test

游瀚哲

2023 年 9 月 28 日

题目

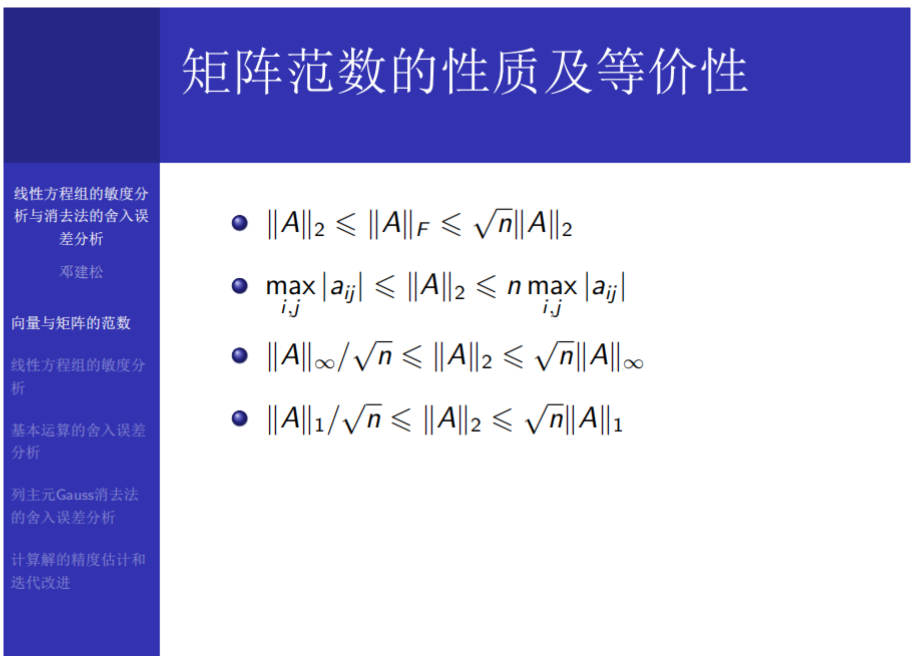

图 1: test

1.$||A||_F = tr(A^TA)^{1/2} = (\sum_{i=1}^m \sigma_i^2)^{1/2}, ||A||_2 = max_i\sigma_i$
$\Rightarrow ||A||_2^2 = max_i\sigma_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 = ||A||_F^2$
$\Rightarrow ||A||_F^2 = \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 \leqslant n\ max_i\sigma_i^2 = n||A||_2^2$

2.$||A||_2 \leqslant ||A||_F = (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2)^{1/2} \leqslant n\ max_{ij}|a_{ij}|$
$||A||_2 = max_{||x||_2=1}||Ax||_2$
设 a_{mn} 取到 $|a_{ij}|$ 的最大值
$\Rightarrow ||A||_2 \geqslant ||Ae_n||_2 = (\sum_{i=1}^n a_{in}^2)^{1/2} \geqslant |a_{mn}|$

3.$||x||_\infty \leqslant ||x||_2 \leqslant \sqrt{n}||x||_\infty$

$||Ax||_\infty \leqslant ||Ax||_2 \leqslant ||A||_2||x||_2 \leqslant \sqrt{n}||A||_2||x||_\infty, \forall x$
$\exists ||x||_\infty = 1, s.t. ||A||_\infty = ||Ax||_\infty \leqslant \sqrt{n}||A||_2$
$||Ax||_2 \leqslant \sqrt{n}||Ax||_\infty \leqslant \sqrt{n}||A||_\infty||x||_\infty \leqslant \sqrt{n}||A||_\infty||x||_2, \forall x$
$\exists ||x||_2 = 1, s.t. ||A||_2 = ||Ax||_2 \leqslant \sqrt{n}||A||_\infty$

4.$||x||_2 \leqslant ||x||_1 \leqslant \sqrt{n}||x||_2$,(cauchy 不等式)
$||Ax||_1 \leqslant \sqrt{n}||Ax||_2 \leqslant \sqrt{n}||A||_2||x||_2 \leqslant \sqrt{n}||A||_2||x||_1, \forall x$
$\exists ||x||_1 = 1, s.t. ||A||_1 = ||Ax||_1 \leqslant \sqrt{n}||A||_2$
$||Ax||_2 \leqslant ||Ax||_1 \leqslant ||A||_1||x||_1 \leqslant \sqrt{n}||A||_1||x||_2, \forall x$
$\exists ||x||_2 = 1, s.t. ||A||_2 = ||Ax||_2 \leqslant \sqrt{n}||A||_1$
或在题 3 中取 $A = A^T$, 由于转置不改变 2 范数, 得证。