# 对称特征值问题的计算方法

邓建松

# 对称矩阵的特征值问题

对称特征值问题的计

• 对称矩阵的特征值问题具有许多良好的 性质和十分丰富又完美的数学理论

# 对称矩阵的特征值问题

对称特征值问题的计

• 对称矩阵的特征值问题具有许多良好的 性质和十分丰富又完美的数学理论

• 关于它的计算方法和相应的理论成为矩 阵计算中发展得最为完善的一部分

# 对称矩阵的特征值问题

对称特征值问题的计 算方法 邓建松

基本性质

对称QR方法

二对用化 隐式对称QR读作

Jacobi方法

经典Jacobi方法 循环Jacobi方法及其变形

二分法

5异值分解的计算

二对角化 SVD迭代 SVD算法

- 对称矩阵的特征值问题具有许多良好的 性质和十分丰富又完美的数学理论
- 关于它的计算方法和相应的理论成为矩阵计算中发展得最为完善的一部分
- 本章介绍其中几个最基本的数值方法

# 对称矩阵特征值的性质

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

## 基本性质

对称QR方法

三对角化

的式对称QR选

Jacobi刀程

終曲によりは

循环Jacobi方法及其到

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

• 实对称矩阵的特征值均为实数

# 对称矩阵特征值的性质

# 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

## 基本性质

## 对称QR方法

隐式对称QR迭化

### Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

### 二分法

## 奇异值分解的计

二对角化

SVD迭代

SVD算法

- 实对称矩阵的特征值均为实数
- 其特征向量可以构成ℝ"的一组标准正交基

# 对称矩阵特征值的性质

# 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

## 基本性质

## 对称QR方法

版式 對致 O D 许护

隐式对称QR选作

## Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变形

## 二分法

奇异值分解的计算

SVD迭代

- 实对称矩阵的特征值均为实数
- 其特征向量可以构成ℝ"的一组标准正交基

# 定理

$$Q^T A Q = \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

# 极小极大定理

对称特征值问题的计

## 基本性质

# 定理

设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是对称的,并假定A的特征值 为 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$  则有

$$\lambda_{i} = \max_{\mathcal{X} \in \mathcal{G}_{i}^{n}} \min_{0 \neq u \in \mathcal{X}} \frac{u^{T} A u}{u^{T} u}$$
$$= \min_{\mathcal{X} \in \mathcal{G}_{n-i+1}^{n}} \max_{0 \neq u \in \mathcal{X}} \frac{u^{T} A u}{u^{T} u}$$

其中 $G_{l}$ 表示 $\mathbb{R}^{n}$ 中所有k维子空间的全体

# 特征值的敏感性: Weyl定理

## 基本性质

# 定理

设n阶对称矩阵A和B的特征值分别为

$$\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \not \sim \mu_1 \geqslant \cdots \geqslant \mu_n$$

则有

$$|\lambda_i - \mu_i| \leq ||A - B||_2, \quad i = 1, \dots, n$$

# 特征向量的敏感性

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

# 基本性质

## 对称QR方法

\_\_\_\_

隐式对称QR选作

### Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变形

## 二分法

## 奇异值分解的计算

SVD迭代

SVD算法

## 定理

设A n A + E是两个n阶实对称矩阵,并假设 $q_1$ 是A的一个单位特征向量, $Q = (q_1, Q_2)$ 是n 阶正交矩阵,矩阵分块如下:

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}, \quad Q^T E Q = \begin{pmatrix} \varepsilon & e^T \\ e & E_{22} \end{pmatrix}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - |q_1^T \tilde{q}_1|^2} \leqslant \frac{4}{d} \|e\|_2 \leqslant \frac{4}{d} \|E\|_2$$

其中 $\theta$ 是向量 $q_1$ 和 $\tilde{q}_1$ 之间所夹的锐角,即 $\theta$  = arccos  $|q_1^T \tilde{q}_1|$ 

# SVD分解定理

# 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

## 基本性质

## 对称QR方法

7/1//J/Q1/7/1/2

隐式划数OD注册

.....

### Jacobi刀役

WATER A SHOOT IN

### 二分法

## 奇异值分解的计

\_\_对用化 SVD迭代

SVD算法

• 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,则存在正交矩 阵 $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 和 $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 使得

$$U^{\mathsf{T}}AV = \left(\begin{array}{cc} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)$$

其中
$$\Sigma_r = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$$
,  $\sigma_1 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$ 

# SVD分解定理

# 对称特征值问题的计

## 基本性质

• 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . 则存在正交矩 **阵U∈ℝ<sup>m×m</sup>和V∈ℝ<sup>n×n</sup>**使得

$$U^{\mathsf{T}}AV = \left(\begin{array}{cc} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)$$

其中 $\Sigma_r = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r), \ \sigma_1 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$ 

• 对于上述分解,我们称

$$\sigma_1 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > \sigma_{r+1} = \cdots = \sigma_n = 0$$

为A的<mark>奇异值: U和V</mark>的列向量分别称 为A的左/右奇异向量

# 奇异值的稳定性

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

## 基本性质

### 对称QR方法

二对角化

隐式对称OR法在

### Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变形

### 一分法

## 奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

# 定理

设 $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , 并假定它们的奇异值分别为

$$\sigma_1 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_n \not\sim \tau_1 \geqslant \cdots \geqslant \tau_n$$

则有

$$|\sigma_i - \tau_i| \leq ||A - B||_2, \quad i = 1, \dots, n$$

# 对称QR方法

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

二水份化

隐式对称QR选

Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

对称QR方法就是求解对称特征值问题 的QR方法

# 对称QR方法

对称特征值问题的计

对称QR方法

对称QR方法就是求解对称特征值问题 的QR方法

• 它是将QR方法应用于对称矩阵,并且 充分利用了其对称性

# 对称QR方法

对称特征值问题的计

对称QR方法

对称QR方法就是求解对称特征值问题 的QR方法

- 它是将QR方法应用于对称矩阵,并且 充分利用了其对称性
- 此时上Hessenberg矩阵就是三对角对称 矩阵

# 三对角化

# 对称特征值问题的计 算方法

**邓建松** 

基本性质

对称QR方法

二对价化

隐式对称QR选作

Jacobi方法

.....

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计

二对角化 SVD迭代 若A是n阶实对称矩阵,并假定A的 上Hessenberg分解为

$$Q^TAQ = T$$

其中Q是正交矩阵,T是上Hessenberg矩阵,则可知T是对称三对角阵

# 三对角化

# 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

三对角化

隐式对称QR迭代

### Jacobi方法

经典Jacobi方法 循环Jacobi方法及其变形

-7712

5异值分解的计

二对角化 SVD迭代 SVD算法 若A是n阶实对称矩阵,并假定A的 上Hessenberg分解为

$$Q^TAQ = T$$

其中Q是正交矩阵,T是上Hessenberg矩阵,则可知T是对称三对角阵

因此当处理的是对称矩阵时,上Hessenberg化就是三对角化

# 三对角化

# 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

## 基本性质

对称QR方法

隐式对称QR迭代

## Jacobi万没

经典Jacobi方法 循环Jacobi方法及其变形

# **奇显值分解的计**

二对角化 SVD迭代 SVD算法 • 若*A*是*n*阶实对称矩阵,并假定*A*的 上Hessenberg分解为

$$Q^TAQ = T$$

其中Q是正交矩阵,T是上Hessenberg矩阵,则可知T是对称三对角阵

- 因此当处理的是对称矩阵时,上Hessenberg化就是三对角化
- 因此我们约化过程中可以充分利用对称性,使 运算量大减

# 具体分析

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

## 基本性质

对称QR方法

隐式对称QR选作

## Jacobi刀程

....

循环 lacobi方法及

一分注

## 奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

• 对A进行分块:

$$A = \left(\begin{array}{cc} \alpha_1 & \mathbf{v}_0^T \\ \mathbf{v}_0 & A_0 \end{array}\right)$$

其中 $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ .

# 具体分析

对称特征值问题的计 算方法

基本性质

对称QR方法

隐式对称QR迭代

Jacobi方法

经典Jacobi方法 循环Jacobi方法及其变形

二分法

奇异值分解的计算

二对角化 SVD迭代 SVD算法 • 对A进行分块:

$$A = \left(\begin{array}{cc} \alpha_1 & \mathbf{v_0}^T \\ \mathbf{v_0} & A_0 \end{array}\right)$$

其中 $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ .

• 利用Householder变换把A约化为上Hessenberg矩阵的第一步是把 $v_0$ 转化为 $\beta_0e_1$ ,从而 $A_0$ 变为新的n-1阶矩阵,我们对 $A_0$ 进行类似分块,得到 $A_1$ ,依次类推……

# 约化的第k步

# 对称特征值问题的计

• 计算Householder变换 $\tilde{H}_k \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$ , 使得

$$\tilde{H}_k v_{k-1} = \beta_k e_1, \quad \beta_k \in \mathbb{R}$$

# 约化的第k步

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

## 基本性质

对称QR方法

二对值化

隐式对称QR迭代

## Jacobi方法

...

循环Jacobi方法及其变形

### 二分法

## 奇异值分解的计

二对角化 SVD迭代 • 计算Householder变换 $\tilde{H}_k \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$ , 使得

$$\tilde{H}_k v_{k-1} = \beta_k e_1, \quad \beta_k \in \mathbb{R}$$

• 计算

$$\tilde{H}_k A_{k-1} \tilde{H}_k = \begin{pmatrix} \alpha_{k+1} & \mathbf{v}_k^T \\ \mathbf{v}_k & A_k \end{pmatrix}$$

# 分解结果

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

-----

隐式对称QR迭化

Jacobi方

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计算

SVD迭代

SVD管注

# ● 定义

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ \beta_1 & \alpha_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$Q = H_1 \cdots H_{n-2}, \quad H_k = \operatorname{diag}(I_k, \tilde{H}_k)$$

# 分解结果

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

三对角化

隐式对称QR迭代

Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变形

二分法

奇异值分解的计

二对用化 SVD迭代 SVD算法 • 定义

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ \beta_1 & \alpha_2 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} & \\ & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$Q = H_1 \cdots H_{n-2}, \quad H_k = \operatorname{diag}(I_k, \tilde{H}_k)$$

• 则我们有 $Q^TAQ = T$ , 这称为A的三对角分解

# 运算量

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

-----

隐式对称OR法

Jacobi万省

1/2 db 1 1 1 1 1 2 2 2

循环Jacobi方法及其变

一分注

奇异值分解的计算

二对角化

SVD读机

SVD算法

• 第k步约化的主要工作是计算 $\tilde{H}_k A_{k-1} \tilde{H}_k$ 

# 运算量

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

## 基本性质

对称QR方法

隐式对称QR迭件

## Jacobi方法

经典Jacobi方法 循环Jacobi方法及其变形

## 二分法

## 奇异值分解的计

二对角化 SVD迭代 SVD算法

- 第k步约化的主要工作是计算 $\tilde{H}_k A_{k-1} \tilde{H}_k$
- 设 $\tilde{H}_k = I \beta v v^T$ ,  $v \in \mathbb{R}^{n-k}$ , 由 $A_{k-1}$ 的对称性,我们有

$$\tilde{H}_k A_{k-1} \tilde{H}_k = A_{k-1} - v w^T - w v^T$$

其中
$$w = u - \beta(v^T u)v/2$$
,  $u = \beta A_{k-1}v$ 

# 运算量

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法 <sup>三对角化</sup>

隐式对称QR迭代

Jacobi方法

经典Jacobi方法 循环Jacobi方法及其变形

ず开恒分胜的UT∮ -\*\*\*\*\*

二对角化 SVD迭代 SVD算法

- 第k步约化的主要工作是计算 $\tilde{H}_k A_{k-1} \tilde{H}_k$
- 设 $\tilde{H}_k = I \beta v v^T$ ,  $v \in \mathbb{R}^{n-k}$ , 由 $A_{k-1}$ 的对称性,我们有

$$\tilde{H}_k A_{k-1} \tilde{H}_k = A_{k-1} - v w^T - w v^T$$

其中
$$w = u - \beta(v^T u)v/2$$
,  $u = \beta A_{k-1}v$ 

● 利用这一等式计算,运算量仅为4(n − k)²,从 而总体运算量为4n³/3次乘法运算

# 带原点位移的QR迭代

# 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

三对角化

隐式对称QR选值

Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

一分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

完成了三对角分解后,接下来就是选取适当的 位移进行QR迭代

# 带原点位移的QR迭代

• 完成了三对角分解后,接下来就是选取适当的 位移进行QR迭代

• 由于此时特征值全是实数,因此没有必要进行 双重步位移

# 带原点位移的QR迭代

# 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

隐式对称QR迭化

Jacobi万法

循环Jacobi方法及其变形

二分法

奇异值分解的计算

SVD迭代 SVD篡法

开但分胜的订身

完成了三对角分解后,接下来就是选取适当的 位移进行QR迭代

- 由于此时特征值全是实数,因此没有必要进行 双重步位移
- 带原点位移的QR迭代格式为

$$T_k - \mu_k I = Q_k R_k$$
 (QR分解) 
$$T_{k+1} = R_k Q_k + \mu_k I, \quad k = 0, 1, \dots$$

