

test

游瀚哲

2023 年 9 月 28 日

题目

线性方程组的敏度分析
与消去法的舍入误差分析
邓建松

向量与矩阵的范数

线性方程组的敏度分析

基本运算的舍入误差分析

列主元Gauss消去法的舍入误差分析

计算解的精度估计和迭代改进

矩阵范数的性质及等价性

- $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\|A\|_2$
- $\max_{i,j} |a_{ij}| \leq \|A\|_2 \leq n \max_{i,j} |a_{ij}|$
- $\|A\|_\infty / \sqrt{n} \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_\infty$
- $\|A\|_1 / \sqrt{n} \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1$

图 1: test

$$\begin{aligned} 1. & \|A\|_F = \text{tr}(A^T A)^{1/2} = (\sum_{i=1}^m \sigma_i^2)^{1/2}, \|A\|_2 = \max_i \sigma_i \\ \Rightarrow & \|A\|_2^2 = \max_i \sigma_i^2 \leq \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 = \|A\|_F^2 \\ \Rightarrow & \|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 \leq n \max_i \sigma_i^2 = n \|A\|_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. & \|A\|_2 \leq \|A\|_F = (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2)^{1/2} \leq n \max_{i,j} |a_{ij}| \\ & \|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 \\ & \text{设 } a_{mn} \text{ 取到 } |a_{ij}| \text{ 的最大值} \\ \Rightarrow & \|A\|_2 \geq \|Ae_n\|_2 = (\sum_{i=1}^n a_{in}^2)^{1/2} \geq |a_{mn}| \end{aligned}$$

$$3. \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$$

$$\begin{aligned}
& \|Ax\|_\infty \leq \|Ax\|_2 \leq \|A\|_2 \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_2 \|x\|_\infty, \forall x \\
& \exists \|x\|_\infty = 1, s.t. \|A\|_\infty = \|Ax\|_\infty \leq \sqrt{n} \|A\|_2 \\
& \|Ax\|_2 \leq \sqrt{n} \|Ax\|_\infty \leq \sqrt{n} \|A\|_\infty \|x\|_\infty \leq \sqrt{n} \|A\|_\infty \|x\|_2, \forall x \\
& \exists \|x\|_2 = 1, s.t. \|A\|_2 = \|Ax\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4. \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2, (\text{cauchy 不等式}) \\
& \|Ax\|_1 \leq \sqrt{n} \|Ax\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_2 \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_2 \|x\|_1, \forall x \\
& \exists \|x\|_1 = 1, s.t. \|A\|_1 = \|Ax\|_1 \leq \sqrt{n} \|A\|_2 \\
& \|Ax\|_2 \leq \|Ax\|_1 \leq \|A\|_1 \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|A\|_1 \|x\|_2, \forall x \\
& \exists \|x\|_2 = 1, s.t. \|A\|_2 = \|Ax\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1 \\
& \text{或在题 3 中取 } A = A^T, \text{ 由于转置不改变 2 范数, 得证。}
\end{aligned}$$