Содержание

1 Логическая символика. Множества и основные операции с множествами

1.1 Логическая символика и некоторые специальные обозначения

Математика оперирует предложениями, называемыми высказываниями. Высказывания, в свою очередь, изучаются разделом математики, который называется математическая логика. Как таковая математическая логика не входит в данный курс, поэтому ниже приводятся лишь некоторые обозначения, которыми она пользуется.
$\forall$ – квантор всеобщности. Читается, как «любой», «всякий», «каждый».
$\exists$ – квантор существования. Читается, как «существует», «найдется».
$\Rightarrow$ – знак следования. Если A и B – два высказывания, то запись $A \Rightarrow B$ читается, как «из A следует B», «A влечет B», «для того, чтобы выполнялось B необходимо выполнение A», «A достаточно для B».
$\Leftrightarrow$ – знак равносильности. Если A и B – два высказывания, то запись $A \Leftrightarrow B$ читается, как «A равносильно B», «A необходимо и достаточно для B», «A выполнено тогда и только тогда, когда выполнено B».
$\neg$ – знак отрицания. Если A – высказывание, то $\neg A$ читается, как «не A».
$\wedge$ – логическое «и».
$\vee$ – логическое «или».
Кроме того, символы, приведенные далее, позволяют сокращать математические записи.
$\sphericalangle$ – читается, как «рассмотрим».
$\sqsupset$ – читается, как «пусть».
: – читается, как «такой, что», «так, что».
! – читается, как «единственный».

Пример 1.1.1 *Запись $\forall b \quad \exists a : a + b = -3$ читается, как «для каждого b найдется a такое, что сумма a и b равна -3».*

Пример 1.1.2 *Запись $\forall a, b \quad \exists! c = ab$ читается, как «для любых чисел a, b найдется единственное число c, равное их произведению».*

Доказательство любой теоремы в математике состоит из следующих известных шагов: задается некоторое свойство (высказывание) A, которое часто называется условием, и из него, путем логических рассуждений выводится некоторое свойство B (результат). Какие при этом логические операции используются? Приведем и обсудим некоторые из них.

1. Импликация (следование)

Данная логическая операция часто обозначается символом $\Rightarrow$. Запись $A \Rightarrow B$ читается как “из A следует B”, “A достаточно для B”, “B необходимо для A”.

Пример 1.1.3 *Пусть $A =$“$x < 0$”, $B =$“$x < 1$”. Тогда $A \Rightarrow B$. При этом импликация $B \Rightarrow A$ неверна.*

2. Равносильность (эквивалентность)

Данная логическая операция часто обозначается символом $\Leftrightarrow$. Запись $A \Leftrightarrow B$ читается как “A равносильно B”, “A необходимо и достаточно для B”, “A выполнено тогда и только тогда, когда выполнено B”.

Пример 1.1.4 *Пусть $A =$“число делится на 2 и на 3”, $B =$“число делится на 6”. Тогда $A \Leftrightarrow B$.*

Равносильность $A \Leftrightarrow B$ – это то же самое, что и одновременное выполнение двух импликаций $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$. Это наблюдение часто используется при доказательстве так называемых теорем о равносильности: теорем, в которых есть слова "тогда и только тогда "необходимо и достаточно"или "равносильно". Такие теоремы часто называют критериями.

3. Отрицание

Отрицание утверждения A обычно обозначают $\neg A$ или $\bar{A}$.

Пример 1.1.5 *Пусть $A =$“$x > 0$”. Тогда $\neg A =$“$x \leqslant 0$”.*

Для любого утверждения A справедлив принцип исключенного третьего: выполнено либо A, либо $\neg A$.

На этом принципе основано доказательство от противного. Пусть нужно доказать $A \Rightarrow B$. Предполагают, что верно $\neg B$ и доказывают, что верно $\neg A$, что противоречит условию (тому, что A выполнено).

Пусть $P(x)$ – некоторое высказывание, зависящее от $x \in X$. Тогда отрицание к утверждению “для любого $x \in X$ справедливо $P(x)$” равносильно тому, что “существует $x \in X$ такой, что $P(x)$ неверно”. Записать это можно так:

$$\neg(\forall x \in X \Rightarrow P(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in X :\ \neg P(x)).$$

Аналогично, отрицание утверждения “для некоторого $x \in X$ верно $P(x)$” равносильно тому, что “для всех x свойство $P(x)$ неверно”:

$$\neg(\exists x \in X :\ P(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in X \Rightarrow \neg P(x)).$$

Пример 1.1.6

$$\neg(\forall x \Rightarrow x \,\vdots\, 2) \Leftrightarrow (\exists x :\ x \not\vdots\, 2).$$

4. Логическое ИЛИ

Логическое "или" обозначают символом $\vee$. Запись $A \vee B$ читается как "A или B", при этом не исключается выполнение одновременно A и B.

Пример 1.1.7 *Пусть $A =$"$0 < x \leqslant 1$", $B =$"$1 \leqslant x < 2$". Тогда $A \vee B =$ "$0 < x < 2$".*

5. Логическое И

Логическое "и" обозначается символом $\wedge$. Запись $A \wedge B$ читается как "A и B".

Пример 1.1.8 *Пусть $A =$"$0 < x \leqslant 1$", $B =$"$1 \leqslant x < 2$". Тогда $A \wedge B =$ "$x = 1$".*

1.2 Множества

Понятие множества в рассматриваемом курсе будет первичным, неопределяемым. Не определяя понятия множества, тем не менее, будут указаны его свойства и правила обращения с ним. Другой подход, аксиоматический, использует математическая логика: аксиомы описывают свойства множества и правила построения одних множеств из других.

Само понятие «множество» должно быть интуитивно понятно каждому. Вместо него, в зависимости от ситуации, часто используют такие синонимы, как «набор», «совокупность» и аналогичные слова. Например, множество цветов в вазе удобно называть «букет», а множество студентов в аудитории – «группой».

Множества обозначают заглавными латинскими буквами: A, B, C, или используют индексы: A_1, A_2. Элементы множества обозначают строчными латинскими буквами: a, b, c.

Замечание 1.2.1 *Запись $a \in A$ будет означать, что a является элементом множества A или, иначе, что a входит в A. Запись $a \notin A$ означает, что a не является элементом множества A.*

Основные способы задания множества:

- множество может быть задано перечислением своих элементов, например $A = \{1, 5, 12, \text{стул}\}$;

- множество может быть задано указанием характеристического свойства, например $A = \{x : \sin x = 1/2\}$, т. е. множество, составленное из элементов x таких, что $\sin x = 1/2$.

Замечание 1.2.2 *Пусть x – объект произвольной природы, а $P(x)$ означает, что объект x обладает свойством P. Тогда множество всех объектов x, обладающих свойством P имеет вид*

$$\{x:\ P(x)\}.$$

Элементами множества могут быть множества, например

$$A = \{1, \{1\}, \{3, 7\}\}.$$

У множества A три элемента: число 1, множество, состоящее из одного элемента $\{1\}$ и двухэлементное множество $\{3, 7\}$.

Такая свобода в задании множества может навести на мысль, что множество – не такое уж простое понятие. И правда, например, понятия множества всех множеств просто не существует.

Пусть A – совокупность множеств, не содержащих себя в качестве элемента. Если A – множество, то либо A содержит себя в качестве элемента, либо нет. Однако эта альтернатива для A невозможна. Пусть A не содержит себя в качестве элемента, тогда согласно определению A должно выполняться $A \in A$. С другой стороны, если $A \in A$, то это противоречит определению совокупности A, как множеств, не содержащих себя в качестве элемента. Значит, A – не множество.

Замечание 1.2.3 *При образовании множеств нужно соблюдать некоторую осторожность. Как показано выше, понятия множества всех подмножеств противоречиво (такого множества нет). Во избежании противоречий достаточно потребовать, чтобы элементы были определены раньше, чем само множество. Отсюда следует, что никакое множество не может содержать себя в качестве элемента.*

Определение 1.2.1 *Обычно рассматривают объекты, принадлежащие некоторому основному множеству U. Оно либо ясно из контекста, либо явно указывается. Такое множество называется универсальным множеством.*

Определение 1.2.2 *Множество, не содержащее элементов, называется пустым множеством и обозначается $\varnothing$.*

1.3 Операции над множествами

Определение 1.3.1 *Объединением множеств A и B называется множество C, обозначаемое $A \cup B$, такое, что:*

$$C = A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\},$$

т.е. элементами объединения являются только те элементы, которые содержатся хотя бы в одном из множеств A, B.

Определение 1.3.2 *Пересечением множеств A и B называется множество C, обозначаемое $A \cap B$, такое, что:*

$$C = A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\},$$

т.е. элементами пересечения являются только те элементы, которые принадлежат одновременно множествам A и B.

Определение 1.3.3 *Разностью множеств A и B называется множество C, обозначаемое $A \setminus B$, такое, что:*

$$C = A \setminus B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\},$$

т.е. элементами разности являются элементы, входящие в множество A, но не входящие в множество B.

Определение 1.3.4 *Говорят, что множество A является подмножеством множества B и пишут $A \subset B$, если*

$$(\forall x \in A) \Rightarrow (x \in B)\,,$$

т.е. все элементы множества A являются и элементами множества B.

Определение 1.3.5 *Пусть U – универсальное множество. Дополнением множества A до U называется множество $U \setminus A$, обозначаемое A^c.*

Пример 1.3.1 *Пусть заданы множества $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ и $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, где последнее множество – универсальное. Тогда,*

$$A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6\}, \quad A \cap B = \{3, 5\}, \quad A \setminus B = \{1\}, \quad A^c = \{2, 4, 6, 7\}.$$

Замечание 1.3.1 *Пусть элементы α множества A нумеруют множества X_α. Тогда под объединением системы множеств X_α понимается множество, содержащее те элементы x, которые принадлежат хотя бы одному множеству X_α. Обозначается это объединение*

$$\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha.$$

Аналогично, под пересечением системы множеств X_α понимается множество, содержащее те элементы x, которые принадлежат каждому множеству X_α. Обозначается это пересечение

$$\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha.$$

Определение 1.3.6 *Декартовым произведением множеств A и B называется множество упорядоченных пар таких, что первый элемент пары принадлежит множеству A, а второй – множеству B:*

$$A \times B = \{(a, b) : (a \in A), (b \in B)\}.$$

Замечание 1.3.2 *Под упорядоченной парой понимается то, что пара (a, b), вообще говоря, не равна паре (b, a). Упорядоченные пары часто удобно обозначать, добавляя индексы элементам пары, например (x_1, x_2).*

Замечание 1.3.3 *Декартово произведение естественным образом обобщается на любое конечное число множеств.*

Лемма 1.3.1 *Справедливы следующие свойства:*

1. $X \cup Y = Y \cup X$ *– коммутативность объединения;*
2. $X \cap Y = Y \cap X$ *– коммутативность пересечения;*
3. $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$ *– ассоциативность объединения;*
4. $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$ *– ассоциативность пересечения;*
5. $X \cup X = X \cup \emptyset = X$*;*
6. $X \cap X = X$, $X \cap \emptyset = \emptyset$*;*
7. $X \cup X^C = U$*;* $X \cap X^C = \emptyset$, $(X^C)^C = X$.

Вышенаписанные свойства следуют из определений соответствующих операций.

Теорема 1.3.1 (Законы де Моргана)

$$Y \setminus \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha), \quad Y \setminus \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha).$$

Доказательство. Докажем первое утверждение.

$$x \in Y \setminus \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \Leftrightarrow (x \in Y) \wedge \left(x \notin \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha\right) \Leftrightarrow (x \in Y) \wedge (x \notin X_\alpha,\ \forall \alpha \in A)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \in Y \setminus X_\alpha,\ \forall \alpha \in A) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha).$$

Второе утверждение доказывается аналогично. □

Теперь сформулируем свойство дистрибутивности.

Теорема 1.3.2 (Дистрибутивность объединения и пересечения)
Справедливы следующие соотношения

$$Y \cup \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} (Y \cup X_\alpha), \quad Y \cap \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (Y \cap X_\alpha).$$

Доказательство. Докажем первое равенство.

$$x \in Y \cup \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha \Leftrightarrow (x \in Y) \vee (x \in X_\alpha,\ \forall \alpha \in A) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \in Y \cup X_\alpha,\ \forall \alpha \in A) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in A} (Y \cup X_\alpha).$$

□

1.4 Контрольные вопросы и задачи

1. Покажите, что пустое множество содержится в каждом множестве.

2. Проиллюстрируйте декартово произведение двух отрезков, двух прямых, прямой и окружности, прямой и круга.

3. Докажите, что для произвольных множеств A, B, C выполнено $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

4. Докажите, что для произвольных множеств A, B, C выполнено $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.

5. Докажите, что для произвольных множеств A, B, C выполнено $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

6. Пусть даны множества A, B, C. Выразить следующие множества через A, B, C, используя операции $\cap, \cup, \setminus$:

   - Множество элементов, принадлежащих ровно двум из множеств A, B и C;
   - Множество элементов, принадлежащих ровно одному из множеств A, B и C;
   - Множество элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A, B, но не принадлежащих C.

2 Функции и отображения

2.1 Понятия функции и отображения

Определение 2.1.1 *Пусть заданы два множества X и Y. Говорят, что f – отображение из X в Y, если установлено правило, по которому каждому элементу $x \in X$ сопоставляется один элемент $y \in Y$. При этом пишут:*

$$f : X \to Y \quad \text{или} \quad X \xrightarrow{f} Y.$$

Это описание нельзя считать строгим определением понятия отображения, так как оно все еще включает в себя неопределенные понятия «правило» и «сопоставляется».

Замечание 2.1.1 *Если множество Y числовое, то отображение в него часто называют функцией.*

Определение 2.1.2 *Множество X называют областью определения отображения f и обозначают $D(f)$, а x – аргументом отображения $f(x)$ или независимой переменной.*

Определение 2.1.3 *Множество $E(f) \subset Y$, определяемое, как*

$$E(f) = \{y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y\},$$

называется областью значений отображения $f(x)$, а y – значением отображения $f(x)$ на элементе x, или зависимой переменной.

Замечание 2.1.2 *Область значений отображения $f : X \to Y$ вовсе не обязана совпадать с множеством Y, но всегда является его подмножеством. Пусть $X = \{0, 1\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3\}$, $f : X \to Y$ и $f(x) = x$. Тогда $D(f) = E(f) = \{0, 1\}$, но $E(f) \neq Y$.*

Определение 2.1.4 *Пусть $f : X \to Y$. Образом множества $A \subset X$ называется множество $B \subset Y$, определяемое, как*

$$B = \{y \in Y : f(x) = y, x \in A\},$$

при этом пишут $B = f(A)$.

Пример 2.1.1 *Пусть $A \subset X$, $A = \{0, 1, 5, 8\}$, $f : X \to Y$ и $f(x) = 3x$, тогда $f(A) = \{0, 3, 15, 24\}$ - образ множества A.*

Определение 2.1.5 *Пусть $f : X \to Y$. Полным прообразом $B \subset Y$ называется множество $A \subset X$, определяемое, как*

$$A = \{x \in X : f(x) = y,\ y \in B\},$$

при этом пишут $A = f^{-1}(B)$.

Пример 2.1.2 *Пусть $f : X \to Y$, $A \subset X$, $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ и $f(x) = x^2$. Тогда*

$$f(A) = \{0, 1, 4\},$$
$$f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\},\ f^{-1}(\{1, 4\}) = \{-2, -1, 1, 2\}.$$

Сформулируем некоторые свойства образов и прообразов множеств.

Лемма 2.1.1 *Пусть $f :\ X \to Y$, $A, B \subset X$, $A', B' \subset Y$. Тогда*

1. $(A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$;
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$;
4. $(A' \subset B') \Rightarrow (f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B'))$;
5. $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$;
6. $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$;
7. $(A' \subset B') \Rightarrow f^{-1}(B' \setminus A') = f^{-1}(B') \setminus f^{-1}(A')$;
8. $f^{-1}(Y \setminus A') = X \setminus f^{-1}(A')$.

Доказательство леммы остается в качестве упражнения. Обратите внимание на отличие свойств 2 и 3.

2.2 Сюръекция, инъекция и биекция

Определение 2.2.1 *Отображение $f : X \to Y$ называется инъекцией, или инъективным, если*

$$(x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))\ \ \forall x_1, x_2 \in X.$$

Пример 2.2.1 *Функция $f(x) = x^2 : (-\infty, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$ не является инъекцией, так как $f(-x) = f(x)$. Если же рассмотреть $f(x) = x^2 : [0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$, то данная функция бюдет инъекцией.*

Определение 2.2.2 *Отображение $f : X \to Y$ называется сюръекцией или сюръективным, если $E(f) = Y$.*

Пример 2.2.2 *Функция $f(x) = x^2 : (-\infty, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$ не является сюръекцией, так как она не может принимать отрицательные значения. Если же рассмотреть $f(x) = x^2 : (-\infty, +\infty) \to [0, +\infty)$, то данная функция бюдет сюръекцией.*

Определение 2.2.3 *Отображение $f : X \to Y$ называется биекцией, или взаимно однозначным соответствием, если f одновременно как инъекция, так и сюръекция.*

Пример 2.2.3 *Функция $f(x) = x^2 : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ является биекцией.*

Определение 2.2.4 *Пусть $f : X \to Y$ – биекция. Тогда определим отображение $f^{-1}(y) : Y \to X$ по правилу:*

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x).$$

Это отображение называется обратным к отображению $f(x)$.

Пример 2.2.4 *Как показано выше, функция $f(x) = x^2 : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ является биекцией. Обратное отображение определяется по правилу $x = \sqrt{y}$.*

Теорема 2.2.1 *Пусть $f : X \to Y$ – биекция и $f^{-1}(y)$ – обратное отображение к отображению $f(x)$. Тогда $f(f^{-1}(y)) = y$ и $f^{-1}(f(x)) = x$.*
Доказательство. *Данная теорема является прямым следствием определений.* □

Богатейший источник отображений дает следующее определение.

Определение 2.2.5 *Пусть $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$. Тогда определено отображение $g(f(x)) : X \to Z$, действующее как*

$$x \in X \Rightarrow y = f(x) \in Y \Rightarrow g(y) \in Z.$$

Это отображение называется композицией отображений $g(y)$ и $f(x)$ или сложным отображением.

Замечание 2.2.1 *Композицию бывает удобно обозначать следующим образом:*

$$g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

Так как на практике довольно часто используется композиция не двух, а большего числа функций, важно сформулировать следующее утверждение.

Лемма 2.2.1 *Композиция отображений обладает свойством ассоциативности, то есть если $f : W \to Q$, $g : V \to W$, $h : U \to V$, то*

$$((f \circ g) \circ h)(u) = (f \circ (g \circ h))(u).$$

Доказательство. *С одной стороны,*

$$\forall u \in U \Rightarrow ((f \circ g) \circ h)(u) = (f \circ g)(h(u)) = f(g(h(u))).$$

С другой стороны,

$$\forall u \in U \Rightarrow (f \circ (g \circ h))(u) = f((g \circ h)(u)) = f(g(h(u))),$$

что завершает доказательство. □

Говоря о функции, часто требуется рассматривать ее график. Ниже приводится четкое определение этого понятия.

Определение 2.2.6 *Графиком функции $f : X \to Y$ называется множество*

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}.$$

2.3 Контрольные вопросы и задачи

1. Пусть $f : X \to Y$, $A, B \subset X$. Приведите пример когда $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$. Может ли быть $f^{-1}(A \cap B) \neq f^{-1}(A) \cap f(B)$?

2. Приведите пример биекции между двумя отрезками множества вещественных чисел.

3. Приведите пример биекции между $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и множеством $(-\infty, +\infty)$.

4. Приведите пример а) инъекции; б) сюръекции; в*)биекции между отрезком $[0, 1]$ и интервалом $(0, 1)$.

3 Числовые множества и их свойства

3.1 Система аксиом множества вещественных чисел

В этом пункте дается аксиоматическое построение множества вещественных чисел.

Определение 3.1.1 *Множество $\mathbb{R}$ называется множеством действительных (вещественных) чисел, а его элементы действительными (вещественными) числами, если справедливы следующие условия, называемые аксиомами вещественных чисел:*

I Аксиомы сложения.

Определено отображение $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, называемое операцией сложения, сопоставляющее каждой упорядоченной паре (x, y) из $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ элемент $x + y \in \mathbb{R}$, называемый суммой x и y, обладающее свойствами:

(a) Операция $+$ коммутативна, то есть для любых $x, y \in \mathbb{R}$

$$x + y = y + x.$$

(b) Операция $+$ ассоциативна, то есть для любых $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

(c) Существует нейтральный элемент $0 \in \mathbb{R}$ (называемый нулем), такой, что для любого $x \in \mathbb{R}$

$$x + 0 = x.$$

(d) Для каждого элемента $x \in \mathbb{R}$ существует противоположный элемент $-x$ такой, что

$$x + (-x) = 0.$$

II Аксиомы умножения.

Определено отображение $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, называемое операцией умножения, сопоставляющее каждой упорядоченной паре (x, y) из $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ элемент $x \cdot y \in \mathbb{R}$, называемый произведением элементов x и y, обладающее свойствами:

(a) Операция $\cdot$ коммутативна, то есть для любых $x, y \in \mathbb{R}$

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

(b) Операция $\cdot$ ассоциативна, то есть для любых $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

(c) Существует нейтральный элемент $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (называемый единицей), такой, что для любого $x \in \mathbb{R}$

$$x \cdot 1 = x.$$

(d) Для каждого элемента $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ существует обратный элемент x^{-1} такой, что
$$x \cdot x^{-1} = 1.$$

III Связь сложения и умножения.

Умножение дистрибутивно по отношению к сложению, то есть $\forall x, y, z, \in \mathbb{R}$
$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

IV Аксиомы порядка.

Между элементами $\mathbb{R}$ введено отношение $\leqslant$, то есть для элементов $x, y \in \mathbb{R}$ установлено: справедливо $x \leqslant y$, или нет. При этом выполняются следующие условия:

(a) $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \leqslant x$.

(b) Если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$.

(c) Если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$.

(d) Для любых двух элементов $x, y \in \mathbb{R}$ либо $x \leqslant y$, либо $y \leqslant x$.

V Связь сложения и порядка.

Если $x, y, z \in \mathbb{R}$, то из $x \leqslant y$ следует, что $x + z \leqslant y + z$.

VI Связь умножения и порядка.

Если $x, y \in \mathbb{R}$ и $0 \leqslant x$, $0 \leqslant y$, то $0 \leqslant x \cdot y$.

VII Аксиома непрерывности.

Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}$, причем $X \neq \varnothing$ и $Y \neq \varnothing$. Кроме того, пусть $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y$ выполняется $x \leqslant y$. Тогда найдется $c \in \mathbb{R}$ такое, что $x \leqslant c \leqslant y$.

3.2 Следствия из аксиом

Ниже установлены различные свойства вещественных чисел и операций над ними, хорошо известные из школы.

I Следствия аксиом сложения.

Лемма 3.2.1 *В множестве $\mathbb{R}$ ноль единственен.*

Доказательство. Пусть 0_1 и 0_2 – нули в $\mathbb{R}$. Тогда, используя аксиому I(a) и определение нуля, получается

$$0_1 \overset{\text{I(c)}}{=} 0_1 + 0_2 \overset{\text{I(a)}}{=} 0_2 + 0_1 \overset{\text{I(c)}}{=} 0_2.$$

□

Лемма 3.2.2 *В множестве $\mathbb{R}$ каждый элемент имеет единственный противоположный.*

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 противоположные к $x \in \mathbb{R}$. Тогда,

$$x_1 \overset{\text{I(c)}}{=} x_1 + 0 \overset{\text{I(d)}}{=} x_1 + (x + x_2) \overset{\text{I(b)}}{=} (x_1 + x) + x_2 \overset{\text{I(d)}}{=} 0 + x_2 \overset{\text{I(a)}}{=} x_2 + 0 \overset{\text{I(c)}}{=} x_2$$

□

Лемма 3.2.3 *В множестве $\mathbb{R}$ уравнение $x + a = b$ имеет единственное решение $x = b + (-a)$.*

Доказательство. Прибавляя к обеим частям равенства $-a$ (проследите использование аксиом самостоятельно), получается

$$(x + a + (-a) = b + (-a)) \Leftrightarrow (x + 0 = b + (-a)) \Leftrightarrow x = b + (-a).$$

Единственность следует из единственности противоположного элемента.
□

II Следствия аксиом умножения.

Лемма 3.2.4 *В множестве $\mathbb{R}$ единица единственна.*

Лемма 3.2.5 *В множестве $\mathbb{R} \setminus 0$ каждый элемент имеет единственный обратный.*

Лемма 3.2.6 *В множестве $\mathbb{R}$ уравнение $a \cdot x = b$ при $a \neq 0$ имеет единственное решение $x = b \cdot a^{-1}$.*

Доказательство. Все эти леммы доказываются аналогично леммам предыдущего пункта и их доказательство предлагается в качестве упражнения. □

III Следствия аксиом связи сложения и умножения.

Лемма 3.2.7 *Для любого* $x \in \mathbb{R}$ *выполняется*

$$x \cdot 0 = 0.$$

Доказательство.

$$(x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0)) \Leftrightarrow (x \cdot 0 = x \cdot 0 + x \cdot 0) \Leftrightarrow$$

$$(x \cdot 0 + (-x \cdot 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0 + (-x \cdot 0)) \Leftrightarrow 0 = x \cdot 0$$

□

Следствие 3.2.1 $(x \cdot y = 0) \Leftrightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$.

Доказательство. Докажите самостоятельно. □

Лемма 3.2.8 *Для любого* $x \in \mathbb{R}$ *выполняется*

$$-x = (-1) \cdot x.$$

Доказательство.

$$x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = 0,$$

а значит, в силу единственности противоположного элемента, $-x = (-1) \cdot x$. □

Следствие 3.2.2 *Для любого* $x \in \mathbb{R}$ *выполняется*

$$(-1) \cdot (-x) = x.$$

Доказательство. Докажите самостоятельно. □

Следствие 3.2.3 *Для любого* $x \in \mathbb{R}$ *выполняется*

$$(-x) \cdot (-x) = x \cdot x.$$

Доказательство. $(-x) \cdot (-x) = (-1) \cdot x \cdot (-x) = x \cdot (-1) \cdot (-x) = x \cdot x$. □

IV Следствия аксиом порядка.

Отношение $x \leqslant y$ на практике часто записывают, как $y \geqslant x$. При этом условие, что $x \leqslant y$ и $x \neq y$ записывают, как $x < y$ или $y > x$. Неравенства $\geqslant$ и $\leqslant$ называют нестрогими, а неравенства $<$ и $>$ строгими. Отсюда сразу вытекает нижеуказанное следствие.

Следствие 3.2.4 *Для любых $x, y \in \mathbb{R}$ всегда имеет место ровно одно из соотношений:*

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y.$$

Лемма 3.2.9 *Для любых чисел $x, y, z \in \mathbb{R}$ выполняется*

$$(x < y) \wedge (y \leqslant z) \Rightarrow (x < z),$$

$$(x \leqslant y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z).$$

Доказательство. Первое утверждение. Из аксиомы транзитивности IV(c) получаем, что

$$(x < y) \wedge (y \leqslant z) \Rightarrow (x \leqslant z).$$

Покажем, что $x \neq z$. От противного, если $x = z$, то

$$(x < y) \wedge (y \leqslant z) \Leftrightarrow (z < y) \wedge (y \leqslant z) \Leftrightarrow$$

$$(z \leqslant y) \wedge (y \leqslant z) \wedge (z \neq y) \Leftrightarrow (z = y) \wedge (z \neq y).$$

Второе утверждение доказывается аналогично. □

V Следствия аксиом связи порядка со сложением и умножением.

Лемма 3.2.10 *Для любых чисел $x, y, z, k \in \mathbb{R}$ справедливо*

$$(x < y) \Rightarrow (x + z) < (y + z),$$

$$(0 < x) \Rightarrow (-x < 0),$$

$$(x \leqslant y) \wedge (z \leqslant k) \Rightarrow (x + z) \leqslant (y + k),$$

$$(x < y) \wedge (z \leqslant k) \Rightarrow (x + z) < (y + k),$$

$$(0 < x) \wedge (0 < y) \Rightarrow (0 < xy),$$

$$(0 > x) \wedge (0 > y) \Rightarrow (0 < xy),$$

$$(0 > x) \wedge (0 < y) \Rightarrow (0 > xy),$$

$$(x < y) \wedge (z > 0) \Rightarrow (xz < yz),$$

$$(x < y) \wedge (z < 0) \Rightarrow (xz > yz).$$

Доказательство. Эти свойства предлагается доказать самостоятельно. □

Лемма 3.2.11 $0 < 1$.

Доказательство. Согласно аксиомам, $0 \neq 1$. Предположим, что $1 < 0$, тогда

$$(1 < 0) \wedge (1 < 0) \Rightarrow (1 \cdot 1 > 0) \Rightarrow (1 > 0).$$

Так как одновременно не может выполняться $1 < 0$ и $1 > 0$, получается противоречие. □

Определение 3.2.1 *По традиции числа, которые больше нуля, называются положительными, а которые меньше нуля – отрицательными.*

Замечание 3.2.1 *Множество вещественных чисел удобно изображать в виде числовой прямой, а сами числа – точками на этой прямой. Поэтому числа часто еще называют точками.*

3.3 Расширение множества вещественных чисел

Определение 3.3.1 *Множество* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *называется расширенным множеством вещественных чисел, а символы* $-\infty, +\infty$ *– минус и плюс бесконечностями соответственно.*

С введенными элементами можно совершать некоторые операции, а именно

$$x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty,\ x \in \mathbb{R},$$
$$x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty,\ x \in \mathbb{R},$$
$$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = +\infty,\ x > 0,$$
$$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty,\ x < 0,$$
$$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty,\ x > 0,$$
$$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = +\infty,\ x < 0,$$
$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty,$$
$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty,$$
$$(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty,$$
$$(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Кроме того, устанавливается, что

$$-\infty < x < +\infty,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Замечание 3.3.1 *Если не важен знак бесконечности, то пишут* ∞.

Выражениям $(+\infty)+(-\infty)$, $(+\infty)-(+\infty)$, $(-\infty)-(-\infty)$, $0\cdot(\pm\infty)$, $(\pm\infty)\cdot 0$ не приписывается никакого значения. Такие выражения называются неопределенностями. Кроме данных неопределенностей, в дальнейшем встречаются неопределенности вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^∞, ∞^0, 0^∞.

3.4 Натуральные числа

Всем известно, что числа вида 1, (1+1), ((1+1)+1) и так далее обозначают $1, 2, 3$ и так далее соответственно. Продолжение какого-то процесса далеко не всегда однозначно, поэтому слова «и так далее» нуждаются в пояснении.

Определение 3.4.1 *Множество* $X\subset\mathbb{R}$ *называется индуктивным, если*

$$\forall x\in X \Rightarrow (x+1)\in X.$$

Лемма 3.4.1 *Пересечение* $\bigcap\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ *любого семейства* X_α *индуктивных множеств, если оно не пусто, является индуктивным множеством.*

Доказательство. Действительно,

$$\left(x\in\bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha\right)\Rightarrow (x\in X_\alpha, \forall\alpha\in A)\Rightarrow$$

$$((x+1)\in X_\alpha, \forall\alpha\in A)\Rightarrow\left((x+1)\in\bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha\right).$$

□

Теперь можно дать определение множеству натуральных чисел.

Определение 3.4.2 *Множеством натуральных чисел называют пересечение всех индуктивных множеств, содержащих число* 1 *и обозначают* $\mathbb{N}$.

3.5 Принцип математической индукции

Из определения множества натуральных чисел сразу следует важный принцип, называемый принципом математической индукции. Именно он часто обосновывает слова «и так далее».

Теорема 3.5.1 (Принцип математической индукции) *Если множество* $X\subset\mathbb{N}$ *таково, что* $1\in X$ *и* $\forall x\in X\Rightarrow(x+1)\in X$, *то* $X=\mathbb{N}$.

Доказательство. Действительно, X – индуктивное множество. Так как $X \subset \mathbb{N}$, а $\mathbb{N}$ – наименьшее индуктивное множество, то $X = \mathbb{N}$. $\square$

С помощью принципа математической индукции можно доказать, например, что сумма и произведение натуральных чисел есть число натуральное, а также другие известные из школы свойства. Данный курс не предполагает подробного изучения этих вопросов.

Ниже показано, как на практике часто применяется (и оформляется) метод математической индукции.

Лемма 3.5.1 (Неравенство Бернулли)

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx, \quad x > -1, \quad n \in \mathbb{N}$$

Доказательство. База индукции. Пусть $n = 1$, тогда:

$$1 + x \geqslant 1 + x.$$

Пусть при $n = k$ выполнено

$$(1+x)^k \geqslant 1 + kx.$$

Покажем, что при $n = k+1$ выполняется

$$(1+x)^{k+1} \geqslant 1 + (k+1)x.$$

Действительно,

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)(1+x)^k \geqslant (1+x)(1+kx) =$$

$$= 1 + kx + x + kx^2 = 1 + (k+1) \cdot x + kx^2.$$

Так как $k \in \mathbb{N}$, то $kx^2 > 0$, а значит:

$$1 + (k+1)x + kx^2 > 1 + (k+1)x.$$

$\square$

3.6 Целые, рациональные и иррациональные числа

Определение 3.6.1 *Множеством целых чисел называется объединение множества натуральных чисел, множества чисел, противоположных натуральным, и нуля. Множество целых чисел обозначается $\mathbb{Z}$.*

Как было отмечено, сумма и произведение натуральных чисел есть число натуральное, поэтому сумма и произведение целых чисел есть число целое.

Определение 3.6.2 *Числа вида $m \cdot n^{-1}$, где $m, n \in \mathbb{Z}$ называются рациональными и обозначаются $\mathbb{Q}$.*

Как известно, число $m \cdot n^{-1}$ записывают в виде отношения $\frac{m}{n}$, которое называется рациональной дробью. Правила действий с рациональными дробями, подробно изученные в школе, сразу вытекают из соответствующих свойств и аксиом вещественных чисел.

Пример 3.6.1 *Доказать, что*

$$\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}.$$

Действительно,

$$\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \left(m_1 \cdot n_1^{-1}\right) \cdot \left(m_2 \cdot n_2^{-1}\right) = (m_1 \cdot m_2) \cdot (n_1 \cdot n_2)^{-1} = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}.$$

Замечание 3.6.1 *Множество рациональных чисел удовлетворяет первым шести аксиомам множества вещественных чисел. Однако именно седьмая аксиома, аксиома непрерывности, устанавливает, что кроме рациональных чисел существуют так называемые иррациональные.*

Определение 3.6.3 *Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются иррациональными и обозначаются $\mathbb{I}$.*

Ниже показано, что существует положительное действительное число $s \in \mathbb{R}$, квадрат которого равен 2 и что $s \notin \mathbb{Q}$, что доказывает существование иррациональных чисел.

