§1. Геометрический смысл дифференциальных уравнений

Установим геометрический смысл нормального уравнения

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

и его решения φ. Имеем

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$$

на некотором промежутке E. Пусть $x_0 \in E$, $y_0 = \varphi(x_0)$. Тогда

$$\varphi'(x_0) = f(x_0, y_0).$$

Таким образом, значение функции f в точке (x_0, y_0) определяет наклон касательной к интегральной кривой в этой точке (рис. 1).

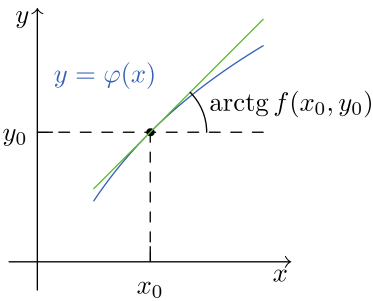

Рис. 1. Значение $f(x_0, y_0)$ определяет касательную к интегральной кривой, проходящей через точку (x_0, y_0)

Если каждой точке (x, y) области определения функции f сопоставить вектор, направленный под углом $\operatorname{arctg} f(x, y)$ к оси абсцисс, то получится так называемое ***поле направлений*** уравнения (1). Таким образом, задать уравнение (1) — всё равно, что задать поле направлений.

Задачу нахождения решений уравнения (1) можно сформулировать на геометрическом языке: найти все гладкие кривые, в каждой своей точке касающиеся заданного поля направлений (рис. 2).

Векторное поле, построенное в некоторых точках, даёт примерное представление о поведении интегральных кривых. Такое поле может быть использовано для предварительного качественного исследования дифференциального уравнения, построения эскизов интегральных кривых и контроля найденных решений.

Рассмотрим один способ построить приближение к интегральной кривой. Взяв некоторую точку (x_0, y_0) в качестве начальной, будем двигаться по направлению поля в точке (x_0, y_0) до точки с абсциссой $x_1 = x_0 + h$, ординату которой обозначим через y_1. От точки (x_1, y_1) продолжим движение вдоль поля до точки (x_2, y_2), где $x_2 = x_1 + h$, но теперь по направлению поля в (x_1, y_1).

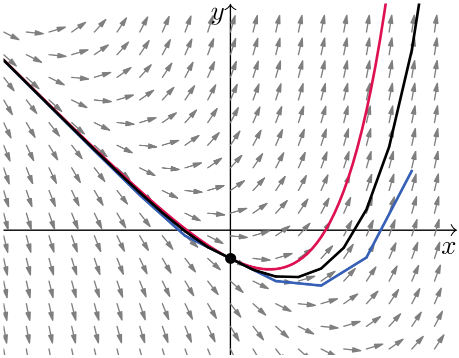

Рис. 2. Поле направлений уравнения $y' = y + x$; интегральная кривая, проходящая через точку $x_0 = 0$, $y_0 = -1/2$ (красным цветом); ломаные Эйлера с шагом $h = 0{,}8$ (синим цветом) и $h = 0{,}4$ (чёрным цветом), проходящие через эту же точку

Продолжая этот процесс дальше, получаем ***ломаную Эйлера***. Аналогично она строится и влево от точки (x_0, y_0).

Ломаная Эйлера даёт приближение интегральной кривой уравнения, проходящей через точку (x_0, y_0). Приближение тем точнее, чем меньше шаг h (рис. 2). Исходя из условия

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} = f(x_k, y_k),$$

получаем формулы для координат вершин ломаной:

$$x_{k+1} = x_k + h, \quad y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)h.$$

Ломаную Эйлера лучше всего строить с помощью компьютера. Существует другой, родственный способ, который удобно использовать при построении эскизов кривых вручную — ***метод изоклин***.

Определение. ***Изоклиной*** I_k уравнения (1) называют множество уровня функции f:

$$I_k = \{(x, y) \in \operatorname{dom} f \mid f(x, y) = k\}.$$

Изоклина пересекается различными интегральными кривыми под одним и тем же углом. Построив достаточно частую сеть изоклин, можно приближённо изобразить интегральную кривую. Для этого нужно вести линию от одной изоклины к другой, пересекая их под соответствующими углами.