其中 $T_0 = T$ 是对称三对角阵

# 性质保持

对称特征值问题的计

根据QR迭代保持上Hessenberg形和对称 性的特点可知 $T_k$ 都是对称三对角阵

# 性质保持

对称特征值问题的计 算方法

## 基本性质

对称QR方法

隐式对称OR进行

Jacobi方法

经典Jacobi方法 循环Jacobi方法及其变形

**奇显值分解的**计

二对角化 SVD迭代 SVD等法

- 根据QR迭代保持上Hessenberg形和对称 性的特点可知**T**<sub>4</sub>都是对称三对角阵
- 与非对称QR方法一样,我们这里也假定迭代中所出现的 $T_k$ 都是不可约的

# 位移的选取

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

三对角化

隐式对称QR迭

Jacobi方法

**以曲 L\_\_L**::bit

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

• 与非对称QR迭代中一样,最简单的做法是取 $\mu_k$ 为 $T_k$ 右下角元素

# 位移的选取

- 与非对称QR迭代中一样,最简单的做法是 取 $\mu_k$ 为 $T_k$ 右下角元素
- 但此时有一个更好的取法,即Wilkinson位移

# 位移的选取

# 对称特征值问题的计

● 与非对称QR迭代中一样,最简单的做法是  $取\mu_k$ 为 $T_k$ 右下角元素

- 但此时有一个更好的取法,即Wilkinson位移
- 设 $T_k$ 右下角的 $2 \times 2$ 阶矩阵为 $\begin{pmatrix} \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ \beta_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}$ , 我们取 $\mu_k$ 为该矩阵的两个特征值之中靠近 $\alpha_n$ 的 那一个,即

$$\mu_k = \alpha_n + \delta - \operatorname{sgn}(\delta) \sqrt{\delta^2 + \beta_{n-1}^2}$$

其中
$$\delta = (\alpha_{n-1} - \alpha_n)/2$$

## 两种选取的对比

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

隐式对称OR法(

Jacobi方法

-----

循环Jacobi方法及其变

一分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

• 两种位移最终都是三次收敛的

## 两种选取的对比

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

## 基本性质

对称QR方法

隐式对称OR法化

隐式对称QR迭f

Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变别

### 分法

奇异值分解的计

二对角化

- 两种位移最终都是三次收敛的
- Wilkinson论证了为什么后者优于前者的 理由

# 一次对称QR迭代的实现

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

## 基本性质

对称QR方法

三对角化

隐式对称QR迭值

### Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

### 一分注

## 奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

• 假设一次对称QR迭代的形式为

$$T - \mu I = QR, \quad \tilde{T} = RQ + \mu I$$

## 一次对称QR迭代的实现

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

## 基本性质

对称QR方法

三对鱼化

隐式对称QR选值

### Jacobi方法

经典Jacobi方法 循环 Jacobi方法及其变

### 二分法

奇异值分解的计

SVD迭代

● 假设一次对称QR迭代的形式为

$$T - \mu I = QR$$
,  $\tilde{T} = RQ + \mu I$ 

• 当然可以利用Givens变换直接实现 $T - \mu I$ 的QR分解,进而完成一步迭代

## 一次对称QR迭代的实现

## 对称特征值问题的计

● 假设一次对称QR迭代的形式为

$$T - \mu I = QR, \quad \tilde{T} = RQ + \mu I$$

- 当然可以利用Givens变换直接实 现 $T - \mu I$ 的QR分解,进而完成一步迭代
- 更漂亮的做法是以隐含的方式实现由*T*到*T*的 变换

## 基本想法

对称特征值问题的计

• 根据上Hessenberg约化的唯一性定理,对 于 $\tilde{T} = Q^T T Q$ , $\tilde{T}$ 本质上是由Q的第一列完全 确定的

## 基本想法

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

## 基本性质

对称QR方法

----

隐式对称QR选

### Jacobi方法

经典Jacobi方法 循环Jacobi方法及其变形

二分法

奇异值分解的计

SVD迭代

- 根据上Hessenberg约化的唯一性定理,对于 $\tilde{T} = Q^T T Q$ , $\tilde{T}$ 本质上是由Q的第一列完全确定的
- 利用Givens变换对 $T \mu I$ 进行QR分解,那么 $Qe_1 = G_1e_1$ ,这里 $G_1 = G(1, 2, \theta)$  使得

$$G(1,2,\theta) \begin{pmatrix} \alpha_1 - \mu \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 - \mu \\ \beta_1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 后续约化

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

隨式對称OR法在

隐式对称QR迭f

Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计

二对角化

SVD迭代

SVD算法

•  $\diamond B = G_1 T G_1^T$ , 则 B的左上3 × 3阶矩阵非零,即仅比对称三对角阵多两个非零元

## 后续约化

对称特征值问题的计

- $\Diamond B = G_1 T G_1^T$ ,则B的左上 $3 \times 3$ 阶矩阵非零, 即仅比对称三对角阵多两个非零元
- 将B再用n-1个Givens变换约化为三对角阵 $\tilde{T}$

## 后续约化

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

## 基本性质

对称QR方法

隐式对称QR选化

### Jacobi方法

经典Jacobi方法 循环Jacobi方法及其变形

## 本目估八級的计

3 升7111777周午117171; 二对角化

SVD迭代 SVD算法

- $\phi B = G_1 T G_1^T$ , 则 B的左上3 × 3阶矩阵非零,即仅比对称三对角阵多两个非零元
- 将B再用n-1个Givens变换约化为三对角阵 $\tilde{T}$
- 如此即为带Wilkinson位移的隐式对称QR迭代算法

对称特征值问题的计

• 类比于非对称QR算法,综合前面的讨论,我们 可以得到隐式对称QR算法

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

## 基本性质

对称QR方法

.....

隐式对称QR迭值

### Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

### 二分法

奇异值分解的计:

二对角化

可开阻尔胜的灯桌

类比于非对称QR算法,综合前面的讨论,我们可以得到隐式对称QR算法

• 此时算法的输出为对角阵,元素是A的特征值

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

MATHEMANIA.

隐式对称QR选值

Jacobi方法

循环 lacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计

二对角化 SVD迭代 类比于非对称QR算法,综合前面的讨论,我们可以得到隐式对称QR算法

- 此时算法的输出为对角阵,元素是A的特征值
- 只计算特征值,算法运算量约为4n3/3

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

.....

隐式对称QR选值

Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变形

二分法

 5异值分解的计**3** 

二对角化 SVD迭代 SVD算法

- 类比于非对称QR算法,综合前面的讨论,我们可以得到隐式对称QR算法
- 此时算法的输出为对角阵,元素是A的特征值
- 只计算特征值,算法运算量约为4n³/3
- 这是矩阵计算中最漂亮的算法之一,它是数值 稳定的

对称特征值问题的计

Jacobi方法

● Jacobi方法是求实对称矩阵全部特征值和特征 向量的最古老的方法之一

对称特征值问题的计

Jacobi方法

● Jacobi方法是求实对称矩阵全部特征值和特征 向量的最古老的方法之一

● 它是由C.G.J. Jacobi于1846年首先提出的

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

隐式对称QR迭化

Jacobi方法

340051/312

循环Jacobi方法及其变

奇异值分解的计算

二对角化 SVD迭代

- Jacobi方法是求实对称矩阵全部特征值和特征 向量的最古老的方法之一
- 它是由C.G.J. Jacobi于1846年首先提出的
- 该方法利用了实对称矩阵可以正交相似变换约 化为对角阵的性质,用一系列适当选取的平面 旋转变换将给定矩阵约化为对角阵

对称特征值问题的计 算方法

か 建位

基本性质

对称QR方法

隐式对称QR迭化

Jacobi方法

经典Jacobi方法 循环Jacobi方法及其变形

**本具估公配的计**管

二对角化 SVD迭代 SVD算法

- Jacobi方法是求实对称矩阵全部特征值和特征 向量的最古老的方法之一
- 它是由C.G.J. Jacobi于1846年首先提出的
- 该方法利用了实对称矩阵可以正交相似变换约 化为对角阵的性质,用一系列适当选取的平面 旋转变换将给定矩阵约化为对角阵
- 它的速度相比对称QR方法要相差很远,但它编程简单,并行效率高

## Jacobi方法的目标

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称OR方法

⊕式対称OR性(

Jacobi万况

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其多

二分法

奇异值分解的计算

二对角件

SVD##

SVD算法

• 设 $A = (\alpha_{ij})$ 是 $n \times n$ 实对称矩阵

## Jacobi方法的目标

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

## 基本性质

对称QR方法

三对角化

隐式对称QR选作

### Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其

### 二分法

## 奇异值分解的计算

二对用化 SVD迭代

- 设 $A = (\alpha_{ii})$ 是 $n \times n$ 实对称矩阵
- Jacobi方法的目标就是将A的非对角"范数" E(A)逐步约化为零:

$$E(A) = \left( \|A\|_F^2 - \sum_{i=1}^n \alpha_{ii}^2 \right)^{1/2} = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

## Jacobi方法的目标

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

隐式划数OD进

隐式对称QR选作

Jacobi万没

经典Jacobi方法

二分法

奇异值分解的计算

二对角化 SVD迭代 SVD算法 • 设 $A = (\alpha_{ii}) \mathbb{E} n \times n$ 实对称矩阵

Jacobi方法的目标就是将A的非对角"范数" E(A)逐步约化为零:

$$E(A) = \left( \|A\|_F^2 - \sum_{i=1}^n \alpha_{ii}^2 \right)^{1/2} = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

所采用的基本工具就是由Givens变换定义的平 面旋转变换

## Jacobi变换

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

--- m.h. da. 116

隐式对称QR迭值

Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

• Givens变换 $G(p,q,\theta)$ 也记作 $J(p,q,\theta)$ 

$$J(p, q, \theta) = I + (\cos \theta - 1)(e_p e_p^T + e_q e_q^T) + \sin \theta (e_p e_q^T - e_q e_p^T)$$

## Jacobi变换

经典Jacobi方法

• Givens变换 $G(p,q,\theta)$ 也记作 $J(p,q,\theta)$ 

$$J(p, q, \theta) = I + (\cos \theta - 1)(e_p e_p^T + e_q e_q^T) + \sin \theta (e_p e_q^T - e_q e_p^T)$$

此时假定p < q</li>

## Jacobi变换

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

## 对称QR方法

--- m.h. da. 116

隐式对称QR迭值

### Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其

二分法

5异值分解的计算

——利用化 SVD迭代 SVD算法 • Givens变换 $G(p,q,\theta)$ 也记作 $J(p,q,\theta)$ 

$$J(p, q, \theta) = I + (\cos \theta - 1)(e_p e_p^T + e_q e_q^T) + \sin \theta (e_p e_q^T - e_q e_p^T)$$

- 此时假定p < q</li>
- 这一变换也称为(p,q)平面的Jacobi变换

# Jacobi方法一次约化的步骤

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

二州布化

隐式对称QR选

Jacobi刀孔

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

一分法

奇异值分解的计算

二对角件

SVD##

SVD算法

① 选择旋转平面(p,q),  $1 \leq p < q \leq n$ 

## Jacobi方法一次约化的步骤

## 对称特征值问题的计

经典Jacobi方法

- ① 选择旋转平面 $(p,q), 1 \leq p < q \leq n$
- 确定旋转角θ使得

$$\begin{pmatrix} \beta_{pp} & \beta_{pq} \\ \beta_{qp} & \beta_{qq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}^{T} \begin{pmatrix} \alpha_{pp} & \alpha_{pq} \\ \alpha_{qp} & \alpha_{qq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$$

为对角阵,其中 $c = \cos \theta$ .  $s = \sin \theta$ 

## Jacobi方法一次约化的步骤

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

## 基本性质

对称QR方法

. . . .

