Функциональные послед-ти и ряды

Общие сведения

$\exists \{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ т.е. $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$

$f_k(x): X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ← функ. последовательность

можно $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}^n$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$ $= S_n(x)$ ← функ. ряд

Опр.: мн-во $D \subset X$ наз. мн-ом сходимости, если $\forall x \in D \Rightarrow f_k(x)$ (посл-ть) или $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сх-ся

Пр.:

1) $f_k(x) = x^k$: $\overset{k=0}{1}, x, x^2, x^3, \dots$ $\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\lim_{k\to\infty} x^k = \begin{cases} 0, & x \in (-1,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}, \quad D = (-1, 1]$$

$\forall x \notin (-1,1]$ x^k расх-ся

2) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$

$D = (-1, 1)$

Опр.:

посл-ть $f_k(x) \xrightarrow[k\to\infty]{D} f(x)$ (сх-ся на мн-ве D) $\Leftrightarrow \forall x \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \underbrace{\exists n_0}_{\text{зависит от } (\varepsilon, x)}\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

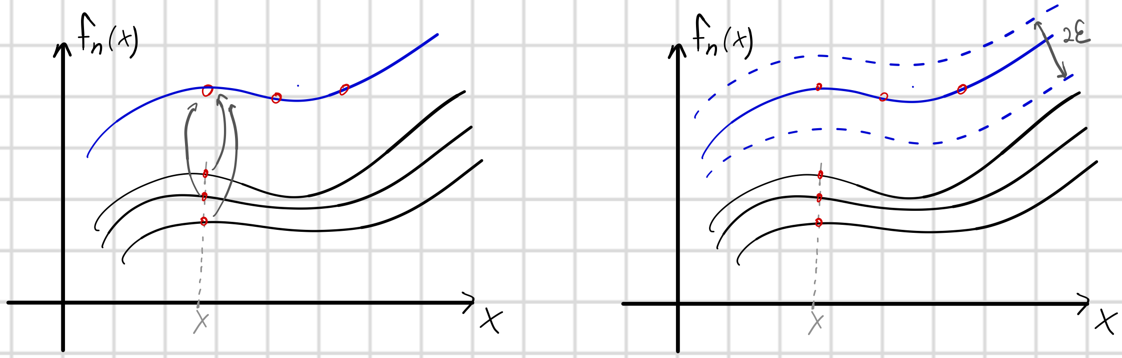
Опр.:

посл-ть $f_k(x)$ сх-ся равномерно на D к $f(x)$ $\quad f_k(x) \overset{D}{\underset{k\to\infty}{\rightrightarrows}} f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \underbrace{\exists n_0}_{\text{зависит от } \varepsilon}\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in D \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

(13) 1) Если $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{D} f$

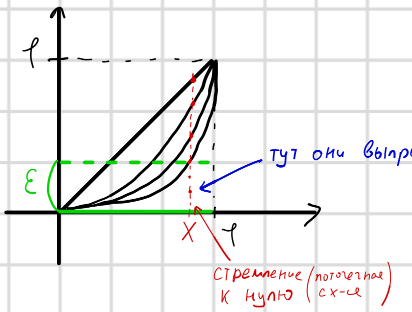
2)



поточечная　　　　равномерная

Пр.:

$f_k(x) = x^k$ на $[0,1)$



$x_k \to 0$, но $x_k \overset{[0,1)}{\not\rightrightarrows} 0$

Отриц.: $f_k \overset{D}{\not\rightrightarrows} f(x) \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0\ \forall n_0\ \underbrace{\exists n \geq n_0\ \exists x \in D}_{\exists x_n} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$

Пр.:

$f_k(x) = x^k$ на $[0,1)$

$x_n = 1 - 1/n$, $f_n(x_n) = (1 - 1/n)^n \longrightarrow e^{-1} = 1/e \neq 0 \Rightarrow > \underbrace{\frac{1}{2e}}_{=\varepsilon}$ н.с.н.н.

Пр.:

$x^k \rightrightarrows 0$ на $[-a, a]$ для $\forall a \in (0,1)$

$|x^k - 0| = |x^k| \leq a^k \longrightarrow 0$

(13) $f_k(x): X \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$

$\|f_k(x)\|_X = \sup_{x \in X} |f_k(x)|$

$f_k(x) \overset{D}{\rightrightarrows} f(x) \Leftrightarrow \|f_k - f\|_D \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

Пр.:

$f_k(x) = x^k$ на $[0,1)$

$\sup\limits_{[0,1)} |x^k| = 1$, но $\sup\limits_{\substack{[0,a] \\ a\in(0,1)}} |x^k| = a^k \to 0$

⑬ Поточечная сх-ть не экв. сходимости ни для какой нормы

Лемма (очевидные св-ва) (Верно и для рядов) фн-ций!

