数值代数习题课讲义 1

游瀚哲

2023 年 11 月 5 日

一、书面作业讲解

1、正定性：由于 $a_i > 0$ 可知其良定，进一步由定义可知。

齐次性：直接代入计算可知。

三角不等式：由 cauchy-schwarz 不等式：$v(x+y) = (\sum_{i=1}^n a_i(x_i+y_i)^2)^{1/2} \le \sum_{i=1}^n a_i(x_i)^2 + \sum_{i=1}^n a_i(y_i)^2 + 2(\sum_{i=1}^n a_i(x_i)^2 \sum_{i=1}^n a_i(y_i)^2)^{1/4}$

2、类似 1，cauchy-schwarz 不等式的取等条件即为各分量成比例。而原问题等号成立还需要 x、y 同方向。

3、直接代入定义计算即可

4、$||AB||_F^2 = \sum_{i=1}^n ||Ab_i||_2^2 \le \sum_{i=1}^n ||b_i||_2^2||A||_2^2 = ||B||_F^2||A||_2^2$

对 AB 的转置类似考虑，由于转置不改变范数，得证。

5、正定、齐次：由定义直接得。

三角不等式：$nmax_{ij}|a_{ij}+b_{ij}| \le nmax_{ij}(|a_{ij}|+|b_{ij}|) \le nmax_{ij}|a_{ij}| + nmax_{ij}|b_{ij}|$

相容性：$nmax_{ij}|a_{ij}|nmax_{ij}|b_{ij}| \ge nmax_{ij}|\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}|$

v 不满足相容：n 维时两个全 1 矩阵的乘积为全 n 矩阵，当 n > 1 时即可知 v 不满足相容性。

6、当：由 A 正定，有 Cholesky 分解 $A = LL_T, f = ||Lx||_2$，且 L 可逆。

齐次性直接计算可知。

由 A 正定知正定性满足

三角不等式：$f(x+y) = ||L(x+y)||_2 \le ||Lx||_2 + ||Ly||_2 = f(y) + f(x)$

7、正定性：首先 $||Ax|| \ge 0$，由 rank A = n 可知方程组 Ax = 0 只有零解。$||Ax|| = 0 \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$

齐次性：$||\lambda x||_A = ||A\lambda x||x = \lambda||Ax|| = \lambda||x||_A$

三角不等式：$||x||_A + ||x||_A = ||Ax|| + ||Ay|| \le ||A(x+y)|| = ||x+y||_A$

8、$I = (I-A)(I-A)^{-1} = (I-A)^{-1} - A(I-A)^{-1}$ $1 = ||(I-A)^{-1} - A(I-A)^{-1}|| \ge ||(I-A)^{-1}|| - ||A(I-A)^{-1}|| \ge (1-||A||)||(I-A)^{-1}||$

9、由于 A 可逆，$\{Ax|x \in \mathbf{R}^n\} = \mathbf{R}^n$，$\Rightarrow ||A^{-1}|| = max_{||x||=1}||A^{-1}x|| = max_{||Ax||=1}||A^{-1}Ax|| = max_{||Ax||=1}||x|| = max_{||Ax||\neq 0}\frac{||x||}{||Ax||} = max_{x\neq 0}\frac{||x||}{||Ax||} = (min_{x\neq 0}\frac{||Ax||}{||x||})^{-1} = (min_{||x||=1}||Ax||)^{-1}$

10、由 L 下三角，U 上三角可知 $a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} l_{ik}u_{kj}$ 而 $l_{ii} = 1 \Rightarrow a_{ij} - u_{ij} = \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}$，对每个 j 成立，则对应的向量形式也成立。

归纳证明 $||u_i^T||_\infty \le 2^{i-1}||A||_\infty$

将此式两边取一范数后，利用三角不等式与 $|l_{ij}| \le 1$

$||u_1^T||_1 = ||a_1^T||_1 \le ||A||_\infty$

$||u_i^T||_1 = ||a_i^T - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_k||_1 \le (\sum_{k=1}^{i-1} 2^{k-1} + 1)||A||_\infty = 2^{i-1}||A||_\infty$

11、(1) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 375 & -187 \\ -376 & 187.5 \end{pmatrix}$

$\kappa_\infty(A) = (752+750)(376+187.5) = 846377$

(2) $b = (749, 1502)^T, x = (1,1)^T$; $b = (750, 1504)^T, x = (2,0)^T$

(3) $b = (0,-2)^T, x = (374, -375)^T$; $b = (749, 150)^T, x = (375, -374)^T$

12、$||I||||I|| \ge ||I|| \Rightarrow ||I|| \ge 1, \kappa(A) = ||A||||A^{-1}|| \ge ||AA^{-1}|| \ge 1$

