

# 数值代数实验报告

PB21010483 郭忠炜

2023 年 11 月 10 日

## 一. 问题描述

### Exercise1

对于给定的二阶微分方程边值问题，将问题离散化为线性方程组后，使用 Jacobi 迭代法、Gauss-Seidel 迭代法和 SOR 迭代法求解该方程组。比较这些迭代方法在不同参数 ( $\epsilon$ ) 设置下的性能，并分析数值解与精确解之间的误差。

### Exercise2

对于二维偏微分方程，通过在  $[0, 1] \times [0, 1]$  区域上进行均匀剖分，将方程离散化为一个代数方程组，采用中心差分方法得到差分方程。对于给定的函数  $g(x, y) = \exp(xy)$  和  $f(x, y) = x + y$ ，使用 Jacobi 迭代法、Gauss-Seidel 迭代法和 SOR 迭代法求解这个代数方程组。具体来说，我需要考虑不同的网格尺寸  $N = 20, 40, 60$ ，并比较不同网格尺寸下求解过程中所需的迭代次数和相应的 CPU 时间。

根据讲义给出的推导思路，可以得到 Jacobi 迭代法、Gauss-Seidel 迭代法和 SOR 迭代法的迭代格式如下。

Jacobi 迭代格式：

$$Dx^{(k+1)} = (L + U)x^{(k)} + b$$
$$(4 + h^2 g(ih, jh))u_{i,j}^{(k+1)} = u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)} + u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)} + h^2 f(ih, jh)$$

G-S 迭代格式：

$$Dx^{(k+1)} = Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} + b$$
$$(4 + h^2 g(ih, jh))u_{i,j}^{(k+1)} = u_{i-1,j}^{(k+1)} + u_{i,j-1}^{(k+1)} + u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)} + h^2 f(ih, jh)$$

SOR 迭代格式：

$$Dx^{(k+1)} = \omega Lx^{(k+1)} + ((1 - \omega)D + \omega U)x^{(k)} + \omega b$$
$$(4 + h^2 g(ih, jh))u_{i,j}^{(k+1)} = \omega u_{i-1,j}^{(k+1)} + \omega u_{i,j-1}^{(k+1)} + (1 - \omega)(4 + h^2 g(ih, jh))u_{i,j}^{(k)} + \omega(u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)}) + \omega h^2 f(ih, jh)$$

## 二. 程序介绍

### Jacobi 迭代法:

- **函数描述:** `Jacobi_Iteration` 函数用于通过 Jacobi 迭代法求解线性方程组。
- **使用方式:** 调用 `Jacobi_Iteration(A, b)` 函数, 传入系数矩阵  $A$  和右侧向量  $b$ , 函数会进行 Jacobi 迭代, 返回线性方程组的解。

### Gauss-Seidel 迭代法:

- **函数描述:** `GS_Iteration` 函数用于通过 Gauss-Seidel 迭代法求解线性方程组。
- **使用方式:** 调用 `GS_Iteration(A, b)` 函数, 传入系数矩阵  $A$  和右侧向量  $b$ , 函数会进行 Gauss-Seidel 迭代, 返回线性方程组的解。

### SOR 迭代法:

- **函数描述:** `SOR_Iteration` 函数用于通过 SOR 迭代法求解线性方程组。
- **使用方式:** 调用 `SOR_Iteration(A, b, omega)` 函数, 传入系数矩阵  $A$ 、右侧向量  $b$  和松弛因子  $\omega$ , 函数会进行 SOR 迭代, 返回线性方程组的解。

### SOR 迭代法性能评估:

- **函数描述:** `SOR_Performance` 函数用于评估 SOR 迭代法在给定参数下的性能。
- **使用方式:** 调用 `SOR_Performance(A, b, omega)` 函数, 传入系数矩阵  $A$ 、右侧向量  $b$  和松弛因子  $\omega$ , 函数会返回 SOR 迭代的收敛迭代次数。

### 松弛因子搜索:

- **函数描述:** `BisearchOmega` 函数用于通过二分法搜索最佳松弛因子。
- **使用方式:** 调用 `BisearchOmega(A, b)` 函数, 传入系数矩阵  $A$  和右侧向量  $b$ , 函数会通过二分法搜索最佳松弛因子并返回结果。

### 迭代过程展示:

- **函数描述:** `Iterations` 函数用于执行差分方程的迭代求解过程。
- **使用方式:** 调用 `Iterations(epsilon)` 函数, 传入参数  $\epsilon$ , 函数会执行 Jacobi、Gauss-Seidel 和 SOR 迭代法, 并展示每种方法的解以及运行时间。

### Jacobi 迭代法 (二维):

- **函数描述:** Jacobi\_Iteration2 函数用于通过 Jacobi 迭代法求解二维偏微分方程。
- **使用方式:** 调用 Jacobi\_Iteration2(u) 函数, 传入初始解矩阵  $u$ , 函数会执行 Jacobi 迭代, 求解二维偏微分方程。

