

# 백분위수

- 이번에는 백분위수에 대하여 다룬다.
- 참고교재는 김우철 수리통계학책.

## 정리 4.4.3

- $X$ 가 연속형 확률변수라고 하자.  $F(x)$ 를  $X$ 의  $cdf$ 라고 하자.
- $F(x)$ 도 분명히 함수이므로  $F(X)$ 를 정의할 수 있다.  $F(X)$ 는 확률변수가 된다.
- 확률변수이므로 분포를 따르는데  $F(X)$ 는 아래의 분포를 따름이 알려져 있다.

$$F(X) \sim U(0, 1)$$

- 또한  $F^{-1}(U)$  역시 확률변수가 된다. (단  $U \sim U(0, 1)$ .) 그런데 이 확률변수는  $F^{-1}(U)$  는  $X$ 와 분포가 같음이 알려져 있다. 즉

$$F^{-1}(U) \stackrel{d}{=} X$$

이다.

- $U_1, \dots, U_n \stackrel{iid}{\sim} U(0, 1)$  라고 하자. 그리고  $U_{(1)}, \dots, U_{(n)}$ 을  $U_1, \dots, U_n$ 의 순서통계량이라고 하자. 정리 4.4.3 에 의해서

$$\begin{aligned} F^{-1}(U_{(1)}) &:= X_1^* \sim F \\ F^{-1}(U_{(2)}) &:= X_2^* \sim F \\ &\dots \\ F^{-1}(U_{(n)}) &:= X_n^* \sim F \end{aligned}$$

이다.

- $F$ 가 순증가 함수이므로  $X_1^* < \dots < X_n^*$ 이다.
- 아래가 성립한다. (왜??)

$$\begin{pmatrix} X_1^* \\ \dots \\ X_n^* \end{pmatrix} \stackrel{d}{=} \begin{pmatrix} X_{(1)} \\ \dots \\ X_{(n)} \end{pmatrix}$$

이는  $X$ 의 cdf  $F$ 를 알고 있을 경우  $X$ 의 순서통계량을 어떻게 생성할지 알려준다.

## 정리 4.4.3.

- 어떤분포의 순서통계량:  $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} F \implies X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ .
- 균등분포의 순서통계량:  $U_1, \dots, U_n \stackrel{iid}{\sim} U(0, 1) \implies U_{(1)}, \dots, U_{(n)}$ .
- 지수분포의 순서통계량:  $Y_1, \dots, Y_n \stackrel{iid}{\sim} Exp(1) \implies Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)}$ .
- 균등분포의 순서통계량과 지수분포의 순서통계량에는 아래와 같은 관계가 있다. (예제 4.3.4.)

$$U_{(r)} \stackrel{d}{=} 1 - e^{-Y_{(r)}}, \quad r = 1, 2, \dots, n$$

- 그런데 임의의  $r = 1, 2, \dots, n$ 에 대하여 지수분포의 순서통계량  $Y_{(r)}$ 은 아래를 만족한다. (예제 4.3.3.)

$$\forall r, \exists Z_1, \dots, Z_r \stackrel{iid}{\sim} Exp(1) \text{ s.t. } Y_{(r)} \stackrel{d}{=} \frac{1}{n}Z_1 + \dots + \frac{1}{n-r+1}Z_r$$

- 순서통계량  $X_{(r)}$ 은 아래와 같이 얻을 수 있다.

$$X_{(r)} \stackrel{d}{=} F^{-1}(U_{(r)})$$

- 그런데 (1)  $U_{(r)} \stackrel{d}{=} 1 - e^{-Y_{(r)}}$  와 (2)  $Y_{(r)} \stackrel{d}{=} \frac{1}{n}Z_1 + \dots + \frac{1}{n-r+1}Z_r$ 을 이용하면

$$X_{(r)} \stackrel{d}{=} F^{-1} \left( 1 - e^{-\left(\frac{1}{n}Z_1 + \dots + \frac{1}{n-r+1}Z_r\right)} \right)$$

따라서  $h(\star) = F^{-1}(1 - e^{-\star})$ 라고 정의하면

$$X_{(r)} \stackrel{d}{=} h \left( \frac{1}{n}Z_1 + \dots + \frac{1}{n-r+1}Z_r \right)$$

가 성립한다.

