

SARIMA의 ACF

- 시계열강의자료
- 조신섭교수님 교재의 문제풀이

예제

연습문제 10.3.

- 아래의 모형의 ACF를 구해보자.

$$(1-\phi B)Z_t=(1-\theta B)(1-\Theta B^4)\epsilon_t$$

- 이 모형은 정상이라고 가정하자.
- $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$ 까지만 어거지로 구하고 그 이후는 아래를 반복한다.

$$\begin{aligned}\gamma_6 &= \phi \gamma_5 \\ \gamma_7 &= \phi \gamma_6 \\ &\dots\end{aligned}$$

- 모형을 아래와 같이 표현하자.

$$Z_t=\phi Z_{t-1}+\epsilon_t-\theta \epsilon_{t-1}-\Theta \epsilon_{t-4}+\theta \Theta \epsilon_{t-5}$$

- 양변에 Z_t 를 곱하고 평균을 취하면

$$\gamma_0=\phi \gamma_1+cov\left(Z_t, \epsilon_t\right)-\theta cov\left(Z_t, \epsilon_{t-1}\right)-\Theta cov\left(Z_t, \epsilon_{t-4}\right)+\theta \Theta cov\left(Z_t, \epsilon_{t-5}\right)$$

- 따라서 아래들을 구하면 좋겠다.

$$\begin{aligned}&cov\left(Z_t, \epsilon_t\right) \\ &cov\left(Z_t, \epsilon_{t-1}\right) \\ &cov\left(Z_t, \epsilon_{t-4}\right) \\ &cov\left(Z_t, \epsilon_{t-5}\right)\end{aligned}$$

- 먼저 $cov\left(Z_t, \epsilon_t\right)$ 를 구해보자.

$$cov\left(\phi Z_{t-1}+\epsilon_t-\theta \epsilon_{t-1}-\Theta \epsilon_{t-4}+\theta \Theta \epsilon_{t-5}, \quad \epsilon_t\right)=\sigma^2$$

이다.

- 이제 $cov\left(Z_t, \epsilon_{t-1}\right)$ 을 구해보자.

$$cov\left(\phi Z_{t-1}+\epsilon_t-\theta \epsilon_{t-1}-\Theta \epsilon_{t-4}+\theta \Theta \epsilon_{t-5}, \quad \epsilon_{t-1}\right)=\phi \sigma^2-\theta \sigma^2$$

이런식으로 계속 구할 수 없으니 좀 더 체계적인 방법을 알아보자.



- 아래의 식을 관찰하자. 오른쪽 등호는 울드의 정리에 의해 성립한다.

$$Z_t=\frac{\left(1-\theta B\right)\left(1-\Theta B^4\right)}{1-\phi B}\epsilon_t=\left(\psi_0+\psi_1 B+\psi_2 B^2+\dots\right)\epsilon_t$$

편의상 위의 식을 아래와 같이 약속하자.

$$(1)=(2)=(3)$$

- 식 $(2)=(3)$ 을 관찰하면 아래의 관계가 성립한다.

$$\left(1-\theta B\right)\left(1-\Theta B^4\right)=\left(1-\phi B\right)\left(\psi_0+\psi_1 B+\psi_2 B^2+\dots\right)$$

상수항, B 의 계수 B^2 의 계수... 등을 순차적으로 비교하면

$$\begin{aligned}1 &= \psi_0 \\ -\theta &= \psi_1 - \phi \psi_0 \\ 0 &= \psi_2 - \phi \psi_1 \\ 0 &= \psi_3 - \phi \psi_2 \\ -\Theta &= \psi_4 - \phi \psi_3 \\ \theta \Theta &= \psi_5 - \phi \psi_4\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\psi_0 &= 1 \\ \psi_1 &= \phi - \theta \\ \psi_2 &= \phi(\phi - \theta) \\ \psi_3 &= \phi^2(\phi - \theta) \\ \psi_4 &= \phi^3(\phi - \theta) - \Theta \\ \psi_5 &= \phi(\phi^3(\phi - \theta) - \Theta) + \theta \Theta = \phi^4(\phi - \theta) - \phi \Theta + \theta \Theta\end{aligned}$$

- 위의 결과를 활용하기 위해 $(1)=(3)$ 의 양변에 $\epsilon_t, \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots$ 를 순차적으로 곱하고 평균을 취하자. 그러면 아래를 얻는다.

$$\begin{aligned}cov\left(Z_t, \epsilon_t\right) &= \psi_0 \times \sigma^2 = \sigma^2 \\ cov\left(Z_t, \epsilon_{t-1}\right) &= \psi_1 \times \sigma^2 = (\phi - \theta) \sigma^2 \\ cov\left(Z_t, \epsilon_{t-2}\right) &= \psi_2 \times \sigma^2 = \phi(\phi - \theta) \sigma^2 \\ cov\left(Z_t, \epsilon_{t-3}\right) &= \psi_3 \times \sigma^2 = \phi^2(\phi - \theta) \sigma^2 \\ cov\left(Z_t, \epsilon_{t-4}\right) &= \psi_4 \times \sigma^2 = \left(\phi^3(\phi - \theta) - \Theta\right) \sigma^2 \\ cov\left(Z_t, \epsilon_{t-5}\right) &= \psi_5 \times \sigma^2 = \left(\phi^4(\phi - \theta) - \phi \Theta + \theta \Theta\right) \sigma^2\end{aligned}$$



- 이제 아래식의 양변에 각각 $Z_t, Z_{t-1}, \dots, Z_{t-5}$ 를 곱한뒤 평균을 취하면 5개의 식이 나온다.

$$Z_t=\phi Z_{t-1}+\epsilon_t-\theta \epsilon_{t-1}-\Theta \epsilon_{t-4}+\theta \Theta \epsilon_{t-5}$$

따라서 그 식을 연립해서 풀면 된다.

