

## 4.1. Stopping Times

- 아래를 가정하자.

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(\omega_1, \omega_2, \dots) : \omega_i \in S\} \\ \mathcal{F} &= \mathcal{S} \times \mathcal{S} \times \dots \\ P &= \mu \times \mu \times \dots \quad \mu \text{ is the distribution of } X_i. \\ X_n(\omega) &= \omega_n\end{aligned}$$

- 맵핑  $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  가 *finite permutation*이라는 것은 유한개의  $i$ 에 대해서면  $\pi(i) \neq i$ 가 성립한다는 의미이다. 따라서 퍼퓨테이션은 인덱스의 순서를 (유한개) 바꿔주는 함수라 볼 수 있다.

- 만약에  $\pi$ 가  $\mathbb{N}$ 의 *finite permutation*이고  $\omega \in S^{\mathbb{N}}$ 이라면 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$i\text{-th element of } \pi\omega = \omega \text{의 } \pi(i)\text{-th element}$$

따라서

$$(\pi\omega)_i = \omega_{\pi(i)}$$

와 같이 쓸 수 있다. 이 경우 array of realization:

$$\omega_1, \omega_2, \dots$$

이  $\pi$ 에 의해서 재정렬된다고 해석할 수 있다. (Note that  $\omega_1 = X_1(\omega)$ )

- 따라서 array of realization 즉 어떠한 확률시행의 결과에  $\pi$ 를 취한다는 의미는 확률변수의 결과 중 유한개의 순서를 임의로 바꾼다는 것을 의미한다.

**(def)** 어떠한 사건  $A$ 가 *permutable*하다는 것은 사건  $A$ 가 아래를 식을 만족한다는 의미이다.

$$A = \pi^{-1}(A)$$

여기에서  $\pi^{-1}(A) = \{\omega : \pi\omega \in A\}$ 이다. 이 정의는 이해하기 그렇게 쉽지 않다. 아래의 설명들을 참고하여 보자.

- 우선 사건  $A$ 란 무엇인지 다시 생각해보자. 사건이란 확률시행의 결과를 재해석하여 구성한 어떠한 이벤트를 의미한다. 따라서  $A$ 는 예를들어 "주사위를 5번 던졌을때 짝수가 3번이상 나올 사건"과 같이 정의할 수 있다.

- 이제 퍼뮤터블의 의미를 살펴보자. 어떠한 사건  $A$  퍼뮤터블하다는 것은 확률변수의 결과 중 유한개의 순서를 임의로 바꾸어도 사건  $A$ 를 일관적으로 정의할 수 있다는 것을 의미한다.

**example:** 예를들어 보자.  $X_1, X_2, \dots$ 이 1과 -1중 하나가 나오는 베르누이 시행이라고 하자. 만약

$$A : \text{랜덤변수들의 총합 즉 } X_1 + X_2 + X_3 + \dots \text{가 음수일 사건}$$

이라 정의한다고 하자. 직관적으로  $A$ 는 확률변수들의 순서를 바꾸어서 상관없으므로 이럴 경우 사건  $A$ 를 퍼뮤터블 하다고 말한다. 이 예제를 좀 더 수학적으로 표현하여 보자.

$$A = \{\omega : X_1(\omega) + X_2(\omega) + \dots < 0\}$$

$\pi$ 를 인덱스 1과 2를 바꾸는 변환이라고 하자. 그러면

$$\pi\omega = (\pi(\omega_1, \omega_2, \dots)) = (\omega_2, \omega_1, \dots)$$

따라서

$$\omega \in A \iff X_1(\omega) + X_2(\omega) + X_3(\omega) + \dots < 0$$

에 대응하는 것은

$$\pi\omega \in A \iff X_2(\omega) + X_1(\omega) + X_3(\omega) + \dots < 0$$

결국

$$\pi^{-1}(A) = \{\omega : \pi\omega \in A\} = \{\omega : \omega \in A\} = A.$$

**example:** 편의상  $X_1, X_2, X_3$ 을 베르누이시행에서 관측하였다고 하자.

$$A: X_1 + X_2 + X_3 = 1 \text{ 일 사건}$$

그러면

$$A = \{\omega : \mathbf{X}(\omega) = (1, 0, 0) \text{ or } \mathbf{X}(\omega) = (0, 1, 0) \text{ or } \mathbf{X}(\omega) = (0, 0, 1)\}$$

