数值代数习题课讲义 7

游瀚哲

2023 年 12 月 14 日

一、书面作业讲解

1、设其对应的单位特征向量为 α, 有 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha^T A = \lambda\alpha^T$ 从而其亦为左特征向量，且 $\alpha^T\alpha = 1$，由条件数定义知为 1。

2、$A = A^T \Rightarrow \exists orthogonal P, A = Pdiag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$

若 $\exists i, \lambda_i = a_{kk}$, 则已证毕。

否则 $(A - a_{kk}I) = P(J - a_{kk}I)P^T$ 非奇异，$\forall v, \beta = (A - a_{kk}I)v, v = (A - a_{kk}I)^{-1}\beta$

$1 = ||v||_2 = ||(A - a_{kk}I)^{-1}\beta||_2 \leq ||(J - a_{kk}I)^{-1}||_2||\beta||_2$

$v = e_k, \beta = (A - a_{kk}I)v = (a_{k1}, \cdots, 0\cdots, a_{kk})^T$

$\Rightarrow (\sum_{j=1,j\neq k}^{n} |a_{jk}|^2)^{1/2} \geq \frac{1}{||(J-a_{kk}I)^{-1}||_2} = min_i|\lambda_i - a_{kk}|$

3、由于同时正交相似对角化不改变结果，可不妨设 A 为对角阵。记 $t^{-1} = \|A^{-1}\|_2$ 为最小对角元的倒数,$\|E\|_2 \leq t$。

而对非零的 x，由二范数定义 $x^T Ax + x^T Ex \geq tx^T x - \|x\|_2^2\|E\|_2 > tx^T x - (t_2\|x\|_2^2) = 0$。

4、由奇异值分解 $A = P\Sigma Q$ 可知 $A^T A = Q\Sigma^T\Sigma Q$，由相似不影响特征值与 Q 正交可知 $A^T A$ 的特征值即为 $\Sigma^T\Sigma$ 对角元，而由于 Σ 对角元非负，$\Sigma^T\Sigma$ 对角位置恰好为 Σ 对应对角元的平方，从而得证。$A^T A$ 同理。

5、由习题 4，利用对称阵条件有 $A^T A = A^2$，正交相似对角化可知 A^2 特征值为 A 对应特征值的平方，

从而奇异值平方与对应特征值平方相同，又由奇异值非负可知结论。

6、设奇异值分解 $A = P\Sigma Q, \|A\|_2 = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|_2 = \max_{y=Q^T x} \|\mathbf{P}\Sigma\mathbf{y}\|_2/\|Q^T y\|_2 = \max_y \|\Sigma y\|_2/\|y\|_2$。

Σ 为对角阵可直接算出 $\|A\|_2 = \sigma_1$，同理可算出 $\|\mathbf{A^{-1}}\|_2 = 1/\sigma_n$，因此得证。

7、引理：对于任何 n 的 $k-1$ 元子集 I，任何 $U \in g_k^n$ 中存在向量 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 使得 $x_i = 0, i \in I$。

证明：不妨设 I 为前 $k-1$ 个分量，其余同理。考虑 U 的一组基 $\{\mathbf{x_i}\}$ 排成 $n \times k$ 矩阵，对其上面的 $k-1 \times k$ 矩阵可右乘列变换阵 P 成为上三角阵（多出的一列全为 0），而由基线性无关，P 可逆，右乘 P 后仍然满秩，因此前 $k-1$ 个分量全为 0 的列其余分量不全为 0，从而得证。

类似习题 6 可知不妨设 A 已经是 Σ 形式，非负对角元从大到小排列的对角阵。由引理可知 g_k^n 定存在非零向量使得前 $i-1$ 个分量全为 0，此时 $\|\Sigma u\|_2 \leq \sigma_i$，因此对所有子空间取最大值不超过 σ_i，

对右侧,g_{n-i+1}^n 中一定存在非零向量使得后 $n-i$ 个分量为 0，此时 $\|\Sigma u\|_2 \geq \sigma_i \|u\|_2$。

因此对所有子空间取最小值不低于 σ_i，而取后 $n-i+1$ 个单位向量生成的子空间可以取到 σ_i，从而第二个等号得证。

8、$\frac{(x+t)^T A(x+t)}{(x+t)^T(x+t)} = \frac{\lambda x^T x + 2\lambda x^T t + t^T At}{(x+t)^T(x+t)} = \lambda + \frac{-\lambda t^T t + t^T At}{(x+t)^T(x+t)} = \lambda + O(\epsilon^2)$

9、设 T 的对角元为 α_1 到 α_n，次对角元为 β_1 到 β_n, 可知 $Aq_i = \beta_{i-1}q_{i-1} + \alpha_i q_i + \beta_i q_{i+1}$，范围外的下标对应数均为 0。

q_1 选取为单位向量，类似 gram-schidt 正交化过程，逐步计算满足条件的向量并进行单位化。

10、在算法 7.6.1 的过程中，将每次循环中第一个 v 与 β 累计左乘到左侧的 U 上，第二个累计右乘到右侧的 V 上，即得到 $UAV = B$ 的形式，再分别取转置即可。

