邓建松

2022年9月26日

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidelt&1\@

形式推广

女敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渊

● 计算机的存储量日益增大,计算速度迅速提高, 直接法(如Gauss消去法、平方根法)在计算机 上可以求解的线性方程组的规模也越来越大

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

### 人或性理化

收敛的充分条件及误差估

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度

- 计算机的存储量日益增大,计算速度迅速提高, 直接法(如Gauss消去法、平方根法)在计算机 上可以求解的线性方程组的规模也越来越大
- 在实际应用中,特别是偏微分方程的数值求解时,通常遇到的就是大型稀疏线性方程组

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代剂

Gauss-Seidel迭代》

Gauss-Delucity [ ()

**协**幼性理;

, cest 1.... .... re

收敛的充分条件及误差估i

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度

模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度

- 计算机的存储量日益增大,计算速度迅速提高, 直接法(如Gauss消去法、平方根法)在计算机 上可以求解的线性方程组的规模也越来越大
- 在实际应用中,特别是偏微分方程的数值求解时,通常遇到的就是大型稀疏线性方程组
- 而直接法在对矩阵进行分解的时候,会破坏矩阵的稀疏性

线性方程组的古典迭 代解法

**甲步线性定常迭代**发

Gauss-Seidel迭代法

女敛性理论

.........

y敛的充分条件及误差估;

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

女敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 计算机的存储量日益增大,计算速度迅速提高, 直接法(如Gauss消去法、平方根法)在计算机 上可以求解的线性方程组的规模也越来越大

- 在实际应用中,特别是偏微分方程的数值求解时,通常遇到的就是大型稀疏线性方程组
- 而直接法在对矩阵进行分解的时候,会破坏矩 阵的稀疏性
- 寻求能够保持稀疏性的有效算法是数值线性代数中一个重要的研究课题



# 求解稀疏线性方程组的方法

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭化

Gauss-Seidel 迭个

(敛性理论

收敛的充要条件

双双的邓万承什及庆左伯订

致性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的常 近收敛速度

# 主要有两类

迭代法:按照某种规则构造一个向量序列,其极限是方程组的精确解

# 求解稀疏线性方程组的方法

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法
Jacobi迭代法
Gauss-Seidel迭代法

收敛性理论

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

欠敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 运收放速度

# 主要有两类

- 迭代法:按照某种规则构造一个向量序列,其极限是方程组的精确解
- 稀疏直接法:是直接法与某些稀疏矩阵 技巧有机结合的结果,利用矩阵的特 点,使得分解结果尽可能保持稀疏性

# 求解稀疏线性方程组的方法

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法
Jacobi迭代法
Gauss-Seidel选代法

形式推广

收敛性理论

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的时 敛性

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 主要有两类

- 迭代法:按照某种规则构造一个向量序列,其极限是方程组的精确解
- 稀疏直接法:是直接法与某些稀疏矩阵 技巧有机结合的结果,利用矩阵的特 点,使得分解结果尽可能保持稀疏性
- 本课程只讲迭代法

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

lacobi迭代)

Gauss-Seidel读代》

形式推

#### 收敛性理论

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度 • 如何构造迭代序列?

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭行

Gauss-Seidel读代

形才推

#### (敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度

- 如何构造迭代序列?
- 构造的序列是否收敛? 在什么情况下收敛?

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代記

形式推广

### (敛性理论

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的 敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度模型问题

模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的部 近收敛速度

# • 如何构造迭代序列?

- 构造的序列是否收敛? 在什么情况下收敛?
- 如果收敛,收敛速度如何?(收敛速度的定量刻划)

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法 Jacobi<sup>选供法</sup>

Gauss-Seidel迭代法

### 收敛性理论

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

又*)*以及 平均收敛速度和渐近收

平均收敛速度和新近收敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 • 如何构造迭代序列?

- 构造的序列是否收敛? 在什么情况下收敛?
- 如果收敛,收敛速度如何?(收敛速度的定量刻划)
- 迭代有限步停止。需要对近似解进行误 差估计和舍入误差分析

线性方程组的古典铁

• 方法是否有效要看得到具有某个精度的 近似解而付出的代价如何

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法 形式推广

### 收敛性理证

收敛的充要条件

収敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的新 近收敛速度

- 方法是否有效要看得到具有某个精度的 近似解而付出的代价如何
- 这通常是以运算量和存储量的要求为标准

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代

il*tr Atri*et 100 3

1X 3X 11.-- 11.

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi选代法和G-S选代法的 幼性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 方法是否有效要看得到具有某个精度的 近似解而付出的代价如何

- 这通常是以运算量和存储量的要求为标准
- 在这个标准下,很多时候直接法要比迭代法好

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

形式推广

收敛性理论

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的 敛性

- 方法是否有效要看得到具有某个精度的 近似解而付出的代价如何
- 这通常是以运算量和存储量的要求为标准
- 在这个标准下,很多时候直接法要比迭代法好
- 但对大型稀疏方程组来说, 迭代法更实用

# Jacobi迭代法

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

lacobi读代的

Carra Carra (de April

形式堆

收敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

ART THE PURPOSE OF TH

Jacobi迭代法和G-S迭代法的; 近收敛速度 • 考虑非奇异线性方程组Ax = b

# Jacobi迭代法

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选作

形式打

女敛性理证

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度

- 考虑非奇异线性方程组Ax = b
- 令A = D L U, 其中D为A的对角元构成的对角阵,-L为A的下三角阵,
  - -U为A的上三角阵(均不含对角元)

# Jacobi迭代法

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选作

形式排

收敛性理i

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的I

收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度

- 考虑非奇异线性方程组Ax = b
- 令A = D L U, 其中D为A的对角元构成的对角阵,-L为A的下三角阵,-U为A的上三角阵(均不含对角元)
- 则Ax = b可写为x = Bx + g, 其中 $B = D^{-1}(L + U)$ ,  $g = D^{-1}b$

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel读代法

形式推

#### 収敛性埋む

收敛的充要条

収敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的i

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度

# • 取初始向量

$$x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T$$

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代》

形式推

#### 又敛性埋化

收敛的充要条件

权双的允尔来什么庆左伯订

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的清 近收敛速度 • 取初始向量

$$x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T$$

• 代入x = Bx + g的右边,得到新向量

$$x_1 = Bx_0 + g$$

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代》

iller Alerbet 100

### NSX ILLER

权政的死安肃计

収敛的允分录件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的影 近收敛速度 • 取初始向量

$$x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T$$

• 代入x = Bx + g的右边,得到新向量

$$x_1 = Bx_0 + g$$

• 再把 $x_1$ 代入右边,又得一个新向量 $x_2$ 

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代法

收敛性理论

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

ルかま食

收敛速度

模型问题 lacobi读代法和G-S读代法的2 • 取初始向量

$$x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T$$

• 代入x = Bx + g的右边,得到新向量

$$x_1 = Bx_0 + g$$

- $\bullet$  再把 $x_1$ 代入右边,又得一个新向量 $x_2$
- 依此类推,我们有 $x_k = Bx_{k-1} + g$ , k = 1, 2, ...

# 迭代矩阵

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi读代注

Gauss-Saidal进代

TT - IS 40

收敛性理i

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度 • 这就是Jacobi迭代法, 由C.G.J. Jacobi提 出

# 迭代矩阵

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代剂

### Jacobi迭代法

Sauss-Seidel迭代法 形式推广

### 收敛性理

收敛的充分条件及误差估i

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 近收敛速度

- 这就是Jacobi迭代法, 由C.G.J. Jacobi提 出
- 其中*B*称为Jacobi迭代法的<mark>迭代矩阵</mark>, 其对角元全是零

# 迭代矩阵

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代法

**此**幼性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的 幼性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 近收敛速度

- 这就是Jacobi迭代法, 由C.G.J. Jacobi提 出
- 其中B称为Jacobi迭代法的迭代矩阵, 其对角元全是零
- g称为Jacobi迭代法的常数项

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel洪代法

形式推

#### 收敛性理记

收敛的充

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

.....

Jacobi迭代法和G-S迭代法的经 近收敛速度

• 
$$\ \stackrel{\text{\tiny LL}}{\boxtimes} A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$
,  $b = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \end{pmatrix}$ ,  $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 

# 线性方程组的古典铁

### 

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选代法

形式相

#### 收敛性理记

收敛的充要条1

收敛的充分条件及误差估记

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度

• 迭代矩阵和常数项分别为

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -5/7 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 11/2 \\ 13/7 \end{pmatrix}$$

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel读代法

100 =2° +80:

#### 收敛性理证

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型回應

Jacobi迭代法和G-S迭代法的制 近收敛速度

# • 迭代得到

$$x_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8/7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 5 \\ 1.143 \end{pmatrix},$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} 69/14 \\ -12/7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4.929 \\ -1.714 \end{pmatrix}$$

邓建松

### 单步线性定常迭代》

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选代

形式推

#### 収敛性埋む

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度 • 迭代得到

$$x_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8/7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 5 \\ 1.143 \end{pmatrix},$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} 69/14 \\ -12/7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4.929 \\ -1.714 \end{pmatrix}$$

• 25次迭代后,得到 $x \approx \begin{pmatrix} 7.111 \\ -3.222 \end{pmatrix}$ ,这约等于 方程的准确解 $\begin{pmatrix} 64/9 \\ -29/9 \end{pmatrix}$ 

# Jacobi迭代法代码片段

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

形式组

(敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 近收敛速度

```
for i=1 to n
  y[i]=0.0
  for j=1 to n
    y[i]=y[i]+B[i][j]*x[j]
  y[i]=y[i]+g[i]
```

# Jacobi迭代法中分量计算顺序

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭

Gauss-Seidel选代法

形式推

收敛性理

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

在Jacobi迭代法中各分量的计算顺序是 没有关系的

# Jacobi迭代法中分量计算顺序

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代法

Gauss-SeidenAT()

### 欠敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的的 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的泛 近收敛速度

- 在Jacobi迭代法中各分量的计算顺序是 没有关系的
- 先算哪个分量,结果都不变

# Jacobi迭代法中分量计算顺序

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法 Jacobi选代法

Gauss-Seidel迭代法

敛性理论

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的必 敛性

平均收敛速度和渐近收敛速度模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度

- 在Jacobi迭代法中各分量的计算顺序是 没有关系的
- 先算哪个分量,结果都不变
- 我们做一下改变: 在计算 $x_k$ 的第一个分量用 $x_{k-1}$ 的各个分量计算,但当计算 $x_k$ 的后面分量时,采用已算出的新分量 $x_1^{(k)}$ 代替 $x_1^{(k-1)}$ ,而其它分量仍用 $x_i^{(k-1)}$

# 新代码片段

```
线性方程组的古典迭
代解法
```

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭

Gauss-Seidel选代法

形式推

#### 收敛性理论

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度

```
for i=1 to n
  x[i]=0.0
  for j=1 to n
    x[i]=x[i]+B[i][j]*x[j]
  x[i]=x[i]+g[i]
```

#### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

lacobi迭代

Gauss-Seidel选代法

IIX =1° 48:

#### 收敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度 • 经上述改变后,我们有

$$x_k = D^{-1}Lx_k + D^{-1}Ux_{k-1} + g, \quad k = 1, 2, ...$$

#### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代》

Jacobi迭化

Gauss-Seidel迭代法

形式推

#### 収敛性埋1

收敛的充要条件

1人共和17亿万 水 II 人 欧在 III II

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度 • 经上述改变后,我们有

$$x_k = D^{-1}Lx_k + D^{-1}Ux_{k-1} + g, \quad k = 1, 2, ...$$

• 这称为Gauss-Seidel迭代法,简称为G-S迭代法

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代治

Jacobi迭

Gauss-Seidel选代法

形式排

#### 収 致 注 注 ;

收敛的充要条件

収敛的充分条件及误差估计

Jacobi选代法和G-S选代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速 概刑品關

Jacobi迭代法和G-S迭代法的这 近收敛速度 • 经上述改变后,我们有

$$x_k = D^{-1}Lx_k + D^{-1}Ux_{k-1} + g, \quad k = 1, 2, ...$$

- 这称为Gauss-Seidel迭代法,简称为G-S迭代法
- 如此变化,编程时存储量减少了

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代法

ケ幼性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的

收敛速度 平均收敛速度和新近收敛速

模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的浏 近收敛速度 • 经上述改变后,我们有

$$x_k = D^{-1}Lx_k + D^{-1}Ux_{k-1} + g, \quad k = 1, 2, ...$$

- 这称为Gauss-Seidel迭代法,简称为G-S迭代法
- 如此变化,编程时存储量减少了
- 该格式1823年C.F. Gauss在给其学生C.L. Gerling的信中提到, P.L. von Seidel在1874年发表了这一方法

### 迭代矩阵

线性方程组的古典铁

Gauss-Seidel选代法

• 如果 $(D-L)^{-1}$ 存在,那么迭代格式为

$$x_k = (D-L)^{-1}Ux_{k-1} + (D-L)^{-1}b$$

## 迭代矩阵

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法 Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代法

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的制

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度模型问题

• 如果 $(D-L)^{-1}$ 存在,那么迭代格式为

$$x_k = (D-L)^{-1}Ux_{k-1} + (D-L)^{-1}b$$

• 我们称 $L_1 = (D - L)^{-1}U$ 为G-S迭代法的<mark>迭代矩阵</mark>, 其第一列全是零,  $(D - L)^{-1}b$ 称为G-S迭代法的常数项

## 迭代矩阵

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法 Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代法

形式推

女敛性理论

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的

平均收敛速度和渐近收敛速度模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • 如果 $(D-L)^{-1}$ 存在,那么迭代格式为

$$x_k = (D-L)^{-1}Ux_{k-1} + (D-L)^{-1}b$$

- 我们称 $L_1 = (D L)^{-1}U$ 为G-S迭代法的<mark>迭代矩阵</mark>, 其第一列全是零,  $(D L)^{-1}b$ 称为G-S迭代法的常数项
- 此时分量的计算次序是不能改变的

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选代法

-- --

#### 收敛性理i

iller Alle Africke 1

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi洪化

Gauss-Seidel迭代法

TEX =2" 16:

#### 收敛性理证

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的的 近收敛速度

• 
$$\mathfrak{V}(D-L)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/16 & 0 \\ 7/176 & -1/11 \end{pmatrix}$$

单步线性定常迭代法

Jacobi迭

Gauss-Seidel迭代法

形式推

#### 仅敛性埋饰

收敛的充要条件

収敛的允分余件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度

• 
$$\mathfrak{P}(D-L)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/16 & 0 \\ 7/176 & -1/11 \end{pmatrix}$$

• 迭代矩阵和常数项分别为

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & -3/16 \\ 0 & -21/176 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 11/16 \\ -131/176 \end{pmatrix}$$