### Gauss-Seidel 迭代法 (二维):

- **函数描述:** GS\_Iteration2 函数用于通过 Gauss-Seidel 迭代法求解二维偏微分方程。
- **使用方式:** 调用 GS\_Iteration2(u) 函数, 传入初始解矩阵  $u$ , 函数会执行 Gauss-Seidel 迭代, 求解二维偏微分方程。

### SOR 迭代法 (二维):

- **函数描述:** SOR\_Iteration2 函数用于通过 SOR 迭代法求解二维偏微分方程。
- **使用方式:** 调用 SOR\_Iteration2(u, omega) 函数, 传入初始解矩阵  $u$  和松弛因子  $\omega$ , 函数会执行 SOR 迭代, 求解二维偏微分方程。

### SOR 迭代法性能评估 (二维):

- **函数描述:** SOR\_Performance2 函数用于评估 SOR 迭代法在给定参数下的性能。
- **使用方式:** 调用 SOR\_Performance2(u, omega) 函数, 传入初始解矩阵  $u$  和松弛因子  $\omega$ , 函数会返回 SOR 迭代的收敛迭代次数。

### 松弛因子搜索 (二维):

- **函数描述:** BisearchOmega2 函数用于通过二分法搜索最佳松弛因子。
- **使用方式:** 调用 BisearchOmega2(u) 函数, 传入初始解矩阵  $u$ , 函数会通过二分法搜索最佳松弛因子并返回结果。

### 迭代过程展示 (二维):

- **函数描述:** Iterations2 函数用于执行二维偏微分方程的迭代求解过程。
- **使用方式:** 调用 Iterations2(n) 函数, 传入参数  $n$ , 函数会执行 Jacobi、Gauss-Seidel 和 SOR 迭代法, 并展示每种方法的解以及运行时间。

## 三. 实验结果

### Exercise1

表格中展示了在不同的  $\epsilon$  时的精确解和三种迭代方法 (Jacobi 迭代法、Gauss-Seidel 迭代法和 SOR 迭代法) 的计算结果、迭代次数和运行时间。

