

# Chapter 1

## $O_p(R_n), O(r_n)$ and $o_p(R_n), o(r_n)$

### 1.1 Little $o$

(정의)  $\{x_n\}, \{r_n\}$ 은 실수열이라고 하자.

$$\begin{aligned} x_n &= o(r_n) \quad \text{as } n \rightarrow \infty \\ \iff x_n/r_n &\rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

**note:**  $x_n = o(1)$ 의 의미는  $x_n \rightarrow 0$ 의 의미이다.

**note:**  $x_n = o(r_n)$ 의 의미는  $x_n/r_n \rightarrow 0$ 의 의미이다.

**example:**  $x_n = 1/n$  이면  $x_n = o(1)$ .

**example:**  $x_n = 1/n^2$  이면  $x_n = o(1/n)$

**note:**  $x_n = 1/n^2$  일 경우  $x_n = o(1), x_n = o(1/\sqrt{n}), x_n = o(1/n\sqrt{n})$ 도 가능함.

**example:**  $x_n = n^2$ 이면  $x_n = o(n^3)$ .

(느낌)  $x_n = o(\star_n)$  의 표현은  $x_n$ 이  $\star_n$  보다 빠르게 0으로 수렴 (혹은 천천히  $\infty$  로 발산) 하기만 하면 된다.



(정의)  $f(x), g(x)$ 는 실변수 함수

$$\begin{aligned} f(x) &= o(g(x)) \quad \text{as } x \rightarrow a \\ \iff f(x)/g(x) &\rightarrow 0 \quad \text{as } x \rightarrow a \end{aligned}$$

(느낌) 함수열의 경우도 동일하게 해석할 수 있다.

$$f(x) = o(\star(x)) \quad x \rightarrow a$$

는  $x$ 가 점점  $a$ 로 가까워질때  $f(x)$ 가  $\star(x)$ 보다 빠르게 0으로 수렴하거나 천천히  $\infty$ 로 발산하면 된다.



### 1.2 Big $O$

(정의)  $\{x_n\}, \{r_n\}$ 은 실수열이라고 하자.

$$\begin{aligned} x_n &= O(r_n) \quad \text{as } n \rightarrow \infty \\ \iff \sup_n |x_n/r_n| &< \infty \end{aligned}$$

**example:**  $x_n = n^2 + 2n + 100$  이면  $x_n = O(n^2)$ .

**example:**  $x_n = n^{-2} + n^{-1} + 1$  이면  $x_n = O(1)$ .

(느낌) 따라서

$$x_n = O(\star_n)$$

$\{x_n\}$ 의 최고차항이  $\star_n$ 의 최고차항과 같다는 의미이다.



(정의)  $f(x), g(x)$ 는 실변수함수 라고 하자.

$$\begin{aligned} f(x) &= O(g(x)) \quad \text{as } x \rightarrow a \\ \iff f(x)/g(x) &\rightarrow 0 \quad \text{as } x \rightarrow a \end{aligned}$$



## 1.3 Little $o_p$

(정의)  $\{X_n\}, \{R_n\}$ 은 확률변수열이라고 하자.

$$\begin{aligned} X_n &= o_p(R_n) \quad \text{as } n \rightarrow \infty \\ \iff X_n/R_n &\xrightarrow{p} 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

**note:**  $X_n = o_p(R_n)$ 의 의미는 새로운 확률변수  $Y_n = X_n/R_n$ 의 수열이  $\{Y_n\}$ 이 0으로 확률수렴한다는 의미이다.

**note:** 여기에서  $\{R_n\}$  은 확률변수열이 아니라 실수열로 생각할 수 있다. (실수는 확률변수의 한 종류이므로)

**note:**  $\{X_n\}$  과  $\{R_n\}$  이 모두 실수열이라면  $O_p$ 의 정의가  $O$ 의 정의와 같아진다.



## 1.4 Big $O_p$

(정의)  $\{X_n\}, \{R_n\}$ 은 확률변수열이라고 하자.

$$\begin{aligned} X_n &= O_p(R_n) \quad \text{as } n \rightarrow \infty \\ \iff \sup_n P\{|X_n/R_n| > M\} &\xrightarrow{\rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

