

Положительные ряды

$$\exists a_n \geq 0$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Лемма.

1) $S_n \uparrow$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sup S_n$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с.х.-с. $\Leftrightarrow S_n$ - о.р. сверху

▷ лекция ◀

Теорема (Признаки сравнения)

$\exists a_n, b_n \geq 0$ Тогда:

① Если $0 \leq a_n \leq b_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с.х.-с., то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с.х.-с.
можно н.с.н.н

② Если $0 \leq a_n \leq b_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расх., то $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расх.-с.

③ Если $a_n \sim_{n \rightarrow \infty} b_n$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ оба с.х.-с. или расх.-с.

▷ как для интегралов ◀

Теорема (Радикальный признак Коши)

$\exists a_n \geq 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$. Тогда:

1) Если $\ell > 1$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расх.-с.

2) Если $\ell < 1$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с.х.-с.

③ Если $\ell = 1$, то признак не работает

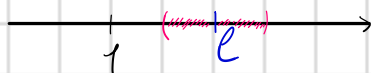
Π_p :

1) $\sum \frac{1}{n}$ $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1$, но рег. расх.-е

2) $\sum \frac{1}{n^2}$ сх.-е Т.К. $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} \leftarrow \text{сх.-е}$, но $\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \rightarrow 1$

\triangleright (1) Т.К. $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, то $\exists a_{n_k} : \sqrt[n_k]{a_{n_k}} \rightarrow \ell > 1 \Rightarrow a_{n_k} > 1$ н.с.н.н. \Rightarrow

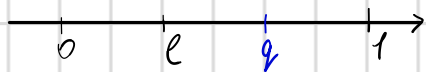
$\Rightarrow \text{и } a_{n_k} > 1$



$\Rightarrow a_n \not\rightarrow 0$ $a_n > 1 \Rightarrow \sum a_n$ расх.-е \blacktriangleleft

\triangleright (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell < 1$

$\exists q = \frac{\ell+1}{2} \in (\ell, 1)$



$\Rightarrow \exists n_0 \forall n \geq n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < q$

$a_n < q^n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ сх.-е (Т.К. $0 < q < 1$)

\Rightarrow по пр. сравнения $\sum a_n$ сх.-е \blacktriangleleft

Теорема (признак Даламбера)

$\exists a_n > 0$ и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in \bar{\mathbb{R}}$. Тогда:

1) Если $\ell > 1$, то $\sum a_n$ расх.-е

2) Если $\ell < 1$, то $\sum a_n$ сх.-е

⑬ Если $\ell = 1$, то признак не работает

\triangleright (1) Если $\ell > 1$, то н.с.н.н. $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow a_n \not\rightarrow 0$ и рег. расх.-е

(Т.К. не вои. необход.-е) \blacktriangleleft

\triangleright (2) $\exists \ell < 1$ и $q = \frac{\ell+1}{2} \in (\ell, 1)$

$\exists n_0 \forall n \geq n_0 \frac{a_{n+1}}{a_n} < q$

$$\left. \begin{array}{l} a_{n_0+1} < q \cdot a_{n_0} \\ \vdots \\ a_{n_0+p} < q^p \cdot a_{n_0} \end{array} \right\} a_n < q^{n-n_0} \cdot a_{n_0} \text{ и } \sum q^{n-n_0} \text{ с.х.-с.} \Rightarrow \sum a_n \text{ с.х.-с.}$$

13) Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$, но в обратную сторону не работает (Критерий сильнейший)

Теорема (Признак Куммера)

$\exists a_n, b_n > 0$, $\sum \frac{1}{b_n}$ расх.-с. и $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1}) = \ell$. Тогда:

1) Если $\ell > 0$, то $\sum a_n$ с.х.-с.

2) Если $\ell < 0$, то $\sum a_n$ расх.-с.