| $\epsilon = 1.0$ 时的精确解 |        |        |             |        |        |        |                |        |        |        |
|------------------------|--------|--------|-------------|--------|--------|--------|----------------|--------|--------|--------|
| 0.0129                 | 0.0257 | 0.0384 | 0.0510      | 0.0636 | 0.0761 | 0.0885 | 0.1008         | 0.1131 | 0.1253 | 0.1374 |
| 0.1494                 | 0.1614 | 0.1733 | 0.1852      | 0.1970 | 0.2087 | 0.2203 | 0.2319         | 0.2434 | 0.2548 | 0.2662 |
| 0.2775                 | 0.2888 | 0.3000 | 0.3111      | 0.3222 | 0.3332 | 0.3441 | 0.3550         | 0.3658 | 0.3766 | 0.3873 |
| 0.3980                 | 0.4086 | 0.4191 | 0.4296      | 0.4401 | 0.4504 | 0.4608 | 0.4710         | 0.4813 | 0.4914 | 0.5016 |
| 0.5116                 | 0.5217 | 0.5316 | 0.5415      | 0.5514 | 0.5612 | 0.5710 | 0.5807         | 0.5904 | 0.6000 | 0.6096 |
| 0.6192                 | 0.6287 | 0.6381 | 0.6475      | 0.6569 | 0.6662 | 0.6755 | 0.6847         | 0.6939 | 0.7031 | 0.7122 |
| 0.7212                 | 0.7303 | 0.7392 | 0.7482      | 0.7571 | 0.7660 | 0.7748 | 0.7836         | 0.7924 | 0.8011 | 0.8098 |
| 0.8184                 | 0.8270 | 0.8356 | 0.8441      | 0.8526 | 0.8611 | 0.8695 | 0.8779         | 0.8863 | 0.8946 | 0.9029 |
| 0.9112                 | 0.9194 | 0.9276 | 0.9358      | 0.9439 | 0.9520 | 0.9601 | 0.9681         | 0.9761 | 0.9841 | 0.9921 |
| <b>Jacobi 迭代法</b>      |        |        | 迭代次数: 13172 |        |        |        | 运行时间: 11.4540s |        |        |        |
| 0.0128                 | 0.0256 | 0.0382 | 0.0508      | 0.0633 | 0.0758 | 0.0881 | 0.1004         | 0.1126 | 0.1248 | 0.1369 |
| 0.1489                 | 0.1608 | 0.1727 | 0.1845      | 0.1962 | 0.2079 | 0.2195 | 0.2310         | 0.2425 | 0.2539 | 0.2653 |
| 0.2766                 | 0.2878 | 0.2990 | 0.3101      | 0.3211 | 0.3321 | 0.3430 | 0.3539         | 0.3647 | 0.3755 | 0.3862 |
| 0.3968                 | 0.4074 | 0.4179 | 0.4284      | 0.4388 | 0.4492 | 0.4595 | 0.4698         | 0.4800 | 0.4902 | 0.5003 |
| 0.5104                 | 0.5204 | 0.5304 | 0.5403      | 0.5502 | 0.5600 | 0.5698 | 0.5795         | 0.5892 | 0.5988 | 0.6084 |
| 0.6180                 | 0.6275 | 0.6370 | 0.6464      | 0.6558 | 0.6651 | 0.6744 | 0.6837         | 0.6929 | 0.7020 | 0.7112 |
| 0.7203                 | 0.7293 | 0.7383 | 0.7473      | 0.7562 | 0.7651 | 0.7740 | 0.7828         | 0.7916 | 0.8003 | 0.8090 |
| 0.8177                 | 0.8263 | 0.8349 | 0.8435      | 0.8520 | 0.8605 | 0.8690 | 0.8774         | 0.8858 | 0.8942 | 0.9025 |
| 0.9108                 | 0.9191 | 0.9273 | 0.9355      | 0.9437 | 0.9518 | 0.9599 | 0.9680         | 0.9760 | 0.9841 | 0.9920 |
