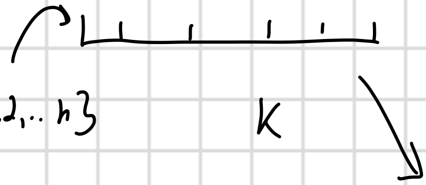
Размещения и сочетания

Размещение

$\{1,2,..n\}$



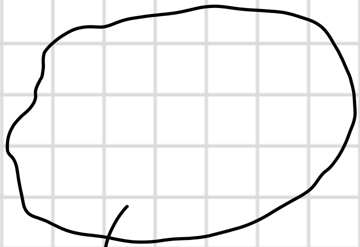
K

4 3 1 7

3 7 1 4

$$n^{\underline{K}} = \frac{n!}{(n-K)!}$$

Сочетание



$\{1,2,3\ldots,n\}$

K эл.

$K!$

1, 3, 4, 7

$\|$

~~1, 4, 7, 3~~

$$\binom{n}{K} = \frac{n!}{(n-K)!\,K!}$$

Отношение эквивалентности

a

b

"$\sim$" - равны с точн. до порядка

$$A_{n,K}/_{\sim} = C_{n,K}$$

размер класса экв.

$\forall \quad \{1,2,\ldots,n\}^K \qquad len = n^K$

$[1,2,3,4]$

$[1,1,1,1]$

Группы

группоид: $\langle X, \circ \rangle$ $\quad \circ: \underset{a}{X} \times \underset{b}{X} \to \underset{ab}{X}$

полугруппа: группоид + ассоциативность

$$(ab)c = a(bc)$$

моноид: полугруппа + нейтр. эл.

$$a \cdot e = e \cdot a = a$$

группа: моноид + обратный

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$$

Группы действий

G – группа

1) $g(hk) = (gh)k$
2) $e \cdot g = g \cdot e = g$
3) $gg^{-1} = g^{-1}g = e$

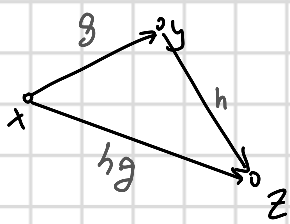
X – объекты

$$gX = y$$

действие объект объект

$$G \times X \to X$$

1) $h(gx) = (hg)x$



2) $e \cdot x = x$

$\to$ G действует на X

Пр.:

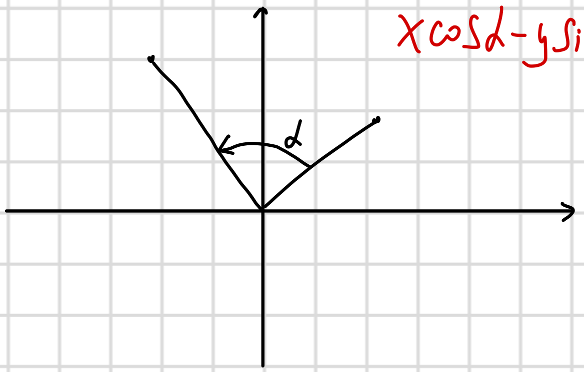
1) $X = \mathbb{R}^2$

$G = \langle \mathbb{R} \setminus \{0\}, \times \rangle$

$$\underset{G}{g} \cdot \underset{\mathbb{R}^2}{(x, y)} = \underset{\mathbb{R}^2}{(gx, gy)}$$

2) $X = \mathbb{R}^2$

$G = \langle [0, 2\pi), +_{\mathrm{mod}\, 2\pi} \rangle$

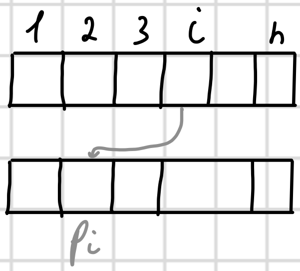


$x\cos\alpha - y\sin\alpha + \sin\alpha + y\cos\alpha$

3) $X = \mathbb{B}^n$

$G = S_n$

$p = (p_1 p_2 \dots p_n)$



$p = [3, 1, 2, 4, 5]$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

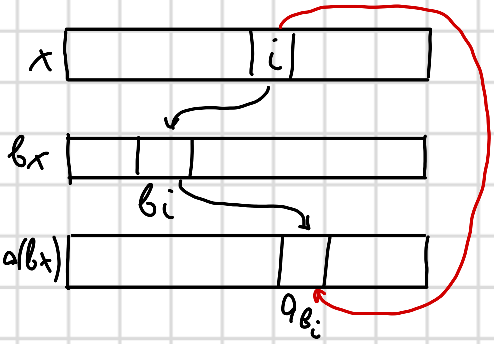
$x = [1, 1, 0, 1, 1]$

$px = [1, 0, 1, 0, 1]$

Группа перестановок

ab

$(ab)x = a(bx)$



$C = ab$

$C_i = a_{b_i}$

ассоциативность:

$a(bc):\quad a[\,b[\,c[i]\,]\,]$

$(ab)c:\quad a[\,b[\,c[i]\,]\,]$

нейтральный

$e_i = i$

$(ae)_i = a_{e_i} = a_i$

обратный:

