연습문제 5.12.

- $X_1 \dots X_n \sim Poi(\lambda)$.
- $\sqrt{n}\big(g(\bar{X}) - g(\lambda)\big) \overset{d}{\to} Z, \quad Z \sim N(0,1)$ 을 만족하는 변환 g를 구하라.

- CLT를 쓰면

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda) \overset{d}{\to} N(0,\lambda)$$

- $g(\cdot)$이 미분가능한 함수라고 하자.
- $g(\cdot)$는 미분가능한 어떠한 형태도 가능하다. 예를들어 아래와 같은 형태들이 가능하다고 하자.

$$g(x) = x^2$$

혹은

$$g(x) = 2\sqrt{x}$$

- 예를들어서 $g(x) = 2\sqrt{x}$와 같은 형태라고 하자. 그렇다면 $x = a$에서 $g(x)$를 테일러 전개하면 아래와 같이 표현가능하다.

$$g(x) = g(a) + (x-a)g'(a) + (x-a)^2 O(1)$$

- x대신에 $\bar{X}_n$ a대신에 λ를 대입하면

$$g(\bar{X}_n) = g(\lambda) + (\bar{X}_n - \lambda)g'(\lambda) + (\bar{X}_n - \lambda)^2 O(1).$$

양변에 $\sqrt{n}$을 곱하고 정리하면

$$\sqrt{n}\big(g(\bar{X}_n) - g(\lambda)\big) = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda)g'(\lambda) + \sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda)^2 O(1).$$

그런데 $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda)^2 O(1) = O_p(1)o_p(1)O(1) = o_p(1)$ 이므로

$$\sqrt{n}\big(g(\bar{X}_n) - g(\lambda)\big) = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda)g'(\lambda) + o_p(1)$$

그런데 $g(x) = 2\sqrt{x}$이므로 $g'(x) = 1/\sqrt{x}$이다. 따라서 $g'(\lambda) = 1/\sqrt{\lambda}$.

- 정리하면

$$\sqrt{n}\big(g(\bar{X}_n) - g(\lambda)\big) = \sqrt{n}(\bar{X} - \lambda)1/\sqrt{\lambda} + o_p(1)$$

CLT의 결과를 쓰면

$$\sqrt{n}\big(g(\bar{X}_n) - g(\lambda)\big) \overset{d}{\to} N(0,\lambda)1/\sqrt{\lambda}$$

따라서

$$\sqrt{n}\big(g(\bar{X}_n) - g(\lambda)\big) \overset{d}{\to} N(0,1)$$

(결론) 만약에 $g(x) = 2\sqrt{x}$로 설정한다면

$$\sqrt{n}\big(g(\bar{X}) - g(\lambda)\big)$$

의 극한이 표준정규분포로 수렴하므로 문제에서 원하는 답을 구할 수 있다.

- 이는 바꾸어 말하면 포아송분포에 한정하여 (1) 관측한 확률변수에서 제곱근을 취한뒤 2배를 하고 (2) 그상태에서 CLT를 쓴다면 표준정규분포로 수렴한다는 것이다.
- 이 경우 그냥 포아송분포자체에서 CLT를 쓰는것보다 이득되는 경우가 있다. (일단 이렇게만 알아둘것)

- 그렇다면 어떻게 $g(x) = 2\sqrt{x}$임을 알 수 있을까?
- g가 미분가능하다면

$$g(x) \approx g(a) + (x-a)g'(a)$$

이고 다시 정리하면

$$\sqrt{n}\big(g(\bar{X}_n) - g(\lambda)\big) \approx \sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda)g'(\lambda)$$

따라서

$$\sqrt{n}\big(g(\bar{X}_n) - g(\lambda)\big) \overset{d}{\to} N(0,\lambda)g'(\lambda)$$

이고 정규분포의 특성에 따라서

$$\sqrt{n}\big(g(\bar{X}_n) - g(\lambda)\big) \overset{d}{\to} N\big(0, \lambda(g'(\lambda))^2\big)$$

이다. 따라서

$$\lambda(g'(\lambda))^2 = 1$$

이어야 할 조건은

$$g'(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

일 조건이다. 즉 $g(x)$의 형태는 모르겠지만 $g'(x)$는 아래와 같아야 함을 알 수 있다.