이다. 단,  $\mathbf{X}(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), X_3(\omega))$ . 이때  $A$ 는 퍼뮤터블하다. 아래와 같은 collection을 고려하여 보자.

$$\mathcal{E} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$$

$\mathcal{E}$ 는 시그마필드이고 모든 원소가 퍼뮤터블하다.

**(def)**  $\mathcal{E}$ 를 *exchangeable* 시그마필드라고 말한다. 즉 어떠한 시그마필드를 구성하는 모든 사건이 퍼뮤터블하면 익스체인지어블하다고 말한다.

**example:** 퍼뮤터블이벤트에 대한 예제를 좀더 살펴보자. (교재에 있는 예제이다.) 아래의 사건은 퍼뮤터블하다.

$$\{\omega : S_n(\omega) \in B, \text{ i.o.}\}$$

왜냐하면 적당히 큰  $n$ 에 대하여  $S_n(\omega) = S_n(\pi\omega)$ 이 성립하기 때문이다.

**note:** 참고로 아래표현을 기억하면 위의 state를 이해하기에 좋다.

$$\begin{aligned}S_n &\in B, \text{ i.o.} \\ \iff S_n &\in B^c, \text{ a.b.f.} \\ \iff S_n &\in B^c, \text{ for all } n \geq N_0\end{aligned}$$

**note:**  $S_n(\omega) = S_n(\pi\omega)$ 은 그냥 모든  $n$ 에 대하여 성립하는것 아닌가? 하는 착각을 하지 않기를 바란다. 물론

$$S = X_1 + X_2 + X_3 + \dots$$

은 항상

$$S(\omega) = S(\pi\omega)$$

가 성립하지만  $S_n$ 은 그렇지 않다. 예를들어서  $\pi$ 를 1과 100의 인덱스를 서로 바꾸는 규칙이라고 하자.

$$\begin{aligned}S_1(\omega) &= X_1 \text{ and } S_1(\pi\omega) = X_{100} \\ S_2(\omega) &= X_1 + X_2 \text{ and } S_2(\pi\omega) = X_{100} + X_2 \\ &\dots\end{aligned}$$

이므로  $n < 100$ 에 대하여서는  $S_n(\omega) \neq S_n(\pi\omega)$ 이다.

**note:** 여기에서 적당히 큰  $n$ 에 대하여

$$S_n(\omega) = S_n(\pi\omega)$$

임을 주장할 수 있다. 즉 적당히 큰 수  $N_0$ 가 존재하여  $n \geq N_0$ 인 모든  $n$ 에 대하여

$$S_n(\omega) = S_n(\pi\omega)$$

가 성립함을 보일 수 있다. 그도 그럴것이  $\pi$ 는 유한개의 인덱스를 서로 바꾸는 역할을 하므로 적당히 큰 수  $N_0$ 이상으로는 그 유한개의 바꿈이 없다고 보일수 있다. 이때 큰 수  $N_0$ 의 존재성은 "유한"개의 바꿈이라는 조건때문에 증명된다. 예를들어 100을 1로 1을 100으로 바꾼다고 하자. 그러면  $M = 100$ 이 존재하여  $n \geq N_0$ 에서는 모두

$$S_n(\omega) = S_n(\pi\omega)$$

라고 주장할 수 있다.

**example:** 아래의 사건도 퍼뮤터블하다.

$$\left\{ \omega : \limsup_{n \rightarrow \infty} S_n(\omega)/c_n \leq 1 \right\}$$

이유는 적당히 큰  $n$ 에 대하여  $S_n(\omega) = S_n(\pi\omega)$ 라고 주장할 수 있기 때문이다.

