

Практика 3 (КТ, 3 сем). Функциональные последовательности и ряды

1. Найти предельную функцию $f(x)$ при $n \rightarrow +\infty$ и множество сх-ти (D):

a) $f_n(x) = \frac{x}{n}$; б) $f_n(x) = x^n$; в) $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$;
д) $f_n(x) = n \sin \frac{1}{nx}$; е) $f_n(x) = nx^2 e^{-nx}$.

2. Выяснить про каждый пункт задачи 1, будет ли эта сходимость равномерной на D ? Доказать или опровергнуть.

3. В тех пунктах, где сходимость неравномерная, сузить множество D так, чтобы сходимость стала равномерной.

4. Найти область сходимости функционального ряда:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{\sqrt{3n+1} \cdot 4^{n+1}}$;
е) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \sin nx$; ф) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2n} + 1}$.

5. Докажите, что ряд сходится равномерно на D_1 и неравномерно на D_2 :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, $D_1 = [-a, a] \subset (-1, 1)$, $D_2 = (-1, 1)$;
б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$, $D_1 = [0, 1)$;
в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $D_1 = [-a, a] \subset (-1, 1)$, $D_2 = (-1, 1)$;
д) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$, $D_1 = [a, +\infty)$, $a > 0$, $D_2 = (0, +\infty)$;
е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1 + x^2 n^5}$, $D_1 = \mathbb{R}$.

Задачи для ДЗ-3:

1. Для каждой функциональной последовательности:

✓ Найдите множество сходимости и предельную функцию при $n \rightarrow +\infty$;

✓ Постройте (например, в Desmos) графики функций f_n при нескольких n и f и проверьте (визуально), верно ли найдена предельная функция и множество сходимости;

✓ По графикам предположите, является ли сходимость равномерной. Если нет, то как сузить множество, чтобы сходимость стала равномерной?

✓ Докажите аналитически результаты предыдущего пункта.

- | | | |
|-------------------------------|--|---|
| 1. $f_n(x) = \frac{nx}{n+1};$ | 3. $f_n(x) = \frac{nx}{n^2+x^2};$ | 5. $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n};$ |
| 2. $f_n(x) = x^n - x^{n+1};$ | 4. $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx;$ | 6. (*) $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$ |

2. Найти область сходимости ряда (абс. и усл.):

- | | |
|---|--|
| 1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}(2x-1)^{n+1}}{(4n+1)2^{2n+1}};$ | 2. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+5}\right)^{n^2} x^n.$ |
|---|--|

3. Исследовать ряды на равномерную сходимость на данных множествах:

- $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}, D_1 = (0, +\infty), D_2 = [a, +\infty), a > 0;$
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+x^2n^5}, D = \mathbb{R};$
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x^3}{n\sqrt{n}}, D_1 = \mathbb{R}, D_2 = [-a, a], a > 0;$
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n n \sqrt{n+x}}, D_1 = [3; 3], D_2 = \mathbb{R}.$
-

оценить $d^2 \mathcal{L}$ мы можем да еще также оценить $d^2 \mathcal{L}$

1. $f_n(x) = \frac{x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \mathbb{R}$

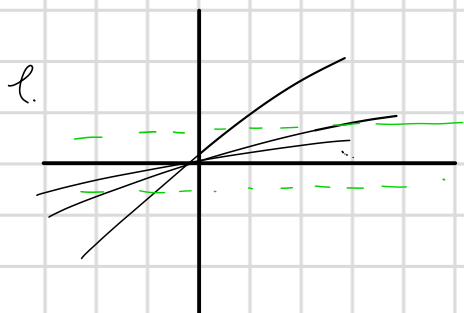
2. $f_n(x) = x^n \rightarrow \begin{cases} 0, & x \in (-1, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

3. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} = \frac{\frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2} + x^2} \rightarrow 0$ на \mathbb{R}

4. $f_n(x) = n \sin\left(\frac{1}{nx}\right) \sim n \cdot \frac{1}{nx} = \frac{1}{x}, x \neq 0$

5. $f_n(x) = nx^2 e^{-nx} \rightarrow 0, x \in [0, +\infty)$

равномерно



$$\left| \frac{x}{n} - 0 \right| < \epsilon$$

$$n > \frac{|x|}{\epsilon}$$

$$\Rightarrow n_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|x|}{\epsilon} = +\infty$$

или через нормы: $\|f_n(x)\|_0 \rightarrow 0$

$$\left\| \frac{x}{n} \right\|_{\mathbb{R}} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|x|}{n} = \infty$$

судет если $\Rightarrow 0$ на $[-a, a]$

или через откз: $\exists x_n = n$

$$f_n(x_n) = \frac{n}{n} = 1 = \epsilon$$

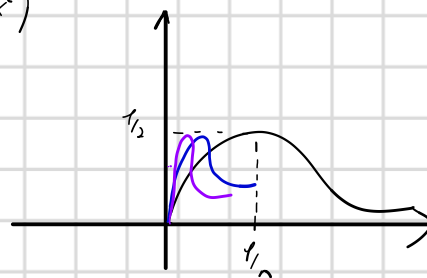
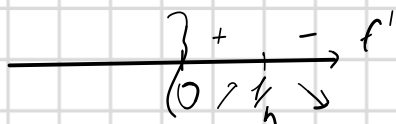
2. на промежутке \mathbb{R} не равно 5 раз

