邓建松

2022年10月24日

松弛迭代法的局限性

共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降沒

共轭梯度法及其基本 性质

注*灰*

基本性质

实用共轭梯度法及非 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

SOR迭代法中如能取得最佳松弛因子,算法的效率会得到数量级上的提高

松弛迭代法的局限性

共轭梯度法

邓建松

基本框势

最速下降沒

共轭梯度法及其基本性质

共轭梯度法

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度流

- SOR迭代法中如能取得最佳松弛因子,算法的效率会得到数量级上的提高
- 而最佳松弛因子只在系数矩阵具有较好性质时 才有可能找到

松弛迭代法的局限性

共轭梯度法

小姓仆

步长的确定

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度? 基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

收敛性分析

SOR迭代法中如能取得最佳松弛因子,算法的效率会得到数量级上的提高

- 而最佳松弛因子只在系数矩阵具有较好性质时 才有可能找到
- 而且上节在计算最佳松弛因子时,还用到了对 应的Jacobi迭代矩阵的谱半径

共轭梯度法

邓建杉

基本框型

具油工政计

取迷下降法

共轭梯度法及其基本 性质

庄灰

基本性质

实用共轭梯度法及! 此 敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

• 这是一种不需要确定任何参数的求解对称正定 线性方程组的方法

共轭梯度法

ル建札

基本框列

最速卜降法

共轭梯度法及其基本性质

共轭梯度法

实用共轭梯度法及

实用共轭梯度法

- 这是一种不需要确定任何参数的求解对称正定 线性方程组的方法
- 它是上世纪50年代初期由M.R. Hestenes和E. Stiefel首先提出的

共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度法 基本性质

实用共轭梯度法及身 收分性

实用共轭梯度 收敛性分析

- 这是一种不需要确定任何参数的求解对称正定 线性方程组的方法
- 它是上世纪50年代初期由M.R. Hestenes和E. Stiefel首先提出的
- 自后得到了长足的发展,成为求解大型稀疏线 性方程组最受欢迎的一类方法

共轭梯度法

邓建枢

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度法 基本性质

实用共轭梯度法及 收敛性

实用共轭梯度法

- 这是一种不需要确定任何参数的求解对称正定 线性方程组的方法
- 它是上世纪50年代初期由M.R. Hestenes和E. Stiefel首先提出的
- 自后得到了长足的发展,成为求解大型稀疏线 性方程组最受欢迎的一类方法
- 它也是求解大型非线性优化问题的主要方法之

线性方程组与对应的二次泛函

共轭梯度法

邓建杉

基本框架

步长的確定

最速下降污

共轭梯度法及其基本

性质

共祝你及法

实用共轭梯度法及非 此幼性

实用共轭梯度法

女敛性分析

• 设A为对称正定矩阵

线性方程组与对应的二次泛函

共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的朝廷

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

性庾

基本性质

实用共轭梯度法及非 此幼性

实用共轭梯度法

女敛性分析

- 设A为对称正定矩阵
- 考虑线性方程组Ax = b的求解

线性方程组与对应的二次泛函

共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基本

共轭梯度法

实用共轭梯度法及身 此幼性

火用火机仰及 收敛性分析

- 设A为对称正定矩阵
- 考虑线性方程组Ax = b的求解
- 为此我们定义二次函数

$$\varphi(x) = x^T A x - 2b^T x$$

定理

共轭梯度法

邓建林

基本框架

步长的确定

最速下降?

最速卜降2

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度法

实用共轭梯度法及

实用共轭梯度法

定理

设A对称正定,求方程组Ax = b的解等价于 求二次函数 $\varphi(x)$ 的极小值点

共轭梯度法

邓建松

基本框架

.....

悬沛下降过

-1...

共轭体及法及共生平 性盾

.............

基本性质

实用共轭梯度法

收敛性分析

• 直接计算可得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 2(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n) - 2b_i$$

共轭梯度法

邓建松

基本框架

ils IZ Afrikalı

具油工阪汁

取迷下降法

共轭梯度法及其基本

性灰

2K-9010103C

基本性质

头用共轭梯度法及身 收敛性

实用共轭梯度法

• 直接计算可得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 2(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n) - 2b_i$$

所以

$$\nabla \varphi(x) = 2(Ax - b)$$

共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的确定

最速下降法

AXXE | PPIA

共轭佈及法及共基本 性质

共轭梯度法

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度

• 直接计算可得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 2(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n) - 2b_i$$

• 所以

$$\nabla \varphi(x) = 2(Ax - b)$$

• 若 $\varphi(x)$ 在某点 x_* 达到极小,则必有 $\nabla \varphi(x_*) = 0$,从而 $Ax_* = b$

共轭梯度法

邓建村

基本框架

步长的确定

最速下降法

ACCE | ITIM

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度

基本性质

实用共轭梯度法及 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

• 直接计算可得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 2(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n) - 2b_i$$

• 所以

$$\nabla \varphi(x) = 2(Ax - b)$$

- 若 $\varphi(x)$ 在某点 x_* 达到极小,则必有 $\nabla \varphi(x_*) = 0$,从而 $Ax_* = b$

求解方法: 盲人下山

共轭梯度法

邓建松

基本框架

取迷下降法

共轭梯度法及其基本 性质

+67% dr. H

基本性质

实用共轭梯度法及非 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

• 为了求解线性方程组,我们可以计算二次函数 $\varphi(x)$ 的极小值

求解方法: 盲人下山

共轭梯度法

基本框架

最速下降法

ALL I ITIA

性质

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

- 为了求解线性方程组,我们可以计算二次函数 $\varphi(x)$ 的极小值
- 为了求二次函数的极小值,我们可以模拟盲人下山: 先任意给定一个初始点 x_0 ,确定一个下山的方向 p_0 ,沿着经过点 x_0 而方向为 p_0 的直线 $x=x_0+\alpha p_0$ 上找一点 x_1 使 $\varphi(x)$ 达到极小

共轭梯度法

邓建林

基本框架

.

晶速下路过

共轭梯度法及其基本

性质

共轭梯度法

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

女敛性分析

● 第一步走到x₁

共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的棚定

最速下降法

共轭梯度法及其基本

性质

基本性质

实用共轭梯度法及非 此幼性

实用共轭梯度法

第一步走到x₁

• 然后在 x_1 点,再找一个下山的方向 p_1 ,沿直 线 $x = x_1 + \alpha p_1$ 再跨出一步

共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的确定

最速下降法

共轭梯度法及其

性质

基本性质

实用共轭梯度法及非 收敛性

实用共轭梯度法

● 第一步走到x₁

• 然后在 x_1 点,再找一个下山的方向 p_1 ,沿直 线 $x = x_1 + \alpha p_1$ 再跨出一步

.....

共轭梯度法

邓建树

基本框架

步长的确定

最速下降法

共轭梯度法及其基

1上/X

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度 收敛性分析

- 第一步走到x₁
- 然后在 x_1 点,再找一个下山的方向 p_1 ,沿直 线 $x = x_1 + \alpha p_1$ 再跨出一步
- **.....**
- 这样就得到一串参数 α_i 和方向 p_i .

