

homework5

游瀚哲

2023 年 11 月 14 日

一、作业要求

1. 考虑 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(x, y), (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ u|_{\Gamma} = \varphi \end{cases}$$

其中 Γ 为正方形区域的边界。类似于模型问题，我们得到差分方程

$$\begin{cases} (1 + \frac{h^2}{4})u_{i,j} - \frac{1}{4}(u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1}) = \frac{h^2}{4}f_{i,j}, i, j = 1, \dots, n-1 \\ u_{i,0} = \phi_{i,0}, u_{i,n} = \phi_{i,n}, i = 0, 1, \dots, n \\ u_{0,j} = \phi_{0,j}, u_{n,j} = \phi_{n,j}, j = 0, 1, \dots, n \end{cases}$$

按照自然顺序排列得到系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} S' & B & & & \\ B & S' & B & & \\ & B & S' & B & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & B & S' & B \\ & & & & B & S' \end{bmatrix}$$

其中 $B = -I/4$, I 为 $n-1$ 阶单位矩阵, S' 是对角元均为 $1 + h^2/4$, 次对角元均为 $-1/4$ 的 $n-1$ 阶对称三对角阵。对 $f(x, y) = \sin(xy), \varphi(x, y) = x^2 + y^2, n = 20$ 。

用共轭梯度法求解差分方程, 要求输出迭代次数、求解所用时间和解向量, 迭代终止条件为 $\|x_{k+1} - x_k\|_{\infty} < 10^{-7}$ 。注意边界条件与线性方程组的关系!!

2. 用 Hilbert 矩阵测试你所编写的共轭梯度法程序:

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, b_i = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^n a_{ij}, 0 \leq i, j \leq n-1$$

对 $n = 20, 40, 60, 80$ 分别求解, 观察解是否准确, 迭代停止条件自定, 输出迭代次数、求解所用时间和解向量。

3. 分别用 Jacobi 迭代法, G-S 迭代法和共轭梯度法求解下述方程, 输出迭代次数、求解所用时间和解向量, 并对结果给出解释。

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & 3 & 12 & -1 \\ 4 & -3 & -5 & -1 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -27 \\ 14 \\ -17 \\ 12 \end{pmatrix}$$

二、作业涉及的算法

必须实现的算法有:p150 算法 5.3.1 实用共轭梯度法。

三、附加说明

1. 尽量使用 c++ 和 visual studio。
2. 本次作业最迟 ddl 为 **2023.11.30(周四)23:59** , 请大家尽早提交。超时作业没有特殊情况者拒收。若有特殊情况请提前私聊助教沟通。迟交的作业会视情况酌情扣分。
3. 请确保你的程序能顺利跑出正确的结果再上交! 可以用 Mathematica/Matlab 等工具来验证你的解是否正确。
4. 没有报告的程序作业不予批改, 报告一定要交 pdf 版本。