2023 数值代数期末 1,4,6

@rosefantasie

2023 年 12 月 22 日

1. 设 B 是 A 的任意子矩阵，且是方阵，证明 $\|B\|_p \le \|A\|_p$. $\|\cdot\|_p$ 表示相应矩阵由对应尺寸向量的 p 范数诱导粗的矩阵算子范数，$1 \le p \le \infty$.

解. 设 B 是 $m \times m$, A 是 $n \times n$ 的，$m \le n$. 任意 $x \in \mathbb{R}^m$, 存在对应的 $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ 为 x 用零扩充后的 n 维向量，且 Bx 是 $A\tilde{x}$ 的子向量。

$$\|B\|_p = \max_{\|x\|_p=1} \|Bx\|_p \le \max_{\|x\|_p=1} \|A\tilde{x}\|_p \le \max_{\|\tilde{x}\|_p=1} \|A\tilde{x}\|_p = \|A\|_p.$$

写出范数定义得 2 分。

不妨设 B 为 A 的左上角子矩阵（或其他位置），要说明乘排列方阵后范数值不变。未说明者-1.

用分量的幂次和写的若没考虑 $p = \infty$ -2. □

4.

$$T_n = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_3 & \alpha_3 & \beta_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} & \beta_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$$

为实对称不可约三对角阵，设 $p_i(\lambda)$ 为 $T_n - \lambda I$ 的各阶顺序主子式，$i = 1, 2, \cdots, n$.

(a) 证明 $p_i(\lambda), p_{i+1}(\lambda)$ 没有公共根;

(b) 证明 $p_n(\lambda)$ 只有单根。

解. (a) 由定义知 $p_i(\lambda)$ 满足

$$\begin{aligned} &p_0(\lambda) = 1, p_1(\lambda) = \alpha_1 - \lambda, \\ &p_i(\lambda) = (\alpha_i - \lambda)p_{i-1}(\lambda) - \beta_i^2 p_{i-2}(\lambda), i = 2, \cdots, n. \end{aligned}$$

假设存在 i, $p_i(\lambda)$ 和 $p_{i-1}(\lambda)$ 有公共根 μ, 则

$$0 = p_i(\mu) = (\alpha_i - \mu)p_{i-1}(\mu) - \beta_i^2 p_{i-2}(\mu),$$

由于 $\beta_i \ne 0$ 故 $p_{i-2}(\mu) = 0$, 依次往下计算可得 $p_0(\mu) = 0$, 与 $p_0(\lambda) = 1$ 矛盾。(10')

递推式写错不得分。

(b) 课本 220 页.

全写对得 5 分，写出归纳法前两项得 2 分。 □

6. 给定对称正定矩阵 A, 如果 A 至多有 l 个互不相同的特征值，则共轭梯度法至多 l 步就可以得到方程组 $Ax = b$ 的精确解。

解. A 至多有 l 个互不相同的特征值，则 A 的最小多项式 $d_A(\lambda)$ 至多 l 次。设 $d_A(\lambda) = \sum_{i=0}^{l} c_i\lambda^i$. 则 $A^l r_0 \in \mathrm{span}\{r_0, Ar_0, \cdots, A^{l-1}r_0\}$, 即 $\mathrm{span}\{r_0, Ar_0, \cdots, A^{n-1}r_0\}$ 的维数至多是 l. 又 $\mathrm{span}\{r_0, \cdots, r_{n-1}\} = \mathrm{span}\{p_0, \cdots, p_{n-1}\} = \mathrm{span}\{r_0, Ar_0, \cdots, A^{n-1}r_0\}$（写出这个等式给 5 分），故共轭梯度法至多 l 步就可以得到精确解。

由 l 个互不相同的特征值推出 Krylov 子空间维数至多是 l 的过程没写-5.

写了共轭梯度法的表达式送 2 分。 □

2023 数值代数期末 2、3、5 评分标准

游瀚哲

2023 年 12 月 23 日

2.(1) 对于给定的单位向量 x, 构造两个不同的正交矩阵 Q_1, Q_2 使得 $Q_i e_1 = x, i = 1, 2$

(2) 设 $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$，并假定 $\lambda \in \mathbf{C}$ $u \in \mathbf{C}^n (u \neq 0)$, 且 λ 不是 A 的特征值。证明：可选择 $E \in \mathbf{C}^{n\times n}$ 满足 $||E||_F = \frac{||u||_2}{||v||_2}$

使得向量 $v = (\lambda I - A)^{-1} u$ 是 A + E 的一个特征向量。

(1) 计算 $v = x - e_1$,$w = \frac{v}{||v||_2}$，则 $H = I - 2ww^T$ 为所求的变换。

$x^{(1)} = x$, 对 $x^{(k)}$ 的第 k+1 行，找到对应将其置为 0 的 Givens 变换 Pk，$x^{(k+1)} = P_k x^{(k)}$。则 $K = \prod_{i=1}^{n-1} P_i^T$ 即为所求。

1 个 5 分，Gram-Schmidt 正交化需要给出过程和线性无关基的构造，其他答案酌情给分。

$(2) E = \frac{uv^T}{||v||_2^2}, ||E||_F = \frac{||u||_2}{||v||_2}$

$(A + E)v - \lambda v = (A - \lambda I)(\lambda I - A)^{-1} u + \frac{uv^T v}{||v||_2^2} = 0$

