Numerical Algebra Chapter 4

@rosefantasie

2022 年 11 月 10 日

1. 设方程组

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

证明：对 A_1 来说，Jacobi 迭代法不收敛，而 G-S 迭代法收敛；对 A_2 来说，Jacobi 迭代法收敛，而 G-S 迭代法不收敛。

解. 由课本定理 4.2.1, $x_k = Mx_{k-1} + g$ 收敛的充分必要条件是 $\rho(M) < 1$. 且对于 Jacobi 迭代法，$M = D^{-1}(L+U)$; 对于 G-S 迭代法，$M = (D-L)^{-1}U$.

(1)

$$M_J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & \\ & 1 & \\ & & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\det(\lambda I - M_J) = \lambda(\lambda^2 + \frac{5}{4}), \rho(M_J) = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1. \text{ 故不收敛.}$$

$$M_{GS} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ 1 & 1 & \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ & 0 & -1 \\ & & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - M_{GS}) = \lambda(\lambda + \frac{1}{2})^2, \rho(M_{GS}) = \frac{1}{2} < 1. \text{ 故收敛.}$$

(2)

$$M_J = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \det(\lambda I - M_J) = \lambda^3, \rho(M_J) = 0 < 1. \text{ 故收敛.}$$

$$M_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \det(\lambda I - M_{GS}) = \lambda(\lambda - 2)^2, \rho(M_{GS}) = 2 > 1. \text{ 故不收敛.}$$

□

2. 设 $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 $\rho(B)=0$. 证明：对任意的 $g, x_0 \in \mathbb{R}^n$, 迭代格式

$$x_{k+1} = Bx_k + g, k = 0, 1, \cdots$$

最多迭代 n 次就可得到方程组 $x = Bx + g$ 的解。

解. $\rho(B)=0$, 故 $\lambda(B)=\{0\}$, 故 B 的 Jordan 分解为 $B = PJP^{-1}$, 其中 $J = \mathrm{diag}(J_1, \cdots, J_s)$, $J_i \in \mathbb{R}^{n_i\times n_i}, n_1 + \cdots + n_s = n$.

记 $e_k = x_k - x$, 则 $e_{k+1} = Be_k, e_n = B^n e_0$,

$$B^n = PJ^nP^{-1} = P\mathrm{diag}(J_1^n, \cdots, J_s^n)P^{-1} = 0,$$

故 $e_n = 0$. 即最多迭代 n 次就可得到方程组 $x = Bx + g$ 的解。 □

3. 考虑线性方程组 $Ax = b$, 这里

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

求 a 的值使

(1)A 是正定的；

(2)Jacobi 迭代法收敛；

(3)G-S 迭代法收敛。

解. (1) 前两个主子式的行列式显然大于 0.

$$\det(A) = 1 - a^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < a < 1.$$

(2)

$$M_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 \end{pmatrix}, \det(\lambda I - M_J) = \lambda(\lambda^2 - a^2), \rho(M_J) = |a|,$$

Jacobi 迭代法收敛 $\Leftrightarrow -1 < a < 1$.

(3)

$$M_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}, \det(\lambda I - M_{GS}) = \lambda^2(\lambda - a^2), \rho(M_J) = a^2,$$

G-S 迭代法收敛 $\Leftrightarrow -1 < a < 1$.

□

4. 证明：若 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 非奇异，则必可找到一个排列方阵 P, 使得 PA 的对角元均不为 0.

解. 归纳：$n=1$ 时，$A=(a)\neq 0$, $P=I$, $PA=A$.

假设对任意非奇异的 $A\in\mathbb{R}^{(n=1)\times(n-1)}$ 存在一个排列方阵 P, 使得 PA 的对角元均不为 0. 则 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 时，$\det(A)=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{k1}\det(A_{k1})$.

由于 $\det(A)\neq 0$, 故存在 k_0 使得 $a_{k_01}\det(A_{k_01})\neq 0$, 故 $a_{k_01}\neq 0$.

