数值代数实验报告

PB21010483 郭忠炜

2023 年 10 月 26 日

一、问题描述

Exercise1.1

编写计算矩阵一范数的程序，估计 5 到 20 阶 Hilbert 矩阵的 ∞ 范数条件数。

Exercise1.2

生成 5 到 30 阶的矩阵 A，随机生成 x，计算 b=Ax，然后利用列主元高斯消去法解决 Ax=b 的线性方程组，最后估计解的精度并计算真实相对误差。

二、程序介绍

Exercise1.1

生成符号向量 (Sign Vector Generation):

- **函数描述:** `sign` 函数用于生成输入向量 w 的符号向量，即返回一个与 w 同样大小的向量，其中元素为 w 中对应元素的符号。
- **使用方式:** 调用 `sign(w)` 函数，传入向量 w，函数返回符号向量。

计算向量内积 (Vector Inner Product):

- **函数描述:** `InnerProduct` 函数用于计算两个输入向量 a 和 b 的内积。
- **使用方式:** 调用 `InnerProduct(a, b)` 函数，传入两个向量 a 和 b，函数返回它们的内积。

计算向量无穷范数 (Vector Infinity Norm):

- **函数描述:** `VectorInfinityNorm` 函数用于计算输入向量 vec 的无穷范数，即返回 vec 中绝对值最大的元素。
- **使用方式:** 调用 `VectorInfinityNorm(vec)` 函数，传入向量 vec，函数返回无穷范数。

计算向量一范数 (Vector One Norm):

- **函数描述:** `VectorOneNorm` 函数用于计算输入向量 vec 的一范数，即返回 vec 中所有元素的绝对值之和。
- **使用方式:** 调用 `VectorOneNorm(vec)` 函数，传入向量 vec，函数返回一范数。

生成对应下标为 1 单位向量 (Unit Vector Generation):

- **函数描述:** `UnitVectorGenerating` 函数用于生成一个与输入向量 vec 同样大小的单位向量，其中单位向量的值对应于 vec 的无穷范数下标。
- **使用方式:** 调用 `UnitVectorGenerating(vec, n)` 函数，传入向量 vec 和整数 n，函数返回单位向量。

计算矩阵一范数 (Matrix One Norm):

- **函数描述:** `MatrixOneNorm` 函数用于计算输入矩阵 A 的一范数，即返回 A 中每列元素的绝对值之和的最大值。
- **使用方式:** 调用 `MatrixOneNorm(n, A)` 函数，传入整数 n 和矩阵 A，函数返回一范数。

计算矩阵无穷范数 (Matrix Infinity Norm):

- **函数描述:** `MatrixInfinityNorm` 函数用于计算输入矩阵 $matrix$ 的无穷范数，即返回 $matrix$ 中每行元素的绝对值之和的最大值。
- **使用方式:** 调用 `MatrixInfinityNorm(matrix)` 函数，传入矩阵 $matrix$，函数返回无穷范数。

Exercise1.2

矩阵向量乘法 (Matrix-Vector Multiplication):

- **函数描述:** `MatrixVectorMultiply` 函数用于计算矩阵 A 和向量 b 的乘积，返回一个向量。
- **使用方式:** 调用 `MatrixVectorMultiply(A, b)` 函数，传入矩阵 A 和向量 b，函数返回乘积向量。

向量减法 (Vector Subtraction):

- **函数描述:** `VectorSubtraction` 函数用于计算两个输入向量 x 和 y 的差，返回一个向量。
- **使用方式:** 调用 `VectorSubtraction(x, y)` 函数，传入两个向量 x 和 y，函数返回它们的差向量。

除了上面列举的函数之外，我还调用了第一章作业中定义的函数，比如生成 Hilbert 矩阵、矩阵转置和方程求解有关的程序。

三、实验结果

Exercise1.1

矩阵规模	∞ 范数条件数
5	943656
6	2.90703e+07
7	9.85195e+08
8	3.38728e+10
9	1.09965e+12
10	3.53525e+13
11	1.22961e+15
12	3.82265e+16
13	5.50049e+17
14	3.19705e+18
15	1.02714e+18
16	6.27368e+18
17	3.80892e+18
18	4.3539e+18
19	4.43764e+18
20	4.45685e+18

表 1: 5 到 20 阶 Hilbert 矩阵的 ∞ 范数条件数

Exercise1.2

矩阵规模	估计精度	真实精度
5	1.39355e-15	5.37651e-16
6	3.99934e-16	2.03221e-16
7	4.44164e-16	2.05858e-16
8	3.4203e-15	1.41432e-15
9	3.35443e-16	2.25212e-16
10	1.14152e-14	4.78374e-15
11	1.39223e-14	5.84474e-15
12	1.3475e-13	6.0411e-14
13	7.64566e-14	3.19566e-14
14	7.04473e-14	3.33849e-14
15	1.34147e-12	6.02681e-13

16	8.65455e-14	3.94364e-14
17	7.7722e-12	2.86122e-12
18	1.837e-12	9.30363e-13
19	1.2035e-13	7.6454e-14
20	1.2426e-11	6.55229e-12
21	3.1232e-11	1.52572e-11
22	6.02992e-11	2.64836e-11
23	6.42282e-11	3.59628e-11
24	4.12898e-10	2.23124e-10
25	1.04553e-09	4.87306e-10
26	2.61624e-10	1.03894e-10
27	1.2612e-10	6.56837e-11
28	3.04428e-10	1.72571e-10
29	3.63452e-09	1.52792e-09
30	6.48284e-09	3.33615e-09

表 2: 矩阵规模为 5∼30 时的估算精度与真实精度

四、结果分析

Exercise1.1

从运算结果来看，Hilbert∞ 范数条件数随着矩阵规模增大到 14，其数量级迅速增大到 1e+18，之后稳定在改数量级，这可能是由于 Hilbert 矩阵本身的性质。

Exercise1.2

随着矩阵规模的增大，可以观察到估算精度和真实精度表现出了同步的增大，数量级上从 $n = 5$ 时的 $1e - 15$ 上涨到了 $n = 30$ 时 $1e - 9$, 但是估算精度与真实精度之间的比例几乎保持不变。