Поле комплексных чисел

$\mathbb{R}$

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$

$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$

$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$

$\langle \mathbb{R}^2, +, \cdot \rangle$ $\quad (0,0) - e^+ \quad (1,0) - e^\cdot$

$(a,b)(1,0) = (a,b)$

$(1,0)(c,d) = (c,d)$

Докажем $(a,b)(c,d) = (c,d)(a,b)$

$\triangleright$ $(ac - bd, ad + bc) = (ca - db, cb + da)$ $\triangleleft$

$\Rightarrow$ коммутативность есть

Док-ть ассоциативность и дистрибутивность !

Док-во (любой ненулевой эл. обратим):

$z = (a,b)$, $z^{-1} = (x,y)$

$(a,b)(x,y) = (1,0)$

$(a,b)(x,y) = (ax - by, ay + bx) = (1,0)$

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ ay + bx = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} ax - by = 1 \quad | \cdot (-b) \\ bx + ay = 0 \quad | \cdot a \end{cases}$$

чтобы выйти: $| \cdot a$, $| \cdot (-b)$

$b^2 y + a^2 y = -b$

$y(a^2 + b^2) = -b$

$y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$ $\qquad x = \frac{a}{a^2 + b^2}$

$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$

$\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел

Изоморфное вложение

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & \mapsto & (x,0) \end{array} \qquad \Rightarrow \quad \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

$(0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$

$(0,1)^2 = -1$ $\qquad (0,1) = i$ $\qquad i^2 = -1$

$(0,-1)(0,-1) = (-1,0) \iff (-i)^2 = -1$

$(a,b) = (a,0) + (0,b) = a(1,0) + b(0,1) = a + b\cdot i = z$

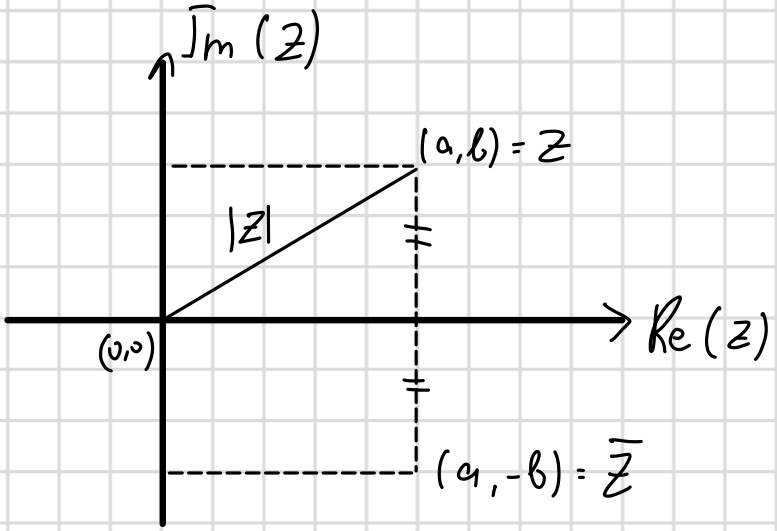
1 $\quad$ i

алгебраическая форма записи

$a = Re(z)$ вещ-ая часть

$b = Im(z)$ мнимая часть

$\overline{z} = a - b\cdot i$ Комплексное сопряжение



$z + \overline{z} = a+bi+a-bi =$

$= 2a = 2Re(z)$

$z\cdot\overline{z} = (a+bi)(a-bi) =$

$= a^2 - (bi)^2 = a^2+b^2 =$

$= |z|^2$

$z \in \mathbb{R} \iff \overline{z} = z \qquad |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$- : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$z \mapsto \overline{z}$

$\overline{(z_1+z_2)} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$ Комплексное сопряжение это

$\overline{z_1\cdot z_2} = \overline{z}_1\cdot\overline{z}_2$ автоморфизм $\mathbb{C}$

$\overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{(ac-bd)+i(ad+bc)} = (ac-bd)-i(ad+bc)$

$(a-bi)(c-di) = (ac-bd)-i(ad+bc)$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}$$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$|z| = \rho$

$(1+i)^{2024}$

$$a+bi = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,i\right) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$

$$= \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$\varphi = \arg(z) \quad \varphi \in \Pi$

$\sin(\varphi+\psi) = \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi$

$$\boxed{\rho e^{i\varphi} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

перетяг в тригу

$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$\rho \neq 0$: $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$

Идея док-ва:

$e^x = a^0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \dots$

$e^0 = 1$

$(e^x)' = e^x = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$

$e^0 = 1 = a_1 \qquad a_2 = \frac{1}{2} \qquad a_3 = \frac{1}{2\cdot 3} \qquad a_n = \frac{1}{n!}$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots$$

Пр.: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3$ ($1 = b$, $1-x = q$)