隐式对称QR选值

### Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变形

## 二分法

5异值分解的计算

二对角化 SVD迭代 SVD算法

- ① 选择旋转平面(p,q),  $1 \le p < q \le n$
- ② 确定旋转角θ使得

$$\begin{pmatrix} \beta_{pp} & \beta_{pq} \\ \beta_{qp} & \beta_{qq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}^{T} \begin{pmatrix} \alpha_{pp} & \alpha_{pq} \\ \alpha_{qp} & \alpha_{qq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$$

为对角阵,其中 $c = \cos \theta$ ,  $s = \sin \theta$ 

③ 对A进行相似变换:  $B = (\beta_{ij}) = J^T A J$ , 其中 $J = J(p, q, \theta)$ 

## A与B的关系

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

二对用化

隐式对称QR选作

Jacobi方法

经典Jacobi方法

HEPT JACOUT // ////X/90.

一万法

奇异值分解的计

二对角化 SVD迭代 SVD算法 • 矩阵A与B只在第p行/列和第q行/列不同,它们之间有关系如下:

$$\beta_{ip} = \beta_{pi} = c\alpha_{ip} - s\alpha_{iq}, i \neq p, q$$

$$\beta_{iq} = \beta_{qi} = s\alpha_{ip} + c\alpha_{iq}, i \neq p, q$$

$$\beta_{pp} = c^{2}\alpha_{pp} - 2sc\alpha_{pq} + s^{2}\alpha_{qq}$$

$$\beta_{qq} = s^{2}\alpha_{pp} + 2sc\alpha_{pq} + c^{2}\alpha_{qq}$$

$$\beta_{pq} = \beta_{qp} = (c^{2} - s^{2})\alpha_{pq} + sc(\alpha_{pp} - \alpha_{qq})$$

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

**含ませむへ**及注 /

Jacobi方法

AZ dia La Landra

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD读代

SVD算法

● 先假设选定了旋转平面(p,q)

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

## 对称QR方法

-----

隐式对称QR迭

### Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

### 二分法

## 奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

- 先假设选定了旋转平面(p,q)
- 下面根据 $\beta_{pq} = \beta_{qp} = 0$ 求出c, s

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

## 基本性质

对称QR方法

. . . .

隐式对称QR选值

### Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

## 二分法

奇异值分解的计算

SVD迭代

- 先假设选定了旋转平面(p,q)
- 下面根据 $\beta_{pq} = \beta_{qp} = 0$ 求出c, s
- 由 $\beta_{pq}$ 的表达式可知,这等价于计算c, s使得

$$(c^2 - s^2)\alpha_{pq} + sc(\alpha_{pp} - \alpha_{qq}) = 0$$

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

## 基本性质

对称QR方法

三对值化

隐式对称QR迭f

### Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其

## 二分法

奇异值分解的计\$

一 SVD 选代 SVD 算法 • 先假设选定了旋转平面(p,q)

• 下面根据 $\beta_{pq} = \beta_{qp} = 0$ 求出c, s

• 由 $\beta_{pq}$ 的表达式可知,这等价于计算c,s使得

$$(c^2 - s^2)\alpha_{pq} + sc(\alpha_{pp} - \alpha_{qq}) = 0$$

• 若 $\alpha_{pq} = 0$ ,可取c = 1, s = 0

# $\alpha_{pq} \neq 0$ 的情形

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

### 对称QR方法

-----

隐式对称OR法

### Incobi 支斑

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其引

### 二分法

## 奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

• 如果 $\alpha_{pq} \neq 0$ , 令

$$\tau = \frac{\alpha_{qq} - \alpha_{pp}}{2\alpha_{pq}}, t = \tan\theta = \frac{s}{c}$$

# $\alpha_{pq} \neq 0$ 的情形

对称特征值问题的计

经典Jacobi方法

• 如果 $\alpha_{pq} \neq 0$ , 令

$$\tau = \frac{\alpha_{qq} - \alpha_{pp}}{2\alpha_{pq}}, t = \tan\theta = \frac{s}{c}$$

• 由此得到方程 $t^2 + 2\tau t - 1 = 0$ 

# $\alpha_{pq} \neq 0$ 的情形

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

隐式对称QR选作

Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计算

二对角化 SVD迭代 SVD算法 • 如果 $\alpha_{pq} \neq 0$ , 令

$$au = rac{lpha_{qq} - lpha_{pp}}{2lpha_{pq}}, t = an heta = rac{ extsf{s}}{ extsf{c}}$$

- 由此得到方程 $t^2 + 2\tau t 1 = 0$
- 如此*t*有两种选择。选择其绝对值较小的即可, 从而

$$t = \frac{\operatorname{sgn}(\tau)}{|\tau| + \sqrt{1 + \tau^2}}$$

## 对称特征值问题的记 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

-: a4-25-76

隐式对称OR法(

lacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

一分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD##

SVD算法

• 如此选择保证了旋转角 $\theta$ 满足 $|\theta| \leq \pi/4$ , 这对Jacobi方法的收敛性是至关重要的

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

### 对称QR方法

隐式对称OR选供

### Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环 lacobi方注及其本

一分法

### 奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

- 如此选择保证了旋转角 $\theta$ 满足 $|\theta| \leq \pi/4$ , 这对Jacobi方法的收敛性是至关重要的
- 细节见后面的收敛性分析

# 对称特征值问题的计

经典Jacobi方法

• 如此选择保证了旋转角 $\theta$ 满足 $|\theta| \leq \pi/4$ , 这 对Jacobi方法的收敛性是至关重要的

- 细节见后面的收敛性分析
- 确定了t之后, c, s可由下面的公式确定:

$$c = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad s = tc$$

# Frobenius范数的变化

经典Jacobi方法

• 由于Frobenius范数对正交变换保持不变,从  $m \|B\|_F = \|A\|_F$  即

$$\alpha_{\mathit{pp}}^2 + \alpha_{\mathit{qq}}^2 + 2\alpha_{\mathit{pq}}^2 = \beta_{\mathit{pp}}^2 + \beta_{\mathit{qq}}^2$$

# Frobenius范数的变化

# 对称特征值问题的计

经典Jacobi方法

• 由于Frobenius范数对正交变换保持不变,从  $m \|B\|_F = \|A\|_F$  即

$$\alpha_{pp}^2 + \alpha_{qq}^2 + 2\alpha_{pq}^2 = \beta_{pp}^2 + \beta_{qq}^2$$

• 如此我们有

$$E(B)^{2} = \|B\|_{F}^{2} - \sum_{i=1}^{n} \beta_{ii}^{2}$$

$$= \|A\|_{F}^{2} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}^{2} + (\alpha_{pp}^{2} + \alpha_{qq}^{2} - \beta_{pp}^{2} - \beta_{qq}^{2})$$

$$= E(A)^{2} - 2\alpha_{pq}^{2}$$

# 旋转平面的选取

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

二姓伍伊

隐式对称QR迭值

Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及非

二分法

奇异值分解的计算

二对用化 SVD迭代 • 我们的目标是使E(B)尽可能得小,因此(p,q)的最佳选择应使

$$|\alpha_{pq}| = \max_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |\alpha_{ij}|$$

即应选取非对角元中绝对值最大者所在的行列为旋转平面

# 经典Jacobi方法

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

----

隐式对称OR法

Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

• 根据上述原则选择旋转平面(p,q), 然后再确定c,s的方法就是经典Jacobi方法

# 经典Jacobi方法

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

三对角化

隐式对称QR选值

Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变形

二分法

奇异值分解的计算

二对用化 SVD迭代

- 根据上述原则选择旋转平面(p,q), 然后再确定c,s的方法就是<mark>经典Jacobi方法</mark>
- 其基本迭代格式如下:

$$A_k = (\alpha_{ij}^{(k)}) = J_k^T A_{k-1} J_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

其中 $A_0 = A$ ,  $J_k$ 是对 $A_{k-1}$ 如前所确定的Jacobi变换

# 收敛定理

对称特征值问题的计

经典Jacobi方法

## 定理

存在A的特征值的一个排列 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ , 使 得

$$\lim_{k\to\infty}A_k=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$$

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

----

a式对称QR选值

Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其到

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

• 我们先证明随着迭代次数k的增加, $A_k$ 的非对角"范数"  $E(A_k) \to 0$ 

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

----

隐式对称QR选

Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计算

SVD迭代

- 我们先证明随着迭代次数k的增加, $A_k$ 的非对角"范数"  $E(A_k) \to 0$
- 根据前面的讨论,我们有

$$E(A_k)^2 = E(A_{k-1})^2 - 2(\alpha_{pq}^{(k-1)})^2$$

其中 $\alpha_{pq}^{(k-1)}$ 是 $A_{k-1}$ 的非对角元之中绝对值最大者

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

三对角在

隐式对称OR法

Jacobi刀石

经典Jacobi方法

循环Jacobi万法及其实

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

## • 注意到

$$E(A_{k-1})^2 \leq (n^2 - n)(\alpha_{pq}^{(k-1)})^2$$

经典Jacobi方法

注意到

$$E(A_{k-1})^2 \leqslant (n^2 - n)(\alpha_{pq}^{(k-1)})^2$$

从而有

$$E(A_k)^2 \leqslant \left(1 - \frac{2}{n^2 - n}\right) E(A_{k-1})^2$$

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

-: a4-26-75

隐式对称QR选

Jacobi方法

Jacobi / Ji 12

经典Jacobi方法

一分注

奇异值分解的计算

二对角化 SVD迭代 SVD算法 注意到

$$E(A_{k-1})^2 \leqslant (n^2 - n)(\alpha_{pq}^{(k-1)})^2$$

从而有

$$E(A_k)^2 \leqslant \left(1 - \frac{2}{n^2 - n}\right) E(A_{k-1})^2$$

• 系数为与k无关的绝对值小于1的数,由此  $\lim_{k\to\infty} E(A_k) = 0$ 

# 定理的继续证明

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

## 基本性质

对称OR方法

.....

Jacobi // /2

经典 Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计算

二对角件

evroit.

SVD算法

• 下面证明 $\alpha_{ii}^{(k)} \to \lambda_i, k \to \infty$ 

# 定理的继续证明

# 对称特征值问题的计

经典Jacobi方法

- 下面证明 $\alpha_{ii}^{(k)} \to \lambda_i, k \to \infty$
- 假设A的互不相同的特征值之间最小距离为δ

# 定理的继续证明

对称特征值问题的计 算方法

基本性质

对称QR方法

. . . . .