共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的确定

最速下降法

共轭梯度法及其

性质

共祀伽及7

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度 收敛性分析

- 第一步走到x₁
- 然后在 x_1 点,再找一个下山的方向 p_1 ,沿直 线 $x = x_1 + \alpha p_1$ 再跨出一步
 -
- 这样就得到一串参数 α_i 和方向 p_i .
- p_i称为搜索方向,α_k为步长

共轭梯度法

邓建松

基本框架

島油下隊出

取述「件位

共轭梯度法及具基本 性质

共轭梯度污 基本性质

实用共轭梯度法及 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

● 第一步走到x₁

• 然后在 x_1 点,再找一个下山的方向 p_1 ,沿直 线 $x = x_1 + \alpha p_1$ 再跨出一步

•

- 这样就得到一串参数 α_i 和方向 p_i .
- p_i 称为搜索方向, α_k 为步长
- 不同的确定搜索方向和步长的方法,就得出不同的算法

步长的确定

共轭梯度法

邓建林

基本框架

最速下降沒

共轭梯度法及其基本

性质

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

• 设 x_k 已确定,下山方向 p_k 也确定

步长的确定

共轭梯度法

邓建松

基本框架

SV INTIMONE

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度法

基本性质

实用共轭梯度法及非 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

- 设 x_k 已确定,下山方向 p_k 也确定
- 任务: 在直线 $x = x_k + \alpha p_k$ 上确定 α_k 使 得 $\varphi(x)$ 在 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$ 处达到极小

步长的确定

共轭梯度法

邓建村

基本框

步长的确定

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度 基本性质

实用共轭梯度法及非 收敛性

收敛性分析

- 设xょ已确定,下山方向pょ也确定
- 任务: 在直线 $x = x_k + \alpha p_k$ 上确定 α_k 使 得 $\varphi(x)$ 在 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$ 处达到极小
- $\diamondsuit f(\alpha) = \varphi(x_k + \alpha p_k)$, \emptyset

$$f(\alpha) = (x_k + \alpha p_k)^T A(x_k + \alpha p_k) - 2b^T (x_k + \alpha p_k)$$

= $\alpha^2 p_k^T A p_k - 2\alpha r_k^T p_k + \varphi(x_k)$

其中 $r_k = b - Ax_k$ 为 $\varphi(x)$ 在 $x = x_k$ 的负梯度方向

求导确定 α_k

共轭梯度法

邓建松

基本框势

32-1-10-21

最速卜降法

共轭梯度法及其基本

性质

共轭梯度法

基本性质

实用共轭梯度法及非 此分析

实用共轭梯度法

X/11/X40100000

• 计算 $f(\alpha)$ 的导数:

$$f'(\alpha) = 2\alpha p_k^T A p_k - 2r_k^T p_k$$

求导确定 α_k

共轭梯度法

邓建松

基本框架

JE JE MYZNE

島油下隊出

共轭梯度法及具基本 性质

共轭梯度法

基本性质

实用共轭梯度法及非 收敛性

实用共轭梯度法

• 计算 $f(\alpha)$ 的导数:

$$f'(\alpha) = 2\alpha p_k^T A p_k - 2r_k^T p_k$$

求导确定 α_k

共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的确定

最速下降法

性质

共轭梯度

实用共轭梯度法及非 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

• 计算 $f(\alpha)$ 的导数:

$$f'(\alpha) = 2\alpha p_k^T A p_k - 2r_k^T p_k$$

- 验证:

$$\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k) = \alpha_k^2 p_k^T A p_k - 2\alpha_k r_k^T p_k$$
$$= -\frac{(r_k^T p_k)^2}{p_k^T A p_k}$$

因此只要 $r_k^T p_k \neq 0$, 我们就有 $\varphi(x_{k+1}) < \varphi(x_k)$

共轭梯度法

邓建松

基本框

步长的确定

最速下降法

共轭梯度法及其基本

共轭梯度法

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

• 在第k步确定了搜索方向 p_k 后,按照前述公式确定步长 α_k ,那么到达了新点 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$

共轭梯度法

邓建松

基本框類

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度

实用共轭梯度法及

实用共轭梯度法

- 在第k步确定了搜索方向 p_k 后,按照前述公式确定步长 α_k ,那么到达了新点 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$
- 显然 p_k 与等值线 $\varphi(x) = \varphi(x_{k+1})$ 相切于点 $x = x_{k+1}$

共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降対

共轭梯度法及其基本

共轭梯度? 基本性质

实用共轭梯度法及 收敛性

头用头视师5 收敛性分析

- 在第k步确定了搜索方向 p_k 后,按照前述公式确定步长 α_k ,那么到达了新点 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$
- 显然 p_k 与等值线 $\varphi(x) = \varphi(x_{k+1})$ 相切于 点 $x = x_{k+1}$
- $r_{k+1} = b Ax_{k+1}$ 是上述等值线在 $x = x_{k+1}$ 处的 法向量

共轭梯度法

邓建松

基本框

D KHIMIDE

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度? 基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度 收敛性分析

- 在第k步确定了搜索方向 p_k 后,按照前述公式确定步长 α_k ,那么到达了新点 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$
- 显然 p_k 与等值线 $\varphi(x) = \varphi(x_{k+1})$ 相切于 点 $x = x_{k+1}$
- $r_{k+1} = b Ax_{k+1}$ 是上述等值线在 $x = x_{k+1}$ 处的 法向量
- 所以 $r_{k+1}^T p_k = 0$

共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度活

实用共轭梯度; 收敛性分析

- 在第k步确定了搜索方向 p_k 后,按照前述公式确定步长 α_k ,那么到达了新点 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$
- 显然 p_k 与等值线 $\varphi(x) = \varphi(x_{k+1})$ 相切于点 $x = x_{k+1}$
- $r_{k+1} = b Ax_{k+1}$ 是上述等值线在 $x = x_{k+1}$ 处的 法向量
- 所以 $r_{k+1}^T p_k = 0$
- 后面我们用代数方法证明更一般性的结论

下山方向的确定: 最速下降法

共轭梯度法

邓建树

基本框势

步长的确定

最速下降法

共轭梯度法及共基华 性质

共轭梯度法

基本性质

实用共轭梯度法及非 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

• $\varphi(x)$ 增加最快的方向是梯度方向

下山方向的确定: 最速下降法

共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的确定

最速下降法

40.00 1 四年12

共轭梯度法及共基本 性质

注灰

基本性质

实用共轭梯度法及基 收敛性

20日共和総府3

头用头视梯度为

收敛性分析

- $\varphi(x)$ 增加最快的方向是梯度方向
- 因此负梯度方向应该是 $\varphi(x)$ 减小最快的方向

下山方向的确定:最速下降法

共轭梯度法

邓建松

基本框架

日本了政治

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度 基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