**(thm)** 테일-시그마필드에 속하는 모든 이벤트는 퍼뮤터블하다. 이때 *tail- $\sigma$ -field*는 아래와 같이 정의되는 시그마필드  $\mathcal{T}$ 이다.

$$\mathcal{T} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}'_n \quad \text{where } \mathcal{F}'_n = \sigma(X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$$

**note:** 어떠한 이벤트  $A$ 가  $A \in \mathcal{T}$ 라는 것은 임의의 유한개의 realization의 결과를 완전히 바꾸어도 event가 동일함을 의미한다. 즉  $X_1, X_{100}$ 의 순서만 바꾸는 것이 아니고  $X_1$ 의 값과  $X_{100}$ 을 아예 임의의 다른값으로 바꾸어도 된다는 의미이다.

- 위의 정리의 역은 성립하지 않는다. 즉 퍼뮤터블한 사건이 항상 테일 시그마 필드의 원소는 아니다. 아까 소개한 바 있는 아래의 사건

$$\{\omega : S_n(\omega) \in B, \text{ i.o.}\}$$

은  $\mathcal{E}$ 에 속하지만(=퍼뮤터블하지만)  $\mathcal{T}$ 에 속하지 않는(=테일시그마필드의 원소는아닌) 사건이다. (왜???)

- 만약에 확률변수열  $X_1, X_2, \dots$  이 iid 라면  $\mathcal{E}$ 와  $\mathcal{T}$ 는 차이가 없다. 이게 바로 휴이트-새비지의 정리이다. (그냥  $\mathcal{E} = \mathcal{T}$ 라는 소리인가??? 교재에서는 there is no difference between  $\mathcal{E}$  and  $\mathcal{T}$ 라고 써있긴한데..)

**(Theorem 4.1.1. Hewitt-Savage 0-1 law.)** (1)  $X_1, X_2, \dots$  이 i.i.d.이고 (2)  $A \in \mathcal{E}$  이라면

$$P(A) \in \{0, 1\}$$

이다.

## 6.1. Definitions

**(def)**  $(S, \mathcal{S})$ 를 measurable space라고 하자.  $X_n : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (S, \mathcal{S})$ 이라고 하자. 편하게

$$(S, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}, \mathcal{R})$$

이라고 생각해도 무방하다. 어떠한 확률변수열  $\{X_n\}$ 이 filtration  $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, \dots, X_n)$ 에서 정의되어 있다고 하자. 확률변수열  $\{X_n\}$ 이 마코프체인이라는 것은 아래와 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}\{X_n\} \text{ is Markovchain w.r.t. } \mathcal{F}_n \\ \stackrel{def}{\iff} \text{for all } B \in \mathcal{S}: \quad P(X_{n+1} \in B | \mathcal{F}_n) = P(X_{n+1} \in B | X_n)\end{aligned}$$

**note:** 확률변수열  $X_1, X_2, \dots$ 의 값이 바로 이전의 값에 의해서만 결정되면 마코프체인이라고 한다. 즉  $X_2$ 의 값을 알기 위해서는  $X_1$ 의 값에 대한 정보만 있으면 되고  $X_3$ 의 값을 알기 위해서는  $X_2$ 에 대한 정보만 있으면 될때  $X_1, X_2, \dots$ 을 마코프체인이라고 한다.

