数值代数 2022 秋期末试题

2022 年 12 月 9 日

一.(10 分) 已知

$$A \in C^{n\times n}, ||A||_* < 1, ||I||_* = 1$$

证明

1. 对所有的范数，都有

$$\rho(A) \le ||A||$$

2.

$$||(I-A)^{-1} - \sum_{k=0}^{m} A^k||_* \le \frac{||A||_*^{m+1}}{1-||A||_*}$$

注记：都是书上的简单定理 (定义课本上证明长度不超过半页纸的定理是简单定理).

二.(10 分)

$$A \in R^{n\times n}, A = 4I + 2J_n(0) - J_n(0)^T$$

证明：在 $w \in (0,1)$ 的时候 SOR 迭代法是收敛的。

注记：本质是证明对角严格占优阵的 SOR 收敛定理，属于书上简单定理的证明.

三.(20 分)

$$A = \begin{pmatrix} \frac{11}{5} & \frac{-4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{8}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \\ -2 & 2 & 1 & -4 \\ \frac{-18}{5} & \frac{12}{5} & \frac{-6}{5} & \frac{-9}{5} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

证明：

1. $X^{-1}AX$ 是对角阵

2. 写出 A 用幂法作用在初始向量后得到的向量序列，并且证明 $X^{-1}A$ 没有 0 分量的时候，序列存在两个收敛子列

3. 说出上述收敛子列极限和 A 的特征向量的关系

注记：如果熟悉幂法的话，自然不难知道迭代向量列长什么样。（事实上，课本证明幂法收敛定理的时候就做了和这题类似的操作)

四.(15 分)

A 是 r 个 $Household$ 变换的乘积，证明有分解式 $A = I - WV^T$ 其中 W, V 都是 $n\times r$ 的矩阵

注记：一道比较考验线性代数功夫的题目，需要一定的手法。

五. (10 分)

H 是不可约的上 $Hesse$ 阵，证明存在对角阵把他相似到下次对角元都是 1 的上 $Hesse$ 阵

注记：一道有手就行的题目。

六. (20 分)

课本第一章 16 题

注记：不算特别困难的作业题，至少不是解题中特别多不平凡步骤的作业题。

七.(15 分)

A 有 k 个互异的特征值，是 n 阶方阵，r 是 n 阶向量，证明

$$dim(span(r, Ar, \cdots, A^{n-1}r)) \leq k$$

注记：不算特别困难的作业题，有线代功夫就可以做。