头用共轭邻及 收敛性分析

- $\varphi(x)$ 增加最快的方向是梯度方向
- 因此负梯度方向应该是 $\varphi(x)$ 减小最快的方向
- 所以我们取pk为负梯度方向

$$r_k = b - Ax_k$$

收敛定理的准备:一个引理

共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的确定

最速下降法

取迷下阵花

共轭梯度法及其基本 性质

基本性质

实用共轭梯度法及基 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

引理

设A的特征值为 $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$, P(t)是一个关于t的多项式,则对 $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$||P(A)x||_A \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |P(\lambda_i)|||x||_A$$

其中
$$\|x\|_A = \sqrt{x^T A x}$$

引理的证明

共轭梯度法

最速下降法

• 取由A对应于 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 的特征向量 y_1, \ldots, y_n , 其构成R"的一组标准正交基

引理的证明

共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

收敛性分析

- 取由A对应于 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 的特征向量 y_1, \ldots, y_n , 其构成 \mathbb{R}^n 的一组标准正交基
- 对任意 $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{i=1}^n \beta_i y_i$, 从而有

$$x^{T}P(A)AP(A)x = \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_{i}P(\lambda_{i})y_{i}\right)^{T}A\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_{i}P(\lambda_{i})y_{i}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i}\beta_{i}^{2}P^{2}(\lambda_{i}) \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} P^{2}(\lambda_{i})\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i}\beta_{i}^{2}$$
$$= \max_{1 \leqslant i \leqslant n} P^{2}(\lambda_{i})x^{T}Ax$$

收敛定理

共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的确定

最速下降法

取迷下阵花

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度沿

基本性质

实用共轭梯度法及非 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

定理

设A的特征值为 $0 < \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$,则由最速下降法产生的序列 $\{x_k\}$ 满足

$$||x_k - x_*||_A \leqslant \left(\frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}\right)^k ||x_0 - x_*||_A$$

其中
$$x_* = A^{-1}b$$

共轭梯度法

最速下降法

• 展开
$$(x - x_*)^T A(x - x_*)$$
,并利用 $Ax_* = b$ 可得
$$\varphi(x) + x_*^T A x_* = (x - x_*)^T A(x - x_*)$$

共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的确定

最速下降法

共轭梯度法及其基本性质

共轭梯度法

基本性质

实用共轭梯度法及非 收敛性

实用共轭梯度

- 展开 $(x x_*)^T A(x x_*)$,并利用 $Ax_* = b$ 可得 $\varphi(x) + x_*^T Ax_* = (x x_*)^T A(x x_*)$
- 根据xk的构造方法,我们有

$$\varphi(x_k) \leqslant \varphi(x_{k-1} + \alpha r_{k-1}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

共轭梯度法

邓建枢

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

火邪物度で

实用共轭梯度法及非 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

• 展开
$$(x - x_*)^T A(x - x_*)$$
,并利用 $Ax_* = b$ 可得
$$\varphi(x) + x_*^T A x_* = (x - x_*)^T A(x - x_*)$$

• 根据x_k的构造方法,我们有

$$\varphi(x_k) \leqslant \varphi(x_{k-1} + \alpha r_{k-1}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

• 所以

$$(x_k - x_*)^T A(x_k - x_*)$$

 $\leq (x_{k-1} + \alpha r_{k-1} - x_*)^T A(x_{k-1} + \alpha r_{k-1} - x_*)$

共轭梯度法

邓建松

基本框架

JEJZ 65 ZB d

最速下降法

共轭梯度法及其基本

性质

共轭梯度法 サナル #

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

• 根据构造方法,

$$r_{k-1} = b - Ax_{k-1} = A(x_* - x_{k-1})$$

共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的确定

最速下降法

11. der 136 sha 11. m

共轭梯度法及共基本 性质

基本性质

实用共轭梯度法及 收敛性

头用火泥你没。 • 根据构造方法,

$$r_{k-1} = b - Ax_{k-1} = A(x_* - x_{k-1})$$

• 所以我们有

$$(x_{k} - x_{*})^{T} A(x_{k} - x_{*})$$

$$\leq (x_{k-1} + \alpha r_{k-1} - x_{*})^{T} A(x_{k-1} + \alpha r_{k-1} - x_{*})$$

$$= ((I - \alpha A)(x_{k-1} - x_{*}))^{T} A((I - \alpha A)(x_{k-1} - x_{*}))$$

共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的确定

最速下降法

壮轭梯度法及1

性质

共轭梯度法

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

• 取 $P_{\alpha}(t) = 1 - \alpha t$, 则由引理对 $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ 有

$$||x_{k} - x_{*}||_{A} \leq ||P_{\alpha}(A)(x_{k-1} - x_{*})||_{A}$$

$$\leq \max_{1 \leq i \leq n} |P_{\alpha}(\lambda_{i})|||x_{k-1} - x_{*}||_{A}$$

其太性质

实用共轭梯度法及; 收敛性

收敛性分析

• 取 $P_{\alpha}(t) = 1 - \alpha t$, 则由引理对 $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ 有

$$||x_{k} - x_{*}||_{A} \leq ||P_{\alpha}(A)(x_{k-1} - x_{*})||_{A}$$

$$\leq \max_{1 \leq i \leq n} |P_{\alpha}(\lambda_{i})|||x_{k-1} - x_{*}||_{A}$$

• 根据Chebyshev多项式的性质,

$$\min_{\alpha} \max_{\lambda_1 \leq t \leq \lambda_n} |1 - \alpha t|$$

应在
$$1 - \alpha \lambda_1$$
与 $1 - \alpha \lambda_n$ 互为相反数时达到,此时 $\alpha = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$,极值为 $\frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}$

共轭梯度法

邓建松

基本框势

步长的确定

最速下降法

ACAE I ITIE

共轭梯度法及共基本 性质

共轭梯度法

基本性质

实用共轭梯度法及基 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

● 上述定理表明,从任一初始向量x₀出发,由最速下降法产生的点列总是收敛到方程组的解

共轭梯度法

邓建枢

基本框势

步长的确定

最速下降法

共轭梯度法及其基本

生质

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

- 上述定理表明,从任一初始向量x₀出发,由最 速下降法产生的点列总是收敛到方程组的解
- 收敛速度由 $(\lambda_n \lambda_1)/(\lambda_n + \lambda_1)$ 的大小决定的

共轭梯度法

邓建松

基本框列

最速下降法

取述 | | | | | | | | | |

共轭梯度法及其基本 性质

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度。

- 上述定理表明,从任一初始向量x₀出发,由最 速下降法产生的点列总是收敛到方程组的解
- 收敛速度由 $(\lambda_n \lambda_1)/(\lambda_n + \lambda_1)$ 的大小决定的
- 最速下降法简单易实现,而且可以充分利用A的稀疏性,但在 $\lambda_1 \ll \lambda_n$ 时速度变得非常之慢