На рис. 3 изображено несколько изоклин и одна интегральная кривая уравнения $y' = x+y$. Синим цветом обозначена ***нулевая изоклина*** I_0, отделяющая области убывания и возрастания решений.

Поясним геометрический смысл уравнения

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0. \tag{2}$$

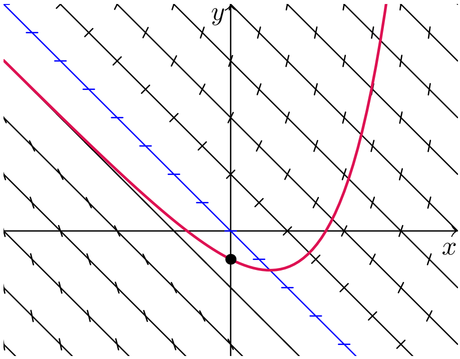

Рис. 3. Изоклины и интегральная кривая уравнения $y' = x + y$

Пусть $r(t) = (x(t), y(t))$ — его параметрическое решение на E. Тогда при любом $t \in E$

$$P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) = 0. \tag{3}$$

Рассмотрим векторное поле $F = (P, Q)$. Тогда равенство (3) равносильно

$$F(r(t)) \cdot r'(t) = 0.$$

Вектор $r'(t)$ касается интегральной кривой в точке $(x(t), y(t))$. Значит, любая интегральная кривая уравнения (2) в каждой своей точке (x, y) перпендикулярна вектору $F(x, y)$ (рис. 4).

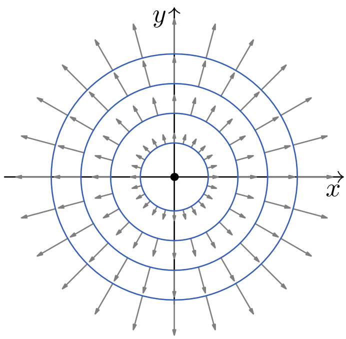

Рис. 4. Интегральные кривые и особая точка уравнения $x\,dx + y\,dy = 0$.

Таким образом, задать уравнение (2) — всё равно, что определить векторное поле на плоскости. Решить это уравнение — значит, найти кривые, перпендикулярные заданному полю.

§2. Уравнение в полных дифференциалах

Определение. Уравнение

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \tag{4}$$

называют ***уравнением в полных дифференциалах*** в области G, если для него существует ***потенциал***, то есть такая дифференцируемая функция u, что для всех $x, y \in G$

$$du = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Теорема 2.1 (общее решение УПД). *Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — область, функция $u\colon G \to \mathbb{R}$ дифференцируема, $u'_x = P$, $u'_y = Q$. Тогда функция $y = \varphi(x)$ — решение уравнения (4) на промежутке E, если и только если она дифференцируема на E и при некотором $C \in \mathbb{R}$ неявно задана уравнением*

$$u(x,y) = C.$$

Доказательство. *Достаточность.* Дифференцируя равенство $u(x,\varphi(x)) = C$ по переменной $x \in E$, находим

$$u'_x(x,\varphi(x)) + u'_y(x,\varphi(x))\varphi'_x \equiv 0.$$

Так как $u'_x = P$, $u'_y = Q$, то по определению функция φ является решением уравнения (4) на E.

Необходимость. На промежутке E верно тождество

$$P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0.$$

Левая часть этого равенства совпадает с полной производной функции u по переменной x. Поэтому

$$\frac{d}{dx}u(x,\varphi(x)) \equiv 0.$$

Следовательно, $u(x,\varphi(x)) \equiv C$. □

Замечание. Теорема 2.1 говорит о том, что интегральные кривые уравнения в полных дифференциалах — это линии уровня его потенциала.

Определение. Уравнение

$$P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0 \tag{5}$$

называют ***уравнением с разделёнными переменными***.

