homework4

游瀚哲

2023 年 11 月 9 日

一、作业要求

1. 考虑两点边值问题

$$\begin{cases} \epsilon\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}=a, 0<a<1, \\ y(0)=0, y(1)=1 \end{cases}$$

容易知道它的精确解为

$$y=\frac{1-a}{1-e^{-\frac{1}{\epsilon}}}1-e^{-\frac{x}{\epsilon}}+ax$$

为了把微分方程离散化，把 [0, 1] 区间 n 等分，令 $h=\frac{1}{n}, x_i=ih, i=1,\cdots,n-1$, 得到差分方程

$$\epsilon\frac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2}+\frac{y_{i+1}-y_i}{h}=a$$

简化为

$$(\epsilon+h)y_{i+1}-(2\epsilon+h)y_i+\epsilon y_{i-1}=ah^2$$

离散化后得到线性方程组 Ay = b, 其中

$$A=\begin{bmatrix} -(2\epsilon+h) & (\epsilon+h) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \epsilon & -(2\epsilon+h) & (\epsilon+h) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \epsilon & -(2\epsilon+h) & (\epsilon+h) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \epsilon & -(2\epsilon+h) & (\epsilon+h) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \epsilon & -(2\epsilon+h) \end{bmatrix}$$

注意 A 为 n-1 阶矩阵, 将线性方程组与差分方程进行对比得出正确的 b 向量（尤其注意第一行和最后一行）。

对 $\epsilon=1, a=1/2, n=100$, 分别用 Jacobi 迭代法,G-S 迭代法和 SOR 迭代法求线性方程组的解，要求 4 位有效数字，然后比较迭代次数，运行时间与精确解的误差。迭代法终止条件为 $||x_{k+1}-x_k||<10^{-6}$。

对 $\epsilon=0.1, 0.01, 0.0001$, 考虑同样的问题。要求输出计算结果，收敛所需要的迭代次数和运行时间。

2. 考虑偏微分方程

$$-\Delta u+g(x,y)u=f(x,y), (x,y)\in[0,1]\times[0,1] \tag{1}$$

在 $[0,1]\times[0,1]$ 边界上 $u = 1$. 沿 x 方向和 y 方向均匀剖分 N 等份，令 $h = 1/N$, 并设应用中心差分离散化后得到差分方程的代数方程组为

$$-u_{i-1,j} - u_{i,j-1} + (4 + h^2 g(ih, jh))u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1} = h^2 f(ih, jh)$$

取 $g(x, y) = \exp(xy)$, $f(x, y) = x+y$, 分别用 Jacobi 迭代法,G-S 迭代法和 SOR 迭代法求解上述代数方程组，要求输出解的最小分量，并比较 $N = 20, 40, 60$ 时收敛所需要的迭代次数和运行时间，迭代终止条件为 $||x_{k+1} - x_k||_2 < 10^{-7}$。

要求仿照下面写的 Jacobi 迭代格式的推导过程推导处 G-S 迭代和 SOR 迭代的格式，在用 SOR 迭代法求解的过程中，请对不同的 N 使用合适的松弛因子 ω, 并在程序输出中打印松弛因子的值。观察运行结果后选取合适的。(代码中不需要体现选取过程，只需给出即可)。

注意本题中的三个迭代法的算法需要重新写，不能用矩阵的通用算法!!!

二、作业涉及的算法

必须实现的算法有: 矩阵方程的 Jacobi 迭代、G-S 迭代和 SOR 迭代方法。

第二题中的三个迭代法需要单独实现，不能用矩阵的通用算法!!!

新建一个空项目，根据需要将之前的程序文件添加到项目中。

1、Jacobi 迭代法

考虑其迭代格式 $Dx_{(k+1)} = (L + U)x_k + b$。对第 i 行有 $D_i i x_i^{(k+1)} = \sum_{i,j}(L + U)_{ij} x_j^{(k)} + b_i$。将 D, L, U 还原成代数方程组的 Jacobi 迭代式

$$D_{ii}x_i^{(k+1)} = L_{i1}x_1^{(k)} + \cdots + L_{ii-1}x_{i-1}^{(k)} + U_{ii+1}x_{i+1}^{(k)} + \cdots U_{in}x_n^{(k)}b_i$$

即只有与向量 b 的下标相同的位置替换成 x^{k+1}。

由此类比推广至矩阵（或者可以直接将矩阵拉直成向量），知代数方程组 (1) 的 Jacobi 迭代格式为

$$(4 + h^2 g(ih, jh))u_{i,j}^{(k+1)} = u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)} + u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)} + h^2 f(ih, jh)$$

2、G-S 迭代法

3、SOR 迭代法

三、附加说明

1. 尽量使用 c++ 和 visual studio。

2. 本次作业最迟 ddl 为 **2023.11.23(周四)23:59**，请大家尽早提交，后面的作业只会更难。超时作业没有特殊情况者拒收。若有特殊情况请提前私聊助教沟通。迟交的作业会视情况酌情扣分。

3. 请确保你的程序能顺利跑出正确的结果再上交！可以用 Mathematica/Matlab 等工具来验证你的解是否正确。

4. 没有报告的程序作业不予批改, 报告一定要交 pdf 版本。