| <b>G-S 迭代法</b>         |        |        | 迭代次数: 6574  |        |        |        | 运行时间: 3.9850s  |        |        |        |
| 0.0128                 | 0.0256 | 0.0382 | 0.0508      | 0.0633 | 0.0757 | 0.0881 | 0.1004         | 0.1126 | 0.1248 | 0.1368 |
| 0.1488                 | 0.1608 | 0.1727 | 0.1845      | 0.1962 | 0.2079 | 0.2195 | 0.2310         | 0.2425 | 0.2539 | 0.2652 |
| 0.2765                 | 0.2878 | 0.2989 | 0.3100      | 0.3211 | 0.3321 | 0.3430 | 0.3539         | 0.3647 | 0.3754 | 0.3861 |
| 0.3968                 | 0.4074 | 0.4179 | 0.4284      | 0.4388 | 0.4492 | 0.4595 | 0.4698         | 0.4800 | 0.4902 | 0.5003 |
| 0.5103                 | 0.5204 | 0.5303 | 0.5403      | 0.5501 | 0.5600 | 0.5697 | 0.5795         | 0.5892 | 0.5988 | 0.6084 |
| 0.6180                 | 0.6275 | 0.6369 | 0.6464      | 0.6557 | 0.6651 | 0.6744 | 0.6836         | 0.6928 | 0.7020 | 0.7111 |
| 0.7202                 | 0.7293 | 0.7383 | 0.7473      | 0.7562 | 0.7651 | 0.7740 | 0.7828         | 0.7916 | 0.8003 | 0.8090 |
| 0.8177                 | 0.8263 | 0.8349 | 0.8435      | 0.8520 | 0.8605 | 0.8690 | 0.8774         | 0.8858 | 0.8942 | 0.9025 |
| 0.9108                 | 0.9191 | 0.9273 | 0.9355      | 0.9437 | 0.9518 | 0.9599 | 0.9680         | 0.9760 | 0.9841 | 0.9920 |
| <b>SOR 迭代法</b>         |        |        | 迭代次数: 261   |        |        |        | 运行时间: 0.1650s  |        |        |        |
| 0.0129                 | 0.0256 | 0.0383 | 0.0509      | 0.0635 | 0.0760 | 0.0884 | 0.1007         | 0.1129 | 0.1251 | 0.1372 |
| 0.1493                 | 0.1612 | 0.1731 | 0.1850      | 0.1967 | 0.2084 | 0.2201 | 0.2316         | 0.2431 | 0.2546 | 0.2660 |
| 0.2773                 | 0.2885 | 0.2997 | 0.3108      | 0.3219 | 0.3329 | 0.3438 | 0.3547         | 0.3655 | 0.3763 | 0.3870 |
| 0.3977                 | 0.4083 | 0.4188 | 0.4293      | 0.4398 | 0.4501 | 0.4605 | 0.4707         | 0.4810 | 0.4911 | 0.5013 |
| 0.5113                 | 0.5213 | 0.5313 | 0.5412      | 0.5511 | 0.5609 | 0.5707 | 0.5804         | 0.5901 | 0.5998 | 0.6093 |
| 0.6189                 | 0.6284 | 0.6378 | 0.6472      | 0.6566 | 0.6659 | 0.6752 | 0.6845         | 0.6937 | 0.7028 | 0.7119 |
| 0.7210                 | 0.7300 | 0.7390 | 0.7480      | 0.7569 | 0.7658 | 0.7746 | 0.7834         | 0.7922 | 0.8009 | 0.8096 |
| 0.8182                 | 0.8268 | 0.8354 | 0.8440      | 0.8525 | 0.8609 | 0.8694 | 0.8778         | 0.8862 | 0.8945 | 0.9028 |
| 0.9111                 | 0.9193 | 0.9275 | 0.9357      | 0.9438 | 0.9520 | 0.9600 | 0.9681         | 0.9761 | 0.9841 | 0.9921 |