## 연습문제 5.16.

- $r_n \sim \alpha n \iff r_n/n \rightarrow \alpha$ .
- $s_n \sim \beta n \iff r_n/n \rightarrow \beta$ .

**note:** 위의정의를 예제 5.2.7 에 나와있다.

- 그리고  $0 < \alpha < \beta < 1$ .
- 편의상 아래를 가정하자.

(1)  $r_n$ 을 그냥  $r$ 로 쓰자. 여기에서  $r$ 은  $n$ 개의 sample 중 하위25%에 번째에 해당하는 수 이다. 즉  $r/n \approx 1/4$ . 동일한 논리로  $s_n$ 도 그냥  $s$ 라고 쓰자.

(2)  $r/n \rightarrow \frac{1}{4}$  and  $s/n \rightarrow \frac{3}{4}$ .

(3)  $\alpha, \beta$ 를 그냥  $\alpha_r, \alpha_s$ 로 정의하자. 이는 분위수의 느낌을 좀더 강조하기 위해서이다.  $\alpha_r$ 은  $r$ 에 해당하는 분위수라는 뜻임.

- $X_{(r)}$ 과  $X_{(s)}$ 의 join pdf를 구하라.

(sol)

- 우선 순서통계량 문제이므로 아래와 같은 확률변수를 가정하자.

$$Y_1, \dots, Y_n \stackrel{iid}{\sim} \text{Exp}(1).$$

- 아래와 같은 벡터를 가정하자.

$$\begin{bmatrix} Y_{(r)} \\ Y_{(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n}Z_1 + \dots + \frac{1}{n-r+1}Z_r \\ \frac{1}{n}Z_1 + \dots + \frac{1}{n-s+1}Z_s \end{bmatrix}$$

- 전체적인 그림.

$Y_{(r)}$ 과  $Y_{(s)}$ 번째 순서통계량의 분포

$$\implies X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} F \quad \text{인 임의의 분포에서 } X_{(r)} \text{과 } X_{(s)} \text{의 분포}$$

- 아래가 성립한다. (예제 5.2.7)

$$\begin{aligned} E(Y_{(r)}) &= E\left(\frac{1}{n}Z_1 + \dots + \frac{1}{n-r+1}Z_r\right) = \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n-r+1} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{1-k/n} \approx \int_0^{\alpha_r} \frac{1}{1-x} dx = -\log(1-\alpha_r) \end{aligned}$$

- 아래도 성립한다. (예제 5.2.7)

$$\begin{aligned} V(Y_{(r)}) &= V\left(\frac{1}{n}Z_1 + \dots + \frac{1}{n-r+1}Z_r\right) = \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{(n-r+1)^2} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{(1-k/n)^2} \approx \int_0^{\alpha_r} \frac{1}{(1-x)^2} dx = \frac{1}{n} \frac{\alpha_r}{1-\alpha_r} \end{aligned}$$

- 따라서

$$\sqrt{n} \left( \begin{bmatrix} Y_{(r)} \\ Y_{(s)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\log(1-\alpha_r) \\ -\log(1-\alpha_s) \end{bmatrix} \right) \xrightarrow{d} N \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\alpha_r}{1-\alpha_r} & \frac{\alpha_r}{1-\alpha_r} \\ \frac{\alpha_r}{1-\alpha_r} & \frac{\alpha_s}{1-\alpha_s} \end{bmatrix} \right).$$

- 그런데

$$\begin{bmatrix} X_{(r)} \\ X_{(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(Y_{(r)}) \\ h(Y_{(s)}) \end{bmatrix} = \mathbf{h} \left( \begin{bmatrix} Y_{(r)} \\ Y_{(s)} \end{bmatrix} \right)$$

