数值代数习题课讲义 6

游瀚哲

2023 年 12 月 14 日

一、书面作业讲解

1、$det(\lambda I_m - BA) = det \begin{pmatrix} I_n & A \\ & \lambda I_m - BA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & A \\ B & \lambda I_m \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \lambda^{-1}(\lambda I_m - AB) & \\ B & \lambda I_m \end{pmatrix} = \lambda^{m-n} det(\lambda I_m - AB)$

2、由于 Q_k 为正交阵，根据有界收敛定理可知存在收敛子列。$Q^*AQ = lim_{i->\infty} Q_{k_i}^* A_{k_i} Q_{k_i} = lim_{i->\infty} T_{k_i}$，极限为上三角阵。

3、记 $C = Q^*BQ$，由条件直接计算可知 $CT = TC$，而 T 为对角元互不相同的上三角阵。

考察 CT 的下三角元素。$c_{n1}t_{11} = t_{nn}c_{n1} \Rightarrow c_{n1} = 0$ 从左下角向上归纳得出 $c_{ij} = 0$

4、$|Ax - \mu x|_2^2 = (Ax - \mu x)^*(Ax - \mu x) = x^*A^*Ax - x(\mu^*A + \mu A^*)x + \mu^*\mu x^*x = x^*A^*Ax - R(x)^*R(x)x^*x + |\mu - R(x)|^2 x^*x$。

5、对 α，单位右特征向量 $(1,0)^T$，左特征向量 $(1, -\frac{\gamma}{\alpha-\beta})^T$，条件数 $\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{(\alpha-\beta)^2}}$。

对 β，单位特征向量 $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{(\alpha-\beta)^2}}}(\frac{\gamma}{\beta-\alpha}, 1)^T$，左特征向量 $(0, \sqrt{1+\frac{\gamma^2}{(\alpha-\beta)^2}})^T$，条件数 $\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{(\alpha-\beta)^2}}$。

6、设 $B = QAQ^*$，若 x 为对特征值 λ 的单位特征向量，则由于 $QAQ^*Qx = \lambda Qx$，Qx 为 b 模为 1 的特征向量，类似知 Q^Ty 为对应的左特征向量，而 $||Q^Ty||_2 = ||y^TQ||_2 = ||y^T||_2$。

$U = (x, U_2), U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda & x^*AU_2 \\ & A_2 \end{pmatrix}, \Sigma^\perp = U_2(\lambda I - A)^{-1}U_2^*$。

类似有 $\widetilde{\Sigma^\perp} = QU_2(\lambda I - A)^{-1}U_2^*Q^*, ||\Sigma^\perp||_2 = ||\widetilde{\Sigma^\perp}||_2$。

7、$A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ & \lambda^n \end{pmatrix}$,

$B^{2k+1}=\lambda^{2k}B, B^{2k}=\lambda^{2k}I$

8、$A^n u_0=(\frac{n^2-n}{2},n,1)$，于是归一化后为 $(1,\frac{2}{n-1},\frac{2}{n^2-n})^T$，精确到 5 位需要 $2(n-1)^{-1}<10^{-5}$，即 $n>200001$。

9、由条件可知模第二大的特征值必然在 λ_2,λ_n 中，由 6.3 节开头知需要 $\frac{|\lambda_1-\mu|}{\max(|\lambda_2-\mu|,|\lambda_n-\mu|)}$ 尽量大。
最大值在 $|\lambda_2-\mu|=|\lambda_n-\mu|,\mu=\frac{\lambda_2+\lambda_n}{2}$ 取到

10、构造其友方阵 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha_n \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -\alpha_1 \end{pmatrix}$ 其特征多项式即为 $p(\lambda)$，用幂法计算即可。

11、Mathematica 计算可得约为 $(1,-0.7321,0.2679)^T$。

12、$E=\frac{uv^T}{||v||_2^2},||E||_F=\frac{||u||_2}{||v||_2}$
$(A+E)v-\lambda v=(A-\lambda I)(\lambda I-A)^{-1}u+\frac{uv^Tv}{||v||_2^2}=0$

13、$(A+E)v=\lambda v,u=(\lambda I-A)v=Ev$
$\frac{||u||_2}{||v||_2}=\frac{||Ev||_2}{||v||_2}\leq||E||_2$

14、$A^{2k+1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},A^{2k}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

15、若原本 a_{21} 到 a_{n1} 全为 0，则已经结束，否则可左乘 P 将其中非零元素置换到 a_{21}，再左乘 M 进行类似 guass 消去的操作，右乘 $P^{-1}M^{-1}$ 都是对后 n-1 列进行操作的列变换，不会影响第一列的结果。