13) при $b_n = 1$ получаем пр. Даламбера

$$\triangleright (1) \ell > 0 \Rightarrow \text{н.с.н.н.} \quad b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} > \frac{\ell}{2}$$

$$\downarrow$$

$$\underline{a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1}} > \frac{\ell}{2} \cdot \underline{a_{n+1}} > 0 \Rightarrow a_n b_n \downarrow \text{ и } a_n b_n > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n \in \mathbb{R}$$

$$\text{но } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1}) = \underbrace{a_1 b_1}_{\text{const}} - \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} b_{n+1}}_{\text{const}} \text{ с.х.-с.}$$

$$\Rightarrow \sum a_n \text{ с.х.-с.} \quad \blacktriangleleft$$

$$\triangleright (2) \exists \ell < 0 \Rightarrow \forall n \geq n_0 \text{ н.с.н.н.} \quad b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} < 0$$

$$\downarrow$$

$$b_n \cdot a_n - b_{n+1} a_{n+1} < 0 \Rightarrow a_n b_n \uparrow$$

$$a_{n+1} > a_n b_n \cdot \frac{1}{b_{n+1}} \geq \underbrace{a_{n_0} b_{n_0}}_{\text{const}} \cdot \underbrace{\frac{1}{b_{n+1}}}_{\text{расх.-с.}} \leftrightarrow \sum \frac{1}{b_{n+1}} \text{ расх.-с.}$$

$$\Rightarrow \sum a_{n+1} \text{ расх.-с.} \quad \blacktriangleleft$$

Теорема (признак Рааде)

$$\exists a_n > 0 \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - \ell \right) = \ell \quad \text{Тогда:}$$

$$1) \ell > \Rightarrow \sum a_n \text{ с.х.-с.}$$

$$2) \ell < \Rightarrow \sum a_n \text{ расх.-с.}$$

▷ в пр. Куммера поставим $b_n = n$:

$$\left(n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - n - \ell \right) = n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - \ell \right) - \ell \rightarrow \ell - \ell \quad \blacktriangleleft$$

Пр:

$$1) \sum \frac{2^n}{n!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 2^n} = \frac{2}{n+1} \rightarrow 0 < \ell \Rightarrow \text{с.х.-с.}$$

Теорема (Признак Бертраана)

$$\exists a_n > 0 \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \cdot \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - \ell \right) - \ell \right) = \ell \quad \text{Тогда:}$$

$$1) \text{ Если } \ell > \ell \Rightarrow \sum a_n \text{ с.х.-с.}$$

$$2) \text{ Если } \ell < \ell \Rightarrow \sum a_n \text{ расх.-с.}$$

▷ в пр. Куммера поставим $b_n = n \ln n$

$$? \sum \frac{1}{n \ln n}$$

$$\triangleleft \ln \ln(n+1) - \ln \ln n \approx \quad \text{т. Лопиталя}$$

$$\exists f(x) = \ln \ln x, \quad f' = \frac{1}{x \ln x}$$

$$\approx \frac{1}{n \ln n} \approx \forall \epsilon \in [n, n+1] \approx \frac{1}{n \ln n}$$

$$\sum_{n=2}^N (\ln \ln(n+1) - \ln \ln n) = \ln \ln(N+1) - \ln \ln 2 \xrightarrow{+\infty} +\infty$$

$$\Rightarrow \sum \frac{1}{n \ln n} \text{ расх.-с.} \quad \blacktriangleleft$$

Теорема (Признак Гаусса)

$$\exists a_n > 0 \text{ и } \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+r}}\right), \quad r > 0, \quad n \rightarrow \infty \quad \text{Тогда:}$$

1) Если $\lambda > 1$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх-ц

2) Если $\lambda < 1$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расх-ц

3) Если $\lambda = 1$, то:

3.1) $\mu > 1$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх-ц

3.2) $\mu \leq 1$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расх-ц

▷ $(1, 2)$ признак Даламбера ◀

▷ $(3.1, 3.2)$ признак Раабе при $\mu \neq 1$ ◀

▷ $(3.1, 3.2)$ признак Бертрама при $\mu = 1$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + d_n \cdot \frac{1}{n^{1+\delta}}, \quad d_n - \text{о.р.}$$

$$n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 = \frac{d_n}{n^\delta} \quad \text{или} \quad \text{смотреть лемму}$$

$$l_{nn} \cdot \left(n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) = \frac{d_n}{n^\delta} l_{nn}$$

ⓑ Можно заметить $O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right)$ и $o\left(\frac{1}{n}\right)$

Интегральный признак Коши.