- 따라서

$$\begin{aligned} &\sqrt{n} \times \left( \begin{bmatrix} X_{(r)} \\ X_{(s)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ? \\ ? \end{bmatrix} \right) \\ &= \sqrt{n} \times \left( \mathbf{h} \left( \begin{bmatrix} Y_{(r)} \\ Y_{(s)} \end{bmatrix} \right) - \mathbf{h} \left( \begin{bmatrix} -\log(1-\alpha_r) \\ -\log(1-\alpha_s) \end{bmatrix} \right) \right) \\ &= \sqrt{n} \times \left( \begin{bmatrix} h(Y_{(r)}) \\ h(Y_{(s)}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h(-\log(1-\alpha_r)) \\ h(-\log(1-\alpha_s)) \end{bmatrix} \right) \\ &\xrightarrow{d} \begin{bmatrix} ?? & ?? \\ ?? & ?? \end{bmatrix}^T N \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\alpha_r}{1-\alpha_r} & \frac{\alpha_r}{1-\alpha_r} \\ \frac{\alpha_r}{1-\alpha_r} & \frac{\alpha_s}{1-\alpha_s} \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

**note:** 여기에서  $\mathbf{h} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  이므로  $\begin{bmatrix} ?? & ?? \\ ?? & ?? \end{bmatrix}$ 와 같이  $2 \times 2$ 매트릭스가 나왔다.

**note:** 만약에  $\mathbf{h} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 이였다면 즉  $h(x_1, x_2) = (y_1, y_2, y_3)$  꼴이였다면

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

일것이다.



- 잠시 시간을 투자하여  $\begin{bmatrix} ?? & ?? \\ ?? & ?? \end{bmatrix}$ 를 계산하자.

$$\begin{bmatrix} ?? & ?? \\ ?? & ?? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial h(x_2)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h(x_1)}{\partial x_2} & \frac{\partial h(x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

이다. 그런데

$$h(x_1) = F^{-1}(1 - e^{-x_1})$$

이므로

$$F(h(x_1)) = 1 - e^{-x_1}$$

그러므로

$$\frac{\partial}{\partial x_1} F(h(x_1)) = e^{-x_1}$$

따라서

$$f(h(x_1)) \frac{\partial h(x_1)}{\partial x_1} = e^{-x_1} \iff \frac{\partial h(x_1)}{\partial x_1} = \frac{e^{-x_1}}{f(h(x_1))}$$

$x_1$ 대신에  $-\log(1-\alpha_r)$ 를 대입하자.

$$e^{-x_1} = e^{\log(1-\alpha_r)} = 1 - \alpha_r$$

$$f(h(x_1)) = f(h(-\log(1-\alpha_r))) = f(F^{-1}(1 - e^{\log(1-\alpha_r)})) = f \circ F^{-1}(\alpha_r)$$

따라서

$$\begin{bmatrix} ?? & ?? \\ ?? & ?? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\alpha_r}{f \circ F^{-1}(\alpha_r)} & 0 \\ 0 & \frac{1-\alpha_s}{f \circ F^{-1}(\alpha_s)} \end{bmatrix}$$

**note:**  $X$ 가 연속확률변수이므로  $F^{-1}$ 도 연속함수이다. 따라서

$$\begin{bmatrix} \frac{1-\alpha_r}{f \circ F^{-1}(\alpha_r)} & 0 \\ 0 & \frac{1-\alpha_s}{f \circ F^{-1}(\alpha_s)} \end{bmatrix}$$

의 각 원소가 모두 연속이다. 따라서 모든 편미분이 존재하고 그것이 연속이다.