对 A 的 $1,k_0$ 行作交换，对应的矩阵乘法为左乘 P_1, P_1 是排列方阵。有

$$P_1A=\begin{pmatrix} a_{k_01} & * \\ * & A_{k_01}\end{pmatrix}, A_{k_01}\in\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}.$$

由归纳假设，存在排列方阵 P_0, $P_0A_{k_01}$ 的对角元均不为 0.

取

$$P=\begin{pmatrix} 1 & \\ & P_0\end{pmatrix}P_1$$

则

$$PA=\begin{pmatrix} 1 & \\ & P_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{k_01} & * \\ * & A_{k_01}\end{pmatrix}$$

对角元均不为 0. □

5. A 是严格对角占优或不可约对角占优阵，证明 G-S 法收敛。

解.（参考 Thm4.2.9）

A 是严格对角占优或不可约对角占优，则 $|a_{ii}|>0$, 故 $D-L$ 可逆。

反证，假设 M_{GS} 有特征值 λ 满足 $|\lambda|\geq 1$. 则 $\lambda D-\lambda L-U$ 也是严格对角占优或不可约对角占优阵，故也是非奇异的。

$$\begin{aligned}\lambda I-M_{GS}&=\lambda I-(D-L)^{-1}U=(D-L)^{-1}(\lambda D-\lambda L-U),\\ \det(\lambda I-M_{GS})&=\det\left((D-L)^{-1}\right)\det(\lambda D-\lambda L-U)\neq 0,\end{aligned}$$

矛盾。 □

6. $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是严格对角占优的，证明：$|\det(A)|\geq\prod\limits_{i=1}^{n}\Big(|a_{ii}|-\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|\Big)$.

解. 不可以直接使用圆盘定理。

归纳法. $n=1$ 时自然成立，下设对于严格对角占优的 $A\in\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ 有 $|\det(A)|\geq\prod\limits_{i=1}^{n-1}\Big(|a_{ii}|-\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|\Big)$. 考虑对 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 做一次 Gauss 消去得到

$$A\Longrightarrow\begin{pmatrix} a_{11} & \alpha_{12} \\ \vec{0} & \tilde{A}\end{pmatrix},$$

其中 $\tilde a_{ij}=a_{ij}-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}$. 此处将 $\tilde A$ 中下标记为和 A 中一致，即 $i,j\in\{2,3,\cdots,n\}$. 由归纳假设有

$$\begin{aligned}
|\det(\tilde A)| &\ge \prod_{i=2}^n\Big(|\tilde a_{ii}|-\sum_{j=2,j\ne i}^n|\tilde a_{ij}|\Big)\\
&=\prod_{i=2}^n\Big(\big|a_{ii}-\frac{a_{i1}a_{1i}}{a_{11}}\big|-\sum_{j=2,j\ne i}^n\big|a_{ij}-\frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}\big|\Big)\\
&=\prod_{i=2}^n\Big(|a_{ii}|-\big|\frac{a_{i1}a_{1i}}{a_{11}}\big|-\sum_{j=2,j\ne i}^n\big(|a_{ij}|+\big|\frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}\big|\big)\Big)\\
&\ge\prod_{i=2}^n\Big(|a_{ii}|-\big|\frac{a_{i1}a_{1i}}{a_{11}}\big|-\sum_{j=2,j\ne i}^n|a_{ij}|-\sum_{j=2,j\ne i}^n\big|\frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}\big|\Big)\\
&=\prod_{i=2}^n\Big(|a_{ii}|-\sum_{j=2,j\ne i}^n|a_{ij}|-\sum_{j=2}^n\big|\frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}\big|\Big)\\
&\ge\prod_{i=2}^n\Big(|a_{ii}|-\sum_{j=2,j\ne i}^n|a_{ij}|-\big|\frac{a_{i1}}{a_{11}}\big|\cdot|a_{11}|\Big)\\
&=\prod_{i=2}^n\Big(|a_{ii}|-\sum_{j=1,j\ne i}^n|a_{ij}|\Big)\\
|\det(A)|=|a_{11}|\cdot|\det(\tilde A)| &\ge \prod_{i=1}^n\Big(|a_{ii}|-\sum_{j=1,j\ne i}^n|a_{ij}|\Big).
\end{aligned}$$

如果你实在很想用**圆盘定理.** 可以作以下处理。

记 $h_i=|a_{ii}|-\sum\limits_{j\ne i}|a_{ij}|, B=\begin{pmatrix}h_1^{-1}&&&\\&h_2^{-1}&&\\&&\ddots&\\&&&h_n^{-1}\end{pmatrix}A$, 则 $|b_{ii}|-\sum\limits_{j\ne i}|b_{ij}|=\dfrac{|a_{ii}|-\sum\limits_{j\ne i}|a_{ij}|}{h_i}=1$,
且 $\det(B)=(h_1\cdots h_n)^{-1}\det(A)$.