- 이게 원래 실수버전으로 생각하면

$$\sup_n |X_n/R_n| < \infty$$

이어야 한다. 그런데  $X_n/R_n$ 은 확률변수이므로 위의 부등식이 성립하지 않게 된다. 결국

$$\sup_n |X_n/R_n| > \infty$$

이 될 확률은 너무 작지않겠냐? 라는 식의 논의를 해야한다. 즉 아래의 느낌이 되어야 한다.

$$P\{\sup_n |X_n/R_n| > \infty\} \approx 0$$

- 이런 느낌을 살린것이 바로 아래의 statement이다.

$$P\{\sup_n |X_n/R_n| > M\} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0$$

(느낌) 결국  $X_n = O_p(1)$ 의 의미는

$$P\{\sup_n |X_n| < \infty\} \approx 1$$

의 의미가 된다. 즉 확률변수  $X_n$ 이 어딘가에 bound 되어 있다는 의미가 된다.

(정리)  $Y_n \xrightarrow{d} Y$  이라면  $Y_n = O_p(1)$  이다.

**note:** 이 정리는 김우철 수리통계학 [2] 연습문제 5.11, 김우철 통계이론 강의노트 [3] 의 Review C, 그 외 다수에 소개되어 있다.

(정의) (*tightness of  $X$* )

The random variable  $X$  is *tight*

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \epsilon > 0 \quad \exists M \quad \text{s.t.} \quad P(|X| > M) < \epsilon$$

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} P(|X| > M) \rightarrow 0 \quad \text{as } M \rightarrow \infty$$

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \mu^*([-M, M]^c) \rightarrow 0 \quad \text{as } M \rightarrow \infty$$

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \epsilon > 0 \quad \exists M \quad \text{s.t.} \quad 1 - F(M) + F(-M) < \epsilon$$

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} X = O_p(1)$$

**note:**  $\mu^*([0, M]) = F(M) = P(X < M)$

**note:**  $\mu^*([-M, M]^c) = 1 - (P(X < M) - P(X < -M)) = 1 - F(M) + F(-M)$

**note:** 아무리  $\epsilon$ 을 작게 잡아도 결국  $M$ 을 크게 잡으면 된다.

**note:** 따라서 대충  $M \approx \infty$  일때  $P(|X| > M) \approx 0$  인 느낌이다.

(정의) (*uniformly tightness of  $\{X_n\}$* )

$\{X_n\}$  is *uniformly tight*

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \epsilon > 0 \quad \exists M \quad \text{s.t.} \quad \sup_n P(|X_n| > M) < \epsilon$$

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \sup_n P(|X_n| > M) \rightarrow 0 \quad \text{as } M \rightarrow \infty$$

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \sup_n \mu_n^*([-M, M]^c) \rightarrow 0 \quad \text{as } M \rightarrow \infty$$

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \epsilon > 0 \quad \exists M \quad \text{s.t.} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} (1 - F_n(M) + F_n(-M)) < \epsilon$$

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} X_n = O_p(1)$$

• 결국 확률변수열이  $\{X_n\}$ 이 *uniformly tight* 하다는 것은 확률적으로 유계라는 말과 같다. ([1] p.8.)

**note:** 애초에 *uniformly tightness* 는  $\{X_n\}$  이 *iid* 인 상황에서는 살짝 어색한 개념이다. 왜냐하면 *iid* 인 경우라면 하나의 분포  $X_1$ 만 잡아서 확률적으로 유계임을 보이면 되기 때문이다. 즉 *uniformly* 라는 말을 쓸 필요가 없다. 직관적으로 *uniformly*라는 말을 쓴다는 것은  $\sup$ 을 취한다는 느낌을 받아야 하는데 *iid* 의 경우

$$\sup_n P(|X_n| > M) = P(|X_1| > M)$$

이 되어서  $\sup$ 이 그냥 날아가버린다.

## 1.5 Calculus with $O_p$ and $o_p$

(정리) 아래는 증명없이 받아들이자 [1]. 여기에서  $\{R_n\}$ 은 (아무런 추가 조건없는) 확률변수열이다.

(1)  $o_p(1) + o_p(1) = o_p(1)$ .