共轭梯度法

邓建松

垫 本 性 朱 步长的确定

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度? 收敛性分析

- 上述定理表明,从任一初始向量x₀出发,由最 速下降法产生的点列总是收敛到方程组的解
- 收敛速度由 $(\lambda_n \lambda_1)/(\lambda_n + \lambda_1)$ 的大小决定的
- 最速下降法简单易实现,而且可以充分利用A的稀疏性,但在 $\lambda_1 \ll \lambda_n$ 时速度变得非常之慢
- 在求解线性方程组时很少用它,但它的想法很 重要,并且在非线性优化求解中有大量的应用 和拓展

共轭梯度法

最速下降法

- 上述定理表明,从任一初始向量x₀出发,由最 速下降法产生的点列总是收敛到方程组的解
- 收敛速度由 $(\lambda_n \lambda_1)/(\lambda_n + \lambda_1)$ 的大小决定的
- 最速下降法简单易实现,而且可以充分利 HA的稀疏性,但在 $\lambda_1 \ll \lambda_n$ 时速度变得非常之 慢
- 在求解线性方程组时很少用它,但它的想法很 重要,并且在非线性优化求解中有大量的应用 和拓展

4□ > 4個 > 4 = > 4 = > = 900

共轭梯度法的动机

共轭梯度法

水建水

基本框架

步长的确定

最速下降流

-10.00

共轭梯度法及共基本 性质

H-Ass Editor SH.

基本性质

实用共轭梯度法及非 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

从局部来看,负梯度方向确实是最佳的下山方向

共轭梯度法的动机

共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降沒

共轭梯度法及其基本

共轭梯度法

实用共轭梯度法及

实用共轭梯度法

收敛性分析

- 从局部来看,负梯度方向确实是最佳的下山方向
- 但从整体看看,它并非最佳:迭代得到的各点 连线具有明显的锯齿形状

共轭梯度法的动机

共轭梯度法

邓建松

基本框架 步长的确定

最速下降沒

共轭梯度法及其基本性质

共轭梯度法 基本性质

实用共轭梯度法及 收敛性

实用共轭梯度法

女敛性分析

- 从局部来看,负梯度方向确实是最佳的下山方向
- 但从整体看看,它并非最佳: 迭代得到的各点 连线具有明显的锯齿形状
- 我们要寻找更好的下山方向,而且在方向寻找 上付出的代价不要太大

共轭梯度法的计算过程

共轭梯度法

邓建松

基本框势

步长的确定

最速下降法

JL for IX eye VL Tr

性质

共轭梯度?

实用共轭梯度法及

实用共轭梯度法

收敛性分析

• 给定初始点 x_0 ,第一步仍然选负梯度方向为下山方向,即 $p_0 = r_0$,于是有

$$\alpha_0 = \frac{r_0^T r_0}{r_0^T A r_0}, x_1 = x_0 + \alpha_0 p_0, r_1 = b - A x_1$$

共轭梯度法的计算过程

共轭梯度法

邓建松

基本框势

最速下降法

共轭梯度法及

性质

共轭梯度法

实用共轭梯度法及非 收敛性

实用共轭梯度法

女敛性分析

• 给定初始点 x_0 ,第一步仍然选负梯度方向为下山方向,即 $p_0 = r_0$,于是有

$$\alpha_0 = \frac{r_0^T r_0}{r_0^T A r_0}, x_1 = x_0 + \alpha_0 p_0, r_1 = b - A x_1$$

• 在第 $k+1(k \ge 1)$ 步,下山方向不再简单地取 r_k ,而是在过点 x_k 由向量 r_k , p_{k-1} 所张成的二维平面 π_2 内找出使函数 φ 下降最快的方向作为 p_k

共轭梯度法的计算过程

共轭梯度法

邓建松

基本框势

最速下降法

拟还丁阵亿

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度法

基本性

实用共轭梯度法及身 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

• 给定初始点 x_0 ,第一步仍然选负梯度方向为下山方向,即 $p_0 = r_0$,于是有

$$\alpha_0 = \frac{r_0^T r_0}{r_0^T A r_0}, x_1 = x_0 + \alpha_0 p_0, r_1 = b - A x_1$$

- 在第 $k+1(k \ge 1)$ 步,下山方向不再简单地取 r_k ,而是在过点 x_k 由向量 r_k , p_{k-1} 所张成的二维平面 π_2 内找出使函数 φ 下降最快的方向作为 p_k
 - 注意: $r_k \perp p_{k-1}$

共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降过

共轭佈及法及共基本 性质

共轭梯度法

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度活

• 考虑 φ 在 π_2 上的限制:

$$\psi(\xi, \eta) = \varphi(x_k + \xi r_k + \eta p_{k-1})$$

= $(x_k + \xi r_k + \eta p_{k-1})^T A(x_k + \xi r_k + \eta p_{k-1})$
- $2b^T (x_k + \xi r_k + \eta p_{k-1})$

共轭梯度法

邓建松

基本框架

島迪下 悠 辻

取迷下阵法

共轭梯度法及具基本 性质

共轭梯度法

实用共轭梯度法及非

实用共轭梯度 收敛性分析 • 考虑 φ 在 π_2 上的限制:

$$\psi(\xi, \eta) = \varphi(x_k + \xi r_k + \eta p_{k-1})$$

= $(x_k + \xi r_k + \eta p_{k-1})^T A(x_k + \xi r_k + \eta p_{k-1})$
 $-2b^T (x_k + \xi r_k + \eta p_{k-1})$

• 分别对 ξ , η 求偏导,得到局部下降最快的方向

共轭梯度法

邓建枢

基本框架

最速下降注

最速卜降沿

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度法

实用共轭梯度法及身 此 幼性

实用共轭梯度 收敛性分析 • 考虑 φ 在 π_2 上的限制:

$$\psi(\xi, \eta) = \varphi(x_k + \xi r_k + \eta p_{k-1})$$

= $(x_k + \xi r_k + \eta p_{k-1})^T A(x_k + \xi r_k + \eta p_{k-1})$
- $2b^T (x_k + \xi r_k + \eta p_{k-1})$

- 分别对 ξ , η 求偏导,得到局部下降最快的方向
 - 实际上直接求出的是在π2中达到最小值的点

共轭梯度法

邓建树

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基本

共轭梯度法

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

女敛性分析

• 求偏导:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 2r_k^T A (x_k + \xi r_k + \eta p_{k-1}) - 2b^T r_k
= 2(\xi r_k^T A r_k + \eta r_k^T A p_{k-1} - r_k^T r_k)
\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 2p_{k-1}^T A (x_k + \xi r_k + \eta p_{k-1}) - 2b^T p_{k-1}
= 2(\xi r_k^T A p_{k-1} + \eta p_{k-1}^T A p_{k-1})$$

这里利用了
$$r_k^T p_{k-1} = 0$$

共轭梯度法

11:4:14:10

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法 收敛性分析 • 由此得唯一极值点 $\tilde{x} = x_k + \xi_0 r_k + \eta_0 p_{k-1}$, 其中 $\xi_0 \eta_0$ 满足

$$\begin{cases} \xi_0 r_k^T A r_k + \eta_0 r_k^T A p_{k-1} = r_k^T r_k \\ \xi_0 r_k^T A p_{k-1} + \eta_0 p_{k-1}^T A p_{k-1} = 0 \end{cases}$$