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代法

形式推

收敛性理论

Alle Ale Ale also seed A

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度 • 取初值 $x_0 = (1,1)^T$ 

邓建松

#### 单步线性定常迭代剂

Jacobi选作

Gauss-Seidel选代法

形式排

#### 収敛性埋電

收敛的充要条件

权规则无力来开及庆左旧日

Jacobi迭代法和G-S迭代法的影 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 近收敛速度

- 取初值 $x_0 = (1,1)^T$
- 迭代得到各向量依次为

$$\left(\begin{array}{c}0.5\\-0.8636\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{c}0.8494\\-0.6413\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{c}0.8077\\-0.6678\end{array}\right)$$

邓建松

#### 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭化

Gauss-Seidel选代法

形式排

#### 収数往理量

収敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 近收敛速度 • 取初值 $x_0 = (1,1)^T$ 

• 迭代得到各向量依次为

$$\left(\begin{array}{c}0.5\\-0.8636\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{c}0.8494\\-0.6413\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{c}0.8077\\-0.6678\end{array}\right)$$

• 经六次迭代,得到向量 $\begin{pmatrix} 0.8122 \\ -0.6650 \end{pmatrix}$ 

邓建松

#### 单步线性定常迭代

Jacobi迭

Gauss-Seidel迭代法

形式推

#### (敛性埋论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度

• 取初值
$$x_0 = (1,1)^T$$

• 迭代得到各向量依次为

$$\left(\begin{array}{c}0.5\\-0.8636\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{c}0.8494\\-0.6413\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{c}0.8077\\-0.6678\end{array}\right)$$

- 经六次迭代,得到向量
   (0.8122)
   (-0.6650)
- 方程的准确解为

$$\left(\begin{array}{c} 160/197 \\ -131/197 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{c} 0.812183 \\ -0.664975 \end{array}\right)$$

## 两种方法的共性

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel选作

形式推

女敛性理论

收敛的充要条件

权双的允尔来什么庆左伯订

Jacobi迭代法和G-S迭代法的影 敛性

收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的新 近收敛速度 • 在这两种方法中,新的近似解 $x_k$ 是已知近似解 $x_{k-1}$ 的线性函数,并且只与 $x_{k-1}$ 有关,即它们都可以写为

$$x_k = Mx_{k-1} + g$$

## 两种方法的共性

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代治

Jacobi达代法

Gauss-Seidel选代

形式推

文敛性理i

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的!

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • 在这两种方法中,新的近似解 $x_k$ 是已知近似解 $x_{k-1}$ 的线性函数,并且只与 $x_{k-1}$ 有关,即它们都可以写为

$$x_k = Mx_{k-1} + g$$

• Jacobi迭代法:  $M = D^{-1}(L + U)$ ,  $g = D^{-1}b$ 

## 两种方法的共性

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代》

形式推

女敛性理i

收敛的充要条件

双双的光灯录针及庆左伯订

敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 运收效率度 • 在这两种方法中,新的近似解 $x_k$ 是已知近似解 $x_{k-1}$ 的线性函数,并且只与 $x_{k-1}$ 有关,即它们都可以写为

$$x_k = Mx_{k-1} + g$$

- Jacobi迭代法:  $M = D^{-1}(L + U)$ ,  $g = D^{-1}b$
- G-S迭代法:  $M = (D L)^{-1}U$ ,  $g = (D L)^{-1}b$

### 线性方程组的古典迭

• 我们把 $x_k = Mx_{k-1} + g$ 的迭代法称为单 步线性定常迭代法

线性方程组的古典铁

- 我们把 $x_k = Mx_{k-1} + g$ 的迭代法称为单 步线性定常迭代法
  - M ∈ ℝ<sup>n×n</sup>称为迭代矩阵

线性方程组的古典铁

- 我们把 $x_k = Mx_{k-1} + g$ 的迭代法称为单 步线性定常迭代法
  - M ∈ ℝ<sup>n×n</sup>称为迭代矩阵
  - g∈ ℝ<sup>n</sup>称为常数项

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

形式推广

#### 收敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度

- 我们把 $x_k = Mx_{k-1} + g$ 的迭代法称为单步线性定常迭代法
  - $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  称为<mark>迭代矩阵</mark>
  - $g ∈ \mathbb{R}^n$  称为常数项
  - $x_0 \in \mathbb{R}^n$  称为初始向量

## 收敛与发散

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Saidal its

Gauss-Seidel达

形式推

义蚁性埋7

収敛的充要条件

収敛的允分余件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 近收敛速度 如果迭代格式对任意的初始向量产生的向量序列{x<sub>k</sub>}(称为迭代序列)都有极限,则称该迭代格式是收敛的

### 收敛与发散

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel选作

TEX - IN ARR and

#### **X**敛性理i

収敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 敛性

#### 收敛速度

- 平均收敛速度和渐近收敛速度
- Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度

- 如果迭代格式对任意的初始向量产生的向量序列{x<sub>k</sub>}(称为迭代序列)都有极限,则称该迭代格式是收敛的
- 否则称它是不收敛的,或者是发散的

## 收敛与发散

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法 Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代

形式推广

(敛性理论

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 如果迭代格式对任意的初始向量产生的向量序列{x<sub>k</sub>}(称为迭代序列)都有极限,则称该迭代格式是收敛的

- 否则称它是不收敛的,或者是发散的
- 若收敛,记迭代序列的极限为 $x_*$ ,则 有 $x_* = Mx_* + g$

### 迭代法与方程组的相容性

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代

形式推广

数性理论

All All All Street Ar

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

T POTANAMENT THRINGTANAME.

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度 •  $x_*$ 是方程组(I - M)x = g的解

### 迭代法与方程组的相容性

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

TZ -15 46- c3

(敛性理说

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的

收敛速度

模型问题 lacobi決代法和G-S读代法的道 •  $x_*$ 是方程组(I - M)x = g的解

• 如果存在非奇异矩阵 $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 使得

$$G(I-M)=A, \quad Gg=b$$

则迭代序列也收敛到Ax = b的解,此时两个方程称为等价方程组,也称迭代格式与方程组Ax = b是相容的

### 迭代法与方程组的相容性

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel读代

Gauss-Seidel迭代

形式推

(敛性理论

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 lacobi读代注和G-S读代注的

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型何题 Jacobi选代法和G-S选代法的渐 •  $x_*$ 是方程组(I - M)x = g的解

• 如果存在非奇异矩阵 $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 使得

$$G(I-M)=A, \quad Gg=b$$

则迭代序列也收敛到Ax = b的解,此时两个方程称为等价方程组,也称迭代格式与方程组Ax = b是相容的

• 已有的两种格式是相容的

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代流

Jacobi迭代流

Gauss-Seidel读代法

100 = 2° +60:

#### 收敛性理说

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

.....

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

•  $\partial x_* = b$ 

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代

Jacobi迭代

Gauss-Saidel ##

形式排

#### 仅敛性埋7

#### 收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

人 Jacobi选代法和G-S选代法的消

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度 •  $\forall x_* \not\in Ax = b$ 的解

•  $\{x_k\}$ 是由相容格式 $x_k = Mx_{k-1} + g$ 产生的迭代序列

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代

Gauss-Seidel选件

形式技

#### 仅敛性埋7

#### 收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度

- $\partial x_* = bh$
- $\{x_k\}$ 是由相容格式 $x_k = Mx_{k-1} + g$ 产生的迭代序列
- 定义 $y_k = x_k x_*$ , 称为 $x_k$ 的误差向量

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代剂

Gauss-Seidel 迭代

Gauss-Seidel迭代

....

#### 以默压柱的

#### 收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 近收敛速度

- $\partial x_* = b \otimes A = b$
- $\{x_k\}$ 是由相容格式 $x_k = Mx_{k-1} + g$ 产生的迭代序列
- 定义 $y_k = x_k x_*$ , 称为 $x_k$ 的误差向量
- 那么

$$y_{k+1} = x_{k+1} - x_* = Mx_k + g - (Mx_* + g)$$
  
=  $My_k = M^k y_0$ 

# 收敛条件

线性方程组的古典迭

• 对任意 $y_0$ 都有 $y_k \to 0$ (即 $x_k \to x_*$ )当且 仅当 $M^k \rightarrow 0$ 

## 收敛条件

### 线性方程组的古典铁

- 对任意 $y_0$ 都有 $y_k \to 0$ (即 $x_k \to x_*$ )当且 仅当 $M^k \rightarrow 0$
- 而 $M^k \to 0$ 的充要条件是 $\rho(M) < 1$

# 收敛条件

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代法

Gauss-Seiderzetta

**收敛性理说** 

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收益性

收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度 模型问题 lacobite代注和G\_S连代注的新

- 对任意 $y_0$ 都有 $y_k \to 0$ (即 $x_k \to x_*$ )当且 仅当 $M^k \to 0$
- 而 $M^k \to 0$ 的充要条件是 $\rho(M) < 1$

### 定理

## 注解

线性方程组的古典铁

• 迭代序列收敛取决于迭代矩阵的谱半 而与初始向量的选取和常数项无关

### 注解

线性方程组的古典铁

- 迭代序列收敛取决于迭代矩阵的谱半 径, 而与初始向量的选取和常数项无关
- 相同的方程组,Jacobi迭代矩阵 和G-S迭代矩阵的谱半径不一定相同, 而且无包含关系

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

色步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代》

形式推广

(人)以 注注 に

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的

收敛速度 平均收敛速度和新近收敛速

平均收敛速度和新近收敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度

- 迭代序列收敛取决于迭代矩阵的谱半 径,而与初始向量的选取和常数项无关
- 相同的方程组, Jacobi迭代矩阵和G-S迭代矩阵的谱半径不一定相同, 而且无包含关系
- 例子: Mathematica sec4.2.1.nb

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代》

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代

100 = 2° 48:

### 收敛性理论

收敛的充要条件

#### 收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

1 -01X 8X 42:0C1HHINE1X 8X 42:0

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近此效速度 用谱半径判断迭代法是否收敛,这是很不方便的:谱半径的计算相当困难

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobit医代数

Gauss-Seidel迭代法

形式推

### 收敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度

- 用谱半径判断迭代法是否收敛,这是很不方便的:谱半径的计算相当困难
- 需要一些容易计算的充分条件

# 线性方程组的古典铁

- 用谱半径判断迭代法是否收敛,这是很不方便 的: 谱半径的计算相当困难
- 需要一些容易计算的充分条件

# 定理

如果范数||M|| = q < 1, 则我们有

$$||x_k - x_*|| \le \frac{q^k}{1 - q} ||x_1 - x_0||$$

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代

形式推广

### 收敛性理证

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

- 平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题
- Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐近收敛速度

- 用谱半径判断迭代法是否收敛,这是很不方便的:谱半径的计算相当困难
- 需要一些容易计算的充分条件

# 定理

如果范数||M|| = q < 1, 则我们有

$$||x_k - x_*|| \le \frac{q^k}{1 - q} ||x_1 - x_0||$$

• 此定理结论的右边与精确解无关

# 定理证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

lacobi迭代法

Gauss-Seidel洪代法

100 = P + 60:

### 收敛性理说

收敛的充要条件

#### 收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度 •  $E_{y_k} = M^k y_0$ 的两边取范数,则有

$$||y_k|| \leq ||M||^k ||y_0|| = q^k ||y_0||$$

# 定理证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选代

形式推

### 攵敛性理i

收敛的充要条件

収敛的充分条件及误差估:

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 収敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的类 近收敛速度 •  $\Delta Y_k = M^k y_0$ 的两边取范数,则有

$$||y_k|| \leq ||M||^k ||y_0|| = q^k ||y_0||$$

• 根据」的定义

$$||y_0|| = ||x_0 - x_*|| \le ||x_0 - x_1|| + ||x_1 - x_*||$$
  
=  $||x_0 - x_1|| + ||My_0|| \le ||x_0 - x_1|| + q||y_0||$ 

所以有
$$||y_0|| \leqslant \frac{1}{1-a}||x_1-x_0||$$

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobn & T (12)

Gauss-Seiden&1

### 收敛性理论

收敛的充要条件

### 收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

lacobi读作注和G\_S读作注的:

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度 从上述近似解的误差估计可以计算出为了达到 精度要求,需要进行多少次迭代

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel迭代

形式推

### 收敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度

- 从上述近似解的误差估计可以计算出为了达到 精度要求,需要进行多少次迭代
- 这种估计一般是偏高的

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代

形式推广

### 收敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 近收敛速度

- 从上述近似解的误差估计可以计算出为了达到 精度要求,需要进行多少次迭代
- 这种估计一般是偏高的

# 定理

若||M|| = q < 1, 则我们有

$$||x_k - x_*|| \le \frac{q}{1 - q} ||x_{k-1} - x_k||$$

# 线性方程组的古典铁

- 从上述近似解的误差估计可以计算出为了达到 精度要求,需要进行多少次迭代
- 这种估计一般是偏高的

# 定理

若||M|| = q < 1, 则我们有

$$||x_k - x_*|| \leqslant \frac{q}{1 - q} ||x_{k-1} - x_k||$$

• 此定理结论是用刚得到的两个迭代向量估计最 新结果的精度

# 定理证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代》

lacobi迭代

C C 1 101-70

TT - 15 40

#### 女敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的证

• 因为

$$||x_k - x_*|| = ||M(x_{k-1} - x_*)|| \leqslant q||x_{k-1} - x_*||$$
  
$$\leqslant q||x_{k-1} - x_k|| + q||x_k - x_*||$$

所以

$$||x_k - x_*|| \le \frac{q}{1-a} ||x_{k-1} - x_k||$$

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代治

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代

### 收敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度 • 只要M的范数不是很接近1,当相邻两次迭代向量很接近时,那么 $x_k$ 与 $x_*$ 也就很接近

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法 形式推广

### 女敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

- 平均收敛速度和渐近收敛速度
- Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度

- 只要M的范数不是很接近1,当相邻两次迭代向量很接近时,那么 $x_k$ 与 $x_*$ 也就很接近
- 实际计算时可以用量||x<sub>k-1</sub> x<sub>k</sub>||是否适当小来 判别迭代法是否应该终止

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代》

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法 形式推广

### 【敛性理说

收款的元金米TT 收敛的套分条件及误差6

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度

- 只要M的范数不是很接近1,当相邻两次迭代向量很接近时,那么 $x_k$ 与 $x_*$ 也就很接近
- 实际计算时可以用量||x<sub>k-1</sub> x<sub>k</sub>||是否适当小来 判别迭代法是否应该终止
  - 若 $\|M\| = 0.9$ ,  $\|x_{k-1} x_k\| = 10^{-8}$ , 则 $\|x_k x_*\| \le 9 \times 10^{-8}$

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代注

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代

收敛性理i

收敛的充分条件及误差估记

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的影

- 只要M的范数不是很接近1,当相邻两次迭代向量很接近时,那么 $x_k$ 与 $x_*$ 也就很接近
- 实际计算时可以用量||x<sub>k-1</sub> x<sub>k</sub>||是否适当小来 判别迭代法是否应该终止
  - 若 $\|M\| = 0.9$ ,  $\|x_{k-1} x_k\| = 10^{-8}$ , 则 $\|x_k x_*\| \le 9 \times 10^{-8}$
- 若||M||很接近1, 则不能断定精度

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代注

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代

....

