19.3.2. (1) $\left|\dfrac{\cos xy}{x^2+y^2}\right| \le \dfrac{1}{a^2+y^2}$，而与 x 无关的积分 $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{a^2+y^2}\mathrm{d}y$ 收敛，因此 $\int_0^{+\infty} \dfrac{\cos xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$ 一致收敛。

(2) $|x^\alpha \mathrm{e}^{-x}| \le x^b\mathrm{e}^{-x}$，而与 α 无关的积分 $\int_1^{+\infty} x^b\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 收敛，因此 $\int_1^{+\infty} x^\alpha\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 一致收敛。

(3) 假设 $\delta > 0$ 使得对任何 $a > b > \delta$ 有 $\left|\int_a^b \mathrm{e}^{-\alpha x}\dfrac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x\right| < 0.1$. 取 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $2\pi n > \delta$，再取 $p > 0$ 使得 $\left(2\pi n + \dfrac{\pi}{2}\right)^p < 2$，那么 $\int_{2\pi n}^{2\pi n+\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-\alpha x}\dfrac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x > \dfrac{1}{2}$. 按照 Cauchy 收敛准则，该积分不一致收敛。

(4) 当 $p > 0$ 时，$\dfrac{1}{1+x^p}$ 单调有界，而与 p 无关的积分 $\int_0^{+\infty} \sin x^2\mathrm{d}x$ 一致收敛，因此原来的积分一致收敛。

(5) $\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha x}}{x}$ 单调一致趋于 0，$\int \sin x\mathrm{d}x$ 有界，因此原来的积分一致收敛。 □

19.3.5. 取 $\epsilon = \dfrac{\inf|l(\mathrm{A})|}{100}$. 对任何 $\delta > 0$，存在 $x \in \mathrm{X}$ 使得 $\left|\int_{\delta+1}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\right| > \dfrac{\inf|l(\mathrm{A})|}{2}$. 按照 Cauchy 收敛准则，该积分不一致收敛。 □

19.3.6. (1) 当 $\alpha \to 0$ 时，$\sqrt{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha x^2} \rightrightarrows 0$，因此若积分一致收敛，则可以调换极限的顺序：$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{\alpha\to 0}\sqrt{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x$，但是左边等于 $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$，右边等于 0.

(2) 对于任何 $\delta > 0$，找 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $\dfrac{1}{2\pi n} < \delta$；再找 n 使得 $\left(2\pi n + \dfrac{\pi}{2}\right)^n < 2$，此时就有 $\left|\int_{\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}}^{\frac{1}{2\pi n}} \dfrac{1}{x^n}\sin\dfrac{1}{x}\right| > \dfrac{1}{2}$，按照 Cauchy 收敛准则，该积分不一致收敛。

(3) 对于任何 $\delta > 0$，取 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $2\pi n > \delta$，再取 $x > 0$ 使得 $\mathrm{e}^{-x^2(1+(2\pi n+\pi)^2)} > \dfrac{1}{2}$，此时 $\int_{2\pi n}^{2\pi n+\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-x^2(1+y^2)}\sin y\mathrm{d}y > \dfrac{1}{2}$，按照 Cauchy 收敛准则，该积分不一致收敛。 □

19.3.7. (1) 在 α 在有限区间上时一致收敛，否则不一致收敛。

(2) 在 $p \ge p_0 > 0$ 上一致收敛，在 $p > 0$ 上不一致收敛。

(3) $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}\mathrm{sgn}\alpha$，当区间中不包含 0 时一致收敛；否则不一致收敛。

(4) □

19.3.8. (1) 积分内函数连续，积分绝对一致收敛，且 $x \to x_0$ 时 $\dfrac{x}{x^2+y^2} \rightrightarrows \dfrac{x_0}{x_0^2+y^2}$，因此 $\mathrm{F}(x)$ 连续。

(2) (3) 对于任何闭区间 $[a,b] \subset (3,+\infty)$，积分内函数在 $[a,b]\times(0,+\infty)$ 上连续，且积分一致收敛；因此 $\mathrm{F}(x)$ 连续。 □

19.3.9. 极限可以交换//实在是不想写了 □

19.3.10. 按照 abel-dirichlet 判别法，$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x} f(x)\mathrm{d}x$ 一致收敛，又 $\alpha \to 0$ 时 $\mathrm{e}^{-\alpha x} f(x) \rightrightarrows f(x)$，因此极限可以交换。 □

17§2.1. 如果积分一致收敛，按照 Cauchy 收敛准则，对任何的 $\epsilon > 0$，存在不依赖于 y 的数 δ 使得当 $\delta < a < b < \omega$ 时有 $\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x$. 如果取 $a = a_{\mathrm{M}}, b = a_{\mathrm{N}+1}$，这就是函数项级数一致收敛的 Cauchy 准则，即函数项级数一致收敛。而如果任何函数项级数都一致收敛，则对于任何 a, b 均可以找到恰当的函数项级数，通过它的 Cauchy 准则来得到积分的 Cauchy 准则。 □

17§2.3. 注意到 $\left|\dfrac{t^i \sin xt}{\sqrt{1-t^2}}\right| \le \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$，所有涉及到的积分都是一致收敛的，因此可以用求导的公式

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_0'(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{-t\sin xt}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left(\sqrt{1-t^2}\sin xt\right)_0^1 - \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\cos xtx\mathrm{d}t\right)
\end{aligned}$$

同时

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_0''(x) + \mathrm{J}_0(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos xt}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{-t^2\cos xt}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\cos xt\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

因此 $\mathrm{J}_0''(x) + \mathrm{J}_0(x) + \dfrac{1}{x}\mathrm{J}_0'(x) = 0$ □