实用共轭梯度法及其 收敛性

收敛性分析

• 由此得唯一极值点 $\tilde{x} = x_k + \xi_0 r_k + \eta_0 p_{k-1}$, 其中 $\xi_0 \eta_0$ 和 η_0 满足

$$\begin{cases} \xi_0 r_k^T A r_k + \eta_0 r_k^T A p_{k-1} = r_k^T r_k \\ \xi_0 r_k^T A p_{k-1} + \eta_0 p_{k-1}^T A p_{k-1} = 0 \end{cases}$$

• 由上式可知若 $r_k \neq 0$, 则必有 $\xi_0 \neq 0$ (为什么?) 因此可取新的下山方向为

$$p_k = \frac{1}{\xi_0}(\tilde{x} - x_k) = r_k + \frac{\eta_0}{\xi_0}p_{k-1}$$

共轭梯度法

实用共轭梯度法及其 收敛性

收敛性分析

• 由此得唯一极值点 $\tilde{x} = x_k + \xi_0 r_k + \eta_0 p_{k-1}$, 其中 $\xi_0 \eta_0$ 和 η_0 满足

$$\begin{cases} \xi_0 r_k^T A r_k + \eta_0 r_k^T A p_{k-1} = r_k^T r_k \\ \xi_0 r_k^T A p_{k-1} + \eta_0 p_{k-1}^T A p_{k-1} = 0 \end{cases}$$

• 由上式可知若 $r_k \neq 0$, 则必有 $\xi_0 \neq 0$ (为什么?) 因此可取新的下山方向为

$$p_k = \frac{1}{\xi_0}(\tilde{x} - x_k) = r_k + \frac{\eta_0}{\xi_0}p_{k-1}$$

● *n*₀是否可以等于0呢?

性质

共祀伽及法

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法 收敛性分析 • $\phi \beta_{k-1} = \eta_0/\xi_0$,则由 ξ_0 和 η_0 满足的第二个方程可知

$$\beta_{k-1} = -\frac{r_k^T A p_{k-1}}{p_{k-1}^T A p_{k-1}}$$

实用共轭梯度 收敛性分析 • 令 $\beta_{k-1} = \eta_0/\xi_0$,则由 ξ_0 和 η_0 满足的第二个方程可知

$$\beta_{k-1} = -\frac{r_k^T A p_{k-1}}{p_{k-1}^T A p_{k-1}}$$

● 如此确定的p_k满足

$$p_{k}^{T}Ap_{k-1} = \left(r_{k} - \frac{r_{k}^{T}Ap_{k-1}}{p_{k-1}^{T}Ap_{k-1}}p_{k-1}\right)^{T}Ap_{k-1} = 0$$

即 p_k 与 p_{k-1} 是关于A相互共轭的

公式初步梳理

共轭梯度法

邓建松

基本框

步长的确定

最速下降法

性质

火机物及位

实用共轭梯度法及非

实用共轭梯度法

• p_k 确定以后,可以采用前面的方法确定 α_k

公式初步梳理

共轭梯度法

邓建松

基本框架

見油で欧汁

取迷下阵法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度法

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

- p_k 确定以后,可以采用前面的方法确定 α_k
- 总结公式为

$$\alpha_k = \frac{r_k^T p_k}{p_k^T A p_k}, \quad x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$$
$$r_{k+1} = b - A x_{k+1}$$
$$\beta_k = -\frac{r_{k+1}^T A p_k}{p_k^T A p_k}, \quad p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k p_k$$

r_{k+1} 的简化

共轭梯度法

邓建松

基本框架

JEJZ 65 ZB c

县油下陈辻

-2.2

共视师及法及共基本 性质

共轭梯度沿

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

● 根据*r*_{k+1}的定义,

$$r_{k+1} = b - Ax_{k+1} = b - A(x_k + \alpha_k p_k)$$
$$= r_k - \alpha_k A p_k$$

r_{k+1} 的简化

共轭梯度法

邓建杉

基本框架

步长的确定

最速下降法

共轭梯度法及其基本

共轭梯度法

实用共轭梯度法及非

实用共轭梯度 收敛性分析 ● 根据*r*_{k+1}的定义,

$$r_{k+1} = b - Ax_{k+1} = b - A(x_k + \alpha_k p_k)$$
$$= r_k - \alpha_k A p_k$$

• Ap_k 在计算 α_k 时已求出,所以计算 r_{k+1} 时就可以用上述递推公式得到

r_{k+1} 的简化

共轭梯度法

邓建松

基本框架

B + T m +

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度法

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度 收敛性分析 • 根据 r_{k+1} 的定义,

$$r_{k+1} = b - Ax_{k+1} = b - A(x_k + \alpha_k p_k)$$
$$= r_k - \alpha_k A p_k$$

- Ap_k 在计算 α_k 时已求出,所以计算 r_{k+1} 时就可以用上述递推公式得到
- 由上式可得

$$Ap_k = \frac{1}{\alpha_k} (r_k - r_{k+1})$$

共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的确定

最速下降法

共轭体及法及共生平 性盾

All for Display N

基太性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

女敛性分析

• 注意等式(证明后面给出)

$$r_k^T r_{k+1} = r_k^T p_{k-1} = r_{k+1}^T p_k = 0, k = 1, 2, \dots$$

共轭梯度法

邓建杉

基本框架

最速下降法

......

共轭梯度法及共基本 性质

共轭梯度法

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

• 注意等式(证明后面给出)

$$r_k^T r_{k+1} = r_k^T p_{k-1} = r_{k+1}^T p_k = 0, k = 1, 2, \dots$$

• 从而我们有

$$r_{k+1}^{T} A p_{k} = \frac{1}{\alpha_{k}} r_{k+1}^{T} (r_{k} - r_{k+1}) = -\frac{1}{\alpha_{k}} r_{k+1}^{T} r_{k+1}$$

$$p_{k}^{T} A p_{k} = \frac{1}{\alpha_{k}} p_{k}^{T} (r_{k} - r_{k+1}) = \frac{1}{\alpha_{k}} p_{k}^{T} r_{k}$$

$$= \frac{1}{\alpha_{k}} r_{k}^{T} (r_{k} + \beta_{k-1} p_{k-1}) = \frac{1}{\alpha_{k}} r_{k}^{T} r_{k}$$

共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的确定

最速下降法

共轭梯度法及其基本

共轭梯度法

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

• 回忆:

$$\alpha_k = \frac{r_k^T p_k}{p_k^T A p_k} \quad \beta_k = -\frac{r_{k+1}^T A p_k}{p_k^T A p_k}$$

共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度法

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

• 回忆:

$$\alpha_k = \frac{r_k^T p_k}{p_k^T A p_k} \quad \beta_k = -\frac{r_{k+1}^T A p_k}{p_k^T A p_k}$$