隐式对称QR选化

Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计

SVD迭代

- 下面证明 $\alpha_{ii}^{(k)} \to \lambda_i, k \to \infty$
- 假设A的互不相同的特征值之间最小距离为 $\delta$
- 任取 $\varepsilon$ 满足 $0 < \varepsilon < \delta/4$ ,由  $\lim_{k \to \infty} E(A_k) = 0$  知存 在  $k_0$  使得当  $k \ge k_0$  时有  $E(A_k) < \varepsilon < \delta/4$

邓建松

**垄平**性灰

对称QR方法

隐式对称QR迭值

Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计算

SVD迭代 SVD算法 • 由于 $\lambda(A_{k_0}) = \lambda(A)$ , 对矩阵 $A_{k_0}$ 与其对角元作成的对角阵

$$D_{k_0} = \operatorname{diag}(\alpha_{11}^{(k_0)}, \alpha_{22}^{(k_0)}, \dots, \alpha_{nn}^{(k_0)})$$

应用本章开始给出的Weyl定理可知,存在A的特征值的一个排列 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 使得对 $i = 1, \ldots, n$ 

$$\left|\lambda_i - \alpha_{ii}^{(k_0)}\right| \leqslant \|A_{k_0} - D_{k_0}\|_2 \leqslant E(A_{k_0}) < \varepsilon < \delta/4$$

基本性质

对称QR方法

-----

隐式对称QR迭化

Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

二分法

**奇显值分解的计**管

• 由于 $\lambda(A_{k_0}) = \lambda(A)$ , 对矩阵 $A_{k_0}$ 与其对角元作成的对角阵

$$D_{k_0} = \operatorname{diag}(\alpha_{11}^{(k_0)}, \alpha_{22}^{(k_0)}, \dots, \alpha_{nn}^{(k_0)})$$

应用本章开始给出的Weyl定理可知,存在A的特征值的一个排列 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 使得对 $i = 1, \ldots, n$ 

$$\left|\lambda_i - \alpha_{ii}^{(k_0)}\right| \leqslant \|A_{k_0} - D_{k_0}\|_2 \leqslant E(A_{k_0}) < \varepsilon < \delta/4$$

● 目前来说,特征值的排列是与k<sub>0</sub>有关的

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

资本 社会OD进行

循环Jacobi方法及其变

一分法

奇异值分解的计算

二对角化

evroit #

SVD算法

• 实际上,可以证明这种排列对任意 $k \ge k_0$ 都是一致的(暂缺)

# 对称特征值问题的计

经典Jacobi方法

## • 实际上,可以证明这种排列对任意 $k \ge k_0$ 都是 一致的(暂缺)

● 也说是说,只要能证明上式蕴涵着

$$\left|\lambda_i - \alpha_{ii}^{(k_0+1)}\right| < \varepsilon, i = 1, \dots, n$$

则由归纳法可知对一切 $k \ge k_0$ 有

$$\left|\lambda_{i}-\alpha_{ii}^{(k)}\right|<\varepsilon, i=1,\ldots,n$$

从而定理得证

# 欠缺的一环

对称特征值问题的计

经典Jacobi方法

• 由于 $A_{k_0+1}$ 与 $A_{k_0}$ 的对角元只可能有两个不同:  $\alpha_{pp}^{(k_0+1)}$ 和 $\alpha_{qq}^{(k_0+1)}$ ,所以只需要对i=p,q证明欠 缺的蕴涵关系成立即可

# 欠缺的一环

对称特征值问题的计 算方法

基本性质

对称QR方法

三对角化

隐式对称QR选

Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计算

二对角化 SVD迭代 SVD算法 • 由于 $A_{k_0+1}$ 与 $A_{k_0}$ 的对角元只可能有两个不同: $\alpha_{pp}^{(k_0+1)}$ 和 $\alpha_{qq}^{(k_0+1)}$ ,所以只需要对i=p,q证明欠缺的蕴涵关系成立即可

• 由于t = s/c,根据c,s计算过程, $\alpha_{pq}^{(k_0)}(c^2 - s^2) + (\alpha_{pp}^{(k_0)} - \alpha_{qq}^{(k_0)})cs = 0$ ,所以 $(1 - t^2)\alpha_{pq}^{(k_0)} = t(\alpha_{qq}^{(k_0)} - \alpha_{pp}^{(k_0)})$ 

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

### 对称QR方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi万法及其变

### 二分法

## 奇异值分解的计算

\_\_利用化 SVD进代

....

SVD算法

## • 根据迭代格式, 我们有

$$\begin{split} \alpha_{pp}^{(k_0+1)} &= \alpha_{pp}^{(k_0)} + c^2 \left( -2t\alpha_{pq}^{(k_0)} + t^2 (\alpha_{qq}^{(k_0)} - \alpha_{pp}^{(k_0)}) \right) \\ &= \alpha_{pp}^{(k_0)} + c^2 \left( -2t\alpha_{pq}^{(k_0)} + t(1-t^2)\alpha_{pq}^{(k_0)} \right) \\ &= \alpha_{pp}^{(k_0)} - t\alpha_{pq}^{(k_0)} \\ \alpha_{qq}^{(k_0+1)} &= \alpha_{qq}^{(k_0)} + t\alpha_{pq}^{(k_0)} \end{split}$$

## 对称特征信问题的计

经典Jacobi方法

根据迭代格式,我们有

$$\alpha_{pp}^{(k_0+1)} = \alpha_{pp}^{(k_0)} + c^2 \left( -2t\alpha_{pq}^{(k_0)} + t^2 (\alpha_{qq}^{(k_0)} - \alpha_{pp}^{(k_0)}) \right)$$

$$= \alpha_{pp}^{(k_0)} + c^2 \left( -2t\alpha_{pq}^{(k_0)} + t(1 - t^2)\alpha_{pq}^{(k_0)} \right)$$

$$= \alpha_{pp}^{(k_0)} - t\alpha_{pq}^{(k_0)}$$

$$\alpha_{qq}^{(k_0+1)} = \alpha_{qq}^{(k_0)} + t\alpha_{pq}^{(k_0)}$$

• 从而对任何 $\lambda_i \neq \lambda_n$ 有(注意 $|t| \leq 1$ )

$$\begin{aligned} \left| \alpha_{pp}^{(k_0+1)} - \lambda_j \right| &= \left| \alpha_{pp}^{(k_0)} - \lambda_p + \lambda_p - \lambda_j - t \alpha_{pq}^{(k_0)} \right| \\ &\geqslant \left| \lambda_p - \lambda_j \right| - \left| \alpha_{pp}^{(k_0)} - \lambda_p \right| - \left| t \right| E(A_{k_0}) \\ &\geqslant \delta - \varepsilon - \varepsilon \geqslant 2\varepsilon \end{aligned}$$

# 对称特征值问题的计

经典Jacobi方法

• 由于 $\lambda(A_{k_0+1}) = \lambda(A)$ ,  $E(A_{k_0+1}) < \varepsilon$ , 所以根 据Weyl定理可知, $\alpha_{pp}^{(k_0+1)}$ 必与A的某个特征值之 间的距离小于 $\varepsilon$ 

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

隐式划数OD注(

5440517,711

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其到

二分法

奇异值分解的计算

\_\_\_对用化 SVD迭代

SVD管法

• 由于 $\lambda(A_{k_0+1}) = \lambda(A)$ ,  $E(A_{k_0+1}) < \varepsilon$ , 所以根据Weyl定理可知, $\alpha_{pp}^{(k_0+1)}$ 必与A的某个特征值之间的距离小于 $\varepsilon$ 

• 据前结论, $\left|\lambda_i - \alpha_{ii}^{(k)}\right| < \varepsilon$ 在i = p时成立

# 对称特征值问题的计

经典Jacobi方法

- 由于 $\lambda(A_{k_0+1}) = \lambda(A)$ ,  $E(A_{k_0+1}) < \varepsilon$ , 所以根 据Weyl定理可知, $\alpha_{pp}^{(k_0+1)}$ 必与A的某个特征值之 间的距离小干€
- 据前结论, $\left|\lambda_i \alpha_{ii}^{(k)}\right| < \varepsilon$ 在i = p时成立
- 类似可证该不等式*i* = q时成立

基本性质

对称QR方法

.....

隐式对称QR迭化

nowaya nangi wasi

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计算

SVD迭代 SVD篡法 • 由于 $\lambda(A_{k_0+1}) = \lambda(A)$ ,  $E(A_{k_0+1}) < \varepsilon$ , 所以根据Weyl定理可知, $\alpha_{pp}^{(k_0+1)}$ 必与A的某个特征值之间的距离小于 $\varepsilon$ 

- 据前结论, $\left|\lambda_i \alpha_{ii}^{(k)}\right| < \varepsilon$ 在i = p时成立
- 类似可证该不等式i = q时成立
- 定理证明完成

# 注解

对称特征值问题的计

经典Jacobi方法

● 从定理的证明可见, $|t| \leq 1$ 对经典Jacobi方法的 收敛起了至关重要的作用。它保证了迭代产生 的每一个对角元一致地趋向于A的某一个固定 的特征值

# 注解

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

隐式对称OR货化

隐式对称QR选值

## Jacobi方法 经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变形

二分法

5异值分解的计3

ー 州 用 化 SVD 迭 代 SVD 算 法

- 从定理的证明可见, $|t| \leq 1$ 对经典Jacobi方法的收敛起了至关重要的作用。它保证了迭代产生的每一个对角元一致地趋向于A的某一个固定的特征值
- 证明也给出了经典Jacobi方法的收敛速度的一个粗略的估计:

$$E(A_k)^2 \leqslant \left(1 - \frac{2}{n^2 - n}\right)^k E(A_0)^2$$

# 注解

对称特征值问题的计

经典Jacobi方法

● 从定理的证明可见, $|t| \leq 1$ 对经典Jacobi方法的 收敛起了至关重要的作用。它保证了迭代产生 的每一个对角元一致地趋向于A的某一个固定 的特征值

● 证明也给出了经典Jacobi方法的收敛速度的一 个粗略的估计:

$$E(A_k)^2 \leqslant \left(1 - \frac{2}{n^2 - n}\right)^k E(A_0)^2$$

• 这表明经典Jacobi方法是线性收敛的

# 扫描

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

Market Market

10000011119610021

Jacobi刀程

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

通常将N = (n² - n)/2次Jacobi迭代称为一次扫描

# 扫描

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

## 基本性质

## 对称QR方法

. . . . .

隐式对称QR迭化

### Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

## 二分法

## 奇异值分解的计

二对用化 SVD迭代

- 通常将 $N = (n^2 n)/2$ 次Jacobi迭代称为一次扫描
- 可以证明经典Jacobi方法的渐近收敛速度是二次的,即存在常数c > 0,对充分大的k

$$E(A_{k+N}) \leqslant cE(A_k)^2$$

# 扫描

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

## 基本性质

对称QR方法

三对角化

隐式对称QR选

Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变形

二分法

奇异值分解的计算

二对角化 SVD迭代 SVD算法

- 通常将 $N = (n^2 n)/2$ 次Jacobi迭代称为一次扫描
- 可以证明经典Jacobi方法的渐近收敛速度是二次的,即存在常数c > 0,对充分大的k

$$E(A_{k+N}) \leqslant cE(A_k)^2$$

所以每扫描一次,其非对角"范数"将以平方收 敛的速度接近于零

# 循环Jacobi方法

对称特征值问题的计

循环Jacobi方法及其变形

• 经典Jacobi方法中每进行一次相似变换,所需 的运算仅为O(n), 而确定旋转平面却需要进 行 $(n^2 - n)/2$ 个元素比较

# 循环Jacobi方法

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

-----

隐式对称QR迭位

Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变形

二分法

奇异值分解的计算

二对角化 SVD迭代 • 经典Jacobi方法中每进行一次相似变换,所需的运算仅为O(n), 而确定旋转平面却需要进行 $(n^2-n)/2$ 个元素比较

所以经典Jacobi方法的大部分时间用在了寻找 最佳的旋转平面上

## 循环Jacobi方法

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

隐式对称QR选值

Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变形

二分法

· 子值分解的计算

二对角化 SVD迭代 SVD算法 • 经典Jacobi方法中每进行一次相似变换,所需的运算仅为O(n),而确定旋转平面却需要进行 $(n^2-n)/2$ 个元素比较

- 所以经典Jacobi方法的大部分时间用在了寻找 最佳的旋转平面上
- 一种变通方法:直接按某种预定顺序对每个非对角元消去一次,这就是所谓的循环Jacobi方法

# 自然的遍历顺序

对称特征值问题的计

循环Jacobi方法及其变形

• 在循环Jacobi方法中,最自然的遍历非对角元 的顺序是

$$(1,2),\ldots,(1,n);(2,3),\ldots,(2,n);\ldots,(n-1,n)$$

# 自然的遍历顺序

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

-----

隐式对称QR迭化

Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变形

二分沒

5异值分解的计:

