数值代数 2023 秋期末试题

2022 年 12 月 21 日

1.（10 分）

设 B 是 A 的任意子矩阵，且是方阵，证明 $\|B\|_p \leq \|A\|_p$.$\|\cdot\|_p$ 表示相应矩阵由对应尺寸向量的 p 范数诱导粗的矩阵算子范数，$1 \leq p \leq \infty$.

2.（15 分）

(1) 对于给定的单位向量 x, 构造两个不同的正交矩阵 Q_1, Q_2 使得 $Q_i e_1 = x, i = 1, 2$

(2) 设 $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$, 并假定 $\lambda \in \mathbf{C} u \in \mathbf{C}^n (u \neq 0)$, 且 不是 A 的特征值。

证明：可选择 $E \in \mathbf{C}^{n\times n}$ 满足 $||E||_F = \frac{||u||_2}{||v||_2}$ 使得向量 $v = (\lambda I - A)^{-1} u$ 是 A + E 的一个特征向量。

3.（20 分）

(1) 证明矩阵单特征值的左右特征向量不垂直.

(2) 证明对称矩阵不同特征值对应的特征向量互相垂直.

(3) 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

考察对 $u_0 = (1, 1, 1, 1)^T$ 应用幂法所得序列的特性，并给出得到精确到三位有效数字所需的迭代次数。

4.（15 分）

$$T_n = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_3 & \alpha_3 & \beta_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} & \beta_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$$

为实对称不可约三对角阵，设 $p_i(\lambda)$ 为 $T_n - \lambda I$ 的各阶顺序主子式，$i = 1, 2, \cdots, n$.

(a) 证明 $p_i(\lambda), p_{i+1}(\lambda)$ 没有公共根；

(b) 证明 $p_n(\lambda)$ 只有单根。

5.（25 分）

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_2 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \beta_3 & \alpha_3 & \beta_4 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} & \beta_n\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_n & \alpha_n\end{pmatrix}$$

为非奇异三对角阵，令 A=D+L+U,D 为 A 的对角部分，L 为 A 的下三角部分，U 为 A 的上三角部分。

(1)$B_J=I_n-D^{-1}A, B_{GS}=-(L+D)^{-1}U, p_{B_J}(\lambda), p_{B_{GS}}(\lambda)$ 分别为 $B_J, B_{GS}B_J, B_{GS}$ 的特征多项式证明

$$p_{B_J}(\lambda)=det(-D^{-1})det(L+\lambda D+U)$$

$$p_{B_{GS}}(\lambda)=det(-(L+D)^{-1})det(\lambda L+\lambda D+U)$$

(2) 证明

$$det(\lambda^2 L+\lambda^2 D+U)=\lambda^n det(L+\lambda D+U)$$

(3) 证明

$$\rho(B_{GS})=\rho(B_J)^2$$

其中 $\rho(B_{GS}),\rho(B_J)$ 分别为 B_{GS} 和 B_J 的谱半径。当两种算法均收敛时，Jacobi 迭代和 G-S 迭代哪种收敛速度更快。并解释原因。

6.（15 分）

给定对称正定矩阵 A, 如果 A 至多有 l 个互不相同的特征值，则共轭梯度法至多 l 步就可以得到方程组 $Ax=b$ 的精确解。