Доказательство. Пусть $X = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$ и $Y = \{y \in \mathbb{R} : y^2 > 2\}$. Тогда $1 \in X, 2 \in Y$, и X, Y – непустые множества. Так как, для $x > 0$ и $y > 0$ справедливо

$$(x < y) \Leftrightarrow (x^2 < y^2),$$

то $\forall x \in X,\ \forall y \in Y \Rightarrow (x < y)$. По аксиоме полноты $\exists s \in \mathbb{R} :\ \forall x \in X,\ \forall y \in Y,\ x \leqslant s \leqslant y$. Достаточно покзаать, что $s^2 = 2$. Если бы было $s^2 < 2$, то, например, квадрат числа $s + \frac{2-s^2}{3s}$, большего чем s, был бы меньше 2. Ведь $1 \in X \Rightarrow 1^2 \leqslant s^2 < 2$ и $0 < \Delta = 2 - s^2 < 1$, значит

$$\left(s + \frac{\Delta}{3s}\right)^2 = s^2 + 2 \cdot \frac{\Delta}{3} + \left(\frac{\Delta}{3s}\right)^2 < s^2 + 3 \cdot \frac{\Delta}{3} = s^2 + \Delta = 2.$$

Следовательно, $\left(s + \frac{\Delta}{3s}\right) \in X$, что несовместимо с неравенством $x \leqslant s\ \forall x \in X$.

Случай $2 < s^2$ аналогичен, достаточно рассмотреть квадрат числа $s - \frac{s^2-2}{3s}$.

Таким образом, остается единственная возможность $s^2 = 2$. Осталось показать, что $s \notin \mathbb{Q}$. Пусть $s \in \mathbb{Q}$ и $\frac{m}{n}$ – несократимое представление s. Тогда $m^2 = 2n^2$, а следовательно m^2, а значит и m делятся на 2 $\Rightarrow m = 2k$, тогда $2k^2 = n^2$ и по той же причине n должно делиться на 2, что противоречит несократимости дроби $\frac{m}{n}$. $\square$

3.7 Бином Ньютона

Определение 3.7.1 *Факториалом числа $n \in \mathbb{N}$ называют число, равное*

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$$

и обозначают $n!$.

Так, например, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Для удобства полагают, что $0! = 1$.

Замечание 3.7.1 *Полезно заметить, что $n! = n \cdot (n-1)!$ при $n \geqslant 1$.*

Определение 3.7.2 *Величины*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},\ k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

называют биномиальными коэффициентами.

Ниже приведены некоторые свойства биномиальных коэффициентов.

Лемма 3.7.1 *Справедливы следующие свойства:*

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$.
2. $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.
3. $C_n^k = C_n^{n-k}$.
4. $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

Доказательство. Все свойства сразу следуют из определения C_n^k. Ниже доказано последнее.

$$C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = C_{n+1}^{k+1}.$$

Остальные свойства предлагается доказать самостоятельно. $\square$

Теорема 3.7.1 (Бином Ньютона) *Для $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство:*

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n.$$

Доказательство. Доказательство проводится по индукции.
База индукции выполняется, так как

$$(a+b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b = a + b.$$

Пусть при $n = m$ выполнено равенство

$$(a+b)^m = C_m^0 a^m + C_m^1 a^{m-1} b + \ldots + C_m^k a^{m-k} b^k + \ldots + C_m^m b^m.$$

Достаточно показать, что при $n = m+1$ справедливо равенство

$$(a+b)^{m+1} = C_{m+1}^0 a^{m+1} + C_{m+1}^1 a^m b + \ldots + C_{m+1}^k a^{m+1-k} b^k + \ldots + C_{m+1}^{m+1} b^{m+1}.$$

Доказательство.

$$\begin{gathered}
(a+b)^{m+1} = (a+b)^m (a+b) = \\
= (C_m^0 a^m + C_m^1 a^{m-1} b + \ldots + C_m^k a^{m-k} b^k + \ldots + C_m^m b^m)(a+b) = \\
= C_m^0 a^{m+1} + C_m^1 a^m b + C_m^2 a^{m-1} b^2 + \ldots + C_m^k a^{m-k+1} b^k + \ldots + C_m^m a b^m + \\
+ C_m^0 a^m b + C_m^1 a^{m-1} b^2 + \ldots + C_m^{k-1} a^{m-k+1} b^k + \ldots + C_m^{m-1} a b^m + C_m^m b^{m+1} = \\
= C_m^0 a^{m+1} + (C_m^1 + C_m^0) a^m b + (C_m^2 + C_m^1) a^{m-1} b^2 + \ldots + (C_m^k + C_m^{m-k+1}) a^{m-k+1} b^k + \\
+ \ldots + (C_m^m + C_m^{m-1}) a b^m + C_m^m b^{m+1} = \\
= C_{m+1}^0 a^{m+1} + C_{m+1}^1 a^m b + C_{m+1}^2 a^{m-1} b^2 + \ldots + C_{m+1}^k a^{m+1-k} b^k + \ldots + C_{m+1}^{m+1} b^{m+1}.
\end{gathered}$$

□

3.8 Промежутки числовой прямой. Окрестности

Определение 3.8.1 *Множество*

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$$

называется отрезком.

Определение 3.8.2 *Множество*

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

называется интервалом.

Определение 3.8.3 *Множества*

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}, \quad (a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$$

называются полуинтервалами.

Определение 3.8.4 *Множества*

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a\}, \quad (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

и

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\}, \quad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$

называются лучами.

Определение 3.8.5 *Окрестностью точки $x_0 \in \mathbb{R}$ называется произвольный интервал, содержащий x_0.*

Окрестность точки x_0 обозначается заглавными латинскими буквами, например $U(x_0), V(x_0)$.

Определение 3.8.6 *Эпсилон-окрестностью (или ε-окрестностью) точки $x_0 \in \mathbb{R}$ называется интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$.*

ε-окрестность точки x_0 обозначается заглавными латинскими буквами с индексом ε, например $U_\varepsilon(x_0), V_\varepsilon(x_0)$. Для элементов $\pm\infty, \infty$ понятия окрестности вводится отдельно.

Определение 3.8.7 *Окрестностью элемента $+\infty$ называется произвольное множество вида*

$$U(+\infty) = (a, +\infty).$$

Определение 3.8.8 *Окрестностью элемента $-\infty$ называется произвольное множество вида*

$$U(-\infty) = (-\infty, a).$$

Определение 3.8.9 *Окрестностью элемента ∞ называется произвольное множество вида*

$$U(\infty) = (-\infty, a); (b, +\infty), \ a < b.$$

Кроме того, вводится понятие ε-окрестности ($\varepsilon > 0$).

Определение 3.8.10 *ε-окрестностью элемента $+\infty$ называется множество*

$$U_\varepsilon(+\infty) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right).$$

Определение 3.8.11 *ε-окрестностью элемента $-\infty$ называется множество вида*

$$U(-\infty) = \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Определение 3.8.12 *ε-окрестностью элемента ∞ называется множество вида*

$$U(\infty) = \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right); \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right).$$

Полезно пояснить, почему для универсальности берется величина $\frac{1}{\varepsilon}$. Рассматривая $x_0 \in \mathbb{R}$, при уменьшении ε, окрестность $U_\varepsilon(x_0)$ тоже уменьшается. Аналогично, при уменьшении ε величина $\frac{1}{\varepsilon}$ увеличивается, а значит окрестности $U_\varepsilon(+\infty), U_\varepsilon(-\infty), U_\varepsilon(\infty)$ уменьшаются.

Определение 3.8.13 *Проколотой окрестностью точки $x_0 \in \mathbb{R}$ называется множество $U(x_0) \setminus \{x_0\}$, то есть произвольная окрестность точки x_0 без самой этой точки. Аналогично, проколотой ε-окрестностью точки x_0 называется $U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$.*

Проколотая окрестность и ε-окрестность обозначается, как $\overset{o}{V}(x_0), \overset{o}{U}_\varepsilon(x_0)$.

3.9 Модуль вещественного числа

Определение 3.9.1 *Модулем вещественного числа x называется число, равное x, если оно положительно или равно нулю, равное $-x$, если число x отрицательно, то есть*

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Теорема 3.9.1 *Справедливы следующие основные свойства модуля:*

1. $|x| \geqslant 0$, *причем* $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

2. $|x| = |-x|$.

3. $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.

4. $|x| = |y| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = -y \end{array}\right.$.

5. $|xy| = |x||y|$.

6. *$\frac{|x|}{|y|} = \left|\frac{x}{y}\right|$.*
7. *$|x+y| \leqslant |x| + |y|$ (неравенство треугольника).*
8. *$|x-y| \geqslant ||x| - |y||$.*

Доказательство. Свойства 1 - 6 сразу следуют из определения и остаются в качестве упражнения.
7. Для доказательства этого свойства можно возведением в квадрат перейти к равносильному верному неравенству $2xy \leqslant 2|x||y|$.
8. Для доказательства данного пункта удобно воспользоваться свойством 7.

$$|x| = |x - y + y| \leqslant |x - y| + |y| \Rightarrow |x - y| \geqslant |x| - |y|.$$

Поменяв числа x и y местами, получится

$$|x - y| \geqslant |y| - |x|.$$

Эти неравенства и означают, что

$$|a - b| \geqslant ||a| - |b||.$$

□

3.10 Контрольные вопросы и задачи

1. Докажите, что число $\sqrt{5}$ является иррациональным.
2. Проверьте, что $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ – индуктивные множества.
3. Докажите свойства модуля 1 – 6.
4. Проверьте, что рациональные числа $\mathbb{Q}$ удовлетворяют всем аксиомам действительных чисел, кроме аксиомы полноты.
5. Покажите, что $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$.
6. Удовлетворяет ли множество $[0, 1]$ аксиомам множества вещественных чисел?

4 Ограниченность числовых множеств. Супремум и инфимум. Принцип Архимеда

4.1 Ограниченность числовых множеств

Определение 4.1.1 *Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным сверху, если*

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in X \Rightarrow x \leqslant M.$$

Число M называется верхней границей для X.
Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным снизу, если

$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in X \Rightarrow x \geqslant m.$$

Число m называется нижней границей для X.

Определение 4.1.2 *Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным, если*

$$\exists M, m \in \mathbb{R} : \forall x \in X \Rightarrow m \leqslant x \leqslant M.$$

Пример 4.1.1 *Пусть $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x < 1\}$. Ясно, что это множество ограничено как сверху, например, числом 1, так и снизу, например, числом 0.*

Ниже приведена лемма, которая будет часто использоваться в дальнейшем.

Лемма 4.1.1 *Множество $X \subset \mathbb{R}$ ограничено тогда и только тогда, когда*

$$\exists C > 0, C \in \mathbb{R} : \forall x \in X \Rightarrow |x| \leqslant C.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть множество X ограничено, то есть

$$\exists M, m \in \mathbb{R} : \forall x \in X \Rightarrow m \leqslant x \leqslant M.$$

Положив $C = \max\{|m|, |M|\}$, получается

$$\forall x \in X \Rightarrow -C \leqslant x \leqslant C.$$

Достаточность очевидна, так как можно положить $m = -C$, $M = C$. $\square$

Определение 4.1.3 *Элемент $M \in X \subset \mathbb{R}$ называется максимальным (наибольшим) элементом множества X, если*

$$\forall x \in X \Rightarrow x \leqslant M.$$

При этом пишут, что $M = \max X$.
Элемент $m \in X \subset \mathbb{R}$ называется минимальным (наименьшим) элементом множества X, если

$$\forall x \in X \Rightarrow x \geqslant m.$$

При этом пишут, что $M = \min X$.

Пример 4.1.2 *Пусть $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x < 1\}$. Легко понять, что $\min A = 0$. Однако, множество A не имеет максимального элемента.*

Определение 4.1.4 *Пусть $X \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху и не пусто. Наименьший элемент множества верхних границ называется супремумом (или точной верхней гранью) множества X и обозначается $\sup X$. В свою очередь наибольший элемент множества нижних границ называется инфимумом (или точной нижней гранью) множества X и обозначается $\inf X$.*

Пример 4.1.3 *Пусть $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x < 1\}$. Множество его верхних границ – множество $[1, +\infty)$, а значит $\sup A = 1$. Множество нижних границ $(-\infty, 0]$, а значит $\inf A = 0$.*

В отличие от максимума и минимума, супремум и инфимум всегда существуют, что показывают следующие утверждения.

Теорема 4.1.1 (Принцип точной грани) *Пусть $X \subset \mathbb{R}$, не пусто и ограничено сверху (снизу). Тогда существует единственный $\sup X$ $(\inf X)$.*
Доказательство. *Пусть множество X ограничено сверху. Тогда множество его верхних границ B не пусто. В силу определения верхней границы,*

$$\forall b \in B \ \forall x \in X \Rightarrow x \leqslant b.$$

Согласно аксиоме непрерывности

$$\exists c : x \leqslant c \leqslant b.$$

Ясно, что $c \in B$. С другой стороны, в силу неравенства $c \leqslant b$ для всех $b \in B$, получается, что $c = \min B$. Тем самым, $c = \sup X$. доказательство единственности остается в качестве упражнения. Случай, когда множество X ограничено снизу, рассматривается аналогично. □

Замечание 4.1.1 *Если множество не ограничено сверху (снизу), то полагают $\sup X = +\infty$ $(\inf X = -\infty)$.*

Следствие 4.1.2 *У любого непустого множества $X \subset \mathbb{R}$ существуют супремум и инфимум (может быть равные $\pm\infty$).*

Установим связь между максимумом (минимумом) и супремумом (инфимумом).

Лемма 4.1.2 *Пусть существует $\max X$, тогда $\sup X = \max X$. Аналогично, если существует $\min X$, то $\inf X = \min X$.*

Доказательство. Рассмотрим первое утверждение. Пусть $M = \max X$, тогда M – верхняя граница множества X. Кроме того, M – наименьшая верхняя граница, так как если $M' < M$ и $M \in X$, то M' не верхняя граница. Значит, $M = \sup X$. □

В теории часто бывает удобно использовать следующие равносильные определения супремума и инфимума.

Лемма 4.1.3 *Для супремума и инфимума можно дать следующие эквивалентные определения:*

$$s = \sup X \Leftrightarrow (\forall x \in X \Rightarrow s \geqslant x) \wedge (\forall s' < s \ \exists x \in X : x > s'), \tag{1}$$

$$i = \inf X \Leftrightarrow (\forall x \in X \Rightarrow i \leqslant x) \wedge (\forall i' > i \ \exists x \in X : x < i'). \tag{2}$$

Доказательство. Рассмотрим (1). Ясно, что супремум удовлетворяет правой части выражения (1). Обратно, утверждение $(\forall x \in X \Rightarrow s \geqslant x)$ гарантирует, что s – верхняя граница для X, а утверждение $(\forall s' < s \ \exists x \in X : x > s')$, что s – наименьшая из верхних границ.
Второй пункт доказывается аналогично. □

4.2 Принцип Архимеда

С помощью принципа точной грани можно доказать важную теорему.

Теорема 4.2.1 *Множество целых чисел $\mathbb{Z}$ не ограничено ни сверху, ни снизу.*

Доказательство. От противного, пусть множество $\mathbb{Z}$ ограничено сверху. Тогда, согласно теореме 4.1.1, у множества $\mathbb{Z}$ существует конечная верхняя грань

$$M = \sup \mathbb{Z} < +\infty.$$

Поскольку $M - 1 < M$, то по свойству верхней грани 4.1.3, $\exists k \in \mathbb{Z} : \ M - 1 < k \leqslant M$, а из левого неравенства получим $M < k + 1$. Но $(k+1) \in \mathbb{Z}$ в силу определения множества $\mathbb{Z}$. Это противоречит ограниченности $\mathbb{Z}$ сверху.
Аналогично доказывается неограниченность снизу. □

Следствие 4.2.2 *Множество $\mathbb{N}$ не ограничено сверху.*

Теорема 4.2.3 (Принцип Архимеда) *Пусть $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Для любого $y \in \mathbb{R}$ существует единственное целое $k \in \mathbb{Z}$ такое, что*

$$(k-1)x \leqslant y < kx.$$

Доказательство. Пусть $T = \{l \in \mathbb{Z} : \frac{y}{x} < l\}$. Это множество не пусто, так как множество $\mathbb{Z}$ не ограничено сверху. Кроме того, T ограничено снизу. Значит, по принципу точной грани у него есть $m = \inf T \in \mathbb{R}$. По свойству нижней грани, $\exists k \in \mathbb{Z} : \ m \leqslant k < m + 1$. Тогда $k = \min T$. Значит,

$$k - 1 \leqslant \frac{y}{x} < k$$

и в силу положительности x мы получаем требуемое. □

Следствие 4.2.4 *Для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число n такое, что $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.*

Доказательство. Достаточно положить в принципе Архимеда $y = 1,\ x = \varepsilon$. □

Следствие 4.2.5 *Пусть $x \in \mathbb{R}$. Если $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow 0 \leqslant x < \varepsilon$, то $x = 0$.*

Доказательство. Пусть $x > 0$. Тогда, по предыдущему следствию, найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\frac{1}{n} < x$. Но тогда положив $\varepsilon = \frac{1}{n}$ получим, что $x > \varepsilon$, что противоречит условию. □

Следствие 4.2.6 *Для любого числа $x \in \mathbb{R}$ существует единственное $k \in \mathbb{Z}$ такое, что $k \leqslant x < k + 1$.*

Доказательство. Это сразу следует из принципа Архимеда, если положить в нем $x = 1$. □

Определение 4.2.1 *Указанное число k называется целой частью числа x и обозначается $[x]$. Величина $\{x\} = x - [x]$ называется дробной частью числа x.*

Лемма 4.2.1 (О плотности множества рациональных чисел) *Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Тогда существует $q \in \mathbb{Q}:\ a < q < b$.*

Доказательство. Так как $(b - a) > 0$, то существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\frac{1}{n} < (b - a)$. Положим $q = \frac{[na]+1}{n} \in \mathbb{Q}$, тогда

$$q \leqslant \frac{na + 1}{n} = a + \frac{1}{n} < a + (b - a) = b.$$

С другой стороны,

$$q > \frac{na + 1 - 1}{n} = a,$$

что и завершает доказательство. □

Лемма 4.2.2 (О плотности множества иррациональных чисел) *Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Тогда существует $i \in \mathbb{I}:\ a < i < b$.*

Доказательство. Было доказано, что $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$. Для чисел $a - \sqrt{2} < b - \sqrt{2}$, по только что доказанному, существует $q \in \mathbb{Q}$ такое, что $a - \sqrt{2} < q < b - \sqrt{2}$ или $a < q + \sqrt{2} < b$. Ясно, что число $q + \sqrt{2}$ иррационально. □

4.3 Контрольные вопросы и задачи

1. Покажите, что каждое индуктивное множество не ограничено.

2. Постройте графики функций $f = [x]$, $f = \{x\}$.

3. Существует ли какое-либо иррациональное число, которое больше любого натурального? А меньше любого целого?

4. Изобразите графически характеристические свойства супремума и инфимума.

5. Докажите, что число $q + i$, где $q \in \mathbb{Q}$, $i \in \mathbb{I}$ иррационально.

5 Теорема Кантора. Лемма Бореля-Лебега. Лемма о предельной точке

5.1 Теорема Кантора

Определение 5.1.1 *Пусть $I_n = [a_n, b_n]$, $a_n \leqslant b_n$. Говорят, что система I_n – система вложенных отрезков, если*

$$I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots .$$

Теорема 5.1.1 (Кантора) *Система вложенных отрезков имеет непустое пересечение, т.е.*

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i \neq \varnothing.$$

Кроме того, если $\forall \varepsilon > 0$, найдется отрезок, длина которого меньше ε, то пересечение будет точкой, т.е.

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i = \{a\}.$$

Доказательство. Пусть

$$X = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}, \quad Y = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\},$$

тогда они не пусты, и $\forall i, k \in \mathbb{N} \Rightarrow a_i \leqslant b_k$, то есть левый конец любого отрезка системы не больше, чем правый конец любого отрезка системы. Значит, по аксиоме непрерывности,

$$\exists c : a_i \leqslant c \leqslant b_k \ \ \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

В частности,

$$a_i \leqslant c \leqslant b_i \ \forall i \in \mathbb{N},$$

а значит $\forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow c \in I_i$, то есть

$$c \in \bigcap_{i=1}^{\infty} I_i \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} I_i \neq \varnothing.$$

Осталось доказать вторую часть утверждения. От противного, пусть

$$c_1, c_2 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} I_i, \ c_1 \neq c_2.$$

Предположив, что $c_1 < c_2$, получается, что $a_n \leqslant c_1 < c_2 \leqslant b_n$ или $0 < c_2 - c_1 \leqslant b_n - a_n < \varepsilon$. Согласно следствию 4.2.5 выходит, что $c_2 - c_1 = 0$. Противоречие. □

Замечание 5.1.1 *Условие, что рассматриваются отрезки, важно. Например, для интервалов данная теорема не верна. Пусть $U_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$. Очевидно, что*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \varnothing.$$

Действительно, пусть $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n$. Тогда, согласно следствию 4.2.4, существует $n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x$, а значит $x \notin U_n$. Противоречие.

5.2 Лемма Бореля-Лебега

Определение 5.2.1 *Говорят, что система интервалов U_α покрывает отрезок $[a, b]$, если*

$$\forall x \in [a, b] \ \exists \alpha_0 : x \in U_{\alpha_0}.$$

Лемма 5.2.1 (Бореля - Лебега) *Из любого покрытия отрезка интервалами можно выделить конечное покрытие.*

Доказательство. От противного. Пусть существует покрытие, из которого нельзя выделить конечное покрытие отрезка $I_0 = [a, b]$. Разделим I_0 пополам. Тогда хотя бы одна из полученных частей не допускает конечного покрытия. Назовем ее I_1. Теперь разделим I_1 пополам, и снова хотя бы одна из двух частей не допускает конечного покрытия. Назовем ее I_2. Продолжая это процесс дальше, получим систему вложенных отрезков

$$I_0 \supset I_1 \supset \cdots \supset I_n \supset \dots,$$

причем длина $|I_n|$ отрезка I_n равна

$$|I_n| = \frac{1}{2} \cdot |I_{n-1}| = \frac{b-a}{2^n}$$

По теореме Кантора,

$$\exists c \in \bigcap_{i=0}^{\infty} I_i,$$

значит существует интервал (α, β) из покрытия такой, что $c \in (\alpha, \beta)$. Положим $\varphi = \min(c-\alpha, \beta-c)$. Покажем, что в системе существуют отрезки сколь угодно малой длины. Так как

$$2^n = (1+1)^n = 1 + n + ... > n \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n},$$

то согласно следствию 4.2.4 для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер n, что

$$\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon.$$

Тем самым, так как в системе существуют отрезки длины меньше, чем φ, то интервал (α, β) покрывает их. Это противоречит построению. □

Замечание 5.2.1 *Рассмотрение отрезка существенно. Например, если взять интервал $U = (0,1)$, то интервалы $U_n = (0, 1 - \frac{1}{n})$ образуют покрытие U, из которого нельзя выделить конечного покрытия. Детальная проверка оставляется читателю.*

5.3 Лемма о предельной точке

Определение 5.3.1 *Точка x_0 называется предельной точкой множества E, если для любой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 множество $U(x_0) \cap E$ бесконечно.*

Замечание 5.3.1 *Множество предельных точек множества E будем обозначать E'.*

Пример 5.3.1 *Пусть $E = (0,1]$. Ясно, что $E' = [0,1]$.*

Пример 5.3.2 *Пусть $E = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$. Легко установить, что данное множество имеет лишь одну предельную точку 0, то есть $E' = \{0\}$.*

Примеры выше показывают, что предельная точка для множества E может как принадлежать множеству E, так и не принадлежать.

Определение 5.3.2 *Точка $x_0 \in E$, не являющаяся предельной для множества E, называется изолированной для E.*

Пример 5.3.3 *Все точки множества E примера 5.3.2 являются изолированными.*

Лемма 5.3.1 (О предельной точке) *Любое бесконечное ограниченное подмножество X множества действительных чисел $\mathbb{R}$ имеет хотя бы одну предельную точку.*

Доказательство. От противного. Пусть множество предельных точек X' пусто. Так как X ограничено, то найдется отрезок $[a, b]$ такой, что $X \subset [a, b]$. Достаточно показать, что хотя бы одна точка отрезка является предельной для X. От противного, пусть

$$\forall x \in [a, b]\ \exists U(x) : U(x) \cap E \text{ либо конечно, либо пусто.}$$

Данная система окрестностей $U(x),\ x \in [a, b]$ образует открытое покрытие отрезка $[a, b]$. По лемме Бореля-Лебега из этой системы можно выделить конечное покрытие $U(x_1), \ldots, U(x_n)$. Но тогда

$$E \subset [a, b] \subset \bigcup_{i=i}^{n} U(x_i),$$

где последнее объединение с одной стороны содержит E, с другой стороны

$$\left(\bigcup_{i=i}^{n} U(x_i)\right) \cap E$$

не более чем конечно. Это противоречит бесконечности множества E. □

5.4 Немного о замкнутых множествах

Ниже приведены некоторые факты, касающиеся замкнутых множеств. Более детально они будут изучены в разделе функций многих переменных.

Определение 5.4.1 *Говорят, что множество $E \subset \mathbb{R}$ замкнуто, если оно содержит все свои предельные точки, то есть $E' \subset E$. Пустое множество и все $\mathbb{R}$ считаются замкнутыми (в $\mathbb{R}$) по определению.*

В дальнейшем будет дано другое, эквивалентное определение замкнутому множеству.

Пример 5.4.1 *Отрезок $[a, b]$ является замкнутым множеством. Интервал (a, b) или полуинтервал $[a, b)$ замкнутыми множествами не являются*

Пример 5.4.2 *Любое конечное множество является, очевидно, замкнутым, так как множество его предельных точек пусто.*

Лемма 5.4.1 *Любое непустое ограниченное сверху (снизу) замкнутое множество $E \subset \mathbb{R}$ имеет максимальный (минимальный) элемент.*

Доказательство. Пусть E замкнуто и ограничено сверху. По принципу верхней грани существует $M = \sup E$. Достаточно показать, что $M \in E$. От противного, пусть $M \notin E$ и $U(M) = (\alpha, \beta)$ – окрестность точки M. По определению супремума, если $\varepsilon_1 = M - \alpha$, то

$$\exists x_1 \in E : M - \varepsilon_1 < x_1 \leqslant M.$$

Так как $M \notin E$, то $M - \varepsilon_1 < x_1 < M$. Пусть $\varepsilon_2 = M - x_2$, тогда аналогично

$$\exists x_2 \in E : M - \varepsilon_2 < x_2 < M.$$

Продолжая процесс получается, что пересечение $U(M) \cap E$ бесконечно (оно содержит бесконечное множество $\{x_1, x_2, ...\}$), то есть M – предельная для E. Противоречие. □

Следствие 5.4.1 *Любое конечное множество имеет максимальный и минимальный элементы.*

Доказательство. Ограниченность конечного множество легко доказывается с помощью метода математической индукции, а далее утверждение следует из доказанной выше леммы. □

Следствие 5.4.2 *Во всяком интервале содержится бесконечное число как рациональных, так и иррациональных чисел.*

Доказательство. Пусть в интервале (a, b) лишь конечное число рациональных чисел. Пусть x – наименьшее из них, тогда в интервале (a, x) нет рациональных чисел, что противоречит лемме 4.2.1.
Аналогично доказывается утверждение об иррациональных числах. □

5.5 Мощность множества

Определение 5.5.1 *Говорят, что множества A и B равномощны (или эквивалентны), если существует биекция $A \leftrightarrow B$.*

Иными словами, между элементами равномощных множеств можно установить взаимно однозначное соответствие.

Пример 5.5.1 *Множества* $\mathbb{N}$ *и* $\mathbb{Z}$ *равномощны. Пронумеровать (т.е. сопоставить с натуральным номером) множество* $\mathbb{Z}$ *можно, например, так:*

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \ldots$$

Заметим, что равномощность множеств является отношением эквивалентности (т.е. обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности). Таким образом, все множества разбиваются на (непересекающиеся) классы эквивалентности.

Определение 5.5.2 *Класс эквивалентности, к которому принадлежит множество* A*, называется мощностью множества* A *(а также кардиналом, кардинальным числом) и обозначается* $|A|$ *или* $\operatorname{card} A$.

Замечание 5.5.1 *Мощность множества, содержащего* n *элементов, считают равной* n *и пишут* $|A| = \operatorname{card} A = n$.

Определение 5.5.3 *Множество* A *называется счетным, если оно равномощно множеству* $\mathbb{N}$.

Итак, мы выяснили, что множества $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$ счетны.

Определение 5.5.4 *Множества, мощность которых либо конечна, либо счетна, называются не более чем счетными.*

Опишем некоторые **свойства счетных множеств**:

1. Любое бесконечное множество имеет счетное подмножество.
2. Любое бесконечное подмножество счётного множества счётно.
3. Множество $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ счётно.
4. Множество $\mathbb{Q}$ счётно.
5. Не более чем счетное объединение не более чем счетных множеств не более чем счетно.

Доказательство. 1. Пусть A – бесконечное множество, тогда в нём есть элемент a_1. Множество $A \setminus \{a_1\}$ тоже бесконечное, выберем в нём элемент a_2. Множество $A \setminus \{a_1, a_2\}$ также бесконечно, выберем в нём элемент a_3. Продолжая этот процесс (он не оборвётся в силу бесконечности A), получим счетное множество $B = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, $B \subset A$.

2. Достаточно проверить, что каждое бесконечное подмножество A множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ счётно. Так как A – подмножество множества натуральных чисел, то в нем существует минимальный элемент (оно замкнуто и ограничено снизу). Его мы обозначим a_1 и сопоставим числу 1. Далее, в множестве $A \setminus \{a_1\}$ аналогично имеется минимальный элемент a_2, ему мы сопоставим число 2. Так как A бесконечно, то, по принципу индукции, мы построим инъекцию $f\colon \mathbb{N} \to A$ по правилу $f(n) = a_n$. Заметим, что каждый элемент множества A получит номер, то есть построена биекция $A \leftrightarrow \mathbb{N}$.

3. Расположим элементы $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ в виде бесконечной таблицы. Пронумеруем элементы этой таблицы по диагоналям.

4. Множество $\mathbb{Q}$ является бесконечным подмножеством $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, а значит, счетно.

5. Аналогично п. 3. $\square$

Теорема 5.5.1 (Кантора) *Отрезок* $[0, 1]$ *не счётен.*

Доказательство. Предположим, все элементы отрезка $[0, 1]$ можно пронумеровать. Пусть $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ – произвольная нумерация чисел отрезка $I_0 = [0, 1]$. Выберем отрезок $I_1 \subset I_0$ так, что $a_1 \notin I_1$. Далее, выберем отрезок $I_2 \subset I_1$, что $a_2 \notin I_2$. Продолжая этот процесс, получим систему вложенных отрезков $I_0 \supset I_1 \supset I_1 \supset ... \supset I_n \supset ...$, котораяб по теореме Кантора, имеет непустое пересечение

$$c = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n,$$

при этом $c \neq a_k$ для $\forall k \in \mathbb{N}$, так как иначе c попало бы в I_k. Таким образом, число $c \in [0, 1]$ оказалось непронумерованным. Противоречие. $\square$

Определение 5.5.5 *Мощность множеств, равномощных отрезку* $[0, 1]$, *называется континуумом.*

Следствие 5.5.2 *Отрезок, интервал, полуинтервал, луч,* $\mathbb{R}$ *имеют мощность континуум.*

Доказательство. Докажем, например, что отрезок $[0, 1]$ и полуинтервал $(0, 1]$ равномощны. Биекцию $\varphi : (0, 1] \to [0, 1]$ построим так:

$$\varphi(1) = \frac{1}{2}, \quad \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^2}, \quad ..., \quad \varphi\left(\frac{1}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{k+1}}, ...,$$

остальные точки переводятся в себя.

Для доказательства континуальности $\mathbb{R}$ рассмотрим биекцию $\operatorname{tg} x$: $(0, \pi/2) \to \mathbb{R}$. $\square$

5.6 Контрольные вопросы и задачи

1. Покажите, что из системы отрезков, покрывающей отрезок, не всегда можно выделить конечную систему, покрывающую этот отрезок.

2. Покажите, что из системы отрезков, покрывающих интервал, не всегда можно выделить конечную систему, покрывающую этот интервал.

3. Покажите, что в множестве $\mathbb{Q}$ ни теорема Кантора, ни лемма о предельной точке, ни лемма Бореля-Лебега не верны.

4. Покажите, что любое вещественное число является предельной точкой множества рациональных чисел.

6 Предел последовательности

6.1 Понятие предела последовательности

Определение 6.1.1 *Функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, областью определения которой является множество натуральных чисел, называется последовательностью.*

Обычно последовательности обозначают маленькими латинскими буквами, например $x(n)$, $y(n)$, причем чаще всего аргумент n пишется снизу, то есть x_n, y_n.

Определение 6.1.2 ($\varepsilon - n$ определение предела последовательности) *Число A называется пределом последовательности x_n, если для любого положительного числа ε существует натуральное число n_0, зависящее от ε такое, что какое бы ни взять натуральное число n, большее n_0, будет выполняться неравенство*

$$|x_n - A| < \varepsilon.$$

При этом пишут, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$ или $x_n \longrightarrow A$.

Ниже приведена короткая запись данного определения, которая обычно и будет использоваться в дальнейшем:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - A| < \varepsilon.$$

Замечание 6.1.1 *Геометрически определение предела последовательности означает (см. рисунок 1), что какую бы полосу шириной 2ε ни взять, найдется номер n_0, что все члены последовательности с номерами, большими n_0, лежат в этой полосе. Ясно, что при уменьшении ε, уменьшается ширина полосы и номер n_0, вообще говоря, увеличивается.*

Легко заметить, что это же определение, используя понятие ε-окрестности можно переписать в виде:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow x_n \in U_\varepsilon(A).$$

Определение 6.1.3 (Топологическое определение предела) *Число A называется пределом последовательности x_n, если*

$$\forall U(A)\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow x_n \in U(A).$$

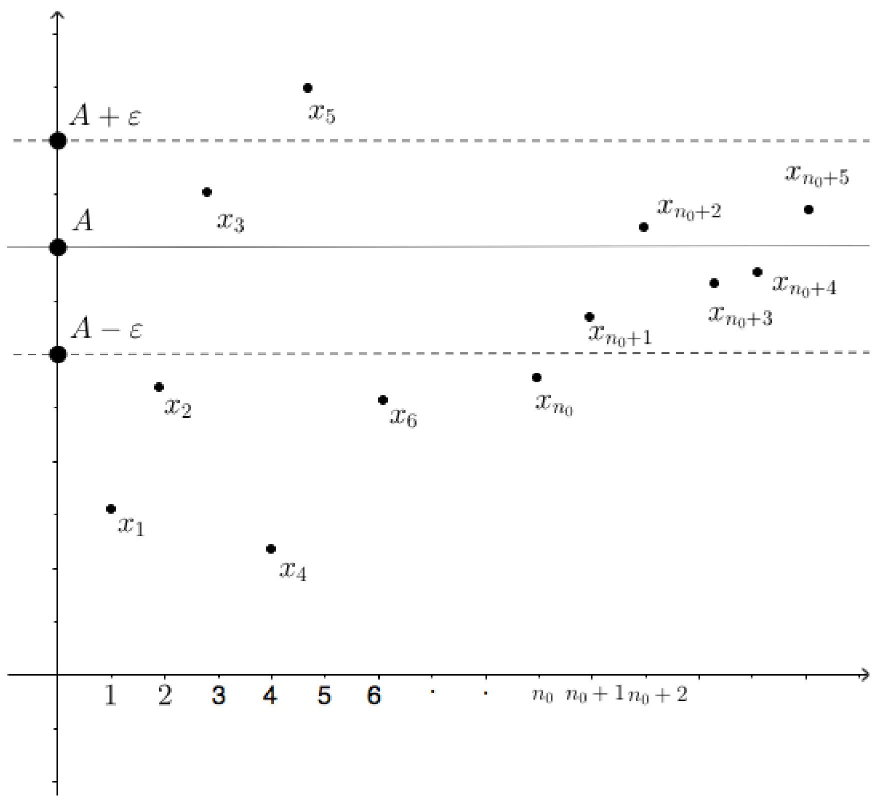

Рис. 1 Предел последовательности

Оказывается, что справедлива следующая лемма.