16、对 A 做一次 15 题中操作后，对右下角的 (n - 1) × (n - 1) 的矩阵重复，依次往下即可得到上 Hessenberg 阵。

17、X 非奇异，故 $x,Ax,\cdots,A^{n-1}x$ 构成向量空间的 1 组基，设 $A^nx=\sum_{i=0}^{n-1}a_iA_ix$, 则 $AX=$

$$X\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha_n \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -\alpha_1 \end{pmatrix}, X^{-1}AX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha_n \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -\alpha_1 \end{pmatrix}$$

18、非亏损即可对角化。

由不可约条件可知对任何 λ，$\lambda I - H$ 的左下角 $n-1$ 阶子矩阵可逆，从而其特征值几何重数必然为 1，由可对角化知代数重数亦为 1，从而没有重特征值。

19、直接取 $d_{11} = 1, d_{i+1,i+1} = \frac{d_{ii}}{h_{i+1,i}}$，计算可知成立。

由于 $\|D\|_2, \|D^{-1}\|_2$ 分别为特征值与特征值倒数中模最大者,即 $\|D\|_2 * \|D^{-1}\|_2$ 为 $\sum_{k=1}^{n} |h_k, k+1|$ 中最大的除以最小的。

20、存在 Householder 变换 $P = (x, P_1)$ 使得 $P^T H P = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ & H_1 \end{pmatrix}$, 而存在 Q_0 使得 $Q_0^T H_1 Q_0$ 为 hessenberg 阵。$Q = P\begin{pmatrix} 1 & \\ & Q_0 \end{pmatrix}$ 即为所求。

21、由于上 Hessenberg 矩阵不可约，可从上往下通过 $n-1$ 个 Givens 方阵实现 QR 分解。

奇异矩阵的 QR 分解 R 必有对角元非零，若 Givens 变换使得 $R_{kk}, k \neq n$ 变为 0，计算可知 $A_{k+1,k} = 0$ 与不可约矛盾，故 $R_{nn} = 0, A_1 = RQ = (\widetilde{A_1}, 0)^T$

22、归纳，$k = 0, U_0 R_0 = H_0 - \mu_0 I$

当小于等于 $j-1$ 均成立时，考虑 j。

左边 $= U_0 \ldots U_{j-1}(H_j - \mu_j I) R_{j-1} \ldots R_0 = U_0 \ldots U_{j-1} H_j R_{j-1} \ldots R_0 - \prod_{i=0}^{j-1} (H - \mu_i I) \mu_j I$，于是由归纳假设只需要证明 $U_0 \ldots U_{j-1} H_j R_{j-1} \ldots R_0 = U_0 \ldots U_{j-1} R_{j-1} \ldots R_0 H$。直接计算发现 $H^{t+1} R_t = R_t U_t R_t + \mu_j R_t = R_t H_t$，反复利用可知结论成立。

23、对 $A - \lambda_i I$ 应用反幂法即可。

24、和 QR 分解算法结构相似，证明也可类似进行。

25、可知 $P^T L = (L_{n-1} P_{n-1} \ldots L_1 P_1)^{-1}$。由于上 Hessenberg 阵的形式，每一步的 L_i 除对角线上的 1 外至多有一个元素 $l_{i+1,i}$ 非 0，而 P_i 则或为单位阵或为交换 $i, i+1$ 两行的矩阵 (右乘时变为列变换)。利用 P_i, L_i 逆的形式知其逆依然有此性质，因此按照 1 到 $n-1$ 的顺序右乘上三角阵 U

后，L^T 作用完后下三角部分至多 $u_{21}, u_{32}, \ldots, u_{t+1,t}$ 非零，最后仍为上 Hessenberg 阵。

由 $\tilde{H} = (P^T L)^{-1} H P^T L$ 可知相似。

$H = P^T LU$，H 上 Hessenberg，故 $P^T L$ 上 Hessenberg，$(P^T L)^{-1}$ 上 Hessenberg，$\tilde{H}$ 也是上 Hessenberg 的。

26、设 x 是 A 对 α_{11} 的单位左特征向量,存在 $Q = (U, x)$ 是正交方阵,则 $Q^T AQ = \begin{pmatrix} U^T AU & * \\ & a_{11} \end{pmatrix}$。

27、对于实特征值可直接利用反幂法。

对复特征值和复特征向量，代入反幂法计算过程后分布计算实部和虚部即可。

28、幂法中每步 $y_k = A^T A u_{k-1}$ 即可。最后得到的特征值开根号得到最大奇异值。

29、左奇异向量即为 $A^T A$ 的特征向量，而右奇异向量为 AA^T 的特征向量，从而可得到奇异值后利用反幂法计算。