_n] \neq \varnothing$

$a_n, b_n \in \mathbb{R}$

если $\forall \varepsilon > 0\ \exists n: b_n - a_n < \varepsilon$ тогда $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [a_n; b_n] = \{\underset{\text{точка}}{c}\}$

$\triangleright\ \exists\ X = \{a_1, a_2, \dots\}$

$Y = \{b_1, b_2, \dots\}$

$\forall a_i, b_i: a_i \leq b_i \Rightarrow \exists C \in \mathbb{R}:$

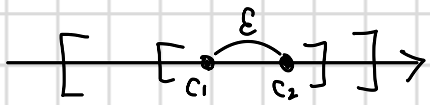
$: a_i \leq c \leq b_i \quad \forall c \in [a_i; b_i] \quad \forall i \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow c \in \bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} [a_i; b_i]$

Допустим, что $c_1 \neq c_2 \in \bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} [a_i; b_i] \Rightarrow b_n - a_n > \varepsilon\ \forall n$

$\Downarrow$

противоречие



Замечание.

1) для $\mathbb{Q}$ утв. неверно

$\sqrt{2} = 1{,}41\dots$

$[1, 2] \supset [1{,}4; 1{,}41] \supset \dots$

2) для интервалов неверно

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0; \frac{1}{n}\right) = \varnothing$$

Опр.: Мн-во M_α образует покрытие мн-ва X, если

$$X \subset \bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha$$

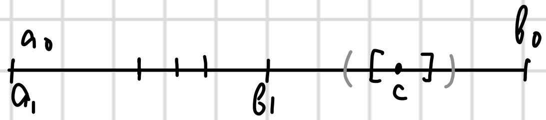
Лемма (Бореля – Лебега):

Из любого покрытия отрезка интервалами можно выделить конечное подпокрытие

▷ $[a,b]$ (отрезок), M_α – интервалы

$\exists$ $[a,b]$ не допускает конечного покрытия

делим пополам:



$[a_1, b_1]$ – та половина которая не допускает конечного покрытия

$[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$

$$b_n - a_n = \underbrace{\frac{b-a}{2^n}}_{\text{длина отрезка на шаге } n} < \underbrace{\frac{b-a}{n} < \varepsilon}_{\exists n,\ \text{что это правда}} \Rightarrow \exists!\, c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$$

$\exists M_\alpha \ni c,\ [a_n, b_n] \subset M_\alpha \Rightarrow$ противоречие ◀

Замечание: „Отрезок" важен!

$$(0,1) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(0, 1 - \frac{1}{n}\right)$$

Опр.: т. x_0 наз. предельной точкой мн-ва $X \subset \mathbb{R}$, если

$\forall U(x_0): \ U(x_0) \cap X$ – бесконечное мн-во

$x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

Пр.:

1) $(0,1] = X$

$[0,1]$ – пред. точки X

2) для $\mathbb{N}$ $+\infty$ – пред. точка

3) $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$, 0 – предельная точка

Лемма (о предельной точке):

$\exists X \subset \mathbb{R}$, X – огранич. и бесконечное $\Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R}$ – предельная т. X

$\triangleright$ Пусть у X нет пред. т. $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ x – не предел. т. $X \Rightarrow$

т.е. в каждой окр. конечный набор точек

$\Rightarrow \exists U(x): U(x) \cap X$ – конечно (или $\varnothing$) $\Rightarrow \bigcup\limits_{x \in \mathbb{R}} U(x)$ – покрытие $\mathbb{R}$

т.к. X – огр., то $X \subset [m, M]$ $\longrightarrow$ и + покрытие $[m, M]$

по т. Бореля–Лебега выделим $\bigcup\limits_{k=1}^{n} U_k(x_k) \supset X \Rightarrow$

n штук интервалов, в каждом конечное кол-во точек из X

$\Rightarrow X$ – конечное противоречие $\blacktriangleleft$

§ Замкнутые множества

Опр.: $\exists X \subset \mathbb{R}$: X наз. <u>замкнутым</u> (в $\mathbb{R}$) если оно содержит все свои предельные точки

пред-ые т. $\in \mathbb{R}$, т.е. п.т $\neq \pm\infty$ например

Пр.:

1) $\varnothing$ и $\mathbb{R}$ – замкнутые

2) $[0, 1]$ – замкнутое

3) $(0, 1)$ – не замкнутое

4) Конечное мн-во – замкнутое

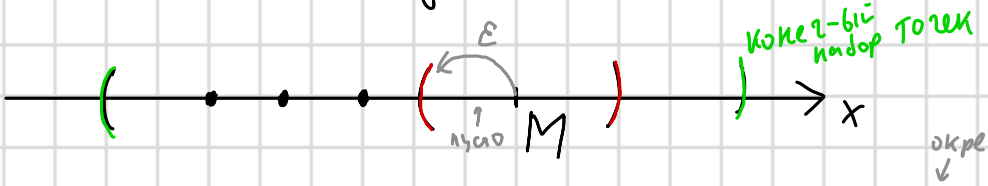
т.к. нет пред. точек

Лемма (о замкнутом множестве):

$\rceil$ X — замкнуто и огр. сверху (/снизу). Тогда $\exists \max X$ ($/\min X$)

$\triangleright$ т.к. X — огр. сверху, то $\exists \sup X = M$

$\rceil$ M не явл. пред. точка X



окрестность

$\Rightarrow$ в $U(M) \cap X$ конечно $\Rightarrow \exists\ V(M) \cap X = \varnothing$ что противоречит $M = \sup X$ $\blacktriangleleft$

Следствие:

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ $\exists$ беск. много $q \in \mathbb{Q} : q \in (a,b)$

$i \in \mathbb{I} : i \in (a,b)$