Следствие 2.2 (общее решение УРП). *Пусть $P \in C(a,b), Q \in C(c,d)$. Тогда функция $y = \varphi(x)$ — решение уравнения на промежутке E, если и только если она дифференцируема на E и при некотором $C \in \mathbb{R}$ неявно задана уравнением*

$$\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy = C.$$

Доказательство. Положим

$$u(x, y) = \int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy.$$

Производные $u'_x = P$, $u'_y = Q$ непрерывны, поэтому u — дифференцируемая функция в области $(a, b) \times (c, d)$. По теореме 2.1 получаем требуемое. $\square$

Утверждение 2.3 (необходимое условие УПД). *Пусть (4) — уравнение в полных дифференциалах с потенциалом $u \in C^2(G)$. Тогда*

$$P'_y = Q'_x. \tag{6}$$

Доказательство. Поскольку $u \in C^2(G)$, то смешанные производные функции u совпадают. Следовательно,

$$P'_y = (u'_x)'_y = (u'_y)'_x = Q'_x. \qquad \square$$

Теорема 2.4 (признак УПД[1]). *Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная область, $P, Q \in C^1(G)$, $P'_y = Q'_x$, $(x_0, y_0) \in G$. Тогда уравнение (4) — уравнение в полных дифференциалах в области G с потенциалом*

$$u(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \int_{\gamma(\widetilde{x}, \widetilde{y})} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy, \tag{7}$$

где $\gamma(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ — произвольный кусочно-гладкий путь в области G, соединяющий точки (x_0, y_0) (начало пути) и $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$.

Продемонстрируем на примере другой способ нахождения потенциала.

Пример 2.5. Решим уравнение $e^{-y}\,dx - (2y + xe^{-y})\,dy = 0$.

Решение. Область определения уравнения — вся плоскость.

Необходимое условие уравнения в полных дифференциалах

$$(e^{-y})'_y = (-2y - xe^{-y})'_x = -e^{-y}$$

выполняется на всей области определения. Если это действительно уравнение в полных дифференциалах, то необходимо его потенциал удовлетворяет системе

$$\begin{cases} u'_x = e^{-y}, \\ u'_y = -(2y + xe^{-y}). \end{cases}$$

При фиксированном y из первого уравнения системы находим

$$u(x, y) = e^{-y}x + C(y),$$

[1] см., например, [1, §51, п.5]

где функция C зависит только от y. Подставляя найденное выражение во второе уравнение системы, получаем

$$C'(y) = -2y,$$

откуда $C(y) = -y^2$.

Найденная функция $u(x, y) = e^{-y}x - y^2$ непрерывно дифференцируема в области задания уравнения. Непосредственным вычислением убеждаемся, что её частные производные совпадают с коэффициентами уравнения. Следовательно, исходное уравнение — уравнение в полных дифференциалах, найденная функция u — его потенциал, а общий интеграл по теореме 2.1 имеет вид

$$u(x, y) = C,$$

то есть

$$xe^{-y} - y^2 = C. \qquad \triangle$$

Замечание. Применяя способ нахождения потенциала, указанный в примере 2.5, необходимо внимательно следить за областями определения участвующих функций. Например, рассмотрим в полуплоскости $x > 0$ уравнение

$$\frac{-y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy = 0.$$

Если упустить из виду, что первообразная

$$\int \frac{-y}{x^2 + y^2}\,dx$$

находится по-разному при $y = 0$ и при $y \neq 0$, то можно прийти к функции $u(x, y) = -\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$. Эта функция не может служить потенциалом на всей указанной полуплоскости, поскольку она не определена в точках оси x, а потенциал должен быть определён и непрерывно дифференцируем во всей области.

В действительности потенциалом будет функция

$$u(x, y) = \begin{cases} -\operatorname{arctg}\frac{x}{y}, & \text{если } y > 0, \\ -\pi/2, & \text{если } y = 0, \\ -\pi - \operatorname{arctg}\frac{x}{y}, & \text{если } y < 0, \end{cases}$$

получаемая, например, с помощью криволинейного интеграла (7).

Ссылки

[1] Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И. Курс математического анализа, 2001