• 对 α_k 的分式进行简化;并且把前页两式相除,可对 β_k 进行简化:

$$\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k} \quad \beta_k = \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k}$$

共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的确定

最速下降沒

性质

共轭梯度》

基本性质

实用共轭梯度法及非 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

共轭梯度法

邓建松

基本框势

步长的确定

最速下降法

共轭梯度法及其基

11世

2K-901/0/3E

基本性质

实用共轭梯度法及៛ 收敛性

实用共轭梯度法

共轭梯度法

邓建松

基本框列

步长的确定

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度法

基本性质

实用共轭梯度法及非 收敛性

收敛性分析

共轭梯度法

- **1** $p_i^T r_i = 0, \ 0 \le i < j \le k$
- $r_i^T r_i = 0, i \neq i, 0 \leq i, i \leq k$
- $p_i^T A p_i = 0, i \neq i, 0 \leq i, i \leq k$
- ② 定义 $\mathcal{K}(A, r_0, k+1) = \operatorname{span}\{r_0, Ar_0, \dots, A^k r_0\},$ 称为Krylov子空间,则span $\{r_0,\ldots,r_k\}$ = $\operatorname{span}\{p_0,\ldots,p_k\}=\mathcal{K}(A,r_0,k+1)$

k = 1时性质的证明

共轭梯度法

邓建树

基本框架

4544-65765

晶速下降过

共轭梯度法及其基本

性质

共轭梯度法

基本性质

实用共轭梯度法及非 收敛性

实用共轭梯度法

女敛性分析

• 对k进行归纳证明

k = 1时性质的证明

共轭梯度法

邓建杉

基本框架

最速下降过

取迷下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度法

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

• 对k进行归纳证明

● 当k = 1时, 因为

$$p_{0} = r_{0}, r_{1} = r_{0} - \alpha_{0}Ap_{0}, p_{1} = r_{1} + \beta_{0}p_{0},$$

$$p_{0}^{T}r_{1} = r_{0}^{T}r_{1} = r_{0}^{T}(r_{0} - \alpha_{0}Ar_{0})$$

$$= r_{0}^{T}r_{0} - \alpha_{0}r_{0}^{T}Ar_{0} = 0,$$

$$p_{1}^{T}Ap_{0} = (r_{1} + \beta_{0}r_{0})^{T}Ar_{0}$$

$$= r_{1}^{T}Ar_{0} - \frac{r_{1}^{T}Ar_{0}}{r_{0}^{T}Ar_{0}}r_{0}^{T}Ar_{0} = 0$$

所以性质成立

性质(1)

共轭梯度法

邓建松

基本框 3

县油下陈辻

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度流

基本性质

实用共轭梯度法及 收敛性

假设性质在k时成立,我们证明在k+1时也成立

① 由于 $r_{k+1} = r_k - \alpha_k A p_k$ 以及归纳假设,我们有

$$p_i^T r_{k+1} = p_i^T r_k - \alpha_k p_i^T A p_k = 0, 0 \leqslant i \leqslant k-1$$

又由于

$$p_k^T r_{k+1} = p_k^T r_k - \frac{p_k^T r_k}{p_k^T A p_k} p_k^T A p_k = 0$$

所以性质(1)在k+1时成立

性质(2)

共轭梯度法

由归纳假设

$$\operatorname{span}\{r_0,\ldots,r_k\}=\operatorname{span}\{p_0,\ldots,p_k\}$$

则由性质(1)可知 r_{k+1} 与上述空间正交,从而性 质(2)在k+1时成立

性质(3)

共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降法

ACCE | I THE

共轭梯度法及具基本 性质

共轭梯度沿

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

③ 根据归纳假设,当i = 0, 1, ..., k − 1时

$$p_{i}^{T}Ap_{k+1} = p_{i}^{T}A(r_{k+1} + \beta_{k}p_{k}) = r_{k+1}^{T}Ap_{i}$$

$$= \frac{1}{\alpha_{i}}r_{k+1}^{T}(r_{i} - r_{i+1}) = 0$$

$$p_{k+1}^{T}Ap_{k} = (r_{k+1} + \beta_{k}p_{k})^{T}Ap_{k}$$

$$= r_{k+1}^{T}Ap_{k} - \frac{r_{k+1}^{T}Ap_{k}}{p_{k}^{T}Ap_{k}}p_{k}^{T}Ap_{k} = 0$$

所以性质(3)成立

性质(4)

共轭梯度法

邓建枢

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其

性质

× 1000000

实用共轭梯度法及!

实用共轭梯度法

收敛性分析

● 由归纳假设可知

 $r_k, p_k \in \mathcal{K}(A, r_0, k+1) = \operatorname{span}\{r_0, Ar_0, \dots, A^k r_0\}$ 于是

$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k A p_k \in \mathcal{K}(A, r_0, k+2),$$

$$p_{k+1} = r_k + \beta_k A p_k \in \mathcal{K}(A, r_0, k+2),$$

而根据性质(2),(3), r_0, \ldots, r_{k+1} 和 p_0, \ldots, p_{k+1} 都是线性无关的,所以性质(4)成立

Krylov子空间

共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基本性质

....

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用**买**轭梯度 齿幼性分析 • 前述性质表明,向量组 r_0, \ldots, r_k 和 p_0, \ldots, p_k 分别是Krylov子空间 $\mathcal{K}(A, r_0, k+1)$ 的正交基和共轭正交基

Krylov子空间

共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

女敛性分析

- 前述性质表明,向量组 $r_0, ..., r_k$ 和 $p_0, ..., p_k$ 分别是Krylov子空间 $\mathcal{K}(A, r_0, k+1)$ 的正交基和共轭正交基
- 所以采用共轭梯度法至多n步就得到方程组的解 x_*

Krylov子空间

共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

• 前述性质表明,向量组 r_0, \ldots, r_k 和 p_0, \ldots, p_k 分别是Krylov子空间 $\mathcal{K}(A, r_0, k+1)$ 的正交基和共轭正交基

- 所以采用共轭梯度法至多*n*步就得到方程组的解*x*。
- 理论上讲, 共轭梯度法是直接法

精度估计

共轭梯度法

邓建松

基本框

步长的确定

县油下陈》

取迷下阵花

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度

基本性质

实用共轭梯度法及៛ 收敛性

实用共轭梯度法

定理

用共轭梯度法计算得到的近似解Xk满足

$$\varphi(x_k) = \min\{\varphi(x) : x \in x_0 + \mathcal{K}(A, r_0, k)\}$$

或者等价地表示为

$$||x_k-x_*||_A = \min\{||x-x_*||_A : x \in x_0 + \mathcal{K}(A, r_0, k)\}$$

定理证明

共轭梯度法

邓建村

基本框

最速下降过

共轭梯度法及其基本

庄灰

其大性を

实用共轭梯度法及

实用共轭梯度法

女敛性分析

• 由 $\varphi(x) + x_*^T A x_* = (x - x_*)^T A (x - x_*)$ 可知要证的两式是等价的。下面只证第二式成立

定理证明

共轭梯度法

邓建松

基本框

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

I for the start of

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

- 由 $\varphi(x) + x_*^T A x_* = (x x_*)^T A (x x_*)$ 可知要证的两式是等价的。下面只证第二式成立
- 假设共轭梯度法计算到 ℓ 步出现 $r_{\ell}=0$,那么有

$$x_* = x_{\ell} = x_{\ell-1} + \alpha_{\ell-1}p_{\ell-1}$$

$$= x_{\ell-2} + \alpha_{\ell-2}p_{\ell-2} + \alpha_{\ell-1}p_{\ell-1}$$

$$= \cdots \cdots$$

$$= x_0 + \alpha_0p_0 + \alpha_1p_1 + \cdots + \alpha_{\ell-1}p_{\ell-1}$$

邓建松

基本框架

步长的铆定

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

非細模度)