CVD 算法

在循环Jacobi方法中,最自然的遍历非对角元的顺序是

$$(1,2),\ldots,(1,n);(2,3),\ldots,(2,n);\ldots,(n-1,n)$$

这种方法也可以证明是渐近平方收敛的,但它相比于经典Jacobi方法要快很多

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

2 vd-46.4k

節式対称OR法

Jacobi万省

经典 beobits

循环Jacobi方法及其变形

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

在实际计算中用得最多的是循环Jacobi方法的 一种变体,即过关Jacobi方法

对称特征值问题的计

循环Jacobi方法及其变形

● 在实际计算中用得最多的是循环Jacobi方法的 一种变体,即过关Jacobi方法

● 在该变体中, 先确定一个正数 (称为关值), 在一次扫描中只对那些绝对值超过关值的非对 角元所在的平面进行Jacobi变换

对称特征值问题的计 算方法

基本性质

对称QR方法

隐式对称QR迭位

Jacobi方法 <sup>经典Jacobi方法</sup>

循环Jacobi方法及其变形

二分法

5异值分解的计

二对角化 SVD迭代 SVD算法

- 在实际计算中用得最多的是循环Jacobi方法的 一种变体,即过关Jacobi方法
- 在该变体中,先确定一个正数(称为关值), 在一次扫描中只对那些绝对值超过关值的非对 角元所在的平面进行Jacobi变换
- 如此反复扫描,当所有的非对角元的绝对值都 不超过关值时,减小关值,再进行类似扫描

对称特征值问题的计 算方法

基本性质

对称QR方法

隐式对称QR迭

Jacobi方法

经具Jacobi万法 循环Jacobi方法及其变形

二分法

5异值分解的计:

二对角化 SVD迭代 SVD算法

- 在实际计算中用得最多的是循环Jacobi方法的 一种变体,即过关Jacobi方法
- 在该变体中,先确定一个正数(称为关值), 在一次扫描中只对那些绝对值超过关值的非对 角元所在的平面进行Jacobi变换
- 如此反复扫描,当所有的非对角元的绝对值都 不超过关值时,减小关值,再进行类似扫描
- 直至关值充分小时结束

## 关值的选取

对称特征值问题的计

循环Jacobi方法及其变形

• 常用的关值是按如下方式选取的:

$$\delta_0 = E(A), \delta_k = \frac{\delta_{k-1}}{\sigma}$$

其中 $\sigma > n$ 是一个固定的正数

# 关值的选取

对称特征值问题的计

循环Jacobi方法及其变形

• 常用的关值是按如下方式选取的:

$$\delta_0 = E(A), \delta_k = \frac{\delta_{k-1}}{\sigma}$$

其中 $\sigma > n$ 是一个固定的正数

• 可以证明: 针对如此选取的关值, 过 关Jacobi方法是收敛的

## Jacobi方法中特征向量的计算

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

### 对称QR方法

7/1//J/Q1/7/1/2

W -buttle on the

隐式对称QR选作

### Jacobi / 1 12

**25.番 にこし**いおか

循环Jacobi方法及其变形

二分法

### 奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

• 经过k次变换后迭代停止,则我们有

$$A_k = Q_k^T A Q_k$$

其中
$$Q_k = J_1 J_2 \cdots J_k$$

## Jacobi方法中特征向量的计算

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

=: a+.6a1b

隐式对称QR迭值

Jacobi方法

-----

循环Jacobi方法及其变形

二分法

5异值分解的计算

二对角化

● 经过k次变换后迭代停止,则我们有

$$A_k = Q_k^T A Q_k$$

其中
$$Q_k = J_1 J_2 \cdots J_k$$

• 由于 $A_k$ 的非对角元已非常小,那么A的对角元就是特征值的近似, $Q_k$ 的列向量就是A的特征向量近似

## 二分法

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

----

隐式对称QR迭位

Jacobi刀石

All districts

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

• 本节介绍求一个实对称三对角阵*T*的任意指定 特征值的二分法

## 二分法

## 对称特征值问题的计

## ▲ 本节介绍求一个实对称三对角阵 T的任意指定 特征值的二分法

• 设T的对角元为 $\alpha_i$ , i = 1, ..., n; 次对角元为 $\beta_i$ ,  $i = 2, \ldots, n$ 

## 二分法

## 对称特征值问题的计 算方法

## 对称QR方法

隐式对称QR迭化

## Jacobi方法

经典Jacobi方法 循环Jacobi方法及其变形

二分法

## 分异值分解的计算

二对角化 SVD迭代 SVD管注

- 本节介绍求一个实对称三对角阵*T*的任意指定 特征值的二分法
- 设T的对角元为 $\alpha_i$ , i = 1, ..., n; 次对角元为 $\beta_i$ , i = 2, ..., n
- 假定次对角元非零:不可约实对称三对角阵

# 顺序主子式

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

7 - h - 1 7 - A - 1 - 1

Jacobi方注

循环Jacobi方法及其变

一分注

奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

• 记 $p_i(\lambda)$ 表示 $T - \lambda I$ 的i阶顺序主子式

## 顺序主子式

## 对称特征值问题的计

• 记 $p_i(\lambda)$ 表示 $T = \lambda I$ 的i阶顺序主子式

则*p<sub>i</sub>*(λ)满足下面的三项递推公式:

$$p_0(\lambda) = 1, \quad p_1(\lambda) = \alpha_1 - \lambda$$
  

$$p_i(\lambda) = (\alpha_i - \lambda)p_{i-1}(\lambda) - \beta_i^2 p_{i-2}(\lambda)$$
  

$$i = 2, \dots, n$$

## 顺序主子式

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

付称QR方法

\_\_\_\_

隐式对称QR选

### Jacobi方法

经重 Insohipit

循环Jacobi方法及其变

### 二分法

奇异值分解的计

SVD迭代 SVD算法

- 记 $p_i(\lambda)$ 表示 $T \lambda I$ 的i阶顺序主子式
- 则 $p_i(\lambda)$ 满足下面的三项递推公式:

$$p_0(\lambda) = 1, \quad p_1(\lambda) = \alpha_1 - \lambda$$
  

$$p_i(\lambda) = (\alpha_i - \lambda)p_{i-1}(\lambda) - \beta_i^2 p_{i-2}(\lambda)$$
  

$$i = 2, \dots, n$$

• 由于T实对称,所以 $p_i(\lambda)$ 的根都是实的

邓建松

### 基本性质

### 对称QR方法

隐式对称OR法例

### Jacobi 支法

经重 lacobi方法

循环Jacobi方法及其变

### 二分法

## 奇异值分解的计算

SVD迭代

SVD算法

• 设
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
, 则

$$p_0(\lambda) = 1$$
 $p_1(\lambda) = 1 - \lambda$ 

$$p_2(\lambda) = (1-\lambda)^2 - 1$$

$$p_3(\lambda) = (1-\lambda)^3 - 2(1-\lambda)$$

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

### 对称QR方法

-----

隐式对称OR法

一分法

### 奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

## 定理

① 存在正数M, 使得当 $\lambda > M$ 时, $p_i(-\lambda) > 0$ , 而 $p_i(\lambda)$ 的符号为 $(-1)^i$ 

## 对称特征值问题的计

## 定理

- ① 存在正数M, 使得当 $\lambda > M$ 时,  $p_i(-\lambda) > 0$ , 而 $p_i(\lambda)$ 的符号为 $(-1)^i$
- ② 相邻两个多项式没有公共根

## 定理

- ① 存在正数M, 使得当 $\lambda > M$ 时,  $p_i(-\lambda) > 0$ , 而 $p_i(\lambda)$ 的符号为 $(-1)^i$
- ② 相邻两个多项式没有公共根
- ③ 若 $p_i(\mu) = 0$ , 则 $p_{i-1}(\mu)p_{i+1}(\mu) < 0$

## 对称特征值问题的计

## 定理

- ① 存在正数M, 使得当 $\lambda > M$ 时,  $p_i(-\lambda) > 0$ . 而 $p_i(\lambda)$ 的符号为 $(-1)^i$
- △ 相邻两个多项式没有公共根
- ③ 若 $p_i(\mu) = 0$ , 则 $p_{i-1}(\mu)p_{i+1}(\mu) < 0$
- **4**  $p_i(\lambda)$ 的根全是单重的,并且 $p_i(\lambda)$ 的根严格分 离 $p_{i+1}(\lambda)$ 的根

# 性质1,2的证明

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

三对角化

8式对称QR选

Jacobi刀石

经典 Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

• 根据 $p_i(\lambda)$ 的定义,其首项为 $(-1)^i \lambda^i$ ,所以性质1成立

# 性质1,2的证明

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

### 对称QR方法

三对角化

隐式对称QR选作

### Jacobi万没

经具Jacobi万法 循环Jacobi方法及其变形

### 二分法

奇异值分解的计算

二对角化 SVD迭代 SVD算法

- 根据*p<sub>i</sub>*(λ)的定义,其首项为(-1)<sup>*i*</sup>λ<sup>*i*</sup>,所以性质1成立
- 性质2的证明: 采用反证法。假设存在某个i,  $p_{i-1}(\lambda)$ 与 $p_i(\lambda)$ 有公共根 $\mu$ , 那么由三项递推公式

$$0 = p_i(\mu) = (\alpha_i - \mu)p_{i-1}(\mu) - \beta_i^2 p_{i-2}(\mu)$$

而 $\beta_i \neq 0$ , 所以有 $p_{i-2}(\mu) = 0$ , 以此类推可得 $p_0(\mu) = 0$ , 矛盾

# 性质3的证明

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

急式対称OR法(

Jacobi方法

经典 Jacobi 方法

循环Jacobi方法及其多

一分注

奇异值分解的计算

二对角体

evroit #

SVD算法

• 设 $p_i(\mu) = 0$ 

# 性质3的证明

## 对称特征值问题的计

• 设
$$p_i(\mu) = 0$$

• 代入三项递推关系,可得

$$p_{i+1}(\mu) = -\beta_{i+1}^2 p_{i-1}(\mu)$$

# 性质3的证明

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

### 对称QR方法

三对角化

隐式对称QR选值

### Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变形

二分法

二对角化 SVD迭代 SVD篡法

• 设
$$p_i(\mu) = 0$$

• 代入三项递推关系,可得

$$p_{i+1}(\mu) = -\beta_{i+1}^2 p_{i-1}(\mu)$$

• 由性质2, $\mu$ 不是 $p_{i+1}(\lambda)$ 和 $p_{i-1}(\lambda)$ 的根,从而可知 $p_{i-1}(\mu)p_{i+1}(\mu) < 0$ 

# 性质4的证明

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

### 对称QR方法

S - P SHEW OD IS

循环Jacobi方法及其图

### 一分注

### 奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

## 采用数学归纳法

•  $\exists i = 1 \exists p_1(\lambda) = \alpha_1 - \lambda$ ,  $\exists \alpha_1 \not\in p_1(\lambda)$  的单根

# 性质4的证明

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

对称QR方法

......

隐式对称QR迭位

### Jacobi方法

短典Jacobi万法 循环Jacobi方法及其变形

### 二分法

奇异值分解的计算

二对角化 SVD迭代 SVD算法

## 采用数学归纳法

- $\exists i = 1 \exists p_1(\lambda) = \alpha_1 \lambda$ ,  $\exists \alpha_1 \neq p_1(\lambda)$  的单根
- 当i = 2时,由于 $p_2(\alpha_1) = -\beta_2^2 < 0$ ,而且根据性质1,当 $\lambda$ 充分大时有 $p_2(\pm \lambda) > 0$ ,因此在 $(-\infty, \alpha_1)$ 和 $(\alpha_1, +\infty)$ 之内各有 $p_2(\lambda)$ 的一个根,而且 $\alpha_1$ 严格分隔这两个根

# 性质4的证明

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

隐式对称OR法

Jacobi支注

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变形

二分法

5异值分解的计算

二对角化 SVD迭代 SVD等法 采用数学归纳法

- 当i = 1时 $p_1(\lambda) = \alpha_1 \lambda$ ,即 $\alpha_1$ 是 $p_1(\lambda)$ 的单根
- 当i = 2时,由于 $p_2(\alpha_1) = -\beta_2^2 < 0$ ,而且根据性质1,当 $\lambda$ 充分大时有 $p_2(\pm \lambda) > 0$ ,因此在 $(-\infty, \alpha_1)$ 和 $(\alpha_1, +\infty)$ 之内各有 $p_2(\lambda)$ 的一个根,而且 $\alpha_1$ 严格分隔这两个根
- 假设性质在i = k时成立,即 $p_{k-1}(\lambda)$ 和 $p_k(\lambda)$ 的 根都是单根,并且 $p_{k-1}(\lambda)$ 的根严格分隔 $p_k(\lambda)$ 的根

邓建松

基本性质

### 对称QR方法

隐式对称OR法(

### 1---b:+>H

....