任取 B 的特征值 λ, 设 $\varphi=(x_1,\cdots,x_n)^T$ 是对应的特征向量。则 $B\varphi=\lambda\varphi$. 存在 p 使得 $|x_p|=||\varphi||_\infty$. 有 $\lambda x_p=\sum\limits_{j=1}^n b_{pj}x_j$. 于是

$$|\lambda|=\big|b_{pp}+\sum_{j\ne p}b_{pj}\frac{x_j}{x_p}\big|\ge|b_{pp}|-\sum_{j\ne p}|b_{pj}|\cdot\big|\frac{x_j}{x_p}\big|\ge|b_{pp}|-\sum_{j\ne p}|b_{pj}|=1.$$

所以 $|\det(B)|\ge1,|\det(A)|\ge h_1\cdots h_n=\prod\limits_{i=1}^n\Big(|a_{ii}|-\sum\limits_{j\ne i}|a_{ij}|\Big)$. □

7. A 是有正对角元的非奇异对称阵，证明若 $Ax=b$ 的 G-S 迭代对任意初始近似 $x^{(0)}$ 收敛，则 A 正定。

解. A 对称, 故有 $A=D-L-L^T, M_{GS}=(D-L)^{-1}L^T, e_{k+1}=(D-L)^{-1}L^Te_k, e_k:=x_k-x*$ 为误差向量。对任意 $x^{(0)}$ 收敛即 $\lim\limits_{n\to\infty}e_n=\lim\limits_{n\to\infty}((D-L)^{-1}L^T)^ne_0=0$ 对任意 e_0 成立。

记 $\varepsilon_k=e_k-e_{k+1}$,

$$\begin{aligned}
Ae_k&=(D-L-L^T)e_k=(D-L)(I-(D-L)^{-1}L^T)e_k=(D-L)\varepsilon_k\\
Ae_{k+1}&=(D-L-L^T)(D-L)^{-1}L^Te_k=L^T\varepsilon_k
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
e_k^T A e_k - e_{k+1}^T A e_{k+1} &= e_k^T (D-L)\varepsilon_k - e_{k+1}^T L^T \varepsilon_k \\
&= e_k^T D\varepsilon_k - e_{k+1}^T (D-L)^T L^{-1} L\varepsilon_k - e_{k+1}^T L^T \varepsilon_k \\
&= e_k^T D\varepsilon_k - e_{k+1}^T D\varepsilon_k \\
&= \varepsilon_k^T D\varepsilon_k \geq 0.
\end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{k\to\infty} e_k^T A e_k = 0$, $\{e_k^T A e_k\}$ 是递减且极限为 0 的序列，故 $e_0^T A e_0 \geq 0, \forall e_0$. 且当 $e_0 \neq 0$ 时，存在 $\varepsilon_k^T D \varepsilon_k > 0$, 故 $e_0^T A e_0 > 0$. 即 A 正定。 □

8. 若存在对称正定的 P 使得 $B = P - H^T P H$ 是正定对称阵，证明 $x_{k+1} = Hx_k + b$ 收敛。

解. 设 λ 是 H 的特征值且 $|\lambda| \geq 1$, φ 是对应的特征向量，即 $H\varphi = \lambda\varphi$. 则

$$\varphi^* B\varphi = \varphi^* P\varphi - \varphi^* H^T P H\varphi = \varphi^* P\varphi - \overline{\lambda}\varphi^* P\lambda\varphi = (1-|\lambda|^2)\varphi^* P\varphi$$