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

이러부터 $g(x)$를 유추하면

$$g(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}.$$

- 이제 λ의 점근적인 신뢰구간을 구해보자. 아래의 식을 관찰하자.

$$2\sqrt{n}\big(\sqrt{\bar{X}_n} - \sqrt{\lambda}\big) \overset{d}{\to} N(0,1)$$

이때 $2\sqrt{n}\big(\sqrt{\bar{X}_n} - \sqrt{\lambda}\big)$자체를 하나의 통계량 Y_n으로 본다면

$$Y_n \overset{d}{\to} N(0,1)$$

Y_n이 정규분포를 따른다면 아래가 성립한다.

$$P\big(-Z_{\alpha/2} < Y_n < Z_{\alpha/2}\big) = 1-\alpha$$

Y_n이 정규분포는 아니지만 점근적으로 정규분포를 따른다면 아래가 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty} P\big(-Z_{\alpha/2} < Y_n < Z_{\alpha/2}\big) = 1-\alpha$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty} P\left(-Z_{\alpha/2} < 2\sqrt{n}(\sqrt{\bar{X}_n} - \sqrt{\lambda}) < Z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

이는
$$\lim_{n\to\infty} P\left(-Z_{\alpha/2} < 2\sqrt{n}(\sqrt{\lambda}-\sqrt{\bar{X}_n}) < Z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$
정리하면
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{-Z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}}+\sqrt{\bar{X}_n} < \sqrt{\lambda} < \frac{Z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}}+\sqrt{\bar{X}_n}\right) = 1-\alpha$$
따라서
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left(\frac{-Z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}}+\sqrt{\bar{X}_n}\right)^2 < \lambda < \left(\frac{Z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}}+\sqrt{\bar{X}_n}\right)^2\right) = 1-\alpha$$
이 성립한다.

- 위의 식이 의미하는것은 λ가 구간
$$\left(\left(\frac{-Z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}}+\sqrt{\bar{X}_n}\right)^2, \left(\frac{Z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}}+\sqrt{\bar{X}_n}\right)^2\right)$$
에 포함될 확률이 점근적으로 $1-\alpha$에 수렴한다는 뜻이다. 이는 바꾸어 말하면 매우 큰 n에 대하여 $1-\alpha$의 확률로 모수가 위의 구간에 있음을 확신할 수 있다는 의미이다. 이를 $1-\alpha$의 점근적 신뢰구간이라고 부른다.

- 예를들어 λ의 점근적인 95퍼센트 신뢰구간은 아래와 같이 구할 수 있다.
$$\left(\left(\frac{-1.96}{2\sqrt{n}}+\sqrt{\bar{X}_n}\right)^2, \left(\frac{1.96}{2\sqrt{n}}+\sqrt{\bar{X}_n}\right)^2\right)$$

연습문제 5.14.

- $\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} \overset{idd}{\sim} F$ with

(1) $EX_1 = EY_1 = 0$,

(2) $EX_1^2 = EY_1^2 = 1$,

(3) $EX_1Y_1 = \rho$,

(4) $EX_1^4 < \infty$, $EY_1^4 < \infty$.

- $\hat{\rho}_n = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i-\bar{Y})^2}}$.

- 아래와 같은 기호를 약속하자.

(1) $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

(2) $\bar{X^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$.

(3) $\overline{XY} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_iY_i$.

(a) $\sqrt{n}\bar{X}\bar{Y} \overset{p}{\to} 0$ 임을 보여라.

(sol)

- $\sqrt{n}\bar{X} = O_p(1)$, $\bar{Y} = o_p(1)$ 이므로 자명함. 여기에서 $\sqrt{n}\bar{X} = O_p(1)$ 는 CLT에 의해서 성립하고 $\bar{Y} = o_p(1)$ 는 큰수의 법칙 즉 WLLN에 의해서 성립한다.

note: 추가적으로 $\bar{X}\bar{Y} - \bar{X}\bar{Y} = \bar{X}\bar{Y} + o_p(\frac{1}{\sqrt{n}})$ 임도 알 수 있다.

(b) 아래가 성립함을 보여라.
$$\sqrt{m_2-m_1^2}-\sqrt{m_2} = \frac{-m_1^2}{\sqrt{m_2-m_1^2}+\sqrt{m_2}}$$
이때 $m_1 = \bar{X}$, $m_2 = \bar{X^2}$ 라고 하자.