- 따라서 수렴하는 분포는

$$\begin{bmatrix} \frac{1-\alpha_r}{f \circ F^{-1}(\alpha_r)} & 0 \\ 0 & \frac{1-\alpha_s}{f \circ F^{-1}(\alpha_s)} \end{bmatrix}^T N \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\alpha_r}{1-\alpha_r} & \frac{\alpha_r}{1-\alpha_r} \\ \frac{\alpha_r}{1-\alpha_r} & \frac{\alpha_s}{1-\alpha_s} \end{bmatrix} \right)$$

와 같다. 따라서 수렴하는 분포의 분산은

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{1-\alpha_r}{f \circ F^{-1}(\alpha_r)} & 0 \\ 0 & \frac{1-\alpha_s}{f \circ F^{-1}(\alpha_s)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\alpha_r}{1-\alpha_r} & \frac{\alpha_r}{1-\alpha_r} \\ \frac{\alpha_r}{1-\alpha_r} & \frac{\alpha_s}{1-\alpha_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1-\alpha_r}{f \circ F^{-1}(\alpha_r)} & 0 \\ 0 & \frac{1-\alpha_s}{f \circ F^{-1}(\alpha_s)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1-\alpha_r}{f \circ F^{-1}(\alpha_r)} & 0 \\ 0 & \frac{1-\alpha_s}{f \circ F^{-1}(\alpha_s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\alpha_r}{1-\alpha_r} \frac{1-\alpha_r}{f \circ F^{-1}(\alpha_r)} & \frac{\alpha_r}{1-\alpha_r} \frac{1-\alpha_s}{f \circ F^{-1}(\alpha_s)} \\ \frac{\alpha_r}{1-\alpha_r} \frac{1-\alpha_r}{f \circ F^{-1}(\alpha_r)} & \frac{\alpha_s}{1-\alpha_s} \frac{1-\alpha_s}{f \circ F^{-1}(\alpha_s)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1-\alpha_r}{f \circ F^{-1}(\alpha_r)} \frac{\alpha_r}{1-\alpha_r} \frac{1-\alpha_r}{f \circ F^{-1}(\alpha_r)} & \frac{1-\alpha_r}{f \circ F^{-1}(\alpha_r)} \frac{\alpha_r}{1-\alpha_r} \frac{1-\alpha_s}{f \circ F^{-1}(\alpha_s)} \\ \frac{1-\alpha_s}{f \circ F^{-1}(\alpha_s)} \frac{\alpha_r}{1-\alpha_r} \frac{1-\alpha_r}{f \circ F^{-1}(\alpha_r)} & \frac{1-\alpha_s}{f \circ F^{-1}(\alpha_s)} \frac{\alpha_s}{1-\alpha_s} \frac{1-\alpha_s}{f \circ F^{-1}(\alpha_s)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{(1-\alpha_r)\alpha_r}{(f \circ F^{-1}(\alpha_r))^2} & \frac{\alpha_r(1-\alpha_s)}{f \circ F^{-1}(\alpha_r) \times f \circ F^{-1}(\alpha_s)} \\ \frac{\alpha_r(1-\alpha_s)}{f \circ F^{-1}(\alpha_r) \times f \circ F^{-1}(\alpha_s)} & \frac{(1-\alpha_s)\alpha_s}{(f \circ F^{-1}(\alpha_s))^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- 결론적으로 아래와 같이 주장할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \sqrt{n} \times \left( \begin{bmatrix} X_{(r)} \\ X_{(s)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ? \\ ? \end{bmatrix} \right) \\ & \xrightarrow{d} N \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{(1-\alpha_r)\alpha_r}{(f \circ F^{-1}(\alpha_r))^2} & \frac{\alpha_r(1-\alpha_s)}{f \circ F^{-1}(\alpha_r) \times f \circ F^{-1}(\alpha_s)} \\ \frac{\alpha_r(1-\alpha_s)}{f \circ F^{-1}(\alpha_r) \times f \circ F^{-1}(\alpha_s)} & \frac{(1-\alpha_s)\alpha_s}{(f \circ F^{-1}(\alpha_s))^2} \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

