Алгебра. КТ. Осенний семестр

IV. Кольца и поля. Кольцо вычетов. Поле комплексных чисел

1. Постройте таблицы Кэли для колец $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_6$. Содержат ли они единицу? Найдите все пары делителей нуля. Является ли какое-либо из них полем?

2. Докажите, что всякое число сравнимо по модулю 9 с суммой своих цифр.

3. Найдите признак делимости числа $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1}$ на 11.

4. Найдите остаток от деления числа 2^{1001}: а) на 3; б) на 5; в) на 13.

5. Докажите, что уравнение $3x^2 - 4y^2 = 13$ не имеет целочисленных решений.

6. Докажите, что число $2222^{5555} + 5555^{2222}$ делится на 7.

7.* Докажите *теорему Вильсона*: $(p-1)! + 1 \,\vdots\, p \Leftrightarrow p$ — простое число.

8. Найдите остаток от деления а) 2^{100} на 101; б) 2^{900} на 29; в) 28! на 29; г) 56!! на 29.

9. Нарисуйте на плоскости $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ линии, заданные уравнениями: $y = kx$, $y = x^2$, $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = -1$.

10. Докажите, что множество $\{a + bx \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ является полем относительно операций обычного сложения многочленов и умножения, определённого следующим образом: $(a + bx) * (c + dx)$ равно остатку от деления $(a + bx)(c + dx)$ на $1 + x^2$. Найдите элемент, обратный $1 + x$ в этом поле.

11. Вычислите. Ответ запишите в алгебраической форме:

    а) $(2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}i)^{24}$; б) $\left(\dfrac{-\sqrt{3} + i}{1 + i}\right)^{27}$; в) $\left(1 + \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{32}$;

    г) $(\sqrt{2} + 1 + i)^8$; д) $\left((2 + \sqrt{3})i - 1\right)^{12}$.

12. Найдите корни из комплексных чисел. Ответ запишите в алгебраической форме и изобразите точками на комплексной плоскости:

    а)$\sqrt{1 - i}$; б) $\sqrt[4]{1}$; в) $\sqrt[3]{-64i}$; г) $\sqrt[3]{i}$; д) $\sqrt[6]{1}$.

13. Найдите суммы:

    а) $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots$; б) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots$

14.* На вход автомата подаётся карточка с упорядоченной парой чисел, а затем каждую секунду автомат преобразует карточку (x, y) в карточку $(x^2 - y^2, 2xy)$. После минуты работы автомат получил карточку с исходной парой. Найдите все возможные значения чисел на изначальной карточке.

2. $\overline{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0} \equiv a_{n-1} + a_{n-2} \ldots a_1 a_0 \pmod 9$

$a_{n-1}10^{n-1} \ldots + a_2 100 + a_1 10 + a_0 \cdot 1$

$a_0 \equiv a_0 \pmod 9$ $\quad 1 \equiv 1 \pmod 9$ $\quad 1 \equiv 1 \pmod 9$

$a_1 \equiv a_1 \pmod 9$ $\quad 10 \equiv 1 \pmod 9$ $\quad a_1 \cdot 10 \equiv a_1 \pmod 9$

$a_{n-1} \equiv a_{n-1} \pmod 9$ $\quad 10^{n-1} \equiv 1 \pmod 9$ $\quad a_2 \cdot 100 \equiv a_2 \pmod 9$

$a_{n-1} 10^{n-1} \equiv a_{n-1} \pmod 9$

3. $a_0 \equiv a_0 \pmod{11}$ $\quad 1 \equiv 1 \pmod{11}$ $\quad a_0 = a_0 \pmod{11}$

$a_1 \equiv a_1 \pmod{11}$ $\quad 10 \equiv -1 \pmod{11}$ $\quad a_1 10 = -a_1 \pmod{11}$

$a_{n-1} \equiv a_{n-1} \pmod{11}$ $\quad 10^{n-1} \equiv (-1)^n \pmod{11}$ $\quad a_{n-1} 10^{n-1} = (-1)^n a_{n-1} \pmod{11}$