$x = 0$: $1 = 1$ а тут не работает ↓ а в sin и cos работает

$x = -1$: $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots$

$$\sin x = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \dots$$

$\exists\ x=0 \Rightarrow b_0 = 0$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$\cos 0 = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 \Rightarrow b_1 = 1$$

$$b_2 = 0 \qquad b_3 = \frac{-1}{3!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots$$

$$\cos x = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3$$

$$C_0 = 1$$

$$C_1 = 0 = C_3 = C_5$$

$$C_2 = -\frac{1}{2!} \qquad C_4 = \frac{1}{4!}$$

$$\cos x = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots$$

$$e^x = e^{i\varphi} = 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - i \cdot \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i\frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} \dots =$$

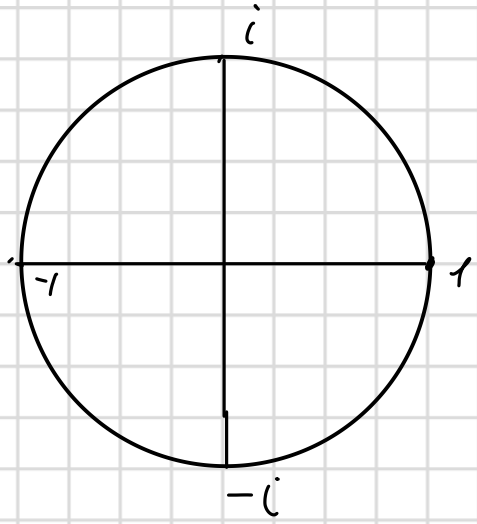
$$= \underbrace{\left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} \dots\right)}_{\cos\varphi} + i\underbrace{\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots\right)}_{\sin\varphi}$$

$$i^0 = 1 \qquad i^4 = 1$$

$$i^1 = i \qquad i^5 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -i$$



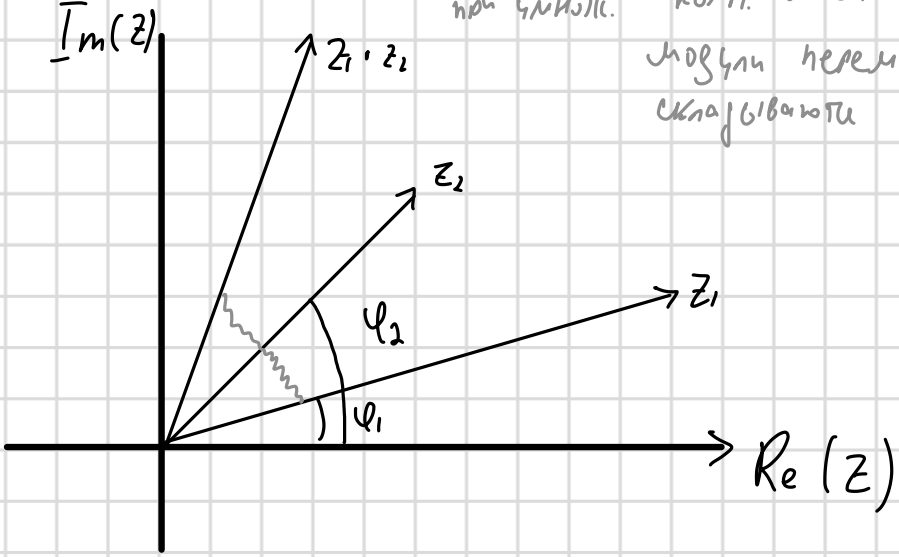
$$e^{i\pi} = -1$$

$$z_1 = \rho_1 (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1) = \rho_1 e^{i\varphi_1}$$

$$z_2 = \rho_2 (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2) = \rho_2 e^{i\varphi_2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = \rho_1 \rho_2 (\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

при умнож. комп. чисел модули перемножаются, аргументы складываются



Формула Муавра:

$$z^n = (\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = \rho^n(\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi))$$

$$(1+i\cdot 1)^{2024} = \left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^{2024} = 2^{1012}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right)^{2024} =$$

$$= 2^{1012}\left(\cos\left(\frac{2024\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2024\pi}{4}\right)\right) = 2^{1012}(\cos 0 + i\sin 0) =$$

506π 506π

$$= 2^{1012}$$

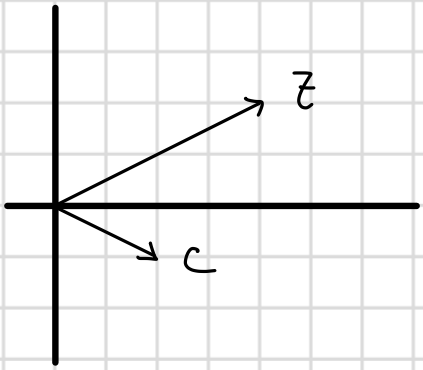
$$z = (\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)) \quad : \quad \sqrt[n]{z} = c \in \mathbb{C}$$