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

● 而对计算过程中任一步k < ℓ, 我们有

$$x_k = x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j p_j \in x_0 + \mathcal{K}(A, r_0, k)$$

邓建松

基本框架

步长的确定

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

世細維座社

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

• 而对计算过程中任一步 $k < \ell$, 我们有

$$x_k = x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j p_j \in x_0 + \mathcal{K}(A, r_0, k)$$

• 设 $x \in x_0 + \mathcal{K}(A, r_0, k)$ 为任一向量,则x有表示

$$x = x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j p_j$$

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

头用头轭体B 收敛性分析 • 而对计算过程中任一步 $k < \ell$, 我们有

$$x_k = x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j p_j \in x_0 + \mathcal{K}(A, r_0, k)$$

• 设 $x \in x_0 + \mathcal{K}(A, r_0, k)$ 为任一向量,则x有表示

$$x = x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_j p_j$$

● 于是

$$x_* - x = \sum_{j=0}^{k-1} (\alpha_j - \gamma_j) p_j + \sum_{j=k}^{\ell-1} \alpha_j p_j$$

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

牢用非短梯度法

收敛性分析

• 而 $x_* - x_k = \sum_{j=k}^{\ell} \alpha_j p_j$,根据共轭梯度法的性质(3)可得

$$\|x_{*} - x\|_{A}^{2} = \left\| \sum_{j=0}^{k-1} (\alpha_{j} - \gamma_{j}) p_{j} \right\|_{A}^{2} + \left\| \sum_{j=k}^{\ell-1} \alpha_{j} p_{j} \right\|_{A}^{2}$$

$$\geqslant \left\| \sum_{j=k}^{\ell-1} \alpha_{j} p_{j} \right\|_{A}^{2} = \|x_{*} - x_{k}\|_{A}^{2}$$

共轭梯度法

邓建松

基本框架

.....

最速下降法

共轭梯度法及其基本

性质

共轭梯度法

实用共轭梯度法及非 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

共轭梯度法在理论上确保至多n步得到方程组的精确解

共轭梯度法

邓建松

坐本性第

最速下降法

拟还丁阵亿

性质 性质

基本性质

实用共轭梯度法

- 共轭梯度法在理论上确保至多n步得到方程组的精确解
- 在实际使用时由于误差的存在,使得r_k之间的 正交性很快损失,所以有限步终止性不再成立

共轭梯度法

邓建松

基本框架 步长的确定

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度法 基本性质

实用共轭梯度法及: 收敛性

头用头轭你 收敛性分析

- 共轭梯度法在理论上确保至多*n*步得到方程组 的精确解
- 在实际使用时由于误差的存在,使得r_k之间的 正交性很快损失,所以有限步终止性不再成立
- 而且在实际应用中,由于*n*一般很大,迭代*n*次 迭代所耗费的计算时间令人无法接受

共轭梯度法

邓建松

基本框架 步长的确定

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度法 基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

美用共轭梯度 此分卅八年

- 共轭梯度法在理论上确保至多n步得到方程组 的精确解
- 在实际使用时由于误差的存在,使得r_k之间的 正交性很快损失,所以有限步终止性不再成立
- 而且在实际应用中,由于*n*一般很大,迭代*n*次 迭代所耗费的计算时间令人无法接受
- 所以通常仍把共轭梯度法作为一种迭代法使用,当||r_k||足够小或者达到指定迭代次数时终止

共轭梯度法的优点

共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基本

性质

基本性质

实用共轭梯度活

收敛性分析

在算法中,系数矩阵A仅仅用来由已知向量p产生向量Ap,因此可以充分利用A的稀疏性,而且对某些提供矩阵A困难,而可以方便由p产生向量Ap的应用问题,这种方法十分有用

共轭梯度法的优点

共轭梯度法

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基

共轭梯度法

实用共轭梯度活

- 在算法中,系数矩阵A仅仅用来由已知向量p产生向量Ap,因此可以充分利用A的稀疏性,而且对某些提供矩阵A困难,而可以方便由p产生向量Ap的应用问题,这种方法十分有用
- 不需要预先估计任何参数就可以计算

共轭梯度法的优点

共轭梯度法

基本框架 _{步长的确定} 最速下降法 共轭梯度法及。

生质 共轭梯度法

实用共轭梯度法及其

实用共轭梯度2

● 在算法中,系数矩阵A仅仅用来由已知向量p产生向量Ap,因此可以充分利用A的稀疏性,而且对某些提供矩阵A困难,而可以方便由p产生向量Ap的应用问题,这种方法十分有用

- 不需要预先估计任何参数就可以计算
- 每次迭代的主要计算就是向量之间的运算,因此便于并行化

作为迭代法的收敛性估计

共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及非

性质 ^{共轭梯度法}

实用共轭梯度法及

实用共轭梯度法

收敛性分析

若系数矩阵与单位矩阵的差是一个秩为r的矩阵,而且r又很小的话,那么共轭梯度法收敛得很快

定理

如果A = I + B, rank B = r, 那么共轭梯度 法至多迭代r + 1步即可得到方程

组Ax = b的精确解

定理证明

共轭梯度法

邓建松

基本框列

最速下降沒

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度法

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度活

收敛性分析

• 注意到 $\operatorname{rank} B = r$ 蕴涵着

$$\mathrm{span}\{r_0, Ar_0, \dots, A^k r_0\} = \mathrm{span}\{r_0, Br_0, \dots, B^k r_0\}$$

的维数不会超过r+1,因此定理成立。

误差估计

共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的确定

最速下降法

共轭梯度法及其

性质

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

定理

用共轭梯度法求得的水有如下的误差估计:

$$||x_k - x_*||_A \leqslant 2\left(\frac{\sqrt{\kappa_2} - 1}{\sqrt{\kappa_2} + 1}\right)^k ||x_0 - x_*||_A$$