- 살짝 다른풀이.

- 식 $(1) = (2) = (3)$ 을 다시 관찰하자.

$$Z_t = \frac{(1 - \theta B)(1 - \Theta B^4)}{1 - \phi B} \epsilon_t = (\psi_0 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) \epsilon_t$$

- 아래식을 관찰하자.

$$\begin{aligned} 1 &= \psi_0 \\ -\theta &= \psi_1 - \phi \psi_0 \\ 0 &= \psi_2 - \phi \psi_1 \\ 0 &= \psi_3 - \phi \psi_2 \\ -\Theta &= \psi_4 - \phi \psi_3 \\ \theta \Theta &= \psi_5 - \phi \psi_4 \\ 0 &= \psi_6 - \phi \psi_5 \\ 0 &= \psi_7 - \phi \psi_6 \\ &\dots \end{aligned}$$

정리하면

$$\begin{aligned} \psi_0 &= 1 \\ \psi_1 &= \phi \psi_0 - \theta \\ \psi_2 &= \phi \psi_1 \\ \psi_3 &= \phi \psi_2 \\ \psi_4 &= \phi \psi_3 - \Theta \\ \psi_5 &= \phi \psi_4 - \theta \Theta \\ \psi_6 &= \phi \psi_5 \\ \psi_7 &= \phi \psi_6 \\ &\dots \end{aligned}$$

- 잘 생각해보면 위의 식을 이용하여 ψ_0, \dots, ψ_5 까지 구하는것은 일도 아닌것 같다. ψ_6 부터는 아래를 활용하여 구하면 된다.

$$\begin{aligned} \psi_6 &= \phi \psi_5 \\ \psi_7 &= \phi \psi_6 \\ &\dots \end{aligned}$$

- $cov(Z_t, Z_t)$ 는 아래와 같이 표현가능하다.

	ϵ_t	ϵ_{t-1}	ϵ_{t-2}	ϵ_{t-3}	\dots
Z_t	ψ_0	ψ_1	ψ_2	ψ_3	\dots
Z_t	ψ_0	ψ_1	ψ_2	ψ_3	\dots

- 따라서 $\gamma_0 = \sigma^2(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2)$.

- 동일한 논리로 $cov(Z_t, Z_{t-1})$ 는 아래와 같이 표현가능하다.

	ϵ_t	ϵ_{t-1}	ϵ_{t-2}	ϵ_{t-3}	\dots
Z_t	ψ_0	ψ_1	ψ_2	ψ_3	\dots
Z_{t-1}		ψ_0	ψ_1	ψ_2	\dots

- 따라서 $\gamma_1 = \sigma^2(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j-1})$.

- 결국 ψ_0, ψ_1, \dots 을 하나의 시계열로 보고 R에서 SACF를 구하듯이 구하면 된다.

연습문제 10.5.

- 아래의 모형의 ACF를 구해보자.

$$(1 - \phi B)Z_t = (1 - \Theta B^4)\epsilon_t$$

- 연습문제 10.4.의 결과에서 $\theta = 0$ 을 대입.

연습문제 10.6.

- 아래의 모형의 ACF를 구해보자.

$$(1 - \phi B)(1 - \Phi B^4)Z_t = \epsilon_t$$

- 아래의 식으로 만든뒤

$$Z_t - \phi Z_{t-1} - \Phi Z_{t-4} + \phi \Phi Z_{t-5} = \epsilon_t$$

양변에 Z_t, \dots, Z_{t-5} 를 곱하여 $\gamma_0, \dots \gamma_5$ 를 푼다.

- 따라서 아래가 성립하면 된다.

$$(1 + \phi B + (\phi B)^2 + \dots)(1 + \Phi B^4 + (\Phi B^4)^2 + \dots) = \psi_0 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots$$

간단하게 아래처럼 쓸수도 있다.

$$\phi(B)\Phi(B) = \psi_0 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots$$

- 상수항을 비교하면 $\psi_0 = 1$ 이다. 그런데 상수항의 비교는 아래와 같이 표현가능하다.

$$\phi(0)\Phi(0) = \psi_0 \iff 1 = \psi_0$$

- 양변을 B 로 미분하고 $B = 0$ 을 대입하자.

$$\phi'(0)\Phi(0) + \phi(0)\Phi'(0) = \psi_1$$

그런데 $\phi'(0) = \phi$ 이고 $\Phi'(0) = 0$ 이고 $\phi(0) = \Phi(0) = 1$ 이므로

$$\phi = \psi_1.$$

- 양변을 B 로 두번미분하고 $B = 0$ 를 대입하면