4. 1) 2^{1001} $\quad 2 \equiv -1 \pmod 3$

$2^{1001} \equiv (-1)^{1001} = 2 \pmod 3$

2) $2^2 \equiv -1 \pmod 5$

$2^{2\cdot 500} \equiv (-1)^{500} \pmod 5 \quad | \cdot 2$

$2^{1001} \equiv 2 \pmod 5$

3) $2^6 \equiv -1 \pmod{13} \quad | \wedge 166$

$2^{996} \equiv 1 \pmod{13} \quad | \cdot 2^5$

$2^{1001} \equiv 32 \equiv 6 \pmod{13}$

8. 1/ по т. ферма $a^{p-1} \equiv a \pmod p$ при $a \perp p$ взаимно просты

$2^{100} \equiv 1 \pmod{101}$

2) $2^{900} \equiv$

$2^{28} \equiv 1 \pmod{29} \quad | \wedge 32$

$2^{896} \equiv 1 \pmod{29} \,/ \cdot 2^4$

$2^{900} \equiv 16 \pmod{29}$

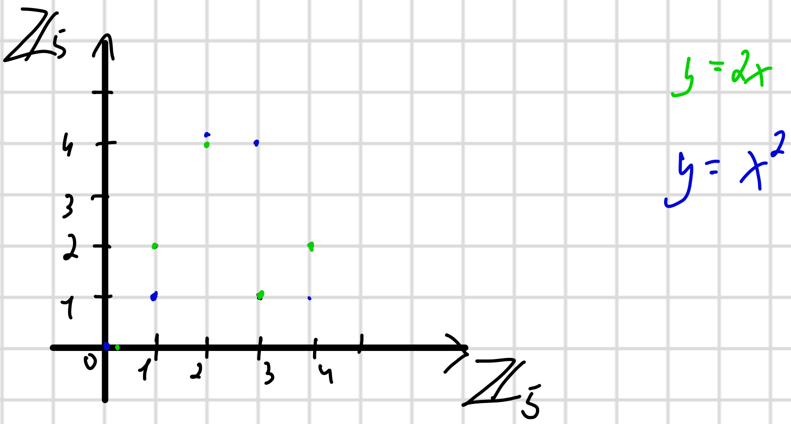
3) $28! \equiv \quad \pmod{29}$ $\qquad (p-1)! - 1 \,\vdots\, p \quad$ p - простое

По т. Вильсона $28! + 1 \,\vdots\, 29$

$28! \equiv -1 \pmod{29} \equiv 28$

4) $56!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot \ldots \cdot 54\cdot 56 = 2^{28}\cdot 28! = -1 \pmod{29} = 28$

$2^{28} \equiv 1 \pmod{29} \qquad 28! \equiv -1 \pmod{29}$



11) a) $\left(2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}i\right)^{24} = \left(4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)^{24} =$

$|2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}i| = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (-2\sqrt{6})^2} = \sqrt{8+24} = 4\sqrt{2}$

$= 2^{60}\left(\cos(-8\pi) + i\cdot\sin(-8\pi)\right) = 2^{60}$

d) $\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^{27} = \left(\frac{2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\right)^{27} = \left(\sqrt{2}\,\frac{\cos\frac{5\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{5\pi}{6}}{\cos\pi/4 + i\cdot\sin\pi/4}\right) =$

$\frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$

$\frac{(-\sqrt{3}+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-\sqrt{3}+i+\sqrt{3}\cdot i+1}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

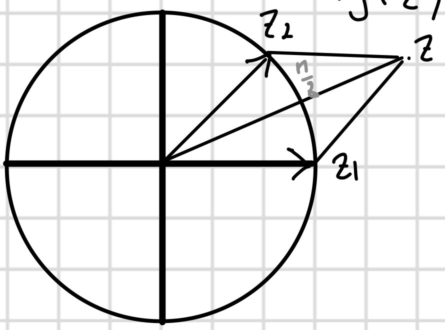
$= \sqrt{2}^{27}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\cdot\sin\frac{7\pi}{12}\right)^{27} = \sqrt{2}^{27}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$