$\exists\, f_k : X \to \mathbb{R}$, $D \subset X$ (для равномерной, для поточ-ой все очевидно)

① $D_1 \subset D$, $f_k \overset{D}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f_k \overset{D_1}{\rightrightarrows} f$

② $\left.\begin{array}{l} f_k \overset{D}{\rightrightarrows} f \\ g_k \overset{D}{\rightrightarrows} g \\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha f_k + \beta g_k \overset{D}{\rightrightarrows} \alpha f + \beta g$

③ $\left.\begin{array}{l} \exists\, \varphi \text{ - огр. на } D \\ f_k \overset{D}{\rightrightarrows} f \end{array}\right\} f_k \varphi \overset{D}{\rightrightarrows} f\varphi$

④ $\exists\, f_k(z) \in \mathbb{C}$, $f_k(z) = U_k(x,y) + i \cdot V_k(x,y)$

$f_k \overset{D}{\rightrightarrows} f \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} U_k \overset{D}{\rightrightarrows} \operatorname{Re} f \\ V_k \overset{D}{\rightrightarrows} \operatorname{Im} f \end{array}\right.$

Опр.:

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ наз. равн-о сх-ся к $S(x)$ на $D \Leftrightarrow S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x) \overset{D}{\rightrightarrows} S(x)$

$\Leftrightarrow S(x) - S_n(x) = R_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{D}{\rightrightarrows}} 0 \Leftrightarrow \|R_n(x)\|_D \longrightarrow 0$

Теорема (Критерий Коши равн-ой сх-и функ. посл-ти)

$f_k(x) \overset{D}{\rightrightarrows}$ _ $(f_k(x)$ сх-ся равн на $D) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : \forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in D \Rightarrow$

$\Rightarrow |f_{n+p}(x) - f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow \|f_{n+p} - f_n\|_D < \varepsilon$

▷ $\boxed{\Rightarrow}$ очевидно как 2 модуля $< 2\varepsilon$

$\boxed{\Leftarrow}$ из $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \Rightarrow \exists f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ (поточечный)

$p \to \infty \Rightarrow f_{n+p}(x) \to f(x) \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow f_k \rightrightarrows f$ ◀

Теорема (Кр. Коши равн. сх-ти ф. ряда)

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сх-ся равн. на $D \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in D \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left\|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right\|_D < \varepsilon$

Следствие (Необх. усл-е равн. сх-ти ряда)

Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ равн. сх-ся на $D \Rightarrow f_k(x) \overset{D}{\rightrightarrows} 0$

▷ возьмем в теореме $p = 1$ ◀

Признаки равн. сх-ти рядов

Теорема (признак Вейерштрасса)

$\exists f_k(x): X \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C}),\ a_k: \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ \forall k,\ \forall x \in D: |f_k(x)| \leq a_k$

мажоранта

Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сх-ся, то $\sum f_k$ сх-ся равномерно и абсолютно на D

▷ $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$ ◀

Пр.:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2}$$

$\left|\frac{\sin kx}{k^2}\right| \leq \frac{1}{k^2} \Rightarrow$ сх-ся равн. на $\mathbb{R}$

(NB) Если $\sum \|f_k(x)\|_D$ сх-ся $\Rightarrow \sum f_k$ сх-ся равн. на D

Теорема (Преобразование Абеля)

$\exists A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k)$

Теорема (Признак Дирихле - Абеля равн. сх-ти ряда)

$\sphericalangle \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) g_k(x)$, $f_k : X \to \mathbb{C}$, $g_k : X \to \mathbb{R}$. Для равн. сх-ти ряда на D достаточно:

$$\begin{cases} ① \sum_{k=1}^{N} f_k(x) \text{ – равн. огр. т.е. } \left|\sum_{k=1}^{N} f_k(x)\right| \le C, \ \forall x \in D, \forall N \in \mathbb{N} \\ ② \ g_k(x) \text{ монот. при } \forall x \in D \text{ и } g_k(x) \overset{D}{\rightrightarrows} 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} ① \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ равн. сх-ся на } D \\ ② \ g_k(x) \text{ монот. при } \forall x \in D \text{ и равн. огр. т.е. } |g_k(x)| \le C, \ \forall x \in D, \forall k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

▷ $\text{Г } A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$

$$\sphericalangle \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k g_k = \sum_{k=1}^{n+p} - \sum_{k=1}^{n} \overset{\text{пр-е. Абеля}}{=} A_{n+p} g_{n+p} - \sum_{k=1}^{n+p-1} A_k (g_{k-1} - g_k) - A_n g_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (g_{k+1} - g_k) =$$

$$= \boxed{A_{n+p} g_{n+p} - A_n g_n - \sum_{k=n}^{n+p-1} A_k (g_{k+1} - g_k)} = (*)$$

