数值代数习题课讲义 1

游瀚哲

2023 年 11 月 2 日

一、书面作业讲解

书面作业评分标准：书面作业一题一分，最后总分取归一化处理
做错的问题根据完成度酌情给分，**口胡的部分一律不得分**。

1、使用前代法求解 $Ly_i = e_i, Y = [y_1, \cdots, y_n]$ 即为所求。

matlab 代码：

```
Y=eye(n)
for i = 1:n
    for j = 1:n-1
        Y(j,i) = Y(j,i)/L(i,i)
        for k = j+1:n
            Y(k,i) = Y(k,i)-Y(j,i)*L(k,j)
        end
    end
    Y(n,i) = Y(n,i)/L(n,n)
end
```

伪代码：

$Y = I_n$ //可使用中文进行说明
for i = 1 to n
    for j = 1 to n-1
        Y(j,i) ← Y(j,i)/L(i,i)
        for k = j+1 to n
            Y(k,i) ← Y(k,i)-Y(j,i)*L(k,j)
    Y(n,i) ← Y(n,i)/L(n,n)

2、**S、T 不一定可逆，且求逆和乘法均为三次方量级。**

记 $S = (s_{ij})_{n*n}, T = (t_{ij})_{n*n}, b = (b_i)_{n*1}, x = (x_i)_{n*1}$

考虑到 ST 为上三角阵，有 $(ST)_{ij} = \sum_{k=i}^{j} s_{ik}t_{kj}$

方程化为 $\sum_{j=i}^{n} \sum_{k=i}^{j} s_{ik}t_{kj}x_j = \lambda x_i + b_i$

$\Rightarrow \sum_{k=i}^{n}\sum_{j=k}^{n} s_{ik}(t_{kj}x_j) = \lambda x_i + b_i$

$\Rightarrow s_{ii}t_{ii}x_i + \sum_{k=i+1}^{n}\sum_{j=k}^{n} s_{ik}(t_{kj}x_j) + s_{ii}\sum_{j=i+1}^{n} t_{ij}x_j = \lambda x_i + b_i$

记 $U_k = \sum_{j=k}^{n} t_{kj}x_j, x_i = \frac{\sum_{k=i+1}^{n} s_{ik}U_k + s_{ii}\sum_{j=i+1}^{n} t_{ij}x_j - b_i}{\lambda - s_{ii}t_{ii}}$

从 n 到 1 交替计算 U_k, x_i, 每次耗时 O(n), 共耗时 $O(n^2)$

3、由 $e_k^T l_k = 0$ 可知 $(I + l_k e_k^T)(I - l_k e_k^T) = I$

4、$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5、设 $A = L_1U_1 = L_2U_2$

则 $L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$ 是单位下三角阵，又是上三角阵，故为单位阵。

$\Rightarrow L_1 = L_2, U_1 = U_2$ 分解唯一。

6、$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 4 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2^{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{bmatrix}, A = LU$

7、由 A 对称, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_1^T \\ a_1 & A_1 \end{bmatrix}, A_1$ 对称，故由 guass 消去法的过程 $A_2 = A_1 - \frac{1}{a_{11}}a_1a_1^T$ 对称

8、$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_1^T \\ a_1 & A_1 \end{bmatrix}$, 要证 $A_2 = A_1 - \frac{1}{a_{11}}a_1a_1^T$ 严格对角优

即证 $|a_{i+1,i+1} - \frac{1}{a_{11}}a_{1,i+1}a_{i+1,1}| > \sum_{j=1,j\neq i}^{n-1} |a_{i+1,j+1} - \frac{1}{a_{11}}a_{1,j+1}a_{i+1,1}|$

而 $RHS \le \sum_{j=1,j\neq i}^{n-1}(|a_{i+1,j+1}| - |\frac{1}{a_{11}}a_{1,j+1}a_{i+1,1}|)$

$< |a_{i+1,i+1}| - |a_{i+1,1}| + |\frac{a_{i+1,1}}{a_{11}}|(|a_{11}| - |a_{1,i+1}|)$