| $\epsilon = 0.1$ 时的精确解 |        |        |            |        |        |        |               |        |        |        |
|------------------------|--------|--------|------------|--------|--------|--------|---------------|--------|--------|--------|
| 0.0526                 | 0.1006 | 0.1446 | 0.1848     | 0.2217 | 0.2556 | 0.2867 | 0.3153        | 0.3417 | 0.3661 | 0.3886 |
| 0.4094                 | 0.4288 | 0.4467 | 0.4635     | 0.4791 | 0.4937 | 0.5074 | 0.5202        | 0.5324 | 0.5438 | 0.5546 |
| 0.5649                 | 0.5747 | 0.5840 | 0.5929     | 0.6014 | 0.6096 | 0.6175 | 0.6251        | 0.6325 | 0.6396 | 0.6466 |
| 0.6533                 | 0.6599 | 0.6664 | 0.6727     | 0.6788 | 0.6849 | 0.6909 | 0.6967        | 0.7025 | 0.7082 | 0.7139 |
| 0.7195                 | 0.7250 | 0.7305 | 0.7359     | 0.7413 | 0.7467 | 0.7520 | 0.7573        | 0.7625 | 0.7678 | 0.7730 |
| 0.7782                 | 0.7833 | 0.7885 | 0.7937     | 0.7988 | 0.8039 | 0.8090 | 0.8141        | 0.8192 | 0.8243 | 0.8293 |
| 0.8344                 | 0.8395 | 0.8445 | 0.8496     | 0.8546 | 0.8596 | 0.8647 | 0.8697        | 0.8747 | 0.8798 | 0.8848 |
| 0.8898                 | 0.8948 | 0.8999 | 0.9049     | 0.9099 | 0.9149 | 0.9199 | 0.9249        | 0.9299 | 0.9349 | 0.9399 |
| 0.9450                 | 0.9500 | 0.9550 | 0.9600     | 0.9650 | 0.9700 | 0.9750 | 0.9800        | 0.9850 | 0.9900 | 0.9950 |
| <b>Jacobi 迭代法</b>      |        |        | 迭代次数: 5926 |        |        |        | 运行时间: 3.4670s |        |        |        |
| 0.0504                 | 0.0967 | 0.1393 | 0.1784     | 0.2144 | 0.2476 | 0.2782 | 0.3066        | 0.3327 | 0.3570 | 0.3795 |
| 0.4005                 | 0.4199 | 0.4381 | 0.4551     | 0.4709 | 0.4858 | 0.4998 | 0.5130        | 0.5254 | 0.5372 | 0.5483 |
| 0.5589                 | 0.5690 | 0.5786 | 0.5878     | 0.5966 | 0.6051 | 0.6133 | 0.6211        | 0.6288 | 0.6361 | 0.6433 |
| 0.6502                 | 0.6570 | 0.6637 | 0.6701     | 0.6765 | 0.6827 | 0.6888 | 0.6948        | 0.7007 | 0.7066 | 0.7123 |
| 0.7180                 | 0.7237 | 0.7292 | 0.7348     | 0.7402 | 0.7457 | 0.7511 | 0.7564        | 0.7617 | 0.7670 | 0.7723 |
| 0.7775                 | 0.7828 | 0.7880 | 0.7932     | 0.7983 | 0.8035 | 0.8086 | 0.8137        | 0.8189 | 0.8240 | 0.8291 |
| 0.8341                 | 0.8392 | 0.8443 | 0.8494     | 0.8544 | 0.8595 | 0.8645 | 0.8696        | 0.8746 | 0.8797 | 0.8847 |
| 0.8897                 | 0.8948 | 0.8998 | 0.9048     | 0.9098 | 0.9148 | 0.9199 | 0.9249        | 0.9299 | 0.9349 | 0.9399 |
| 0.9449                 | 0.9499 | 0.9549 | 0.9600     | 0.9650 | 0.9700 | 0.9750 | 0.9800        | 0.9850 | 0.9900 | 0.9950 |
| <b>G-S 迭代法</b>         |        |        | 迭代次数: 2981 |        |        |        | 运行时间: 1.6220s |        |        |        |
| 0.0504                 | 0.0967 | 0.1392 | 0.1784     | 0.2144 | 0.2476 | 0.2782 | 0.3065        | 0.3327 | 0.3570 | 0.3795 |
| 0.4004                 | 0.4199 | 0.4381 | 0.4550     | 0.4709 | 0.4858 | 0.4998 | 0.5130        | 0.5254 | 0.5372 | 0.5483 |
| 0.5589                 | 0.5690 | 0.5786 | 0.5878     | 0.5966 | 0.6051 | 0.6133 | 0.6211        | 0.6287 | 0.6361 | 0.6433 |
| 0.6502                 | 0.6570 | 0.6636 | 0.6701     | 0.6765 | 0.6827 | 0.6888 | 0.6948        | 0.7007 | 0.7066 | 0.7123 |
| 0.7180                 | 0.7237 | 0.7292 | 0.7348     | 0.7402 | 0.7457 | 0.7511 | 0.7564        | 0.7617 | 0.7670 | 0.7723 |
| 0.7775                 | 0.7828 | 0.7880 | 0.7932     | 0.7983 | 0.8035 | 0.8086 | 0.8137        | 0.8189 | 0.8240 | 0.8291 |
| 0.8341                 | 0.8392 | 0.8443 | 0.8494     | 0.8544 | 0.8595 | 0.8645 | 0.8696        | 0.8746 | 0.8797 | 0.8847 |
| 0.8897                 | 0.8948 | 0.8998 | 0.9048     | 0.9098 | 0.9148 | 0.9199 | 0.9249        | 0.9299 | 0.9349 | 0.9399 |
| 0.9449                 | 0.9499 | 0.9549 | 0.9600     | 0.9650 | 0.9700 | 0.9750 | 0.9800        | 0.9850 | 0.9900 | 0.9950 |
| <b>SOR 迭代法</b>         |        |        | 迭代次数: 201  |        |        |        | 运行时间: 0.1480s |        |        |        |
| 0.0505                 | 0.0968 | 0.1394 | 0.1785     | 0.2146 | 0.2478 | 0.2784 | 0.3068        | 0.3330 | 0.3573 | 0.3798 |
| 0.4007                 | 0.4202 | 0.4384 | 0.4553     | 0.4712 | 0.4861 | 0.5001 | 0.5133        | 0.5257 | 0.5375 | 0.5486 |
| 0.5592                 | 0.5693 | 0.5789 | 0.5881     | 0.5969 | 0.6054 | 0.6135 | 0.6214        | 0.6290 | 0.6364 | 0.6435 |
| 0.6505                 | 0.6572 | 0.6639 | 0.6703     | 0.6767 | 0.6829 | 0.6890 | 0.6950        | 0.7009 | 0.7067 | 0.7125 |
| 0.7182                 | 0.7238 | 0.7294 | 0.7349     | 0.7404 | 0.7458 | 0.7512 | 0.7565        | 0.7618 | 0.7671 | 0.7724 |
| 0.7776                 | 0.7829 | 0.7880 | 0.7932     | 0.7984 | 0.8035 | 0.8087 | 0.8138        | 0.8189 | 0.8240 | 0.8291 |
| 0.8342                 | 0.8393 | 0.8443 | 0.8494     | 0.8545 | 0.8595 | 0.8646 | 0.8696        | 0.8746 | 0.8797 | 0.8847 |
| 0.8897                 | 0.8948 | 0.8998 | 0.9048     | 0.9098 | 0.9148 | 0.9199 | 0.9249        | 0.9299 | 0.9349 | 0.9399 |
| 0.9449                 | 0.9499 | 0.9550 | 0.9600     | 0.9650 | 0.9700 | 0.9750 | 0.9800        | 0.9850 | 0.9900 | 0.9950 |