収畝性埋む

收敛的充分条件及误差值

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的海

- 只要M的范数不是很接近1,当相邻两次迭代向量很接近时,那么 $x_k$ 与 $x_*$ 也就很接近
- 实际计算时可以用量||x<sub>k-1</sub> x<sub>k</sub>||是否适当小来 判别迭代法是否应该终止
- 若||M||很接近1, 则不能断定精度
- 实际一般应用1范数和∞范数: 容易计算

线性方程组的古典铁

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

• Jacobi迭代法的迭代矩阵B容易得到, 因此前面的判别法基本令人满意

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代治

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代

形式推广

### 权敛性埋<sup>1</sup>

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

### 收敛速度

- 平均收敛速度和渐近收敛速
- Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐近收敛速度

- Jacobi迭代法的迭代矩阵B容易得到, 因此前面的判别法基本令人满意
- G-S迭代法中的迭代矩阵需要 求 $L_1 = (D L)^{-1}U$ ,不太容易得到

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代治

Gauss-Seidel选代

Gauss-Seidenzen

|なるな材: 7田 3

### NSX III-II N

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度

- Jacobi迭代法的迭代矩阵B容易得到, 因此前面的判别法基本令人满意
- G-S迭代法中的迭代矩阵需要 求 $L_1 = (D L)^{-1}U$ ,不太容易得到
- 因此我们需要给出一些辅助判别

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代法

Gauss-Delucing IV

### (敛性理论

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差。

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 • Jacobi迭代法的迭代矩阵B容易得到, 因此前面的判别法基本令人满意

- G-S迭代法中的迭代矩阵需要 求 $L_1 = (D L)^{-1}U$ ,不太容易得到
- 因此我们需要给出一些辅助判别
  - 能否从B的性质判断L<sub>1</sub>的性质?

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代

Gauss-Seider/G [1

**佐** か 性 理 ゼ

## TASA ILLEE VE

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度

- Jacobi迭代法的迭代矩阵B容易得到, 因此前面的判别法基本令人满意
- G-S迭代法中的迭代矩阵需要 求 $L_1 = (D L)^{-1}U$ ,不太容易得到
- 因此我们需要给出一些辅助判别
  - 能否从B的性质判断*L*<sub>1</sub>的性质?
  - 能否直接利用A的性质进行判断?

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi洪代》

100 =0° +00:

收敛性理证

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 幼性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi选代法和G-S选代法的

回忆

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Carrage Carrage (B)

100 =2° 48:

### 收敛性理证

収敛的充要》

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度

# • 回忆

• Jacobi迭代:  $y = D^{-1}Lx + D^{-1}Ux$ 

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel洪代

100 = 2° 48

#### 收敛性理证

收敛的充要条件

収级的允分录件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的运动效率度

## • 回忆

- Jacobi迭代:  $y = D^{-1}Lx + D^{-1}Ux$
- G-S迭代:  $y = D^{-1}Ly + D^{-1}Ux$

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代》

Jacobi迭代

Gauss-Seidel迭代》

形式推

### 収敛性埋1

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 近收敛速度

# • 回忆

- Jacobi迭代:  $y = D^{-1}Lx + D^{-1}Ux$
- G-S迭代:  $y = D^{-1}Ly + D^{-1}Ux$
- $D^{-1}L$ 为下三角矩阵,对角元为零;  $D^{-1}U$ 为上三角矩阵,对角元为零

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选作

形式推

### 女 敛 性 埋 诉

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度

# • 回忆

- Jacobi迭代:  $y = D^{-1}Lx + D^{-1}Ux$
- G-S迭代:  $y = D^{-1}Ly + D^{-1}Ux$
- $D^{-1}L$ 为下三角矩阵,对角元为零;  $D^{-1}U$ 为上三角矩阵,对角元为零
- 所以我们完全有理由根据B的性质推断 $L_1$ 的性质

# ∞范数

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代》

Commercial (B)

100 = 2° +60:

### 收敛性理论

.....

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 幼性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

快坐回應

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近數效速度 设||B||<sub>∞</sub> < 1</li>

# $\infty$ 范数

# 线性方程组的古典迭

- 设||B||<sub>∞</sub> < 1</li>
- 定义

$$\mu = \displaystyle \max_i rac{\displaystyle \sum_{j=i+1}^n |b_{ij}|}{1 - \displaystyle \sum_{i=1}^{i-1} |b_{ij}|}$$

# ∞范数

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代流

Jacobi迭化

Gauss-Saidal 法代

形式推

#### 收敛性理

収敛的允妥涂

収敛的允分余件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的清 近收敛速度

• 定义

$$\mu = \max_i rac{\displaystyle \sum_{j=i+1}^n |b_{ij}|}{1 - \displaystyle \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}|}$$

## 引理

$$\mu \leqslant \|B\|_{\infty} < 1$$

# 证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel读代》

IIX =P Hb s

#### 收敛性理论

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的影

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

The second control of the second

Jacobi迭代法和G-S迭代法的)

$$\bullet \ \, \Leftrightarrow \ell_i = \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}|, \ u_i = \sum_{j=i+1}^{n} |b_{ij}|$$

# 证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel选代》

形式维

### 收敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的制 近收敛速度

$$ullet \ \, \diamondsuit \ell_i = \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}|, \ u_i = \sum_{j=i+1}^{n} |b_{ij}|$$

# 证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel选代法

形式推

### 收敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度

• 
$$\diamondsuit \ell_i = \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}|, \ u_i = \sum_{j=i+1}^{n} |b_{ij}|$$

- $\emptyset \ell_i + u_i \le \|B\|_{\infty} < 1$
- 注意到 $\forall i, b_{ii} = 0$ , 所以存在i,  $\ell_i + u_i = ||B||_{\infty}$

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

--- ---

. . . . . . . .

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的经

# • 注意到

$$egin{aligned} \ell_i + u_i - rac{u_i}{1-\ell_i} &= rac{1}{1-\ell_i}((\ell_i + u_i)(1-\ell_i) - u_i) \ &= rac{\ell_i}{1-\ell_i}(1-\ell_i - u_i) \geqslant 0 \end{aligned}$$

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代

### 仅敛性埋花

收敛的充

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

The second of the second

Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度 • 注意到

$$\ell_i + u_i - \frac{u_i}{1 - \ell_i} = \frac{1}{1 - \ell_i} ((\ell_i + u_i)(1 - \ell_i) - u_i)$$

$$= \frac{\ell_i}{1 - \ell_i} (1 - \ell_i - u_i) \geqslant 0$$

• 所以我们有 $\frac{u_i}{1-\ell_i} \leq \ell_i + u_i$ 

邓建松

### 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代

Gauss-Seidel读件

形式排

### 收敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度 • 注意到

$$\ell_i + u_i - \frac{u_i}{1 - \ell_i} = \frac{1}{1 - \ell_i} ((\ell_i + u_i)(1 - \ell_i) - u_i)$$

$$= \frac{\ell_i}{1 - \ell_i} (1 - \ell_i - u_i) \geqslant 0$$

- 所以我们有 $\frac{u_i}{1-\ell_i} \leq \ell_i + u_i$
- 两边对i取最大值,我们得到

$$\mu = \max_i \frac{u_i}{1 - \ell_i} \leqslant \max_i (\ell_i + u_i) = \|B\|_{\infty} < 1$$

# $||B||_{\infty} = ||L_1||_{\infty}$

#### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代》

C C 11 120 14

W -- 15 A 10

#### 女敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度

# 定理

设 $\|B\|_{\infty} < 1$ , 则 $\|L_1\|_{\infty} \le \|B\|_{\infty} < 1$ , 而且由G-S迭代法产生的近似解 $x_k$ 与准确解 $x_*$ 之间满足

$$||x_k - x_*||_{\infty} \leqslant \frac{\mu^{\kappa}}{1 - \mu} ||x_1 - x_0||_{\infty}$$

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代剂

lacobi迭代法

Gauss-Seidel洪代》

形式组

收敛性理i

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

T POTANAMENT THRIADIANAME.

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

• 存在满足 $\|x\|_{\infty} = 1$ 的 $x \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\|L_1\|_{\infty} = \|L_1x\|_{\infty}$ 

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代》

#### 收敛性理·

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 近收敛速度

- 存在满足 $\|x\|_{\infty} = 1$ 的 $x \in \mathbb{R}^n$ 使 得 $\|L_1\|_{\infty} = \|L_1x\|_{\infty}$
- $\bullet \ \diamondsuit y = L_1 x, \ |y_i| = \|y\|_{\infty}$

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

## 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

## 收敛性理

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

- 平均收敛速度和渐近收敛速度
- Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收分速度

- 存在满足 $\|x\|_{\infty} = 1$ 的 $x \in \mathbb{R}^n$ 使 得 $\|L_1\|_{\infty} = \|L_1x\|_{\infty}$
- $\bullet \ \diamondsuit y = L_1 x, \ |y_i| = ||y||_{\infty}$
- 根据 $L_1 = (D L)^{-1}U$ 的定义,我们有 $y = D^{-1}Ly + D^{-1}Ux$

线性方程组的古典铁

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

- 存在满足 $\|x\|_{\infty} = 1$ 的 $x \in \mathbb{R}^n$ 使  $||A||_{\infty} = ||L_1x||_{\infty}$
- $\diamondsuit y = L_1 x, |y_i| = ||y||_{\infty}$
- 根据 $L_1 = (D L)^{-1}U$ 的定义, 有 $y = D^{-1}Ly + D^{-1}Ux$
- 由于 $B = D^{-1}L + D^{-1}U$ . 所 以 $D^{-1}L$ 为B的下三角部分,  $D^{-1}U$ 为B的上三角部分

# 线性方程组的古典迭

● 比较两边的第*i*个分量,我们有

$$y_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} y_j + \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij} x_j$$

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代》

Gauss-Seidel读代法

形式推

#### 収敛性埋1

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度

快型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐
近收敛速度

• 比较两边的第i个分量, 我们有

$$y_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} y_j + \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij} x_j$$

• 两边取绝对值,可得

$$||y||_{\infty} \leqslant ||y||_{\infty} \ell_i + u_i$$

邓建松

#### 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel读代法

形式推

#### **女敛性理**证

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估记

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度 • 比较两边的第i个分量, 我们有

$$y_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} y_j + \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij} x_j$$

• 两边取绝对值,可得

$$||y||_{\infty} \leq ||y||_{\infty} \ell_i + u_i$$

• 由此可得

$$||L_1||_{\infty} = ||y||_{\infty} \leqslant \frac{u_i}{1 - \ell_i} \leqslant \mu < 1$$

# 估计式的证明

#### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

lacobi读代

Gauss-Seidel洪代

124 = P-10

#### 收敛性理证

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的治

• 根据 $\|L_1\|_{\infty} \leq \mu < 1$ 可得

$$||x_{k} - x_{*}||_{\infty} \leq \frac{||L_{1}||_{\infty}^{k}}{1 - ||L_{1}||_{\infty}} ||x_{1} - x_{0}||_{\infty}$$
$$\leq \frac{\mu^{k}}{1 - \mu} ||x_{1} - x_{0}||_{\infty}$$

# 1范数

## 线性方程组的古典选 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi选代法

Carrage Carrage (Bach

100 = 2° +60:

#### 收敛性理论

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Attended and and

近收敛速度

• 设 $\|B\|_1 < 1$ 

# 1范数

定义

$$ilde{\mu} = \max_j rac{\displaystyle\sum_{i=1}^{J-1} |b_{ij}|}{1 - \displaystyle\sum_{i=j+1}^{n} |b_{ij}|}$$

# 1范数

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代流

Jacobi迭行

Gauss-Seidel迭代

形式排

#### 女敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的。 近收敛速度

- 设∥*B*||<sub>1</sub> < 1</li>
- 定义

$$ilde{\mu} = \max_j rac{\displaystyle\sum_{i=1}^{J-1} |b_{ij}|}{1 - \displaystyle\sum_{i=j+1}^{n} |b_{ij}|}$$

• 则类似前面对 $\mu$  < 1的证明可证 $\tilde{\mu} \leq \|B\|_1 < 1$ 



# $||B||_1$ 与 $\rho(L_1)$

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

0.11.124.024

Gauss-Seidel迭代法

#### 收敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度

## 定理

$$||x_k - x_*||_1 \leqslant \frac{\tilde{\mu}^k}{(1 - \tilde{\mu})(1 - s)} ||x_1 - x_0||_1$$

其中
$$s = \max_{j} \sum_{i=j+1}^{n} |b_{ij}|$$
,这是 $B$ 的下三角阵 $D^{-1}L$ 的 $1$ 范数

# $\rho(L_1) < 1$ 的证明

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代治

Jacobi迭代

Gauss-Saidal 法在

形式技

(敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的注

因为

$$(D-L)^{-1}U = (I-D^{-1}L)^{-1}(D^{-1}U(I-D^{-1}L)^{-1})(I-D^{-1}L)$$

所以
$$L_1$$
与 $\tilde{L}_1 = D^{-1}U(I - D^{-1}L)^{-1}$ 相似,从而 $\rho(L_1) = \rho(\tilde{L}_1)$ 

# $\rho(L_1) < 1$ 的证明

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代

Gauss-Seidel迭代

形式推

#### 敛性理论

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 幼性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的清 近收敛速度 因为

$$(D-L)^{-1}U = (I-D^{-1}L)^{-1}(D^{-1}U(I-D^{-1}L)^{-1})(I-D^{-1}L)$$

所以
$$L_1$$
与 $\tilde{L}_1 = D^{-1}U(I - D^{-1}L)^{-1}$ 相似,从而 $\rho(L_1) = \rho(\tilde{L}_1)$ 

• 类似 $\infty$ 范数时的情况可证 $\|\tilde{\mathcal{L}}_1^T\|_{\infty} \leq \tilde{\mu} < 1$ ,从而有

$$\rho(L_1) \leqslant \|\tilde{L}_1^T\|_{\infty} \leqslant \tilde{\mu} < 1$$

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

12 22 23 25 25 25

C C + 1 (0) / / / / / /

IIX =P Hb s

#### 收敛性理论

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

#### 的动速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

• 实际上,令 $C = B^T$ .  $||B||_1 < 1 \Longrightarrow ||C||_{\infty} < 1$ 

# 线性方程组的古典铁

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

- 实际上,令 $C = B^T$ .  $||B||_1 < 1 \Longrightarrow ||C||_{\infty} < 1$
- C的下三角部分为 $(D^{-1}U)^T = U^TD^{-1}$ , 上三角 部分为 $(D^{-1}L)^T = L^T D^{-1}$