其中
$$\kappa_2 = \kappa_2(A) = ||A||_2 ||A^{-1}||_2$$

定理证明

共轭梯度法

邓建村

基本框

步长的确定

最速下降法

共轭梯度法及其

性质

11 -4- Jul. 15

实用共轭梯度法

女敛性分析

• 由共轭梯度法的性质可知,对任意 的 $x \in x_0 + \mathcal{K}(A, r_0, k)$ 有

$$x_* - x = x_* - x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} a_{k,j+1} A^j r_0$$

$$= \left(I + \sum_{j=1}^k a_{kj} A^j\right) A^{-1} r_0 = P_k(A) A^{-1} r_0$$

其中
$$P_k(\lambda) = 1 + \sum_{i=1}^k a_{kj} \lambda^j$$

共轭梯度法

双建 ホ

基本框架

最速下降法

双处 1 1941公

共轭梯度法及具基本 性质

共轭梯度法

实用共轭梯度法及其

实用共轭梯度法

收敛性分析

• 令 \mathcal{P}_k 为所有满足 $P_k(0) = 1$,且次数不超过k的实系数多项式全体,则(第一个不等号应用了"最速下降法"一节中已证的引理)

$$||x_{*} - x_{k}||_{A} = \min\{||x - x_{*}||_{A} : x \in x_{0} + \mathcal{K}(A, r_{0}, k)\}$$

$$= \min_{P_{k} \in \mathcal{P}_{k}} ||P_{k}(A)A^{-1}r_{0}||_{A}$$

$$\leq \min_{P_{k} \in \mathcal{P}_{k}} \max_{1 \leq i \leq n} |P_{k}(\lambda_{i})|||A^{-1}r_{0}||_{A}$$

 $\leq \min_{P_k \in \mathcal{P}_k} \max_{a \leq \lambda \leq b} |P_k(\lambda)| ||x_* - x_0||_A$

其中 $0 < a = \lambda_0 \le \cdots \le \lambda_n = b$ 是A的特征值

共轭梯度法

基本性质

实用共轭梯度法及身 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

• 根据Chebyshev多项式的性质,最优化问题 $\min_{P_k \in \mathcal{P}_k} \max_{a \leqslant \lambda \leqslant b} |P_k(\lambda)|$ 有唯一解

$$ilde{P}_k(\lambda) = rac{T_k\left(rac{b+a-2\lambda}{b-a}
ight)}{T_k\left(rac{b+a}{b-a}
ight)}$$

其中 $T_k(x)$ 是k次Chebyshev多项式

共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基本性质

11.7X ++40.14 do 2+

基本性质

实用共轭梯度法及非 收敛性

实用共轭梯度法

女敛性分析

• Chebyshev多项式: $T_n(x) = cos(n \arccos x)$, 它是定义在[-1,1]上,在所有同首项系数的n次多项式中,它在[-1,1]上的绝对最大值最小

共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降法

11.40.1% (2.11.7)

性质

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

女敛性分析

- Chebyshev多项式: $T_n(x) = cos(n \arccos x)$, 它是定义在[-1,1]上,在所有同首项系数的n次多项式中,它在[-1,1]上的绝对最大值最小
- 在[-1,1]外用多项式形式直接延拓

共轭梯度法

邓建松

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基

共轭梯度法 基本性质

实用共轭梯度法及其

实用共轭梯度 收敛性分析

- Chebyshev多项式: $T_n(x) = cos(n \arccos x)$, 它是定义在[-1,1]上,在所有同首项系数的n次多项式中,它在[-1,1]上的绝对最大值最小
- 在[-1,1]外用多项式形式直接延拓
- 递推公式: $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) T_{n-2}(x)$, $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$

共轭梯度法

- Chebyshev多项式: $T_n(x) = cos(n \arccos x)$, 它 是定义在[-1,1]上,在所有同首项系数的n次多 项式中,它在[-1,1]上的绝对最大值最小
- 在[-1,1]外用多项式形式直接延拓
- 递推公式: $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) T_{n-2}(x)$, $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$
- 基于上述公式,可以证明当|x| ≥ 1时有 $T_n(x) = \frac{1}{2} \left(\left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right)^n + \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^n \right)$

共轭梯度法

邓建松

基本框架

事长的確守

取速 ト 降 法

共轭梯度法及具基本 性质

工/火

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

• 当
$$\gamma > 1$$
, $x = (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$ 时
$$x \pm \sqrt{x^2 - 1} = \frac{(\sqrt{\gamma} \pm 1)^2}{\gamma - 1},$$

大祝彻及6

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

• 当
$$\gamma > 1$$
, $x = (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$ 时

$$x \pm \sqrt{x^2 - 1} = \frac{(\sqrt{\gamma} \pm 1)^2}{\gamma - 1},$$

从而有

$$T_n\left(rac{\gamma+1}{\gamma-1}
ight) = rac{(\sqrt{\gamma}+1)^{2n}+(\sqrt{\gamma}-1)^{2n}}{2(\gamma-1)^n} \ \geqslant rac{(\sqrt{\gamma}+1)^{2n}}{2(\gamma-1)^n}$$

重回证明

共轭梯度法

邓建树

基本框架

最速下降法

共轭梯度法及其基本

性质

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

收敛性分析

根据Chebyshev多项式的性质,我们有

$$egin{aligned} \max_{a\leqslant x\leqslant b} | ilde{P}_k(\lambda)| &= rac{1}{T_kigg(rac{b+a}{b-a}igg)} \ &\leqslant rac{2(b-a)^k}{(\sqrt{b}+\sqrt{a})^{2k}} \ &= 2\left(rac{\sqrt{\kappa_2}-1}{\sqrt{\kappa_2}+1}
ight)^k \end{aligned}$$

这就完成了证明($\kappa_2 = b/a$)

共轭梯度法

邓建村

基本框架

步长的确定

最速下降法

共轭梯度法及其基本

性质

基本性质

实用共轭梯度法及其 收敛性

实用共轭梯度法

女敛性分析

• 上述估计是十分粗糙的

共轭梯度法

邓建松

基本框架

步长的确定

最速下降法

共轭体及法及共基件 性质

共轭梯度法

基本性质

实用共轭梯度法

女敛性分析

- 上述估计是十分粗糙的
- 实际收敛速度往往比这个估计快得多

共轭梯度法

邓建林

基本框架 ************

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度? 基本性质

实用共轭梯度法及 收敛性

实用共轭梯度的

- 上述估计是十分粗糙的
- 实际收敛速度往往比这个估计快得多
- 但这个结果告诉我们,只要系数矩阵是十分良态的(即 $\kappa_2 \approx 1$),那么共轭梯度法就会收敛得很快

共轭梯度法

邓建村

基本框架 步长的确定

最速下降法

共轭梯度法及其基本 性质

共轭梯度? 基本性质

实用共轭梯度法及。 收敛性

实用共轭梯度

- 上述估计是十分粗糙的
- 实际收敛速度往往比这个估计快得多
- 但这个结果告诉我们,只要系数矩阵是十分良态的(即 $\kappa_2 \approx 1$),那么共轭梯度法就会收敛得很快
- 对比于最速下降法收敛估计中的因子, 我们有

$$\frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1} \geqslant \frac{\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_n} + \sqrt{\lambda_1}}$$