Теорема

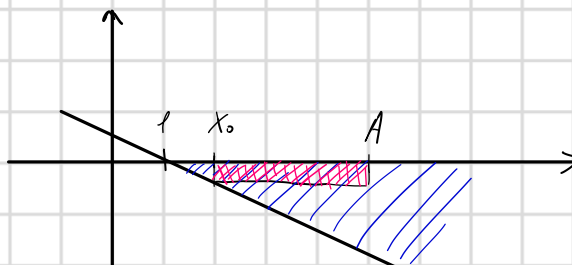
$\exists f$ -монотонна на $[1, +\infty)$ Тогда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ сх-ц} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ сх-ц}$$

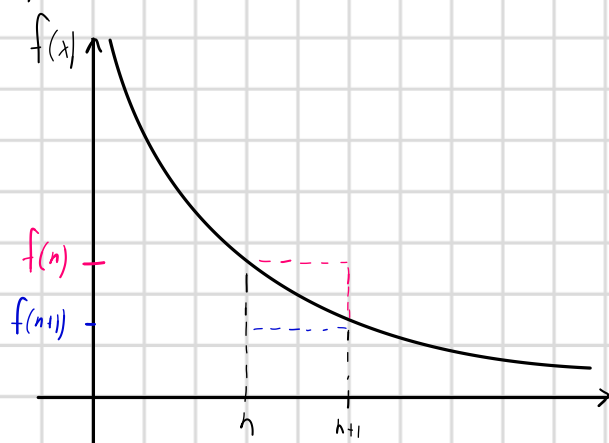
▷ $\exists f \downarrow$

1) Если $f(x_0) < 0$, то $f(k) \leq f(x_0)$ н.е.н. и $f(k) \not\rightarrow 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ расх-ц

$$\int_1^{\infty} f dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{x_0}^A f dx \leq \lim_{A \rightarrow \infty} f(x_0) \cdot (A - x_0)$$



$$2) \int f(x) \geq 0$$



$$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n), \quad x \in [n, n+1]$$

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n)$$

$$\sum_{n=1}^N f(n+1) \leq \int_1^{N+1} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^N f(n) \quad *$$

$$\text{Если } \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ с.с.} \Rightarrow F(w) = \int_1^w f(x) dx \uparrow \quad F(N+1) - \text{о.п. берем}$$

$$\Rightarrow F(w) \text{ имеет } \lim_{w \rightarrow +\infty} \quad \blacktriangleleft$$

Пр:

$$1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \ln \ln x \Big|_2^{\infty} = +\infty$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^d}$$

$$d > 1: \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^d} \text{ с.с.}$$

$$d \leq 1: \frac{1}{n^d} \geq \frac{1}{n} \text{ рас.с.}$$

Критерий ("Сравнение \sum и \int):

$\int f \geq 0, f(x) \downarrow$ на $[1, +\infty)$. Тогда:

$$A_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^{n+1} f(x) dx \text{ имеет предел } A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathbb{R}$$

$$\triangleright A_n \geq 0 \text{ но } *$$

$$\triangleleft A_n - A_{n+1} = -f(n+1) + \int_{n+1}^{n+2} f(x) dx \leq 0$$

$$f(x) \leq f(n+1) \quad x \in [n+1, n+2] \Rightarrow A_n \uparrow$$

$$A_N = \sum_{k=1}^N f(k) \rightsquigarrow \sum_{k=0}^N f(n+1) - \int_1^{N+1} f(x) dx = f(1) - f(N+1) + \underbrace{\sum_{n=1}^N f(n+1) - \int_1^{N+1} f(x) dx}_{\leq 0} \quad \leq$$

$$\leq f(1) - f(N+1) \leq f(1)$$

$$\Rightarrow A_N \uparrow \text{ и о.р. сверху } \Rightarrow \exists \lim_{N \rightarrow \infty} A_N \blacktriangleleft$$

$$\exists \lim_{N \rightarrow \infty} A_N = A$$

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^{n+1} f(x) dx + A + d_n, \quad d_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Средство (сумма гармонич. ряда)