여기에서

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} ? \\ ? \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} h(EY_{(r)}) \\ h(EY_{(s)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(-\log(1-\alpha_r)) \\ h(-\log(1-\alpha_s)) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F^{-1} \circ (1 - e^{\log(1-\alpha_r)}) \\ F^{-1} \circ (1 - e^{\log(1-\alpha_r)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^{-1}(\alpha_r) \\ F^{-1}(\alpha_s) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} & \sqrt{n} \times \left( \begin{bmatrix} X_{(r)} \\ X_{(s)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F^{-1}(\alpha_r) \\ F^{-1}(\alpha_s) \end{bmatrix} \right) \\ & \xrightarrow{d} N \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{(1-\alpha_r)\alpha_r}{(f \circ F^{-1}(\alpha_r))^2} & \frac{\alpha_r(1-\alpha_s)}{f \circ F^{-1}(\alpha_r) \times f \circ F^{-1}(\alpha_s)} \\ \frac{\alpha_r(1-\alpha_s)}{f \circ F^{-1}(\alpha_r) \times f \circ F^{-1}(\alpha_s)} & \frac{(1-\alpha_s)\alpha_s}{(f \circ F^{-1}(\alpha_s))^2} \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

- 마지날을 구해보자.

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(X_{(r)} - F^{-1}(\alpha_r)) & \xrightarrow{d} N \left( 0, \frac{(1-\alpha_r)\alpha_r}{(f \circ F^{-1}(\alpha_r))^2} \right) \\ \sqrt{n}(X_{(s)} - F^{-1}(\alpha_s)) & \xrightarrow{d} N \left( 0, \frac{(1-\alpha_s)\alpha_s}{(f \circ F^{-1}(\alpha_s))^2} \right) \end{aligned}$$

**note:** 참고로  $F^{-1}(\alpha_r)$ 는  $\alpha_r$ -percentile의 정의가 된다. 그리고  $X_{(r)}$ 는 sample  $\alpha_r$ -percentile 이라 볼 수 있다.

**note:** 따라서 위의 식을 관찰하면 표본백분위수는 백분위수로 확률수렴함을 알 수 있다.

**note:** 추가적으로 표본 백분위수의 분포도 알 수 있다.

**note:** 또한 아래와 같이 범위(백분위수간의 차이)의 분포도 알 수 있다.

- $R = X_{(s)} - X_{(r)}$ 의 분포를 구해보자. 정규분포의 차는 다시 정규분포를 따르므로

$$\sqrt{n}(R - \mu) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$$

여기에서

$$\mu = F^{-1}(\alpha_s) - F^{-1}(\alpha_r)$$

$$\sigma^2 = \frac{(1-\alpha_s)\alpha_s}{(f \circ F^{-1}(\alpha_s))^2} + \frac{(1-\alpha_r)\alpha_r}{(f \circ F^{-1}(\alpha_r))^2} + 2 \frac{\alpha_r(1-\alpha_s)}{f \circ F^{-1}(\alpha_r) \times f \circ F^{-1}(\alpha_s)}$$

- 위의식에서  $\alpha_r = \frac{1}{4}$ ,  $\alpha_s = \frac{3}{4}$ 를 대입하면

$$\mu = F^{-1}(3/4) - F^{-1}(1/4)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{(1-3/4)3/4}{(f \circ F^{-1}(3/4))^2} + \frac{(1-1/4)1/4}{(f \circ F^{-1}(1/4))^2} + 2 \frac{1/4(1-3/4)}{f \circ F^{-1}(1/4) \times f \circ F^{-1}(3/4)} \\ &= \frac{1}{16} \left( \frac{3}{(f \circ F^{-1}(3/4))^2} + \frac{3}{(f \circ F^{-1}(1/4))^2} + \frac{2}{f \circ F^{-1}(1/4) \times f \circ F^{-1}(3/4)} \right) \end{aligned}$$