$= \sqrt{2}^{27}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = 2^{13}(1-i)$

б) $\left(\overbrace{1+\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}}^{z}\right)^{32} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$

$\left|1+\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right| = \sqrt{2+\sqrt{2}}$

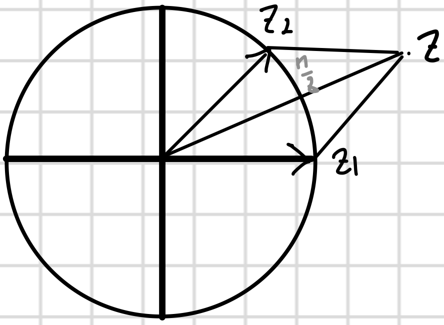
$\arg(z) = \frac{\pi}{8}$



$\underbrace{1}_{z_1}+\underbrace{\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)}_{z_2}$

в) $(\sqrt{2}+1+i)^8 = \left(\underbrace{\sqrt{2}}_{z_1}+\underbrace{(1+1i)}_{z_2}\right)^8 = 3+2\sqrt{2}\left(\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\cdot\sin\frac{\pi}{8}\right)\right)^8 =$

$= -(3+2\sqrt{2})^4$



12. a) $\sqrt{1-i} = x+iy$

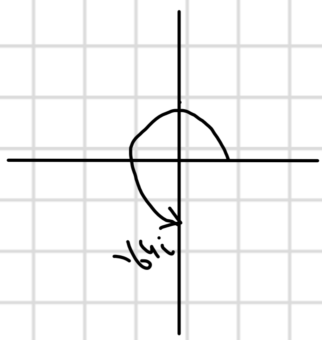
$1-i = x^2+2xyi-y^2$

$\begin{cases} x^2-y^2=1 \\ 2xy=-1 \end{cases}$ $\quad x = \frac{-1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \quad y=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$

б) $\sqrt[3]{-64i}$

$\rho = |-64i| = 64$

$\varphi = \arg(-64i) = \frac{3\pi}{2}$

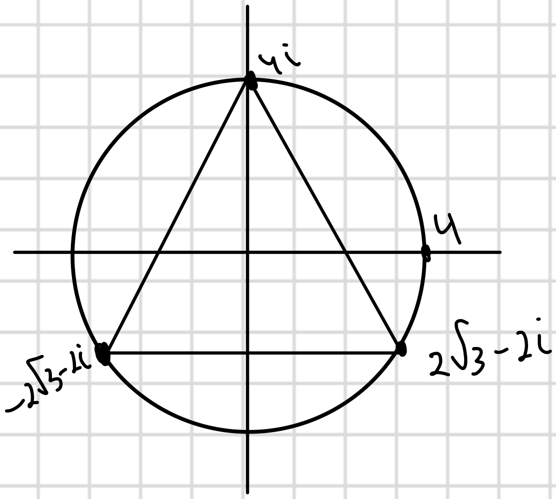


$k=0: \; 4i$

$k=1: \; -2\sqrt{3}-2i$

$k=2: \; 2\sqrt{3}-2i$

$$\sqrt[3]{64}\cdot\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{3}+i\cdot\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{3}\right)=4e^{\frac{3\pi/2+2\pi k}{n}}$$



13. $1-C_n^2+C_n^4-C_n^6+\dots$

$$(i+1)^n=1+C_n^1 i+C_n^2 i^2+C_n^3 i^3+C_n^4 i^4\dots C_n^n i^n=$$

$$=\underbrace{\left(1-C_n^2+C_n^4-C_n^6+\dots\right)}_{\sqrt{2}^n\cos\frac{\pi n}{4}}+i\underbrace{\left(C_n^1-C_n^3+C_n^5-C_n^7+\dots\right)}_{\sqrt{2}^n\sin\frac{\pi n}{4}}=$$

$$=\sqrt{2}^n\left(\cos\frac{\pi n}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi n}{4}\right)$$