Алгебра. КТ. Весенний семестр

III. Жорданова нормальная форма

1. Найдите корневые подпространства вещественных операторов, заданных матрицами в стандартном базисе:

   а) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $\mathscr{A} \in \operatorname{End} V$. Найдите базис циклического подпространства, порождённого вектором v, и матрицу сужения $\mathscr{A}$ на это подпространство в найденном базисе, если:

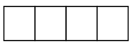
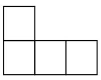
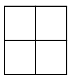
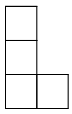
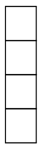
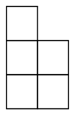
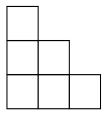
   а) $V = M_2(\mathbb{R})$, $\mathscr{A} \colon X \mapsto X + X^{\mathrm{T}}$, $v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

   б) $V = M_2(\mathbb{R})$, $\mathscr{A} \colon X \mapsto X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

   в) $V = \mathbb{R}[x]_n$, $\mathscr{A} \colon f \mapsto f'$, $v = x^2 + x + 1$;

   г) $V = \mathbb{R}[x]_n$, $\mathscr{A} \colon f \mapsto f(1-x)$, $v = x^2 + x + 1$.

3. Напишите жорданову форму матрицы линейного оператора на корневом подпространстве V^{λ}, соответствующую диаграмме Юнга (собственные векторы в нижней строке):

   а)  б)  в)  г)  д)  е)  ж) 

4. Найдите жорданову форму оператора четырёхкратного дифференцирования в пространстве $\mathbb{R}[x]_{13}$.

5. Найдите жорданову форму матрицы вещественного линейного оператора, соответствующий жорданов базис, матрицы проекторов на корневые подпространства, если оператор задан матрицей в стандартном базисе:

   а) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

   г) $\begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

6. Найдите жорданову форму матрицы оператора $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, если операторы $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ имеют жордановы формы A и B соответственно:

   а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$;

   в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

7. Найдите жорданову форму матрицы а) A^2, б) A^{-1} (A — невырожденная матрица), если известна жорданова форма матрицы A.

8. Докажите, что любая комплексная квадратная матрица подобна своей транспонированной.

9. Докажите, что комплексная матрица нильпотентна тогда и только тогда, когда все её характеристические числа равны нулю.

10. Найдите жорданову форму матрицы оператора дифференцирования в пространстве $V \leqslant C^\infty(\mathbb{C})$ и соответствующий жорданов базис, если:

    а) $V = \{P(x)\sin x + Q(x)\cos x \mid P(x), Q(x) \in \mathbb{C}[x]_1\}$;

    б) $V = \{P(x)\, e^x \sin x + Q(x)\, e^x \cos x \mid P(x), Q(x) \in \mathbb{C}[x]_1\}$.

11.* Найдите жорданову форму матрицы оператора $\mathscr{A} \in \operatorname{End} V$, если:

    а) $V = \langle xe^x,\ xe^{-x},\ x^2e^x,\ e^x, e^{-x}\rangle \leqslant C^\infty(\mathbb{R})$, $\mathscr{A} = \frac{d}{dx}$;

    б) $V = \langle y^3,\ y^2,\ y,\ 1,\ xy, x\rangle \leqslant \mathbb{R}[x,y]$, $\mathscr{A} = y^2\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$;

    в) $V = \langle x^3,\ x^2,\ x,\ 1,\ x^2y,\ xy,\ y\rangle \leqslant \mathbb{R}[x,y]$, $\mathscr{A} = \frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$;

    г) $V = \langle 1,\ x,\ y,\ z,\ xz,\ xy,\ x^2\rangle \leqslant \mathbb{R}[x,y,z]$, $\mathscr{A} = \frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z}$;

    д) $V = \mathbb{R}[x,y]_n$, $\mathscr{A} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$.

12.* $A \in M_n(\mathbb{Q})$. Докажите, что $A^2 = A$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{rk} A = \operatorname{tr} A$ и $\operatorname{rk}(E - A) = \operatorname{tr}(E - A)$.