

Homework4

@rosefantasie

2022 年 10 月 19 日

1 作业要求

1. 考虑两点边值问题

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = a, 0 < a < 1, \\ y(0) = 0, y(1) = 1. \end{cases}$$

容易知道它的精确解为

$$y = \frac{1-a}{1-e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}(1-e^{-\frac{x}{\varepsilon}}) + ax$$

为了把微分方程离散化, 把 $[0, 1]$ 区间 n 等分, 令 $h = 1/n, x_i = ih, i = 1, \dots, n-1$, 得到差分方程

$$\varepsilon \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = a,$$

简化为

$$(\varepsilon + h)y_{i+1} - (2\varepsilon + h)y_i + \varepsilon y_{i-1} = ah^2$$

离散化后得到线性方程组 $Ay = b$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} -(2\varepsilon + h) & \varepsilon + h & & & \\ \varepsilon & -(2\varepsilon + h) & \varepsilon + h & & \\ & \varepsilon & -(2\varepsilon + h) & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \varepsilon + h \\ & & & \varepsilon & -(2\varepsilon + h) \end{pmatrix}$$

注意将线性方程组与上述差分方程进行对比得出正确的 b 向量 (尤其注意第一行和最后一行)。

对 $\varepsilon = 1, a = 1/2, n = 100$, 分别用 Jacobi 迭代法, G-S 迭代法和 SOR 迭代法求线性方程组的解, 要求 4 位有效数字, 然后比较迭代次数, 运行时间与精确解的误差。迭代法终止条件为 $\|x_{k+1} - x_k\| < 10^{-6}$ 。

对 $\varepsilon = 0.1, 0.01, 0.0001$, 考虑同样的问题。

2. 考虑偏微分方程

$$-\Delta u + g(x, y)u = f(x, y), (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

边界条件为 $u = 1$. 沿 x 方向和 y 方向均匀剖分 N 等份, 令 $h = 1/N$, 并设应用中心差分离散化后得到差分方程的代数方程组为

$$-u_{i-1,j} - u_{i,j-1} + (4 + h^2 g(ih, jh))u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1} = h^2 f(ih, jh) \quad (1)$$

取 $g(x, y) = e^{xy}$, $f(x, y) = x + y$, 分别用 **Jacobi 迭代法**, **G-S 迭代法** 和 **SOR 迭代法** 求解上述代数方程组, 并列表比较 $N = 20, 40, 60$ 时收敛所需要的迭代次数和所用的 CPU 时间, 迭代终止条件为 $\|x_{k+1} - x_k\| < 10^{-7}$. 要求仿照下面写的 Jacobi 迭代格式的推导过程推导处 G-S 迭代和 SOR 迭代的格式 (**在报告中写出推导过程**), 在用 SOR 迭代法求解的过程中, 请对不同的 N 使用合适的松弛因子 ω , 并在程序输出中打印松弛因子的值。可以采用 二分法 观察运行结果后选取合适的 (代码中不需要体现选取过程, 只需给出即可)。

注意本题中的三个迭代法的算法需要重新写, 不能用之前的通用算法!!!

2 代数方程组与线性方程组的转换

2.1 Jacobi 迭代法

考虑其迭代格式 $Dx^{(k+1)} = (L + U)x^{(k)} + b$. 对第 i 行有 $D_{ii}x_i^{(k+1)} = \sum_{j \neq i} (L + U)_{ij}x_j^{(k)} + b_i$. 将 D, L, U 还原成 A 得到代数方程组

$$A_{i1}x_1 + \cdots + A_{ii}x_i + \cdots + A_{in}x_n = b_i$$

的 Jacobi 迭代式

$$A_{i1}x_1^{(k)} + \cdots + A_{ii}x_i^{(k+1)} + \cdots + A_{in}x_n^{(k)} = b_i$$

即只有与向量 b 的下标相同的位置替换成 $x^{(k+1)}$.

由此类比推广至矩阵 (或者可以直接将矩阵拉直成向量), 知代数方程组 (1) 的 **Jacobi 迭代格式**为

$$-u_{i-1,j}^{(k)} - u_{i,j-1}^{(k)} + (4 + h^2 g(ih, jh))u_{i,j}^{(k+1)} - u_{i+1,j}^{(k)} - u_{i,j+1}^{(k)} = h^2 f(ih, jh)$$

2.2 G-S 迭代法

2.3 SOR 迭代法

3 附加说明

1. 尽量使用 c++ 和 visual studio.

2. 提交内容和说明见群文件。
3. 本次作业ddl 为 2022.10.30(周日)23:59，请大家尽早提交，不要卡点。超时作业没有特殊情况者拒收。若有特殊情况请提前私聊助教沟通。
4. 请确保你的程序能顺利跑出正确的结果再上交!!!
5. 没有报告的程序作业不予批改。