Лемма 6.1.1 *Определения 6.1.2 и 6.1.3 эквиваленты.*

Доказательство. Сначала будет доказано, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ в смысле определения 6.1.2, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ и в смысле определения 6.1.3. Пусть $U(A) =$

(α, β) – произвольная окрестность точки A. Положив $\varepsilon = \min(A-\alpha, \beta-A)$ оказывается, что $U_\varepsilon(A) \subset U(A)$. Согласно определению 6.1.2, по выбранному ε

$$\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow x_n \in U_\varepsilon(A) \subset U(A),$$

то есть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ в смысле определения 6.1.3.
Доказательство, что из определения 6.1.3 следует определение 6.1.2, моментально следует из того, что ε-окрестность является частным случаем окрестности. □

Пример 6.1.1 *Доказать по определению, что*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Нужно найти такое натуральное число n_0, что при всех натуральных $n > n_0$ будет выполняться

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon,$$

то есть $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Если положить $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, то при $n > n_0$ выполняется $n > \frac{1}{\varepsilon}$ и $\frac{1}{n} < \varepsilon$. В силу произвольности числа ε получено, что число 0 является пределом последовательности $x_n = \frac{1}{n}$.

Пример 6.1.2 *Доказать по определению, что*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n}{2n^2+4} = \frac{3}{2}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Справедлива цепочка преобразований

$$\left|\frac{3n^2+2n}{2n^2+4} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{4n-12}{2(2n^2+4)}\right|.$$

Можно считать, что $n > 3$, тогда

$$\left|\frac{4n-12}{2(2n^2+4)}\right| < \left|\frac{4n}{4n^2}\right| = \frac{1}{n}.$$

Положив $\frac{1}{n} < \varepsilon$ получается, что при $n > n_0 = \max\left(3, \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right)$ будет

$$\left|\frac{3n^2+2n}{2n^2+4} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon,$$

что и доказывает утверждение.

Пример 6.1.3 *Доказать, что последовательность $x_n = (-1)^n$ не имеет предела. Для этого достаточно выписать отрицание того факта, что число A является пределом последовательности:*

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n > n_0 : |x_n - A| > \varepsilon_0.$$

Пусть $\varepsilon_0 = 1$ и $n_0 \in \mathbb{N}$. Если $A < 0$, то достаточно положить $n = 2n_0$, если $A \geqslant 0$, то $n = 2n_0 + 1$. Тогда для любого $n_0 \in \mathbb{N}$ получается

$$|x_n - A| = |(-1)^n - A| \geqslant 1,$$

то есть никакое число A пределом последовательности не является.

Определение 6.1.4 *Если последовательность имеет конечный предел, то говорят, что она сходится. Иначе говорят, что она расходится.*

Определение предела последовательности дополняется следующими важными случаями.

Определение 6.1.5 *Говорят, что последовательность x_n стремится к плюс бесконечности и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow x_n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Определение 6.1.6 *Говорят, что последовательность x_n стремится к минус бесконечности и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow x_n < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Определение 6.1.7 *Говорят, что последовательность x_n стремится к бесконечности и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Замечание 6.1.2 *Данные определения можно переписать через ε-окрестности и через окрестности, как сделано в определениях 6.1.2 и 6.1.3. Лемма 6.1.1 сохраняется. Читателю предлагается самостоятельно заполнить данный пробел по аналогии со сделанным выше.*

Замечание 6.1.3 *Про последовательности, имеющие пределом $+\infty$, $-\infty$ или ∞ все равно говорят, что они расходятся.*

Пример 6.1.4 *Доказать, что*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-5}{2n+4} = +\infty.$$

Справедлива цепочка преобразований

$$\left|\frac{3n^2-5}{2n+4}\right| > \left|\frac{3n^2-5n}{2n+4n}\right| = \left|\frac{3n-5}{6}\right| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

При $n > 1$ дробь положительна и

$$\frac{3n-5}{6} \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{\frac{6}{\varepsilon}+5}{3}.$$

Положив

$$n_0 = \left[\frac{\frac{6}{\varepsilon}+5}{3}\right],$$

получается, что при $n > \max(n_0, 1)$ выполняется

$$\left|\frac{3n-5}{6}\right| > \frac{1}{\varepsilon},$$

а значит и

$$\left|\frac{3n^2-5}{2n+4}\right| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Замечание 6.1.4 *Запись $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ будет всегда снабжена уточнением: либо $A \in \mathbb{R}$, либо $A \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Замечание 6.1.5 *В определении предела в дальнейшем для краткости часто опускается тот факт, что $n_0 = n_0(\varepsilon)$, а так же то, что $n_0 \in \mathbb{N}$.*

Ниже сформулированы свойства последовательностей, имеющих предел.

Лемма 6.1.2 (Свойства сходящихся последовательностей) *Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, тогда:*

1. *При $A \in \overline{\mathbb{R}}$ предел единственен.*
2. *При $A \in \mathbb{R}$ последовательность x_n ограничена.*
3. *В любой окрестности $A \in \overline{\mathbb{R}}$ содержатся все элементы последовательности x_n, за исключением не более чем конечного числа.*

Доказательство. 1. От противного, пусть A_1 и A_2 – пределы последовательности x_n, причем $A_1 \neq A_2$. Пусть $U(A_1), U(A_2)$ – окрестности точек A_1 и A_2 такие, что

$$U(A_1) \cap U(A_2) = \varnothing.$$

По определению предела, для окрестности $U(A_1)$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow x_n \in U(A_1),$$

а для окрестности $U(A_2)$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n > n_1 \Rightarrow x_n \in U(A_2).$$

Пусть $n_2 = \max(n_0, n_1)$, тогда

$$\forall n > n_2 \Rightarrow (x_n \in U(A_1)) \wedge (x_n \in U(A_2)) \Rightarrow x_n \in U(A_1) \cap U(A_2),$$

что невозможно, так как пересечение пусто.

2. Пусть $\varepsilon = 1$, тогда

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - A| < 1 \Leftrightarrow (A - 1) < x_n < (A + 1)$$

и все элементы последовательности, начиная с $n_0 + 1$, ограничены по модулю числом

$$\max(|A + 1|, |A - 1|).$$

До $n_0 + 1$ имеется ровно n_0 членов последовательности, тогда положив

$$C = \max(|x_0|, |x_1|, \ldots, |x_{n_0}|, |A + 1|, |A - 1|),$$

получается, что

$$|x_n| \leqslant C,$$

т. е. последовательность x_n ограничена.

3. Пусть $U(A)$ – произвольная окрестность точки A. Согласно определению предела,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n > n_0 \Rightarrow x_n \in U(A),$$

а значит вне окрестности $U(A)$ содержится не более n_0 членов.

□

6.2 Арифметические свойства пределов

Ниже сформулирована и доказана теорема об арифметических операциях над сходящимися последовательностями.

Теорема 6.2.1 (Арифметические свойства пределов) *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, $A, B \in \mathbb{R}$, *тогда*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=A+B$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=A\cdot B$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)=\frac{A}{B}$, $B\neq 0$, $y_n\neq 0$.

Доказательство. 1. Пусть $\varepsilon>0$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, то

$$\exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n>n_0\Rightarrow |x_n-A|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$, то

$$\exists n_1\in\mathbb{N}:\forall n>n_1\Rightarrow |y_n-B|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда, используя неравенство треугольника, при $n>n_2=\max(n_0,n_1)$

$$|x_n+y_n-(A+B)|=|(x_n-A)+(y_n-B))|\leqslant|x_n-A|+|y_n-B|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

2. Пусть $\varepsilon>0$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$, то по второму пункту леммы 6.1.2

$$\exists C>0:|y_n|\leqslant C.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, то

$$\exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n>n_0\Rightarrow |x_n-A|<\frac{\varepsilon}{2C}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$, то

$$\exists n_1\in\mathbb{N}:\forall n>n_1\Rightarrow |y_n-B|<\frac{\varepsilon}{2(|A|+1)}.$$

Тогда, используя неравенство треугольника, при $n>n_2=\max(n_0,n_1)$

$$|x_ny_n-AB|=|x_ny_n+Ay_n-Ay_n-AB|\leqslant|x_ny_n-Ay_n|+|Ay_n-AB|=$$

$$=|y_n|\cdot|x_n-A|+|A|\cdot|y_n-B|\leqslant C\cdot\frac{\varepsilon}{2C}+\frac{|A|\varepsilon}{2(|A|+1)}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

3. Достаточно показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n}=\frac{1}{B},$$

так как тогда, по доказанному в пункте 2,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}x_n\lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$, $B\neq 0$, то

$$\exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n>n_0\Rightarrow |y_n-B|<\frac{|B|}{2},$$

откуда

$$B-\frac{|B|}{2}<y_n<B+\frac{|B|}{2}.$$

Если положить $C=\min\left(\left|B-\frac{|B|}{2}\right|,\left|B+\frac{|B|}{2}\right|\right)$, то

$$|y_n|\geqslant C\Rightarrow 0<\frac{1}{|y_n|}\leqslant\frac{1}{C}.$$

Пусть $\varepsilon>0$, тогда

$$\exists n_1\in\mathbb{N}:\forall n>n_1\Rightarrow |y_n-B|<\varepsilon CB,$$

а значит при $n>\max(n_0,n_1)$

$$\left|\frac{1}{y_n}-\frac{1}{B}\right|=\left|\frac{B-y_n}{By_n}\right|\leqslant\frac{|B-y_n|}{CB}<\varepsilon.$$

$\square$

Пример ниже иллюстрирует, как с помощью данной теоремы можно раскрывать некоторые неопределенности.

Пример 6.2.1 *Вычислить предел*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+4}{2n^2+n+1}.$$

Вынося в числителе и знаменателе старшие степени за скобку, получается

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+4}{2n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(3+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}}{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}.$$

Пределы последовательностей

$$\frac{5}{n},\ \frac{4}{n^2},\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n^2}$$

равны нулю, что легко показать по определению предела, значит предел числителя равен 3*, а предел знаменателя равен* 2*. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+4}{2n^2+n+1}=\frac{3}{2}.$$

На самом деле, справедлива более общая теорема, чем теорема 6.2.1.

Теорема 6.2.2 *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$, *тогда если определена соответствующая операция (сложения, умножения или деления) в* $\overline{\mathbb{R}}$, *то:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = A + B$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = A \cdot B$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{A}{B}$, $B \neq 0$, $y_n \neq 0$.

Доказательство. Доказательство предлагается в качестве упражнения. □

6.3 Предельный переход в неравенствах

Теорема 6.3.1 *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, $A < B$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$. *Тогда*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow x_n < y_n.$$

Доказательство. Пусть $A, B \in \mathbb{R}$ (другие случаи остаются в качестве упражнения). Пусть $\varepsilon = \frac{B-A}{2}$, тогда так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, то

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - A| < \frac{B-A}{2} \Rightarrow x_n < A + \frac{B-A}{2} = \frac{A+B}{2}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, то

$$\exists n_1 : \forall n > n_1 \Rightarrow |y_n - B| < \frac{B-A}{2} \Rightarrow y_n > B - \frac{B-A}{2} = \frac{A+B}{2}.$$

Значит, при $n > n_2 = \max(n_0, n_1)$ выполняется

$$x_n < \frac{A+B}{2} < y_n,$$

откуда и следует требуемое. □

Следствие 6.3.2 (Предельный переход в неравенствах) *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. *Если* $x_n > y_n$ *начиная с какого-либо номера* n_0, *то* $A \geqslant B$.
2. *Если* $x_n \geqslant y_n$ *начиная с какого-либо номера* n_0, *то* $A \geqslant B$.

Доказательство. 1. От противного, пусть $A < B$. Согласно теореме 6.3.1 $\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow x_n < y_n$. Это противоречит условию.
Второй пункт доказывается аналогично. $\square$

Замечание 6.3.1 *Важно отметить, что в 1 пункте следствия 6.3.2 нельзя написать строгое неравенство $A > B$. Например, для последовательностей $x_n = \frac{1}{n}$ и $y_n = 0$ выполняется неравенство $x_n > y_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, однако $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.*

6.4 Теорема о сжатой переменной

Теорема 6.4.1 (О сжатой переменной) *Пусть $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$. Пусть, кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$, $A \in \overline{\mathbb{R}}$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$.*

Доказательство. Пусть $A \in \mathbb{R}$. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \ A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon,$$

$$\exists n_1 : \forall n > n_1 \Rightarrow |y_n - A| < \varepsilon \Leftrightarrow A - \varepsilon < y_n < A + \varepsilon.$$

Тогда при $n > n_2 = \max(n_0, n_1)$ выполняется

$$A - \varepsilon < x_n \leqslant z_n \leqslant y_n < A + \varepsilon \Leftrightarrow |z_n - A| < \varepsilon.$$

$\square$

6.5 Теорема Вейерштрасса

Определение 6.5.1 *Говорят, что последовательность x_n возрастает, если*

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 > n_2 \Rightarrow x_{n_1} > x_{n_2}.$$

Определение 6.5.2 *Говорят, что последовательность x_n не убывает, если*

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 > n_2 \Rightarrow x_{n_1} \geqslant x_{n_2}.$$

Определение 6.5.3 *Говорят, что последовательность x_n убывает, если*

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 > n_2 \Rightarrow x_{n_1} < x_{n_2}.$$

Определение 6.5.4 *Говорят, что последовательность x_n не возрастает, если*

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 > n_2 \Rightarrow x_{n_1} \leqslant x_{n_2}.$$

Определение 6.5.5 *Про возрастающую (не убывающую, убывающую, не возрастающую) последовательность также говорят, что она монотонна.*

Теорема 6.5.1 (Вейерштрасса) *Неубывающая (невозрастающая) последовательность x_n сходится тогда и только тогда, когда она ограничена сверху (снизу).*

Доказательство. Пусть последовательность не убывает.
Необходимость следует из того факта, что сходящаяся последовательность ограничена (лемма 6.1.2).
Достаточность. Так как x_n ограничена сверху, то существует $A = \sup x_n < +\infty$. Пусть $\varepsilon > 0$. По свойству супремума (лемма 4.1.3),

$$\exists n_0 : A - \varepsilon < x_{n_0} \leqslant A.$$

Так как последовательность x_n не убывает, то

$$\forall n > n_0 \Rightarrow A - \varepsilon < x_{n_0} \leqslant x_n \leqslant A < A + \varepsilon \Rightarrow A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon,$$

что и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. □

Теорема Вейерштрасса может быть дополнена следующим образом.

Лемма 6.5.1 *Если последовательность не убывает и не ограничена сверху, то ее предел равен $+\infty$. Если последовательность не возрастает и не ограничена снизу, то ее предел равен $-\infty$.*

Доказательство. Так как последовательность не ограничена сверху, то по $\varepsilon > 0$ найдется n_0 такой, что

$$x_{n_0} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Так как последовательность не убывает, то при $n > n_0$ аналогично выполнено

$$x_n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Тем самым установлено, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. □

6.6 Сравнение скорости роста функций

При вычислении пределов часто бывают полезны следующие соотношения.

Теорема 6.6.1 *Справедливы равенства:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad a > 0.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, \quad a > 1, \quad k \in \mathbb{N}.$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0.$

Доказательство. 1. Последовательность x_n может быть переписана в виде

$$x_n = \frac{a^n}{n!} = \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{a}{n} = x_{n-1} \cdot \frac{a}{n}. \tag{3}$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0$, то

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow \frac{a}{n} < 1,$$

то есть при $n > n_0$ выполняется $x_n < x_{n-1}$, а значит последовательность убывает. Кроме того, $x_n \geqslant 0$. По теореме Вейерштрасса 6.5.1, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. Переходя к пределу в равенстве (3), получается

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} x_{n-1},$$

откуда

$$A = 0 \cdot A = 0 \Rightarrow A = 0.$$

2. Докажите самостоятельно аналогично п.1.
3. Пусть $\varepsilon > 0$. По доказанному в п.2 (при $k = 1$)

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow 1 < n < (1+\varepsilon)^n,$$

откуда

$$1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow 0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon,$$

что и доказывает утверждение.
4. Пуст сначала $a \geqslant 1$. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow 1 \leqslant a \leqslant (1+\varepsilon)^n,$$

откуда

$$1 < \sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow 0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon,$$

что и доказывает утверждение.
Если $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$ и

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\frac{1}{a}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$$

$\square$

Замечание 6.6.1 *Отметим пока без доказательства, что*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a^\alpha n}{n^s}=0,\ \alpha\in\mathbb{R},\ s>0.$$

6.7 Второй замечательный предел и число e

Теорема 6.7.1 (Второй замечательный предел) *Существует предел*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Доказательство. Достаточно показать, что последовательность

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

убывает. Действительно, используя неравенство Бернулли (лемма 3.5.1) при $n\geqslant 2$:

$$\frac{y_{n-1}}{y_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}=\frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}=\frac{n}{n+1}\cdot\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n=$$

$$=\frac{n}{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n>\frac{n}{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\geqslant\frac{n}{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

Поскольку члены последовательности положительны и последовательность убывает при $n\geqslant 2$, то по теореме Вейерштрасса 6.5.1 существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Последний предел существует по доказанному выше, тем самым существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

□

Определение 6.7.1 *Рассмотренный выше предел называют вторым замечательным пределом, а его значение называют числом* e, *то есть*

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Ниже предложено еще одно доказательство теоремы 6.7.1.
Доказательство. Используя формулу бинома Ньютона,

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \\ &= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{n!}{n!}\frac{1}{n^n} = \\ &= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \ldots \\ &\qquad + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \quad (*) \end{aligned}$$

С увеличением n число положительных слагаемых в правой части увеличивается. Кроме того, при увеличении n скобки вида $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$ и т.д. увеличиваются, а значит, $x_{n+1} > x_n$, т.е. последовательность, возрастает.

Осталось доказать, что последовательность ограничена сверху. Для этого достаточно заменить каждую скобку справа на 1, тем самым:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}. \qquad (**)$$

Усилив неравенство, заменив факториалы в знаменателе степенью числа 2, получается

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Выражение справа представляет из себя сумму геометрической прогрессии, тем самым

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Значит, по теореме Вейерштрасса 6.5.1 последовательность имеет предел. □

Замечание 6.7.1 *Из последнего доказательства хорошо видно, что* $2 < e < 3$.

Следствие 6.7.2 (Ряд для числа e)

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right).$$

Доказательство. Заметим, что оценка с одной стороны получена в (**). Оценим с другой стороны. Зафиксируем некоторое значение k и оставим равенстве (*) только k слагаемых. Получим для $n > k$:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Переходя к пределу при $n \to +\infty$, имеем

$$e > 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!},$$

откуда по теореме о сжатой переменной следует требуемое. □

6.8 Частичные пределы

Определение 6.8.1 *Пусть дана последовательность x_n и возрастающая последовательность $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots$ натуральных чисел. Последовательность $y_k = x_{n_k}$ называется подпоследовательностью последовательности x_n.*

Определение 6.8.2 *Если некоторая подпоследовательность последовательности x_n имеет предел $A \in \bar{\mathbb{R}}$, то A называется частичным пределом последовательности x_n.*

Определение 6.8.3 *Точные верхняя и нижняя грани множества частичных пределов последовательности x_n называются её верхним и нижним пределами, соответственно, и обозначаются $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$.*

Пример 6.8.1 *Пусть $x_n = (-1)^n$. Множество частичных пределов данной последовательности – двухэлементное множество $\{-1, 1\}$.*

Пример 6.8.2 *Пусть $x_n = n^{(-1)^n}$. Множество частичных пределов данной последовательности – двухэлементное множество $\{0, +\infty\}$.*

Пример 6.8.3 *Пусть последовательность x_n задана следующим образом: $\{1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$. Множество частичных пределов такой последовательности совпадает с множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$.*

Теорема 6.8.1 (Больцано-Вейерштрасса) *Из любой ограниченной последовательности x_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть множество значений последовательности x_n конечно. Тогда существует хотя бы одно значение x, которое повторяется бесконечное число раз, то есть существуют натуральные числа $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$, что $x_{n_k} = x$. Данная последовательность постоянна, а значит сходится.
Если множество значений бесконечно, то по лемме о предельной точке существует хотя бы одна предельная точка x. Так как x – предельная, то можно выбрать n_1 так, что $|x_{n_1} - x| < 1$. Далее по индукции, если уже выбрано $n_k > n_{k-1}$ так, что $|x_{n_k} - x| < \frac{1}{k}$, то выбирается $n_{k+1} > n_k$ так, что $|x_{n_{k+1}} - x| < \frac{1}{k+1}$ (иначе бы $\frac{1}{k+1}$-окрестность точки x содержала бы лишь конечное число членов последовательности x_n). Так как $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$, то $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. $\square$

Теорема Больцано-Вейерштрасса допускает следующее дополнение.

Замечание 6.8.1 *Если последовательность x_n не ограничена сверху (снизу), то из нее можно выделить сходящуюся к $+\infty$ $(-\infty)$ подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть последовательность не ограничена сверху. Найдется номер n_1 такой, что $x_{n_1} > 1$. Далее, найдется номер $n_2 > n_1$ такой, что $x_{n_2} > 2$ (иначе последовательность x_n была бы ограничена сверху числом $\max(x_1, ..., x_{n_1}, 2)$). Данный процесс продолжается, на шаге с номером k можно найти $n_k > n_{k-1}$, что $x_{n_k} > k$. Тем самым, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$. $\square$

Из двух утверждений, доказанных выше, моментально вытекает следующее следствие.

Следствие 6.8.2 *Множество частичных пределов последовательности x_n в $\overline{\mathbb{R}}$ не пусто.*

Имет место следующая важная теорема.

Теорема 6.8.3 (Замкнутость множества частичных пределов) *Множество частичных пределов последовательности замкнуто.*

Доказательство. Пусть E – множество частичных пределов последовательности x_n и x – предельная точка множества E. Тогда для $\varepsilon > 0$ найдется точка $a \in E$: $a \in U_\varepsilon(x)$. Так как a – частичный предел x_n, то найдется подпоследовательность $x_{n_k} \to a$. Заметим, что $U(x)$ также является и окрестностью точки a.

Тогда для каждого $\varepsilon = 1/k$ найдем $n_k > n_{k-1}$: $x_{n_k} \in U_{1/k}(x)$. Отсюда следует, что $x_{n_k} \to x$, то есть $x \in E$. $\square$

Замечание 6.8.2 *Для ограниченной последовательности верхний и нижний пределы являются наибольшим и наименьшим частичными пределами.*

Лемма 6.8.1 *Последовательность имеет предел в* $\bar{\mathbb{R}}$ *тогда и только тогда, когда* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

Доказательство. Пусть последовательность имеет предел. Тогда любая ее подпоследовательность имеет тот же самый предел (докажите это), а значит множество частичных пределов состоит из ровно одного элемента.
Обратно, пусть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = A$. Предположим, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq A$, то есть

$$\exists \varepsilon_0 : \forall n_0 \; \exists n > n_0 \Rightarrow |x_n - A| \geqslant \varepsilon_0,$$

откуда либо $x_n \geqslant A + \varepsilon_0$, либо $x_n \leqslant A - \varepsilon_0$. Построенная таким образом последовательность x_n является подпоследовательностью последовательности x_n, у которой либо верхний предел больше, чем A, либо меньший меньше, чем A, что противоречит условию. □

6.9 Критерий Коши

Определение 6.9.1 *Последовательность* x_n *называется фундаментальной (или сходящейся в себе), если*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Теорема 6.9.1 (Критерий Коши) *Последовательность* x_n *сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Доказательство.
Необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $p \in \mathbb{N}$, тогда $n + p > n_0$ и

$$|x_{n+p} - x_n| = |(x_{n+p} - A) + (A - x_n)| \leqslant |x_{n+p} - A| + |A - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

то есть x_n – фундаментальная последовательность.
Достаточность. Пусть x_n – фундаментальная последовательность, $\varepsilon = 1$, тогда

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_{n+p} - x_n| < 1.$$

В частности, при $n = n_0 + 1$

$$-1 + x_{n_0+1} < x_{n_0+p+1} < 1 + x_{n_0+1},$$

откуда члены последовательности x_n при $n > n_0 + 1$ ограничены числом

$$\max(|-1 + x_{n_0+1}|, |1 + x_{n_0+1}|).$$

Тогда положив

$$C = \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0+1}|, |-1 + x_{n_0+1}|, |1 + x_{n_0+1}|)$$

получается, что

$$|x_n| \leqslant C,$$

то есть последовательность ограничена.
По теореме Больцано – Вейерштрасса из последовательности x_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность, то есть $\exists x_{n_k} : x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} A$. Докажем, что $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$.
Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, в силу фундаментальности x_n,

$$\exists n_0 : \forall n > n_0, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_{n+p} - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} A$, то

$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \Rightarrow |x_{n_k} - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $k_1 > k_0$ таково, что $n_{k_1} > n_0$, тогда при $n > n_0$ имеем

$$|x_n - A| = |(x_n - x_{n_{k_1}}) + (x_{n_{k_1}} - A)| \leqslant |x_n - x_{n_{k_1}}| + |x_{n_{k_1}} - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Пример 6.9.1 *Важную роль в математическом анализе играет последовательность $x_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$. Оказывается, что она не имеет конечного предела. Согласно отрицанию критерия Коши:*

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n > n_0, p \in \mathbb{N} : |x_{n+p} - x_n| \geqslant \varepsilon_0.$$

Пусть $n_0 \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, $p = n$, тогда

$$|x_{2n} - x_n| = \left|\frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}\right| > \left|\frac{1}{2n} \cdot n\right| = \frac{1}{2}.$$

Это значит, что для $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ выполнено отрицание критерия Коши. Значит, последовательность предела не имеет.
Можно заметить, что данная последовательность монотонна и имеет предел в $\overline{\mathbb{R}}$, равный $+\infty$.

6.10 Теорема Штольца

В данном пункте сформулируем и докажем теорему, аналог которой для предела отношения двух функций будет известен позже под названием "правило Лопиталя".

Теорема 6.10.1 (Штольца) *Пусть последовательность y_n строго возрастает и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ и существует (в $\bar{\mathbb{R}}$) предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = A$.*

Доказательство. 1. Пусть сначала $A = 0$. Тогда для $\varepsilon > 0$ найдется номер n_0, начиная с которого выполнено неравенство

$$\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{или} \quad |x_n - x_{n-1}| < \frac{\varepsilon}{2}(y_n - y_{n-1}).$$

Рассмотрим при $n > n_0$ разность

$$|x_n - x_{n_0}| = |x_n - x_{n-1} + x_{n-1} - x_{n-2} + x_{n-2} - ... - x_{n_0+1} + x_{n_0+1} - x_{n_0}| \leqslant$$
$$\leqslant |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + ... + |x_{n_0+1} - x_{n_0}| < \frac{\varepsilon}{2}(y_n - y_{n_0}).$$

Так как $y_n \to +\infty$, то при достаточно больших n верно $y_n > 0$. Тогда можно считать, что $y_{n_0} > 0$ (иначе возьмем n_0 достаточно большим). Тогда из последнего неравенства следует

$$|x_n - x_{n_0}| < \frac{\varepsilon}{2} y_n.$$

Поделим на y_n:

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x_{n_0}}{y_n}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x_n}{y_n}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \left|\frac{x_{n_0}}{y_n}\right|.$$

Так как по условию $y_n \to +\infty$, то начиная с некоторого номера будет выполнено $y_n > \frac{|x_{n_0}|+1}{\varepsilon}$. Это позволяет получить неравенство

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon \cdot \frac{|x_{n_0}|}{|x_{n_0}| + 1} < \varepsilon,$$

что и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$.

2. Пусть $A \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$.

Построим вспомогательную последовательность $\tilde{x}_n = x_n - Ay_n$. Тогда

$$\frac{\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - A \to 0,$$

откуда по п.1 следует, что $\frac{\tilde{x}_n}{y_n} = \frac{x_n}{y_n} - A \to 0$, что и дает требуемое.

3. Пусть теперь $A = +\infty$. Отсюда прежде всего следует, что начиная с некоторого номера n_0 выполнено

$$\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right| > 1 \quad \Rightarrow \quad x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1}.$$

Отсюда следует, что x_n строго возрастает. Применяя это неравенство для всех номеров от n_0+1 до n и складывая, получим

$$x_n - x_{n_0} > y_n - y_{n_0},$$

откуда получаем, что $x_n \to +\infty$.

Применим доказанное в п.1 к отношению y_n/x_n. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = 0,$$

откуда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$ (знак бесконечности следует из положительности числителя и знаменателя для больших n).

4. Случай $A = -\infty$ сводится к предыдущему рассмотрением последовательности $-x_n$. $\square$

Пример 6.10.1 *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$*. Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = A$*.*

6.11 Контрольные вопросы и задачи

1. Приведите пример последовательности, имеющей ровно одну предельную точку, ровно две предельные точки, ровно пять предельных точек. Сколько частичных пределов имеет такая последовательность?

2. Может ли последовательность быть ограничена сверху, но не ограничена снизу?

3. Покажите, что теоремы о предельном переходе в неравенствах, о сжатой переменной, Вейерштрасса справедливы даже если все утверждения начинаются не с $n = 1$, а с $n = n_0$.

4. Докажите, что любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится и имеет тот же самый предел, что и исходная последовательность.

5. Проиллюстрируйте графически теоремы о сжатой переменной, о предельном переходе в неравенствах.

7 Предел функции

7.1 Два определения предела функции

Во всем пункте будем считать, что функция $f\colon \mathbb{R} \supset E \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ – предельная точка множества E.

Определение 7.1.1 (Определение предела функции по Коши) *Число $\in \bar{\mathbb{R}}$ называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \quad \Rightarrow \quad f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

При этом пишут, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ или $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} A$.

Для случая $x_0 \in \mathbb{R}$ и $A \in \mathbb{R}$ это же определение можно переписать в виде:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : \ 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Замечание 7.1.1 *Геометрически определение предела функции означает, что какую бы полосу шириной 2ε не взять, найдется δ, что при всех x из области определения, лежащих в проколотой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, значения функции $f(x)$ лежат в этой полосе. При уменьшении ε значение δ, вообще говоря, уменьшается. На рисунке 2 наглядно продемонстрировано, как с изменением ε меняется и δ.*

Замечание 7.1.2 *Определения предела по Коши можно сформулировать на языке окрестностей (несимметричных):*

$$\forall V(A) \ \exists \overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \quad \Rightarrow \quad f(x) \in V(A).$$

Равносильность этого определения исходному доказывается аналогично такому же факту для определения предела последовательности.

Пример 7.1.1 *Доказать, что*

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Нужно найти те x, при которых выполняется неравенство

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \varepsilon.$$

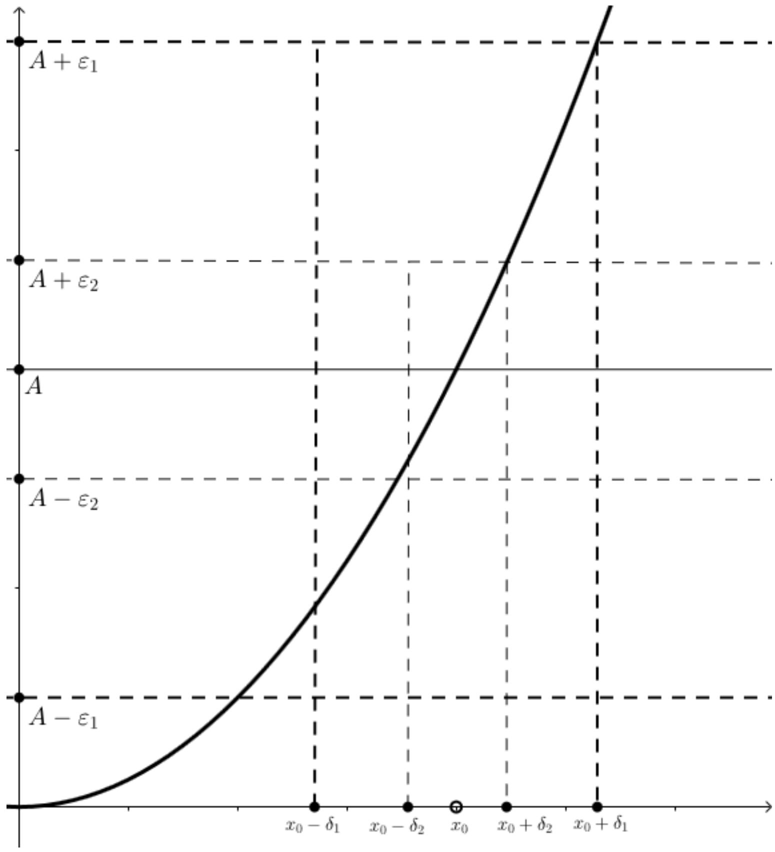

Рис. 2 Предел функции

Так как $x \neq 2$, *то*

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right| = |x+2-4| = |x-2| < \varepsilon.$$

Значит, если положить $\delta = \varepsilon$, *то при* $0 < |x-2| < \delta$ *выполняется*

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right| < \varepsilon.$$

Пример 7.1.2 *Доказать, что*

$$\lim_{x\to 3}(x^2-x) = 6.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. *Справедлива цепочка преобразований*

$$|f(x)-A| = |x^2-x-6| = |(x-3)(x+2)|.$$

Можно предполагать, что $x \in (2,4)$, $x \neq 3$. *Тогда*

$$|(x-3)(x+2)| \leqslant 6|x-3|$$

и если потребовать, чтобы выполнялось неравенство $6|x-3| < \varepsilon$, *то при* $0 < |x-3| < \delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{6})$ *будет выполняться* $|f(x)-A| < \varepsilon$.