5 分，构造 household 阵 $/\lambda I - A$ 得 3 分。未构造矩阵虚空证明酌情给分。

3.(1) 证明矩阵单特征值的左右特征向量不垂直

(2) 证明对称矩阵不同特征值对应的特征向量互相垂直

(3) 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

, 考察对 $u_0 = (1, 1, 1, 1)^T$ 应用幂法所得序列的特性，并给出得到精确到三位有效数字所需的迭代次数。

$(1)\lambda_i$ 为单特征值 $\Rightarrow \exists P, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$,P 的第一列为对应右特征向量，$P^{-1}$ 的第一行

为对应左特征向量，二者内积为 1，而特征向量只能是它们的非零常数倍，故左右特征向量不垂直

5 分, 计算 $y^T Ax$ 不得分，未考虑特征向量放缩扣 1 分。

(2) 设 x 是 λ_i 对应的特征向量，y 是 λ_j 对应的特征向量。
$\lambda_i x^T y = x^T A^T y = x^T Ay = \lambda_j x^T y$
$\Rightarrow (\lambda_i - \lambda_j)x^T y = 0 \Rightarrow x^T y = 0$

5 分

$$(3)A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3n & 3n(n-1) & 2n(n-1)(n-2) \\ 0 & 1 & 2n & n(n-1) \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^n u_0 = \begin{pmatrix} n^3+2n+1 \\ n^2+n+1 \\ n+1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
归一化后可知特征向量为 $(1,0,0,0)^T$
三位有效数字要求 $\frac{n^3+2n+1}{n^2+n+1} = n-1+\frac{2n+2}{n^2+n+1} > 1000, n \geq 1001$

计算 A^n2 分，得到序列 2 分，得到收敛特征向量 2 分，计算有效数字过程 2 分，结果 2 分，1000 左右可得 1 分。

5.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_2 & \alpha_2 & \beta_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_3 & \alpha_3 & \beta_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma_{n-1} & \alpha_{n-1} & \beta_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \gamma_n & \alpha_n \end{pmatrix}$$
为非奇异三对角阵，令 A=D+L+U,D 为 A 的对角部分，L 为 A 的下三角部分，U 为 A 的上三角部分。

(1) $B_J = I_n - D^{-1}A, B_{GS} = -(L+D)^{-1}U, p_{B_J}(\lambda), p_{B_{GS}}(\lambda)$ 分别为 $B_J, B_{GS} B_J, B_{GS}$ 的特征多项式

证明 $p_{B_J}(\lambda) = det(-D^{-1})det(L+\lambda D+U)$
$p_{B_{GS}}(\lambda) = det(-(L+D)^{-1})det(\lambda L+\lambda D+U)$

(2) 证明 $det(\lambda^2 L+\lambda^2 D+U) = \lambda^n det(L+\lambda D+U)$

(3) 证明 $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J)^2$ 其中 $\rho(B_{GS}), \rho(B_J)$ 分别为 B_{GS} 和 B_J 的谱半径。当两种算法均收敛时，Jacobi 迭代和 G-S 迭代哪种收敛速度更快。并解释原因。

$(1)p_{B_J}(\lambda) = det(B_J - \lambda I) = det(-D^{-1}(L+U+\lambda D)) = det(-D^{-1})det(L+\lambda D+U)$

$p_{B_{GS}}(\lambda) = det(B_{GS} - \lambda I) = det(-(L+D)^{-1}(\lambda L + \lambda D + U)) = det(-(L+D)^{-1})det(\lambda L + \lambda D + U)$

$p_{B_J}(\lambda)$2 分,$p_{B_{GS}}(\lambda)$3 分，

(2) 设 $\lambda^2 L + \lambda^2 D + U$ 的顺序主子式为 $p_i(\lambda)$，$(L + \lambda D + U)$ 的顺序主子式为 $q_i(\lambda)$。
采用归纳证明，n=1,2 可直接验证
由行列式的 Laplace 展开，有 $p_i(\lambda) = \lambda^2 a_i p_{i-1}(\lambda) - \lambda^2 \gamma_i \beta_i p_{i-2}(\lambda)$, $q_i(\lambda) = \lambda a_i q_{i-1}(\lambda) - \gamma_i \beta_i q_{i-2}(\lambda)$, 带入归纳条件即有 $p_i(\lambda) = \lambda^i q_i(\lambda)$
取 i=n 即证。
p.s. 本题做法很多，直接相似变换，schur 补打洞均可。

10 分，根据过程酌情给分

(3) 由 (1)(2)，考虑对应的特征多项式可得，若 λ 是 B_J 的特征值，则 λ^2 是 B_{GS} 的特征值
$\Rightarrow \rho(B_J)^2 = (max|\lambda(B_J)|)^2 = max(\lambda(B_J))^2 = max|(\lambda(B_{GS}))| = \rho(B_{GS})$
迭代均收敛时，二者迭代矩阵谱半径小于 1，故 G-S 迭代矩阵的谱半径更接近 0，收敛更快。

证明谱半径关系 5 分，说明收敛速率 5 分，GS 迭代矩阵特征值开根号扣 1 分，没说明谱半径是最大模特征值扣 1 分。