(2)  $o_p(1) + O_p(1) = O_p(1)$ .

(3)  $O_p(1)o_p(1) = o_p(1)$ .

(4)  $(1 + o_p(1))^{-1} = O_p(1)$ .

$$(5) \quad o_p(R_n) = R_n o_p(1).$$

$$(6) \quad O_p(R_n) = R_n O_p(1).$$

$$(7) \quad o_p(O_p(1)) = o_p(1)$$

**note:** 첫번째를 즉  $o_p(1) + o_p(1) = o_p(1)$  가 의미하는것은  $X_n \xrightarrow{p} 0$  이고  $Y_n \xrightarrow{p} 0$  일때  $Z_n = X_n + Y_n \xrightarrow{p} 0$  라는 의미이다. 이는 continuous mapping thm 즉 김우철 정리 5.2.3 [2]의 한 형태가 된다.

**note:** 세번째공식 즉  $O_p(1)o_p(1) = o_p(1)$  이 의미하는 것은 (1)  $\{X_n\}$  이 확률적으로 유계이고 (2)  $\{Y_n\}$  이 0으로 확률수렴한다면 (★)  $\{X_n Y_n\}$  은 0으로 확률수렴한다는 의미이다. 여기에서 (1) 대신에  $\{X_n\}$ 이 어떠한 분포로 분포수렴한다는 가정이 추가적으로 있다면 이는 슬리츠키 정리의 한 형태가 된다.

## 1.6 Delta method

(정리)  $\{X_n\}$  이 확률변수열이라고 하자. (1)  $\sqrt{n}(X_n - \theta) \xrightarrow{d} Z$  이고 (2)  $\dot{g}(\cdot)$  이 연속함수이라면 아래가 성립한다.

$$\sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta)) \xrightarrow{d} \dot{g}(\theta)Z$$

**note:**  $\{X_n\}$ 이 iid 일 필요는 없다.

- 아래가 성립한다.  $g(x)$ 를  $x = a$ 에서 테일러 전개하면

$$g(x) = g(a) + (x - a)\dot{g}(a) + O((x - a)^2) \quad as \ x \rightarrow a$$

그런데  $O((x - a)^2) = (x - a)^2 O(1)$  이므로

$$g(x) = g(a) + (x - a)(\dot{g}(a) + (x - a)O(1)) \quad as \ x \rightarrow a$$

양변에  $\sqrt{n}$ 을 곱하면

$$\sqrt{n}(g(x) - g(a)) = \sqrt{n}(x - a)(\dot{g}(a) + (x - a)O(1)) \quad as \ x \rightarrow a$$

- $x$ 대신에  $X_n$ 을 대입하고  $a$ 대신에  $\theta$ 를 대입하면

$$\sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta)) = \sqrt{n}(X_n - \theta)(\dot{g}(\theta) + (X_n - \theta)O(1)) \quad as \ X_n \rightarrow \theta$$

정리하면

$$\sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta)) = \sqrt{n}(X_n - \theta)\dot{g}(\theta) + \sqrt{n}(X_n - \theta)^2 O(1) \quad as \ X_n \rightarrow \theta$$

- 그런데 조건 (1) 에 따라서  $\sqrt{n}(X_n - \theta) = O_p(1)$ 이다. 따라서  $X_n - \theta = o_p(1)$ 이다. 따라서  $\sqrt{n}(X_n - \theta)^2 = o_p(1)$ 이다. 따라서

$$\sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta)) = \sqrt{n}(X_n - \theta)\dot{g}(\theta) + o_p(1)O(1) \quad as \ X_n \rightarrow \theta$$

- $o_p(1)O(1) = o_p(1)$ 이므로

$$\sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta)) = \sqrt{n}(X_n - \theta)\dot{g}(\theta) + o_p(1)$$

따라서

$$\sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta)) \xrightarrow{d} \sqrt{n}(X_n - \theta)\dot{g}(\theta)$$

## Bibliography

[1] Van der Vaart, A. W. (2000). Asymptotic statistics (Vol. 3). Cambridge university press.

[2] 김우철, 수리통계학.

[3] 김우철, 통계이론1 강의노트.