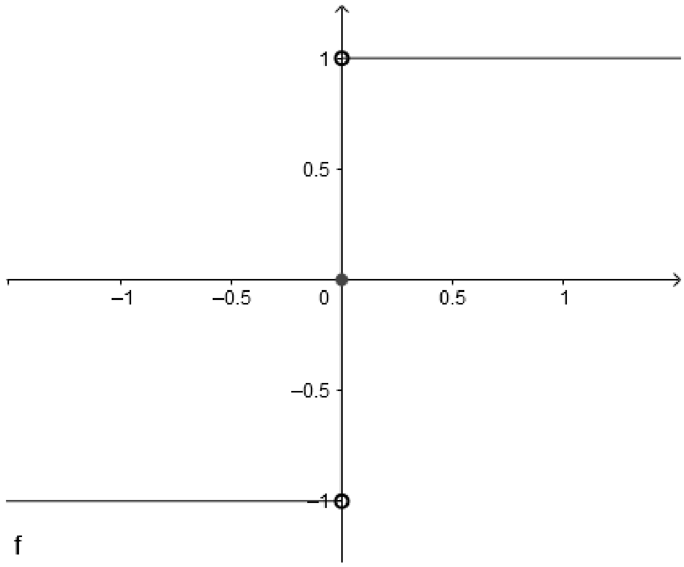

Рис. 3 График $y = \operatorname{sign} x$

Пример 7.1.3 *Доказать, что функция (см. рисунок 3)*

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

не имеет предела в точке $x_0 = 0$. Ниже записано отрицание определения того, что число A является пределом функции $f(x) : E \to \mathbb{R}$ в точке x_0,

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \ \exists x_\delta \in E : 0 < |x_\delta - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_\delta) - A| \geqslant \varepsilon_0.$$

Пусть $\varepsilon_0 = 1$ и $\delta > 0$. Достаточно положить $x_\delta = -\frac{\delta}{2}$, если $A \geqslant 0$ и $x_\delta = \frac{\delta}{2}$, если $A < 0$, тогда

$$|\operatorname{sign} x_\delta - A| \geqslant 1.$$

Пример 7.1.4 *Доказать, что $\lim\limits_{x \to 0} |\operatorname{sign} x| = 1$. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда какое бы число $\delta > 0$ не взять, для всех $x : 0 < |x| < \delta$ выполняется $|\operatorname{sign} x - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$.*

Замечание 7.1.3 *Последний пример еще раз иллюстрирует, что при изучении предела функции при $x \to x_0$ важно поведение функции около точки x_0, а не в самой точке. В определении предела это отмечается рассмотрением проколотой окрестности x_0.*

Замечание 7.1.4 *Запись $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ будет всегда снабжена уточнением: либо $A \in \mathbb{R}$, либо $A \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Замечание 7.1.5 *В определении предела в дальнейшем для краткости часто опускается тот факт, что $\delta = \delta(\varepsilon)$.*

Определение 7.1.2 (Определение предела функции по Гейне)
Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если для любой последовательности x_n, сходящейся к x_0, такой, что $x_n \in E$, $x_n \neq x_0$, выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Теорема 7.1.1 (О равносильности определений предела)
Определения предела по Коши и Гейне равносильны.

Доказательство. 1. Докажем, что если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ в смысле определения по Коши, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ в смысле определения по Гейне.
Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, согласно определению по Коши,

$$\exists\delta > 0 : \forall x \in E : x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(A).$$

Пусть последовательность x_n сходится к x_0, причем $x_n \in E$ и $x_n \neq x_0$, тогда по ранее найденному числу $\delta > 0$

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow x_n \in \overset{o}{U}_\delta(x_0).$$

Значит, при $n > n_0$

$$f(x_n) \in V_\varepsilon(A),$$

что означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

2. Теперь докажем, что если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ в смысле определения по Гейне, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ в смысле определения по Коши.

От противного, пусть не выполнено определение по Коши, то есть

$$\exists\varepsilon_0 : \forall\delta > 0\ \exists x \in E, x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) : |f(x) - A| \geqslant \varepsilon_0.$$

Так как δ может быть любой, то взяв $\delta_n = \frac{1}{n}$

$$\exists x_n \in E, x \in \overset{o}{U}_{\delta_n}(x_0) : |f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon_0.$$

Последовательность x_n удовлетворяет условиям, что $x_n \in E$ и $x_n \neq x_0$ (по построению). Кроме того, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, однако так как $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon_0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq A$, то есть не выполнено определение по Гейне. □

Определение предела по Гейне часто помогает доказать, что какое-то число не является пределом данной функции, или что функция не имеет предела вовсе.

Пример 7.1.5 *Доказать, что не существует предела* $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$.
Достаточно рассмотреть две последовательности

$$x_n^1 = 2\pi n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty, \quad x_n^2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Так как

$$f(x_n^1) = \sin(2\pi n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad f(x_n^2) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

и пределы между собой не равны, то это означает, что предела не существует.

7.2 Односторонние пределы

Определение 7.2.1 *Пусть* $f : E \to \mathbb{R}$, x_0 *– предельная точка для множества* $U_+(x_0) = \{x \in E : x > x_0\}$. *Говорят, что число* A *является пределом функции* f *в точке* x_0 *справа, если*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \in E : 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$

при этом пишут $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$.

Определение 7.2.2 *Пусть* $f : E \to \mathbb{R}$, x_0 *– предельная точка для множества* $U_-(x_0) = \{x \in E : x < x_0\}$. *Говорят, что число* A *является пределом функции* f *в точке* x_0 *слева, если*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \in E : 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$

при этом пишут $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A$.

Замечание 7.2.1 *Аналогично тому, как сделано в пределе функции, определения обобщаются на случай* $A \in \overline{\mathbb{R}}$.

Замечание 7.2.2 *Полезно заметить, что при* $x_0 = +\infty$ *или* $x_0 = -\infty$ *определение предела и так является односторонним.*

Замечание 7.2.3 *Для краткости часто применяют обозначения* $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0)$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0)$.

Пример 7.2.1 *Пусть*

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}.$$

Ясно, что $\lim\limits_{x\to 0+0} \operatorname{sign} x = 1$, *а* $\lim\limits_{x\to 0-0} \operatorname{sign} x = -1$.

Пример 7.2.2 *Пусть* $y = 5^{\frac{1}{x}}$. *Так как при* $x \to 0+0$ *имеет место равенство* $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty$, *то легко показать, что*

$$\lim_{x\to 0+0} 5^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Аналогично, так как $\lim\limits_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$, *то легко показать, что*

$$\lim_{x\to 0-0} 5^{\frac{1}{x}} = 0.$$

Теорема 7.2.1 (Критерий существования предела функции) *Пусть* $f : E \to \mathbb{R}$ *и* x_0 *– предельная точка для множеств* $U_-(x_0) = \{x \in E : x < x_0\}$ *и* $U_+(x_0) = \{x \in E : x > x_0\}$. *Тогда*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = A, \quad A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Доказательство. Пусть $A \in \mathbb{R}$. Необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$

в частности,

$$\forall x \in E : 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$

то есть $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$. Аналогично,

$$\forall x \in E : 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$

то есть $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A$.

Достаточность. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists \delta_1 > 0 : \forall x \in E : 0 < x - x_0 < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$

$$\exists \delta_2 > 0 : \forall x \in E : 0 < x_0 - x < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, тогда

$$\forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

□

7.3 Свойства пределов функций

Для функций справедливы теоремы, аналогичные теоремам для последовательностей.

Теорема 7.3.1 *Пусть* $f : E \to \mathbb{R}$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, *тогда:*

1. *При* $A \in \overline{\mathbb{R}}$ *предел единственен.*

2. *При* $A \in \mathbb{R}$ *существует окрестность* $\overset{o}{U}(x_0)$ *такая, что в* $\overset{o}{U}(x_0) \cap E$ *функция* $f(x)$ *ограничена.*

3. *Если* $A \neq 0$, $A \in \overline{\mathbb{R}}$, *то существует окрестность* $\overset{o}{U}(x_0)$ *такая, что в* $\overset{o}{U}(x_0) \cap E$ *знаки* $f(x)$ *и* A *совпадают.*

Доказательство. 1. От противного, пусть существует два предела $A_1 \neq A_2$. Пусть $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$, $x_n \in E$, $x_n \neq x_0$. Согласно определению предела по Гейне, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A_1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A_2$. В силу единственности предела последовательности $A_1 = A_2$. Тем самым получено противоречие.
2. Пусть $\varepsilon = 1$. Согласно определению предела функции,

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < 1 \Leftrightarrow$$

$$(A - 1) < f(x) < (A + 1),$$

что и означает ограниченность.
3. Пусть $A \in \mathbb{R}$. Пусть $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$. Тогда, согласно определению предела,

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{|A|}{2} \Leftrightarrow$$

$$A - \frac{|A|}{2} < f(x) < A + \frac{|A|}{2},$$

откуда и следует требуемое. Случай $A \in \overline{\mathbb{R}}$ остается в качестве упражнения.

$\square$

Теорема 7.3.2 (Арифметические свойства пределов) *Пусть* $f, g : E \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, $A, B \in \bar{\mathbb{R}}$. *Тогда, если соответствующая операция* ($A + B$, AB, A/B) *определена в* $\bar{\mathbb{R}}$, *то верны равенства:*

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$;

2. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$;

3. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ *при* $B \neq 0$.

Доказательство. Используя определение предела по Гейне, доказательство этой теоремы сводится к применению соответствующей теоремы для последовательностей. Для примера будет доказано первое утверждение. Пусть $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$, $x_n \in E$, $x_n \neq x_0$. Согласно определению предела по Гейне, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = B$. Тогда по теореме о пределе суммы для последовательностей, $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n) + g(x_n)) = A + B$. В силу произвольности x_n это означает, что $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = A + B$. □

Теорема 7.3.3 (Предел и неравенство) *Пусть* $f, g : E \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$ *и* $A < B$, *тогда*

$$\exists \overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \Rightarrow f(x) < g(x).$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы совершенно аналогично доказательству соответствующей теоремы для последовательностей и предоставляется читателю. □

Следствие 7.3.4 (Предельный переход в неравенстве) *Пусть* $f, g : E \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$, *тогда:*

1. *Если* $f(x) > g(x)$ *на* E, *то* $A \geqslant B$.

2. *Если* $f(x) \geqslant g(x)$ *на* E, *то* $A \geqslant B$.

Доказательство. Доказательство следствия аналогично доказательству следствия (7.3.1) и оставляется в качестве упражнения. □

Пример 7.3.1 *В первом пункте следствия нельзя утверждать, что* $A > B$. *Действительно, рассмотрев функции* $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 0$ *видно, что* $f(x) > g(x)$ *при* $x > 0$, *но* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ *и* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Теорема 7.3.5 (Теорема о сжатой переменной (о двух милиционерах)) *Пусть* $f, g, h : E \to \mathbb{R}$, *причем на* E *выполнено условие* $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$, $A \in \overline{\mathbb{R}}$. *Тогда* $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$.

Доказательство. Пусть $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$, $x_n \in E$, $x_n \neq x_0$. Согласно определнию по Гейне, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = A$. По теореме о сжатой переменной для последовательностей получим, что $\lim\limits_{n\to\infty} h(x_n) = A$. В силу произвольности последовательности x_n получается, что $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$. □

Теорема 7.3.6 (Критерий Коши существования предела функции) *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, x_0 – предельная точка для E. Тогда*

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \ \ \forall x', x'' \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \quad \Rightarrow \quad |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $x', x'' \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E$, тогда

$$|f(x') - f(x'')| = \leqslant |(f(x') - A)| + |(f(x'') - A)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Достаточность. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists \delta > 0 : \forall x', x'' \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \quad \Rightarrow \quad |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Пусть x_n – последовательность, такая что $x_n \in E$, $x_n \neq x_0$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, тогда

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow x_n \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E,$$

а значит при $n > n_0$ и $p \in \mathbb{N}$ выполняется также и $0 < |x_{n+p} - x_0| < \delta$, а значит $|f(x_n) - f(x_{n+p})| < \varepsilon$, что означает, что последовательность $f(x_n)$ фундаментальна, а значит имеет предел (согласно критерию Коши для последовательностей). Тем самым доказано, что для любой последовательности, удовлетворяющей условиям $x_n \in E$, $x_n \neq x_0$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, последовательность $f(x_n)$ сходится.

Теперь нужно показать, что все эти пределы одинаковы, для этого можно предположить (от противного), что $x_n^1 \in E$, $x_n^1 \neq x_0$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n^1 = x_0$, $x_n^2 \in E$, $x_n^2 \neq x_0$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n^2 = x_0$, но

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n^1) = A_1 \neq A_2 = \lim_{n \to \infty} f(x_n^2).$$

Составив последовательность

$$x_n^3 = \{x_1^1, x_1^2, x_2^1, x_2^2, \ldots, x_n^1, x_n^2, \ldots\}$$

видно, что $x_n^3 \in E$, $x_n^3 \neq x_0$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n^3 = x_0$. С одной стороны, по только что доказанному выше, $f(x_n^3)$ сходится, а с другой стороны

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{2k-1}^3) = A_1 \neq A_2 = \lim_{k \to \infty} f(x_{2k}^3).$$

Противоречие. $\square$

Теперь перейдем к рассмотрению монотонных функций.

Определение 7.3.1 *Говорят, что функция $f : E \to \mathbb{R}$ возрастает (нестрого, не убывает) на $D \subset E$, если*

$$\forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2).$$

Определение 7.3.2 *Говорят, что функция $f : E \to \mathbb{R}$ строго возрастает на D, если*

$$\forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Определение 7.3.3 *Говорят, что функция $f : E \to \mathbb{R}$ убывает (нестрого, не возрастает) на D, если*

$$\forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2).$$

Определение 7.3.4 *Говорят, что функция $f : E \to \mathbb{R}$ строго убывает на D, если*

$$\forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Определение 7.3.5 *Про возрастающую (убывающую, не убывающую, не возрастающую) функцию также говорят, что она монотонна.*

Теорема 7.3.7 (Вейерштрасса для предела функции) *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, x_0 – предельная для $\overset{o}{U}{}_{\delta}^{-}(x_0) \cap E$ и f возрастает на $\overset{o}{U}{}_{\delta}^{-}(x_0) \cap E$. Для того чтобы f имела конечный предел при $x \to x_0$ слева, необходимо и достаточно, чтобы функция f была ограничена сверху на множестве $\overset{o}{U}{}_{\delta}^{-}(x_0) \cap E$.*

Доказательство. Необходимость следует из того, что функция, имеющая предел, ограничена в некоторой окрестности $\overset{o}{U}{}^{-}(x_0) \cap E$, а поскольку f – возрастает на E, то имеет место ограниченность сверху в $\overset{o}{U}{}_{\delta}^{-}(x_0) \cap E$.

Достаточность. Пусть $A = \sup\limits_{x \in \overset{o}{U}{}_{\delta}^{-}(x_0) \cap E} f(x)$. Из ограниченности сверху следует, что $A \in \mathbb{R}$. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, согласно критерию супремума, $\exists \tilde{x} \in E$, что $A - \varepsilon < f(\tilde{x}) \leqslant A$. В силу возрастания f на $\overset{o}{U}{}_{\delta}^{-}(x_0) \cap E$, при $x > \tilde{x}$, $x \in E$ имеем $A - \varepsilon < f(\tilde{x}) \leqslant f(x) \leqslant A$. Тем самым, $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$. $\square$

Замечание 7.3.1 *Аналогично можно сформулировать теорему для убывающей функции в левой окрестности точки x_0, и для монотонной функции в правой окрестности точки x_0. Предоставляем это читателю.*

Замечание 7.3.2 *Если монотонная функция неограниченна в окрестности точки x_0, то соответствующий односторонний предел равен $+\infty$ или $-\infty$.*

7.4 Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение 7.4.1 *Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если*

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Определение 7.4.2 *Функция $\beta(x)$ называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если*

$$\lim_{x\to x_0} \beta(x) = \infty.$$

Лемма 7.4.1 (О связи бесконечно малой и бесконечно большой) *Пусть $\beta(x) : E \to \mathbb{R}$ – бесконечно большая при $x \to x_0$. Тогда $\alpha(x) = \frac{1}{\beta(x)}$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.*
Обратно, пусть $\alpha(x) : E \to \mathbb{R}$ – бесконечно малая при $x \to x_0$ и $\exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \alpha(x) \neq 0$. Тогда $\beta(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно большая при $x \to x_0$.

Доказательство. Первое утверждение. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда:

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\beta(x)| > \frac{1}{\varepsilon},$$

откуда

$$|\alpha(x)| < \varepsilon,$$

что и доказывает утверждение.
Второе утверждение. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists \delta_1 > 0, \delta_1 < \delta : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Так как на множестве $x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta_1$ выполнено, что $\alpha(x) \neq 0$, то определена функция $\beta(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ и

$$\left|\frac{1}{\alpha(x)}\right| > \frac{1}{\varepsilon},$$

то есть $\beta(x)$ – бесконечно большая при $x \to x_0$. □

В следующей теореме отмечены свойства бесконечно малых.

Теорема 7.4.1 (Свойства бесконечно малых) *Пусть $\alpha, \beta : E \to \mathbb{R}$ – бесконечно малые при $x \to x_0$, тогда:*

1. *Функция $\alpha(x) + \beta(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.*

2. *Функция* $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ *– бесконечно малая при* $x \to x_0$.

3. *Если функция* $\theta(x) : E \to \mathbb{R}$ *ограничена в некоторой проколотой окрестности* $\overset{o}{U}_\delta(x_0)$, *тогда функция* $\alpha(x) \cdot \theta(x)$ *– бесконечно малая при* $x \to x_0$.

Доказательство. Первые два пункта немедленно следуют из теоремы об арифметических операциях над пределами.
3. Согласно условию,

$$\exists \overset{o}{U}_\delta(x_0) : \forall x \in E, x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |\theta(x)| \leqslant C.$$

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists \delta_1 < \delta : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{C}.$$

Тогда при $x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta_1$ выполняется

$$|\theta(x) \cdot \alpha(x)| < \varepsilon,$$

что и завершает доказательство. □

Пример 7.4.1 *Вычислить предел*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}.$$

Предел $\lim\limits_{x \to \infty} \sin x$ *не существует. В то же время,* $|\sin x| < 1$ *при* $x \in \mathbb{R}$, *а значит функция* $\sin x$ *является ограниченной. Кроме того,* $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, *значит функция* $\frac{1}{x}$ *является бесконечно малой при* $x \to \infty$. *Тогда, согласно теореме,*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Теорема 7.4.2 (О связи функции, ее предела и бесконечно малой) *Пусть функция* $f : E \to \mathbb{R}$, x_0 *– предельная для* E, *тогда*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ *– бесконечно малая при* $x \to x_0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, а значит

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначив $\alpha(x) = f(x) - A$ получается определение того, что $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$ и представление $f(x) = A + \alpha(x)$.
Достаточность. Пусть $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$, тогда

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} (A + \alpha(x)) = \lim_{x\to x_0} A + \lim_{x\to x_0} \alpha(x) = A + 0 = A.$$

□

7.5 Контрольные вопросы и задачи

1. Докажите арифметические свойства пределов, не используя непосредственно соответствующие свойства для пределов последовательности.

2. Докажите теорему о сжатой переменной, не используя непосредственно соответствующую теорему для последовательности.

3. Проиллюстрируйте критерий Коши существования предела функции рисунком.

4. Сформулируйте все недостающие определения предела функции.

5. Сформулируйте определение предела функции по Гейне, используя кванторы.

8 Непрерывность функции

8.1 Основные определения

Определение 8.1.1 *Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке $x_0 \in E$, если*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Ясно, что используя понятие ε-окрестности и δ-окрестности определение может быть переписано в виде

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : x \in U_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0)).$$

Аналогично определению предела, понятие непрерывности может быть сформулировано и в терминах произвольных окрестностей.

Определение 8.1.2 *Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке $x_0 \in E$, если*

$$\forall U(f(x_0))\ \exists U(x_0) : \forall x \in E : x \in U(x_0) \Rightarrow f(x) \in U(f(x_0)).$$

Можно бы было провести доказательство эквивалентности этих двух определений в том ключе, который был рассмотрен ранее, однако это получится несколько иным путем.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Для точки x_0 справедлива альтернатива: либо x_0 предельная для E, либо нет. Оказывается, в первом случае понятие непрерывности тесно связано с понятием предела.

Лемма 8.1.1 (Непрерывность в предельной точке) *Для того чтобы функция $f : E \to \mathbb{R}$ была непрерывной в точке x_0, предельной для E, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, предельной для E, тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

В частности,

$$\forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

то есть получается определение того, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Достаточность. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Так как при $x = x_0$ выполняется $|f(x_0) - f(x_0)| = 0$, то

$$\forall x \in E : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

то есть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0. □

Лемма 8.1.2 (Непрерывность в изолированной точке) *Если $x_0 \in E$ – изолированная точка, то функция $f : E \to \mathbb{R}$ непрерывна в x_0.*

Доказательство. Если x_0 – изолированная точка множества E, то существует окрестность $U(x)$, не содержащая других точек из E. А тогда если $\varepsilon > 0$, то

$$x \in U(x), x \in E \Rightarrow (x = x_0) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon,$$

что и означает непрерывность. □

Определение 8.1.3 (Непрерывность на множестве) *Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется непрерывной на множестве $D \subset E$, если она непрерывна в каждой точке D. Обозначается это, как $f \in C(D)$.*

Замечание 8.1.1 *Геометрически понятие непрерывности на множестве (например, на отрезке $[a, b]$) можно пояснить следующим образом. Непрерывность функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ означает, что ее график на этом отрезке можно нарисовать, не отрывая ручки от бумаги.*

Пример 8.1.1 *Константа, то есть функция $y(x) = c$, непрерывна на $\mathbb{R}$. Действительно, пусть $\varepsilon > 0$, тогда неравенство*

$$0 = |c - c| < \varepsilon$$

справедливо при любой δ.

Пример 8.1.2 *Функция $y(x) = x$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Действительно, пусть $\varepsilon > 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}$, тогда неравенство*

$$|x - x_0| < \varepsilon$$

справедливо, как только $|x - x_0| < \delta = \varepsilon$.

8.2 Классификация точек разрыва

Пусть $x_0 \in \bar{E}$, то есть x_0 принадлежит E или является предельной точкой E.

Определение 8.2.1 (Точка разрыва) *Если функция $f : E \to \mathbb{R}$ не является непрерывной в точке x_0, то говорят, что функция f терпит разрыв (или что f разрывна) в точке x_0, а сама точка x_0 называется точкой разрыва.*

Лемма 8.2.1 *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и x_0 – предельная для E. Тогда непрерывность функции f в точке x_0 равносильна выполнению равенства*

$$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0).$$

Доказательство. Первое равенство $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$ необходимо и достаточно для того, чтобы существовал предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$. Второе же равенство устанавливает, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, что означает непрерывность. □

Тем самым, если нарушено какое-либо из условий вышеприведенной леммы, то функция не является непрерывной. Возможны следующие варианты.

Определение 8.2.2 (Устранимый разрыв) *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Если существуют пределы $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$, причем $f(x_0+0) = f(x_0-0) = A$, но $A \neq f(x_0)$ или f не определена в точке x_0, то точка x_0 называется точкой устранимого разрыва.*

Замечание 8.2.1 *Если x_0 – точка устранимого разрыва, то переопределив (или доопределив) функцию f в точке x_0 значением $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ получится непрерывная в точке x_0 функция.*

Пример 8.2.1 *Пусть $f(x) = |\operatorname{sign} x|$. Тогда $f(0 + 0) = f(0 - 0) = 1$, но $f(0) = 0$, то есть точка $x_0 = 0$ – точка устранимого разрыва первого рода.*

Пример 8.2.2 *Пусть $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. Тогда $f(1+0) = f(1-0) = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2$. Однако сама функция в точке $x_0 = 1$ не определена. Тем самым в точке $x_0 = 1$ функция имеет устранимый разрыв.*

Определение 8.2.3 (Разрыв I рода) *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Если существуют пределы $f(x_0 + 0)$, $f(x_0 - 0)$, но*

$$f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0),$$

то точка x_0 называется точкой разрыва первого рода или точкой разрыва типа скачок.

Замечание 8.2.2 *Разность $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется величиной скачка.*

Пример 8.2.3 *Пусть $f(x) = \operatorname{sign} x$. Тогда $f(0 + 0) = 1$, $f(0 - 0) = -1$. Значит, точка $x_0 = 0$ является точкой разрыва первого рода.*

Определение 8.2.4 (Разрыв II рода) *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Если не существует (в $\mathbb{R}$) хотя бы один из двух пределов $f(x_0 - 0)$ или $f(x_0 + 0)$, то точка x_0 называется точкой разрыва второго рода. В случае, если один из пределов бесконечен, то точку x_0 называют точкой бесконечного разрыва.*

Пример 8.2.4 *Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$. Тогда $f(0 + 0) = +\infty$ и $f(0 - 0) = -\infty$, значит точка $x_0 = 0$ – точка разрыва второго рода (бесконечный разрыв).*

Пример 8.2.5 *Пусть $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Положив*

$$x_n^1 = \frac{1}{2\pi n},\ x_n^2 = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi n}.$$

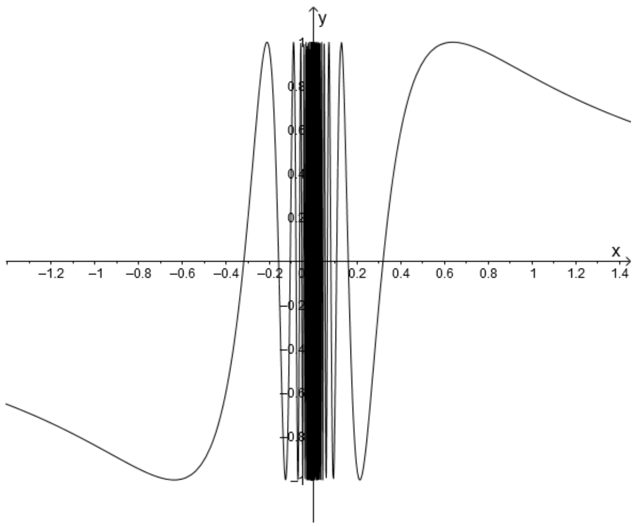

Рис. 4 График $y = \sin\frac{1}{x}$

очевидно, что $x_n^i \to 0+0$, $i = 1, 2$. *Однако,*

$$\sin\frac{1}{x_n^1} = \sin(2\pi n) \to 0,$$

а

$$\sin\frac{1}{x_n^2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \to 1.$$

Значит, согласно отрицанию определения предела по Гейне, не существует $\lim\limits_{x\to 0+0} \sin\frac{1}{x}$. *Аналогично можно показать, что не существует* $\lim\limits_{x\to 0-0} \sin\frac{1}{x}$. *Тем самым, точка* $x_0 = 0$ *– точка разрыва второго рода. Попытка изобразить график этой функции представлена на рисунке 4.*

Пример 8.2.6 *Еще одна классическая функция – функция Дирихле:*

$$d(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{I} \end{cases}.$$

Ясно, что данная функция разрывна в каждой точке и каждая точка является точкой разрыва второго рода.

8.3 Локальные свойства непрерывных функций

Теорема 8.3.1 *Пусть функции* $f, g : E \to \mathbb{R}$ *непрерывны в точке* x_0, *тогда:*

1. *Функция* $f(x)$ *ограничена в некоторой окрестности* x_0.
2. *Функция* $f(x) + g(x)$ *– непрерывна в* x_0.
3. *Функция* $f(x)g(x)$ *– непрерывна в* x_0.

4. *Функция* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *– непрерывна в* x_0, *если* $g(x_0) \neq 0$.

Доказательство. Если x_0 – изолированная точка для E, то теорема очевидна. Если x_0 – предельная точка для E, то теорема является прямым следствием теоремы об арифметических свойствах пределов. □

Теорема 8.3.2 (О непрерывности сложной функции) *Пусть* $f : E_1 \to E_2$, $g : E_2 \to \mathbb{R}$, *функция* $f(x)$ *непрерывна в точке* $x_0 \in E_1$, *а функция* $g(y)$ *непрерывна в точке* $y_0 = f(x_0) \in E_2$. *Тогда функция* $g(f(x))$ *непрерывна в точке* x_0.

Доказательство. Так как $g(y)$ непрерывна в точке y_0, то

$$\forall U(g(y_0))\ \exists U(y_0) : \forall y \in E_2 : y \in U(y_0) \Rightarrow g(y) \in U(g(y_0)).$$

Так как $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то по $U(y_0)$

$$\exists U(x_0) : \forall x \in E_1, x \in U(x_0) \Rightarrow f(x) \in U(y_0),$$

откуда

$$\forall x \in E_1, x \in U(x_0) \Rightarrow g(f(x)) \in U(g(f(x_0))),$$

то есть $g(f(x))$ непрерывна в точке x_0. □

Следствие 8.3.3 (Теорема о пределе сложной функции) *Пусть* $f : E_1 \to E_2$, $g : E_2 \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$, *а функция* $g(y)$ *непрерывна в точке* y_0. *Тогда* $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = g(y_0)$.

Доказательство. Доопределив функцию $f(x)$ в точке x_0 по непрерывности значением y_0, по теореме о непрерывности сложной функции, $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = g(y_0)$. Так как при $x \to x_0$ выполняется $x \neq x_0$, то для исходной функции f справедливо требуемое равенство. □

Пример 8.3.1 *Лишь требование существования предела функции* $g(y)$ *в точке* y_0 *недостаточно. Пусть* $g(y) = |\operatorname{sign} y|$, *а* $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$. *Тогда* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{y\to 0} g(y) = 1$, *но не существует предела* $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x))$. *Действительно, пусть*

$$x_n^1 = \frac{1}{2\pi n},\ x_n^2 = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} g(f(x_n^1)) = 0$, *а* $\lim\limits_{n\to\infty} g(f(x_n^2)) = 1$.

8.4 Глобальные свойства непрерывных функций

Теорема 8.4.1 (Первая теорема Больцано-Коши) *Пусть* $f(x) \in C[a,b]$ *и* $f(a) \cdot f(b) < 0$. *Тогда* $\exists c \in (a,b) : f(c) = 0$.

Доказательство. Разделим отрезок $[a,b]$ пополам точкой $c_1 = \frac{a+b}{2}$, тогда если $f(c_1) = 0$, то условие теоремы выполняется, а если $f(c_1) \neq 0$ имеем два случая: либо $f(c_1) > 0$, либо $f(c_1) < 0$. Тогда выберем отрезок либо $[a, c_1]$, либо $[c_1, b]$ так, чтобы на его концах значения функции были разных знаков. С этим отрезком поступим так же, как и с исходным, то есть делим пополам и продолжаем процесс дальше.

На очередном шаге мы либо попадем в точку $c \in [a,b]$, где $f(c) = 0$, либо получим систему вложенных отрезков I_n, длины которых стремятся к нулю и на концах которых функция f принимает значения разных знаков. Согласно принципу вложенных отрезков, найдется единственная точка $c \in [a,b]$, принадлежащая каждому отрезку I_n. Пусть a_n – левый конец отрезка I_n, а b_n его правый конец. Можно считать, что

$$f(a_n) < 0, f(b_n) > 0,$$

или наоборот. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$ и $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) \leqslant 0, \quad \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c) \geqslant 0,$$

то есть $f(c) = 0$. □

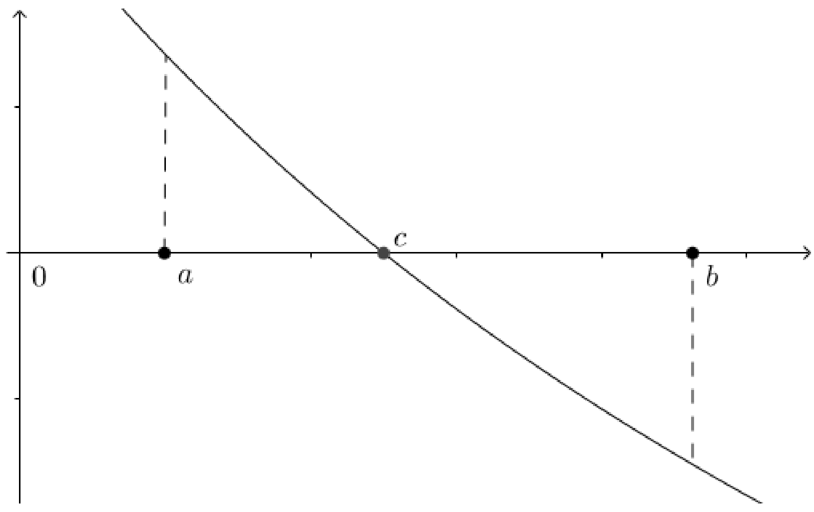

Рис. 5 Теорема Вейерштрасса

Замечание 8.4.1 *Геометрически теорема означает, что уравнение* $f(x) = 0$ *имеет хотя бы одно решение на отрезке* $[a,b]$ *(см. рисунок 5). Кроме того, доказательство теоремы дает простейший способ поиска корня.*

Теорема 8.4.2 (Вторая теорема Больцано-Коши) *Пусть* $f(x) \in C[a,b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A < B$. *Тогда* $\forall C \in (A,B)\ \exists c \in (a,b) : f(c) = C$.

Доказательство. Пусть $C \in (A, B)$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - C$. Функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $\varphi(a) = A - C < 0$, а $\varphi(b) = B - C > 0$, т. е. $\varphi(a) \cdot \varphi(b) < 0$.
По первой теореме Больцано-Коши (8.4.1), имеем

$$\exists c \in (a,b) : \varphi(c) = 0 \Rightarrow f(c) - C = 0 \Rightarrow f(c) = C.$$

□

Замечание 8.4.2 *Геометрически вторая теорема Больцано-Коши означает, что непрерывная на отрезке функция* f *принимая два каких-то значения, принимает на этом отрезке и все промежуточные. Эту теорему часто называют теоремой о промежуточных значениях непрерывной функции.*

Теорема 8.4.3 (Теорема Вейерштрасса) *Пусть* $f(x) \in C[a, b]$. *Тогда* $f(x)$ *ограничена на* $[a, b]$ *и принимает на нем наибольшее и наименьшее значение.*

Доказательство.
Пусть $x \in [a, b]$. Так как функция $f(x)$ непрерывна в точке x, то она ограничена в некоторой окрестности $U(x)$ этой точки по теореме 8.3.1. Множество таких окрестностей $U(x)$, $x \in [a, b]$ образует покрытие отрезка $[a, b]$. По лемме Бореля-Лебега, существует конечное покрытие $U(x_1), U(x_2), \dots, U(x_n)$. В каждой окрестности $U(x_i)$ имеем

$$x \in [a,b], x \in U(x_i) \Rightarrow m_i \leqslant f(x) \leqslant M_i.$$

Положив $m = \min(m_1, \dots, m_n)$, $M = \max(M_1, \dots, M_n)$ получим, что $m \leqslant f(x) \leqslant M$ на $[a, b]$, то есть, $f(x)$ ограничена.
Второй пункт будет доказан от противного. Пусть $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, причем супремум не достигается. Тогда функция

$$\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

непрерывна на $[a, b]$, а значит ограничена (по только что доказанному пункту 1), то есть существует положительное число M_1, что $\varphi(x) \leqslant M_1$. Но тогда

$$f(x) \leqslant M - \frac{1}{M_1}$$

и M – не супремум. Противоречие. □

Теорема 8.4.4 (О существовании и непрерывности обратной функции) *Пусть функция $f(x)$ строго возрастает и непрерывна на отрезке $[a,b]$, причем $f(a) = c$, $f(b) = d$. Тогда на отрезке $[c,d]$ определена обратная функция $x = f^{-1}(y)$, которая непрерывна на $[c,d]$ и строго возрастает.*

Доказательство. Сначала будет показано, что обратная функция существует. По второй теореме Больцано - Коши, $\forall y \in (c,d)\ \exists x \in (a,b) : f(x) = y$. Кроме того, так как $f(x)$ строго возрастает, то $\forall x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Тогда $f(x)$ – взаимно однозначное отображение отрезка $[a,b]$ на отрезок $[c,d]$, а следовательно, существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, определенная на $[c,d]$.

Далее будет показано, что обратная функция строго возрастает. От противного, пусть $\exists y_1 < y_2 : f^{-1}(y_1) = x_1 \geqslant x_2 = f^{-1}(y_2)$. По условию $f(x)$ возрастает. Подействовав ею на неравенство $f(x_1) = y_1 \geqslant y_2 = f(x_2)$, получается противоречие.