| $\epsilon = 0.01$ 时的精确解 |        |        |           |        |        |        |               |        |        |        |
|-------------------------|--------|--------|-----------|--------|--------|--------|---------------|--------|--------|--------|
| 0.3211                  | 0.4423 | 0.4901 | 0.5108    | 0.5216 | 0.5288 | 0.5345 | 0.5398        | 0.5449 | 0.5500 | 0.5550 |
| 0.5600                  | 0.5650 | 0.5700 | 0.5750    | 0.5800 | 0.5850 | 0.5900 | 0.5950        | 0.6000 | 0.6050 | 0.6100 |
| 0.6150                  | 0.6200 | 0.6250 | 0.6300    | 0.6350 | 0.6400 | 0.6450 | 0.6500        | 0.6550 | 0.6600 | 0.6650 |
| 0.6700                  | 0.6750 | 0.6800 | 0.6850    | 0.6900 | 0.6950 | 0.7000 | 0.7050        | 0.7100 | 0.7150 | 0.7200 |
| 0.7250                  | 0.7300 | 0.7350 | 0.7400    | 0.7450 | 0.7500 | 0.7550 | 0.7600        | 0.7650 | 0.7700 | 0.7750 |
| 0.7800                  | 0.7850 | 0.7900 | 0.7950    | 0.8000 | 0.8050 | 0.8100 | 0.8150        | 0.8200 | 0.8250 | 0.8300 |
| 0.8350                  | 0.8400 | 0.8450 | 0.8500    | 0.8550 | 0.8600 | 0.8650 | 0.8700        | 0.8750 | 0.8800 | 0.8850 |
| 0.8900                  | 0.8950 | 0.9000 | 0.9050    | 0.9100 | 0.9150 | 0.9200 | 0.9250        | 0.9300 | 0.9350 | 0.9400 |
| 0.9450                  | 0.9500 | 0.9550 | 0.9600    | 0.9650 | 0.9700 | 0.9750 | 0.9800        | 0.9850 | 0.9900 | 0.9950 |
| Jacobi 迭代法              |        |        | 迭代次数: 569 |        |        |        | 运行时间: 0.3370s |        |        |        |
| 0.2550                  | 0.3850 | 0.4525 | 0.4887    | 0.5094 | 0.5222 | 0.5311 | 0.5380        | 0.5440 | 0.5495 | 0.5548 |
| 0.5599                  | 0.5649 | 0.5700 | 0.5750    | 0.5800 | 0.5850 | 0.5900 | 0.5950        | 0.6000 | 0.6050 | 0.6100 |
| 0.6150                  | 0.6200 | 0.6250 | 0.6300    | 0.6350 | 0.6400 | 0.6450 | 0.6500        | 0.6550 | 0.6600 | 0.6650 |
| 0.6700                  | 0.6750 | 0.6800 | 0.6850    | 0.6900 | 0.6950 | 0.7000 | 0.7050        | 0.7100 | 0.7150 | 0.7200 |
| 0.7250                  | 0.7300 | 0.7350 | 0.7400    | 0.7450 | 0.7500 | 0.7550 | 0.7600        | 0.7650 | 0.7700 | 0.7750 |
| 0.7800                  | 0.7850 | 0.7900 | 0.7950    | 0.8000 | 0.8050 | 0.8100 | 0.8150        | 0.8200 | 0.8250 | 0.8300 |
| 0.8350                  | 0.8400 | 0.8450 | 0.8500    | 0.8550 | 0.8600 | 0.8650 | 0.8700        | 0.8750 | 0.8800 | 0.8850 |
| 0.8900                  | 0.8950 | 0.9000 | 0.9050    | 0.9100 | 0.9150 | 0.9200 | 0.9250        | 0.9300 | 0.9350 | 0.9400 |
| 0.9450                  | 0.9500 | 0.9550 | 0.9600    | 0.9650 | 0.9700 | 0.9750 | 0.9800        | 0.9850 | 0.9900 | 0.9950 |
| G-S 迭代法                 |        |        | 迭代次数: 333 |        |        |        | 运行时间: 0.2010s |        |        |        |
| 0.2550                  | 0.3850 | 0.4525 | 0.4887    | 0.5094 | 0.5222 | 0.5311 | 0.5380        | 0.5440 | 0.5495 | 0.5548 |
| 0.5599                  | 0.5649 | 0.5700 | 0.5750    | 0.5800 | 0.5850 | 0.5900 | 0.5950        | 0.6000 | 0.6050 | 0.6100 |
| 0.6150                  | 0.6200 | 0.6250 | 0.6300    | 0.6350 | 0.6400 | 0.6450 | 0.6500        | 0.6550 | 0.6600 | 0.6650 |
| 0.6700                  | 0.6750 | 0.6800 | 0.6850    | 0.6900 | 0.6950 | 0.7000 | 0.7050        | 0.7100 | 0.7150 | 0.7200 |
| 0.7250                  | 0.7300 | 0.7350 | 0.7400    | 0.7450 | 0.7500 | 0.7550 | 0.7600        | 0.7650 | 0.7700 | 0.7750 |
| 0.7800                  | 0.7850 | 0.7900 | 0.7950    | 0.8000 | 0.8050 | 0.8100 | 0.8150        | 0.8200 | 0.8250 | 0.8300 |
| 0.8350                  | 0.8400 | 0.8450 | 0.8500    | 0.8550 | 0.8600 | 0.8650 | 0.8700        | 0.8750 | 0.8800 | 0.8850 |
| 0.8900                  | 0.8950 | 0.9000 | 0.9050    | 0.9100 | 0.9150 | 0.9200 | 0.9250        | 0.9300 | 0.9350 | 0.9400 |
| 0.9450                  | 0.9500 | 0.9550 | 0.9600    | 0.9650 | 0.9700 | 0.9750 | 0.9800        | 0.9850 | 0.9900 | 0.9950 |
| SOR 迭代法                 |        |        | 迭代次数: 101 |        |        |        | 运行时间: 0.0820s |        |        |        |
| 0.2550                  | 0.3850 | 0.4525 | 0.4888    | 0.5094 | 0.5222 | 0.5311 | 0.5380        | 0.5440 | 0.5495 | 0.5548 |
| 0.5599                  | 0.5649 | 0.5700 | 0.5750    | 0.5800 | 0.5850 | 0.5900 | 0.5950        | 0.6000 | 0.6050 | 0.6100 |
| 0.6150                  | 0.6200 | 0.6250 | 0.6300    | 0.6350 | 0.6400 | 0.6450 | 0.6500        | 0.6550 | 0.6600 | 0.6650 |
| 0.6700                  | 0.6750 | 0.6800 | 0.6850    | 0.6900 | 0.6950 | 0.7000 | 0.7050        | 0.7100 | 0.7150 | 0.7200 |
| 0.7250                  | 0.7300 | 0.7350 | 0.7400    | 0.7450 | 0.7500 | 0.7550 | 0.7600        | 0.7650 | 0.7700 | 0.7750 |
| 0.7800                  | 0.7850 | 0.7900 | 0.7950    | 0.8000 | 0.8050 | 0.8100 | 0.8150        | 0.8200 | 0.8250 | 0.8300 |
| 0.8350                  | 0.8400 | 0.8450 | 0.8500    | 0.8550 | 0.8600 | 0.8650 | 0.8700        | 0.8750 | 0.8800 | 0.8850 |
| 0.8900                  | 0.8950 | 0.9000 | 0.9050    | 0.9100 | 0.9150 | 0.9200 | 0.9250        | 0.9300 | 0.9350 | 0.9400 |
| 0.9450                  | 0.9500 | 0.9550 | 0.9600    | 0.9650 | 0.9700 | 0.9750 | 0.9800        | 0.9850 | 0.9900 | 0.9950 |