邓建松

#### 单步线性定常迭代注

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

#### 收敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 近收敛速度

- 实际上,令 $C = B^T$ .  $||B||_1 < 1 \Longrightarrow ||C||_{\infty} < 1$
- C的下三角部分为 $(D^{-1}U)^T = U^T D^{-1}$ ,上三角部分为 $(D^{-1}L)^T = L^T D^{-1}$
- $\tilde{L}_1^T = (D^{-1}U(I D^{-1}L)^{-1})^T = (I L^TD^{-1})^{-1}U^TD^{-1}$

邓建松

#### 单步线性定常迭代》

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法 形式推广

#### 収敛性埋诉

收敛的充要条件收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度

- 实际上,令 $C = B^T$ .  $||B||_1 < 1 \Longrightarrow ||C||_\infty < 1$
- C的下三角部分为 $(D^{-1}U)^T = U^T D^{-1}$ ,上三角部分为 $(D^{-1}L)^T = L^T D^{-1}$
- $\tilde{L}_1^T = (D^{-1}U(I D^{-1}L)^{-1})^T = (I L^TD^{-1})^{-1}U^TD^{-1}$
- $\tilde{L}_1^T x = y \Longrightarrow y = L^T D^{-1} y + U^T D^{-1} x$

# 误差估计的证明

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代剂

1 120-7120-

Carrage Cathalists (#

100 =2° 480

#### 收敛性理说

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度 • 由G-S迭代法的格式,可得

$$x_k - x_{k-1} = D^{-1}L(x_k - x_{k-1}) + D^{-1}U(x_{k-1} - x_{k-2})$$

# 误差估计的证明

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选代

形式排

#### 女敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的影 近收敛速度 • 由G-S迭代法的格式,可得

$$x_k - x_{k-1} = D^{-1}L(x_k - x_{k-1}) + D^{-1}U(x_{k-1} - x_{k-2})$$

分量表示即为

$$x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} (x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)})$$
  
  $+ \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij} (x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)})$ 

邓建松

#### 单步线性定常迭代剂

lacobi迭代法

Gauss-Seidel读代》

100 =0° +0°

#### 收敛性理论

收敛的充要条件

収敛的允分录件及误差值计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 ▶ 两边取绝对值后对*i*求和,再交换求和顺序

$$\sum_{i=1}^{n} \left| x_{i}^{(k)} - x_{i}^{(k-1)} \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}| \left| x_{j}^{(k)} - x_{j}^{(k-1)} \right| \right.$$

$$\left. + \sum_{j=i+1}^{n} |b_{ij}| \left| x_{j}^{(k-1)} - x_{j}^{(k-2)} \right| \right)$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{i=j+1}^{n} |b_{ij}| \left| x_{j}^{(k)} - x_{j}^{(k-1)} \right| \right.$$

$$\left. + \sum_{j=i+1}^{n} |b_{ij}| \left| x_{j}^{(k-1)} - x_{j}^{(k-2)} \right| \right)$$

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Cause-Soidel进代注

TEX -- (\*) 440-

#### 收敛性理论

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

#### 的动速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

(東年門底

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度



$$\tilde{u}_j = \sum_{i=j+1}^n |b_{ij}|, \quad \tilde{\ell}_j = \sum_{i=1}^{j-1} |b_{ij}|$$

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

## 今

$$\tilde{u}_j = \sum_{i=i+1}^n |b_{ij}|, \quad \tilde{\ell}_j = \sum_{i=1}^{j-1} |b_{ij}|$$

• 则接前推导我们有

$$\sum_{i=1}^{n} \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \left( \tilde{u}_j \left| x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)} \right| + \tilde{\ell}_j \left| x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)} \right| \right)$$

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel读代法

124 = P + HB

#### **收敛性**理语

收敛的充分条件及误差估

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

TREE PORTS

近收敛速度

## 从而有

$$\sum_{j=1}^{n} (1 - \tilde{u}_j) \left| x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)} \right| \leq \sum_{j=1}^{n} \tilde{\ell}_j \left| x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)} \right|$$

$$\leq \tilde{\mu} \sum_{j=1}^{n} (1 - \tilde{u}_j) \left| x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)} \right|$$

 $\leq \cdots \cdots$ 



 $\leq \tilde{\mu}^{k-1} \sum (1 - \tilde{u}_j) \left| x_j^{(1)} - x_j^{(0)} \right|$ 

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

C----- C-:4-126/PVt

---

#### 收敛性理证

lacobi迭代法和G-S迭代法的收

#### 的动速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的差 近收敛速度 • 根据 $\tilde{\mu}$ 和s的定义, $1-s \leqslant 1-\tilde{u}_j < 1$ 

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代》

Gauss-Seidel洪代》

100 =2° 48:

#### 收敛性理i

收敛的充要条

JE ALALAN II IT M

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

lacobi迭代法和G-S迭代法的渐

Jacobi迭代法和G-S迭代法的新 近收敛速度

- 根据 $\tilde{\mu}$ 和s的定义, $1-s \leqslant 1-\tilde{u}_i < 1$
- 所以

$$(1-s)\sum_{j=1}^{n}\left|x_{j}^{(k)}-x_{j}^{(k-1)}\right|\leqslant \tilde{\mu}^{k-1}\sum_{j=1}^{n}\left|x_{j}^{(1)}-x_{j}^{(0)}\right|$$

邓建松

#### 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代

Gauss-Seidel迭代》

100 =2° 480

#### 收敛性理i

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的影 近收敛速度

收敛速度

# • 根据 $\tilde{\mu}$ 和s的定义, $1-s \leqslant 1-\tilde{u}_j < 1$

• 所以

$$(1-s)\sum_{j=1}^{n}\left|x_{j}^{(k)}-x_{j}^{(k-1)}\right|\leqslant \tilde{\mu}^{k-1}\sum_{j=1}^{n}\left|x_{j}^{(1)}-x_{j}^{(0)}\right|$$

• 这就是 $(1-s)||x_k-x_{k-1}||_1 \leqslant \tilde{\mu}^{k-1}||x_1-x_0||_1$ 

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

C 11 10t /02t

IIX =P Hb s

#### 收敛性理论

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收分速度 • 注意到 $x_k - x_* = \sum_{i=k}^{\infty} (x_i - x_{i+1})$ 

邓建松

#### 单步线性定常迭代》

lacobi迭色

C C 1 1 100 700

TEX =2" 16:

#### 收敛性理证

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的部 近收敛速度

• 注意到
$$x_k - x_* = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - x_{i+1})$$

• 所以

$$||x_{k} - x_{*}||_{1} \leqslant \sum_{i=k}^{\infty} ||x_{i} - x_{i+1}||_{1}$$

$$\leqslant \frac{1}{1-s} \sum_{i=k}^{\infty} \tilde{\mu}^{i} ||x_{1} - x_{0}||_{1}$$

$$\leqslant \frac{\tilde{\mu}^{k}}{(1-\tilde{\mu})(1-s)} ||x_{1} - x_{0}||_{1}$$

# 从A直接判断: 正定矩阵

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代》

Jacobi迭代

Gauss-Seidel选代法

形式推

#### 女敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 近收敛速度

## 定理

如果A是对称的,而且对角元全是正数,则Jacobi迭代法收敛的充要条件是A和2D – A都正定

# 线性方程组的古典迭

• 迭代矩阵 $B = D^{-1}(L + U) = I - D^{-1}A$ 

# 线性方程组的古典铁

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

• 迭代矩阵
$$B = D^{-1}(L + U) = I - D^{-1}A$$

• 由于对角元全是正数, 所以

$$B = D^{-1/2} (I - D^{-1/2} A D^{-1/2}) D^{1/2}$$

## 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

auss-Seidel迭代法

#### 收敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度

• 迭代矩阵
$$B = D^{-1}(L + U) = I - D^{-1}A$$

• 由于对角元全是正数,所以

$$B = D^{-1/2} (I - D^{-1/2} A D^{-1/2}) D^{1/2}$$

• A对称,所以 $I - D^{-1/2}AD^{-1/2}$ 也是对称的,而且它与B相似,所以B的特征值全为实数

邓建松

#### 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选代》

IES =P HB:

#### 收敛性理论

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度 • Jacobi迭代法收敛 $\iff \rho(B) < 1$ . 而B的特征值 全为实数,所以这又等价于I - B和I + B的特征值均为正实数

邓建松

#### 单步线性定常迭代注

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代》

#### 収敛性埋1

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消近收敛速度

- Jacobi迭代法收敛 $\iff \rho(B) < 1$ . 而B的特征值 全为实数,所以这又等价于I B和I + B的特征值均为正实数
- 注意到

$$I - B = D^{-1/2} (D^{-1/2} A D^{-1/2}) D^{1/2}$$
  

$$I + B = D^{-1/2} (2I - D^{-1/2} A D^{-1/2}) D^{1/2}$$

单步线性定常迭代注

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel读作

iauss-Seidel迭代法 《式推广

### 收敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度

- Jacobi迭代法收敛 $\iff \rho(B) < 1$ . 而B的特征值 全为实数,所以这又等价于I B和I + B的特征值均为正实数
- 注意到

$$I - B = D^{-1/2} (D^{-1/2} A D^{-1/2}) D^{1/2}$$
  

$$I + B = D^{-1/2} (2I - D^{-1/2} A D^{-1/2}) D^{1/2}$$

● 所以ρ(B) < 1等价于A与2D – A均正定

邓建松

单步线性定常迭代》

Jacobi迭代

Gauss-Seidel迭代

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估证

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度

- Jacobi迭代法收敛 $\iff \rho(B) < 1$ . 而B的特征值 全为实数,所以这又等价于I B和I + B的特征值均为正实数
- 注意到

$$I - B = D^{-1/2} (D^{-1/2} A D^{-1/2}) D^{1/2}$$
  

$$I + B = D^{-1/2} (2I - D^{-1/2} A D^{-1/2}) D^{1/2}$$

- 所以ρ(B) < 1等价于A与2D A均正定
  - D<sup>-1/2</sup>AD<sup>-1/2</sup>相合于A;
     2I − D<sup>-1/2</sup>AD<sup>-1/2</sup>相合于2D − A

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代剂

Jacobi读代的

Carrage Catalog (B)

形式排

#### 收敛性理i

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

196 35. 179 825

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 运收分速度 • 正定理

线性方程组的古典迭

• 正定理

定理

若系数矩阵A对称正定,则G-S迭代法收敛

线性方程组的古典迭

• 正定理

定理

若系数矩阵A对称正定,则G-S迭代法收敛

• 定理证明见第4节

线性方程组的古典迭

• 正定理

### 定理

若系数矩阵A对称正定,则G-S迭代法收敛

- 定理证明见第4节
- 逆定理(习题第7题)

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代》

Gauss-Seidel迭代

仪蚁注连

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度 • 正定理

### 定理

若系数矩阵A对称正定,则G-S迭代法收敛

- 定理证明见第4节
- 逆定理(习题第7题)

### 定理

若系数矩阵A是具有正对角元的对称矩阵, G-S迭代 法对任意初值收敛, 则A必是正定的

# 对角占优矩阵

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel选作

Gauss-Seidel迭代

形式推

収敛性理N

収敛的允妥涂件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 幼件

收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度 • 矩阵 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . 若对所有的i = 1, ..., n,

$$|a_{ii}|\geqslant \sum_{j=1,j
eq i}^{n}|a_{ij}|$$

并且至少有一个对i有严格不等号成立,则称A是<mark>弱严格对角占优</mark>的。如果对所有i都有严格不等号成立,则称A是严格对角占优的



# 可约和不可约矩阵

线性方程组的古典铁

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

• 矩阵 $A = (a_{ii}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . 若存在n阶排列 方阵P使得

$$PAP^T = \left(\begin{array}{cc} A_{11} & 0 \\ A_{12} & A_{22} \end{array}\right)$$

其中 $A_{11}$ 是r阶方阵, $A_{22}$ 是n-r阶方阵, 则称A是可约的或可分的,反之称为不 可约的或不可分的

# 可约矩阵的意义

### 线性方程组的古典迭

• 如果A可约,可以把Ax = b化为

$$PAP^TPx = Pb$$

# 可约矩阵的意义

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代法

形式推

#### 女敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海近收敛速度

• 如果A可约,可以把Ax = b化为

$$PAP^TPx = Pb$$

● 记*Px* = *y*, *Pb* = *f*, 则有

$$\left(\begin{array}{cc} A_{11} & 0 \\ A_{12} & A_{22} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array}\right)$$

# 可约矩阵的意义

## 线性方程组的古典铁

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

• 如果A可约,可以把Ax = b化为

$$PAP^TPx = Pb$$

● 记*Px* = *v*, *Pb* = *f*, 则有

$$\left(\begin{array}{cc} A_{11} & 0 \\ A_{12} & A_{22} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array}\right)$$

• 如此我们可以先求解r阶方程组 $A_{11}$  $y_1 = f_1$ , 得 到 $y_1$ , 代入 $A_{12}y_1 + A_{22}y_2 = f_2$  后就可以解出 $y_2$ 

# 可约矩阵的等价定义

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法 Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代

### (敛性理)

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • 设A为n  $(n \ge 2)$ 阶方阵, $\mathcal{W} = \{1, ..., n\}$ . 如果存在 $\mathcal{W}$ 的两个非空的子集 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$ 满足

$$\mathcal{S} \cup \mathcal{T} = \mathcal{W}, \mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \emptyset$$

使得 $a_{ij} = 0$ ,  $(i \in S, j \in T)$ , 则称A为可约的,否则称A是不可约的

## 不可约对角占优

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobit医代液

Gauss-Seidenzen

b 幼性理:

12-21-11-11

-動物的容益条件及提至

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 幼性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

T POTENTIAL DESCRIPTION DE LA COMPANION DE LA

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 近收敛速度 如果一个矩阵不可约,并且是弱严格对角占优的的,则称该矩阵为不可约对角占优的

# 不可约对角占优

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi还代法

Gauss-Seidel迭代

形式推

#### 仅敛性埋ii

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度

- 如果一个矩阵不可约,并且是弱严格对角占优的的,则称该矩阵为不可约对角占优的
- 下述三对角阵为不可约对角占优矩阵

$$\left(\begin{array}{ccccc}
2 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right)$$

# 不可约对角占优

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代

Gauss-Seiden&1(//

**女敛性理说** 

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度

- 如果一个矩阵不可约,并且是弱严格对角占优的,则称该矩阵为不可约对角占优的
- 下述三对角阵为不可约对角占优矩阵

$$\left(\begin{array}{cccc}
2 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right)$$