Осталось показать, что обратная функция непрерывна. Для этого достаточно установить, что $f^{-1}(y_0 - 0) = f^{-1}(y_0) = f^{-1}(y_0 + 0)$ (для граничных значений отрезка равенства односторонние). От противного. Пусть, например, $f^{-1}(y_0 - 0) \neq f^{-1}(y_0)$. Тогда, в силу возрастания $f^{-1}(y)$ она не принимает значений из интервала $(f^{-1}(y_0 - 0), f^{-1}(y_0))$. Противоречие.

□

Замечание 8.4.3 *В предыдущей теореме строгое возрастание можно, с необходимыми изменениями порядка c и d, заменить на строгое убывание. Кроме того, вместо отрезка $[a,b]$ можно рассматривать интервал, полуинтервал или луч.*

8.5 Первый замечательный предел

Далее устанавливается равенство, которое будет часто использоваться в дальнейшем.

Теорема 8.5.1 (Первый замечательный предел)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Доказательство. Пусть $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Из геометрических соображений (рисунок 6) очевидно неравенство

$$S_{\triangle OAB} < S_{\text{сект. } OAB} < S_{\triangle OCB}.$$

Вычислив каждую из площадей, имеем

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot AM = \frac{1}{2} \cdot \sin x,$$

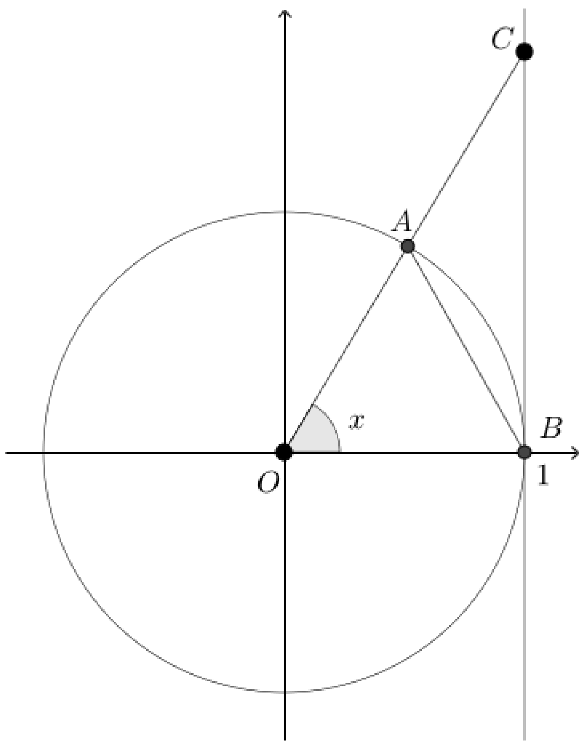

Рис. 6 Первый замечательный предел

$$S_{\text{сект. } OAB} = \frac{\pi \cdot x}{2\pi} = \frac{x}{2},$$
$$S_{\triangle OCB} = \frac{1}{2} \cdot CB \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg} x.$$

Тогда получаем цепочку неравенств

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

или

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Поделив на $\sin x$, получается

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Так как все функции, входящие в неравенство, четные, можно утверждать, что неравенство справедливо при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$. Попутно установлено, что

$$\sin x < x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

а значит, что

$$|\sin x| < |x|, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \tag{4}$$

Устремим x к 0, при этом заметив, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$, так как

$$|\cos x - 1| = |\cos x - \cos 0| = \left|2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}\right| \leqslant \left|2\sin\frac{x}{2}\right| < 2\left|\frac{x}{2}\right| = |x| < \varepsilon,$$

где предпоследнее неравенство справедливо в силу (4). Положив $\delta = \varepsilon$ получается, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$. Кроме того, предел правой части неравенства $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$. Тогда по теореме о сжатой переменной

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

□

Пример 8.5.1 *Вычислить предел*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ctg} x(1-\cos^2(2x))}{x^2+5x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin^2(2x)}{x(x+5)\sin x}.$$

Так как $\sin^2(2x) = 4\sin^2 x\cos^2 x$, *получается*

$$\lim_{x\to 0}\frac{4\cos^3 x\sin^2 x}{x(x+5)\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{4\cos^3 x\sin x}{x(x+5)}.$$

По доказанному выше, $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$. *Кроме того, так как* $\lim\limits_{x\to 0}(x+5) = 5$ *и учитывая первый замечательный предел,*

$$\lim_{x\to 0}\frac{4\cos^3 x\sin x}{x(x+5)} = 4\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+5}\lim_{x\to 0}\cos^3 x\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{4}{5}.$$

8.6 Непрерывность элементарных функций

Определение 8.6.1 *Основными элементарными функциями, или простейшими функциями, называются следующие функции:*

1. *Постоянная:* $y(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$.
2. *Степенная:* $y(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. *Показательная* $y(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.
4. *Логарифмическая:* $y(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.
5. *Тригонометрические:* $y(x) = \sin x$, $y(x) = \cos x$, $y(x) = \operatorname{tg} x$, $y(x) = \operatorname{ctg}(x)$.

6. *Обратные тригонометрические:* $y(x) = \arcsin x$, $y(x) = \arccos x$, $y(x) = \operatorname{arctg} x$, $y(x) = \operatorname{arcctg} x$.

Ниже подробно будет рассмотрена каждая из функций, с указанием области определения и свойств.

Определение 8.6.2 *Функции, которые получаются из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических действий и операций композиции называются элементарными.*

В виду того, что некоторые функции были определены в школе недостаточно строго, их определения будут дополнены.
1. Постоянная функция. Эта функция, как уже было отмечено в примере 8.1.1, непрерывна на $\mathbb{R}$.
2. Степенная функция. Функция x^α будет определена при различных значениях x и α, постепенно усложняя вид α.

При $\alpha = 1$ получается функция $y(x) = x$, которая, как отмечалось в примере 8.1.2, непрерывна на $\mathbb{R}$.

При $\alpha = n \in \mathbb{N}$ по определению

$$x^n = x \cdot \ldots \cdot x, \quad x \in \mathbb{R},$$

и функция непрерывна на $\mathbb{R}$, как произведение конечного числа непрерывных функций.

При $\alpha = -n, n \in \mathbb{N}$, полагаем

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

и функция непрерывна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, как частное непрерывных функций.

При $\alpha = 0$ по определению полагается $x^0 = 1$ при $x \neq 0$. Удобно доопределить функцию по непрерывности и считать, что $x^0 = 1$ при $x \in \mathbb{R}$.

При нечетном $n \in \mathbb{N}$ функция x^n возрастает, причем $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} x^n = +\infty$, $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} x^n = -\infty$, а значит, по теореме 8.4.4 $E(x^n) = \mathbb{R}$. Если $n \in \mathbb{N}$ четно, то функция x^n возрастает при $x \geqslant 0$, $\sup\limits_{x\geqslant 0} x^n = +\infty$, $\inf\limits_{x\geqslant 0} x^n = 0$. По теореме 8.4.4, существует и непрерывна обратная функция, обозначаемая $x^{1/n}$ или $\sqrt[n]{x}$, причем

$$x^{1/n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad n \text{ нечетно},$$

$$x^{1/n} : [0, +\infty) \to [0, +\infty), \quad n \text{ четно},$$

Ниже приведены свойства корня, хорошо известные из школы.

Лемма 8.6.1 *Пусть* $x, y \geqslant 0$ *и* $m, n \in \mathbb{N}$, *тогда:*

1. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$.

2. $\sqrt[n]{x} = \sqrt[nm]{x^m}$.

3. $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$.

4. $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$, $y \neq 0$.

Доказательство. Все свойства доказываются исходя из определения. Для примера будет доказано первое свойство. Пусть $z = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}$, тогда $z^n = \sqrt[m]{x}$ и $z^{nm} = x$, откуда $z = \sqrt[nm]{x}$. □

Описанные выше свойства справедливы и при $x, y < 0$, если указанные корни существуют. Пусть $\alpha \in \mathbb{Q}$, причем $\alpha = \frac{p}{q} = r$, где последняя дробь несократима. Положим

$$x^r = (x^p)^{1/q}$$

для всех тех x, при которых правая часть имеет смысл. Таким образом, функция x^r определена в следующих случаях:

$$x > 0, \quad \forall r \in \mathbb{Q},$$

$$x = 0, \quad r \geqslant 0,$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad q \text{ нечетно.}$$

Функция x^r непрерывна на области определения, возрастает на $[0, +\infty)$ при $r > 0$, убывает на $(0, +\infty)$ при $r < 0$. Ниже приведены свойства рациональной степени.

Лемма 8.6.2 *Пусть $x, y > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, тогда:*

1. $x^{-r_1} = \frac{1}{x^{r_1}}$.

2. $x^{r_1}x^{r_2} = x^{r_1+r_2}$.

3. $(x^{r_1})^{r_2} = x^{r_1r_2}$.

4. $x^{r_1}y^{r_1} = (xy)^{r_1}$.

Доказательство. Первое свойство.

$$x^{-r_1} = x^{-\frac{m}{n}} = \left(x^{-m}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x^{-m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{x^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = \frac{1}{x^{r_1}}.$$

Второе свойство. Пользуясь свойствами корней,

$$x^{r_1}x^{r_2} = \sqrt[n_1]{x^{m_1}}\sqrt[n_2]{x^{m_2}} = \sqrt[n_1n_2]{x^{m_1n_2}}\sqrt[n_2n_1]{x^{n_1m_2}} =$$

$$= \sqrt[n_1 n_2]{x^{m_1 n_2 + n_1 m_2}} = x^{\frac{m_1 n_2 + n_1 m_2}{n_1 n_2}} = x^{r_1} x^{r_2}.$$

Остальные свойства доказываются аналогично. □

На рисунке 7 изображены графики степенных функций при различных α при $x > 0$.

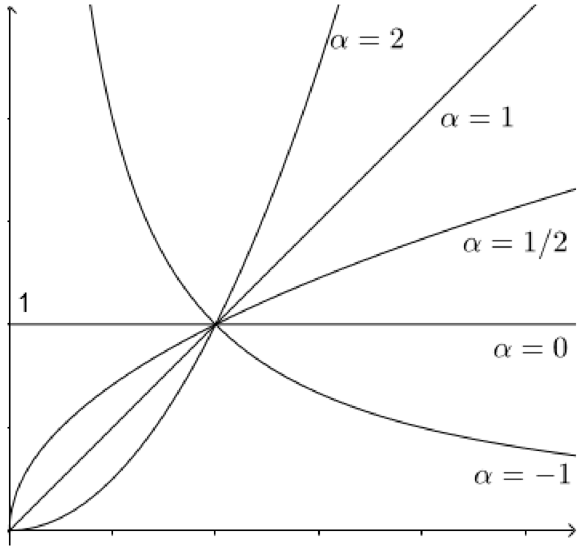

Рис. 7 Графики степенных функций

Для $\alpha \in \mathbb{I}$ определение степенной функции будет закончено ниже.

3. Показательная функция. Пусть $0^x = 0$ для $x > 0$. Пусть $a > 0$. Цель данного пункта – определить a^x для $x \in \mathbb{R}$. Пока что значение a^x определено лишь при $x \in \mathbb{Q}$. Эта функция обладает следующими свойствами, хорошо известными из школы. Ниже эти свойства сформулированы, хотя часть из них уже была доказана выше.

Лемма 8.6.3 *Пусть $r, s \in \mathbb{Q}$, $a, b > 0$, тогда*

1. *Если $r < s$, то $a^r < a^s$ при $a > 1$ и $a^s < a^r$ при $0 < a < 1$.*
2. $a^{r+s} = a^r a^s$.
3. $(a^r)^s = a^{rs}$.
4. $(ab)^r = a^r b^r$.

Доказательство. 1. Исходя из принципа индукции получается, что если $x, y > 0$, то

$$(x < y) \Leftrightarrow (x^n < y^n),$$

причем

$$(x = y) \Leftrightarrow (x^n = y^n).$$

Тогда, если $a > 1$, то $a^{\frac{1}{n}} > 1$ при натуральных n (если предположить $x = a^{\frac{1}{n}} \leqslant 1$, то это означает, что $x^n = a > 1$, что противоречит вышесказанному). Кроме того, аналогично предыдущему при натуральных m выполняется $(a^m)^{\frac{1}{n}} > 1$. Тогда

$$a^s = a^r \cdot a^{s-r} > a^r.$$

Остальные свойства доказаны в лемме 8.6.2. $\square$

Определение 8.6.3 *Пусть $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Q}$. По определению,*

$$a^x = \lim_{r \to x} a^r.$$

При $a > 0$, $a \neq 1$ полученная функция называется показательной функцией с основанием a.

Для того, чтобы введенное определение было корректным, необходимо доказать, что данный предел существует, и что для рациональных x новое определение совпадает со старым.

Лемма 8.6.4 *Пусть $a > 0$, $r_n \in \mathbb{Q}$, $\lim\limits_{n \to \infty} r_n = 0$, тогда $\lim\limits_{n \to \infty} a^{r_n} = 1$.*

Доказательство. При $a = 1$ лемма выполняется, так как $1^{r_n} = 1$. В частном случае, при $r_n = \frac{1}{n}$ уже доказано, что

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Пусть $a > 1$, $\varepsilon > 0$, r_n произвольна, тогда можно выбрать n_0 такой, что

$$1 - \varepsilon < a^{-1/n_0} < a^{1/n_0} < 1 + \varepsilon.$$

Так как $r_n \to 0$, то найдется номер n_1, что при $n > n_1$

$$-\frac{1}{n_0} < r_n < \frac{1}{n_0}.$$

В силу леммы 8.6.3,

$$1 - \varepsilon < a^{-1/n_0} < a^{r_n} < a^{1/n_0} < 1 + \varepsilon,$$

что и означает, что $\lim\limits_{n \to \infty} a^{r_n} = 1$.
Если $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$ и

$$a^{r_n} = \frac{1}{(1/a)^{r_n}} \to 1.$$

$\square$

Лемма 8.6.5 *Пусть $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $r_n \in \mathbb{Q}$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$. Тогда последовательность a^{r_n} имеет предел.*

Доказательство. При $a = 1$ лемма, очевидно, выполняется. Пусть $a > 1$. Пусть s_n – возрастающая последовательность рациональных чисел, сходящаяся к x. Тогда, согласно лемме 8.6.3, последовательность a^{s_n} возрастает и ограничена сверху числом $a^{[x]+1}$, а значит, по теореме Вейерштрасса, имеет предел. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} a^{s_n} = A$. Но тогда

$$a^{r_n} = a^{r_n - s_n} a^{s_n} \to A,$$

так как по предыдущей лемме $a^{r_n - s_n} \to 1$.

Если $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$ и по доказанному $\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n} = A > 0$. Тогда

$$a^{r_n} = \frac{1}{(1/a)^{r_n}} \to \frac{1}{A}.$$

$\square$

Данная лемма устанавливает корректность определения a^x. Во-первых, так как для любой последовательности рациональных чисел предел существует, то он один и тот же (это доказывается аналогично доказательству в критерии Коши). Если же $x \in \mathbb{Q}$, то положим $r_n = x$ получаем, что новое определение совпадает со старым.

Замечание 8.6.1 *Последовательность s_n, выбранная в доказательстве леммы, существует. Например, можно взять $s_n = \frac{[10^n x]}{10^n}$. Детальная проверка оставляется читателю.*

Ниже приведены основные свойства функции a^x.

Лемма 8.6.6 *Функция a^x возрастает на $\mathbb{R}$ при $a > 1$ и убывает на $\mathbb{R}$ при $0 < a < 1$.*

Доказательство. Пусть $a > 0$, $x < y$. Нужно показать, что $a^x < a^y$. Пусть числа $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ такие, что

$$x < r_1 < r_2 < y$$

и последовательности $r_n^1 < x$, $r_n^2 > y$ такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n^1 = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n^2 = y$. В силу монотонности показательной функции при рациональном аргументе,

$$a^{r_n^1} < a^{r_1} < a^{r_2} < a^{r_n^2}$$

и по теореме о предельном переходе в неравенствах

$$a^x \leqslant a^{r_1} < a^{r_2} \leqslant a^y.$$

Случай $0 < a < 1$ разбирается аналогично. $\square$

Лемма 8.6.7 *$a^{x+y} = a^x a^y$, где $x \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть $r_n^1, r_n^2 \in \mathbb{Q}$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} r_n^1 = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n^2 = y$. Так как

$$a^{r_n^1 + r_n^2} = a^{r_n^1} a^{r_n^2},$$

то переходя к пределу в этом равенстве, получается требуемое. □

Лемма 8.6.8 *Показательная функция непрерывна на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Уже доказано, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Пусть $a > 1$, $\varepsilon > 0$, x_n– произвольная последовательность, стремящаяся к нулю, тогда можно выбрать n_0 такой, что

$$1 - \varepsilon < a^{-1/n_0} < a^{1/n_0} < 1 + \varepsilon.$$

Так как $x_n \to 0$, то найдется номер n_1, что при $n > n_1$

$$-\frac{1}{n_0} < x_n < \frac{1}{n_0}.$$

В силу леммы 8.6.3,

$$1 - \varepsilon < a^{-1/n_0} < a^{x_n} < a^{1/n_0} < 1 + \varepsilon,$$

что и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = 1$.
Если $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$ и

$$a^{x_n} = \frac{1}{(1/a)^{x_n}} \to 1.$$

Непрерывность в произвольной точке x_0 следует из непрерывности в нуле, так как

$$a^{x_0 + \Delta x} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{\Delta x} - 1) \to 0.$$

□

Лемма 8.6.9 $(a^x)^y = a^{xy}$.

Доказательство. Пусть $x_n, y_n \in \mathbb{Q}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Согласно лемме 8.6.3,

$$(a^{x_n})^{y_m} = a^{x_n y_m}.$$

Пусть m фиксировано, а $n \to \infty$. По определению показательной функции

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n y_m} = a^{x y_m}, \quad \lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x.$$

В силу непрерывности степенной функции с рациональным показателем,

$$\lim_{n\to\infty} (a^{x_n})^{y_m} = a^{x y_m}.$$

Теперь пусть $m \to \infty$, тогда в силу непрерывности показательной функции получим требуемое. $\square$

Лемма 8.6.10 $(ab)^x = a^x b^x$.

Доказательство. Для доказательства нужно осуществить предельный переход в равенстве для степеней с рациональным показателем. Детали оставляем читателю. $\square$

Лемма 8.6.11 $E(a^x) = (0, +\infty)$.

Доказательство. Пусть $a > 1$. Функция a^x строго возрастает, причем $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$, а $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$. Согласно теореме Больцано-Коши, $E(a^x) = (0, +\infty)$.
Случай $0 < a < 1$ разбирается аналогично. $\square$
Графики показательных функции при различных основаниях a представлены на рисунке 8.
4. Логарифмическая функция. Выше показано, что функция a^x является биекцией между $\mathbb{R}$ и $(0, \infty)$.

Определение 8.6.4 *Пусть $a > 0, a \neq 1$. Функция, обратная к a^x, называется логарифмом по основанию a и обозначается $\log_a x$.*

Из теоремы 8.4.4 следует, что $\log_a x : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, непрерывна на области определения, возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$. Кроме того,

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \left\{ \begin{array}{cc} +\infty, & a > 1 \\ -\infty, & 0 < a < 1 \end{array} \right., \quad \lim_{x\to 0} \log_a x = \left\{ \begin{array}{cc} -\infty, & a > 1 \\ +\infty, & 0 < a < 1 \end{array} \right..$$

Из определения логарифмической функции и свойств показательной вытекают все свойства логарифма, хорошо известные из школы. Ниже приведены некоторые из них.

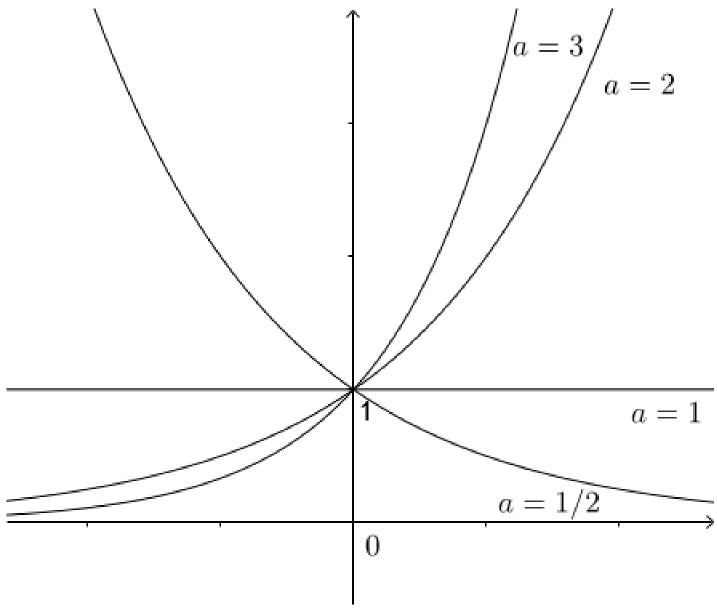

Рис. 8 Графики показательных функций

Лемма 8.6.12 *Справедливы следующие равенства*

1. $a^{\log_a x} = x$ *при* $x > 0$.
2. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ *при* $x, y > 0$.
3. $\log_a x^p = p \log_a x$ *при* $x > 0$.
4. $\log_{a^p} x = \frac{1}{p} \log_a x$ *при* $x > 0$
5. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ *при* $x > 0$.

Доказательство. Все данные свойства доказываются одинаково, используя свойства показательной функции. Например, так как

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy,$$

то $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$. □

Часто бывает удобно использовать логарифм по основанию e. Такой логарифм называется, как известно, натуральным логарифмом и обозначается $\ln x$.

Графики логарифмических функций при различных основаниях a изображены на рисунке 9.

2'. Степенная функция (продолжение). При всех $x > 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ верно представление

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x},$$

а значит степенная функция x^α непрерывна на $(0, \infty)$ при всех $\alpha \in \mathbb{R}$.

5. Тригонометрические функции. Далее будут использованы школьные

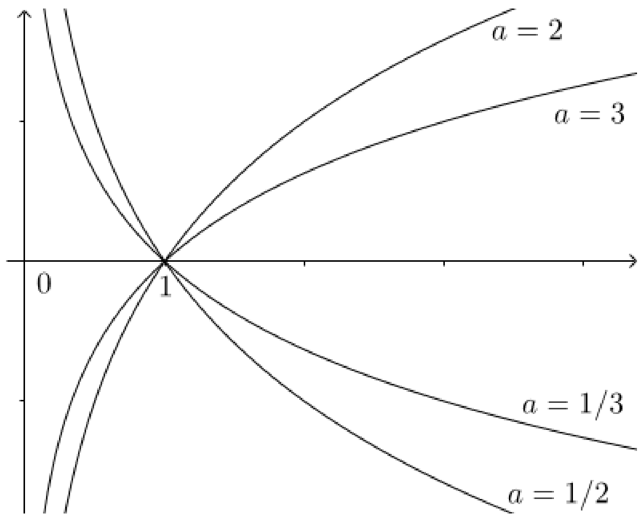

Рис. 9 Графики логарифмических функций

определения функций $\sin x$ и $\cos x$, как ординаты и абсциссы точки единичной окружности, а также все формулы, выведенные на основе данного определения.

Лемма 8.6.13 *Справедливо неравенство*

$$|\sin x| \leqslant |x|, \quad x \in \mathbb{R},$$

причем равенство имеет место только при $x = 0$.

Доказательство. При $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$ неравенство доказано в доказательстве теоремы 8.5.1. При $x \geqslant \frac{\pi}{2}$ получается

$$\sin x \leqslant 1 < \frac{\pi}{2} \leqslant x.$$

Аналогично рассматривается случай $x \leqslant -\frac{\pi}{2}$. □

Теорема 8.6.1 *Функции* $\sin x$, $\cos x$ *непрерывны при* $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, тогда

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\cos\frac{x + x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\left|\frac{x - x_0}{2}\right| = |x - x_0| < \varepsilon.$$

Взяв $\delta = \varepsilon$ получается требуемое.
Непрерывность функции $\cos x$ доказывается аналогично, или используя представление $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. □
Графики функций $\sin x$, $\cos x$ представлены на рисунках 10, 11.

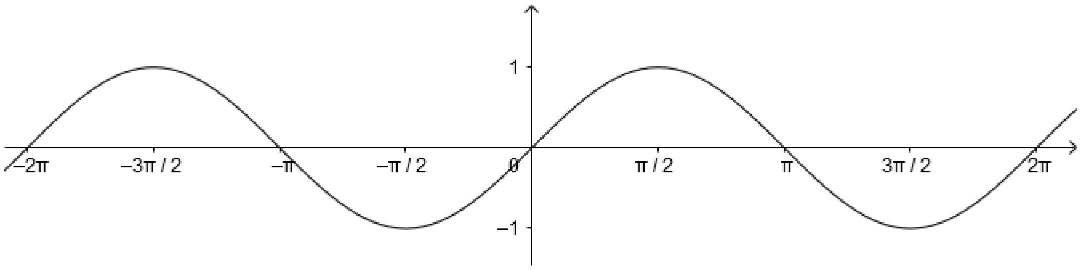

Рис. 10 График функции $y = \sin x$

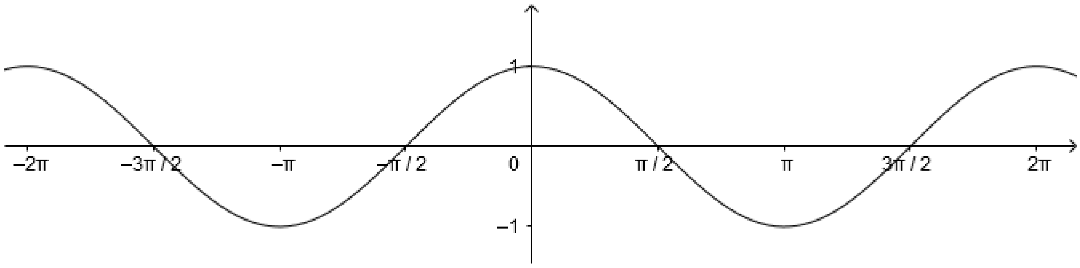

Рис. 11 График функции $y = \cos x$

Следствие 8.6.2 *Функции*

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k : \ k \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{ \pi k : \ k \in \mathbb{Z} \}$$

непрерывны на своих областях определения.

Доказательство. Доказательство немедленно следует из непрерывности функций $\sin x$ и $\cos x$ и теоремы о непрерывности частного. □

Графики функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ представлены на рисунке 12.

6. Обратные тригонометрические функции. Функция $\sin x : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ не является обратимой, так как каждое свое значение она принимает более одного раза (даже бесконечное число раз). Однако функция $\sin x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ возрастает и поэтому обратима.

Определение 8.6.5 *Пусть* $\sin x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$*. Обратная к данной функции функция называется арксинусом и обозначается* $\arcsin x$*.*

Лемма 8.6.14 *Функция*

$$\arcsin x : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

возрастает и непрерывна на всей области определения.

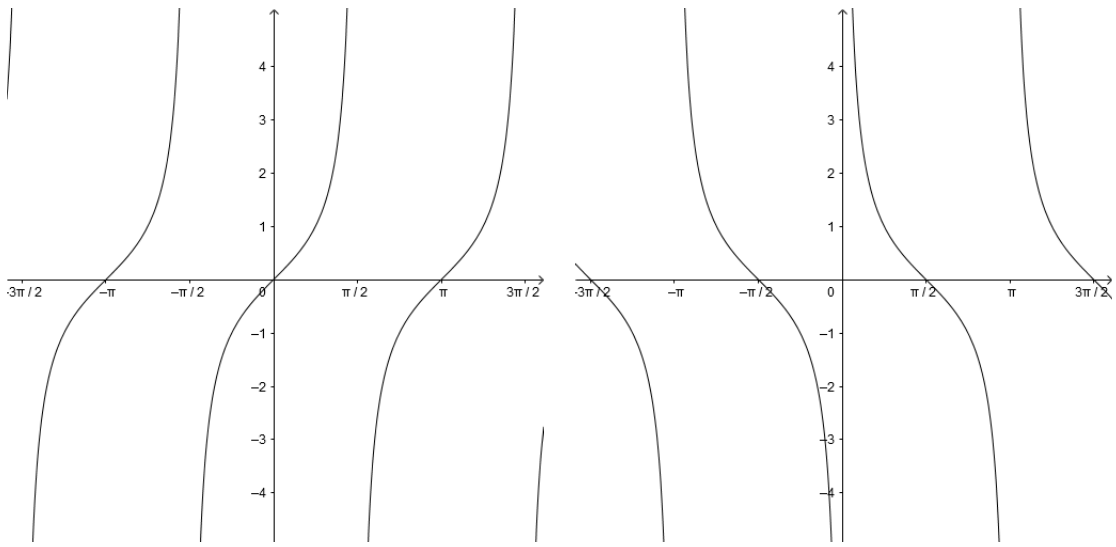

Рис. 12 Графики функций $y = \operatorname{tg} x$ (слева) и $y = \operatorname{ctg} x$ (справа)

Доказательство. Немедленно следует из теоремы 8.4.4. ☐

График функции $y = \arcsin x$ представлен на рисунке 13.

Функция $\cos x : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ не является обратимой, однако функция $\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$ убывает и поэтому обратима.

Определение 8.6.6 *Пусть* $\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$. *Обратная к данной функции функция называется арккосинусом и обозначается* $\arccos x$.

Лемма 8.6.15 *Функция*

$$\arccos x : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

убывает и непрерывна на всей области определения.

Доказательство. Немедленно следует из теоремы 8.4.4. ☐

График функции $y = \arccos x$ представлен на рисунке 13.

Функция $\operatorname{tg} x$ не является обратимой, однако функция $\operatorname{tg} x : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ возрастает и поэтому обратима.

Определение 8.6.7 *Пусть* $\operatorname{tg} x : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$. *Обратная к данной функции функция называется арктангенсом и обозначается* $\operatorname{arctg} x$.

Лемма 8.6.16 *Функция*

$$\operatorname{arctg} x : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

возрастает и непрерывна на всей области определения.

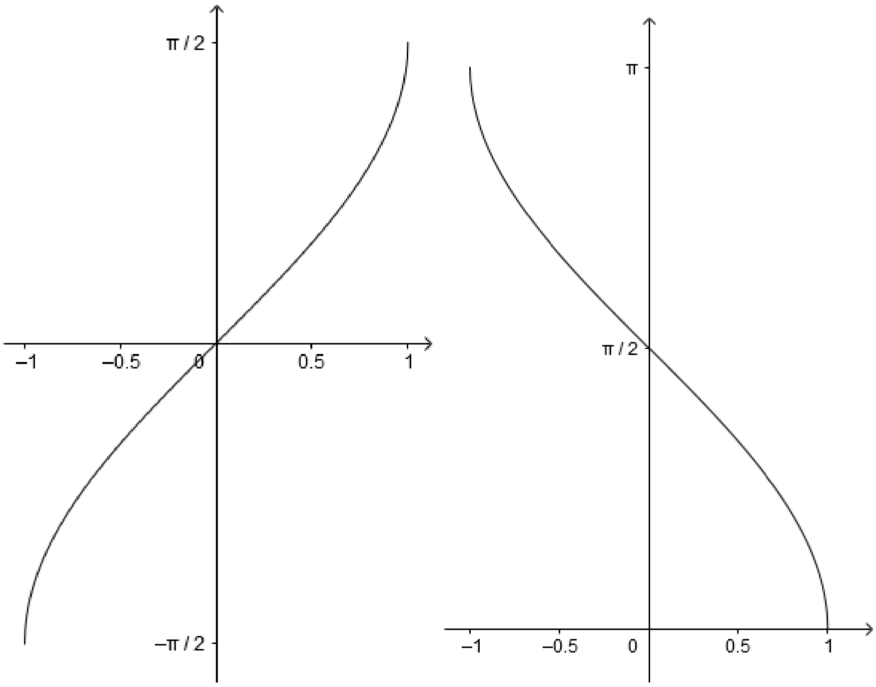

Рис. 13 Графики функций $y = \arcsin x$ (слева) и $y = \arccos x$ (справа)

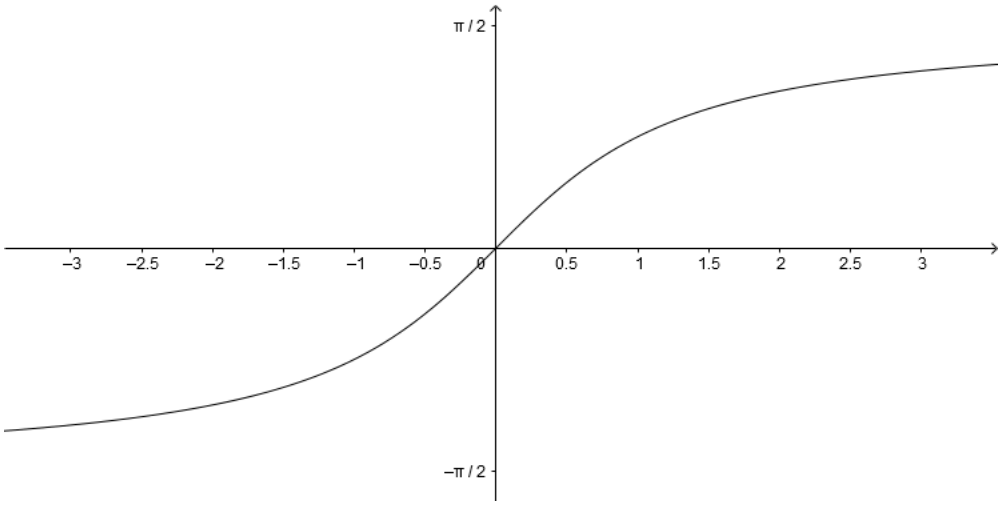

Рис. 14 График функции $y = \operatorname{arctg} x$

Доказательство. Немедленно следует из теоремы 8.4.4. □

График функции $y = \operatorname{arctg} x$ представлен на рисунке 14.

Функция $\operatorname{ctg} x$ не является обратимой, однако функция $\operatorname{ctg} x : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ убывает и поэтому обратима.

Определение 8.6.8 *Пусть* $\operatorname{ctg} x : (0, \pi) \to \mathbb{R}$*. Обратная к данной функции функция называется арккотангенсом и обозначается* $\operatorname{arcctg} x$*.*

Лемма 8.6.17 *Функция*

$$\operatorname{arcctg} x : \mathbb{R} \to (0, \pi)$$

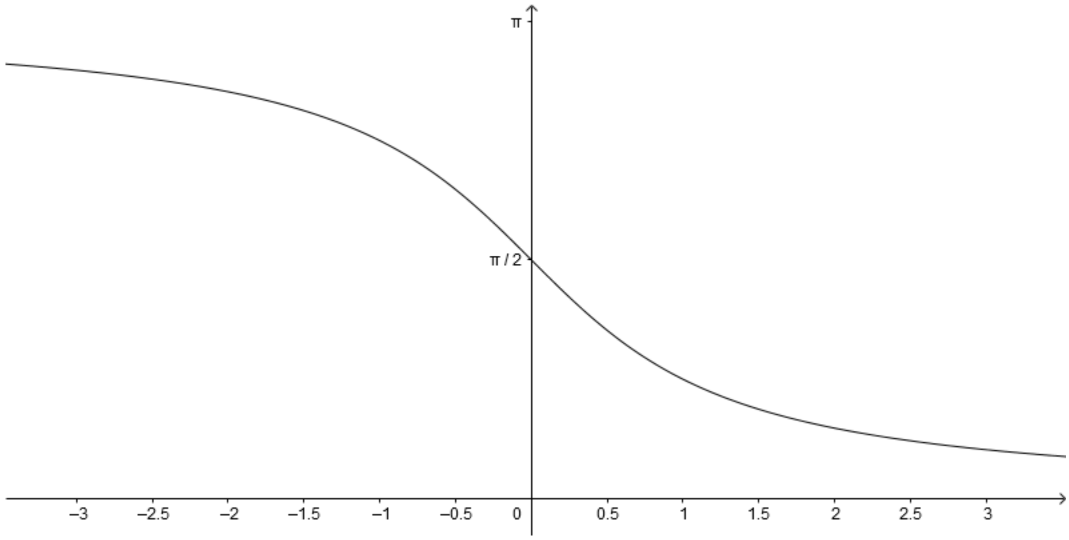

Рис. 15 График функции $y = \operatorname{arcctg} x$

убывает и непрерывна на всей области определения.