- $4 \times 4$  그리드 세계를 가정하자.

$$\Omega = \{(1, 1), \dots, (4, 4)\}$$

이고

$$S = \{1, 2, 3, \dots, 16\}$$

이라고 하자. 확률변수  $X_1 : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (S, \mathcal{S})$ 은 아래와 같이 정의할 수 있는 맵핑이라고 하자.

$$\begin{aligned}X_1((1, 1)) &= 1 \\ X_2((1, 2)) &= 2 \\ &\dots \\ X_1((4, 4)) &= 16\end{aligned}$$

따라서

$$X_1 = 1, X_2 = 2$$

가 의미하는 것은 처음에는 (1, 1)의 위치에 있다가 그다음에는 (1, 2)의 위치로 이동하였다는 것을 의미한다. 이제 (1, 1)의 위치에서 (1, 2)의 위치로 이동하는 transition probability를  $p$ 라고 정의하자. 여기에서  $p$ 는 확률공간을 구성하는  $P$ 이지 pmf를 의미하는 것이 아님을 기억하자.  $p$ 는 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$p : (S, \mathcal{S}) \rightarrow \mathbb{R}$$

기호로는 아래와 같이 쓴다.

$$p(x, A)$$

여기에서  $x \in S, A \in \mathcal{S}$ 이다.

**example:**  $x = 1, A = \{1, 2, 5\}$ 이라고 하자.

$$\begin{aligned}x = 1 &\iff X(\omega) = 1 \iff \omega = (1, 1) \\ A = \{1, 2, 5\} &\iff \{\omega : X(\omega) \in A\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}\end{aligned}$$

임을 주목하라. 따라서

$$p(x, A)$$

는 점 (1, 1)에서 출발했는데 점 (1, 1), (1, 2), (2, 1)중 하나에 도착할 확률이므로

$$p(x, A) = 1$$

이라고 볼 수 있다.

**(def)** transition probability의 정의를 사용하면 아래를 만족하는 확률변수열  $\{X_n\}$ 을 마코프체인이라 정의할 수 있다.

$$P(X_{n+1} \in B | \mathcal{F}_n) = p_n(X_n, B)$$

여기에서  $p_n$ 은  $n$ 번째에 어떠한 위치  $X_n$ 에서  $B$ 의 부분집합중 하나의 위치로 이동할 확률을 의미한다.

**(결론1,2,3의 가정)** 만약에 (1)  $(S, \mathcal{S})$ 이 *nice space* 이고 (2)  $\{p_n\}$ 이 잘 정의되며 (3)  $(S, \mathcal{S})$ 에서의 initional distribution  $\mu$ 가 잘 정의된다고 하자.

**(결론1)** 일단 유한개의 확률변수열  $\{X_n\}$ 에 대하여 consistence set of finite dimensional distribution을 아래와 같이 잘 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned}\text{Prob}(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \dots, X_n \in B_n) \\ = P(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \dots, X_n \in B_n) \\ = \int_{B_0} \mu(dx_0) \int_{B_1} p_0(x_0, \mu(dx_1)) \dots \int_{B_n} p_{n-1}(x_{n-1}, \mu(dx_n))\end{aligned}$$

**note:** 이때  $\text{Prob}(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \dots, X_n \in B_n)$ 와 같은 표현은 이해하기 쉽지만 수학적으로 엄밀하지 않은 표현이다. 따라서 엄밀하게 하려면 아래의 공간에서 정의되는 확률측도  $P$ 를 사용하여 표현해야한다.

$$(S_0 \times S_1 \dots \times S_n, \mathcal{S}_0 \times \mathcal{S}_1 \dots \times \mathcal{S}_n)$$

이 공간은 간단하게 아래와 같이 표현하기도 한다.

$$\left( S^{\{0, 1, \dots, n\}}, \mathcal{S}^{\{0, 1, \dots, n\}} \right)$$

**note:** 즉 결론1은  $(S^{\{0, 1, \dots, n\}}, \mathcal{S}^{\{0, 1, \dots, n\}})$ 에서의 확률측도  $P$ 는 (혹은 임의의 유한 확률변수열  $\{X_n\}$ 에 대한 확률측도  $P$ 는) 초기분포  $\mu$ 와  $p_n$ 만 잘 정의하면 모순없이 정의가능하다는 것을 의미한다.

- 하지만 무한일 경우에도 잘 정의될까?