3. $x_n = \frac{1}{n}, f_n(x_n) = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow$ нет равн. с.т.н. на \mathbb{R}

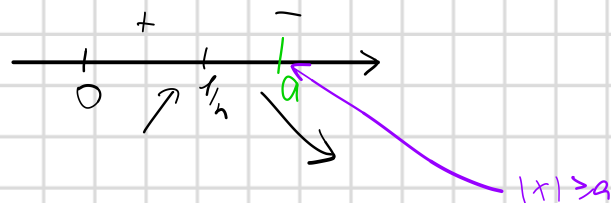
a) rpe l'arb? $\forall x, |x| \geq a$

$$\sup_{|x| \geq a} \frac{|hx|}{1+n^2 x^2} \stackrel{?}{\leq}$$

$$\left(\frac{hx}{1+n^2 x^2} \right)' = \frac{h(1+n^2 x^2) - hx \cdot 2n^2 x}{(1+n^2 x^2)^2} = \frac{h(1-n^2 x^2)}{(1+n^2 x^2)^2}$$



$$= \frac{1}{2} = f_n\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{on } [-a, a] \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \sup_{|x| \geq a} \frac{|hx|}{1+n^2 x^2} = f_n(a) = \frac{na}{1+n^2 a^2} \rightarrow 0$$

4. $h \sin \frac{1}{nx}$

$$\left(h \sin \frac{1}{nx} - \frac{1}{x} \right)' = h \cos \frac{1}{nx} \left(-\frac{1}{nx^2} \right) + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} \left(1 - \cos \frac{1}{nx} \right) \geq 0$$

$$\left(h \sin \frac{1}{nx} - \frac{1}{x} \right) = h \left(\sin \frac{1}{nx} - \frac{1}{nx} \right), \quad \sin t \leq t, \quad t > 0$$

$$|f_n(x) - f(x)| \downarrow \quad \forall x \quad \forall n$$

$$\text{i.e. } \left| h \sin \frac{1}{nx} - \frac{1}{x} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} - h \sin \frac{1}{x}$$

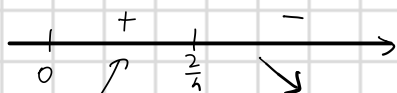
$$\frac{d}{dx} = \dots = -\frac{1}{x^2} \left(1 - \cos \frac{1}{nx} \right) \leq 0$$

$$\Rightarrow \sup_{x \neq 0} \left| h \sin \frac{1}{nx} - \frac{1}{x} \right| = +\infty$$

$$\forall |x| \geq a \Rightarrow \sup = h \sin \frac{1}{na} - \frac{1}{a} \sim h \frac{1}{na} - \frac{1}{a} = 0$$

5. $f_n(x) = nx^2 e^{-nx}$

$$(nx^2 e^{-nx})'_x = \underbrace{ne^{-nx}}_{\rightarrow 0} x(2-nx)$$



$$\sup_{x \geq 0} |f_n| = f_n\left(\frac{2}{n}\right) = n \cdot \frac{4}{n^2} e^{-4 \cdot \frac{2}{n}} = \frac{4}{n} \cdot e^{-2} = \frac{4}{n \cdot e^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{YPA}$$

4. 1) $\sum_{h=1}^{\infty} x^h, D = (-1, 1)$

2) $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^h}{h}, \sqrt[h]{|a_n|} = \frac{|x|}{h} \rightarrow |x|, x \in (-1, 1) - \text{C.K. - C.}$

$x=1$: поск. т.к. разность

$x=-1$: $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ C.K. - C. не сходится

3) $\sum_{h=1}^{\infty} e^{-hx} = \sum_{h=1}^{\infty} (e^{-x})^h$ Кан б.г. $\Rightarrow -1 < e^{-x} < 1$

$\Rightarrow x > 0 \quad D = (0, +\infty)$

4) $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{(x-3)^h}{\sqrt{3h+1} \cdot 4^{h+1}}$

Данная $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|x-3|^{n+1} \cdot \sqrt{3n+1} \cdot 4^{n+1}}{\sqrt{3n+4} \cdot 4^{n+2} \cdot |x-3|^n} = \frac{|x-3|}{4} \cdot \frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{3n+4}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{|x-3|}{4} < 1$

т.е. $|x-3| < 4 \Rightarrow x \in (-1, 7) \quad \text{C.K. - C.}$

$x=-1$: $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{3n+1}}$: C.K. не сходится

$x=7$: $\sum \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ поск.

$\Rightarrow D = [-1, 7)$

5) $\sum_{h=1}^{\infty} e^{-hx} \sinh x$

$|e^{-hx} \sinh x| \leq e^{-hx} \Rightarrow$ при $x > 0$ C.K. - C. $\forall \text{ } n, z$.

$x=0$: C.K. - C. т.к. разность $\forall \text{ } z$ 0

$x < 0$: $\left\{ \begin{array}{l} x = -\pi m, m \in \mathbb{N}, \text{ то } \rightarrow \text{C.K. - C.} \\ x \neq -\pi m, \text{ то } e^{-hx} \sinh x \not\rightarrow 0 \end{array} \right\}$
 \downarrow
 \rightarrow не сходится