Доказательство. Немедленно следует из теоремы 8.4.4. □

Выше определены основные элементарные функции и доказано, что все они непрерывны на своих областях определения. Так как арифметические операции и композиция не выводят за класс непрерывных функций (в силу локальных свойств), то справедлива следующая теорема.

Теорема 8.6.3 *Все элементарные функции непрерывны на своей области определения.*

8.7 Второй замечательный предел

Теорема 8.7.1

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Доказательство. Функция

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x,$$

задана при $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 0]$. Пусть $x_n \in \mathbb{R} \setminus [-1, 0]$, $x_n \to \infty$. Достаточно показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = e$.

1. пстъ $x_n \in \mathbb{N}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Согласно второму замечательному пределу для последовательностей,

$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \Rightarrow |f(k) - e| < \varepsilon.$$

Так как $x_n \in \mathbb{N}$, то $x_n \to +\infty$ и

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow x_n > k_0,$$

а значит

$$|f(x_n) - e| < \varepsilon,$$

что и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = e$.

2. Пусть $x_n \to +\infty$. Тогда, начиная с некоторого номера, $x_n > 1$. Не нарушая общности можно считать, что x_n всегда больше 1. Очевидна цепочка неравенств

$$\left(1 + \frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]} \leqslant \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leqslant \left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1},$$

которую можно переписать в виде в виде

$$\frac{f([x_n]+1)}{1 + \frac{1}{[x_n]+1}} \leqslant f(x_n) \leqslant f([x_n])\left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right).$$

Так как $[x_n]+1$ и $[x_n]$ – последовательности натуральных чисел, стремящиеся к $+\infty$, по доказанному в пункте 1 имеем

$$\lim_{n\to\infty} f([x_n]+1) = e, \quad \lim_{n\to\infty} f([x_n]) = e,$$

а значит, по теореме о сжатой переменной, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = e$.

3. Пусть $x_n \to -\infty$. Можно считать, что $x_n < -2$. Если положить $y_n = -x_n$, то $y_n \to +\infty$ и $y_n - 1 \to +\infty$. Так как

$$f(x_n) = \left(1 + \frac{1}{-y_n}\right)^{-y_n} = \left(\frac{y_n}{y_n - 1}\right)^{y_n} = \left(1 + \frac{1}{y_n - 1}\right) f(y_n - 1)$$

и по доказанному в пункте 2, $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n - 1) = e$, получается требуемое.

4. Пусть $x_n \to \infty$, $x_n \in \mathbb{R} \setminus [-1, 0]$. Если число отрицательных (положительных) членов последовательности x_n конечно, то $x_n \to +\infty$ ($x_n \to -\infty$). Если же количество положительных и отрицательных членов последовательности бесконечно, то натуральный ряд разбивается на две подпоследовательности n_k и n_p так, что $x_{n_k} > 0$, $x_{n_p} < 0$. По доказанному,

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{p\to\infty} f(x_{n_p}) = e.$$

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \Rightarrow |f(x_{n_k}) - e| < \varepsilon,$$

$$\exists p_0 : \forall p > p_0 \Rightarrow |f(x_{n_p}) - e| < \varepsilon.$$

Тогда пусть $n_0 = \max(n_{k_0}, n_{p_0})$, тогда при $n > n_0$ либо $n = n_k$ при $k > k_0$, либо $n = n_p$ при $p > p_0$, значит

$$|f(x_n) - e| < \varepsilon,$$

то есть $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = e$. □

8.8 Следствия замечательных пределов

Ниже приведены важные следствия первого и второго замечательных пределов, часто используемые в дальнейшем.

Лемма 8.8.1

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

Доказательство. Действительно,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1,$$

где в последнем равенстве используется первый замечательный предел и непрерывность функции $\cos x$. □

Лемма 8.8.2

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

Доказательство. Пусть $y = \operatorname{arctg} x$. Так как $x \to 0$ и функция $\operatorname{arctg} x$ непрерывна, то $y \to 0$. Тогда

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{tg} y}{y}} = 1$$

по только что доказанному. □

Замечание 8.8.1 *Замена, проведенная в доказательстве выше, требует обоснования. Пусть $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$. Нужно вычислить*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} x_n}{x_n}.$$

Обозначив $y_n = \operatorname{arctg} x_n$, в силу непрерывность функции $\operatorname{arctg} x$ последовательность y_n стремится к 0. Кроме того, так как $x_n \neq 0$, то и $y_n \neq 0$. Тогда

$$\frac{\operatorname{arctg} x_n}{x_n} = \frac{y_n}{\operatorname{tg} y_n}.$$

Последний предел, как показано выше, равен 1, а значит для любой последовательности y_n такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, $y_n \neq 0$ выполняется

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{\operatorname{tg} y_n} = 1.$$

Тем самым выполнено определение по Гейне и

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

Лемма 8.8.3

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

Доказательство. Пусть $y = \sin x$. Так как $x \to 0$ и функция $\sin x$ непрерывна, то и $y \to 0$. Тогда

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\sin y}{y}} = 1.$$

Обоснование замены проводится аналогично замечанию 8.8.1. ☐

Лемма 8.8.4

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Доказательство. Домножив числитель и знаменатель на $(1+\cos x)$ и воспользовавшись первым замечательным пределом и непрерывностью функции $\cos x$, получается

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}.$$

☐

Лемма 8.8.5

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Доказательство. Пусть $y = \frac{1}{x}$, тогда $y \to \infty$ и

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to \infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e.$$

Замена обосновывается так же, как и в замечании 8.8.1. ☐

Лемма 8.8.6
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}.$$
В частности,
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

Доказательство. В силу формулы замены основания, достаточно доказать второе равенство. Так как логарифм непрерывен, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1.$$

□

Лемма 8.8.7
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^s-1}{sx}=1,\quad s\in\mathbb{R}.$$

Доказательство. Пусть $y=(1+x)^s-1$. В силу непрерывности степенной функции, при $x\to 0$ и $y\to 0$. Кроме того, $\ln(1+y)=s\ln(1+x)$ и

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^s-1}{sx}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{y}{s\ln(1+y)}\frac{s\ln(1+x)}{x}\right)=1.$$

Замена обосновывается так же, как и в замечании 8.8.1. □

Лемма 8.8.8
$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a.$$
В частности,
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Доказательство. Пусть $y=a^x-1$, откуда $x=\log_a(1+y)$ и при $x\to 0$ выполняется и $y\to 0$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\log_a(1+y)}{y}}=\ln a.$$

Замена обосновывается так же, как и в замечании 8.8.1. □

8.9 Асимптотическое сравнение функций

Определение 8.9.1 *Пусть $f, g : E \to \mathbb{R}$, x_0 – предельная для E и существует окрестность $\overset{o}{U}(x_0)$ такая, что $f(x) = \alpha(x)g(x)$ при $x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E$.*

1. *Если $\alpha(x)$ ограничена на $\overset{o}{U}(x_0) \cap E$, то говорят, что функция $f(x)$ есть O большое от функции $g(x)$ при $x \to x_0$ (или что функция $f(x)$ ограничена по сравнению с функцией $g(x)$ при $x \to x_0$) и пишут*
$$f(x) = O(g(x)), \quad x \to x_0.$$

2. *Если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, то говорят, что функция $f(x)$ есть o малое от функции $g(x)$ при $x \to x_0$ (или что функция $f(x)$ бесконечно малая по сравнению с функцией $g(x)$ при $x \to x_0$) и пишут*
$$f(x) = o(g(x)), \quad x \to x_0.$$

3. *Если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 1$, то говорят, что функция $f(x)$ эквивалентна функции $g(x)$ при $x \to x_0$ и пишут*
$$f(x) \sim g(x), \quad x \to x_0.$$

Лемма 8.9.1 *В случае, когда в $\overset{o}{U}(x_0)$ выполняется $g(x) \neq 0$, то определениям можно дать более простой вид.*

1. *$f(x) = O(g(x))$ при $x \to x_0$ равносильно тому, что $\frac{f(x)}{g(x)}$ ограничена на $\overset{o}{U}(x_0) \cap E$.*

2. *$f(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$ равносильно тому, что $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.*

3. *$f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$ равносильно тому, что $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.*

Доказательство. Первое утверждение. Пусть функция $\alpha(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ограничена на $\overset{o}{U}(x_0) \cap E$. Тогда на $\overset{o}{U}(x_0) \cap E$ выполняется
$$|\alpha(x)| = \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant C,$$
а значит $f(x) = \alpha(x)g(x)$ и $\alpha(x)$ ограничена.
Обратно, пусть $f(x) = \alpha(x)g(x)$ и $\alpha(x)$ ограничена. Тогда и $\alpha(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ограничена.
Остальные пункты доказываются аналогично и остаются в качестве упражнения. □

Пример 8.9.1 *Доказать, что*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{a^x}=0,\ a>1,$$

то есть $x=o(a^x)$ *при* $x\to+\infty$, $a>1$.
Действительно, справедливы неравенства

$$\frac{[x]}{a\cdot a^{[x]}}\leqslant\frac{x}{a^x}\leqslant\frac{[x]+1}{a^{[x]+1}}a.$$

Известно, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0,\ a>1,$$

значит если $\varepsilon>0$, *то найдется номер* n_0, *что при* $n>n_0$ *выполняется*

$$0<\frac{n}{a^n}<\varepsilon.$$

Так как $x\to+\infty$, *то найдется* δ, *что при* $x>\frac{1}{\delta}\Rightarrow[x]>n_0$, *а значит*

$$0<\frac{[x]}{a\cdot a^{[x]}}\leqslant\frac{\varepsilon}{a},\ 0<\frac{[x]+1}{a^{[x]+1}}a<\varepsilon a,$$

что и означает требуемое.

Пример 8.9.2 *Используя предыдущий пример не сложно показать, что* $x^s=o(a^x)$ *при* $x\to+\infty$, $a>1$, $s\in\mathbb{R}$.

Пример 8.9.3 *Доказать, что* $\log_a^\alpha x=o(x^s)$ *при* $x\to+\infty$, $s>0$.
Пусть $a>1$, *тогда достаточно вычислить*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a^\alpha x}{x^s}.$$

Пусть $t=\log_a x$. *Ясно, что* $t\to+\infty$ *и*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a^\alpha x}{x^s}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^\alpha}{a^{ts}}=0$$

по только что доказанному. Замена обосновывается так же, как и в замечании 8.8.1. Случай $0<a<1$ *остается в качестве упражнения.*

Определение 8.9.2 *Если* $f(x)=o(g(x))$ *при* $x\to x_0$ *и функция* $g(x)$ *является бесконечно малой при* $x\to x_0$, *то функция* $f(x)$ *называется бесконечно малой более высокого порядка, чем функция* $g(x)$ *при* $x\to x_0$.

Определение 8.9.3 *Если $f(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$ и функция $f(x)$ является бесконечно большой при $x \to x_0$, то функция $g(x)$ называется бесконечно большой более высокого порядка, чем функция $f(x)$ при $x \to x_0$.*

Ниже приведены правила обращения с символами O и o.

Лемма 8.9.2 *При $x \to x_0$ справедливы равенства:*

1. $o(C \cdot f) = C \cdot o(f)$;
2. $o(f) = o(g)$, *если* $f \sim g$;
3. $o(f) \pm o(f) = o(f)$, $O(f) \pm O(f) = O(f)$;
4. $o(f) \pm O(f) = O(f)$;
5. $o(f) = O(f)$, *но не наоборот;*
6. $g(x)o(f(x)) = o(f(x)g(x))$, $g(x)O(f(x)) = O(f(x)g(x))$.

Доказательство. Доказательства этих равенств выполняются по определению. Например, для свойства 3: первый символ в равенстве означает некоторую функцию $\alpha_1(x)f(x)$, а второй символ – некоторую функцию $\alpha_2(x)f(x)$. Тогда

$$o(f) \pm o(f) = \alpha_1(x)f(x) \pm \alpha_2(x)f(x) = (\alpha_1(x) \pm \alpha_2(x))f(x) = o(f(x)),$$

так как $\lim\limits_{x\to x_0} (\alpha_1(x) \pm \alpha_2(x)) = 0$.
Остальные утверждения доказываются аналогично и остаются читателю в качестве упражнения. ☐

8.10 Таблица эквивалентностей

В связи с пунктом 8.8, можно выписать следующую таблицу эквивалентных функций при $x \to 0$.

1.	$\sin x \sim x$	6.	$a^x - 1 \sim x \ln a$
2.	$\ln(1+x) \sim x$	7.	$\arcsin x \sim x$
3.	$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$	8.	$\mathrm{arctg}\, x \sim x$
4.	$\mathrm{tg}\, x \sim x$	9.	$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$
5.	$e^x - 1 \sim x$	10.	$(1+x)^s - 1 \sim sx$

На самом деле на практике часто используется следующее обобщение приведенной таблицы.

Теорема 8.10.1 *Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} \beta(x) = 0$. Тогда при $x \to x_0$ справедливы равенства*

1. $\sin\beta(x) \sim \beta(x)$	*6.* $a^{\beta(x)} - 1 \sim \beta(x)\ln a$
2. $\ln(1+\beta(x)) \sim \beta(x)$	*7.* $\arcsin\beta(x) \sim \beta(x)$
3. $\log_a(1+\beta(x)) \sim \frac{\beta(x)}{\ln a}$	*8.* $\operatorname{arctg}\beta(x) \sim \beta(x)$
4. $\operatorname{tg}\beta(x) \sim \beta(x)$	*9.* $1-\cos\beta(x) \sim \frac{\beta^2(x)}{2}$
5. $e^{\beta(x)} - 1 \sim \beta(x)$	*10.* $(1+\beta(x))^s - 1 \sim s\beta(x)$

Доказательство. Первое утверждение. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, то $\sin x = \alpha(x)x$ в некоторой проколотой окрестности $\overset{o}{U}(0)$, причем $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x) = 1$. Пусть функция $\alpha(x)$ доопределена по непрерывности в нуле значением 1. Тогда написанное равенство справедливо в $U(0)$. Так как $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x) = 0$, $\beta(x) : E \to \mathbb{R}$, то $\exists\delta > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \beta(x) \in U(0)$. Тогда можно записать равенство

$$\sin\beta(x) = \alpha(\beta(x))\beta(x)$$

справедливое в $\overset{o}{U}_\delta(x_0)$. Осталось проверить, что $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(\beta(x)) = 1$. Это немедленно следует из следствия 8.3.3.
Остальные равенства доказываются аналогично. $\square$

Теорема 8.10.2 (О замене на эквивалентную) *Пусть $f, g, \tilde{f} : E \to \mathbb{R}$, $f \sim \tilde{f}$ при $x \to x_0$. Тогда*

$$\lim_{x\to x_0} fg = \lim_{x\to x_0}\tilde{f}g.$$

Доказательство. Так как при $x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E$ выполняется $f(x) = \alpha(x)\tilde{f}(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x) = 1$, то

$$\lim_{x\to x_0} fg = \lim_{x\to x_0}\alpha\tilde{f}g = \lim_{x\to x_0}\alpha\lim_{x\to x_0}\tilde{f}g = \lim_{x\to x_0}\tilde{f}g.$$

$\square$

Пример 8.10.1 *Вычислить предел*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos(3x)}{\sqrt{1-x^2}-1}.$$

Логарифм может быть переписан в виде

$$\ln\cos(3x) = \ln(1 + \cos(3x) - 1).$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0}(\cos(3x) - 1) = 0$, *то*

$$\ln\cos(3x) \sim \cos(3x) - 1.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0} 3x = 0$, *то*

$$\cos(3x) - 1 \sim -\frac{9x^2}{2}.$$

Кроме того, так как $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, *то*

$$(1 - x^2)^{1/2} - 1 \sim -\frac{x^2}{2}.$$

Согласно теореме о замене на эквивалентную,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos(3x)}{\sqrt{1 - x^2} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x) - 1}{-\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{9x^2}{2}}{-\frac{x^2}{2}} = 9.$$

Пример 8.10.2 *Пример ниже показывает, что замена на эквивалентную в сумме может привести к неверному результату. Пусть требуется вычислить предел*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + 3x + x^2) + \ln(1 - 3x + x^2)}{x^2}.$$

Так как при $x \to 0$ *выполняется* $\ln(1+3x+x^2) \sim (3x+x^2)$ *и* $\ln(1-3x+x^2) \sim (-3x + x^2)$, *то ошибочная выкладка дает*

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x + x^2 + (-3x + x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2.$$

Проведем вычисление исходного предела иначе, выполнив преобразования

$$\ln\big((1 + 3x + x^2)(1 - 3x + x^2)\big) = \ln(1 - 7x^2 + x^4) \sim (-7x^2 + x^4).$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + 3x + x^2) + \ln(1 - 3x + x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-7x^2 + x^4}{x^2} = -7.$$

Причина ошибки будет понятна после изучения формулы Тейлора (пример 9.9.2).

Теорема 8.10.3 (Асимптотическое представление с помощью эквивалента) *Две функции* $f(x)$, $g(x)$ *эквивалентны при* $x \to x_0$ *в некоторой проколотой окрестности точки* x_0 *тогда и только тогда, когда при* $x \to x_0$ *справедливо равенство* $f(x) = g(x) + o(g(x))$.

Доказательство. Пусть $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$. Тогда в некоторой проколотой окрестности точки x_0 справедливо равенство $f(x) = g(x)\alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 1$. Отсюда получим $f(x) - g(x) = g(x)(1 - \alpha(x))$. Так как $\lim\limits_{x\to x_0} (1 - \alpha(x)) = 0$, то $f(x) - g(x) = o(g(x))$.
Обратно, пусть $f(x) = g(x) + o(g(x))$ при $x \to x_0$. Тогда в некоторой проколотой окрестности точки x_0 будет $f(x) - g(x) = g(x)\beta(x)$, где $\lim\limits_{x\to x_0} \beta(x) = 0$. Отсюда $f(x) = g(x)(1 + \beta(x))$ или $f(x) = g(x)\alpha(x)$, где $\alpha(x) = 1 + \beta(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 1$. А следовательно, $f(x) \sim g(x)$.

□

Следствие 8.10.4 *Используя вышеописанную теорему, таблицу эквивалентностей можно переписать следующим образом, если при $x \to x_0$ выполняется $\lim\limits_{x\to x_0} \beta(x) = 0$.*

1.	$\sin\beta(x) = \beta(x) + o(\beta(x))$.	6.	$\ln(1 + \beta(x)) = \beta(x) + o(\beta(x))$.
2.	$\operatorname{tg}\beta(x) = \beta(x) + o(\beta(x))$.	7.	$\log_a(1 + \beta(x)) = \frac{\beta(x)}{\ln a} + o(\beta(x))$.
3.	$\arcsin\beta(x) = \beta(x) + o(\beta(x))$.	8.	$e^{\beta(x)} - 1 = \beta(x) + o(\beta(x))$.
4.	$\operatorname{arctg}\beta(x) = \beta(x) + o(\beta(x))$.	9.	$a^{\beta(x)} - 1 = \beta(x)\ln a + o(\beta(x))$.
5.	$1 - \cos\beta(x) = \frac{\beta(x)^2}{2} + o(\beta^2(x))$.	10.	$(1 + \beta(x))^s - 1 \sim s\beta(x) + o(\beta(x))$.

Пример 8.10.3 *Вычислить:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} + \operatorname{tg} 3x \cdot e^{5x} - 1}{\ln(1 + 3x)}.$$

Используя выведенные соотношения,

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + o((2x)^2) = 1 - 2x^2 + o(x^2),$$

значит

$$\sqrt{\cos 2x} = \sqrt{1 - 2x^2 + o(x^2)} = \left(1 + (-2x^2 + o(x^2))\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$1 + \frac{1}{2}(-2x^2 + o(x^2)) + o(-2x^2 + o(x^2)) = 1 - x^2 + o(x^2).$$

Кроме того,

$$\operatorname{tg} 3x = 3x + o(x),$$
$$e^{5x} = 1 + 5x + o(x).$$

Тогда

$$\sqrt{\cos 2x} + \operatorname{tg} 3x \cdot e^{5x} - 1 = 1 - x^2 + o(x^2) + (3x + o(x))(1 + 5x + o(x)) - 1 = 3x + o(x).$$

Так как

$$\ln(1+3x) \sim 3x,$$

то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos 2x}+\operatorname{tg}3x\cdot e^{5x}-1}{\ln(1+3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x+o(x)}{3x}=1.$$

8.11 Равномерная непрерывность функции

Определение 8.11.1 *Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется равномерно непрерывной на множестве $D \subset E$, если*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall x_1,x_2\in D:\ |x_1-x_2|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

Полезно сравнить определения равномерной непрерывности и непрерывности функции на множестве. Функция $f : E \to \mathbb{R}$ непрерывна на множестве $D \subset E$, если она непрерывна в каждой точке $x_0 \in D$, то есть

$$\forall x_0\in D\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall x\in D:\ |x-x_0|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Отличие определения равномерной непрерывности от непрерывности на множестве состоит в том, что в определении равномерной непрерывности число δ зависит только от ε, тогда как в определении непрерывности функции δ зависит от ε и от точки x_0.

Пример 8.11.1 *Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ на множестве $[0,+\infty)$. Докажем, что на этом множестве данная функция будет равномерно непрерывна.*

Возьмем произвольное число $\varepsilon>0$ и два значения аргумента из промежутка $[0,+\infty)$ и составим разность

$$f(x')-f(x'')=\frac{1}{1+x'^2}-\frac{1}{1+x''^2}=\frac{x''^2-x'^2}{(1+x'^2)(1+x''^2)}=\frac{(x''-x')(x'+x'')}{(1+x'^2)(1+x''^2)}.$$

Оценим модуль этой разности, используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим $\left(x\leqslant\frac{1+x^2}{2}\right)$:

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant\left(\frac{x'}{1+x'^2}+\frac{x''}{1+x''^2}\right)\cdot|x'-x''|\leqslant\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)|x'-x''|=|x'-x''|.$$

Отсюда следует, что, если взять $\delta=\varepsilon$, то из неравенства $|x'-x''|<\delta$ будет следовать неравенство $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$, что и требовалось доказать.

Лемма 8.11.1 *Если функция равномерно непрерывна на множестве D, то она непрерывна на этом множестве.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in D$. Так как функция f равномерно непрерывна на D, то по $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, что для любых $x_1, x_2 \in D$: $|x_1 - x_2| < \delta$ будет выполнено $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. В частности, для $x_1 = x_0$ это утверждение верно, что и означает непрерывность f в точке x_0. $\square$

Обратное, вообще говоря, неверно.

Пример 8.11.2 *Пусть $f(x) = x^2$ и $G = [0, +\infty)$. Отметим, что данная функция будет непрерывной в каждой точке данного промежутка. Докажем, что эта непрерывность не будет равномерной на G.*

Возьмем два значения аргумента $x' = n + \frac{1}{n}$ и $x'' = n$ $n \in \mathbb{N}$, которые будут принадлежать заданному промежутку. Тогда будет справедливо неравенство

$$|f(x') - f(x'')| = \left|x'^2 - x''^2\right| = \frac{1}{n}\left(2n + \frac{1}{n}\right) > 2.$$

Следовательно, если взять $\varepsilon_0 = 2$, то, какое бы число $\delta > 0$ мы ни взяли, мы сможем найти число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $|x' - x''| = \frac{1}{n} < \delta$, но при этом $|f(x') - f(x'')| > \varepsilon_0$. Это означает, что равномерной непрерывности функции на данном промежутке нет.

Теорема 8.11.1 (Кантора) *Функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, равномерно непрерывна на нем.*

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$ и, пользуясь непрерывностью функции на $[a, b]$, для каждой точки $x_0 \in [a, b]$ найдем окрестность $U_{\delta_{x_0}}(x_0)$ так, что

$$\forall x \in [a, b] : \; |x - x_0| < \delta_{x_0} \; \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Множество окрестностей $U_{\delta_x/2}$, $x \in [a, b]$ образует покрытие отрезка $[a, b]$ из которого, по теореме Бореля–Лебега, можно выделить конечное покрытие

$$U_{\delta_{x_1}/2}, \; U_{\delta_{x_2}/2}, ..., U_{\delta_{x_n}/2}.$$

Пусть $\delta = \min\left(\frac{\delta_{x_1}}{2}, ..., \frac{\delta_{x_n}}{2}\right)$. Возьмем $x', x'' \in [a, b]$ и $|x' - x''| < \delta$. Найдется окрестность $U_{\delta_{x_i}/2}$, содержащая x'. Тогда

$$|x'' - x_i| \leqslant |x'' - x'| + |x' - x_i| < \delta + \frac{\delta_{x_i}}{2} < \delta_{x_i},$$

то есть $x', x'' \in U_{\delta_{x_i}}$. Но тогда

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и означает равномерную непрерывность f на $[a, b]$. □

Заметим, что в условии Теоремы отрезок нельзя заменить на интервал или полуинтервал.

Функция f не является равномерно непрерывной на множестве D, если

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall \delta > 0 \ \exists x_1, x_2 \in D : \ |x_1 - x_2| < \delta, \ |f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \varepsilon.$$

Пример 8.11.3 *Функция $f(x) = 1/x$ непрерывна на $(0, 1)$, но не является равномерно непрерывной на нем.*

Возьмем $x_1 = \frac{1}{n}$, $x_2 = \frac{1}{2n}$. Так как $|x_1 - x_2| = \frac{1}{2n} \to 0$, то эту разность можно сделать сколь угодно малой, выбрав достаточно большое n. В то же время, $|f(x_1) - f(x_2)| = 2n - n = n$ становится сколь угодно большим и не может быть $< \varepsilon$.

8.12 Контрольные вопросы и задачи

1. Сформулируйте геометрическую интерпретацию понятия непрерывной функции.
2. Покажите, что если $f \in C(E_i)$, $i = 1, 2$, то не всегда $f \in C(E_1 \cup E_2)$.
3. Пусть $f : [0, 1] \to [0, 1]$ и $f \in C[0, 1]$. Покажите, что существует точка x такая, что $f(x) = x$.
4. Докажите, что любой многочлен непрерывен на множестве вещественных чисел.
5. Докажите все пункты леммы 8.9.2.
6. Поясните геометрически замену на эквивалентную.

9 Производная и исследование функции

9.1 Производная и дифференциал

Определение 9.1.1 *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и x_0 – предельная точка для E. Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если*

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A(x_0)\Delta x + o(\Delta x), \quad x_0 + \Delta x \in E, \quad \Delta x \to 0.$$

Определение 9.1.2 *Величины Δx и $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называют приращением аргумента и приращением функции, соответствующим приращению аргумента, соответственно.*

Определение 9.1.3 *Выражение $A(x_0)\Delta x$ называется дифференциалом функции $f : E \to \mathbb{R}$ в точке x_0 и обозначается df, то есть $df(x_0, \Delta x) = A(x_0)\Delta x$.*

Как следует из определения, для функции $f(x) = x$ выполняется $x_0 + \Delta x - x_0 = 1 \cdot \Delta x$, тем самым $dx = \Delta x$ и можно переписать $df(x_0) = A(x_0)dx$.

Определение 9.1.4 *Говорят, что функция $f(x)$ дифференцируема на множестве E, если она дифференцируема в каждой точке этого множества.*

Замечание 9.1.1 *Если функция $f(x)$ дифференцируема на множестве E, то на этом множестве возникает функция $df(x, \Delta x) = A(x)\,\Delta x = A(x)dx$.*

Определение 9.1.5 *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Предел*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x},$$

если он существует, называется производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Пример 9.1.1 *Вычислить производную функции $f(x) = 5^{1-3x}$.*

$$\left(5^{1-3x}\right)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5^{1-3(x_0+\Delta x)} - 5^{1-3x_0}}{\Delta x} =$$

$$= 5^{1-3x_0} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5^{-3\Delta x} - 1}{\Delta x} = -3\ln 5 \cdot 5^{1-3x_0}.$$

Замечание 9.1.2 *Если функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке множества E, то на множестве E возникает функция $f'(x)$, равная значению производной функции f.*

Далее установлена связь между понятиями дифференциала и производной.

Теорема 9.1.1 (О связи дифференцируемости и производной)
Функция $f : E \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке производную, причем $A(x_0) = f'(x_0)$.

Доказательство.
Необходимость. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, значит

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A(x_0)\Delta x + o(\Delta x), \quad x_0 + \Delta x \in E, \quad \Delta x \to 0.$$

Поделив на Δx, получается

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A(x_0) + o(1).$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получается, что правая часть стремится к $A(x_0)$, значит

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A(x_0),$$

то есть, согласно определению, $f'(x_0) = A(x_0)$.
Достаточность. Согласно теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой, имеем

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x),$$

откуда

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x),$$

то есть функция дифференцируема в точке x_0. □
Ниже установлена связь между дифференцируемостью и непрерывностью

Лемма 9.1.1 (О связи дифференцируемости и непрерывности)
Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в точке x_0.

Доказательство. В представлении

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

достаточно перейти к пределу при $\Delta x \to 0$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0,$$

откуда

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0).$$

□

Замечание 9.1.3 *Обратное, вообще говоря, неверно. Пусть* $y = |x|$ *и* $x_0 = 0$. *Непрерывность очевидна, нужно проверить дифференцируемость. Пусть* $\Delta x > 0$, *тогда*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

При $\Delta x < 0$ *получается, что*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1,$$

а значит функция не дифференцируема.

Определение 9.1.6 (Односторонние производные) *Пусть* $f : E \to \mathbb{R}$. *Предел*

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x},$$

если он существует, называется правосторонней производной функции $f(x)$ *в точке* x_0 *и обозначается* $f'(x_0 + 0)$ *или* $f'_+(x_0)$.
Аналогично, предел

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x},$$

если он существует, называется левосторонней производной функции $f(x)$ *в точке* x_0 *и обозначается* $f'(x_0 - 0)$ *или* $f'_-(x_0)$.

Замечание 9.1.4 *Очевидно, что необходимым и достаточным условием дифференцируемости функции* f *в точке* x_0 *является существование (в* $\mathbb{R}$*) и равенство односторонних производных функции* f *в точке* x_0.

9.2 Геометрический смысл производной и дифференциала. Касательная

Обратимся к рисунку 16. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема, а значит и непрерывна в точке x_0. Секущая AB проходит через точки графика функции $(x_0, f(x_0))$ и $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ (при этом $\Delta x \geqslant 0$, но может быть и отрицательным). Устремляя $\Delta x \to 0$, точка B, лежащая на графике функции, будет двигаться к точке A, а секущая AB будет стремится занять предельное положение AC. Угловой коэффициент секущей AB равен

$$k_{AB} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg}(BAD).$$

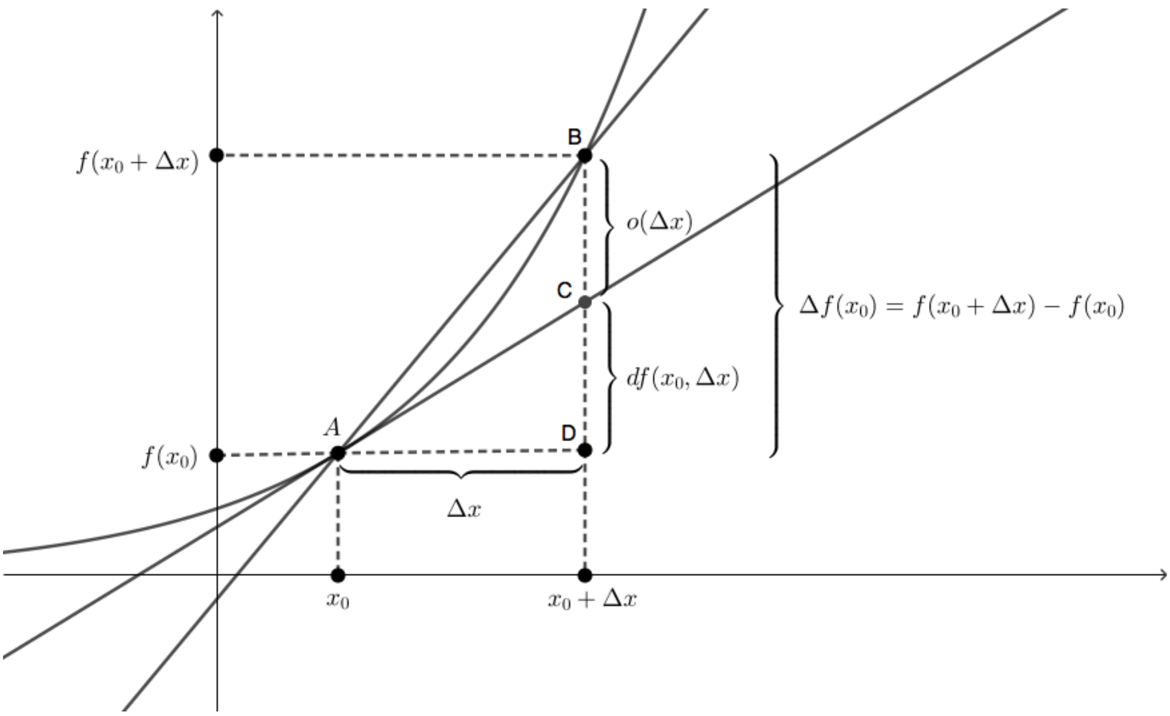

Рис. 16 Касательная и дифференциал

В силу непрерывности функции $\operatorname{tg}(x)$ и дифференцируемости функции $f(x)$ в точке x_0,

$$k_{AC} = \lim_{\Delta x \to 0} k_{AB} = f'(x_0) = \operatorname{tg}(CAD).$$

Определение 9.2.1 *Предельное положение AC секущей AB графика функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.*

Лемма 9.2.1 *Уравнение касательной имеет вид*

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Доказательство. Угловой коэффициент, согласно сказанному выше, равен $k_{AC} = f'(x_0)$. Осталось воспользоваться уравнением прямой, использующим точку и коэффициент наклона. □

Замечание 9.2.1 *Рисунок 16 показывает связь приращения функции, производной этой функции, дифференциала и $o(\Delta x)$. Можно сформулировать следующий геометрический смысл дифференциала: дифференциал есть приращение касательной, когда аргумент принимает приращение Δx.*

Замечание 9.2.2 (О бесконечной производной) *Возможна ситуация, когда $f'(x_0) = \infty$ или $f'(x_0) = \pm\infty$. Геометрически это означает, что* *касательная к графику функции в точке $x = x_0$ вертикальна (т.е. параллельна оси ординат). В этом случае ее уравнение будет иметь вид $x = x_0$. Например, функция $y = \sqrt[3]{x}$ имеет в точке $x_0 = 0$ производную, равную $+\infty$.*

9.3 Основные правила дифференцирования

Теорема 9.3.1 (Дифференцирование арифметических операций) *Пусть $f(x), g(x) : E \to \mathbb{R}$, дифференцируемы в точке x_0, тогда их сумма дифференцируема в точке x_0 и*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0),$$

их произведение дифференцируемо в точке x_0 и

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),$$

их частное дифференцируемо в точке x_0 при условии, что $g(x_0) \neq 0$ и

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Доказательство. Согласно определению,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0), \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = g'(x_0),$$

1. Так как

$$\Delta(f+g)(x_0) = f(x_0 + \Delta x) + g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - g(x_0) =$$

$$= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) + g(x_0 + \Delta x) - g(x_0),$$

то

$$(f+g)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(f+g)(x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + g'(x_0).$$

2.

$$\Delta(fg)(x_0) = f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0) =$$

$$f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0 + \Delta x) + f(x_0)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0).$$

Тогда

$$(f\cdot g)'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(fg)(x_0)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta\to 0}\frac{\Big(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\Big)g(x_0+\Delta x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)\Big(g(x_0+\Delta x)-g(x_0)\Big)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}g(x_0+\Delta x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}f(x_0)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}=g(x_0)f'(x_0)+f(x_0)g'(x_0).$$

3. Предлагается доказать самостоятельно. □

Из связи производной и дифференциала сразу вытекает следующая теорема.