| $\epsilon = 0.0001$ 时的精确解 |        |        |           |        |        |        |               |        |        |        |
|---------------------------|--------|--------|-----------|--------|--------|--------|---------------|--------|--------|--------|
| 0.5050                    | 0.5100 | 0.5150 | 0.5200    | 0.5250 | 0.5300 | 0.5350 | 0.5400        | 0.5450 | 0.5500 | 0.5550 |
| 0.5600                    | 0.5650 | 0.5700 | 0.5750    | 0.5800 | 0.5850 | 0.5900 | 0.5950        | 0.6000 | 0.6050 | 0.6100 |
| 0.6150                    | 0.6200 | 0.6250 | 0.6300    | 0.6350 | 0.6400 | 0.6450 | 0.6500        | 0.6550 | 0.6600 | 0.6650 |
| 0.6700                    | 0.6750 | 0.6800 | 0.6850    | 0.6900 | 0.6950 | 0.7000 | 0.7050        | 0.7100 | 0.7150 | 0.7200 |
| 0.7250                    | 0.7300 | 0.7350 | 0.7400    | 0.7450 | 0.7500 | 0.7550 | 0.7600        | 0.7650 | 0.7700 | 0.7750 |
| 0.7800                    | 0.7850 | 0.7900 | 0.7950    | 0.8000 | 0.8050 | 0.8100 | 0.8150        | 0.8200 | 0.8250 | 0.8300 |
| 0.8350                    | 0.8400 | 0.8450 | 0.8500    | 0.8550 | 0.8600 | 0.8650 | 0.8700        | 0.8750 | 0.8800 | 0.8850 |
| 0.8900                    | 0.8950 | 0.9000 | 0.9050    | 0.9100 | 0.9150 | 0.9200 | 0.9250        | 0.9300 | 0.9350 | 0.9400 |
| 0.9450                    | 0.9500 | 0.9550 | 0.9600    | 0.9650 | 0.9700 | 0.9750 | 0.9800        | 0.9850 | 0.9900 | 0.9950 |
| <b>Jacobi 迭代法</b>         |        |        | 迭代次数: 118 |        |        |        | 运行时间: 0.0840s |        |        |        |
| 0.5000                    | 0.5100 | 0.5150 | 0.5200    | 0.5250 | 0.5300 | 0.5350 | 0.5400        | 0.5450 | 0.5500 | 0.5550 |
| 0.5600                    | 0.5650 | 0.5700 | 0.5750    | 0.5800 | 0.5850 | 0.5900 | 0.5950        | 0.6000 | 0.6050 | 0.6100 |
| 0.6150                    | 0.6200 | 0.6250 | 0.6300    | 0.6350 | 0.6400 | 0.6450 | 0.6500        | 0.6550 | 0.6600 | 0.6650 |
| 0.6700                    | 0.6750 | 0.6800 | 0.6850    | 0.6900 | 0.6950 | 0.7000 | 0.7050        | 0.7100 | 0.7150 | 0.7200 |
| 0.7250                    | 0.7300 | 0.7350 | 0.7400    | 0.7450 | 0.7500 | 0.7550 | 0.7600        | 0.7650 | 0.7700 | 0.7750 |
| 0.7800                    | 0.7850 | 0.7900 | 0.7950    | 0.8000 | 0.8050 | 0.8100 | 0.8150        | 0.8200 | 0.8250 | 0.8300 |
| 0.8350                    | 0.8400 | 0.8450 | 0.8500    | 0.8550 | 0.8600 | 0.8650 | 0.8700        | 0.8750 | 0.8800 | 0.8850 |
| 0.8900                    | 0.8950 | 0.9000 | 0.9050    | 0.9100 | 0.9150 | 0.9200 | 0.9250        | 0.9300 | 0.9350 | 0.9400 |
| 0.9450                    | 0.9500 | 0.9550 | 0.9600    | 0.9650 | 0.9700 | 0.9750 | 0.9800        | 0.9850 | 0.9900 | 0.9950 |
| <b>G-S 迭代法</b>            |        |        | 迭代次数: 109 |        |        |        | 运行时间: 0.0820s |        |        |        |
| 0.5000                    | 0.5100 | 0.5150 | 0.5200    | 0.5250 | 0.5300 | 0.5350 | 0.5400        | 0.5450 | 0.5500 | 0.5550 |
| 0.5600                    | 0.5650 | 0.5700 | 0.5750    | 0.5800 | 0.5850 | 0.5900 | 0.5950        | 0.6000 | 0.6050 | 0.6100 |
| 0.6150                    | 0.6200 | 0.6250 | 0.6300    | 0.6350 | 0.6400 | 0.6450 | 0.6500        | 0.6550 | 0.6600 | 0.6650 |
| 0.6700                    | 0.6750 | 0.6800 | 0.6850    | 0.6900 | 0.6950 | 0.7000 | 0.7050        | 0.7100 | 0.7150 | 0.7200 |
| 0.7250                    | 0.7300 | 0.7350 | 0.7400    | 0.7450 | 0.7500 | 0.7550 | 0.7600        | 0.7650 | 0.7700 | 0.7750 |
| 0.7800                    | 0.7850 | 0.7900 | 0.7950    | 0.8000 | 0.8050 | 0.8100 | 0.8150        | 0.8200 | 0.8250 | 0.8300 |
| 0.8350                    | 0.8400 | 0.8450 | 0.8500    | 0.8550 | 0.8600 | 0.8650 | 0.8700        | 0.8750 | 0.8800 | 0.8850 |
| 0.8900                    | 0.8950 | 0.9000 | 0.9050    | 0.9100 | 0.9150 | 0.9200 | 0.9250        | 0.9300 | 0.9350 | 0.9400 |
| 0.9450                    | 0.9500 | 0.9550 | 0.9600    | 0.9650 | 0.9700 | 0.9750 | 0.9800        | 0.9850 | 0.9900 | 0.9950 |
| <b>SOR 迭代法</b>            |        |        | 迭代次数: 105 |        |        |        | 运行时间: 0.0860s |        |        |        |
| 0.5000                    | 0.5100 | 0.5150 | 0.5200    | 0.5250 | 0.5300 | 0.5350 | 0.5400        | 0.5450 | 0.5500 | 0.5550 |
| 0.5600                    | 0.5650 | 0.5700 | 0.5750    | 0.5800 | 0.5850 | 0.5900 | 0.5950        | 0.6000 | 0.6050 | 0.6100 |
| 0.6150                    | 0.6200 | 0.6250 | 0.6300    | 0.6350 | 0.6400 | 0.6450 | 0.6500        | 0.6550 | 0.6600 | 0.6650 |
| 0.6700                    | 0.6750 | 0.6800 | 0.6850    | 0.6900 | 0.6950 | 0.7000 | 0.7050        | 0.7100 | 0.7150 | 0.7200 |
| 0.7250                    | 0.7300 | 0.7350 | 0.7400    | 0.7450 | 0.7500 | 0.7550 | 0.7600        | 0.7650 | 0.7700 | 0.7750 |
| 0.7800                    | 0.7850 | 0.7900 | 0.7950    | 0.8000 | 0.8050 | 0.8100 | 0.8150        | 0.8200 | 0.8250 | 0.8300 |
| 0.8350                    | 0.8400 | 0.8450 | 0.8500    | 0.8550 | 0.8600 | 0.8650 | 0.8700        | 0.8750 | 0.8800 | 0.8850 |
| 0.8900                    | 0.8950 | 0.9000 | 0.9050    | 0.9100 | 0.9150 | 0.9200 | 0.9250        | 0.9300 | 0.9350 | 0.9400 |
| 0.9450                    | 0.9500 | 0.9550 | 0.9600    | 0.9650 | 0.9700 | 0.9750 | 0.9800        | 0.9850 | 0.9900 | 0.9950 |