● 弱严格对角占优矩阵,有可能一行全是零;而不可约对角占优,就排除了这种情形,从而任意对角元非零

### 线性方程组的古典选 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel洪代》

100 min title (

#### 收敛性理说

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

半均收級速度和渐近收級速度

lacobi读代注和G-S读代:

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度 • 对角占优与非奇异的关系:

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代流

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代

形式推

(敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的沟近收敛速度

• 对角占优与非奇异的关系:

### 定理

如果矩阵A是严格对角占优的,或者不可约对角占优的,则A非奇异

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代》

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选作

#### (敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度 • 对角占优与非奇异的关系:

### 定理

如果矩阵A是严格对角占优的,或者不可约对角占优的,则A非奇异

• 可约对角占优的,矩阵有可能奇异:

$$\left(\begin{array}{cccc}
1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 3
\end{array}\right)$$

# 严格对角占优情形的证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Carrage Carrage (Str. 1)

形式組

#### 女敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • 若A奇异,则Ax = 0有非零解x. 不妨  $\mathfrak{P}[x] = \|x\|_{\infty} = 1$ , 则有

$$|a_{ii}|=|a_{ii}x_i|=\left|\sum_{j=1,j\neq i}^n a_{ij}x_j
ight|\leqslant \sum_{j=1,j\neq i}^n |a_{ij}|$$

# 严格对角占优情形的证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel选作

形式推

#### 女敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐近收敛速度

$$|a_{ii}|=|a_{ii}x_i|=\left|\sum_{j=1,j\neq i}^n a_{ij}x_j
ight|\leqslant \sum_{j=1,j\neq i}^n |a_{ij}|$$

• 这与A严格对角占优矛盾

## 不可约对角占优情形的证明

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel选代法

形式推

收敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 幼性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的消

Jacobi迭代法和G-S迭代法的清 近收敛速度 • 同样,若A奇异,则存在x满 足 $\|x\|_{\infty} = 1$ 使得Ax = 0

## 不可约对角占优情形的证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel迭代法

### (以)以[江庄]

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的清 近收敛速度 • 同样,若A奇异,则存在x满 足 $\|x\|_{\infty} = 1$ 使得Ax = 0

• 定义 $S = \{i : |x_i| = 1\},$  $T = \{k : |x_k| < 1\}$ 

# 不可约对角占优情形的证明

## 线性方程组的古典铁

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

同样, 若A奇异, 则存在x满  $\mathbb{E}||x||_{\infty}=1$ 使得Ax=0

• 定义 $S = \{i : |x_i| = 1\},$  $\mathcal{T} = \{k : |x_k| < 1\}$ 

• 显然 $S \cup T = W$ ,  $S \cap T = \emptyset$ , 而且S非空

# ア为空集

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

lacobi迭代)

Gauss-Seidel读代》

形式推

收敛性理i

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Mineral November

Jacobi选代法和G-S选代法的

假设T为空集

# ア为空集

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel读代

形式组

#### 女敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的运 近收敛速度 ● 假设T为空集

• 那么x的各分量的绝对值均为1,从而 $\forall i \in S$ ,

$$|a_{ii}| \leqslant \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|$$

# T为空集

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代

形式推

#### 双敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 近收敛速度

- 假设T为空集
- 那么x的各分量的绝对值均为1,从而 $\forall i \in S$ ,

$$|a_{ii}| \leqslant \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|$$

• 这与A弱严格对角占优矛盾

# T非空:利用不可约完成证明

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Sauss-Seidel迭代

形式推

收敛性理论

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度 • 因为A不可约,所以存在 $i \in S$ ,  $k \in T$ 使得 $a_{ik} \neq 0$ 

# T非空:利用不可约完成证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代

Gauss-Seidel迭代

### 収敛性理算

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

#### 収敛速度

- 平均收敛速度和渐近收敛速) 模型问题
- Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度

- 因为A不可约,所以存在 $i \in S$ ,  $k \in T$ 使得 $a_{ik} \neq 0$
- 于是|*a<sub>ik</sub>x<sub>k</sub>*| < |*a<sub>ik</sub>*|, 并且

$$|a_{ii}| = |a_{ii}x_i| \leqslant \sum_{j \in \mathcal{S}, j \neq i} |a_{ij}||x_j| + \sum_{j \in \mathcal{T}} |a_{ij}||x_j|$$
 $< \sum_{j \in \mathcal{S}, j \neq i} |a_{ij}| + \sum_{j \in \mathcal{T}} |a_{ij}|$ 
 $= \sum_{i \neq i} |a_{ij}|$ 

这也与A为弱严格对角占优矛盾

# 推论

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代》

Jacobi迭代

Gauss-Seidel选代法

IX = http://

#### **女敛性理**说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度

### 推论

若A是严格对角占优的或者不可约对角占优的对称矩阵,且A的对角线元素均为正数,则A正定

## 证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选代

we also like the

#### 收敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Afternation and

Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度 A对称,所以特征值均为实数。为证A正定,只需要证明所有特征值均为正数

## 证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代》

形式推

#### 《敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的i 近收敛速度

- A对称,所以特征值均为实数。为证A正定,只需要证明所有特征值均为正数
- 若有一个特征值 $\lambda \leq 0$ , 考虑矩阵 $A \lambda I$

## 证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi 迭代法 Gauss-Seidel 迭代法

#### lh Ah M III i

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

操室回题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的清 近收敛速度

- A对称,所以特征值均为实数。为证A正定,只需要证明所有特征值均为正数
- 若有一个特征值 $\lambda \leq 0$ , 考虑矩阵 $A \lambda I$
- 矩阵 $A \lambda I$ 只是在A的对角线元素上增加了一些,所以 $A \lambda I$ 和A一样是严格对角占优或者不可约对角占优的,从而是非奇异的,这与 $\lambda$ 为A的特征值矛盾

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代》

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选付

100 = 2° 485

#### 女敛性理

收敛的充要条件

収敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度

### 定理

若A是严格对角占优的,或者不可约对角占优的,则Jacobi迭代法和G-S迭代法都收敛

# 证明: Jacobi迭代

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代流

Comme Consultation (Institute

形式排

### 收敛性理论

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

DREED PRACE

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度 •  $\forall i, a_{ii} \neq 0$ 

# 证明: Jacobi迭代

## 线性方程组的古典迭

- $\forall i, a_{ii} \neq 0$
- 所以矩阵D可逆

## 证明: Jacobi迭代

### 线性方程组的古典铁

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

- $\forall i, a_{ii} \neq 0$
- 所以矩阵D可逆
- 假设Jacobi迭代法的迭代矩阵B的某个 特征值λ的模长不小干1

## 证明: Jacobi迭代

线性方程组的古典铁

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

- $\forall i, a_{ii} \neq 0$
- 所以矩阵D可逆
- 假设Jacobi迭代法的迭代矩阵B的某个 特征值λ的模长不小干1
- 考虑矩阵 $\lambda D L U$ . 这也是严格对角 占优的或者不可约对角占优的,从而非 奇异

## 证明: Jacobi迭代

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代

Wath:

敛性理论

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 <sup>英型问题</sup> •  $\forall i, a_{ii} \neq 0$ 

- 所以矩阵D可逆
- 假设Jacobi迭代法的迭代矩阵B的某个特征值 $\lambda$ 的模长不小于1
- 考虑矩阵 $\lambda D L U$ , 这也是严格对角 占优的或者不可约对角占优的,从而非 奇异
- 由于 $\lambda I B = D^{-1}(\lambda D L U)$ ,所以 $\det(\lambda I B) \neq 0$ ,矛盾

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代》

形式推

收敛性理证

動効的なA条件B等差を

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的i

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 近收敛速度 • G-S迭代法的迭代矩阵 $L_1 = (D - L)^{-1}U$ 

### 线性方程组的古典铁

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

• G-S迭代法的迭代矩阵
$$L_1 = (D - L)^{-1}U$$

• 
$$\lambda I - L_1 = (D - L)^{-1}(\lambda D - \lambda L - U)$$

#### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代治

Jacobi迭代

Gauss-Saidal 供件:

TT - IN ARE.

#### (敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估记

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的清 近收敛速度 • G-S迭代法的迭代矩阵 $L_1 = (D - L)^{-1}U$ 

•  $\lambda I - L_1 = (D - L)^{-1}(\lambda D - \lambda L - U)$ 

D − L是可逆的

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代法

de Medalerii V

#### 人蚁性埋化

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • G-S迭代法的迭代矩阵 $L_1 = (D - L)^{-1}U$ 

- $\lambda I L_1 = (D L)^{-1}(\lambda D \lambda L U)$
- D − L是可逆的
- 若 $|\lambda| \ge 1$ , 则 $\lambda D \lambda L U$ 也是严格对 角占优的,或者不可约对角占优的,从 而是可逆的

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代法

EX -P-Hb-P-

### 敛性理论

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐近收敛速度

- G-S迭代法的迭代矩阵 $L_1 = (D L)^{-1}U$
- $\lambda I L_1 = (D L)^{-1}(\lambda D \lambda L U)$
- D − L是可逆的
- 若 $|\lambda| \ge 1$ , 则 $\lambda D \lambda L U$ 也是严格对 角占优的,或者不可约对角占优的,从 而是可逆的
- 这就证明了G-S迭代法收敛

#### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代注

Commercial (B)

形式排

#### 收敛性理论

北かかかな事名

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

#### 平均收敛速度和渐近收敛速

T POTENTIAL TECHNISH TECHNISH

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

• 单步线性定常迭代法:  $x_k = Mx_{k-1} + g$ 

#### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel选代》

形式推

#### 女敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

于均収或速度和制造収效速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海近收敛速度

• 单步线性定常迭代法: 
$$x_k = Mx_{k-1} + g$$

• 误差向量 $y_k = x_k - x_*$ 满足 $y_k = M^k y_0$ , 从而有

$$||y_k|| \leqslant ||M^k|| ||y_0||$$

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi达代法

Gauss-Seidel迭代

形式推

#### 【敛性埋诉

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的单

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度

- 单步线性定常迭代法:  $x_k = Mx_{k-1} + g$
- 误差向量 $y_k = x_k x_*$ 满足 $y_k = M^k y_0$ , 从而有

$$||y_k|| \leqslant ||M^k|| ||y_0||$$

• 初始误差 $\|y_0\|$ 一般不知道,通常用 $\|M^k\|$ 的大小刻画迭代法收敛的速度

### 线性方程组的古典铁

- 单步线性定常迭代法:  $x_k = Mx_{k-1} + g$
- 误差向量 $v_k = x_k x_*$ 满足 $v_k = M^k v_0$ . 从而有

$$||y_k|| \leqslant ||M^k|| ||y_0||$$

- 初始误差||y₀||一般不知道,通常用||M<sup>k</sup>||的大小 刻画迭代法收敛的速度
- 定义 $R_k(M) = \frac{-\ln \|M^k\|}{k}$ 为k次迭代的<mark>平均收敛</mark> 速度

## 误差缩减的比例因子

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel迭代

形式推

收敛性理证

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

于初代双述技作机组织双述点

Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度 • 若迭代法收敛,则当 $k \to \infty$ 时, $\|M^k\| \to 0$ 

## 误差缩减的比例因子

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel迭代

形式推

#### 仅敛性埋1

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

T 2011人 XX 155 155 174 11 12.1 1X 3X 155 15

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度

- 若迭代法收敛,则当 $k \to \infty$ 时, $\|M^k\| \to 0$
- 所以当k充分大时,总有 $R_k(M) > 0$ .

## 误差缩减的比例因子

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

形式推广

**收敛性理论** 

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi选代法和G-S选代法的海 近收敛速度

- 若迭代法收敛,则当 $k \to \infty$ 时, $\|M^k\| \to 0$
- 所以当k充分大时,总有 $R_k(M) > 0$ .
- 设 $R_k = R_k(M) > 0$ , 数量

$$\sigma = \left(\frac{\|y_k\|}{\|y_0\|}\right)^{1/k} \approx \|M^k\|^{1/k} = e^{-R_k}$$

就表示误差范数在k次迭代中平均每次 迭代所缩减的比例因子

## 对称矩阵情形

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel迭代》

形式相

#### 又敛性埋む

收敛的充要条件

収敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

半均収敛速度和制近収敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的清 近收敛速度 若*M*是对称矩阵,或者Hermite矩阵, 或者正规矩阵,则显然有

$$\|M^k\|_2 = (\rho(M))^k$$

## 对称矩阵情形

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代》

Gauss-Seidel迭代

形式推

#### (敛性理论

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的I

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 若*M*是对称矩阵,或者Hermite矩阵, 或者正规矩阵,则显然有

$$\|M^k\|_2 = (\rho(M))^k$$

• 所以 $R_k(M) = -\ln \rho(M)$ , 这是与k无关的量

## 对称矩阵情形

线性方程组的古典铁

若M是对称矩阵,或者Hermite矩阵, 或者正规矩阵,则显然有

$$\|M^k\|_2 = (\rho(M))^k$$

- 所以 $R_k(M) = -\ln \rho(M)$ , 这是与k无关 的量
- 但在一般情况下,R<sub>k</sub>是依赖于k的,这 时计算 $R_{\iota}$ 就非常复杂

## 收敛速度比较

线性方程组的古典铁

如果两个迭代矩阵G和H满  $\mathbb{E}R_{k}(H) > R_{k}(M) > 0$ , 我们就说,对 干k次迭代来讲,对应于H的迭代法比 对应于G的迭代法的收敛速度快

## 收敛速度比较

线性方程组的古典铁

- 如果两个迭代矩阵G和H满 足 $R_k(H) > R_k(M) > 0$ , 我们就说,对 干k次迭代来讲,对应于H的迭代法比 对应于G的迭代法的收敛速度快
- 有可能对某些k,  $R_k(G) < R_k(H)$ , 而对 另一些 $k, R_k(G) > R_k(H)$

## 收敛速度比较

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法 Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代

收敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

**平均收敛速度和渐近收敛速度** 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • 如果两个迭代矩阵G和H满 足 $R_k(H) > R_k(M) > 0$ ,我们就说,对于k次迭代来讲,对应于H的迭代法比对应于G的迭代法的收敛速度快

- 有可能对某些k,  $R_k(G) < R_k(H)$ , 而对 另一些k,  $R_k(G) > R_k(H)$
- 所以我们考虑k → ∞时 $R_k(M)$ 的极限



### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel读代

形式相

#### 又蚁性埋训

收敛的充要条件

収敛的允分录件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

干均収取速度和削延収取速!