Теорема 9.3.2 (Дифференциал арифметических операций) *В условиях предыдущей теоремы*

1. $d(f+g)(x_0)=df(x_0)+dg(x_0)$;
2. $d(fg)(x_0)=f(x_0)dg(x_0)+g(x_0)df(x_0)$;
3. $d\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)=\frac{g(x_0)df(x_0)-f(x_0)dg(x_0)}{g^2(x_0)}$, *при* $g(x_0)\neq 0$.

Доказательство. Докажите эту теорему самостоятельно. □

Теорема 9.3.3 (О производной сложной функции) *Пусть* $f(x)\ :\ E_1\to E_2$, $g(y):E_2\to\mathbb{R}$, $E_1,E_2\subset\mathbb{R}$ *и пусть* $f(x)$ *дифференцируема в точке* x_0, *а* $g(y)$ *дифференцируема в точке* y_0, *где* $y_0=f(x_0)$. *Тогда функция* $g(f(x))$ *дифференцируема в точке* x_0 *и* $(g(f))'(x_0)=g'(y_0)f'(x_0)$

Доказательство. Так как $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x),\quad x_0+\Delta x\in E_1,\quad \Delta x\to 0.$$

Так как $g(y)$ дифференцируема в точке y_0, то

$$g(y_0+\Delta y)-g(y_0)=g'(y_0)\Delta y+o(\Delta y),\quad y_0+\Delta y\in E_2,\quad \Delta y\to 0,$$

где в представлении $o(\Delta y)=\Delta y\cdot\alpha(\Delta y)$ можно считать, что $\alpha(0)=0$. Положив $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-y_0$ можно заметить, что $\Delta y\to 0$ при $\Delta x\to 0$, так как функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, а значит и непрерывна. Тогда

$$g(f(x_0+\Delta x))-g(f(x_0))=g'(y_0)\cdot(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))+o(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))=$$

$$g'(y_0)\cdot(f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x))+o(f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x))=$$
$$g'(y_0)\cdot f'(x_0)\Delta x+g'(y_0)\cdot o(\Delta x)+o(f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)).$$

Легко убедиться (сделайте это), что

$$g'(y_0)\cdot o(\Delta x)+o(f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x))=o(\Delta x),$$

а значит $g(f(x))$ дифференцируема в точке x_0 и $(g(f))'(x_0)=g'(y_0)\cdot f'(x_0)$.

□

Теорема 9.3.4 (О производной обратной функции) *Пусть функции $f(x):E_1\to E_2$ и $f^{-1}(y):E_2\to E_1$ – взаимно обратные, $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, $f'(x_0)\neq 0$, и $f^{-1}(y)$ непрерывна в точке $y_0=f(x_0)$. Тогда $f^{-1}(y)$ дифференцируема в точке y_0, причем*

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство. Необходимо вычислить

$$(f^{-1})'(y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f^{-1}(y_0+\Delta y)-f^{-1}(y_0)}{\Delta y}.$$

Достаточно положить $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, $\Delta x=f^{-1}(y_0+\Delta y)-f^{-1}(y_0)$. В силу непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 и обратной функции $f^{-1}(y)$ в точке y_0, выполнено $\Delta x\to 0\Leftrightarrow\Delta y\to 0$. Кроме того, так как функции взаимно обратны, то $\Delta x\neq 0\Leftrightarrow\Delta y\neq 0$. Тогда

$$(f^{-1})'(y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

Замечание 9.3.1 *Если в условиях теоремы $f'(x_0)=0$, то $(f^{-1})'(y_0)=\infty$ и наоборот. Например, производная функции $y=\sqrt[3]{x}$ в точке $x_0=0$ равна $+\infty$. А производная обратной функции: $(y^{-1})'=(y^3)'=3y^2$ в точке $y=0$ равна 0.*

Теорема 9.3.5 (Производная функции, заданной параметрически) *Пусть функции $x=x(t)$ и $y=y(t)$ определены в окрестности $U(t_0)$, причем функция $x=x(t)$ имеет в этой окрестности обратную функцию $t=t(x)$. Допустим, что $x'(t_0)\neq 0$. Тогда сложная функция $y=y(t(x))$ дифференцируема по переменной x в точке $x_0=x(t_0)$, причем*

$$y'_x(x_0)=\frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}.$$

Доказательство. По правилу дифференцирования сложной функции получим, что в точке x_0 выполняется равенство $(y(t(x)))'_x = y'_t \cdot t'_x$. По теореме о производной обратной функции $t'_x = \frac{1}{x'_t}$, а следовательно

$$(y(t(x)))' = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

□

9.4 Таблица производных простейших функций

Ниже приведена таблица производных простейших функций

1.	$(c)' = 0.$	$\forall x \in \mathbb{R}.$
2.	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$	$\alpha \in \mathbb{R},\ x > 0,\ \alpha \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$
3.	$(\sin x)' = \cos x.$	$\forall x \in \mathbb{R}$
4.	$(\cos x)' = -\sin x.$	$\forall x \in \mathbb{R}$
5.	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$	$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$
6.	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$	$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq \pi k$
7.	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$	$\forall x \in (-1, 1)$
8.	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$	$\forall x \in (-1, 1)$
9.	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$	$\forall x \in \mathbb{R}$
10.	$(\operatorname{arcctg})' = -\frac{1}{1+x^2}.$	$\forall x \in \mathbb{R}$
11.	$(\log_a \lvert x \rvert)' = \frac{1}{x \ln a}.$	$\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$
12.	$(\ln \lvert x \rvert)' = \frac{1}{x}.$	$\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$
13.	$(a^x)' = a^x \ln a.$	$x \in \mathbb{R}$
14.	$(e^x)' = e^x.$	$x \in \mathbb{R}$

Доказательство.

1. Покажем, что производная функции $f(x) = c$, где c – некоторая константа, равна нулю. Действительно, так как

$$\Delta f(x_0) = c - c = 0,$$

то

$$(c)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = 0.$$

Так как x_0 – произвольное число, то

$$(c)' = 0\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. Покажем, что $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $x \in \mathbb{R},\ x > 0$. Так как

$$\Delta f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^\alpha - x_0^\alpha = x_0^\alpha \left(\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0} \right)^\alpha - 1 \right),$$

то

$$(x^\alpha)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^\alpha \left(\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)^\alpha - 1 \right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha x_0^{\alpha-1} \Delta x}{\Delta x} = \alpha x_0^{\alpha-1}.$$

В силу произвольности x_0 получаем требуемое.

3. Покажем, что $(\sin x)' = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Так как

$$\Delta f(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x_0 + \Delta x}{2},$$

то

$$(\sin x)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} 2 \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x_0 + \Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2 \cdot \frac{\frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x_0 + \Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos x_0.$$

4. Аналогично п. 3.

5. Покажем, что $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$. По формуле производной частного и только что доказанным формулам производной функции $\sin x$ и $\cos x$, имеем

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x \, (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

6. Аналогично предыдущему доказывается, что $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq \pi k$.

7. Покажем, что $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\forall x \in (-1, 1)$. Воспользуемся теоремой о производной обратной функции. Обратная функция $x = \sin y, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Все условия теоремы выполнены, а значит

$$(\arcsin x)'(x_0) = \frac{1}{(\sin y)'(y_0)} = \frac{1}{\cos y_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x_0^2}}.$$

8. Аналогично п. 7.

9. Аналогично п. 7.

10. Аналогично п. 7.

11. Покажем, что $(\log_a|x|)' = \frac{1}{x\ln a}$, $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$. Пусть $x_0 > 0$, тогда так как

$$\Delta f(x_0) = \log_a(x_0+\Delta x) - \log_a x_0 = \log_a\left(\frac{x_0+\Delta x}{x_0}\right) = \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right),$$

то

$$(\log_a|x|)'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{x_0\ln a\Delta x} = \frac{1}{x_0\ln a}.$$

Аналогично рассматривается случай $x_0 < 0$.

12. Покажем, что $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$. Из предыдущего пункта, при $a = e$, получим
$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x\ln e} = \frac{1}{x}.$$

13. Покажем, что $(a^x)' = a^x\ln a$, $x \in \mathbb{R}$. Воспользуемся теоремой о производной обратной функции. Обратная функция $x = \log_a y$, $y > 0$. Все условия теоремы выполнены, а значит
$$(a^x)'(x_0) = \frac{1}{(\log_a y)'(y_0)} = \frac{1}{\frac{1}{y_0\ln a}} = y_0\ln a = a^{x_0}\ln a.$$

14. Покажем, что $(e^x)' = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Из предыдущего пункта при $a = e$, получим
$$(e^x)'(x_0) = e^{x_0}\ln e = e^{x_0}.$$

□

9.5 Французские теоремы (Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши и Дарбу)

Определение 9.5.1 *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Точка $x_0 \in E$ называется точкой локального максимума (строгого локального максимума) функции $f(x)$, если существует проколотая окрестность $\overset{o}{U}(x_0)$ такая, что $\forall x \in E : x \in \overset{o}{U}(x_0)$ выполняется $f(x) \leqslant f(x_0)$ $(f(x) < f(x_0))$.*

Определение 9.5.2 *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Точка $x_0 \in E$ называется точкой локального минимума (строгого локального минимума) функции $f(x)$, если существует проколотая окрестность $\overset{o}{U}(x_0)$ такая, что $\forall x \in E : x \in \overset{o}{U}(x_0)$ выполняется $f(x) \geqslant f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$.*

Определение 9.5.3 *Точки локального максимума (строго локального максимума) и точки локального минимума (строгого локального минимума) называются точками экстремума (строгого экстремума).*

Определение 9.5.4 *Точка x_0 называется точкой внутреннего экстремума для функции $f : E \to \mathbb{R}$, если x_0 – точка экстремума, являющаяся предельной как для множества $E_- = \{x \in E : x < x_0\}$, так и для $E_+ = \{x \in E : x > x_0\}$.*

Теорема 9.5.1 (Ферма) *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке внутреннего экстремума x_0. Тогда $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство. Для определенности предполагается, что x_0 – точка локального максимума. При достаточно малом $\Delta x < 0$, из определения точки максимума получаем, что

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0,$$

значит, по теореме 7.3.1 о предельном переходе в неравенствах,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geqslant 0.$$

При достаточно малом $\Delta x > 0$, из определения точки максимума получаем, что

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0,$$

значит, по теореме о предельном переходе в неравенствах 7.3.1,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leqslant 0.$$

Сравнивая два неравенства, получаем $f'(x_0) = 0$. □

Замечание 9.5.1 *Геометрически теорема Ферма означает, что касательная в точке внутреннего экстремума дифференцируемой функции параллельна оси Ox. Этот факт проиллюстрирован на рисунке 17, $x_0 = \xi$.*

Теорема 9.5.2 (Ролля) *Пусть $f \in C[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), причем $f(a) = f(b)$. Тогда $\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$.*

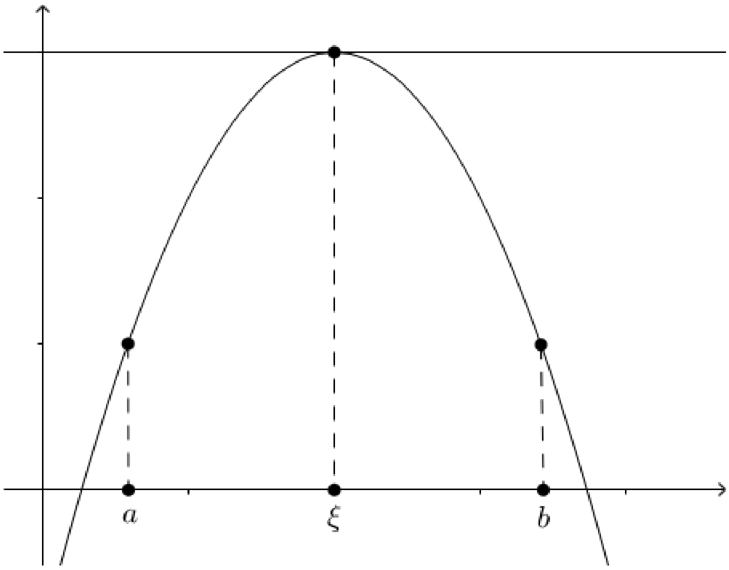

Рис. 17 Теорема Ролля

Доказательство. Если $f(x)$ постоянна на отрезке $[a, b]$, то утверждение, очевидно, верно. Если $f(x)$ не постоянна, то по теореме Вейерштрасса 8.4.3 на отрезке $[a, b]$ существуют точки, в которых функция принимает свои наибольшее M и наименьшее m значения, причем $M \neq m$, а значит, хотя бы одно из них принимается внутри интервала (a, b) в некоторой точке ξ. Значит, по теореме Ферма, $f'(\xi) = 0$. □

Замечание 9.5.2 *Геометрически теорема Ролля означает, что если дифференцируемая функция на концах отрезка принимает равные значения, то на этом отрезке существует хотя бы один экстремум, см. рисунок 17.*

Теорема 9.5.3 (Лагранжа) *Пусть* $f \in C[a, b]$ *и дифференцируема на* (a, b). *Тогда* $\exists \xi \in (a, b)$, *что выполняется*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Доказательство. Пусть

$$y(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Прямым вычислением проверяется, что $y(a) = y(b)$, причем функция $y(x) \in C[a, b]$, как разность непрерывных функций, и дифференцируема на (a, b), как разность дифференцируемых функций. Значит, согласно теореме Ролля 9.5.2, найдется $\xi \in (a, b) : y'(\xi) = 0$, то есть

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Leftrightarrow f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

□

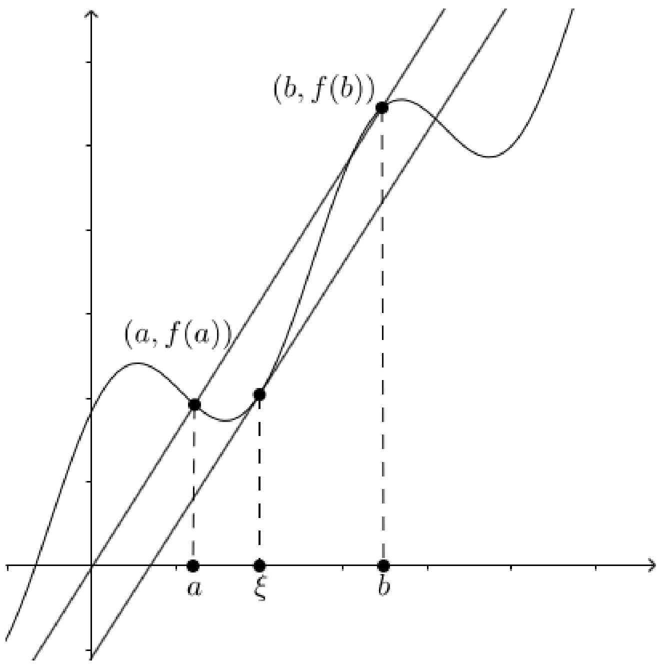

Рис. 18 Теорема Лагранжа

Замечание 9.5.3 *Геометрически теорема Лагранжа означает, что на интервале* (a, b) *существует касательная к графику функции* $y = f(x)$*, параллельная секущей, проходящей через точки* $(a, f(a))$ *и* $(b, f(b))$*, см. рисунок 18.*

Следствие 9.5.4 (Критерий монотонности функции) *Пусть* f *дифференцируема на* (a, b)*. Для того чтобы функция* $f(x)$ *возрастала (убывала) на* (a, b) *необходимо и достаточно, чтобы* $f'(x) \geqslant 0$ *(*$f'(x) \leqslant 0$*). Для строгого возрастания (строгого убывания) функции на* (a, b) *достаточно, чтобы* $f'(x) > 0$ *(*$f'(x) < 0$*).*

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $f(x)$ возрастает (нестрого). Пусть $x \in (a, b)$, тогда при $\Delta x \neq 0$ имеем

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geqslant 0,$$

значит, по теореме 7.3.1 о предельном переходе в неравенстве,

$$f'(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geqslant 0.$$

Достаточность. Пусть $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$. По теореме Лагранжа 9.5.3 найдется $\xi \in (a, b)$, что

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Так как $f'(x) \geqslant 0$ на (a, b) и $x_2 - x_1 > 0$, то $f(x_2) \geqslant f(x_1)$. Так как x_1, x_2 – произвольные, получаем определение неубывающей функции. Если же $f'(x) > 0$ на (a, b), то $f(x_2) > f(x_1)$ и f возрастает. $\square$

Замечание 9.5.4 *Полезно заметить, что из того, что функция строго возрастает (строго убывает), вообще говоря не следует положительность (отрицательность) производной. Пусть $y = x^3$. Очевидно, что функция строго возрастает, но $y' = 3x^2$ обращается в ноль при $x = 0$.*

Следствие 9.5.5 (Критерий постоянства функции) *Пусть $f \in C[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Для того чтобы $f(x)$ была постоянной на $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) = 0$ на (a, b).*

Доказательство. Необходимость очевидна. Достаточность. Если $f'(x) = 0$ на (a, b), то для любых двух точек $x_1, x_2 \in [a, b]$ таких, что $x_1 < x_2$ по теореме Лагранжа 9.5.3

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0,$$

то есть $f(x_2) = f(x_1)$. В силу произвольности точек x_1, x_2 функция постоянна. $\square$

Следствиями теоремы Лагранжа являются еще две нижеприведенные теоремы.

Теорема 9.5.6 (Дарбу) *Пусть функция $f \in C[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и существуют (в $\bar{\mathbb{R}}$) односторонние производные $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$. Тогда для любого C, лежащего между $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$, найдется $\xi \in (a, b)$: $f'(\xi) = C$.*

Доказательство. Пусть, для определенности, $f'_+(a) > f'_-(b)$.

1) Докажем вначале, что если $f'_+(a) > 0 > f'_-(b)$, то $\exists\, \xi \in (a, b)$: $f'(\xi) = 0$.

Функция f непрерывна на $[a, b]$. По теореме Вейерштрасса (теорема 6.5.1), она достигает на $[a, b]$ своего наибольшего значения. Пусть $\max_{[a,b]} f = f(\xi)$. Покажем, что $\xi \in (a, b)$, то есть ξ не совпадает с точками a и b. Так как $f'_+(a) > 0$, то при достаточно маленьком $\Delta x > 0$, имеем

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \geqslant 0 \;\Rightarrow\; f(a + \Delta x) - f(a) \geqslant 0,$$

а значит в точке a не может достигаться наибольшее значение функции. Аналогично с точкой b. Получаем, $\xi \in (a, b)$. И по теореме Ферма, $f'(\xi) = 0$.

2) Возьмем произвольное $C \in (f'_-(b), f'_+(a))$ и рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = f(x) - Cx.$$

Функция $\varphi(x)$ удовлетворяет п.1,

$$\varphi'(x) = f'(x) - C, \quad \varphi'_+(a) > 0,\ \varphi'_-(b) < 0,$$

следовательно, существует $\xi \in (a,b)$: $\varphi'(\xi) = 0$, а значит, $f'(\xi) = C$. □

Теорема Дарбу утверждает, что производная дифференцируемой функции принимает все свои промежуточные значения. Это утверждение похоже на вторую теорему Больцано–Коши (теорема 8.4.2), в которой утверждается, что непрерывная на отрезке функция принимает все свои промежуточные значения. Но теорема Дарбу не является её следствием, так как про непрерывность производной ничего не известно.

Пример 9.5.1

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Заметим, что $f(x)$ непрерывна в точке $x = 0$, так как

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0 = f(0).$$

Найдем производную при $x \neq 0$: $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$.
При $x = 0$:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x^2 \sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = 0$$

как произведение бесконечно малой на ограниченную.

Итого

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Функция $f'(x)$ имеет разрыв в точке $x = 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right)$ не существует.

Теорема 9.5.7 (О пределе производной) *Пусть f непрерывна на $[x_0, x_0+h]$ $(h > 0)$ и дифференцируема на (x_0, x_0+h). Если существует (в $\bar{\mathbb{R}}$) $\lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x) = A$, то $f'_+(x_0) = A$.*

Доказательство. Пусть $0 < \Delta x < h$.
По теореме Лагранжа $\exists \xi \in (x_0, x_0+\Delta x)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad \xi \in (x_0, x_0+\Delta x).$$

Устремим $\Delta x \to 0+$. Тогда $\xi \to x_0 + 0$ и получаем

$$\lim_{\xi \to x_0+0} f'(\xi) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_+(x_0).$$

□

Эта теорема позволяет найти производную в конкретной точке как предел производной в окрестности этой точки (сравните с Примером выше).

Пример 9.5.2

$$f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

При $x \neq \pm 1$ *имеем*

$$f'(x) = \arcsin x + \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} - \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x.$$

Тогда

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1-0} f'(x) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Следствие 9.5.8 *Если* f *дифференцируема на* (a, b), *то ее производная* f' *либо непрерывна на* (a, b), *либо имеет разрывы второго рода.*

Доказательство. Устранимый разрыв и разрыв первого рода невозможны, так как если существуют конечные односторонние пределы производной в точке, то они должны совпадать со значением производной, что означает непрерывность производной в этой точке. □

Теорема 9.5.9 (Коши) *Пусть* $f, g \in C[a, b]$ *и дифференцируемы на* (a, b). *Тогда* $\exists \xi \in (a, b)$, *что выполняется*

$$(f(b) - f(a))\, g'(\xi) = (g(b) - g(a))\, f'(\xi).$$

Если, кроме того, $g'(x) \neq 0$ *на* (a, b), *то*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Доказательство. Пусть

$$\varphi(x) = g(x)\,(f(b) - f(a)) - f(x)\,(g(b) - g(a))\,.$$

Прямые вычисления показывают, что $\varphi(a) = \varphi(b)$. Кроме того, из условий теоремы следует, что функция $\varphi(x) \in C[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Значит, по теореме Ролля 9.5.2 найдется $\xi \in (a, b)$, что $\varphi'(\xi) = 0$, то есть

$$g'(\xi)\left(f(b) - f(a)\right) = f'(\xi)\left(g(b) - g(a)\right).$$

Если $g'(x) \neq 0$ на (a, b), то $g(b) \neq g(a)$ (иначе по теореме Ролля нашлась бы точка из интервала (a, b), в которой производная бы обращалась в ноль), а значит

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

□

Замечание 9.5.5 *Теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши, если взять $g(x) = x$.*

9.6 Правило Лопиталя

Ниже будет сформулирована и доказана теорема, позволяющая раскрывать неопределенности вида $[0/0]$ и $[?/\infty]$.

Теорема 9.6.1 (Правило Лопиталя) *Пусть функции f, g дифференцируемы на интервале (a, b), $g'(x) \neq 0$ на (a, b) и выполнено*
1) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = 0$ или 2) $\lim\limits_{x\to a+0} g(x) = \infty$.

Если существует (в $\bar{\mathbb{R}}$) $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Доказательство.
1) Так как $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = 0$, то функции f, g можно доопределить по непрерывности, положив $f(a) = g(a) = 0$. Применим теорему Коши (9.5.9) на отрезке $[a, x]$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad a < \xi < x < b.$$

При $x \to a$ выполняется $\xi \to a$, а значит $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = A$.
2.1) Пусть A конечно. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда найдется $\delta < b$, что при $x \in (a, a+\delta)$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \varepsilon.$$

В частности, при $x \in (a, a + \delta)$ функция $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ограничена, то есть $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right| \leqslant M$.

Пусть $x \in (a, a+\delta)$. Выполним преобразования

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a+\delta)}{g(x)} + \frac{f(a+\delta)}{g(x)} = \\ = \frac{g(x)-g(a+\delta)}{g(x)} \cdot \frac{f(x)-f(a+\delta)}{g(x)-g(a+\delta)} + \frac{f(a+\delta)}{g(x)} = \\ = \left(1 - \frac{g(a+\delta)}{g(x)}\right) \frac{f(x)-f(a+\delta)}{g(x)-g(a+\delta)} + \frac{f(a+\delta)}{g(x)}. \quad (5)$$

На отрезке $[x, a+\delta]$ функции f, g непрерывны, а на интервале $(x, a+\delta)$ дифференцируемы, значит по теореме Коши 9.5.9

$$\frac{f(x)-f(a+\delta)}{g(x)-g(a+\delta)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad a < x < \xi < a+\delta.$$

Так как $g(x) \to \infty$, то по ранее заданному ε можно найти $\delta_1 < \delta$, что при $x \in (a, a+\delta_1)$ справедливы оценки

$$\left|\frac{g(a+\delta)}{g(x)}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{f(a+\delta)}{g(x)}\right| < \varepsilon.$$

Тогда из (5) при $x \in (a, a+\delta_1)$:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A - \frac{g(a+\delta)}{g(x)} \cdot \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(a+\delta)}{g(x)}\right| \leqslant \\ \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A\right| + \left|\frac{g(a+\delta)}{g(x)} \cdot \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right| + \left|\frac{f(a+\delta)}{g(x)}\right| \leqslant \varepsilon + \varepsilon \cdot M + \varepsilon = \varepsilon(2+M).$$

В силу произвольности ε отсюда следует требуемое, т. е. $\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

2.2) Пусть $A = +\infty$. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда найдется $\delta_0 < b$, что при $x \in (a, a+\delta_0)$ справедливо неравенство

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Так как $\lim\limits_{x \to a+0} |g(x)| = +\infty$, можно найти δ_1 так, чтобы при $x \in (a, a+\delta_1)$ выполнялось

$$\left|\frac{g(a+\delta_0)}{g(x)}\right| < \frac{1}{2}, \qquad \left|\frac{f(a+\delta_0)}{g(x)}\right| < \frac{1}{2}.$$

Используя аналогичные выкладки, что в пункте 2.1,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left(1 - \frac{g(a+\delta_0)}{g(x)}\right) \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(a+\delta_0)}{g(x)} > \left(1 - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}.$$

В силу произвольности ε получаем, что $\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

2.3) Случай $A = -\infty$ доказывается аналогично пункту 2.2. □

Замечание 9.6.1 *Теорема справедлива и для $a = \pm\infty$. Для доказательства достаточно сделать замену $t = \frac{1}{x}$ и применить доказанную теорему.*

9.7 Производные и дифференциалы высших порядков

Если функция $f(x)$ дифференцируема на некотором множестве E, то на этом множестве возникает функция $f' : E \to \mathbb{R}$, равная значению производной функции f в точке $x \in E$. Эта функция, в свою очередь, сама может быть дифференцируемой.

Определение 9.7.1 *По индукции, если определена производная $f^{(n-1)}(x)$ порядка $n-1$, то производная порядка n определяется равенством*

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

Аналогично, если определен дифференциал $d^{n-1}f(x)$ порядка $n-1$, то

$$d^n f(x) = d(d^{n-1}f(x)).$$

Определение 9.7.2 *Если функция $f(x)$ имеет на множестве E непрерывные производные до порядка n включительно, то пишут, что $f(x) \in C^n(E)$.*

Замечание 9.7.1 (Инвариантность формы первого дифференциала) *Известно, что $df = f(x)dx$ в случае, когда x – независимая переменная. Пусть $x = x(t)$ – некоторая дифференцируемая функция от независимой переменной t. Тогда*

$$df(x(t)) = (f(x(t)))'\,dt = f'(x(t))x'(t)dt = f'(x(t))dx(t) = f'(x)dx.$$

Это свойство называют инвариантностью первого дифференциала.

Замечание 9.7.2 (Неинвариантность формы дифференциалов высших пор *Отметим, что у дифференциалов высших порядков форма, вообще говоря, не сохраняется. Действительно,*

$$d^2f(x(t)) = d(f'(x(t))dx(t)) = f''(x(t))(d(x(t)))^2 + f'(x(t))d^2(x(t))$$

и второе слагаемое равно нулю только в случае, когда $x(t)$ – линейная функция.

Теорема 9.7.1 (Правило Лейбница) *Пусть функции $f, g : E \to \mathbb{R}$ имеют n производных в точке x_0, тогда*

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0).$$

Доказательство. Доказательство проводится по индукции и остается в качестве упражнения. $\square$

9.8 Формула Тейлора

Из вышесказанного могла возникнуть верная идея, что чем больше производных совпадает у двух функций в некоторой точке, тем лучше эти функции «приближают» друг друга в окрестности этой точки. В связи с этим возникает идея приблизить функцию в окрестности некоторой точки многочленом.

Определение 9.8.1 *Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 все производные до порядка n включительно. Многочлен*

$$P_n(x, x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

называется многочленом Тейлора порядка n функции f в точке x_0. В случае $x_0 = 0$ многочлен Тейлора часто называют многочленом Маклорена.

Многочлен Тейлора обладает описанным выше свойством, а именно справедлива следующая лемма.

Лемма 9.8.1 *Пусть $P_n(x, x_0)$ – многочлен Тейлора порядка n функции f в точке x_0. Тогда*

$$(P_n(x, x_0))^{(k)} = f^{(k)}(x_0), \quad k = 0 \ldots n.$$

Доказательство. Проверка осуществляется прямым дифференцированием и остается в качестве упражнения. □

Замечание 9.8.1 *При $n = 0$ многочлен Тейлора превращается в $P_0(x, x_0) = f(x_0)$, а при $n = 1$ в $P_1(x, x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, что является уравнением касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.*

Пример 9.8.1 *Пусть $y(x) = x + \sin(2x)$ и многочлены $P_i(x, 0)$ – многочлены Тейлора при $i = 0, 1, 3, 5$, см. рисунок 19. Видно, что при увеличении i график функции все лучше приближается многочленами $P_i(x, 0)$.*

Важно получить информацию об остаточном члене:

$$R_n(x, x_0) = f(x) - P_n(x, x_0),$$

который характеризует отклонение многочлена Тейлора от заданной функции.

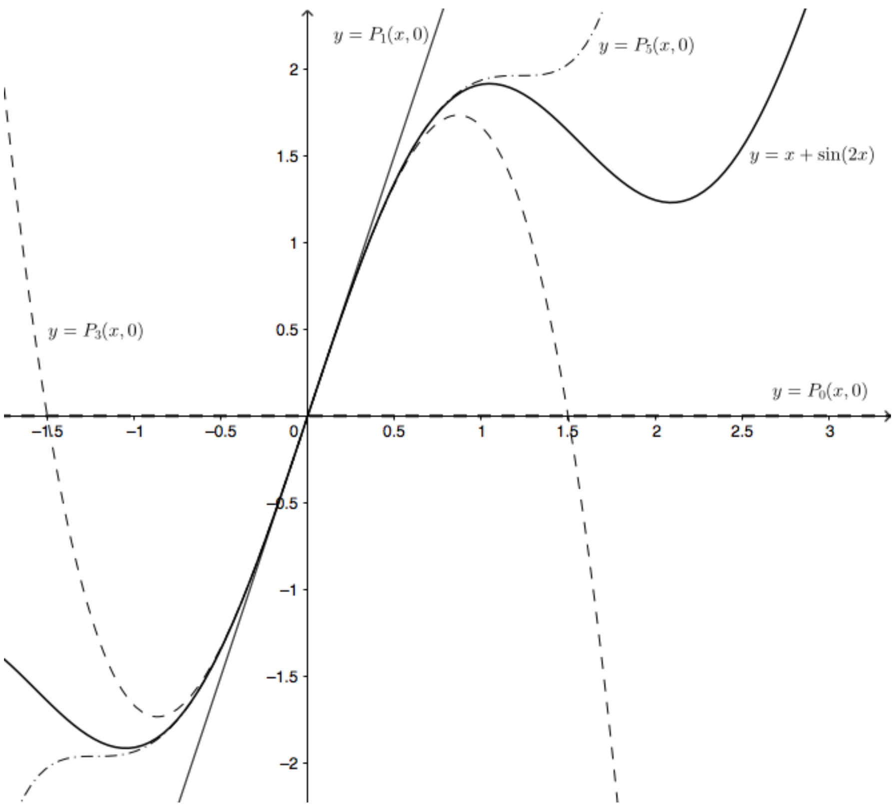

Рис. 19 Многочлены Тейлора для $y = x + \sin(2x)$

Теорема 9.8.1 (Об остаточном члене формулы Тейлора) *Пусть функция f непрерывна вместе со своими первыми n производными на отрезке, с концами x_0, x, а во внутренних точках этого отрезка имеет производную порядка $(n+1)$. Тогда для любой функции φ, непрерывной на данном отрезке и имеющей отличную от нуля производную во внутренних точках данного отрезка, найдется точка ξ, лежащая между x_0 и x, такая, что*

$$R_n(x, x_0) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi) n!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x - \xi)^n.$$

Доказательство. Пусть на отрезке I с концами x_0 и x введена функция $F(t) = f(x) - P_n(x,t)$. F непрерывна на данном отрезке и имеет производную в его внутренних точках. Функция $F(t)$ имеет вид

$$F(t) = f(x) - \left(f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \right).$$

Прямым вычислением проверяется, что

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Легко заметить, что $F(x) = 0$, а $F(x_0) = R_n(x, x_0)$. Применяя на отрезке I к функциям $F(t)$ и $\varphi(t)$ теорему Коши, получается

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

откуда

$$R_n(x, x_0) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi) n!} f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n.$$

□

Следствие 9.8.2 (Остаточный член в форме Лагранжа) *Пусть $\varphi(t) = (x - t)^{n+1}$. Данная функция удовлетворяет условиям теоремы. Тогда $\varphi'(\xi) = -(n+1)(x - \xi)^n$, $\varphi(x) = 0$, а значит*

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Данный остаточный член называется остаточным членом в форме Лагранжа.

Следствие 9.8.3 (Остаточный член в форме Коши) *Пусть $\varphi(t) = (x - t)$. Данная функция удовлетворяет условиям теоремы. Тогда $\varphi'(\xi) = -1$, $\varphi(x) = 0$, а значит*

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n (x - x_0).$$

Данный остаточный член называется остаточным членом в форме Коши.