**(결론2)** (1)-(3)의 가정하에 Kolmogorov's theorem은 확률변수열  $\{X_n\}$ 이 무한수열을 가지더라도 아래와 같은 확률이 잘 정의됨을 보여준다.

$$\text{Prob}(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \dots, )$$

즉 이는  $\mu$ 와  $\{p_n\}$ 만 잘 정의되면 위의 같은 확률들을 모순없이 정의할 수 있음을 의미한다. 교재에서는 유한인 경우와 구분하기 위해서 위의 확률을 표현하는 확률측도를 특별히  $P_\mu$ 라고 하였다. 즉 아래와 같이 써야올바르다.

$$P_\mu(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \dots)$$

이때  $P_\mu$ 는  $(S^{\{0, 1, \dots\}}, \mathcal{S}^{\{0, 1, \dots\}})$ 에서의 확률측도이다.

**note:** 아래의 기호는 외우는 것이 좋겠다.

$$\begin{aligned}\text{Prob}(X_0 \in B_0) &= \int_{B_0} \mu(dx_0) \\ \text{Prob}(X_0 \in B_0, X_1 \in B_1) &= \int_{B_0} \mu(d(x_0)) \int_{B_1} p(x_0, \mu(dx_1))\end{aligned}$$

- 지금까지는 콜모고로프의 정리덕에  $P_\mu$ 가 잘 정의된다는 사실까지 살펴보았다. 즉 (1) 초기분포  $\mu$ 와 (2) transition 확률  $\{p_n\}$ 이 잘 정의되면 무한하게 눈을 쌓아도  $P_\mu$ 가 잘 정의된다.

**(결론3, Thm 6.1.1)** (1)-(3)의 조건하에  $\{X_n\}$ 이 마코프체인이 된다.

**(pf)** 아래의 기호를 정의하면서 증명을 시작하자.

**(notation)**  $\mu = \delta_x$ 를  $x$ 에서의 포인트매스라고 하자. 그리고 기호  $P_x = P_{\delta_x}$ 라고 정의하자.  $P_x$ 가 정의되면 아래와 같이  $P_\mu$ 를 정의할 수 있다.

$$P_\mu(A) = \int \mu(dx) P_x(A), \quad A \in \mathcal{S}^{\{0, 1, \dots\}}$$

**(Thm 6.1.2, 결론1의 변형)** (1)-(3)의 조건중 체크하기 까다로운 것은 (1)이다. 오히려 (1)의 조건대신에  $\{X_n\}$ 이 마코프체인임을 가정하면 결론2와 동일한 결과를 얻을 수 있다. 즉 (1)  $\{X_n\}$ 이 마코프체인이고 (2) transition prob  $\{p_n\}$ 이 주어졌고 (3) initional distribution  $\mu$ 가 주어졌다면 *finite dimensional distribution*이 아래와 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}P(X_j \in B_j, 0 \leq j \leq n) \\ = P(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \dots, X_n \in B_n) \\ = \int_{B_0} \mu(dx_0) \int_{B_1} p_0(x_0, \mu(dx_1)) \dots \int_{B_n} p_{n-1}(x_{n-1}, \mu(dx_n))\end{aligned}$$

## 6.2. Examples

## 6.3. Extensions of the Markov Property

## 6.4. Recurrence and Transience

## 6.5. Stationary Measures

- 아래식을 만족하는 measure  $\mu$ 를 stationary measure라고 한다.

$$\sum_x \mu(x) p(x, y) = \mu(y)$$

**note:**  $p(x, y)$ : 노드  $x$ 에서 다음 노드  $y$ 로 이동할 확률

**note:**  $\mu(x)$ : 노드  $x$ 에 있을 확률

**note:** 따라서 stationary measure는 특정노드에 있을 확률을 측정하는 메저라 생각할 수 있다.

- stationary measure(=stationary distribution)가 (1) 존재하고 (2) 유일하다는 것이 조사되었다고 하자. 이제 다음 관심사는 아래식을 만족하는 stationary distribution  $\pi$ 이다.

$$\pi p = \pi$$

**(정리 6.5.6.)**

**(정리 6.5.6.)**  $p$ 가 irreducible 하다는 것과 아래는 동치이다.

(1) .

