# 数值代数 2019 秋期末试题

2019 年 12 月 27 日

1. 定义 $N(y,k) = I - ye_k^T$, 其中 $I$ 为 $n$ 阶单位阵，$e_k$ 为 $I$ 的第 $k$ 列形成的向量，$y \in \mathbb{R}^n$(20 分)

(a) 假定 $N(y,k)$ 非奇异，给出计算其逆的公式；

(b) 向量 $x \in \mathbb{R}^n$ 满足何种条件才能保证存在 $y \in \mathbb{R}^n$ 使得 $N(y,k)\,x = e_k$?

(c) 请给出利用这里定义的变换 $N(y,k)$ 计算矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的逆矩阵的算法，并且说明 $A$ 满足何种条件才能保证算法能够进行到底。

2. 设计算机所采用浮点数基底为 $\beta$, $\mathbf{u}$ 表示机器精度，$x$ 为实数，$fl\,(x)$ 为其浮点数表示 (10 分)

(a) 给出机器精度 u 的定义；

(b) 证明存在 $\delta$ 满足

$$fl(x) = \frac{x}{1+\delta}, \quad |\delta| \leqslant \mathbf{u}.$$

3. 证明：对于任意 $n$ 阶可逆矩阵 $A$, 其基于任意矩阵范数的条件数都不会小于 1.(10 分)

4. 设 $x, y$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个非零向量，给出一个算法确定一个 Householder 变换 $H$, 使得 $Hx = \alpha y$, 其中 $\alpha > 0$.(10 分)

5. 若存在对称正定矩阵 $P$, 使得 $B = P - H^TPH$ 为对称正定矩阵，证明迭代法：

$$x_{k+1} = Hx_k + b, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

收敛，并说明收敛极限是什么。(15 分)

6. 证明：当对矩阵 $A$ 应用最速下降法在有限步求得极小值时，最后一步迭代的下降方向必是 $A$ 的一个特征向量。(10 分)

7.(15 分)

(a) 简述基于 QR 分解的原始 QR 算法，并说明在隐式 QR 算法中如何实现了不再显式调用 QR 分解。

(b) 能否基于 LU 分解给出计算矩阵特征值的算法？并对算法进行评价。

8. 定义矩阵

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 \\ 0 & \beta_3 & \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

证明：M 有重特征根当且仅当 $\beta_2\beta_3 = 0$.(10 分 )