Теорема о существовании $\sqrt{2}$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \neq \varnothing$

$\triangleright$ докажем что $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, т.е. что $\exists s \in \mathbb{R}: \ s^2 = 2$

$\exists X = \{x \in \mathbb{R}, x > 0 : x^2 < 2\}$

$Y = \{y \in \mathbb{R}, y > 0 : y^2 > 2\}$

$\forall x \in X, \forall y \in Y : \ x < y \iff x^2 < y^2$

по аксиоме непрерывности: $\exists s \in \mathbb{R}: \ x \leq s \leq y \ \ \forall x \in X, \forall y \in Y$

1) $\exists s \in X$, т.е. $s^2 < 2$

$\triangleleft \ g = s + \frac{2 - s^2}{3s}, \quad 2 - s^2 = \Delta, \quad g > s$

$$g^2 = \left(s + \frac{\Delta}{3s}\right)^2 = s^2 + \frac{2}{3}\Delta + \underbrace{\frac{\Delta^2}{9s^2}}_{< \frac{\Delta}{3}} < s^2 + \frac{2}{3}\Delta + \frac{\Delta}{3} = s^2 + \Delta = s^2 + 2 - s^2 = 2$$

$\Rightarrow g^2 < 2 \Rightarrow g \in X$

но $x \leq s \leq y$ и $x \leq s < \underset{\in X}{g} < y$

$\forall x \in X, \forall y \in X$ — противоречие с изначальным нер-ом потому что s должно быть больше $\forall x \in X$

2) $\exists s \in Y$, т.е. $s^2 > 2$

$\triangleleft \ g = s - \frac{s^2 - 2}{3s}, \quad s^2 - 2 = \Delta, \quad g < s$

$$g^2 = \left(s - \frac{\Delta}{3s}\right)^2 = s^2 - \frac{2}{3}\Delta + \frac{\Delta^2}{9s^2} > s^2 - \frac{2}{3}\Delta - \frac{\Delta}{3} = s^2 - \Delta = s^2 - s^2 + 2 = 2$$

$\Rightarrow g^2 > 2 \Rightarrow g \in Y$

но $x \leq s \leq y$ и $x \leq \overset{\in Y}{g} < s \leq y$

$\forall x \in X, \forall y \in Y$ — противоречие с изначальным нер-ом потому что s должно быть меньше $\forall y \in Y$

$\Longrightarrow$ остается $s^2 = 2$

3) докажем, что $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$\exists \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ т.е. $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$

$\exists$ НОД$(p, q) = 1$ => дробь несократима

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow 2q^2 = p^2$$

$$2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2 \,\vdots\, 2 \Rightarrow p \,\vdots\, 2$$

$$\exists\, p = 2k,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2q^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

$$q^2 = 2k^2 \Rightarrow q^2 \,\vdots\, 2 \Rightarrow q \,\vdots\, 2$$

значит дробь сократима
противоречие

$$\Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

◀

Док-во бинома Ньютона.

$$\triangleright\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} \cdot b^k$$

База: $n = 1$: $(a+b)^1 = C_1^0 a^1 + C_1^1 b^1 = a + b$, верно

Шаг: $\exists$ при $n = m$ $\quad (a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} \cdot b^k$

Докажем, что при $n = m+1$ $\quad (a+b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k \cdot a^{m+1-k} \cdot b^k$

$$(a+b)^{m+1} = (a+b)(a+b)^m = (a+b) \cdot \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} \cdot b^k = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \cdot a^{m-k+1} \cdot b^k +$$

$$+ \underbrace{\sum_{k=0}^{m} C_m^k \cdot a^{m-k} \cdot b^{k+1}}_{k+1 = k'}$$ (сдвинем нумерацию в одной из сумм) $=$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k \cdot a^{m-k+1} \cdot b^k + \sum_{k'=1}^{m+1} C_m^{k'-1} \cdot a^{m-k'+1} \cdot b^{k'} = \overbrace{\underbrace{C_m^0}_{1 = C_{m+1}^0} a^{m+1} + \underbrace{C_m^m}_{1 = C_{m+1}^{m+1}} b^{m+1}}^{\text{не нашлось пары}} + \sum_{k=1}^{m} \Big(\overbrace{C_m^k + C_m^{k-1}}^{C_{m+1}^k}\Big) a^{m-k+1} b^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k \cdot a^{m-k+1} \cdot b^k$$

◀

Принцип Архимеда

$$\forall a \in \mathbb{R} \to \exists n \in \mathbb{N} : \quad n > a$$

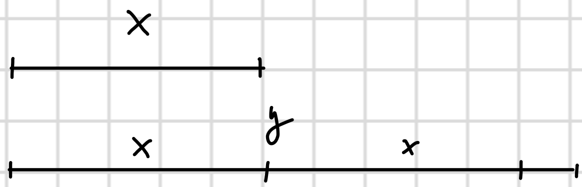
$\triangleright$ $]$ $\exists a \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : \ n \le a \ \Rightarrow \ \exists b \in \mathbb{R} : \ b = \sup \mathbb{N} \ \Rightarrow$

$\Rightarrow \ \exists n \in \mathbb{N} : \ n > b - 1 \ \Leftrightarrow \ \underset{\overset{\Uparrow}{\mathbb{N}}}{n+1} > b$ противоречие что $b = \sup \mathbb{N}$

$\blacktriangleleft$

Теорема (Принцип Архимеда):

$]$ $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Тогда $\forall y \in \mathbb{R} \ \exists! k \in \mathbb{Z} : \ (k-1)x \le y < kx$