13、$(A+E)^{-1} - A^{-1} = (A+E)^{-1}(I + (A+E)A^{-1}) = -(A+E)^{-1}EA^{-1}$

$\Rightarrow ||(A+E)^{-1} - A^{-1}|| = ||-(A+E)^{-1}EA^{-1}|| \le ||(A+E)^{-1}||||E||||A^{-1}||$

14、由于 $fl(\prod_{i=1}^{n} x_i) = \prod_{i=1}^{n} x_i \prod_{i=2}^{n}(1+\delta_i)$

$\Rightarrow \epsilon \ge \prod_{i=2}^{n}(1+\delta_i) - 1 \ge 1.01(n-1)u$

15、记 $S_k = fl(\sum_{i=1}^{k} x_i)$

则有 $fl(S_{k+1}) = (S_k + x_{k+1})(1+\delta_{k+1})$

逐项比较对应的系数可知结论。

16、设 a_i^T 为 A 的第 i 个行向量，

$fl(Ax)_i = fl(a_i^T x) = \sum_{j=2}^{n} a_{ij}x_j(1+\lambda_i)\prod_{k=j}^{n}(1+\delta_k) + a_{1j}x_j(1+\lambda_1)\prod_{k=2}^{n}(1+\delta_k)$, 逐项比较

对应的系数可知结论。。

17、类似 16 题的误差分析。最大误差在第一项取到

$fl(x^Tx)/(x^Tx) \le (1+u)^n$ 即证

18、

18. 分类讨论是否交换列主元。

首先由选列主元过程可知 $|l_{ij}| \le 1$ $i \ne j$ 时不等号严格成立

由于三对角性质，每次列主元消去只改变下一行的元素，故对每次列主元消去归纳 $|u_{ii}| \le 2max_i|a_{ii}|, |u_{ij}| \le max_{ij}|a_{ij}|$。

无论是否交换主元，主元下一行第一个元素必被约化为 0，第二个元素 $|u_{k+1,k+1}| \le |a_{k+1,k+1}| + |l_{k+1,k}u_{k,k+1}| \le 2max_i|a_{ii}|$。第三个元素 $|u_{k+1,k+2}| \le |l_{k+1,k}u_{k,k+2}| \le max_i|a_{ii}|$。

19、由第一章习题可知对角优性质在高斯消去过程中保持。

考虑一次高斯消去。

$\sum_{i=1}^{n-1} \widetilde{a}_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1}(|a_{i+1,j+1}| + |\frac{1}{a_{11}}a_{1,j+1}a_{i+1,1}|) \le \sum_{i=1}^{n-1}(|a_{i+1,j+1}| + |a_{1,j+1}|) \le \sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|$

$\Rightarrow \widetilde{u}_{1j} \le ||\widetilde{A}||_1 \le ||A||_1 \le 2max_{ij}|a_{ij}|$

20、由算法过程可以发现，由于每个元素所在的行列最多还有 m 个其他元素，计算 L, U 的过程中每个元素至多产生 m 次减法、m 次乘法与 1 次除法的误差，类似 16 题可知误差界为 $\prod_{k=1}^{m}(1+\delta_k)(1+\delta)(1+\lambda)$, 类似引理 2.4.1 有 $|e_{ij}| \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1.01(2m+4)u}{1-1.01(m+2)u}|\widetilde{l}_{ij}||\widetilde{u}_{ij}| \le \sum_{k=1}^{n}10.21u|\widetilde{l}_{ik}||\widetilde{u}_{kj}|$。

21、由算法过程可以发现，计算 L 的过程中每个元素至多产生 n 次减法、n 次乘法与 1 次除法或开方的误差，类似 16 题可知误差界为 $\prod_{k=1}^{n}(1+\delta_k)(1+\delta)(1+\lambda)$ ，类似引理 2.4.1 $|e_{ij}| \le \sum_{k=1}^{n}2.05nu|\widetilde{l}_{ik}||\widetilde{l}_{jk}|$。

二、程序作业讲解

本次作业中，Hilbert 矩阵极其病态, 当阶数增大时条件数快速增长。

但该方法对于第二个线性方程组的精度估计只比实际误差高一到两个数量级，体现该算法对于该矩阵问题求解精度估计的稳定性。

主要问题；

当对向量进行赋值时，最好使用浮点数以防某些类型转换。

可能会出现解向量和误差向量完全相同，这可能是没有浮点误差导致的 ()

算法 2.5.1 在求解矩阵一范数的时候使用了矩阵和向量乘法。而在求解逆矩阵的范数时，实际需要求解一个线性方程组。当 LU 分解已知时，求解复杂度降到 $O(n^2)$

此外，计算误差时不建议计算 Ax-b 的误差，受到舍入误差的影响不能很好的展现误差。