

VI. Арифметика матриц

1. Вычислите:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 8 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}^T$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{10}$;

г) $f(A)$, где $f(x) = x^3 - 5x + 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$;

д) $f(B)$, где $f(x) = x^2 + x - 2$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Докажите, что матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ удовлетворяет уравнению

$$x^2 - (a + d)x + (ad - bc) = 0.$$

3. Вычислите:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{1000}$; б) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^{100}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2024}$; г*) $\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{30}$.

4. Найдите все матрицы второго порядка, квадраты которых равны а) нулевой матрице, б) единичной матрице.

5. Докажите, что $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$ для любого $n \geq 1$, где f_n — n -тое число Фибоначчи.

6. Докажите, что матрицы $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ образуют поле, изоморфное полю комплексных чисел, и вычислите $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{114}$.

7. $\lambda \in F$, E_{ij} — стандартные матричные единицы. Рассмотрим матрицы из $M_n(F)$, называемые *элементарными*:

а) $E + \lambda E_{ij}$ (*элементарная трансвекция*);

б) $E - (E_{ii} + E_{jj}) + (E_{ij} + E_{ji})$ (*элементарное отражение*);

в) $E + (\lambda - 1)E_{ii}$ (*элементарное псевдоотражение*).

Определите, что происходит с любой матрицей подходящего размера при умножение её слева/справа на элементарную.

8. Матрицы A и B не перестановочны. Может ли оказаться, что матрицы A^2 и B^2 перестановочны?

9* $A, B \in M_n(F)$, $A + B = \lambda AB$, где $\lambda \in F$. Докажите, что A и B перестановочны.

10* Рассматривается уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$ на множестве квадратных матриц 1000-го порядка. Докажите, что оно имеет бесконечно много решений, не являющихся диагональными матрицами.

11* $A \in M_{4 \times 2}(\mathbb{R})$, $B \in M_{2 \times 4}(\mathbb{R})$, $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите BA .

12* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$.

Вычислите $(AB)A$ и $A(BA)$ и убедитесь, что умножение бесконечных матриц не ассоциативно.

1. Вычислите:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 8 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}^T$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{10}$;

г) $f(A)$, где $f(x) = x^3 - 5x + 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$;

д) $f(B)$, где $f(x) = x^2 + x - 2$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 8 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -5 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 16 & 7 \\ -17 & 44 & 28 \\ 19 & -8 & -21 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{10} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 9^5 & 0 & 0 \\ 0 & 9^5 & 0 \\ 0 & 0 & 9^5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

2) $f(A)$, где $f(x) = x^3 - 5x + 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$f(A) = A^3 - 5 \cdot A + 1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^3 - 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 1 =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^3 - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 21 \\ 14 & -21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

=

2. Докажите, что матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ удовлетворяет уравнению

$$x^2 - (a + d)x + (ad - bc) = 0.$$

2. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A^2 - (a + d) \cdot A + (ad - bc) = 0$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 - \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad & 0 \\ 0 & ad \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix} = \\
 & = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \\
 & = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+dc & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \\
 & = \begin{pmatrix} \cancel{a^2+bc} - \cancel{a^2} - \cancel{ad} + \cancel{ad} - \cancel{bc} & \cancel{ab+bd} - \cancel{ab} - \cancel{bd} + 0 \\ \cancel{ac+cd} - \cancel{ac} - \cancel{dc} + 0 & \cancel{bc+d^2} - \cancel{ad} - \cancel{d^2} + \cancel{ad} - \cancel{bc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$x^2 + \text{tr} A x + \det A$$

3. Вычислите:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{1000}$; б) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^{100}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2024}$; г*) $\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{30}$.