循环Jacobi方法及其变

一分注

### 奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

## • 设 $p_{k-1}(\lambda)$ 和 $p_k(\lambda)$ 的根分别为

$$\nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_{k-1}, \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k$$

则由归纳假设可知

$$\mu_1 < \nu_1 < \mu_2 < \nu_2 < \dots < \nu_{k-1} < \mu_k$$

# 对称特征值问题的计

## • 设 $p_{k-1}(\lambda)$ 和 $p_k(\lambda)$ 的根分别为

$$\nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_{k-1}, \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k$$

则由归纳假设可知

$$\mu_1 < \nu_1 < \mu_2 < \nu_2 < \dots < \nu_{k-1} < \mu_k$$

• 应用三项递推公式可有

$$p_{k+1}(\mu_j) = -\beta_{k+1}^2 p_{k-1}(\mu_j), j = 1, \dots, k$$

邓建松

基本性质

### 对称QR方法

er dan triange in the

### Jacobi方法

...

循环Jacobi方法及其变

一分注

### 奇异值分解的计算

二对角化

SVD选行

SVD算法

• 根据性质1和 $p_{k-1}(\nu_j) = 0 \ (1 \leqslant j \leqslant k-1)$ 可 知 $(-1)^{j-1}p_{k-1}(\mu_j) > 0, \ j = 1, 2, ..., k$ 

邓建松

基本性质

### 对称QR方法

隐式对称OR法(

....

循环Jacobi方法及其多

二分法

### 奇异值分解的计算

SVD迭代

SVD算法

- 根据性质1和 $p_{k-1}(\nu_j) = 0 \ (1 \leq j \leq k-1)$ 可 知 $(-1)^{j-1}p_{k-1}(\mu_j) > 0, \ j = 1, 2, ..., k$
- 于是 $(-1)^{j}p_{k+1}(\mu_{j}) > 0, j = 1, 2, ..., k$

邓建松

### 基本性质

### 对称QR方法

----

隐式对称QR迭代

## Jacobi方法

经典Jacobi方法 循环Jacobi方法及其变形

### 二分法

奇异值分解的计算

SVD迭代 SVD算法 • 根据性质1和 $p_{k-1}(\nu_j) = 0 \ (1 \leqslant j \leqslant k-1)$ 可 知 $(-1)^{j-1}p_{k-1}(\mu_j) > 0, \ j = 1, 2, ..., k$ 

- 于是 $(-1)^{j}p_{k+1}(\mu_{j}) > 0$ , j = 1, 2, ..., k
- 再注意到对充分大的正数 $\mu$ 有 $p_{k+1}(-\mu) > 0$ ,  $(-1)^{k+1}p_{k+1}(\mu) > 0$ , 所以在区间 $(-\infty, \mu_1)$ ,  $(\mu_1, \mu_2)$ , ...,  $(\mu_{k-1}, \mu_k)$ ,  $(\mu_k, +\infty)$ 内都有 $p_{k+1}(\lambda)$ 的根

## 基本性质

对称QR方法

=: a4.46.7b

隐式对称QR迭代

Jacobi方法

经典Jacobi方法 循环Jacobi方法及其变别

二分法

奇异值分解的计算

二对角化 SVD迭代 SVD算法

- 根据性质1和 $p_{k-1}(\nu_j) = 0 \ (1 \leq j \leq k-1)$ 可 知 $(-1)^{j-1}p_{k-1}(\mu_j) > 0, \ j = 1, 2, ..., k$
- 于是 $(-1)^{j}p_{k+1}(\mu_{j}) > 0$ , j = 1, 2, ..., k
- 再注意到对充分大的正数 $\mu$ 有 $p_{k+1}(-\mu) > 0$ ,  $(-1)^{k+1}p_{k+1}(\mu) > 0$ , 所以在区间 $(-\infty, \mu_1)$ ,  $(\mu_1, \mu_2)$ , ...,  $(\mu_{k-1}, \mu_k)$ ,  $(\mu_k, +\infty)$ 内都有 $p_{k+1}(\lambda)$ 的根
- 这就完成了证明

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

### 对称QR方法

.....

#### Jacobi

AZ (8) 1 1 1 1 1 1 1 2 2

循环Jacobi方法及其到

二分法

### 奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

根据性质可知,不可约三对角对称矩阵的特征 值都是单重实数

# 对称特征值问题的计

• 根据性质可知,不可约三对角对称矩阵的特征 值都是单重实数

• 对任意给定的实数 $\mu$ , 定义 $s_k(\mu)$ 表示数 列 $p_0(\mu), p_1(\mu), \ldots, p_k(\mu)$ 的变号数

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

对称QR方法

二对用化

隐式对称QR选作

### Jacobi方法

经典Jacobi方法 循环 Jacobi方法及其变现

二分法

### 奇异值分解的计算

二对角化 SVD迭代 SVD算法

- 根据性质可知,不可约三对角对称矩阵的特征 值都是单重实数
- 对任意给定的实数 $\mu$ , 定义 $s_k(\mu)$ 表示数 列 $p_0(\mu)$ ,  $p_1(\mu)$ , ...,  $p_k(\mu)$ 的变号数
- 规定: 如果 $p_i(\mu) = 0$ ,则 $p_i(\mu)$ 与 $p_{i-1}(\mu)$ 同号 (注意, $p_{i-1}(\mu)$ 不可能也为零)

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

--/1/11/0

隐式对称QR迭值

Jacobi方法

经典Jacobi方法 循环Jacobi方法及其变形

二分法

奇异值分解的计算

—对用化 SVD迭代 SVD算法

- 根据性质可知,不可约三对角对称矩阵的特征 值都是单重实数
- 对任意给定的实数 $\mu$ , 定义 $s_k(\mu)$ 表示数列 $p_0(\mu), p_1(\mu), \dots, p_k(\mu)$ 的变号数
- 规定: 如果 $p_i(\mu) = 0$ , 则 $p_i(\mu)$ 与 $p_{i-1}(\mu)$ 同号(注意, $p_{i-1}(\mu)$ 不可能也为零)
- 例:对前面的三阶矩阵例, $\mu = 1$ ,则我们有  $p_0(1) = 1$ ,  $p_1(1) = 0$ ,  $p_2(1) = -1$ ,  $p_3(1) = 0$

所以变号数
$$s_3(1) = 1$$

# 变号数与根的个数

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

三对角化

隐式对称QR选值

Jacobi方法

-----

循环Jacobi方法及其变形

二分法

5异值分解的计算

二对角化 SVD迭代

## 定理

若T为不可约对称三对角矩阵,则 $s_k(\mu)$ 

(1 ≤ k ≤ n)恰好是 $p_k(\lambda)$ 在区间 $(-\infty, \mu)$ 内根的个数

## 推论

若T为不可约对称三对角矩阵,则 $s_n(\mu)$  恰好是T在区间 $(-\infty, \mu)$ 内特征值的个数

# 定理的证明

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

三对角化

式对称QR选

Jacobi /J i

**松曲 Landing** 

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

## 采用数学归纳法

• 当k = 1时定理显然成立

# 定理的证明

## 对称特征值问题的计

## 采用数学归纳法

- 当k = 1时定理显然成立
- 假设当 $k = \ell$ 时定理成立

## 定理的证明

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

对称QR方法

三对角化

第式对称**OR**选付

#### Jacobi方法

经典Jacobi方法

一分法

### 奇异值分解的计

二对角化 SVD迭代

## 采用数学归纳法

- 当k = 1时定理显然成立
- 假设当 $k = \ell$ 时定理成立
- 设 $p_{\ell}(\lambda)$ 和 $p_{\ell+1}(\lambda)$ 的根分别为

$$\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_\ell, \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{\ell+1}$$

则根据性质4,

$$\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \dots < \mu_{\ell} < \lambda_{\ell+1}$$

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称OR方法

三对鱼鱼

资本 社会OD进行

Jacobi方法

Art office and a section of

循环Jacobi方法及其变

一分注

奇异值分解的计算

二对角化

evroit #

SVD算法

• 设 $s_{\ell}(\mu) = m$ , 则由归纳假设可知 $\mu_m < \mu \leqslant \mu_{m+1}$ 

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

### 对称OR方法

.....

隐式对称QR选作

#### -----

经典 Jacobi 方》

循环Jacobi方法及其变

二分法

### 奇异值分解的计算

\_\_对用化 SVD迭代

SVD算法

• 设
$$s_{\ell}(\mu) = m$$
, 则由归纳假设可知 $\mu_m < \mu \leqslant \mu_{m+1}$ 

• 注意到 $\mu_m < \lambda_{m+1} < \mu_{m+1}$ ,从而 $\mu$ 所在的位置有两种可能性:

$$\lambda_m < \mu_m < \mu \leqslant \lambda_{m+1} \neq \lambda_{m+1} < \mu \leqslant \mu_{m+1}$$

基本性质

对称QR方法

.....

隐式对称QR选作

Jacobi方法

二分法

奇异值分解的计算

ー 内用化 SVD迭代 SVD算法

• 设
$$s_{\ell}(\mu) = m$$
, 则由归纳假设可知 $\mu_m < \mu \leqslant \mu_{m+1}$ 

• 注意到 $\mu_m < \lambda_{m+1} < \mu_{m+1}$ ,从而 $\mu$ 所在的位置有两种可能性:

$$\lambda_m < \mu_m < \mu \leqslant \lambda_{m+1} \neq \lambda_{m+1} < \mu \leqslant \mu_{m+1}$$

• 注意到

$$p_{\ell}(\mu) = \prod_{i=1}^{\ell} (\mu_i - \mu), p_{\ell+1} = \prod_{i=1}^{\ell+1} (\lambda_i - \mu)$$

# $\lambda_m < \mu_m < \mu \le \lambda_{m+1}$ 时

## 对称特征值问题的计

•  $\exists \lambda_m < \mu_m < \mu \leqslant \lambda_{m+1}$  时,可 知 $p_{\ell}(\mu)$ 与 $p_{\ell+1}(\mu)$ 同号,即使 $\mu = \lambda_{m+1}$ 按规定此 两数也是同号的

# $\lambda_{m} < \mu_{m} < \mu \leqslant \lambda_{m+1}$ 时

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

## 对称QR方法

三对角化

隐式对称QR选

### Jacobi方法

经典Jacobi方法 循环Jacobi方法及其变形

二分法

### 奇异值分解的计算

二对角化 SVD迭代

- 当 $\lambda_m < \mu_m < \mu \leq \lambda_{m+1}$ 时,可 知 $p_{\ell}(\mu)$ 与 $p_{\ell+1}(\mu)$ 同号,即使 $\mu = \lambda_{m+1}$ 按规定此 两数也是同号的
- 从而 $s_{\ell+1}(\mu) = s_{\ell}(\mu) = m$ , 这正好是 $p_{\ell+1}(\lambda)$ 在区间 $(-\infty, \mu)$ 内根的个数

# $\lambda_{m+1} < \mu \leqslant \mu_{m+1}$ 时

对称特征值问题的计 算方法

基本性质

对称QR方法

隐式对称QR迭值

Jacobi方法

经典Jacobi方法

一厶汪

奇异值分解的计算

\_\_对用化 SVD迭代 当 $\lambda_{m+1} < \mu \leqslant \mu_{m+1}$ 时,我们分两种情况证明 $s_{\ell+1}(\mu) = m+1$ 

• 若 $\mu < \mu_{m+1}$ , 则 $p_{\ell}(\mu)$ 与 $p_{\ell+1}(\mu)$ 异号,因而 $s_{\ell+1}(\mu) = s_{\ell}(\mu) + 1 = m+1$ 

