数值代数习题课讲义 4

游瀚哲

2023 年 11 月 30 日

一、书面作业讲解

1、对于 Jacobi 迭代法，迭代矩阵 $B = D^{-1}(L+U)$。对于 Gauss-Seidel 迭代法，迭代矩阵 $G = (D-L)^{-1}U$

对于 A_1，Jacobi 迭代矩阵和 Gauss-Seidel 迭代矩阵分别为

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & -0.5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} G = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{pmatrix}$$

计算得出 $\rho(B) = \frac{\sqrt{5}}{2}, \rho(G) = \frac{1}{2}$ 从而对于 A_1 来说，Jacobi 迭代法不收敛，而 G-S 迭代法收敛

对于 A_2，Jacobi 迭代矩阵和 Gauss-Seidel 迭代矩阵分别为

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} G = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

计算得出 $\rho(B) = 0, \rho(G) = 2$。从而对于 A_2 来说，Jacobi 迭代法收敛，而 G-S 迭代法不收敛

2、精确解满足 $x_* = Bx_* + g$, 令 $y_k = x_k - x_*$，有 $y_{k+1} = By_k$

由于 $\rho(B) = 0$，即 B 的所有特征值均为 0，于是可以由 Cayley-Hamilton 定理得到 $B^n = 0$。

从而对于任意 $x_0, g \in \mathbf{R}^n$，均有 $y_n = 0, x_n = x_*$, 于是最多迭代 n 次就能得到精确解

3、（1）A 正定 $\Leftrightarrow$ 顺序主子式 >0 $\Leftrightarrow a^2 < 1$

(2)Jacobi 迭代法迭代矩阵是 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 \end{pmatrix}$，特征值为 0, -a, a，收敛需谱半径小于 1，即 $a \in (-1, 1)$。

(3)G-S 迭代法迭代矩阵是 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$，特征值为 0, 0, a^2，收敛需谱半径小于 1，即

$a \in (-1, 1)$。

4、反证：若不存在排列方阵满足要求 $\Leftrightarrow \forall \sigma, \exists i, a_{i,\sigma(i)} = 0$

$det(A) = \sum_{\sigma}(-1)^{\tau(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = 0 \Rightarrow$A 奇异，矛盾。

5、若 A 严格对角优或不可约对角优，则对角元非零。

若 GS 迭代矩阵存在模大于 1 特征值 $\lambda, D - L - \frac{1}{\lambda}U$ 也是严格对角优或不可约对角优

$det(\lambda I - G) = det(\lambda(D - L)^{-1}(D - L - \frac{1}{\lambda}U)) \neq 0$ 矛盾

故 GS 迭代矩阵特征值模都小于 1，迭代收敛。

6、归纳，一阶时可直接说明成立，若 n-1 阶时成立，下证 n 阶成立。记 $m_i = |a_{ii}| - \sum_{j\neq i} a_{ij}$ 利用第一章习题 8 的证明过程中的小于号步骤，经过一步高斯消去，剩下的 A2 乘 a11 后的对角元 $|a_{11}a_{kk} - a_{1k}a_{k1}| - \sum_{j=2\neq i}^{n} |a_{11}a_{kj} - a_{1j}a_{k1}| \geq |a_{11}a_{kk}| - \sum_{j=1\neq i}^{n} |a_{11}a_{kj}| = m_k|a_{11}|$,

于是，$|det(A)| = |a_{11}||det(A_2)| \geq |a_{11}| \prod_{k=2}^{n} m_k \geq \prod_{k=1}^{n} m_k$。

7、由于 b 不影响收敛性，不妨设其为 0，此时准确解为 0。则有 $x_{n+1} = (D - L)^{-1}L^T x_n$, 于是 $(D-L)x_{n+1} = L^T x_n$。两边同左乘 x_n^T 与 x_{n+1}^T，可发现 $x_{n+1}^T A x_{n+1} - x_n^T A x_n = -(x_n - x_{n+1})^T D(x_n - x_{n+1}) \leq 0$。

于是若 A 不正定，存在非零 x 使 $x^T A x \leq 0$, 令其为起始向量。若某次迭代中 xn 与 xn+1 不同，则由 D 正定知 $x_{n+1}^T A x_{n+1} - x_n^T A x_n \leq 0$，于是 $x_{n+1}^T A x_{n+1} < 0$，此后不增，不可能收敛到解。否则，x 一直不变，由非零亦不是解，从而矛盾。

8、对 H 任意特征值 $\lambda, \exists x, \lambda x = Hx$, 则计算知 $x^H B x = (1 - |\lambda|^2) x^H P x$。B 正定知 $|\lambda| < 1 \Rightarrow$。H 谱半径小于 1，迭代收敛。

9、w = 1 时，计算发现即为 Jacobi 迭代矩阵，当 Jacobi 迭代法收敛时，$\rho(B) < 1$。B 的特征值 $|\lambda| < 1 \Leftrightarrow det(xD - (L + U)) = 0$ 的所有根模长小于 1.