Jacobi迭代法和G-S迭代法的治 近收敛速度 • 为了刻画整个迭代过程的收敛速度, 我们定义

$$R_{\infty}(M) = \lim_{k \to \infty} R_k(M)$$

这称为渐近收敛速度

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel读代

形式相

#### (敛性埋化

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛过

**干均収款速度和削延収款速度** 

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度 • 为了刻画整个迭代过程的收敛速度, 我们定义

$$R_{\infty}(M) = \lim_{k \to \infty} R_k(M)$$

这称为渐近收敛速度

• 我们有

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel选作

形式推

#### 【敛性理论

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的中分性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的泛近收敛速度

• 为了刻画整个迭代过程的收敛速度, 我们定义

$$R_{\infty}(M) = \lim_{k \to \infty} R_k(M)$$

这称为渐近收敛速度

• 我们有

### 定理

$$R_{\infty}(M) = -\ln \rho(M)$$

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel读代

Gauss-Seidel迭代

### 以蚁往理化

收敛的充安条件及误差估计

致性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • 为了刻画整个迭代过程的收敛速度, 我们定义

$$R_{\infty}(M) = \lim_{k \to \infty} R_k(M)$$

这称为渐近收敛速度

• 我们有

### 定理

$$R_{\infty}(M) = -\ln \rho(M)$$

• 定理的成立不依赖于范数的选取

#### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代流

Gauss-Seidel洪代的

100 =2° 48:

#### 收敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

#### 平均收敛速度和渐近收敛速

400 mil 600 mg

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

• 只需证明  $\lim_{k\to\infty}\|M^k\|^{1/k}=\rho(M)$  即可

#### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel选代》

形式排

#### 攵敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消近收敛速度

- 只需证明  $\lim_{k\to\infty} \|M^k\|^{1/k} = \rho(M)$  即可
- 因为 $(\rho(M))^k = \rho(M^k) \leq ||M^k||,$ 所以 $\rho(M) \leq ||M^k||^{1/k}$

### 线性方程组的古典铁

• 只需证明  $\lim_{k\to\infty} \|M^k\|^{1/k} = \rho(M)$  即可

- 因为 $(\rho(M))^k = \rho(M^k) \leq ||M^k||$ ,所 以 $\rho(M) \leqslant \|M^k\|^{1/k}$
- 另一方面,对 $\forall \varepsilon > 0$ . 考虑矩阵

$$B_{\varepsilon} = \frac{1}{\rho(M) + \varepsilon} M$$

### 线性方程组的古典铁

- 只需证明  $\lim_{k\to\infty} \|M^k\|^{1/k} = \rho(M)$  即可
- 因为 $(\rho(M))^k = \rho(M^k) \leq ||M^k||$ ,所 以 $\rho(M) \leqslant \|M^k\|^{1/k}$
- 另一方面, 对 $\forall \varepsilon > 0$ . 考虑矩阵

$$B_{\varepsilon} = \frac{1}{\rho(M) + \varepsilon} M$$

显然ρ(Bε) < 1</li>

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Carra Carra (86.793)

ma =h tib r

#### **此**给## = 3.5

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 幼性

#### 收敛速度

#### 平均收敛速度和渐近收敛速度

**越型间膜** 

Jacobi迭代法和G-S迭代法的数

• 于是 $\lim_{k\to\infty}B^k_{\varepsilon}=0$ 

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选代法

形式推

#### 收敛性理论

收敛的充

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

干均収款速度和制建収款速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的影 近收敛速度

- 于是 $\lim_{k\to\infty} B_{\varepsilon}^k = 0$
- 所以存在自然数K, 当 $k \ge K$ 时有 $||B_{\varepsilon}^k|| \le 1$

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel洪代法

形式排

#### 收敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### **协**幼速度

平均收敛速度和渐近收敛边

**干均収款速度和制进収款速度** 

Jacobi迭代法和G-S迭代法的制 近收敛速度

- 于是 $\lim_{k\to\infty}B^k_{\varepsilon}=0$
- 所以存在自然数K, 当 $k \ge K$ 时有 $\|B_{\varepsilon}^k\| \le 1$
- 这就是 $||M^k|| \leq (\rho(M) + \varepsilon)^k$

邓建松

### 单步线性定常迭代》

Jacobi迭化

Sauss-Seidel迭代法

#### 收敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度

- $\mathcal{F}$   $\lim_{k\to\infty} B_{\varepsilon}^k = 0$
- 所以存在自然数K, 当 $k \ge K$ 时有 $\|B_{\varepsilon}^k\| \le 1$
- 这就是 $||M^k|| \leq (\rho(M) + \varepsilon)^k$
- 至此我们证明了:对任意的 $\varepsilon > 0$ ,存在自然数K, 当 $k \ge K$ 时,

$$\rho(M) \leqslant \|M^k\|^{1/k} \leqslant \rho(M) + \varepsilon$$

这就完成了证明

# 模型问题

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel读在

Gauss-Seidel达生

#### iller Alerbet 100 3

收敛的充要条件

収敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 位性

#### 收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速

英型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 ● 为了具体说明迭代法的收敛速度,我们考虑用 五点差分格式求解[0,1]<sup>2</sup>上的Poisson方程第一 边值问题

边值问题 
$$\begin{cases} \triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y), (x, y) \in (0, 1)^2 \\ u|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

这里「表示正方形定义域的边界

## 离散化

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobn & TOR

-auss-Seidel达代

形式推

仅敛性埋诉

收敛的充要条件

収敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

英型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 近收敛速度 • 把正方形的每边n等分,令h = 1/n,用等分线 把正方形 $[0,1]^2$ 分割成 $n^2$ 个小正方形

## 离散化

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代

形式推

#### 収敛性埋1

收敛的充要条件

収敛的充分条件及误差估计

Jacobi选代法和G-S选代法的影 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

#### 英型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度

- 把正方形的每边n等分,令h = 1/n,用等分线 把正方形 $[0,1]^2$ 分割成 $n^2$ 个小正方形
- 记小正方形的顶点为 $(x_i, y_j)$

# 离散化

线性方程组的古典铁

- 把正方形的每边n等分,令h = 1/n,用等分线 把正方形 $[0,1]^2$ 分割成 $n^2$ 个小正方形
- 记小正方形的顶点为(x<sub>i</sub>, y<sub>i</sub>)
- 用二阶差商

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{(x_i, y_j)} = \frac{1}{h^2} (u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) + O(h^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{(x_i,y_i)} = \frac{1}{h^2}(u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}) + O(h^2)$$

代替二阶偏微分,这里 $u_{i,i} = u(x_i, y_i)$ 

# 矩阵形式

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代

形式相

#### 攵敛性理说

收敛的充要条件

权政的允万隶什及沃左伯订

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

#### 英型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的制 近收敛速度 • 如此得到方程组

$$\begin{cases}
4u_{i,j} - (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) = h^2 f_{ij} \\
i, j = 1, \dots, n-1 \\
u_{i,0} = u_{i,n} = u_{0,j} = u_{n,j} = 0, \quad i, j = 0, \dots, n
\end{cases}$$

# 矩阵形式

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代

形式推

#### 收敛性埋论

收敛的充分条件及证

Jacobi迭代法和G-S迭代法的# 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度 • 如此得到方程组

$$\begin{cases}
4u_{i,j} - (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) = h^2 f_{ij} \\
i, j = 1, \dots, n-1 \\
u_{i,0} = u_{i,n} = u_{0,j} = u_{n,j} = 0, \quad i, j = 0, \dots, n
\end{cases}$$

• 写成矩阵形式:

$$T_{n-1}U+UT_{n-1}=h^2F,$$

其中 $U = (u_{i,j}), F = (f_{ij}), T_{n-1} 为 n - 1$ 阶三对角矩阵矩阵,主对角元素为2, 上下次对角元素为-1

### 矩阵拉直: 自然顺序排列

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代治

Gauss-Seidel洪

Gauss-Seidel 迭1

iller Alerbet 100 3

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 近收敛速度 • 为了得到通常的Ax = b形式的线性方程组,我们对U和F中的元素进行"拉直":先按j由小到大排列,j相同的按i由小到大排列

# 矩阵拉直: 自然顺序排列

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法
Jacobi选代法
Gauss-Seidel选代法

iller Afrikk IIII 3

以蚁性埋化

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的或

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

快坐四處

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海

- 为了得到通常的Ax = b形式的线性方程组,我们对U和F中的元素进行"拉直":先按j由小到大排列,j相同的按i由小到大排列
- 如此我们得到方程组

$$Au = h^2 f$$

其中向量u和f是矩阵U和F拉直的结果

# 系数矩阵A

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代剂

Jacobi迭

Gauss-Seidel迭代

形式推

义蚁性埋7

収敛的允安录件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的I 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

英型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消近收敛速度

$$A = \begin{pmatrix} T_{n-1} + 2I_{n-1} & -I_{n-1} & & & & \\ -I_{n-1} & \ddots & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & -I_{n-1} & \\ & & -I_{n-1} & T_{n-1} + 2I_{n-1} \end{pmatrix}$$

● *A*是(*n* − 1)<sup>2</sup>阶块三对角阵,五条对角线上有非零元:它也是不可约对角占优的对称正定阵

# 系数矩阵A

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Causs Scidence ( ()

、蚁性埋化

收敛的充分条件及误差估i

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的验 近收敛速度

$$A = \begin{pmatrix} T_{n-1} + 2I_{n-1} & -I_{n-1} & & & & \\ -I_{n-1} & \ddots & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & -I_{n-1} & \\ & & -I_{n-1} & T_{n-1} + 2I_{n-1} \end{pmatrix}$$

- *A*是(*n* 1)<sup>2</sup>阶块三对角阵,五条对角线上有非零元;它也是不可约对角占优的对称正定阵
- 每个对角元的左、右各有两个非零元素,据离 对角元远近,分别对应对角元上下和左右邻居

# A的特征值和特征向量

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选代法

形式組

#### 収 致 往 珪 1

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

#### **英型问题**

Jacobi迭代法和G-S迭代法的制 近收敛速度 •  $T_{n-1}$ 的特征值为 $\lambda_j = 2 - 2\cos\frac{J\pi}{n}$ , 对应的单位特征向量为

$$z_j = \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\sin\frac{j\pi}{n}, \sqrt{\frac{2}{n}}\sin\frac{2j\pi}{n}, \dots, \sqrt{\frac{2}{n}}\sin\frac{(n-1)j\pi}{n}\right)^T$$

# A的特征值和特征向量

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi达代法

Gauss-Seidel迭代

形式推

収或性理N

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

英型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐近收敛速度

•  $T_{n-1}$ 的特征值为 $\lambda_j = 2 - 2\cos\frac{j\pi}{n}$ , 对应的单位特征向量为

$$z_j = \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\sin\frac{j\pi}{n}, \sqrt{\frac{2}{n}}\sin\frac{2j\pi}{n}, \dots, \sqrt{\frac{2}{n}}\sin\frac{(n-1)j\pi}{n}\right)^T$$

• 利用"拉直"操作,可以证明A的特征值 为 $\lambda_{pq} = \lambda_p + \lambda_q$ ,对应特征向量为 $z_p z_q^T$  "拉直"的 结果

### Jacobi迭代法

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel洪代

ma =h tib r'

#### 收敛性理说

收敛的充要条件

权政的允万承什及庆左伯订

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛进

T POTENTIALIZATION

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • 针对上述模型问题,Jacobi迭代法的迭代矩阵 为 $B = D^{-1}(L + U) = I - \frac{1}{4}A$ 

### Jacobi迭代法

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代剂

Gauss-Seidel选代

We will allow to

#### il*ler Aler I*HH- ITH

#### 收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估证

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

模型问题 lacobi选作注和G\_S选作注的

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度

- 针对上述模型问题,Jacobi迭代法的迭代矩阵 为 $B = D^{-1}(L + U) = I \frac{1}{4}A$
- B的对角元为0,其左右分别有两个非零元素 (值为1/4),对应于对角元的左右和上下邻居

### Jacobi迭代法

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代法

### (敛性理论

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的必 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度

- 针对上述模型问题,Jacobi迭代法的迭代矩阵 为 $B = D^{-1}(L + U) = I \frac{1}{4}A$
- B的对角元为0,其左右分别有两个非零元素 (值为1/4),对应于对角元的左右和上下邻居
- 所以迭代格式为

$$u_{ij}^{(k)} = \frac{1}{4} \left( u_{i+1,j}^{(k-1)} + u_{i-1,j}^{(k-1)} + u_{i,j+1}^{(k-1)} + u_{i,j-1}^{(k-1)} \right) + \frac{h^2}{4} f_{ij},$$
  

$$u_{i0} = u_{in} = u_{0j} = u_{nj} = 0, i, j = 1, \dots, n-1$$

### 线性方程组的古典铁

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐

• B的特征值为 $\mu_{pq} = 1 - \frac{1}{4} \lambda_{pq}$ 

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭化

Gauss-Seidel选代》

形式相

收敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

于3月又致逐段和刑廷収效迷。

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度

- B的特征值为 $\mu_{pq} = 1 \frac{1}{4} \lambda_{pq}$ 
  - 从而若 $\mu$ 为B的特征值,则 $-\mu$ 也是B的特征值

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选代

形式推

#### 収或性理N

収敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度

- B的特征值为 $\mu_{pq}=1-rac{1}{4}\lambda_{pq}$ 
  - 从而若 $\mu$ 为B的特征值,则 $-\mu$ 也是B的特征值
- 所以 $\rho(B) = \cos \frac{\pi}{n} = \cos h\pi$ , 从而可知渐近收敛速度为

$$R_{\infty}(B) = -\ln \rho(B) = -\ln \cos h\pi$$

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi达代法

Gauss-Seidel迭代

形式推

#### 仪或性埋u

収敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的I 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和新近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度

• B的特征值为
$$\mu_{pq} = 1 - \frac{1}{4} \lambda_{pq}$$

- 从而若 $\mu$ 为B的特征值,则 $-\mu$ 也是B的特征值
- 所以 $\rho(B) = \cos \frac{\pi}{n} = \cos h\pi$ , 从而可知渐近收敛速度为

$$R_{\infty}(B) = -\ln \rho(B) = -\ln \cos h\pi$$

● 从而当h → 0时, 我们有

$$R_{\infty}(B) \sim \frac{1}{2}\pi^2 h^2$$

# B对应的特征值问题

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代治

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代》

形式推

收敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

## 利益 ##

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • 我们这里要基于B的特征值问题给出 $L_1$ 的特征值

# B对应的特征值问题

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel迭代

形式推

#### 仅敛性埋饰

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度

- 我们这里要基于B的特征值问题给出 $L_1$ 的特征值
- B的特征值问题为 $B\eta = \mu\eta$

# B对应的特征值问题

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法
Gauss-Seidel迭代法

### 收敛性理论

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的

### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度

- 我们这里要基于B的特征值问题给出 $L_1$ 的特征值
- B的特征值问题为 $B\eta = \mu\eta$
- 回忆: *B*的对角元全是零,每个对角元的左、 右各有两个非零元素(值为1/4), 所以采用二 重指标表示*B*对应的特值问题为

$$\begin{cases} \mu \eta_{ij} = \frac{1}{4} \left( \eta_{i+1,j} + \eta_{i-1,j} + \eta_{i,j+1} + \eta_{i,j-1} \right) \\ \eta_{i0} = \eta_{in} = \eta_{0j} = \eta_{nj} = 0 \end{cases}$$

# $L_1$ 对应的特征值问题

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel洪代》

形式推

#### 収敛性埋1

收敛的充要杀

収敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛边

T 2011美术从图1支 1141月发机及

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 ● L<sub>1</sub>对应的特征值问题为

$$L_1\xi = \lambda\xi \to \lambda D\xi = \lambda L\xi + U\xi$$

# L<sub>1</sub>对应的特征值问题

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

Gauss-Seidel迭代

#### 收敛性理i

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 ● L<sub>1</sub>对应的特征值问题为

$$L_1\xi = \lambda\xi \to \lambda D\xi = \lambda L\xi + U\xi$$

● 所以采用二重指标表示L<sub>1</sub>的特征值问题为

$$\begin{cases} \lambda \xi_{ij} = \frac{1}{4} \left( \lambda \xi_{i-1,j} + \lambda \xi_{i,j-1} + \xi_{i,j+1} + \xi_{i+1,j} \right) \\ \xi_{i0} = \xi_{in} = \xi_{0j} = \xi_{nj} = 0 \end{cases}$$

### 单步线性定常迭代法

Jacobi达代法

Gauss-Seidel选代》

形式推

#### 收敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

T\*利权政逐及和制建权政迷!