I пр. Дирихле

$|A_n| \le C$, $g_k(x) \overset{D}{\rightrightarrows} 0$

$$\sphericalangle \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k g_k\right| \overset{|(*)|}{\le} \underbrace{|A_{n+p}|}_{\le C} \cdot |g_{n+p}| + \underbrace{|A_n|}_{\le C} |g_n| + \sum_{k=n}^{n+p-1} \underbrace{|A_k|}_{\le C} |g_{k+1} - g_k| \le C \left(|g_{n+p}| + |g_n| + \underbrace{\sum_{k=n}^{n+p-1} \overbrace{|g_{k+1} - g_k|}^{\text{одного знака т.к. } g\text{-монот}}}_{\text{телескоп}} \right) =$$

$$= C \left(\underbrace{|g_{n+p}|}_{\le \varepsilon} + \underbrace{|g_n|}_{\le \varepsilon} + |g_{n+p}| + |g_n| \right) < 4C\varepsilon \quad \forall x \in D \Rightarrow \text{по кр. Коши ряд сх-ся равн. на } D$$

II пр. Абеля

$A_n = S - R_n$, $S = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k$

уходит

$$\text{подставим в } (*): \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k g_k\right| = \Big| \overbrace{S \cdot g_{n+p} - S \cdot g_n - \sum_{k=n}^{n+p-1} S (g_{k+1} - g_k)}^{S \cdot (g_{n+p} - g_n)} - R_{n+p} g_{n+p} + R_n g_n +$$

$$+ \sum_{k=n}^{n+p-1} R_k (g_{k+1} - g_k) \Big| \le$$

тоже телескоп

$R_n \rightrightarrows 0 \Rightarrow |R_n| < \varepsilon$, $|g_n| \le C$ $\quad \le \varepsilon \cdot C + \varepsilon \cdot C + \varepsilon (C + C) = 4C\varepsilon$ ◀

Пр.:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{N} \cos kx = \frac{\sin\frac{x}{2} + \sin(N+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} \leq \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}, \quad x \neq 2\pi m, \ m \in \mathbb{Z}$$

$$\sum_{k=1}^{N} \cos kx \Big|_{x=2\pi m} = N$$

$$\Rightarrow \Big|\sum_{k=1}^{N} \cos kx\Big| \underset{\le \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}}{-} \text{равн. огранич. на } [\delta + 2\pi m;\ 2\pi - \delta + 2\pi m]$$

$\Rightarrow$ исх. ряд равн. сх-ся на отрезке вида

Св-ва равн. сх-ся функ. п-ти и рядов

Теорема (О перестановке пределов)

$\exists\, f_k(x) : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C}),\ f_k(x) \overset{D}{\rightrightarrows} f(x),\ x_0$ - пред. точка D, $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists \lim\limits_{x\to x_0} f_k(x) = a_k$.

Тогда: $\exists \lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ т.е. $\lim\limits_{k\to\infty}\lim\limits_{x\to x_0} f_k(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$

$$\begin{array}{ccccccc} f_1(x), & f_2(x), & \ldots, & f_k(x), & \ldots & \overset{D}{\rightrightarrows} & f(x) \\ \downarrow{\scriptstyle x\to x_0} & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow{\scriptstyle x\to x_0} \\ a_1, & a_2, & \ldots\ldots, & a_k, & \ldots & \xrightarrow[k\to\infty]{} & \cdot \end{array}$$

$\triangleright$ 1. Док-м, что a_k сх-ся

по кр. Коши $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad x \to x_0$

$$|a_{n+p} - a_n| \leq \varepsilon \Rightarrow a_k \text{ - фунд} \Rightarrow \exists \lim a_k = A$$

2. $\int$ $|f(x) - A| \leq \underbrace{|f(x) - f_n|}_{\le \varepsilon/3} + \underbrace{|f(n) - a_n|}_{\exists U(x_0)\ < \varepsilon/3} + \underbrace{|a_n - A|}_{\le \varepsilon/3} < \varepsilon$ ◀

Следствие

$\exists \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сх. равн. на D, $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f_k(x) = a_k$. Тогда:

$$\lim_{x\to x_0} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)}_{\overset{\shortparallel}{\lim\limits_{n\to\infty} S_n}} = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} f_k(x)$$

Следствие

$\exists\, f_k(x)$ – непр. в $(\cdot)\, x_0$ – пред-ой для D, $f_k(x) \overset{D}{\rightrightarrows} f(x)$ Тогда:

$f(x)$ непр. в $(\cdot)\ x_0$