
Definitions

Examples

Extensions of the Markov Property

Recurrence and Transience

Stationary Measures

- stationary measure 가 (1) 존재하고 (2) 유일하다는 것이 조사되었다고 하자. 이제 다음 관심사는 아래식을 만족하는 stationary distribution π 이다.

$$\pi p = \pi$$

(정리 6.5.6.) p 가 irreducible 하다는 것과 아래는 동치이다.

(1) .

(2) stationary distribution이 존재한다.

(3) .

Asymptotic Behavior

(레마 6.6.3.) $d_x = 1$ 이라면 m_0 보다 큰 모든 m 에 대하여

$$p^m(x, x) > 0$$

를 만족시킬 수 있다.

(정리 6.6.4.) p 가 (1) irreducible 하고 (2) aperiodic 하며 (3) stationary distribution π 를 가진다고 하자. 그러면 아래가 성립한다.

$$p^n(x, y) \rightarrow \pi(y) \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

note: p 가 irreducible 인것만 보이면 stationary distribution π 를 가진다는 것은 정리 6.5.6에 의해서 성립한다. 따라서 (1)-(2)만 조건으로 사용해도 위의 정리는 성립한다.

note: p 가 에이피리오딕하다는 의미는 모든 state가 $d_x = 1$ 을 가진다는 것을 의미한다 .

(pf)

- $S^2 = S \times S$ 라고 하자.

- 전이확률 \bar{p} 를 $S \times S$ 에서 아래와 같이 정의하자.

$$\bar{p}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = p(x_1, x_2)p(y_1, y_2)$$

note: 이는 각각의 coordinate가 독립적으로 움직인다는 것을 의미한다.

(step 1)

- 먼저 \bar{p} 가 이리듀시블임을 보이자. (이는 너무 당연해서 바보같은 증명으로 보이지만 정리의 에이피리오딕조건을 사용하는 유일한 과정이다.) 우선 p 가 이리듀시블하다는 조건으로부터 아래를 만족하는 적당한 K, L 이 존재함을 알 수 있다.

$$p^K(x_1, x_2) > 0 \quad \text{and} \quad p^L(y_1, y_2) > 0.$$

그런데 레마 6.6.3에 의해서 M 을 적당히 크게 설정한다면 아래를 만족시킬 수 있음을 알 수 있다.

$$p^{L+M}(x_1, x_2) > 0 \quad \text{and} \quad p^{K+M}(y_1, y_2) > 0.$$

따라서 아래가 성립한다.

$$\bar{p}^{K+L+M}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) > 0$$

(step 2)

- 두 코디네이츠가 독립이므로 \bar{p} 의 stationary distribution을 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$\bar{\pi}(a, b) = \pi(a)\pi(b).$$

- 정리 6.5.4에 의해서 \bar{p} 의 stationary distribution이 존재한다는 것은 \bar{p} 의 모든상태가 recurrent하다는 것을 의미한다.

- (X_n, Y_n) 을 $S \times S$ 에서의 체인이라고 하자.
- T 를 이 체인이 처음으로 대각 $\{(y, y) \in S\}$ 을 치는 시간이라고 하자.
- $T(x, x)$ 를 (x, x) 를 hit하는 시간이라고하자.
- \bar{p} 가 (1) irreducible 하고 (2) recurrent 하므로 $T(x, x) < \infty$ a.s. 이고 따라서 $T < \infty$ a.s. 이다.

(step 3)

- 우선 두개의 코디네이트 (X_n, Y_n) 가 $\{T \leq n\}$ 에서 같은 분포를 가진다는 것을 관찰하자.

-
- (X_n, Y_n) 이 첫 교차점을 가지는 시간과 장소를 고려하여보자. 마코프 성질을 이용하면

$$P(X_n = y, T \leq n) = \sum_{m=1}^n \sum_x P(T = m, X_m = x, X_n = y)$$

Periodicity, Tail σ -field

General State