数值代数习题课讲义 3

游瀚哲

2023 年 11 月 30 日

一、书面作业讲解

1、$A^TA = \begin{pmatrix} 35 & 44 \\ 44 & 56 \end{pmatrix}, A^Tb = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2、$A^TA = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A^Tb = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，可知其解为 $(3/5, 2/15, 0, 0)^T + u(0, 1, -3, 0)^T + v(0, 0, 1, -1)^T$

3、变换前后二范数不变，从而 $\alpha = 5$。可知 $v = x - Hx = (0, -5, 0, 0, 3, 4)^T$，$w = \frac{v}{||v||} = \frac{\sqrt{2}}{10}(0, -5, 0, 0, 3, 4)^T$，则 $H = I - 2ww^T$ 为所求的变换。

4、即 5c + 12s = −5s + 12c，有 17s = 7c，解得 $s = \pm\frac{7\sqrt{2}}{26}, c = \pm\frac{17\sqrt{2}}{26}, \alpha = \pm\frac{13\sqrt{2}}{2}$

5、-sx1 + cx2 = 0，设 $s = a + bi, x_i = a_i + b_ii$ 可知

$$\begin{cases} -a_1a + b_1b + b_2c = 0 \\ -b_1a - a_1b + a_2c = 0 \end{cases}$$

若 |x1| = 0，取 s = 1, c = 0 即可，否则方程组中 a, b 线性无关，可令 c = 1 得到此方程的特解，再对模长进行归一化即可。

6、当 x 的第二个分量非零，类似可构造二阶 Givens 方阵 Q 使得 Qx 的第二个分量为 0，计算可发现 Givens 变换只影响两行。

于是得到算法：对 x 除第一行外的每一行，若为 0 则跳过，否则找到对应将其置为 0 的 Givens 变换 Pi。同理，对 y 除第一行外的每一行找到将其置为 0 的 Givens 变换 Qi。则 $K = \prod_{i=2}^{n} Q_i^T \prod_{i=n}^{2} p_i$

即为所求。

7、类似习题 3，先计算 $v = x - Hx$,$w = \frac{v}{||v||}$，则 $H = I - 2ww^T$ 为所求的变换。

8、思路事实上与定理 3.3.1 完全一致，只是改变操作顺序与边的序号。归纳构造：

假设后 k-1 列已符合要求，而 Hk 将倒数第 k 列 $(a_1, \cdots, a_{n-k}, a_{n-k+1}, \cdots, a_n, a_{n+1}, \cdots, a_m)^T$ 变为 $(0, \cdots, 0, \alpha, a_{n-k+2}, \cdots, a_n, 0, \cdots, 0)^T$。这样得到的 w 只有第 n - k + 2 到第 n 个分量非零。

可知 $H = I - 2ww^T$ 不会破坏已符合要求的部分，从而成立。

9、由第 8 题知存在正交 Q, s.t.$QL = \begin{pmatrix} L_1 \\ O \end{pmatrix}$,

设 $QPb = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$,$||Lz - Pb||_2^2 = ||QLz - QPb||_2^2 = ||L_1 z_1 - c_1||_2^2 + ||c_2||_2^2$ 由于 L 为单位下三角，其列满秩，于是 L_1 非奇异。只需求解 $L_1 z_1 = c_1$ 即可。

当 Ux = z 时，由于排列方阵 P 为正交方阵，$||Ax - b||_2 = ||PAx - Pb||_2 = ||LUx - Pb||_2 = ||Lz - Pb||_2$ 即证

10. 由定理 3.1.4 可知 $A^T AXb = A^T b$ 对任何 b 成立，取 b 为 e_i 并拼接可知 $A^T AXI = A^T I = A^T$，同取转置有 $X^T A^T A = A$。

在 $A^T AXI = A^T$ 两边同时左乘 X^T 可知 $AX = X^T A^T AX = X^T A^T = (AX)^T$，, $A = X^T A^T A = (AX)^T A = AXA$。

11、类似第 6 题，选取 Givens 变换 Pi 使得 $A_{n,1}$ 变为 0，注意，这使得 $A_{n,n-1}, A_{n-1,n}$ 变为非 0 项，由下到上逐渐消去第一列，最终使得 A 变为上 Hessenberg 阵。

从上到下再选取 Givens 变换 Qi 使得 $A_{i+1,i}$ 变为 0。则变化后得到的 R,$Q = \prod_{i=1}^{n-1} Q_i \prod_{i=1}^{n-2} p_i$ 即为所求。

12、利用 $||x||_2^2 = x^T x$ 展开即证等式。

当 $||Ax - b||_2$ 最小时，$2\alpha w^T A^T (Ax - b) + \alpha^2 ||Aw||_2^2 \geq 0$, 若 $A^T(Ax - b) \neq 0$，可取合适的 $w \in \pm e_i$，使得 $2w^T A^T (Ax - b) < 0$，再令 $\alpha \to 0^+$ 即有矛盾。于是，必须 $A^T(Ax - b) = 0$。

二、程序作业讲解

本次作业中，QR 分解计算时间复杂度较高，且在计算 1.1 时可能出现 nan。