## Exercise2

| N  | 迭代方法                   | 最小分量   | 迭代次数 | 运行时间/s  |
|----|------------------------|--------|------|---------|
| 20 | Jacobi                 | 0.9187 | 1122 | 0.4540  |
|    | G-S                    |        | 589  | 0.2540  |
|    | SOR( $\omega=1.7266$ ) |        | 68   | 0.0360  |
| 40 | Jacobi                 |        | 4289 | 5.5790  |
|    | G-S                    |        | 2251 | 2.2560  |
|    | SOR( $\omega=1.8516$ ) |        | 134  | 1.550   |
| 60 | Jacobi                 |        | 9376 | 26.6210 |
|    | G-S                    |        | 4927 | 11.3620 |
|    | SOR( $\omega=1.8984$ ) |        | 200  | 0.4140  |

## 四. 结果分析

### Exercise1

对于固定的  $\epsilon = 1.0$ , Jacobi 迭代法、Gauss-Seidel 迭代法和 SOR 迭代法表现出了性能上的显著提升。在迭代结果相差不大的情况下, G-S 迭代法较于 Jacobi 迭代法实现了运行时间的减半, 而 SOR 迭代法的运行速度在经过选取最佳的参数  $\omega$  之后可以达到 G-S 迭代法的 10 倍有余。随着  $\epsilon$  不断减小, 迭代矩阵  $A$  的性质发生变化, 这体现在三大迭代法的迭代次数和运行时间渐渐趋近。

注: SOR 迭代法中选取参数  $\omega$  的方法是在  $[1, 2]$  区间内进行二分查找, 以迭代次数为评价指标, 在代码中对应的函数是 `SOR_Performance` 和 `SOR_Performance`。

### Exercise2

从计算结果上看, 对于固定的  $N = 20$ , Jacobi 迭代法、Gauss-Seidel 迭代法和 SOR 迭代法都完成了计算任务, 但从计算性能上三者表现和 Exercise1 类似, 并且随着划分细度从 20 增加到 60 后, SOR 迭代法的优势越发突出。