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n+1) + A + d_n$$

$A = \gamma$ или C - постоянная Эйлера (Маскерони)

$$\gamma = 0,577... \quad , \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$$

Признак Абеля - Дирихле

Лемма (Преобразование Абеля)

репиз \heartsuit ~~КМ~~

$$\exists a_n, b_n \in \mathbb{C}, \quad A_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{Тоуа:}$$

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k)$$

$$\triangleright \sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n (A_k - A_{k-1}) b_k \Leftrightarrow A_0 = 0 \Leftrightarrow A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_k - \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} A_{k-1} b_k}_{\sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1}} = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

Теорема (признак Абеля - Дирихле)

$\exists a_k \in \mathbb{C}, b_k \in \mathbb{R}$. Тоуа зле сх-тч $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ достаточн:

$$1) A_n = \sum_{k=1}^n a_k \text{ о.р., т.е. } |A_n| \leq C$$

$$2) b_k - \text{монотон. и } b_k \rightarrow 0$$

Дирихле

Ули



$$1) \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{сх-с}$$

2) b_k монот. и о.р.

Аденб

▷ Дирхле: Кр. Коуш. $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{n+p} - \sum_{k=1}^n \right| = \left| \underbrace{A_{n+p}}_{\text{тензор}} b_{n+p} - \sum_{k=1}^{n+p-1} \underbrace{A_k}_{\text{отсюда жидка 43-49 монотонность}} (b_{k+1} - b_k) - A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{A_k}_{\text{тензор}} (b_{k+1} - b_k) \right| \leq C \cdot \left(\underbrace{|b_{n+p}|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|b_n|}_{< \varepsilon} + \sum_{k=n}^{n+p-1} \underbrace{|b_{k+1} - b_k|}_{\text{отсюда жидка 43-49 монотонность}} \right) \leq C \cdot (2\varepsilon + |b_{n+p}| + |b_n|) < 4C\varepsilon$

▷ Аденб: Сами: ◀

Пр:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^{\alpha}}$$

• $\alpha > 1$: $\left| \frac{\sin n}{n^{\alpha}} \right| \leq \frac{1}{n^{\alpha}}$ и $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$ сх-с

• $0 \leq \alpha \leq 1$: $|A_n| = \left| \sum_{k=1}^n \sin k \right| = \left| \frac{\sin \frac{n+1}{2} \cdot \sin \frac{n}{2}}{\sin \frac{1}{2}} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{1}{2}}$

$\frac{1}{n^{\alpha}} \downarrow$ и $\rightarrow 0 \Rightarrow$ по Дирхле $\sum \frac{\sin n}{n^{\alpha}}$ сх-с Как?

$\left| \frac{\sin n}{n^{\alpha}} \right| \geq \left| \frac{\sin^2 n}{n^{\alpha}} \right| = \frac{1}{2n^{\alpha}} - \frac{\cos 2n}{2n^{\alpha}} \Rightarrow$ ас. ст-ти нет ↖

$\sum \text{расх-с}$ $\sum \text{сх-с по Дирхле}$

• $\alpha \leq 0$: $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} \sin n$, $\beta = -\alpha \geq 0$ расх-с т.к. $n^{\beta} \sin n \not\rightarrow 0$

Теорема (Признак Лебнуса)

✓ Знакопеременный ряд $\leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$, $a_k \geq 0$

✓ $a_k \downarrow$ и $a_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ сх-с

▷ ✓ $A_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} = \underbrace{1-1+1-1+\dots}_n = \begin{cases} 0, \text{ чет} \\ 1, \text{ нечет} \end{cases} \text{ - о.р.} \Rightarrow$ сх-с по Дирхле

$a_k \downarrow$ и $\rightarrow 0$