当 $|\lambda| > 1$ 时，$\varphi^* B\varphi < 0$; 当 $|\lambda| = 1$ 时，$\varphi^* B\varphi = 0$ 恒成立。均与 B 正定矛盾。 □

9. 对 Jacobi 法引入参数 $\omega > 0$ 得到 JOR 方法，

$$x_{k+1} = x_k - \omega D^{-1}(Ax_k - b) \text{ or } x_{k+1} = (I - \omega D^{-1}A)x_k + \omega D^{-1}b.$$

证明：当 $Ax = b$ 的 Jacobi 迭代收敛，JOR 对 $0 < \omega \leq 1$ 收敛。

解. $M_J = D^{-1}(L+U), M_{JOR} = (1-\omega)I + \omega M_J$.

设 λ 是 M_J 的特征值，μ 是 M_{JOR} 的特征值。由于

$$(\omega\lambda + 1 - \omega)I - M_{JOR} = \omega\lambda - \omega M_J = \omega(\lambda I - M_J),$$

有 $\mu = \omega\lambda + (1-\omega)$, $|\mu| \leq |\omega| \cdot |\lambda| + |1-\omega| \leq |\omega| + |1-\omega| = 1 (0 < \omega \leq 1)$.

因此 Jacobi 迭代收敛时，JOR 对 $0 < \omega \leq 1$ 收敛。 □

10. 证明：如果 A 是具有正对角元的实对称阵，则 JOR 方法收敛的充分必要条件是 A 和 $2\omega^{-1}D - A$ 正定。

解. $M = I - \omega D^{-1}A = D^{-\frac{1}{2}}(I - \omega D^{-\frac{1}{2}} A D^{-\frac{1}{2}})D^{\frac{1}{2}}$. 因此

$$\begin{aligned}
\rho(M) < 1 &\Leftrightarrow \rho(I - \omega D^{-\frac{1}{2}} A D^{-\frac{1}{2}}) < 1 \\
&\Leftrightarrow -1 < 1 - \lambda(\omega D^{-\frac{1}{2}} A D^{-\frac{1}{2}}) < 1 \\
&\Leftrightarrow 0 < \omega D^{-\frac{1}{2}} A D^{-\frac{1}{2}} < 2 \\
&\Leftrightarrow \omega D^{-\frac{1}{2}} A D^{-\frac{1}{2}}, 2I - \omega D^{-\frac{1}{2}} A D^{-\frac{1}{2}} \text{ 正定} \\
&\overset{A \text{ 具有正对角元}}{\Leftrightarrow} A \text{ 和 } 2\omega^{-1}D - A \text{ 正定}
\end{aligned}$$

□

11. 证明：A 是严格对角占优或不可约对角占优，$\omega \in (0,1)$, 证明 SOR 方法收敛。

解. $L_\omega = (D-\omega L)^{-1}\big((1-\omega)D+\omega U\big)$. 由于 A 对角占优，故 $D-\omega L$ 可逆。设 λ 是 L_ω 的特征值且 $|\lambda|\geq 1$. 则

$$\begin{aligned}\lambda I-(D-\omega L)^{-1}\big((1-\omega)D+\omega U\big) &= (D-\omega L)^{-1}(\lambda D-\omega\lambda L-(1-\omega)D+\omega U)\\ &= (D-\omega L)^{-1}\big((\lambda-1+\omega)D-\omega\lambda L+\omega U\big)\end{aligned}$$

容易验证 $|\lambda-1+\omega|\geq|\lambda\omega|\geq|\omega|$. 因此 $(\lambda-1+\omega)D-\omega\lambda L+\omega U$ 可逆。故 $\det\Big(\lambda I-(D-\omega L)^{-1}\big((1-\omega)D+\omega U\big)\Big)\neq 0$, 与 λ 是其特征值矛盾。 □

13. $T_n\in\mathbb{R}^n$ 满足 $T_{n-1}U+UT_{n-1}=h^2F$, 其中

$$T_n=\begin{pmatrix}2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1\\ & & -1 & 2\end{pmatrix}$$

(1) 求 T_n 的 Cholesky 分解;

(2) 求 T_n 的列主元三角分解;