3. а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{1000}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{1000} = \begin{pmatrix} 1 & 1000 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

База: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — верно

Уал: $n=k$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Переход: $n=k+1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ верно}$$

д) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^{100}$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} \lambda^4 & 4\lambda^3 \\ 0 & \lambda^4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^h \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} \lambda^h & (h-1)\lambda^{h-1} \\ 0 & \lambda^h \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^{h+1} &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^h \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^h & (h-1)\lambda^{h-1} \\ 0 & \lambda^h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^{h+1} & h\lambda^h \\ 0 & \lambda^{h+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^{100} = \begin{pmatrix} \lambda^{100} & 100\lambda^{99} \\ 0 & \lambda^{100} \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2024}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2024} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{1012} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$$

$$\text{ord}(A) = 4$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \simeq \mathbb{C}$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \sim a + bi$$

$$|a + bi| = 1$$

$$a^2 + b^2 = 1 \quad \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}^{2024} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix}^{2024} = \begin{pmatrix} \cos \frac{1012\pi}{3} & -\sin \frac{1012\pi}{3} \\ \sin \frac{1012\pi}{3} & \cos \frac{1012\pi}{3} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(337\pi + \frac{\pi}{3}) & -\sin(337\pi + \frac{\pi}{3}) \\ \sin(337\pi + \frac{\pi}{3}) & \cos(337\pi + \frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{30} = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_E + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_X \right)^{30} = X^0 + 30 \cdot X^1 + \frac{30 \cdot 29}{2} X^2$$

$$X^0 = E$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. $\lambda \in F$, E_{ij} — стандартные матричные единицы. Рассмотрим матрицы из $M_n(F)$, называемые элементарными:

- а) $E + \lambda E_{ij}$ (элементарная трансвекция);
- б) $E - (E_{ii} + E_{jj}) + (E_{ij} + E_{ji})$ (элементарное отражение);
- в) $E + (\lambda - 1)E_{ii}$ (элементарное псевдоотражение).

Определите, что происходит с любой матрицей подходящего размера при умножение её слева/справа на элементарную.

$$7. \text{ а) } E + \lambda E_{ij} = T_{ij}(\lambda)$$

$$T_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \uparrow j \end{matrix}$$

Элементарная трансвекция

$$\delta_j) E - (E_{ii} + E_{jj}) + (E_{ij} + E_{ji}) = Q_{ij}$$

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ i & j \end{matrix}$

Элементарное отражение

$$\delta_j) E + (\lambda - 1)E_{ii} = E - E_{ii} + \lambda E_{ii} = D_{ii}$$

$$D_{ii} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \lambda & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \\ \uparrow \\ i \end{matrix}$$

Элементарное псевдоотражение

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \lambda d & b + \lambda e & c + \lambda f \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{К } i\text{-ой строке прибавилось} \\ \text{j-ая умноженная на } \lambda \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix} \begin{matrix} i\text{-ая } j\text{-ая строки меняются} \\ \text{местами} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ \lambda d & \lambda e & \lambda f \end{pmatrix}$$

$$\det(A \cdot Q_{ij}) = -\det(A)$$

$$\det(A \cdot D_{ii}(\lambda)) = \lambda \cdot \det(A)$$

$$\det(A \cdot T_{ij}(\lambda)) = \det(A)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 & 3 \\ 20 & 5 & 4 \\ 26 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} (1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (3)(3 \ 0) & (1 \ 2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (3)(1) \\ (2 \ 3 \ 4) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (4)(3 \ 0) & (2 \ 3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (4)(1) \\ (3 \ 4 \ 5) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (5)(3 \ 0) & (3 \ 4) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (5)(1) \end{array} \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} (5 \ 3) + (3 \ 0) & (3) \\ (8 \ 5) + (12 \ 0) & (4) \\ (11 \ 7) + (15 \ 0) & (5) \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 14 & 3 & 3 \\ 20 & 5 & 4 \\ 26 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Только если
размеры блоков
согласованы!

11* $A \in M_{4 \times 2}(\mathbb{R})$, $B \in M_{2 \times 4}(\mathbb{R})$, $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите BA .

11. $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\exists A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, \quad B = (B_1 | B_2)$$

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 \\ A_2 B_1 & A_2 B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & -E \\ -E & E \end{pmatrix}$$

$$BA = (B_1 A_1 + B_2 A_2) = 2E = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_1 B_1 = E \quad A_2 B_2 = E \Rightarrow B_1 A_1 = E$$