(2) stationary distribution이 존재한다.

(3) .

## Asymptotic Behavior

**(레마 6.6.3.)**  $d_x = 1$ 이라면  $m_0$ 보다 큰 모든  $m$ 에 대하여

$$p^m(x, x) > 0$$

를 만족시킬 수 있다.

**(정리 6.6.4.)**  $p$ 가 (1) irreducible 하고 (2) aperiodic 하며 (3) stationary distribution  $\pi$ 를 가진다고 하자. 그러면 아래가 성립한다.

$$p^n(x, y) \rightarrow \pi(y) \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

**note:**  $p$ 가 irreducible 인것만 보이면 stationary distribution  $\pi$ 를 가진다는 것은 정리 6.5.6에 의해서 성립한다. 따라서 (1)-(2)만 조건으로 사용해도 위의 정리는 성립한다.



***note:***  $p$ 가 에이피리오딕하다는 의미는 모든 state가  $d_x = 1$ 을 가진다는 것을 의미한다 .

**(pf)**

- $S^2 = S \times S$  라고 하자.
- 전이확률  $\bar{p}$ 를  $S \times S$ 에서 아래와 같이 정의하자.

$$\bar{p}\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = p(x_1, x_2)p(y_1, y_2)$$

***note:*** 이는 각각의 coordinate가 독립적으로 움직인다는 것을 의미한다.

**(step 1)**

- 먼저  $\bar{p}$ 가 이리듀시블임을 보이자. (이는 너무 당연해서 바보같은 증명으로 보이지만 정리의 에이피리오딕조건을 사용하는 유일한 과정이다.) 우선  $p$ 가 이리듀시블하다는 조건으로부터 아래를 만족하는 적당한  $K, L$ 이 존재함을 알 수 있다.

$$p^K(x_1, x_2) > 0 \quad \text{and} \quad p^L(y_1, y_2) > 0.$$

그런데 레마 6.6.3에 의해서  $M$ 을 적당히 크게 설정한다면 아래를 만족시킬 수 있음을 알 수 있다.

$$p^{L+M}(x_1, x_2) > 0 \quad \text{and} \quad p^{K+M}(y_1, y_2) > 0.$$

따라서 아래가 성립한다.

$$\bar{p}^{K+L+M}\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) > 0$$

**(step 2)**

- 두 코디네이즈가 독립이므로  $\bar{p}$ 의 stationary distribution을 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$\pi(a, b) = \pi(a)\pi(b).$$

- 정리 6.5.4에 의해서  $\bar{p}$ 의 stationary distribution이 존재한다는 것은  $\bar{p}$ 의 모든상태가 recurrent하다는 것을 의미한다.

- $(X_n, Y_n)$ 을  $S \times S$ 에서의 체인이라고 하자.
- $T$ 를 이 체인이 처음으로 대각  $\{(y, y) \in S\}$ 을 치는 시간이라고 하자.
- $T(x, x)$ 를  $(x, x)$ 를 hit하는 시간이라고하자.
- $\bar{p}$ 가 (1) irreducible 하고 (2) recurrent 하므로  $T(x, x) < \infty$  a.s. 이고 따라서  $T < \infty$  a.s. 이다.

**(step 3)**

- 우선 두개의 코디네이트  $(X_n, Y_n)$ 가  $\{T \leq n\}$ 에서 같은 분포를 가진다는 것을 관찰하자.

- $(X_n, Y_n)$ 이 첫 교차점을 가지는 시간과 장소를 고려하여보자. 마코프 성질을 이용하면

$$P(X_n = y, T \leq n) = \sum_{m=1}^n \sum_x P(T = m, X_m = x, X_n = y)$$

## 6.6. Periodicity, Tail $\sigma$ -field

## 6.7. General State