# $\lambda_{m+1} < \mu \leqslant \mu_{m+1}$ 时

对称特征值问题的计 算方法

基本性质

对称QR方法

節式対称OR法(

Jacobi方法

经典Jacobi方法 循环Jacobi方法及其变形

二分法

奇异值分解的计算

二对角化 SVD迭代 SVD算法 当 $\lambda_{m+1} < \mu \leqslant \mu_{m+1}$ 时,我们分两种情况证明 $s_{\ell+1}(\mu) = m+1$ 

- 若 $\mu < \mu_{m+1}$ ,则 $p_{\ell}(\mu)$ 与 $p_{\ell+1}(\mu)$ 异号,因而 $s_{\ell+1}(\mu) = s_{\ell}(\mu) + 1 = m+1$
- 若 $\mu = \mu_{m+1}$ ,则此时有 $p_{\ell}(\mu) = 0$ ,接约 定 $p_{\ell}(\mu)$ 与 $p_{\ell-1}(\mu)$  同号。由性质3可知,  $p_{\ell-1}(\mu)$ 与 $p_{\ell+1}(\mu)$ 异号,因而 $p_{\ell+1}(\mu)$ 与 $p_{\ell}(\mu)$ 异号,从而 $s_{\ell+1}(\mu) = s_{\ell}(\mu) + 1 = m + 1$

# $\lambda_{m+1} < \mu \leqslant \mu_{m+1}$ 时

对称特征值问题的计 算方法

基本性质

对称QR方法

隐式对称QR迭化

Jacobi方法

经典Jacobi方法 循环Jacobi方法及其变形

二分法

奇异值分解的计算

二对用化 SVD迭代 SVD算法 当 $\lambda_{m+1} < \mu \leqslant \mu_{m+1}$ 时,我们分两种情况证明 $s_{\ell+1}(\mu) = m+1$ 

- 若 $\mu < \mu_{m+1}$ ,则 $p_{\ell}(\mu)$ 与 $p_{\ell+1}(\mu)$ 异号,因而 $s_{\ell+1}(\mu) = s_{\ell}(\mu) + 1 = m+1$
- 若 $\mu = \mu_{m+1}$ ,则此时有 $p_{\ell}(\mu) = 0$ ,按约定 $p_{\ell}(\mu)$ 与 $p_{\ell-1}(\mu)$ 同号。由性质3可知, $p_{\ell-1}(\mu)$ 与 $p_{\ell+1}(\mu)$ 异号,因而 $p_{\ell+1}(\mu)$ 与 $p_{\ell}(\mu)$ 异号,从而 $s_{\ell+1}(\mu) = s_{\ell}(\mu) + 1 = m + 1$
- 根据归纳假设,这就完成了证明

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

-: a4.46.7b

隐式对称OR法

EL9QJaCODI/J1/2

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

• 利用定理的推论,我们可以用二分法求*T*的任何一个指定的特征值

- 利用定理的推论,我们可以用二分法求*T*的任 何一个指定的特征值
- 设T的特征值为 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

### 对称QR方法

. . . .

隐式对称QR选作

#### Jacobi方法

AMERICA I SHOW TO ARE

相外Jacobi万次次列

#### 二分法

### 奇异值分解的计

二对角化

- 利用定理的推论,我们可以用二分法求T的任何一个指定的特征值
- 设T的特征值为 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$
- 则必有 $|\lambda_i| \leq \rho(T) \leq ||T||_{\infty}$

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

### 对称QR方法

三对角化

隐式对称QR选作

### Jacobi方法

经典Jacobi方法 循环Jacobi方法及其变形

### 二分法

奇异值分解的计算

二对角化 SVD迭代 SVD算法

- 利用定理的推论,我们可以用二分法求*T*的任何一个指定的特征值
- 设T的特征值为 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$
- 则必有 $|\lambda_i| \leq \rho(T) \leq ||T||_{\infty}$
- 假定我们期望求T的第m个特征值 $\lambda_m$ ,我们先取

$$\ell_0 = -\|T\|_{\infty}, u_0 = \|T\|_{\infty}$$

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

等すがおり 連

EX MACORINI NO

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

• 根据设定, $\lambda_m$ 必在区间[ $\ell_0, u_0$ ]内

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

### 对称QR方法

隐式对称OR法(

#### Jacobi方法

....

循环Jacobi方法及其到

#### 二分法

### 奇异值分解的计算

二对角化

SVD选件

SVD算法

- 根据设定, $\lambda_m$ 必在区间[ $\ell_0, u_0$ ]内
- 取[ $\ell_0$ ,  $u_0$ ]的中点 $r_1 = (\ell_0 + u_0)/2$ , 计算 $s_n(r_1)$

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

### 对称QR方法

- al 45 Ib

隐式对称QR选值

#### Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

#### 二分法

### 奇异值分解的计算

二对角化

可开阻尔胜的目

• 根据设定, $\lambda_m$ 必在区间[ $\ell_0, u_0$ ]内

- 取[ $\ell_0$ ,  $u_0$ ]的中点 $r_1 = (\ell_0 + u_0)/2$ , 计算 $s_n(r_1)$ 
  - 若 $s_n(r_1) \ge m$ , 则 $\lambda \in [\ell_0, r_1]$ , 于是取 $\ell_1 = \ell_0$ ,  $u_1 = r_1$

## 对称特征值问题的计

## 根据设定, λ<sub>m</sub>必在区间[ℓ<sub>0</sub>, u<sub>0</sub>]内

- $\mathfrak{P}[\ell_0, u_0]$ 的中点 $r_1 = (\ell_0 + u_0)/2$ , 计算 $s_n(r_1)$ 
  - $\mathfrak{R}\ell_1 = \ell_0, \ u_1 = r_1$
  - 否则 $\lambda \in [r_1, u_0]$ , 于是取 $\ell_1 = r_1, u_1 = u_0$

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

对称QR方法

W-halfkonit /

隐式对称QR选作

### Jacobi万法

经具Jacobi万法 循环Jacobi方法及其变形

### 二分法

奇异值分解的计算

二对角化 SVD迭代 SVD算法

- 根据设定, $\lambda_m$ 必在区间[ $\ell_0, u_0$ ]内
- 取[ $\ell_0$ ,  $u_0$ ]的中点 $r_1 = (\ell_0 + u_0)/2$ , 计算 $s_n(r_1)$ 
  - 若 $s_n(r_1) \ge m$ , 则 $\lambda \in [\ell_0, r_1]$ , 于是取 $\ell_1 = \ell_0$ ,  $u_1 = r_1$
  - 否则 $\lambda \in [r_1, u_0]$ , 于是取 $\ell_1 = r_1$ ,  $u_1 = u_0$
  - 如此我们得到一个长度减少一半的区间[ $\ell_1, u_1$ ]仍包含特征值 $\lambda_m$

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

### 对称QR方法

三对用化

隐式对称QR选作

### Jacobi方法

经典Jacobi方法 循环Jacobi方法及其变形

二分法

**奇异值分解的计**算

二对角化 SVD迭代 SVD算法 • 根据设定, $\lambda_m$ 必在区间[ $\ell_0, u_0$ ]内

- 取[ $\ell_0$ ,  $u_0$ ]的中点 $r_1 = (\ell_0 + u_0)/2$ , 计算 $s_n(r_1)$ 
  - 若 $s_n(r_1) \ge m$ , 则 $\lambda \in [\ell_0, r_1]$ , 于是取 $\ell_1 = \ell_0$ ,  $u_1 = r_1$
  - 否则 $\lambda \in [r_1, u_0]$ , 于是取 $\ell_1 = r_1$ ,  $u_1 = u_0$
  - 如此我们得到一个长度减少一半的区间[ $\ell_1, u_1$ ]仍包含特征值 $\lambda_m$
- 继续上述过程直到区间长度足够小,最后取区 间中点作为λ<sub>m</sub>的近似值

对称特征值问题的计

• 二分法的主要工作是计算 $s_n(\mu)$ . 这显然不能直 接通过计算 $p_i(\mu)$ 的值来实现,因为高阶多项式 的计算很容易出现不稳定

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

隐式对称QR选值

Jacobi方法

-----

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计算

二对角化 SVD迭代

二对角化

• 二分法的主要工作是计算 $s_n(\mu)$ . 这显然不能直接通过计算 $p_i(\mu)$ 的值来实现,因为高阶多项式的计算很容易出现不稳定

•  $\mathbb{E} \chi q_i(\lambda) = \frac{p_i(\lambda)}{p_{i-1}(\lambda)}, i = 1, 2, \dots, n$ 

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

二水色化

隐式对称QR选作

#### Jacobi方法

SHOT ILLER SHOW IN HORSE

一分注

奇异值分解的计算

\_\_\_対用化 SVD迭代 SVD算法 • 二分法的主要工作是计算 $s_n(\mu)$ . 这显然不能直接通过计算 $p_i(\mu)$ 的值来实现,因为高阶多项式的计算很容易出现不稳定

• 
$$\mathbb{E} \mathfrak{X} q_i(\lambda) = \frac{p_i(\lambda)}{p_{i-1}(\lambda)}, i = 1, 2, \dots, n$$

• 根据定义可知

$$q_1(\lambda) = p_1(\lambda) = \alpha_1 - \lambda$$
$$q_i(\lambda) = \alpha_i - \lambda - \frac{\beta_i^2}{q_{i-1}(\lambda)}, i = 2, \dots, n$$

对称特征值问题的计

接通过计算 $p_i(\mu)$ 的值来实现,因为高阶多项式 的计算很容易出现不稳定

• 
$$\not\equiv \chi q_i(\lambda) = \frac{p_i(\lambda)}{p_{i-1}(\lambda)}, i = 1, 2, \dots, n$$

• 根据定义可知

$$q_1(\lambda) = p_1(\lambda) = \alpha_1 - \lambda$$
  

$$q_i(\lambda) = \alpha_i - \lambda - \frac{\beta_i^2}{q_{i-1}(\lambda)}, i = 2, \dots, n$$

• 二分法的主要工作是计算 $s_n(\mu)$ . 这显然不能直

•  $s_n(\mu)$ 就是数列 $q_1(\mu), \ldots, q_n(\mu)$ 中负数的个数



# $q_{i-1}(\lambda) = 0$ 的处理

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

### 对称QR方法

隐式对称OR法

#### Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

#### 二分法

### 奇异值分解的计算

二对角化

SVD读代

SVD算法

• 当 $q_{i-1}(\lambda) = 0$ 时,按规定此时 $q_{i-1}$ 应按正数对 待

# $\overline{q_{i-1}(\lambda)} = 0$ 的处理

## 对称特征值问题的计

- 当 $q_{i-1}(\lambda) = 0$ 时,按规定此时 $q_{i-1}$ 应按正数对 待
- 在算法中可用很小的正数代替 $q_{i-1}(\lambda)$

# 运算量

对称特征值问题的计 算方法

基本性质

对称QR方法

三对角化

隐式对称QR选

Jacobi方法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计

二对角化 SVD迭代

SVD算法

• 可以事先把 $\beta_i^2$ 算好并贮存起来,因此上述变号数计算的算法只需要n-1次除法运算和2n-1次加减运算

# 运算量

## 对称特征值问题的计 算方法

基本性质

对称QR方法

隐式对称OR选

總式、对称QK达1

Jacobi方法

经典Jacobi方法 循环Jacobi方法及其变形

二分法

奇异值分解的计算

二对角化 SVD迭代

- 可以事先把 $\beta_i^2$ 算好并贮存起来,因此上述变号数计算的算法只需要n-1次除法运算和2n-1次加减运算
- 如果计算一个特征值平均需要m次二分法,则 用二分法求一个特征值的运算量平均为3nm

# 注解

对称特征值问题的计

• 二分法具有较大的灵活性,它既可以求某些指 定的特征值,也可以求某个区间内的特征值, 而且对各个特征值的精度要求也可以不一样

# 注解

## 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

对称QR方法

Mark and the one of the

隐式对称QR迭值

### Jacobi万法

经典Jacobi方法 循环Jacobi方法及其变形

二分法

奇显值分解的计值

二对角化 SVD迭代 SVD等注 二分法具有较大的灵活性,它既可以求某些指 定的特征值,也可以求某个区间内的特征值, 而且对各个特征值的精度要求也可以不一样

二分法是非常稳定的,而且计算精度和所需计算时间与特征值的分离程度无关

## 注解

## 对称特征值问题的计

• 二分法具有较大的灵活性,它既可以求某些指 定的特征值, 也可以求某个区间内的特征值, 而且对各个特征值的精度要求也可以不一样

- 二分法是非常稳定的,而且计算精度和所需计 算时间与特征值的分离程度无关
- 在算出某个特征值之后,可以应用反幂法求特 征向量

## 复习: SVD分解定理

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

### 对称QR方法

隐式对称QR迭化

#### Jacobi方法

.....