$b = a^{-1}$

$ba = e$

$b[a[i]] = i$

```
for i=1...n
| b[a[i]] = i
```

Умножение перестановок = действие S_n на S_n

$\uparrow$ группа $\qquad \uparrow$ массив

4. $X = T^n$

$G = \langle \{0, \dots, n-1\}, +_{\bmod n} \rangle$

$3 \rightarrow$ | 1 | 2 | 3 | 4 | = | 2 | 3 | 4 | 1 |

$a^{-1} = (n-a) \bmod n$

X G – группа действует на X

„$\sim_G$" – равны с точностью до G

$x \sim_G y$ $\exists g \in G: y = gx$

1) рефлексивность

$x \sim_G x$: $x = ex$

2) $x \sim_G y$: $y = gx$

$g^{-1}y = g^{-1}(gx) = (g^{-1}g)x = ex = x$

$\Rightarrow$ $y \sim_G x$

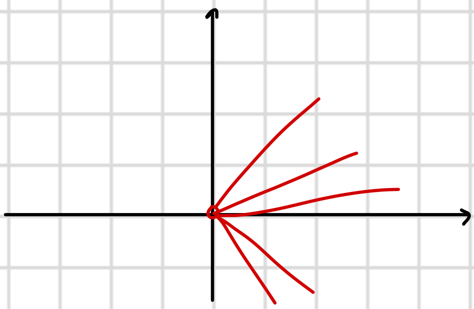
3) $x \sim_G y$, $y \sim_G z$

$y = gx$ $z = hy = h(gx) = (hg)x = kx$, где $k = hg$

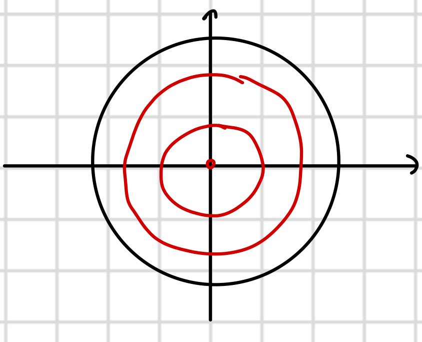
$\Rightarrow$ $x \sim_G z$

X / G – классы экв-ти (орбиты)

Пр.:

1) 

$g(x,y) = (gx, gy)$

2) 

$g(x,y)$ поворот на g

3) T^n $\boxed{}$ S_n

4) T^n $\langle \{0, \dots, n-1\}, +_{\mathrm{mod}_n} \rangle$

5) $G = S_k$

$X/G = C_{n,k}$

Неподвижные точки

$g \qquad I_g = \{x \mid gx = x\}$

Теорема (Лемма Бернсайда)

$$|X/G| = \frac{\sum_{g \in G} |I_g|}{|G|}$$

$\triangleright$

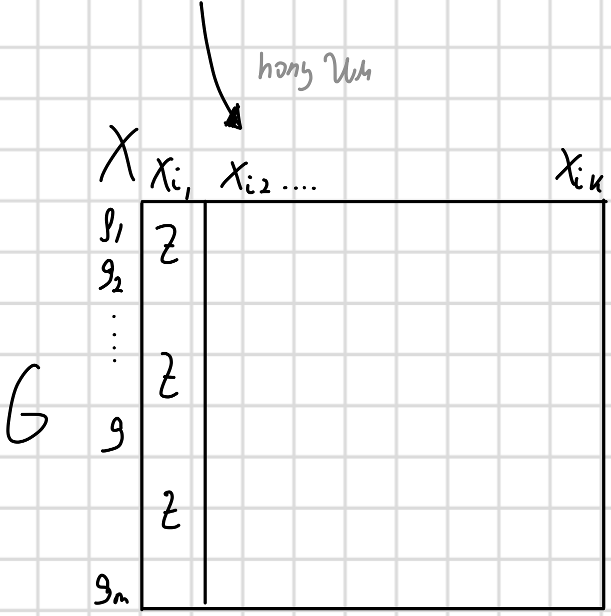
X, G:

	x_1	x_2	$\dots$	x	x_n
g_1					
g_2					
$\vdots$					
g				gx	
g_m					

Вычеркнем эл-ты которые лежат в одной орбите и оставим 1 из них

	000	001	010	011	100	101	110	111
123		001						
132		010						
213		001		101				
231		100						
312		010						
321		100						

X	Y	
$g_1 x$	$g_1 y$	$= g_1 h x$
$g_2 x$	$g_2 y$	$= g_2 h x$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$g_m x$	$g_m y$	$= g_m h x$



размер: $|G| \cdot |X/G|$

$\exists\ z = g_1 x$ $\quad x = g_1^{-1} z$

$z = g_2 x$

$\vdots$

$z = g_s x$

$z = z$

$z = g_2 g_1^{-1} z$

$\vdots$

$z = g_k g_1^{-1} z$

$$\{h \mid hz = z\} = St\, z$$

стабилизатор эл-та z

$$\Rightarrow |G| \cdot |X/G| = \sum_{x \in X} |St\, x| = \sum_{x \in X} \sum_{g \in G} [gx = x] =$$

$$= \sum_{g \in G} \sum_{x \in X} [gx = x] = \sum_{g \in G} |I_g| \qquad ◀$$