$= |a_{i+1,i+1}| - |\frac{a_{i+1,1}}{a_{11}}||a_{1,i+1}| \le LHS$

9、直接对增广矩阵 [A,b] 做行变换

```
for i = 1 to n-1
    for j = i+1 to n
        A(j,i) ← A(j,i)/A(i,i)
        for k = i+1 to n
```

A(j,K) $\leftarrow$ A(j,k)-A(j,i)A(i,k)

b(j) $\leftarrow$ b(j,i)-A(j,i)b(i)

for i = n downto 2

b(i) $\leftarrow$ b(i)/A(i,i)

for j = 1 to i-1

b(j) $\leftarrow$ b(j)-A(j,i)b(i)

乘法次数 $\sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) + \sum_{k=2}^{n-1}(k-1) = \frac{2n^3+3n^2-5n}{6}$

10、由 A 对称, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_1^T \\ a_1 & A_1 \end{bmatrix}$

$L_1 = I - \frac{1}{a_{11}} a_1 e_1^T$

而 A 正定 $\rightarrow L_1 A L_1^T = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ 正定

$\Rightarrow A_2 = A_1 - \frac{1}{a_{11}} a_1 a_1^T$ 对称，正定

11、$A_{11} = LU, A_{11}^{-1} = U^{-1}L^{-1}$

由 LU 分解唯一性，直接分块计算 $A = \begin{bmatrix} L & 0 \\ A_{21}U^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & L^{-1}A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}$

12、注意到第 k 次 guass 消去法不会改变前 k 行

第 i 次 guass 消去法保证 $|u_{ii}| = max_{m\geq i, n\geq i}|a_{mn}^{k-1}| \geq |a_{in}^{k-1}| = |u_{in}|$

13、$PA = LU \rightarrow A^{-1} = U^{-1}L, -1P$

前代法求解 $Lz_i = Pe_i, i = 1\cdots, n$

回代法求解 $Uz_i = y_i, i = 1\cdots, n$

则 $Z = [z_1, \cdots, z_n]$ 为所求的逆矩阵

14、求解 $LUx_j = e_j$, 则 x_j 的 i 分量即为所求。

15、类似第八题，可知 A 在一次高斯消去后仍然严格对角优

进而在每次全主元高斯消去法中均不发生行列交换

且每次高斯消去中都有 $||l_k||_1 < 1$

故三角分解 A=LU 满足 $L = I - \sum_{k=1}^{n-1} l_k e_L^T$,L 的下三角元素模小于 1

16、（1）非奇异 $\Leftrightarrow y_k \neq 1$

做初等列变换可得 $N(y,k)^{-1} = I - \frac{y}{1-y_k} e_k^T$

（2）$(I - ye_k^T)x = e_k \Rightarrow x - yx_k = e_k \Rightarrow y = \frac{x-e_k}{x_k}$

故只需 $x_k \neq 0$ 则存在 y 满足条件。

（3）当 $A_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ 时，求逆可以进行下去

下证 $A_{kk}^{(k-1)} \neq 0 \Leftrightarrow$A 的 1 到 k 阶顺序主子式非零，进而算法进行到底的条件为 A 的顺序主子式均非零

“$\Rightarrow$” 此时所有 Guass-Jordan 变换均为可逆变换，不改变对应顺序主子阵的奇异性

由变化后顺序主子式的非奇异性可推知变化前顺序主子式的非奇异性

“$\Leftarrow$” 归纳假设 n=1 时 $A_1^{(0)} \neq 0$

A 的 1 到 k-1 阶顺序主子式非零 $\Rightarrow$ 前 k-1 次 Guass-Jordan 变换可进行

$A^{(k-1)} = \begin{bmatrix} I_{k-1} & * \\ O & A_{22} \end{bmatrix}$

A 的 k 阶顺序主子式非零 $\Rightarrow A^{(k-1)}$的 k 阶顺序主子式非零 $\Rightarrow A_{kk}^{(k-1)} \neq 0$

17、设 $A = L_1 L_1^T = L_2 L_2^T$

$\Rightarrow L_2^{-1} L_1 = L_2^T L_1^{-T} = (L_2^{-1} L_1)^{-T}$

$\Rightarrow L_2^{-1} L_1$ 是正交阵，还是对角阵，对角元均正，故为单位阵

18、归纳证明 $\forall i > n+k, l_{ik} = 0$

$l_{ik} = (a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} l_{kj}) / l_{kk}$