домножаем на x

$\triangleright$ $\sphericalangle$ $T = \{ t \in \mathbb{Z} : \ \frac{y}{x} < t \}$ $\qquad y < tx \Rightarrow y < kx$

$T \ne \varnothing$ и огр. снизу $\Rightarrow \exists \ m = \inf T$ $\qquad \Uparrow$

$\exists k \in T : \ m \le k \le m+1 \ \Rightarrow \ k - 1 < m, \ k-1 \notin T \ \Rightarrow$

$k = \min T = m = \inf T$ $\blacktriangleleft$

Теорема о плотности $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$

$]$ $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b \ \Rightarrow \ \exists q \in \mathbb{Q} : \ a < q < b$

$\triangleright$ $(b-a) > 0 \ \Rightarrow \ \exists n \in \mathbb{N} : \ \frac{1}{n} < (b-a)$

$]$ $q = \frac{[na]+1}{n} \in \mathbb{Q}$

$q \le \frac{na+1}{n} = a + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b \qquad q < b$

$q > \frac{na+1-1}{n} = a \qquad q > a$

$\blacktriangleleft$

Теорема о плотности $\mathbb{I}$ в $\mathbb{R}$

$] \; a, b \in \mathbb{R}, \; a < b \Rightarrow \exists i \in \mathbb{I} : a < i < b$

$\triangleright \; \sqrt{2} \in \mathbb{I} \Rightarrow \quad a - \sqrt{2} < b - \sqrt{2}$

$\exists q \in \mathbb{Q} : \quad a - \sqrt{2} < q < b - \sqrt{2} \Leftrightarrow a < \underbrace{q + \sqrt{2}}_{\mathbb{I}} < b$

Теорема Кантора

$I_n = [a_n, b_n], \; a_n \le b_n \quad I_n$ – сист. вложенных отрезков если:

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \ldots I_n \supset \ldots$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i \ne \varnothing \quad ; \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} I_i = \{a\}$$

$\triangleright \;] \; A = \{a_1, a_2, a_3 \ldots\} \qquad B = \{b_1, b_2, b_3 \ldots\}$

$\forall n, m \in \mathbb{N} : \; [a_{n+m}; b_{n+m}] \subset [a_n; b_n] \Rightarrow a_n \le a_{n+m}$

$\forall n, m \in \mathbb{N} : \; [a_{n+m}; b_{n+m}] \subset [a_m; b_m] \Rightarrow b_{n+m} \le b_m$

$\Rightarrow \quad a_n \le a_{n+m} \le b_{n+m} \le b_m \Rightarrow \forall a \in A, \forall b \in B : \; a \le b$

по аксиоме непрерывности: $\quad a \le c \le b, \; \forall a \in A, \; \forall b \in B \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad c \in [a_n; b_n]$

$] \; \exists c_1 \ne c_2$ и $] \; c_1 < c_2 \Rightarrow a_n \le c_1 < c_2 \le b_n$

т.е. $\quad 0 < c_2 - c_1 \le b_n - a_n < \varepsilon \Rightarrow c_2 - c_1 < \varepsilon \Rightarrow$

$c_2 - c_1 = 0$ противоречие $\blacktriangleleft$

Теорема Кантора о вложенных отрезках:

$\exists\ [a_n; b_n]$ — влож. отр-и Тогда $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n; b_n] \neq \varnothing$

$a_n, b_n \in \mathbb{R}$

точка

если $\forall \varepsilon > 0\ \exists n:\ b_n - a_n < \varepsilon$ тогда $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n; b_n] = \{c\}$

▷ $\exists X = \{a_1, a_2, \dots\}$

$Y = \{b_1, b_2, \dots\}$

$\forall a_i, b_i:\ a_i \le b_i \Rightarrow \exists C \in \mathbb{R}:$

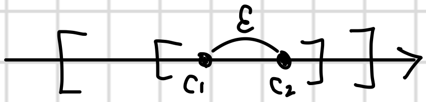
$:\ a_i \le c \le b_i\ \ \forall c \in [a_i; b_i]\ \forall i \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow c \in \bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} [a_i; b_i]$

Допустим, что $c_1 \neq c_2 \in \bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} [a_i; b_i] \Rightarrow b_n - a_n > \varepsilon\ \forall n$

↓

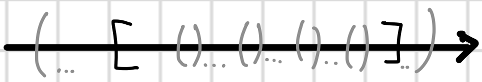
противоречие



Лемма Бореля-Лебега

Т.е. можно взять n кол-во интервалов и их объединение покроет отр.

Из любого покрытия отрезка интервалами можно выделить конечное подпокрытие

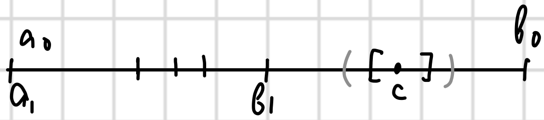


отрезок

▷ $[a, b]$, M_α — интервалы

$\exists\ [a, b]$ не допускает конечного покрытия

делим пополам:



если бы оба допускали то мы бы покрыли весь отр.

$\exists\ [a_1, b_1]$ — та половина которая не допускает конечного покрытия

$[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$

Т. Кантора

$b_n - a_n = \underbrace{\frac{b-a}{2^n}}_{\text{длина отрезка на шаге } n} < \underbrace{\frac{b-a}{n} < \varepsilon}_{\exists n,\ \text{что это правда}} \Rightarrow \exists!\, c \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$

$\exists M_\alpha \ni C,\ [a_n, b_n] \subset M_\alpha \Rightarrow$ противоречие ◀