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • 设 $\lambda \neq 0$ , 作变换 $\xi_{ij} = \lambda^{(i+j)/2} \eta_{ij}$  得

$$\lambda^{1+\frac{i+j}{2}}\eta_{ij} = \frac{1}{4} \left( \lambda^{1+(i+j-1)/2} \eta_{i-1,j} + \lambda^{1+(i+j-1)/2} \eta_{i,j-1} + \lambda^{(i+j+1)/2} \eta_{i+1,j} + \lambda^{(i+j+1)/2} \eta_{i,j+1} \right)$$
$$= \frac{1}{4} \lambda^{\frac{i+j+1}{2}} \left( \eta_{i-1,j} + \eta_{i,j-1} + \eta_{i+1,j} + \eta_{i,j+1} \right)$$

邓建松

### 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代》

#### 收敛性理说

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

かか 油 角

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • 设 $\lambda \neq 0$ , 作变换 $\xi_{ij} = \lambda^{(i+j)/2} \eta_{ij}$  得

$$\lambda^{1+\frac{i+j}{2}}\eta_{ij} = \frac{1}{4} \left( \lambda^{1+(i+j-1)/2} \eta_{i-1,j} + \lambda^{1+(i+j-1)/2} \eta_{i,j-1} + \lambda^{(i+j+1)/2} \eta_{i+1,j} + \lambda^{(i+j+1)/2} \eta_{i,j+1} \right)$$
$$= \frac{1}{4} \lambda^{\frac{i+j+1}{2}} (\eta_{i-1,j} + \eta_{i,j-1} + \eta_{i+1,j} + \eta_{i,j+1})$$

• 由边值为零,可知若 $\lambda$ 是 $L_1$ 的非零特征值当且 仅当 $\lambda^{1/2}$ 是B的非零特征值 邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代

形式推

#### 収敛性埋化

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的新 近收敛速度 • 设 $\lambda \neq 0$ , 作变换 $\xi_{ij} = \lambda^{(i+j)/2} \eta_{ij}$  得

$$\lambda^{1+\frac{i+j}{2}}\eta_{ij} = \frac{1}{4} \left( \lambda^{1+(i+j-1)/2} \eta_{i-1,j} + \lambda^{1+(i+j-1)/2} \eta_{i,j-1} + \lambda^{(i+j+1)/2} \eta_{i+1,j} + \lambda^{(i+j+1)/2} \eta_{i,j+1} \right)$$
$$= \frac{1}{4} \lambda^{\frac{i+j+1}{2}} (\eta_{i-1,j} + \eta_{i,j-1} + \eta_{i+1,j} + \eta_{i,j+1})$$

- 由边值为零,可知若 $\lambda$ 是 $L_1$ 的非零特征值当且 仅当 $\lambda^{1/2}$ 是B的非零特征值
- 因此L<sub>1</sub>的特征值非负

# G-S迭代法的渐近收敛速度

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭化

Gauss-Seidel洪代》

形式相

#### 收敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度

### • 从而我们可知

$$R_{\infty}(L_1) = -\ln \rho(L_1) = -2\ln \rho(B) \sim \pi^2 h^2,$$
  
 $h \to 0$ 

# G-S迭代法的渐近收敛速度

### 线性方程组的古典铁

Jacobi 迭代法和G-S迭代法的渐

• 从而我们可知

$$R_{\infty}(L_1) = -\ln \rho(L_1) = -2\ln \rho(B) \sim \pi^2 h^2,$$
  
 $h \to 0$ 

● 这说明G-S迭代法的渐近收敛速度是Jacobi迭代 法的渐近收敛速度的两倍

# 超松弛迭代法

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel迭代》

形才维

收敛性理i

收敛的充要多

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度 • 这是一种新的迭代法

### 超松弛迭代法

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代流

Jacobi迭代

Gauss-Seidel迭代》

形式组

收敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

acobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度 • 这是一种新的迭代法

• 它是G-S迭代法的引申和推广

## 超松弛迭代法

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭化

Gauss-Seidel迭代法

形式推

#### 収敛性埋1

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的I 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

yacobi迭代法和G-S迭代法的消 近收敛速度

- 这是一种新的迭代法
- 它是G-S迭代法的引申和推广
- 也可以看作是G-S迭代法的加速

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选代》

形式推

#### 収敛性埋1

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

横刑品關

Jacobi迭代法和G-S迭代法的沟近收敛速度

• 在迭代格式中令 $x_{k+1} - x_k = \Delta x$ , 即 $x_{k+1} = x_k + \Delta x$ 

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法 形才推广

#### 收敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

- 平均收敛速度和渐近收敛速度
- Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度

- 在迭代格式中令 $x_{k+1} x_k = \Delta x$ , 即 $x_{k+1} = x_k + \Delta x$
- 这可以看作是在向量 $x_k$ 上加上修正 项 $\Delta x$ 得到 $x_{k+1}$

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

by 30 de 40 de 10 de 40 10 de 40 de

収数圧圧

收敛的充分条件及误差估计

幼性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的清 近收敛速度

- 在迭代格式中令 $x_{k+1} x_k = \Delta x$ , 即 $x_{k+1} = x_k + \Delta x$
- 这可以看作是在向量 $x_k$ 上加上修正 项 $\Delta x$ 得到 $x_{k+1}$
- 对于已有的迭代格式, $\Delta x$ 是由格式完全确定的

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代》

形式推广

收敛性理证

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的 敛性

**收敛速度** 

平均收敛速度和新近收敛速度 模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的新

- 在迭代格式中令 $x_{k+1} x_k = \Delta x$ , 即 $x_{k+1} = x_k + \Delta x$
- 这可以看作是在向量 $x_k$ 上加上修正 项 $\Delta x$ 得到 $x_{k+1}$
- 对于已有的迭代格式, $\Delta x$ 是由格式完全确定的
- 我们可以在修正项的前面加上一个参数ω以得到松弛迭代格式

### G-S迭代法对应的松弛格式

线性方程组的古典铁

• G-S 迭代格式:

$$x_{k+1} = D^{-1}Lx_{k+1} + D^{-1}Ux_k + D^{-1}b$$

### G-S迭代法对应的松弛格式

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭位

Gauss-Seidel迭代法

形式推

#### 収蚁性理

収级的允安余

収敛的允分录件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度 • G-S迭代格式:

$$x_{k+1} = D^{-1}Lx_{k+1} + D^{-1}Ux_k + D^{-1}b$$

$$\Delta x = D^{-1}Lx_{k+1} + (D^{-1}U - I)x_k + D^{-1}b$$

## G-S迭代法对应的松弛格式

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭

Gauss-Seidel洪代)

形式推

#### 又敛性埋花

收敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • G-S迭代格式:

$$x_{k+1} = D^{-1}Lx_{k+1} + D^{-1}Ux_k + D^{-1}b$$

- $\Delta x = D^{-1}Lx_{k+1} + (D^{-1}U I)x_k + D^{-1}b$
- 松弛迭代格式

$$x_{k+1} = x_k + \omega \Delta x$$
  
=  $(1 - \omega)x_k + \omega(D^{-1}Lx_{k+1} + D^{-1}Ux_k + D^{-1}b)$ 

#### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代》

Gauss-Saidal读件过

形式推

#### 收敛性理说

.....

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的影 幼性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

DC.35 F VA2

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度

#### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代剂

Gauss-Saidal#4

Gauss-Seidel迭代

#### 又敛性理说

收敛的充要条件

収级的允分录件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 近此效速度 • ω叫做松弛因子

• 当 $\omega > 1$ 时,对应的格式叫做<mark>超松弛迭代法</mark>,简记为SOR迭代法

#### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代

#### N. M. L.

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 近收敛速度

- 当 $\omega > 1$ 时,对应的格式叫做<mark>超松弛迭代法</mark>,简记为SOR迭代法
  - SOR Successive Over–Relaxation

#### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

### 单步线性定常迭代法

Jacobi达代法 Gauss-Seidel迭代法

#### |佐舎性理:

#### 收敛的东票条件

收敛的充分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的

#### **佐舎連**

平均收敛速度和新近收敛速! 模型问题

模型网题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的i 近收敛速度

- 当 $\omega > 1$ 时,对应的格式叫做<mark>超松弛迭代法</mark>,简记为SOR迭代法
  - SOR Successive Over–Relaxation
- 当 $\omega$  < 1时,对应的格式叫做低松弛迭代法

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代法

收敛性理论

收敛的充要条件 收敛的充分条件及误差估:

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

女 敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 lacobi迭代法和G-S迭代法的渐

- 当 $\omega > 1$ 时,对应的格式叫做超松弛迭代法,简记为SOR迭代法
  - SOR Successive Over–Relaxation
- 当 $\omega$  < 1时,对应的格式叫做低松弛迭代法
- 当 $\omega = 1$ 时,对应的格式就是G-S迭代法

# 迭代矩阵

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代剂

Gauss-Seidel迭代

形式推

#### 仅敛性埋i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 近收敛速度 • 如果 $(I - \omega D^{-1}L)^{-1}$ 存在,松弛迭代格式可以写为

$$x_{k+1} = L_{\omega}x_k + \omega(D - \omega L)^{-1}b$$

其中

$$L_{\omega} = (D - \omega L)^{-1}((1 - \omega)D + \omega U)$$

称为松弛迭代格式的迭代矩阵

# 迭代矩阵

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代流

Gauss-Seidel达代

#### **协**幼性理;

收敛的充要条件

以致的允分条件及误差估计 Jacobi迭代法和G-S迭代法的

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题 Jacobi选代法和G-S选代法的湖 近收敛速度 • 如果 $(I - \omega D^{-1}L)^{-1}$ 存在,松弛迭代格式可以写为

$$x_{k+1} = L_{\omega}x_k + \omega(D - \omega L)^{-1}b$$

其中

$$L_{\omega} = (D - \omega L)^{-1}((1 - \omega)D + \omega U)$$

称为松弛迭代格式的迭代矩阵

• 注意:  $(D - \omega L)^{-1}$ 为下三角矩阵,  $((1 - \omega)D + \omega U$ 为上三角矩阵

# 收敛定理

线性方程组的古典迭 代解法

单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel读代

Gauss-Seidel选作

収蚁性理に

収敛的充要条件

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

邓建松

### 定理

SOR迭代法收敛的充分必要条件是

$$\rho(L_{\omega}) < 1$$

### 定理

SOR选代法收敛的必要条件是 $0 < \omega < 2$ 

第一个定理显然。下面证明第二个定理

# $0 < \omega < 2$ 的证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Sauss-Seidel洪代法

100 =0° +00:

#### 收敛性理说

Alle Ale Ale also seed .

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度 • 迭代法收敛,所以 $\rho(L_{\omega}) < 1$ 

## $0 < \omega < 2$ 的证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel选代法

形式推

#### 仅敛性埋7

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

ARCHITECTURE

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度

- 迭代法收敛, 所以 $\rho(L_{\omega}) < 1$
- 若 $\lambda_i$ 为 $L_\omega$ 的n个特征值,则

$$|\det L_{\omega}| = |\lambda_1 \cdots \lambda_n| < 1$$

## $0 < \omega < 2$ 的证明

#### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

#### 收敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度 • 迭代法收敛, 所以 $\rho(L_{\omega}) < 1$ 

• 若 $\lambda_i$ 为 $L_\omega$ 的n个特征值,则

$$|\det L_{\omega}| = |\lambda_1 \cdots \lambda_n| < 1$$

• 注意到

$$L_{\omega} = (I - \omega D^{-1}L)^{-1}((1 - \omega)I + \omega D^{-1}U),$$
  

$$\det((1 - \omega)I + \omega D^{-1}U) = (1 - \omega)^{n},$$
  

$$\det(I - \omega D^{-1}L)^{-1} = 1$$

邓建松

#### 单步线性定常读代别

Iscobi洪代注

Communication (Bight

100 =2° 480 s

#### 收敛性理论

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 幼性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

横刑品腳

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

### • 从而有

$$|\det L_{\omega}| = |(1-\omega)^n| < 1$$

### 线性方程组的古典迭

### • 从而有

$$|\det L_{\omega}|=|(1-\omega)^n|<1$$

• 即 $|1 - \omega| < 1$ ,也就是 $0 < \omega < 2$ 

邓建松

#### 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法
Gauss-Seidel迭代法

Gauss-Seidel迭代》

形式推

#### 收敛性理

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的验 近收敛速度 • 从而有

$$|\det L_{\omega}| = |(1-\omega)^n| < 1$$

- 即 $|1 \omega| < 1$ ,也就是 $0 < \omega < 2$
- 这个结果说明,要使SOR迭代法收敛,必须选取收敛因子 $\omega \in (0,2)$

# 充分条件:对角占优

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭化

Cause Saidalit-/Pi

TEX -- (N - 44)-

#### 女敛性理论

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 近收敛速度

### 定理

若系数矩阵A是严格对角占优的,或者不可约对角占优的,且松弛因子 $\omega \in (0,1]$ ,则SOR迭代法收敛

## 证明关键

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel洪代法

形式推

#### 收敛性理论

收敛的充要条件

収敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛进

Jacobi迭代法和G-S迭代法的:

•  $\mathfrak{P}\lambda$ ,  $|\lambda| \geqslant 1$ ,

$$\lambda I - L_{\omega} = (D - \omega L)^{-1} ((\lambda + \omega - 1)D - \lambda \omega L - \omega U)$$