当 JOR 迭代矩阵的特征值为 $\mu_i, 0 = det(\mu_i I - J) = det(D^{-1}((\mu_i - 1 + w)D - w(L + U)))$。$0 < w \leq 1$ 时，有 $|\frac{\mu_i - i + w}{w}| < 1 \Rightarrow -1 \leq -2w + 1 < \mu_i < 1$, 即 JOR 方法对于 $0 < w \leq 1$ 收敛。

10、与定理 4.2.6 类似，由于 $I - B = D^{-1/2}(w^{-1}D)^{-1/2}A(w^{-1}D)^{-1/2}D^{1/2}$

$I + B = D^{-1/2}(2I - (w^{-1}D)^{-1/2}A(w^{-1}D)^{-1/2})D^{1/2}$

故 JOR 迭代法收敛 $\Leftrightarrow \rho(B) < 1 \Leftrightarrow A, 2w^{-1}D - A$ 正定

11、直接计算可得

$\lambda I - wL = (D - wL)^{-1}((\lambda + w - 1)D - \lambda wL - wU)$ 类似定理 4.2.9，只需说明 $|\lambda| \geq 1, (\lambda + w - 1)D - \lambda wL - wU$ 严格对角占优或不可约对角占优。

$|\lambda+w-1|-|\lambda w|\geq|\lambda|-1+w-|\lambda w|=(|\lambda|-1)(1-w)\geq 0$

$|\lambda+w-1|\geq|\lambda w|\geq|w|$ 从而严格对角占优或不可约对角占优性仍保持，即得证。

13、(a) 直接计算 $a_{11}=\sqrt{2}$，而考虑非对角元可知 $a_{i+1,i}=-\frac{1}{a_{ii}}$，利用第一章习题可知 A 带宽 2。由 Tn 的对角线为 2, 有 $a_{i+1,i+1}^2+a_{i+1,i}^2=2$, 可解得 $a_{ii}=\sqrt{\frac{i+1}{i}},a_{i+1,i}=-\sqrt{\frac{i}{i+1}}$

(b) 与上题类似，递推可得 L 为 $L_{ii}=1,L_{i+1,i}=-\frac{i}{i+1}$, U 为 $U_{ii}=\frac{i+1}{i},U_{i,i+1}=-1$。

(c) 由于 T 的特征值互不相同，其特征向量能张成全空间，即特征向量作为列构成的矩阵 P 可逆。而 T P = P D, 其中 D 为特征值排列为的对角阵，于是 $T=PDP^{-1}$，由条件，D, P 均已知。原方程化为 $PDP^{-1}U+UPDP^{-1}=h^2F$，记 $U_0=P^{-1}UP,DU_0+U_0D=h^2P^{-1}FP$

按如下步骤求解：先计算 P^{-1}，然后计算 $P^{-1}FP$。而注意到 D 为对角阵,DU_0+U_0D 可直接逐元素求解，于是解 $DU_0+U_0D=h^2P^{-1}FP$, 最后计算 $U=PU_0P^{-1}$，最终复杂度 $O(n^3)$。

14、$D-\mu C_L-\mu^{-1}C_U=diag(\mu I,\mu^2I,\cdots,\mu^nI)(D-C_L-C_U)diag(\mu I,\mu^2I,\cdots,\mu^nI)^{-1}$

取行列式即证（只对所有块大小相同时成立）。

块大小不一样还是用 schur 补证明吧

15、$det(\lambda I-wL)=0\Leftrightarrow det(D-wC_L)^{-1}det((\lambda+w-1)D-w\lambda C_L-wC_U)=0\leftrightarrow det((\lambda+w-1)D-w\lambda C_L-wC_U)=0$

$\Leftrightarrow det((\lambda+w-1)D-w\lambda^{1/2}C_L-w\lambda^{1/2}C_U)=0$(由习题 14)

$\Leftrightarrow det(\frac{\lambda+w-1}{w\lambda^{1/2}}D-C_L-C_U)=0\Leftrightarrow det(\frac{\lambda+w-1}{w\lambda^{1/2}}I-B)=0$

于是 $\mu=\frac{\lambda+w-1}{w\lambda^{1/2}}$，同平方后求解二次方程即得题中式

二、程序作业讲解

本次作业中，Jacobi 迭代的迭代次数大约是 GS 迭代的两倍，奇怪的现象：$\epsilon=0.01$ 时误差诡异的大。第一题最优 w：1.94 1.9 1.55 1.01，第二题最优 w：1.73 1.85 1.9。

Jacobi:$-u_{i-1,j}^{(k)}-u_{i,j-1}^{(k)}-u_{i+1,j}^{(k)}-u_{i,j+1}^{(k)}+(4+h^2g(ih,gh))u_{i,j}^{(k+1)}=h^2f(ih,gh)$

G-S:$-u_{i-1,j}^{(k+1)}-u_{i,j-1}^{(k+1)}-u_{i+1,j}^{(k)}-u_{i,j+1}^{(k)}+(4+h^2g(ih,gh))u_{i,j}^{(k+1)}=h^2f(ih,gh)$

GOR:$-wu_{i-1,j}^{(k+1)}-wu_{i,j-1}^{(k+1)}-wu_{i+1,j}^{(k)}-wu_{i,j+1}^{(k)}+(4+h^2g(ih,gh))u_{i,j}^{(k+1)}-(1-w)(4+h^2g(ih,gh))u_{i,j}^{(k)}=h^2f(ih,gh)$

主要问题；

1、逐点迭代式没求对。

2、边界条件没处理好