循环Jacobi方法及其变

#### 二分法

### 奇异值分解的计算

二对用化 SVD迭代

SVD算法

• 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,则存在正交矩 阵 $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 和 $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 使得

$$U^{\mathsf{T}}AV = \left(\begin{array}{cc} \Sigma_r & 0\\ 0 & 0 \end{array}\right)$$

其中 $\Sigma_r = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ ,  $\sigma_1 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$ 

# 复习: SVD分解定理

对称特征值问题的计

奇异值分解的计算

• 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . 则存在正交矩 降 $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 和 $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 使得

$$U^{\mathsf{T}}AV = \left(\begin{array}{cc} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)$$

其中 $\Sigma_r = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r), \ \sigma_1 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$ 

• 对于上述分解,我们称

$$\sigma_1 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > \sigma_{r+1} = \cdots = \sigma_n = 0$$

为A的<mark>奇异值: U和V</mark>的列向量分别称 为A的左/右奇异向量

## 奇异值分解的计算

奇异值分解的计算

• 对给定的 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$   $(m \ge n)$ , 如何计算其奇异 值分解, 这是一个有重要应用意义的问题

## 奇异值分解的计算

对称特征值问题的计

奇异值分解的计算

• 对给定的 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$   $(m \ge n)$ , 如何计算其奇异 值分解, 这是一个有重要应用意义的问题

• 奇异值分解与对称矩阵的谱分解密切相关,从 而也相应地有计算奇异值分解的QR方法、 Jacobi方法、二分法等

# 奇异值分解的计算

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

隐式对称QR迭f

Jacobi方法 <sup>经典Jacobi方法</sup>

循环Jacobi方法及其变形

二分法

奇异值分解的计算

二对角化 SVD迭代 SVD算法

- 对给定的 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$   $(m \ge n)$ ,如何计算其奇异值分解,这是一个有重要应用意义的问题
- 奇异值分解与对称矩阵的谱分解密切相关,从 而也相应地有计算奇异值分解的QR方法、 Jacobi方法、二分法等
- 本节我们只介绍计算奇异值分解的QR方法,基本想法: 隐含地应用对称QR方法于A<sup>T</sup>A上,但 又希望在整个过程中并不直接计算A<sup>T</sup>A

### 二对角化

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

### 对称QR方法

M 175 Q 1 ( ) 1 1 2

隐式对称OR法(

### Jacobi方法

经典 Jacobi方法

循环Jacobi方法及其

#### 二分法

### 奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

VD算法

• 对应于将 $A^TA$ 三对角化,这里我们是将A二对角化,即计算两个正交矩阵U, V,使得

$$U^T A V = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \delta_1 & \gamma_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \gamma_{n-1} & \\ & & & \delta_n \end{pmatrix}$$

### 二对角化

### 对称特征值问题的计

• 对应于将 $A^TA$ 三对角化,这里我们是将A二对 角化,即计算两个正交矩阵U,V.使得

$$U^{\mathsf{T}}AV = \left( \begin{array}{c} B \\ 0 \end{array} \right), \quad B = \left( \begin{array}{cccc} \delta_1 & \gamma_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \gamma_{n-1} \\ & & & \delta_n \end{array} \right)$$

• 从而有 $V^T A^T A V = B^T B$ 是一个对称三对角阵, 这就相当于把 $A^TA$ 三对角化

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

三对角化

造式对称OR法

Jacobi力程

经典 Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD读代

SVD算法

• 二对角分解可以利用Householder变换实现

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

对称QR方法

----

隐式对称QR迭位

#### Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

#### 一分注

奇异值分解的计:

二对角化

SVD迭代

SVD算法

- 二对角分解可以利用Householder变换实现
- 首先确定一个m阶Householder变换 $P_1$ , 把 $P_1^TA$ 的第一列除首元外化为零

# 对称特征值问题的计

二对角分解可以利用Householder变换实现

- 首先确定一个*m*阶Householder变换*P*<sub>1</sub>, 把PTA的第一列除首元外化为零
- 然后确定 n 1阶Householder变换 H₁ 使得

$$P_1^T A \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & H_1 \end{array} \right)$$

的第一行除前两个元素外其余元素约化为零

对称特征值问题的计

二对角分解可以利用Householder变换实现

- 首先确定一个*m*阶Householder变换*P*<sub>1</sub>, 把PTA的第一列除首元外化为零
- 然后确定 n 1阶Householder变换 H₁ 使得

$$P_1^T A \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & H_1 \end{array} \right)$$

的第一行除前两个元素外其余元素约化为零

• 如此继续下去就可以完成二对角分解

### SVD迭代: 位移的选取

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

三对角化

隐式对称QR选

Jacobi方法

終重 Incohi 左対

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

• 下面对三对角阵 $T = B^T B$ 进行带位移的隐式QR迭代。同样这里的关键是不明确把T计算出来

## SVD迭代: 位移的选取

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

三对角化

卷式对称QR选

Jacobi方法

经典Jacobi方法

HE-PACODIA IZAZA

奇异值分解的计

二对角化

SVD迭代

SVD算法

- 下面对三对角阵 $T = B^T B$ 进行带位移的隐式QR迭代。同样这里的关键是不明确把T计算出来
- 位移的选取: 针对T的右下角2阶矩阵

$$\begin{pmatrix} \delta_{n-1}^2 + \gamma_{n-1}^2 & \delta_{n-1}\gamma_{n-1} \\ \delta_{n-1}\gamma_{n-1} & \delta_n^2 + \gamma_{n-1}^2 \end{pmatrix}$$

我们取位移 $\mu$ 为这个矩阵的两个特征值中距离 $\delta_n^2 + \gamma_{n-1}^2$ 近的那个(即Wilkinson位移)

# **SVD**迭代: *c*,*s*的确定

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

三对角化

隐式对称QR迭

Jacobi力社

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

• 接下来,确定Givens变换 $G_1 = G(1,2,\theta)$ 满足

$$\left(\begin{array}{cc} c_1 & s_1 \\ -s_1 & c_1 \end{array}\right)^T \left(\begin{array}{c} \delta_1^2 - \mu \\ \delta_1 \gamma_1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} * \\ 0 \end{array}\right)$$

这里 $T - \mu I$ 的第一列是 $(\delta_1^2 - \mu, \delta_1 \gamma_1, 0, \dots, 0)^T$ 

### SVD迭代: 正交相似变换

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

-----

隐式对称QR选

Jacobi方沒

. . .

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计

二对角化

SVD进程

SVD算法

• 最后一步就是确定正交矩阵Q使 得 $Q^T(G_1^TTG_1)Q$ 是对称三对角阵,且 $Qe_1=e_1$ 

### SVD迭代:正交相似变换

对称特征值问题的计

- 最后一步就是确定正交矩阵Q使 得 $Q^T(G_1^TTG_1)Q$ 是对称三对角阵,且 $Qe_1=e_1$
- 为了避免T的计算,只需计算正交矩阵P和Q使 得 $P^{T}(BG_{1})Q$ 是二对角阵,且 $Qe_{1}=e_{1}$

## SVD迭代: 正交相似变换

对称特征值问题的计

最后一步就是确定正交矩阵Q使 得 $Q^T(G_1^TTG_1)Q$ 是对称三对角阵,且 $Qe_1=e_1$ 

• 为了避免T的计算,只需计算正交矩阵P和Q使 得 $P^{T}(BG_{1})Q$ 是二对角阵,且 $Qe_{1}=e_{1}$ 

可以利用Givens变换实现这一点

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

三对角化

B式对称QR选付

Jacobi刀石

经典 Jacobi方

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD读代

SVD算法

• 隐式QR迭代的前提是 $T = B^T B$ 是不可约的

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

隐式对称QR迭化

隐式对称QR迭f

Jacobi万法

经典Jacobi方法

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计

二对角化

SVD迭代

SVD算法

- 隐式QR迭代的前提是 $T = B^T B$ 是不可约的
- T的次对角元为 $\delta_j\gamma_j$ ,因此T不可约的充要条件 是 $\delta_j\gamma_j \neq 0$

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称QR方法

隐式对称QR法件

隐式对称QR迭代

经典Jacobi方法 循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计

二对角化

SVD迭代

SVD算法

- 隐式QR迭代的前提是 $T = B^T B$ 是不可约的
- T的次对角元为 $\delta_j\gamma_j$ ,因此T不可约的充要条件 是 $\delta_j\gamma_j \neq 0$
- 当某个 $\gamma_j = 0$ 时,这时可以把问题分解为两个低阶问题处理

对称特征值问题的计 算方法

基本性质

对称QR方法

隐式对称QR迭件

经典Jacobi方法

- A 24

奇异值分解的计算

SVD迭代

可开100万胜1017。 二对角化 • 隐式QR迭代的前提是 $T = B^T B$ 是不可约的

- T的次对角元为 $\delta_j\gamma_j$ ,因此T不可约的充要条件 是 $\delta_j\gamma_j \neq 0$
- 当某个 $\gamma_j = 0$ 时,这时可以把问题分解为两个低阶问题处理
- 当某个 $\delta_j = 0$ ,而 $\gamma_j \neq 0$ 时,我们可以通过适当的Givens变换把B的第j行元素都变零,而保持其二对角形式不变;从而实现降阶

对称特征值问题的计 算方法

邓建松

基本性质

对称OR方法

IS THE ODIE

Jacobi力粒

循环Jacobi方法及其变

二分法

奇异值分解的计算

二对角化

SVD迭代

SVD算法

• 在实际计算时,当 $\delta_j$ 或 $\gamma_j$ 很小时,我们就可以 把B分解为两个低阶的二对角阵

# 对称特征值问题的计

SVD算法

• 在实际计算时,当 $\delta_i$ 或 $\gamma_i$ 很小时,我们就可以 把B分解为两个低阶的二对角阵

• 通常使用的准则是: 如果

$$|\delta_j| \leqslant \varepsilon ||B||_{\infty} \ \vec{\boxtimes} \ |\gamma_j| \leqslant (|\delta_j| + |\delta_{j+1}|)$$

就将 $\delta_i$ 或 $\gamma_i$ 视为零,其中 $\epsilon$ 是一个略大于机器精 度的正数

### 对称特征值问题的计 算方法

邓建松

### 基本性质

对称QR方法

三对角化

隐式对称QR选值

#### Jacobi方法

经典Jacobi方法 循环Jacobi方法及其变形

### 二分法

奇异值分解的计

二对角化 SVD迭代

- 在实际计算时,当 $\delta_j$ 或 $\gamma_j$ 很小时,我们就可以把B分解为两个低阶的二对角阵
- 通常使用的准则是: 如果

$$|\delta_j| \leqslant \varepsilon \|B\|_{\infty}$$
 或  $|\gamma_j| \leqslant (|\delta_j| + |\delta_{j+1}|)$   
证式。初为零,其中 $\varepsilon$ 是一个略大于机器

就将 $\delta_j$ 或 $\gamma_j$ 视为零,其中 $\varepsilon$ 是一个略大于机器精度的正数

● 将这一准则与前述算法给合,就得到了SVD算 法

对称特征值问题的计

- 在实际计算时,当 $\delta_i$ 或 $\gamma_i$ 很小时,我们就可以 把B分解为两个低阶的二对角阵
- 通常使用的准则是: 如果

$$|\delta_j| \leqslant \varepsilon ||B||_{\infty} \ \vec{y} \ |\gamma_j| \leqslant (|\delta_j| + |\delta_{j+1}|)$$

就将 $\delta_i$ 或 $\gamma_i$ 视为零,其中 $\epsilon$ 是一个略大于机器精 度的正数

- 将这一准则与前述算法给合,就得到了SVD算 決