Рассмотренные выше остаточные члены будут полезны в дальнейшем при рассмотрении рядов. Сейчас же зададимся целью локального приближения функции (в окрестности точки x_0). Именно, справедлива следующая теорема

Теорема 9.8.4 (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано) *Пусть функция $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ в точке x_0 имеет производные до порядка n включительно, тогда*

$$f(x) = P_n(x, x_0) + o((x - x_0)^n),\ x \to x_0,\ x \in U(x_0).$$

Данная формула называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Доказательство. Пусть $\varphi(x) = f(x) - P_n(x, x_0)$. Согласно лемме 9.8.1, $\varphi^{(k)}(x_0) = 0$ при $k = 0 \dots n$. Нужно показать, что $\varphi(x) = o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$. Так как функция $\varphi(x)$ имеет n производных, то все производные до $(n-1)$ порядка включительно определены на некотором интервале (α, β), причем $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Используем теорему Коши несколько раз

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{(x - x_0)^n - (x_0 - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi'(\xi_1)}{n(\xi_1 - x_0)^{n-1}} =$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi'(\xi_1) - \varphi'(x_0)}{n((\xi_1 - x_0)^{n-1} - (x_0 - x_0)^{n-1})} = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi''(\xi_2)}{n(n-1)(\xi_1 - x_0)^{n-2}} = \dots$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{n!(\xi_{n-1} - x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - \varphi^{(n-1)}(x_0)}{n!(\xi_{n-1} - x_0)} = \frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{n!} = 0,$$

где ξ_1 лежит между x и x_0, ξ_2 между ξ_1 и x_0, …, ξ_{n-1} между ξ_n и x_0, а значит $\xi_{n-1} \to x_0$, когда $x \to x_0$. □

Оказывается, верна теорема единственности.

Теорема 9.8.5 (О единственности многочлена Тейлора) *Если существует многочлен*

$$Q_n(x, x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n,$$

удовлетворяющий условию

$$f(x) = Q_n(x, x_0) + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0,$$

то он единственен.

Доказательство. Последовательно можно найти

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (Q_n(x, x_0) + o((x - x_0)^n)) = a_0,$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - a_0}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(a_1 + a_2(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^{n-1} + o((x - x_0)^{n-1})\right) = a_1,$$

$$\dots$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1})}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} (a_n + o(1)) = a_n.$$

Единственность коэффициентов следует из единственности предела. □

Следствие 9.8.6 *Если функция f имеет производную до порядка n включительно в точке x_0, то $Q_n(x, x_0) = P_n(x, x_0)$, то есть рассмотренный выше многочлен является многочленом Тейлора.*

9.9 Разложение элементарных функций по формуле Маклорена

Ниже приведены разложения основных элементарных функций по формуле Маклорена.

1. $y = e^x,\ x_0 = 0,\ y^{(n)} = e^x,\ y^{(n)}(0) = 1$, тогда

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

2. $y = a^x,\ x_0 = 0,\ y^{(n)} = a^x \ln^n a,\ y^{(n)}(0) = \ln^n a$, тогда

$$a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!}x + \frac{\ln^2 a}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\ln^n a}{n!}x^n + o(x^n).$$

3. $y = \sin x,\ x_0 = 0,\ y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right),\ \sin^{(2n)}(0) = 0,\ \sin^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1}$, тогда

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1}).$$

4. $y = \cos x,\ x_0 = 0,\ y^{(n)} = \cos(x + \frac{\pi n}{2}),\ \cos^{(2n+1)}(0) = 0,\ \cos^{(2n)}(0) = (-1)^n$, тогда

$$y = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

5. $y = \ln(1+x),\ x_0 = 0,\ y^{(0)}(0) = 0,\ y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^n},\ y^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$, тогда

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n).$$

6. $y = (1+x)^\alpha,\ x_0 = 0,\ y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n},\ y^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))$, тогда

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))x^n}{n!} + o(x^n).$$

7. $y = \operatorname{arctg} x,\ x_0 = 0$. В силу предыдущего примера легко заметить, что

$$\frac{1}{(1+x)} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n),$$

тогда

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 + \ldots + (-1)^n (x^2)^n + o((x^2)^n)$$

и

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}).$$

С другой стороны, так как

$$f(x) = \operatorname{arctg} x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + o(x^n),$$

то в силу следствия 9.8.6,

$$\varphi(0) = f'(0),\ \varphi'(0) = 2f''(0), \ldots, \varphi^{(n-1)}(0) = nf^{(n)}(0).$$

получается разложение

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

Пример 9.9.1 *Вычислить предел* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - \sqrt{1+x^2} - x\cos x}{\ln^3(1-x)}$.

Используя разложения, полученные выше,

$$e^{\sin x} = e^{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) +$$

$$+ \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3}{6} + o\left(\frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3}{6}\right) =$$

$$= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

Далее,

$$\sqrt{1+x^2} = \left(1+x^2\right)^{1/2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)x^4}{2} + o\left(\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)x^4}{2}\right) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

и

$$x \cdot \cos x = x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = x - \frac{x^3}{2} + o(x^3).$$

Окончательно, воспользовавшись тем, что $\ln^3(1-x) \sim -x^3$, *получаем*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - \sqrt{1+x^2} - x\cos x}{\ln^3(1-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{-x^3} = -\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2} + o(1)\right) = -\frac{1}{2}.$$

Пример 9.9.2 *Вернемся к задаче (пример 8.10.2) вычисления предела*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x+x^2)+\ln(1-3x+x^2)}{x^2}.$$

Согласно выведенным соотношениям,

$$\ln(1+3x+x^2)=3x+x^2-\frac{(3x+x^2)^2}{2}+o((3x+x^2)^2)=3x-\frac{7}{2}x^2+o(x^2),$$

$$\ln(1+3x+x^2)=-3x+x^2-\frac{(-3x+x^2)^2}{2}+o((-3x+x^2)^2)=-3x-\frac{7}{2}x^2+o(x^2).$$

Значит,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x+x^2)+\ln(1-3x+x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-7x^2+o(x^2)}{x^2}=-7.$$

9.10 Исследование функций с помощью производных

Ниже приведена теорема (которая, в прочем, уже известна), связывающая возрастание/убывание функции со знаком производной.

Теорема 9.10.1 *Пусть функция $f\in C[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). Тогда справедливы соотношения:*

1. $f'(x)>0$ *на* $(a,b)\Rightarrow f(x)$ *возрастает на* $[a,b]\Rightarrow f'(x)\geqslant 0$ *на* (a,b).
2. $f'(x)\geqslant 0$ *на* $(a,b)\Rightarrow f(x)$ *не убывает на* $[a,b]\Rightarrow f'(x)\geqslant 0$ *на* (a,b).
3. $f'(x)<0$ *на* $(a,b)\Rightarrow f(x)$ *убывает на* $[a,b]\Rightarrow f'(x)\leqslant 0$ *на* (a,b).
4. $f'(x)\leqslant 0$ *на* $(a,b)\Rightarrow f(x)$ *не возрастает на* $[a,b]\Rightarrow f'(x)\leqslant 0$ *на* (a,b).

Доказательство. Данная теорема есть не что иное, как подробно записанное следствие 9.5.4 с учетом последующего замечания 9.5.4. □

Теорема 9.10.2 (Необходимое условие внутреннего экстремума) *Для того чтобы точка x_0 была точкой внутреннего экстремума функции $f(x)$ необходимо, чтобы выполнялось одно из двух условий: либо функция не дифференцируема в точке x_0, либо $f'(x_0)=0$.*

Доказательство. Эта теорема – прямое следствие леммы Ферма 9.5.1. □

Замечание 9.10.1 *Это условие не является достаточным, что показывает, например, функция $f(x) = x^3$, производная которой равна нулю в точке $x = 0$, но которая не имеет экстремума в этой точке.*

Ниже приведено удобное для практического применения достаточное условие экстремума.

Теорема 9.10.3 (Первое достаточное условие экстремума) *Пусть $f(x) : U(x_0) \to \mathbb{R}$, непрерывна в точке x_0 и дифференцируема на множествах $U_- = \{x \in U(x_0) : x < x_0\}$ и $U_+ = \{x \in U(x_0) : x > x_0\}$. Тогда:*

1. *Если $f'(x) > 0$ при $x \in U_-$ и $f'(x) < 0$ при $x \in U_+$, то x_0 является точкой строгого локального максимума функции $f(x)$.*
2. *Если $f'(x) < 0$ при $x \in U_-$ и $f'(x) > 0$ при $x \in U_+$, то x_0 является точкой строгого локального минимума функции $f(x)$.*
3. *Если $f'(x) > 0$ при $x \in U_-$ и $f'(x) > 0$ при $x \in U_+$, то x_0 не является точкой экстремума функции $f(x)$.*
4. *Если $f'(x) < 0$ при $x \in U_-$ и $f'(x) < 0$ при $x \in U_+$, то x_0 не является точкой экстремума функции $f(x)$.*

Доказательство. Первое утверждение. Так как $f'(x) > 0$ при $x \in U_- = (x_0 - \varepsilon, x_0)$ и функция непрерывна в точке x_0, то согласно теореме 9.10.1 функция $f(x)$ возрастает на $(x_0 - \varepsilon, x_0]$. Значит, $f(x_0) < f(x)$ при $x \in U_-$. Аналогично, так как $f'(x) < 0$ при $x \in U_+ = (x_0, x_0 + \varepsilon)$ и функция непрерывна в точке x_0, то функция $f(x)$ возрастает на $[x_0, x_0 + \varepsilon)$. Тем самым проверено, что точка x_0 – точка строгого локального максимума.
Доказательство остальных пунктов проводится аналогично и остается в качестве упражнения. ☐

Пример 9.10.1 *Функция $f(x) = |x|$ имеет строгий локальный минимум в точке $x = 0$, так как она непрерывна в точке $x = 0$ и, кроме того, $f'(x) = -1$ при $x < 0$, и $f'(x) = 1$ при $x > 0$.*

Пример 9.10.2 *Важно отметить, что отказаться от непрерывности функции в точке x_0 в вышеизложенной теореме нельзя. Например, для функции*

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 0 \\ -x + 1, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

при $x < 0$ выполняется $f'(x) = 1$, а при $x > 0$ выполняется $f'(x) = -1$, но экстремума в точке $x = 0$, очевидно, нет.

Замечание 9.10.2 *Важно отметить, что вышеизложенное достаточное условие не является необходимым. Пусть*

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Очевидно, что данная функция имеет строгий локальный минимум в точке $x = 0$, однако ее производная

$$f'(x) = 4x + 2x \sin\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}$$

не сохраняет знак ни в какой проколотой окрестности нуля.

Определение 9.10.1 *Если в точке экстремума функция дифференцируема, то экстремум называется гладким.*

Определение 9.10.2 *Если x_0 – точка экстремума функции, а $f'(x_0-0) = +\infty$, $f'(x_0+0) = -\infty$, или $f'(x_0-0) = -\infty$, $f'(x_0+0) = +\infty$, то экстремум называется острым.*

Определение 9.10.3 *Если x_0 – точка экстремума функции, хотя бы одна из односторонних производных конечна, но $f'(x_0 - 0) \neq f'(x_0 + 0)$, то экстремум называется угловым.*

Пример 9.10.3 *Исследовать на экстремумы функцию*

$$y = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}.$$

Легко заметить, что данная функция непрерывна на $\mathbb{R}$. Ее производная равна

$$y'(x) = \frac{(4-3x)}{3(1-x)^{2/3}(x-2)^{1/3}}.$$

Методом интервалов легко определить, что производная отрицательна при $x > 2$ и $x < \frac{4}{3}$ и положительна при $\frac{4}{3} < x < 2$.

Так как функция дифференцируема в точке $\frac{4}{3}$ и слева от этой точки производная отрицательна, а справа положительна, то $x = \frac{4}{3}$ – точка строгого локального минимума, причем минимум гладкий.

Так как $f'(2-0) = +\infty$, $f'(2+0) = -\infty$ и слева от точки 2 производная положительна, а справа отрицательна, то точка $x = 2$ – точка строгого локального максимума, причем максимум острый.

Можно заметить, что в точке $x = 1$ знак производной не меняется, а сама производная обращается в бесконечность. Значит, в точке $x = 1$ касательная к графику функции вертикальна. График функции изображен на рисунке 20.

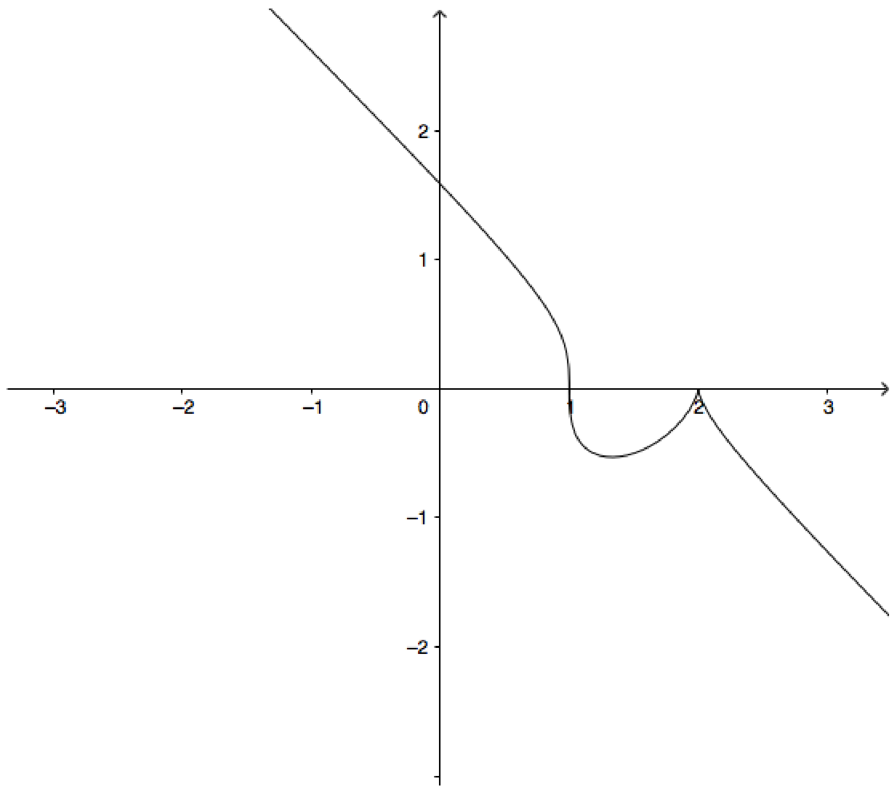

Рис. 20 График функции $y = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$.

Теорема 9.10.4 (Второе достаточное условие экстремума) *Пусть функция $f(x) : E \to \mathbb{R}$ имеет производные в точке x_0 до порядка n включительно, причем $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда если n нечетно, то в точке x_0 экстремума нет, а если четно, то в точке x_0 локальный минимум, если $f^{(n)}(x_0) > 0$ и локальный максимум, если $f^{(n)}(x_0) < 0$.*

Доказательство. Используя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, получается

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n).$$

При достаточной близости x к x_0 знак разности $f(x) - f(x_0)$ определяется лишь знаком $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

Если n нечетно, то при $x > x_0$ знак разности совпадает со знаком $f^{(n)}(x_0)$, а при $x < x_0$ противоположен знаку $f^{(n)}(x_0)$, значит экстремума нет.

Если n четно, то как при $x > x_0$, так и при $x < x_0$ знак разности совпадает со знаком $f^{(n)}(x_0)$. Тогда, если разность положительна, то в точке x_0 локальный минимум, если отрицательна, то локальный максимум. □

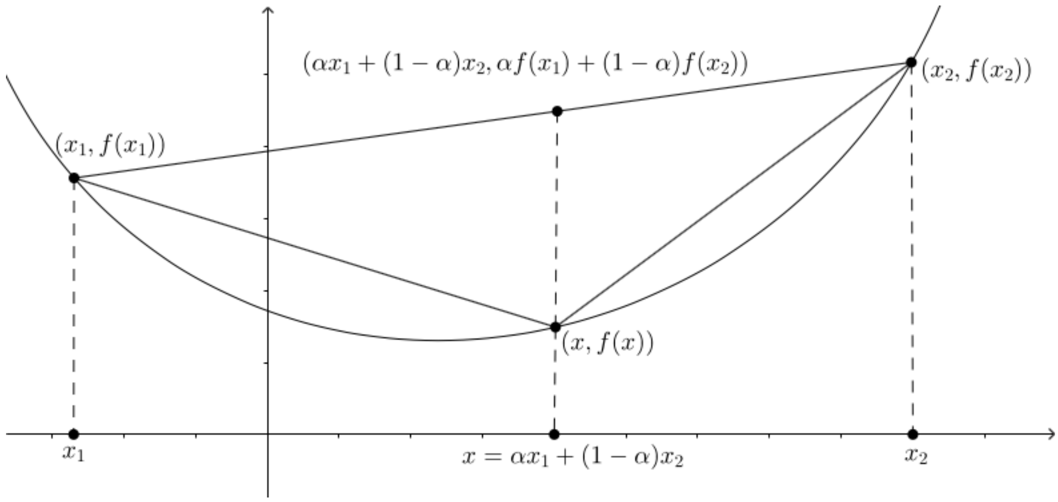

Рис. 21 Выпуклая вниз функция

Определение 9.10.4 *Функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ называется выпуклой вверх на (a, b), если $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$ и $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, выполняется условие*

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

Если при тех же условиях выполнено

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2),$$

то функция называется выпуклой вниз на (a, b).
Если при $x_1 \neq x_2$ и $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$ неравенство строгое, то функция называется строго выпуклой вверх (вниз).

Замечание 9.10.3 *Геометрически выпуклость вниз функции на интервале (a, b) означает, что какую бы хорду графика функции, проходящую через точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$ не провести, все точки графика функции $(x, f(x))$, стягиваемые данной хордой, лежат не выше точек хорды, см. рисунок 21.*

Выведем эквивалентное условие выпуклости вниз. Из условий

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in (a, b),\ \alpha_2 = 1 - \alpha_1$$

получим

$$\alpha_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1},\ \alpha_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Определение выпуклой вниз функции переписывается в виде

$$f(x) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Пусть $x_2 > x_1$, тогда

$$(x_2 - x_1)f(x) \leqslant (x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2),$$

$$(x_2 - x)f(x_1) - (x_2 - x_1)f(x) + (x - x_1)f(x_2) \geqslant 0,$$
$$(x_2 - x)f(x_1) + (x_1 - x_2)f(x) + (x - x_1)f(x_2) \geqslant 0.$$

Переписав $x_1 - x_2 = (x_1 - x) + (x - x_2)$, получается

$$(x_2 - x)f(x_1) + (x_1 - x)f(x) + (x - x_2)f(x) + (x - x_1)f(x_2) \geqslant 0,$$

$$(x_2 - x)f(x_1) - (x - x_1)f(x) - (x_2 - x)f(x) + (x - x_1)f(x_2) \geqslant 0,$$
$$(x_2 - x)(f(x_1) - f(x)) + (x - x_1)(f(x_2) - f(x)) \geqslant 0,$$
$$(x - x_1)(f(x_2) - f(x)) \geqslant (x_2 - x)(f(x) - f(x_1))$$

или

$$(x_2 - x)(f(x) - f(x_1)) \leqslant (x - x_1)(f(x_2) - f(x)),$$

где $x_1 < x < x_2$. Тем самым получаем эквивалентное условие выпуклости вниз при $x_1 < x < x_2$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Замечание 9.10.4 *Полученное условие означает, что хорда, соединяющая точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x, f(x))$ имеет коэффициент наклона не больше, чем хорда, соединяющая точки $(x, f(x))$ и $(x_2, f(x_2))$ (см. рисунок 21) .*

Теорема 9.10.5 *Для того чтобы дифференцируемая на интервале (a, b) функция $f(x)$ была выпуклой вниз (вверх) на (a, b) необходимо и достаточно, чтобы ее производная $f'(x)$ не убывала (не возрастала) на (a, b). При этом для строгой выпуклости вниз (вверх) необходимо и достаточно возрастание (убывание) производной.*

Доказательство. Необходимость. В неравенстве

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

переходя к пределу при $x \to x_1$, получается

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Теперь, переходя к пределу при $x \to x_2$,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'(x_2).$$

Тогда получается

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'(x_2),$$

откуда и следует неубывание производной. Используя это, для строго выпуклой вниз функции, используя теорему Лагранжа получим

$$f'(x_1) \leqslant f'(\varepsilon_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\varepsilon_2) \leqslant f'(x_2),$$

при $a < x_1 < \varepsilon_1 < x < \varepsilon_2 < x_2 < b$. Следовательно, строгая выпуклость вниз влечет возрастание производной.
Достаточность. Пусть производная $f'(x)$ не убывает на интервале (a, b). Пусть $x_1 < x_2$, тогда по теореме Лагранжа

$$f'(\varepsilon_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}, \text{ где } \varepsilon_1 \in (x_1, x)$$

и

$$f'(\varepsilon_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \text{ где } \varepsilon_2 \in (x, x_2).$$

Так как производная не убывает, то $f'(\varepsilon_1) \leqslant f'(\varepsilon_2)$, откуда

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

и функция $f(x)$ выпукла вниз. Если же производная $f'(x)$ возрастает, то $f'(\varepsilon_1) < f'(\varepsilon_2)$, откуда

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

и функция $f(x)$ строго выпукла вниз. $\square$
Комбинируя только что доказанную теорему и теорему 9.10.1 получается следующее следствие.

Следствие 9.10.6 *Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b). Тогда, для того чтобы $f(x)$ была выпукла вниз (вверх) необходимо и достаточно, чтобы $f''(x) \geqslant 0$ на (a, b) ($f''(x) \leqslant 0$ на (a, b)). Причем, если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), то этого достаточно для строгой выпуклости вниз (вверх).*

Ниже установлена связь между выпуклостью вверх (вниз) и касательной к графику функции.

Теорема 9.10.7 *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b). Функция $f(x)$ выпукла вниз (вверх) на интервале (a, b) тогда и только тогда, когда все точки графика функции лежат не ниже (не выше) касательной, проведенной в произвольной точке интервала (a, b). При этом для строгой выпуклости вниз (вверх) необходимо и достаточно, чтобы все точки графика, за исключением точки касания, лежали строго выше (ниже) касательной.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x_0 \in (a, b)$. Уравнение касательной к графику функции в точке x_0 имеет вид $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Разность функции и касательной

$$f(x) - y(x) = f(x) - f(x_0) - f^{'}(x_0)(x - x_0) = (f'(\varepsilon) - f'(x_0))(x - x_0),$$

где ε между x и x_0. Так как $f(x)$ выпукла вниз, то $f'(x)$ не убывает на (a, b) и знак выражения $f'(\varepsilon) - f'(x_0)$ совпадает со знаком $x - x_0$, а следовательно, $f(x) - y(x) \geqslant 0$ в любой точке интервала (a, b). Если $f(x)$ строго выпукла, то $f'(x)$ возрастает на (a, b) откуда $f(x) - y(x) > 0$.
Достаточность. Пусть $f(x) - y(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \geqslant 0$.

Тогда при $x < x_0$ выполняется $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant f'(x_0)$, а при $x > x_0$ выполняется $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant f'(x_0)$.

Тем самым, для любого набора точек $x_1, x_2, x \in (a, b)$ таких, что $x_1 < x < x_3$ получается $\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$, тем самым получаем определение выпуклой функции. Можно заметить, что строгое неравенство влечет строгую выпуклость. ☐

Определение 9.10.5 *Пусть функция $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ имеет в точке x_0 производную. Если при переходе через точку x_0 функция меняет направление выпуклости, то точка x_0 называется точкой перегиба.*

Замечание 9.10.5 *Точки перегиба дважды дифференцируемой функции нужно искать там, где существует первая производная, а вторая производная либо равна нулю, либо не существует.*

Пример 9.10.4 *Исследовать на выпуклость функцию*

$$y = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Первая производная данной функции имеет вид $y' = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$, *а вторая* $y'' = -\frac{2(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$. *Методом интервалов легко установить, что вторая производная отрицательна на промежутках* $(-\infty,-1);(1,+\infty)$, *а значит на этих промежутках функция выпукла вверх, и положительна на промежутке* $(-1,1)$, *а значит на этом промежутке функция выпукла вниз. Точек перегиба у данной функции нет.*

9.11 Асимптоты графика функции

Определение 9.11.1 *Пусть функция* f *определена в окрестности точки* x_0. *Прямая* $x = x_0$ *называется вертикальной асимптотой графика функции* $y = f(x)$, *если*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty.$$

Если бесконечен только один из односторонних пределов, то говорят об односторонней вертикальной асимптоте (при $x \to x_0 - 0$ или $x \to x_0 + 0$).

Пример 9.11.1 *График функции* $y = 1/x$ *имеет вертикальную асимптоту* $x = 0$. *График функции* $y = e^{1/x}$ *имеет одностороннюю асимптоту* $x = 0$ *при* $x \to 0+$.

Определение 9.11.2 *Пусть функция* f *определена в окрестности бесконечности. Прямая* $y = kx + b$ *называется наклонной асимптотой графика функции* $y = f(x)$, *если*

$$f(x) = kx + b + o(1), \quad \text{при } x \to \infty.$$

Если утверждение определения выполнено только при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$, то говорят об односторонней наклонной асимптоте (на плюс или минус бесконечности, соответственно).

Коэффициенты k и b наклонной асимптоты $y = kx + b$ определяются с помощью следующей теоремы.

Теорема 9.11.1 (О наклонной асимптоте) *Для того чтобы прямая* $y = kx + b$ *была асимптотой графика функции* $y = f(x)$ *при* $x \to \pm\infty$, *необходимо и достаточно, чтобы существовали два конечных предела*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $y = kx + b$ – асимптота графика функции $y = f(x)$. Тогда запишем при $x \to \infty$

$$f(x) = kx + b + o(1) \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x)}{x} = k + \frac{b + (1)}{x}.$$

Переходя к пределу, получаем конечный предел $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k$. Для нахождения b запишем $b=f(x)-kx+o(1)$ и перейдем к пределу при $x\to\infty$.

Достаточность. Пусть существуют в $\mathbb{R}$ оба предела $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=b$. Тогда из второго равенства следует при $x\to\infty$:

$$b=f(x)-kx+o(1),$$

что и означает, что $y=kx+b$ – асимптота. □

Замечание 9.11.1 *В случае, если $k=0$, асимптота называется горизонтальной и описывается уравнением $y=b$. Необходимое и достаточное условие горизонтальной асимптоты: существование конечного предела $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$.*

Пример 9.11.2 *График функции $y=e^{-x}$ имеет только правую асимптоту $y=0$, действительно*

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{xe^{x}}=0,$$

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x}=-\infty.$$

Так как при $x\to-\infty$ $k_1=-\infty$, то левой асимптоты не существует. Для правой асимптоты

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{x}}\right)=0.$$

Таким образом $k=0$ и $b=0$, а следовательно асимптота имеет уравнение $y=0$.

Пример 9.11.3 *Найти асимптоты графика функции $y=x+\operatorname{arctg}x$. Данная функция непрерывна на всем множестве действительных чисел, поэтому у нее нет вертикальных асимптот.*

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+\operatorname{arctg}x}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\right)=1+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=1,$$

так как функция $\operatorname{arctg}x$ ограничена, то последний предел при $x\to\pm\infty$ равен 0. Коэффициент b вычисляется отдельно при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$.

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}(x+\operatorname{arctg}x-1\cdot x)=\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2},$$

$$b_2 = \lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, график функции имеет две наклонные асимптоты

$$y_1 = x + \frac{\pi}{2},\ y_2 = x - \frac{\pi}{2}.$$

9.12 Исследование функции и построение графика

Для построения и изучения функции целесообразно придерживаться следующей последовательности действий:

1. Найти область определения функции и ее точки разрыва. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
2. Отметить такие свойства, как четность, нечетность, периодичность.
3. Найти первую производную и промежутки возрастания и убывания функции, а также экстремумы.
4. Найти вторую производную и промежутки выпуклости, а также точки перегиба.
5. Найти асимптоты графика функции.
6. Построить график.

Ясно, что при решении конкретной задачи некоторые пункты могут быть расширены, а некоторые могут быть излишними или вовсе невыполнимыми.

Пример 9.12.1 *Построить график функции*

$$y = \frac{x^5}{x^4 - 1}.$$

1. В область определения функции не входят те точки, которые удовлетворяют уравнению $x^4 - 1 = 0$, то есть $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Кроме того, если $y = 0$, то $x = 0$, и наоборот, так что $(0, 0)$ – единственная точка пересечения графика функции с осями координат.
2. Функция является нечетной, так как

$$y(-x) = \frac{(-x)^5}{(-x)^4 - 1} = -\frac{x^5}{x^4 - 1} = -y(x).$$

3. Первая производная функции: $y'(x) = \frac{x^4(x^4-5)}{(x^4-1)^2}$.

Методом интервалов легко получить, что функция возрастает при $x \in (-\infty, -\sqrt[4]{5}]; [\sqrt[4]{5}, +\infty)$ *и убывает при* $x \in [-\sqrt[4]{5}, -1); (-1, 1); (1, \sqrt[4]{5}]$. *В точке* $x = -\sqrt[4]{5}$ *функция имеет строгий локальный максимум, причем* $y(-\sqrt[4]{5}) = -\frac{5\sqrt[4]{5}}{4}$, *а в точке* $x = \sqrt[4]{5}$ *строгий локальный минимум, причем* $y(\sqrt[4]{5}) = \frac{5\sqrt[4]{5}}{4}$.

4. Вторая производная функции: $y'' = \frac{x^3(12x^4+20)}{(x^4-1)^3}$.

Методом интервалов легко получить, что функция выпукла вниз при $x \in (-1, 0]; [1, +\infty)$ *и выпукла вверх при* $x \in (-\infty, -1); [0, 1)$. *Кроме того, точка* $x = 0$ *является точкой перегиба, причем* $y(0) = 0$.

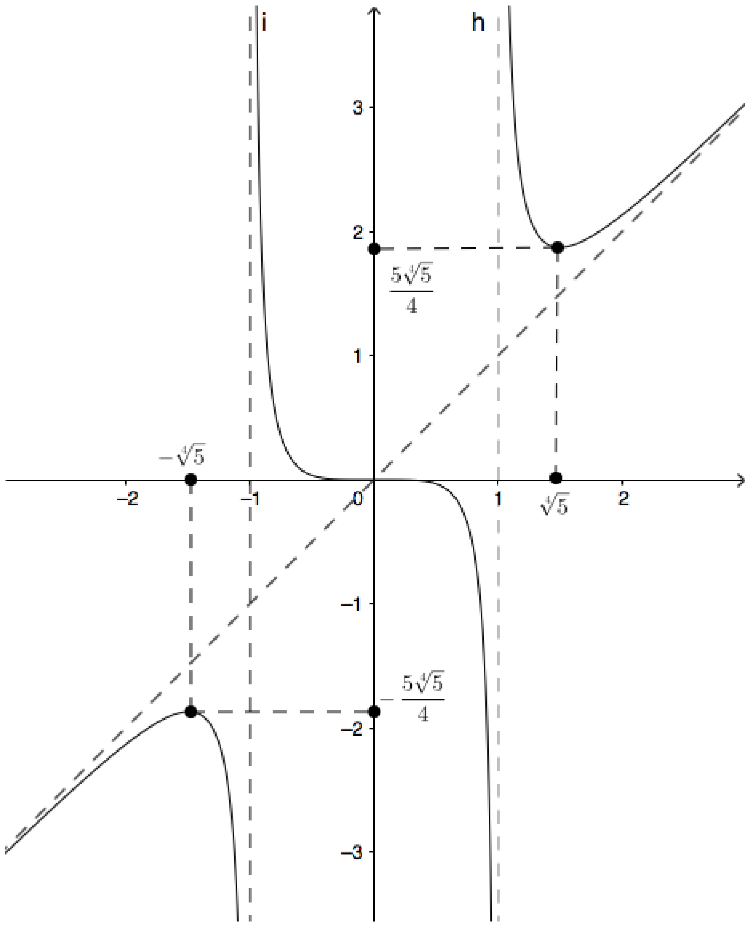

Рис. 22 График функции $y = \frac{x^5}{x^4-1}$.

5. Функция непрерывна на множестве $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. *Так как*

$$\lim_{x\to-1-0} \frac{x^5}{x^4-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to-1+0} \frac{x^5}{x^4-1} = +\infty$$

и

$$\lim_{x\to1-0} \frac{x^5}{x^4-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to1+0} \frac{x^5}{x^4-1} = +\infty,$$

то можно заключить, что $x = 1$ и $x = -1$ – вертикальные асимптоты. Кроме того, так как

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4}{x^4-1} = 1$$

и

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^5}{x^4-1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x}{x^4-1}\right) = 0,$$

то прямая $y = x$ является асимптотой графика функции как на $-\infty$, так и на $+\infty$.
6. Вся полученная информация теперь используется для построения графика функции.

9.13 Контрольные вопросы и задачи

1. Какова связь между наличием предела функции в точке и ее дифференцируемостью в этой точке?

2. Поясните, почему в теореме Ферма условие, что рассматривается внутренний экстремум, важно.

3. Выведите теорему Лагранжа из теоремы Коши.

4. Как с помощью формулы Тейлора вычислить $\sin 2$ с наперед заданной точностью?

5. Может ли функция быть непрерывной, но недифференцируемой?

10 Некоторые полезные неравенства

10.1 Неравенство Юнга

Теорема 10.1.1 *Пусть $a, b \geqslant 0$, $p, q > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Доказательство. Так как $\ln x$ – выпуклая вверх функция, то при любых $x_1, x_2 > 0$ и $\alpha \in [0, 1]$ выполняется

$$\ln(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)) \geqslant \alpha \ln x_1 + (1-\alpha)\ln x_2.$$

Положим $\alpha = \frac{1}{p}$, $1-\alpha = \frac{1}{q}$, $a^p = x_1$, $b^q = x_2$. Тогда

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geqslant \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q = \ln(ab),$$

откуда и следует требуемое. □

Замечание 10.1.1 *При $p = q = 2$ получаем $ab \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$.*

10.2 Неравенство Гёльдера

Теорема 10.2.1 (Неравенство Гёльдера) *Пусть $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p > 1$. Тогда*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q}.$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством Юнга.

$$a = \frac{|a_k|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p}}, \quad b = \frac{|b_k|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q}}.$$

Согласно неравенству Юнга,

$$\frac{|a_k|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p}} \cdot \frac{|b_k|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q}} \leqslant \frac{|a_k|^p}{p\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^p} + \frac{|b_k|^q}{q\sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^q}.$$

Суммируем эти неравенства, получим

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{|a_k|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p}} \cdot \frac{|b_k|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q}}\right) \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

откуда следует требуемое. □

Замечание 10.2.1 *При $p = q = 2$ получаем*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Этому неравенству можно придать геометрический смысл. Рассмотрим два вектора $\vec{a} = (a_1, ..., a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, ..., b_n)$. Тогда неравенство будет иметь вид

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leqslant |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|.$$

10.3 Неравенство Минковского

Теорема 10.3.1 *Пусть* $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $p \geqslant 1$. *Тогда*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p}$$

Доказательство.

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k||a_k + b_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |b_k||a_k + b_k|^{p-1} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^{q(p-1)}\right)^{1/q} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^{q(p-1)}\right)^{1/q} =$$

$$\left(\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p}\right) \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{1/q}.$$

Поделив все неравенство на второй сомножитель, получим требуемое.

$\square$

Замечание 10.3.1 *При* $p = q = 2$ *неравенство примет вид*

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Для векторов $\vec{a} = (a_1, ..., a_n)$ *и* $\vec{b} = (b_1, ..., b_n)$ *это неравенство является неравенством треугольника:*

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leqslant |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$