## 证明关键

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代》

Jacobi迭化

Gauss-Seidel选代》

形式推

#### 权蚁往理化

收敛的充要条件

収敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的

•  $\mathfrak{P}\lambda$ ,  $|\lambda| \geqslant 1$ ,

$$\lambda I - L_{\omega} = (D - \omega L)^{-1} ((\lambda + \omega - 1)D - \lambda \omega L - \omega U)$$

• 根据三角不等式:

$$|\lambda + \omega - 1| \ge |\lambda| - (1 - \omega)$$
  
=  $|\lambda|\omega + (|\lambda| - 1)(1 - \omega) \ge |\lambda|\omega$ 

# 证明关键

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代》

Jacobi迭代》

Gauss-Seidel迭代》

1024141

#### 权蚁住垤化

以双的允妥来针

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

x主四应 Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度 •  $\mathbb{R}\lambda$ ,  $|\lambda| \geqslant 1$ ,

$$\lambda I - L_{\omega} = (D - \omega L)^{-1} ((\lambda + \omega - 1)D - \lambda \omega L - \omega U)$$

• 根据三角不等式:

$$|\lambda + \omega - 1| \ge |\lambda| - (1 - \omega)$$
$$= |\lambda|\omega + (|\lambda| - 1)(1 - \omega) \ge |\lambda|\omega$$

• 所以 $D - \omega L$ ,  $(\lambda + \omega - 1)D - \lambda \omega L - \omega U$  都是严格对角占优的,或者不可约对角占优的,从而是非奇异的

# 充分条件: 对称正定

线性方程组的古典铁

### 定理

若系数矩阵A是实对称的正定矩阵, 当 $0 < \omega < 2$ 时,SOR方法收敛

根据该定理可知,当A对称正定时,G-S迭 代法收敛

## 证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代

形式推

#### 攵敛性理说

收敛的充要条件

収敛的允分录件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

T POTK REAL REAL PROPERTY OF THE PROPERTY OF T

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近收敛速度 • 设 $\lambda \geq L_{\omega}$ 的任一特征值(可以是复数),x为对应的特征向量,则(注意 $L^{T} = U$ )

$$((1 - \omega)D + \omega L^{T})x = \lambda(D - \omega L)x$$

## 证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代》

Gauss-Seidel迭代法 形式推广

#### 收敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的清 近收敛速度 • 设 $\lambda$ 是 $L_{\omega}$ 的任一特征值(可以是复数),x为对应的特征向量,则(注意 $L^{T}=U$ )

$$((1 - \omega)D + \omega L^{T})x = \lambda(D - \omega L)x$$

● 左乘x的共轭转置向量x\*:

$$x^*((1-\omega)D + \omega L^T)x = \lambda x^*(D - \omega L)x$$

## 证明

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代治

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代法

#### 收敛性理证

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

模型何题
Jacobi迭代法和G-S迭代法的游

• 设 $\lambda$ 是 $L_{\omega}$ 的任一特征值(可以是复数),x为对应的特征向量,则(注意 $L^{T}=U$ )

$$((1 - \omega)D + \omega L^{T})x = \lambda (D - \omega L)x$$

● 左乘x的共轭转置向量x\*:

$$x^*((1-\omega)D + \omega L^T)x = \lambda x^*(D - \omega L)x$$

•  $\Leftrightarrow x^*Dx = \delta, x^*Lx = \alpha + i\beta, M$  $f(x^*L^Tx) = \alpha - i\beta$ 

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel洪代法

形式推

#### 收敛性理说

.....

收敛的充分条件及误差估

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度

### • 我们有

$$(1 - \omega)\delta + \omega(\alpha - i\beta) = \lambda(\delta - \omega(\alpha + i\beta))$$

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选代》

形式排

#### 収敛性埋

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的沟 近收敛速度 • 我们有

$$(1 - \omega)\delta + \omega(\alpha - i\beta) = \lambda(\delta - \omega(\alpha + i\beta))$$

• 两边取模得到

$$|\lambda|^2 = \frac{((1-\omega)\delta + \omega\alpha)^2 + \omega^2\beta^2}{(\delta - \omega\alpha)^2 + \omega^2\beta^2}$$

我们有

$$(1 - \omega)\delta + \omega(\alpha - i\beta) = \lambda(\delta - \omega(\alpha + i\beta))$$

两边取模得到

$$|\lambda|^2 = \frac{((1-\omega)\delta + \omega\alpha)^2 + \omega^2\beta^2}{(\delta - \omega\alpha)^2 + \omega^2\beta^2}$$

右侧的分子和分母相减,得 

#### 单步线性定常迭代法

Gauss-Seidel迭代流

### iller Afrikk-1111 (

收敛的充分条件及误差估

Jacobi迭代法和G-S迭代法的影 敛性

#### 收敛速度

模型问题 Jacobi迭代法和G-S迭代法的影 近收敛速度 我们有

$$(1 - \omega)\delta + \omega(\alpha - i\beta) = \lambda(\delta - \omega(\alpha + i\beta))$$

• 两边取模得到

$$|\lambda|^2 = \frac{((1-\omega)\delta + \omega\alpha)^2 + \omega^2\beta^2}{(\delta - \omega\alpha)^2 + \omega^2\beta^2}$$

- 右侧的分子和分母相减,得 到 $\omega\delta(\delta-2\alpha)(\omega-2)$
- 当A正定时 $\delta > 0$ ,  $\delta 2\alpha = x^*Ax > 0$ , 所以 当 $0 < \omega < 2$ 时 $|\lambda| < 1$ , 即SOR迭代法收敛

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代法

Jacobi迭代》

Gauss-Seidel读代》

形式推

收敛性理论

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收 敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的; 近收敛速度 • SOR迭代法的谱半径依赖于ω

### 线性方程组的古典铁

- SOR迭代法的谱半径依赖于ω
- 如何选取恰当的ω, 从而使得收敛速度最快?

#### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代剂

Jacobi达代法

Gauss-Seidel迭代

形式推

#### 仅 敛 性 埋 ii

收敛的充要条件

収敛的允分余件及误差值で

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的》 近收敛速度

- SOR迭代法的谱半径依赖于ω
- 如何选取恰当的ω, 从而使得收敛速度最快?
- 为此我们考虑特征值问题 $L_{\omega}x = \lambda x$ , 即

$$((\lambda - 1 + \omega)D - \lambda \omega L - \omega U)x = 0$$

### 线性方程组的古典铁

- SOR迭代法的谱半径依赖干ω
- 如何选取恰当的ω,从而使得收敛速度最快?
- 为此我们考虑特征值问题 $L_{i}x = \lambda x$ . 即

$$((\lambda - 1 + \omega)D - \lambda \omega L - \omega U)x = 0$$

• 回忆:  $L_{\omega}$ 的所有特征值相乘等于 $(1-\omega)^n$ , 所以 当 $\omega$  ≠ 1时无零特征值

#### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel读代

100 = P + 60

#### 收敛性理说

收敛的充要条件

収敛的允分余件及误差值计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的浏 近收敛速度 • 对于模型问题,上述问题为

$$(\lambda + \omega - 1)u_{ij} = \frac{\omega}{4}(\lambda u_{i-1,j} + \lambda u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1})$$
  
$$u_{i0} = u_{in} = u_{0j} = u_{nj} = 0,$$

### 线性方程组的古典铁

对于模型问题,上述问题为

$$(\lambda + \omega - 1)u_{ij} = \frac{\omega}{4}(\lambda u_{i-1,j} + \lambda u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1})u_{i0} = u_{in} = u_{0j} = u_{nj} = 0,$$

• 下面分两步讨论问题:

#### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭化

Carra Catalant (In

形式组

#### 女敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消 近收敛速度 • 对于模型问题,上述问题为

$$(\lambda + \omega - 1)u_{ij} = \frac{\omega}{4}(\lambda u_{i-1,j} + \lambda u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1})$$
  
$$u_{i0} = u_{in} = u_{0j} = u_{nj} = 0,$$

- 下面分两步讨论问题:
  - B与Lω的特征值之间的关系

#### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Cause Saidalith/Pi

形式組

#### 女敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的影 敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度 • 对于模型问题,上述问题为

$$(\lambda + \omega - 1)u_{ij} = \frac{\omega}{4}(\lambda u_{i-1,j} + \lambda u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1})$$
  
$$u_{i0} = u_{in} = u_{0j} = u_{nj} = 0,$$

- 下面分两步讨论问题:
  - $B与L_{\omega}$ 的特征值之间的关系
  - $\rho(L_{\omega})$ 随 $\omega$ 变化的情况

## B与L。的特征值之间的关系

#### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代

Gauss-Seidel选作

形式推

#### 收敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的运行法的运行法的

• 当 $\lambda \neq 0$ 时,作变换 $u_{ij} = (\pm \lambda^{1/2})^{i+j} v_{ij}$ ,则有

$$\mu v_{ij} - \frac{1}{2} (v_{i-1,j} + v_{i,j-1} + v_{i+1,j} + v_{i,j+1}) = 0,$$

其中
$$\mu = \pm \frac{\lambda + \omega - 1}{\omega \lambda^{1/2}}$$

# $B与L_{\omega}$ 的特征值之间的关系

线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

单步线性定常迭代剂

Jacobi达代法

Gauss-Seidel迭代

形式推

收敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度 模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的渐 近收敛速度 • 当 $\lambda \neq 0$ 时,作变换 $u_{ij} = (\pm \lambda^{1/2})^{i+j} v_{ij}$ ,则有

$$\mu v_{ij} - \frac{1}{2}(v_{i-1,j} + v_{i,j-1} + v_{i+1,j} + v_{i,j+1}) = 0,$$

其中
$$\mu = \pm \frac{\lambda + \omega - 1}{\omega \lambda^{1/2}}$$

• 当 $\omega \neq 1$ 时,若 $\lambda \in L_{\omega}$ 的特征值,则由

$$(\lambda + \omega - 1)^2 = \mu^2 \omega^2 \lambda$$

确定的两个 $\mu$ 都是B的特征值;反之亦然

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

e e i i i per dinae

100 = 2° 485:

#### 收敛性理证

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的i 近收分速度 • 当 $\omega = 1$ 时,前式简化为 $\lambda^2 = \mu^2 \lambda$ 

邓建松

#### 单步线性定常迭代流

Jacobi迭代

Carra Carra (de 49)

TTV -- IS 440

#### 收敛性理证

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的沟 近收敛速度

- 当 $\omega = 1$ 时,前式简化为 $\lambda^2 = \mu^2 \lambda$
- 当B的特征值为 $\pm \mu_i$ 时,对应于 $L_1$ 的特征值为0和 $\mu_i^2$

邓建松

#### 单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel迭代》

#### 收敛性理i

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的清 近收敛速度

- 当 $\omega = 1$ 时,前式简化为 $\lambda^2 = \mu^2 \lambda$
- 当B的特征值为 $\pm \mu_i$ 时,对应于 $L_1$ 的特征值为0和 $\mu_i^2$
- 回忆:  $若\mu \in B$ 的特征值,则 $-\mu$ 也是B的特征值

# $\rho(L_{\omega})$ 随 $\omega$ 变化的情况

### 线性方程组的古典迭 代解法

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobio I (II)

Gauss-Seidel迭代

形式推

#### 【敛性埋论

收敛的充要条件

収敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速

Jacobi迭代法和G-S迭代法的海 近此分钟度 • 设 $0 \le \mu < 1$ 是B的一个特征值, $0 < \omega < 2$ ,则由方程

$$\lambda + \omega - 1 = \pm \mu \omega \lambda^{1/2}$$

可得 $L_{\omega}$ 的两个特征值分别是

$$\lambda_{+}(\omega,\mu) = \left(\frac{\mu\omega}{2} + \sqrt{\left(\frac{\mu\omega}{2}\right)^{2} - (\omega - 1)}\right)^{2},$$

$$\lambda_{-}(\omega,\mu) = \left(\frac{\mu\omega}{2} - \sqrt{\left(\frac{\mu\omega}{2}\right)^2 - (\omega - 1)}\right)^2,$$

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel选代法

形式推

#### 收敛性理论

收敛的充要条

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

400 and 210 and

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度 • 为了研究 $\rho(L_{\omega})$ 随 $\omega$ 的变化,我们考虑

$$M(\omega, \mu) = \max(|\lambda_{+}(\omega, \mu)|, |\lambda_{-}(\omega, \mu)|)$$

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi洪代法

Gauss-Seidel选代法

形式推

#### 欠敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的 近收敛速度 • 为了研究 $\rho(L_{\omega})$ 随 $\omega$ 的变化,我们考虑

$$M(\omega, \mu) = \max(|\lambda_{+}(\omega, \mu)|, |\lambda_{-}(\omega, \mu)|)$$

• 分析细节忽略

邓建松

单步线性定常迭代剂

Jacobi迭代法 Gauss-Seidel迭代

#### 收敛性理证

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的消近收敛速度

• 为了研究 $\rho(L_{\omega})$ 随 $\omega$ 的变化,我们考虑

$$M(\omega, \mu) = \max(|\lambda_{+}(\omega, \mu)|, |\lambda_{-}(\omega, \mu)|)$$

- 分析细节忽略
- 结论: 随着 $\omega$ 从0开始增加, $\rho(L_{\omega})$ 减少,直至

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(B)^2}}$$

 $\mathrm{H}\rho(L_{\omega})$ 达到极小,然后开始变大。这个 $\omega$ 称为最佳松弛因子

#### 单步线性定常迭代法

Jacobi迭代法

Gauss-Seidel洪代法

形式推

#### 收敛性理说

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度

Jacobi迭代法和G-S迭代法的运 近收敛速度 当ω取上述最佳松弛因子时,我们有

$$egin{aligned} R_{\infty}(L_{\omega}) &= -\ln 
ho(L_{\omega}) \ &= -\ln rac{1-\sqrt{1-
ho(B)^2}}{1+\sqrt{1-
ho(B)^2}} \ &= -\ln rac{1-\sin h\pi}{1+\sin h\pi} \sim 2h\pi, h 
ightarrow 0 \end{aligned}$$

邓建松

#### 单步线性定常迭代法

C C : L DE (B)

Gauss-Seidel迭代法

#### 仅数 山土 /

收敛的充要条件

收敛的充分条件及误差估计

Jacobi迭代法和G-S迭代法的收敛性

#### 收敛速度

平均收敛速度和渐近收敛速度模型问题

Jacobi迭代法和G-S迭代法的第 近收敛速度 • 当ω取上述最佳松弛因子时,我们有

$$egin{aligned} R_{\infty}(L_{\omega}) &= -\ln 
ho(L_{\omega}) \ &= -\ln rac{1-\sqrt{1-
ho(B)^2}}{1+\sqrt{1-
ho(B)^2}} \ &= -\ln rac{1-\sin h\pi}{1+\sin h\pi} \sim 2h\pi, h 
ightarrow 0 \end{aligned}$$

SOR迭代法要比Jacobi迭代法和G-S迭代法快得多!