依题意得 $\forall i > n+k, a_{ik} = 0$

k=1 时，$\forall i > n+k, l_{ik} = a_{ik}/l_{kk} = 0$

若对 $p \leq k-1, i > n+k$ 均成立 $l_{ip} = 0$, 则由 $l_{ik} = (a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} l_{kj}) / l_{kk} \Rightarrow l_{ik} = 0$

19、设 $L = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ L_2 & L_3 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2^T & A_3 \end{bmatrix}$

$LL^T = A \Rightarrow L_1 L_1^T = A_1$

20、存在性：前 n-1 个顺序主子式非零 $\Rightarrow$ guass 消去可进行到底

由对称性可知 $L_{n-1} \cdots L_1 A L_1^T \cdots L_{n-1}^T = D$，存在性得证。

唯一性：设 $A = LDL^T = \widetilde{L}\widetilde{D}\widetilde{L}^T$

$\Rightarrow \widetilde{L}^{-1} L D = \widetilde{D} \widetilde{L}^T L^{-T}$ 为对角阵

$\Rightarrow \widetilde{L}^{-1} L$ 为对角阵，对角元均为 1，故为单位阵 $\Rightarrow \widetilde{L} = L \Rightarrow \widetilde{D} = D$

21、设 $A = LL^T, L = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, x = (1,1,1,1)^T$

22、虚假的按行计算

for k=1 to n

```
    A(k,k) ← √A(k,k)
    for i=k+1 to n
        A(k,i)←A(k,i)/A(k,k)
    for i=k+1 to n
        for j=i to n
            A(i,j)←A(i,j)-A(k,j)A(k,i)
```

题目希望的按行计算

```
for k=1 to n
    for i=1 to k-1
        for j=1 to i-1
            A(k,i)←A(k,i)-A(k,j)A(i,j)
        A(k,i)←A(k,i)/A(k,k)
    for j=1 to k-1
        A(i,i)←A(i,i)-A(i,j)A(i,j)
    A(k,k) ← √A(k,k)
```

23、求解 $A=LDL^T$

前代法求解 $LDz_i=e_i, i=1\cdots,n$

回代法求解 $L^Tz_i=y_i, i=1\cdots,n$

则 $Z=[z_1,\cdots,z_n]$ 为所求的逆矩阵

24、$(1)(A+iB)^H=A^T-iB^T=A+iB$

$\Rightarrow A=A^T, B=-B^T, C$ 对称

$\forall x,y\in\mathbf{R}^n$，x，y 不同时为零向量。

$(x^T-iy^T)(A+iB)(x+iy)>0$

$\Leftrightarrow x^TAx+y^TAy-2x^TBy>0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^T & y^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}>0\Rightarrow C$ 正定

$(2)(A+iB)(x+iy)=(b+ic)$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$

类似 1.23 求解即可

二、程序作业讲解

程序作业评分标准：程序作业每次总分 5 分，**没有报告的程序作业不予批改，程序不能运行的作业-2 分；**每个要求实现的函数占 0.5-1 分不等，实验结果不对的程序根据错误情况酌情扣分。(跑出 e10 以上的误差真的不会心慌吗)

IDE 尽量使用 vs studio，如果不是使用 vs studio 的同学，请在报告里写出详细的使用方式（甚至可以多写几个备用），或者放个 readme。用了 cmake 或者 xcode 引用 eigen 跑不出来的也可

以课后找我跑 ()。

数据类型建议使用 double，能避免很多奇奇怪怪的错误。

本次作业中，guass 消元对于 84 阶方程组误差已经很大，但列主元和全主元 guass 消去法可以较好的解决问题。Hilbert 矩阵极其病态, 平方根法在 N=14 时就已经不能正常求解了, 而其余方法虽然可以计算, 但随着阶数增大误差也在快速增大。

主要问题；

c++ 数组从 0 开始，matlab 数组从 1 开始，在代码翻译时会导致一些下标错误。

选主元 guass 消去法选取模最大的元素并进行行列变换。

此外，计算误差时不建议计算 Ax-b 的误差，受到舍入误差的影响不能很好的展现误差。