(3) 利用 T_n 的特征值和特征向量设计求解上述方程得算法。

解. (1) $L=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & & & \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -\sqrt{\frac{n-1}{n}} & \sqrt{\frac{n+1}{n}}\end{pmatrix}$

(2) 由 Gauss 消去过程知每一步的主元都在左上角，故不需要进行选主元操作，可以得到

$$L=\begin{pmatrix}1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{n-1}{n} & 1\end{pmatrix}, U=\begin{pmatrix}2 & -1 & & \\ & \frac{3}{2} & \ddots & \\ & & \ddots & -1\\ & & & \frac{n+1}{n}\end{pmatrix}$$

(3) 设特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, 对应的特征向量为 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 且 $\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle=\delta_{ij}$.

于是对任意的 i,j 有

$$h^2\varphi_i^TF\varphi_j=\varphi_i^T(T_nU+UT_n)\varphi_j=(\lambda_i+\lambda_j)\varphi_i^TU\varphi_j.$$

即

$$\begin{aligned}\varphi_i^TU\varphi_j=\frac{h^2\varphi_i^TF\varphi_j}{\lambda_i+\lambda_j}=\tilde{F}_{ij},\\ P^TUP=\tilde{F}, P=(\varphi_1,\cdots,\varphi_n),\\ \text{解得}U=P\tilde{F}P^T\end{aligned}$$

时间复杂度为 $O(n^3)$. □

14. $A=\begin{pmatrix} D_1 & C_2 & & & \\ B_2 & D_2 & C_3 & & \\ & B_3 & D_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & C_s \\ & & & B_s & D_s \end{pmatrix}$, $D_i \in \mathbb{R}^{n_i\times n_i}$ 是非奇异的，证明对任意非零复数 μ, 有

$$\det(D-\mu C_L-\frac{1}{\mu}C_U)=\det(D-C_L-C_U),$$

其中

$$D=\begin{pmatrix} D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_s \end{pmatrix}, C_L=-\begin{pmatrix} O & & & \\ B_2 & O & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & B_s & O \end{pmatrix}, C_U=-\begin{pmatrix} O & C_2 & & \\ & O & \ddots & \\ & & \ddots & C_s \\ & & & O \end{pmatrix}$$

解.

$$D-\mu C_L-\frac{1}{\mu}C_U=\begin{pmatrix} \mu I_{n_1} & & & \\ & \mu^2 I_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu^s I_{n_s} \end{pmatrix}(D-C_L-C_U)\begin{pmatrix} \mu^{-1} I_{n_1} & & & \\ & \mu^{-2} I_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu^{-s} I_{n_s} \end{pmatrix}$$

□

15. 对于上题矩阵 A, 证明当 $\omega \neq 0$ 时，$\lambda \in \lambda(L_\omega)$ 的充要条件是存在 $\mu \in \lambda(B)$, 使得 $\lambda=\frac{1}{4}\big(\omega\mu+(\omega^2\mu^2-4\omega+4)^{1/2}\big)^2$, 其中 $B=D^{-1}(C_L+C_U), L_\omega=(D-\omega C_L)^{-1}\big((1-\omega)D+\omega C_U\big)$.

解.

$$\begin{aligned}\det(\lambda I-L_\omega)=0 \Leftrightarrow 0 &= \det(\lambda D-\lambda\omega C_L-(1-\omega)D-\omega C_U)\\ &= \det((\lambda-1+\omega)D-\lambda\omega C_L-\omega C_U)\\ &\overset{14.}{=} \det((\lambda-1+\omega)D-\sqrt{\lambda}\omega C_L-\sqrt{\lambda}\omega C_U)\\ &= \det(\sqrt{\lambda}\omega D)\det(\frac{\lambda-1+\omega}{\sqrt{\lambda}\omega}I-D^{-1}(C_L+C_U))\\ &= \det(\sqrt{\lambda}\omega D)\det(\frac{\lambda-1+\omega}{\sqrt{\lambda}\omega}I-B)\end{aligned}$$

故

$$\mu=\frac{\lambda-1+\omega}{\sqrt{\lambda}\omega}$$

即 $\lambda=\frac{1}{4}\big(\omega\mu+(\omega^2\mu^2-4\omega+4)^{1/2}\big)^2$.

□