11、直接计算可知 α_2 为位移时结果为 $-\frac{\epsilon^3}{(\alpha_1-\alpha_2)^2+\epsilon^2} = O(\epsilon^3)$。

由 Wilkson 位移性质可知 $T-\mu I$ 不可逆，因此分解出的 QR 中 R 的第二行为 0，从而 RQ 的第二行为 0，可得 $\widetilde{T}_{(2,1)}$ 一定为 0。

12、由 7.3.4 可知 $\alpha_{qq}^{(k+1)} = \alpha_{qq}^{(k)} - \frac{1}{1+t^2}(-2t\alpha_{pq}^{(k)} + t(1-t^2)\alpha_{pq}^{(k)}) = \alpha_{qq}^{(k)} + t\alpha_{pq}^{(k)})$

13、记 $c\alpha_{12} + s\alpha_{22} = -s\alpha_{11}1 + c\alpha_{22}$，计算得到 cos，sin。则可以利用此算法将矩阵先化为对称形式，然后使用 Jacobi 方法对角化，对角元取模即为奇异值（可以通过调整符号得到对角元为 1 和-1 的对角阵）。

14、首先根据习题 13 得到 θ_0，然后根据书上对称阵算法得到 θ_2，使得 $J(p,q,-\theta_2)AJ(p,q,\theta_2)$ 为对角阵，取 $\theta_1 = \theta_0 - \theta_2$ 即可。

由正交阵性质 $\sum_{ij}\beta_{ij}^2 = \sum_{ij}\alpha_{ij}^2$，而 $\alpha_{pp}^2 + \alpha_{qq}^2 + 2\alpha_{pq}^2 = \beta_{pp}^2 + \beta_{qq}^2$，直接计算 E(B), E(A) 得

证。

15、首先使用 Householder 变换将矩阵变为 $min(m,n)$ 阶的方阵，然后使用习题 14 的操作进行旋转，极限为对角阵，再调整符号得到结果。

16、计算得到 $cs(x^Tx-y^Ty)+(c^2-s^2)x^Ty=0$，即 $(x^Tx-y^Ty)\sin(2\theta)+2x^Ty\cos(2\theta)=0$，令 $\varphi=2\theta$，则 $c=\cos(\varphi/2)$，$s=\sin(\varphi/2)$。

17、直接计算可发现如习题 16 操作 p, q 对其他列的影响在平方和中抵消，因此每次操作 p,q 使得和减小了 $(a_p^Ta_q)^2$，不断选取最大的 $(a_p^Ta_q)^2$，重复此操作可以最终收敛到相互正交。

18、根据条件可知需要 d_i 满足 $\frac{\gamma_i d_i}{d_{i+1}}=\frac{\beta_i d_{i+1}}{d_i}$，由于 $\gamma_i\beta_i>0$，可以取 $d_{i+1}=\sqrt{\frac{\gamma_i d_i^2}{\beta_i}}$，不妨设 $d_1=1$，即可递归构造出 d_i。

19、(1) 若 $\xi_1=0$，利用 $\alpha_1\xi_1+\beta_2\xi_2=\lambda\xi_1$，由于不可约性知道 $\beta_2\neq 0$，因此 $\xi_2=0$，不断代入方程可推出 $x=0$，与矛盾。若 $\xi_n=0$，同理得矛盾，因此得证。

(2) 设左侧为 t_i，在 $i=1$ 时记为 1，在 $i=2$ 时计算可知为 $\lambda-\alpha_1$，利用三对角阵的特征多项式的递推式进行归纳，结合 x 为特征向量即可证明。

20、利用定理 7.4.1，不可约对称三对角阵只有单特征值，因此产生 k 重特征值至少需要分为 k 块，即有 $k-1$ 个为零的次对角元。

21、(a) 根据推论 7.4.1，负定即首个顺序主子式为负且每个顺序主子式都变号，计算验证可得。或将对应的二次型配方可得。

(b) 二分法计算得 $s_4(-2)=2, s_4(0)=4$ 可知有两个特征值落在指定范围内。

22、每次计算 $(T-\tilde{\lambda}I)y_k=z_{k-1}$，然后令 z_k 为 y_k 模最大分量的归一化。

23、即用二分法求 B^TB 的特征值。

27、充分必要条件的证明：设 $C^*=C\Leftrightarrow A^T-iB^T=A+iB\Leftrightarrow M^T=M$，于是充要条件得证。

特征值和特征向量之间的关系：设 M 的特征值为 λ，对应的特征向量为 $\left(\alpha\ \beta\right)^T$。

$M\left(\alpha\ \beta\right)^T=\lambda\left(\alpha\ \beta\right)^T\Leftrightarrow C\left(\alpha+\beta i\right)=\lambda\left(\alpha+\beta i\right)$

由此可见，C 的特征值和特征向量与 M 的特征值和特征向量存在对应关系。特征向量 $\left(\alpha\ \beta\right)^T$ 对应着特征值 λ，而特征向量 $\left(\beta\ \ -\alpha\right)^T$ 也对应着相同的特征值 λ