$$c^n = z$$

$$] \; c = r(\cos\psi + i\sin\psi) \quad | \; ^n$$

$$c^n = r^n(\cos(n\psi) + i\sin(\psi n)) = \rho(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

$$\rho = r^n$$

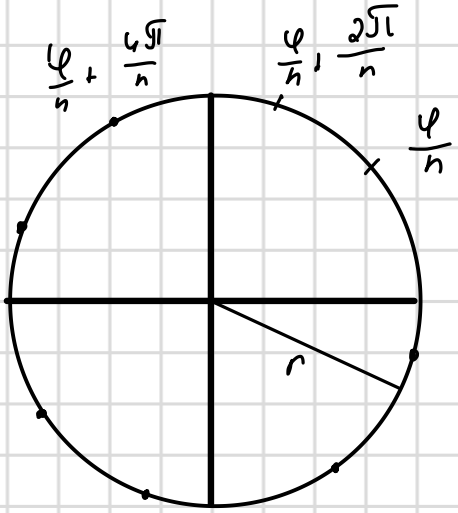


$n\psi = \varphi + 2\pi k, \; k \in \mathbb{Z}$

$r = \sqrt[n]{\rho}$ (арифм. корень) $\qquad \psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$

$$c = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\cdot\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$$

Корни: $k = 0, 1, 2 \ldots n-1$



Вывод: Корней комплексного числа всегда n (штук) и они расположатся в вершинах прав. n-угольника

$\sqrt[2]{1}$: $1, -1$

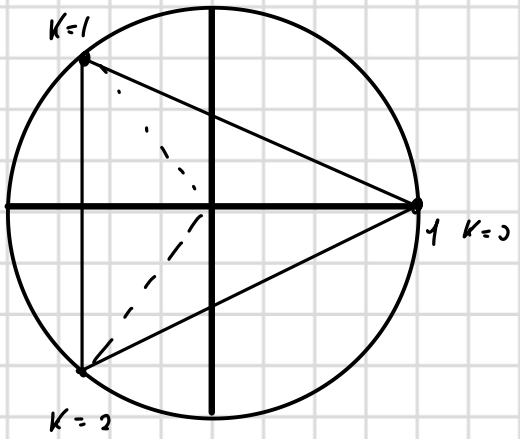
$\sqrt[4]{1}$: $1, -1, i, -i$

$\sqrt[3]{1}$: $1 = 1 + 0\cdot i = 1\underbrace{(1}_{\cos\varphi} + \underbrace{0\cdot i)}_{\sin\varphi} = 1(\cos 0 + i\sin 0) = 1$

$k=0$: $\cos\dfrac{0+2\pi\cdot 0}{3} + i\cdot\sin\left(\dfrac{0+2\pi\cdot 0}{3}\right) = 1$

$k=1$: $\cos\dfrac{0+2\pi\cdot 1}{3} + i\cdot\sin\dfrac{0+2\pi\cdot 1}{3} = -\dfrac{1}{2} + i\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$K=2:\quad \cos\frac{0+2\pi\cdot 2}{3}+i\cdot\sin\frac{0+2\pi\cdot 2}{3}=-\frac{1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$



$$\sqrt[n]{1}=\left\{e^{\frac{i\cdot 2\pi K}{n}}\in\mathbb{C}\;\middle|\;K=0,1\dots n-1\right\}$$

$$e^{\frac{i\cdot 2\pi K_1}{n}}\cdot e^{\frac{i\cdot 2\pi K_2}{n}}=e^{\frac{i\,2\pi(K_1+K_2)\ \mathrm{mod}\ n}{n}}$$

$K=0\quad e^0=1$ ← нейтральный

$$\left(e^{i\frac{2\pi K}{n}}\right)^{-1}=e^{i\frac{2\pi(n-K)}{n}}$$ ← обратный

$$\sqrt[n]{1}=\left\{e^{\frac{i\cdot 2\pi K}{n}}\in\mathbb{C}\;\middle|\;K=0,1\dots n-1\right\}=\text{что}\ M_n=U_n$$

Группа корней из 1-ы n-ой степени

$|M|=n\qquad M_n\simeq\mathbb{Z}_n$

$$\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}=\{e^{i\varphi}\}\simeq \text{группа углов}\ \mathbb{T}$$

$$e^{i\varphi_1}\cdot e^{i\varphi_2}=e^{i(\varphi_1+\varphi_2)\ \mathrm{mod}\ 2\pi}$$

$\sin 3\varphi$

$$(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)^3=\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi$$

$$(\cos\varphi)^3+3(\cos\varphi)^2(i\cdot\sin\varphi)+3\cos\varphi(i\cdot\sin\varphi)^2+(i\cdot\sin\varphi)^3$$

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi \cdot \sin^2\varphi$$

$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi \cdot \sin\varphi - \sin^3\varphi = 3(1-\sin^2\varphi)\sin\varphi - \sin^3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$$