# 数值代数习题课讲义 5

游瀚哲

2023 年 11 月 30 日

## 一、书面作业讲解

1、$(x-x^*)^TA(x-x^*)-x^{*T}Ax^*=x^TAx-(Ax^*)^Tx-x^TAx^*=x^TAx-b^Tx-x^Tb=\varphi(x)$

2、$\phi(x_k)=\phi(x_{k-1})-\frac{(r_{k-1}^Tr_{k-1})^2}{r_{k-1}^TAr_{k-1}}$

$r_{k-1}^TA^{-1}r_{k-1}=(b-Ax_{k-1})^TA^{-1}(b-Ax_{k-1})=b^{-1}Ab+\phi(x_{k-1})$

而 A 正定 $\Leftrightarrow A^{-1}$ 正定 $\Rightarrow \phi(x_{k-1})<r_{k-1}^TA^{-1}r_{k-1}$

$\phi(x_k)<\phi(x_{k-1})(1-\frac{(r_{k-1}^Tr_{k-1})^2}{r_{k-1}^TAr_{k-1}r_{k-1}^TA^{-1}r_{k-1}})<\phi(x_{k-1})(1-\frac{1}{||A||_2||A^{-1}||_2})$

3、由最速下降法最后一步 $x^*=x_k+\frac{r_k^Tr_k}{r_k^TAr_k}r_k$

$b=Ax^*=Ax_k+\frac{r_k^Tr_k}{r_k^TAr_k}Ar_k=Ax_k+r_k$

$\Rightarrow\frac{r_k^TAr_k}{r_k^Tr_k}r_k=Ar_k, r_k$ 为 A 的特征向量

4、只需说明系数矩阵可逆，即行列式非零。直接计算行列式 $r_k^TAr_kp_{k-1}^TAp_{k-1}-(r_k^TAp_{k-1})^2$。记 $A=LL^T, a=L^Tr_k, b=L^Tp_{k-1}$，则左式化为 $||a||^2||b||^2-(a\cdot b)^2$，由于 rk, pk-1 线性无关，L 可逆，a, b 线性无关，$||a||^2||b||^2-(a\cdot b)^2>0$, 得证。

5、若存在不全为 $0\lambda_i, s.t. \sum_{i=1}^n\lambda_ip_i=0$

$0=\sum_{i=1}^n\lambda_ip_i^TA\sum_{i=1}^n\lambda_ip_i$

A 正定 $\Rightarrow p_i^TAp_i>0$，共轭正交性 $\Rightarrow p_i^TAp_j=0$, 只能 $\lambda_i=0,\forall i$ 矛盾。

6、直接求导 $\varphi'(y_{i-1}+te_i)=2ta_{ii}+2y_{i-1}^TAe_i-2b_i$, $t=\frac{y_{i-1}^TAe_i-b_i}{a_{ii}}$ 取到极小。接下来只需要归纳验证，若 $y_{i-1}$ 是由 $(D-L)^{-1}Uy_0+(D-L)^{-1}b$ 的前 i - 1 行与 $y_0$ 的后 n - i + 1 行组成，$y_i$ 是由 $Gy_0+(D-L)^{-1}b$ 的前 i 行与 $y_0$ 的后 n - i 行组成，其中 G 为 G-S 的迭代矩阵。注意到，yi 可以写为 $diag(I_i,O)(D-L)^{-1}(Uy_0+b)+diag(O,I_{n-i})y_0$, 将 $y_{i-1}$ 代入 $y+i=y_{i-1}+te_i$, 分别考虑 y0 部分和 b 部分的变化。将 $(y_{i-1}^TAe_i)e_i=E_iAy_{i-1}$, 其中 Ei 为第 i 列为 1 的方阵，则有

$y_i = (I + \frac{E_i A}{a_{ii}})y_{i-1} - 2\frac{E_i}{a_{ii}}b$，代入计算第 i 个分量可得成立。

7、A 为实对称矩阵 $\Rightarrow$ A 的特征值均为实数，且存在完全特征向量系

$\Rightarrow \prod_{i=i}^{k}(x-\lambda_i)$ 为 A 的化零多项式

$\forall n \geq k, A^n r \in span\{r, Ar, \cdots, A^{k-1}r\}$,Kryrov 子空间维数至多为 k。

8、由习题 7，Krylov 子空间维数最高为 l，于是利用定理 5.2.2，经过 l 步已经找到了使 $\varphi(x)$ 全局最小的 x，即为方程的解。

9、A 为实对称正定矩阵 $\Rightarrow \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0, \lambda_i$ 为 A 的特征值。

$||A||_2 = max\sqrt{\lambda(A^TA)} = \lambda_1, ||A^{-1}||_2 = max\sqrt{\lambda(A^{-T}A^{-1})} = \frac{1}{\lambda_n}$

$||x_k - x_*||_2 \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}||x_k - x_*||_A \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}2(\frac{\sqrt{\kappa_2}-1}{\sqrt{\kappa_2}+1})^k||x_0 - x_*||_A \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\sqrt{\lambda_1}2(\frac{\sqrt{\kappa_2}-1}{\sqrt{\kappa_2}+1})^k||x_0 - x_*||_2$

11、$\Rightarrow$: 若 $x^TAy = 0$，有 $||x||_A^2 + ||y||_A^2 = ||x+y||_A^2$, 于是 $r_k^TX = 0 \Leftrightarrow (x_k - A^{-1}b)^TAX = 0 \Leftrightarrow \forall x \in X, ||x - A^{-1}b||_A^2 = ||x - A^{-1}b||_A^2 + ||x_k - x||_A^2 \geq ||x - A^{-1}b||_A^2$

$\Leftarrow$: 设 $f(t) = ||x - A^{-1}b + tx||_A^2$, 在 0 处取到最小值 $\Rightarrow f'(0) = 0, \forall x \Rightarrow r_k^Tx = 0, \forall x \Rightarrow r_k \perp X$

12、将算法 5.2.1 中 A、b 替换为 $A^TA, A^Tb$ 即可。