(sol) (자명하다)

note: 추가적으로 아래를 확인가능하다.
$$\sqrt{m_2-m_1^2} = \sqrt{m_2} + \frac{-m_1^2}{\sqrt{m_2-m_1^2}+\sqrt{m_2}} = \sqrt{m_2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

(pf)

- $\sqrt{n}m_1^2 = \sqrt{n}m_1m_1 = O_p(1)o_p(1) = o_p(1) \quad \therefore m_1^2 = o_p(\frac{1}{\sqrt{n}})$.

- $m_2 = 1 + o_p(1)$ 이다. 즉 $m_2 \overset{p}{\to} 1$이다. 또한 $m_1^2 = o_p(\frac{1}{\sqrt{n}})$ 이다. 따라서
$$\frac{-m_1^2}{\sqrt{m_2-m_1^2}+\sqrt{m_2}} = o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$
이다. 왜냐하면 분모는 1로 확률수렴하고 (continuous mappting thm) 분자는 $o_p(\frac{1}{\sqrt{n}})$이기 때문.

(c) 아래가 성립함을 보여라.
$$\sqrt{m_2}-1 = \frac{m_2-1}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

(sol)

- 아래식을 관찰하라.
$$\sqrt{m_2}-1 = \frac{m_2-1}{\sqrt{m_2}+1} = \frac{m_2-1}{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{m_2}+1}-\frac{1}{2}\right)(m_2-1)$$

- 이제 아래를 보이면 된다.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{m_2}+1}-\frac{1}{2}\right)(m_2-1):=r_{3n}=o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

따라서 아래를 보이면 된다.

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{m_2}+1}-\frac{1}{2}\right)(m_2-1)=o_p(1)$$

- 그런데 CLT에 의해서 $\sqrt{n}(m_2-1)=O_p(1)$ 가 성립한다.
- continuous mapping thm에 의해서 아래가 성립한다.

$$m_2\xrightarrow{p}1 \quad\Longrightarrow\quad \left(\frac{1}{\sqrt{m_2}+1}-\frac{1}{2}\right)\xrightarrow{p}0$$

- 따라서

$$\left(\frac{1}{\sqrt{m_2}+1}-\frac{1}{2}\right)=o_p(1)$$

- 따라서 증명이 끝난다.

(d) 아래를 보여라.

$$c_1-m_1s_1-\rho\sqrt{m_2-m_1^2}\sqrt{s_2-s_1^2}=c_1-\rho\frac{m_2+s_2}{2}+o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

이때 $c_1=\bar{XY}$, $s_1=\bar{Y}$, $s_2=\bar{Y}^2$이다.

(sol)

- (b)의 결과로부터 아래가 성립한다.

$$\sqrt{m_2-m_1^2}=\sqrt{m_2}+o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

- (c)의 결과로부터 아래가 성립한다.

$$\sqrt{m_2}-1=\frac{m_2-1}{2}+o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

- 둘을 종합하면

$$\sqrt{m_2-m_1^2}=1+\frac{m_2-1}{2}+o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

- 따라서

$$\sqrt{m_2-m_1^2}\sqrt{s_2-s_1^2}$$

는 아래식들의 합이다.

(1) $1+\frac{s_2-1}{2}+o_p(\frac{1}{\sqrt{n}})$

(2) $\frac{m_2-1}{2}\left(1+\frac{s_2-1}{2}+o_p(\frac{1}{\sqrt{n}})\right)=\frac{m_2-1}{2}+O_p(\frac{1}{\sqrt{n}})O_p(\frac{1}{\sqrt{n}})+o_p(\frac{1}{\sqrt{n}})$

note: $O_p(\frac{1}{\sqrt{n}})O_p(\frac{1}{\sqrt{n}})=\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{n}}O_p(1)=\frac{1}{\sqrt{n}}o_p(1)=o_p(\frac{1}{\sqrt{n}})$

(2) 따라서 결국 $\frac{m_2-1}{2}\left(1+\frac{s_2-1}{2}+o_p(\frac{1}{\sqrt{n}})\right)=\frac{m_2-1}{2}+o_p(\frac{1}{\sqrt{n}})$.

(3) $o_p(1/\sqrt{n})\left(1+\frac{s_2-1}{2}+o_p(1/\sqrt{n})\right)=o_p(\frac{1}{\sqrt{n}})$

- 따라서

$$\sqrt{m_2-m_1^2}\sqrt{s_2-s_1^2}=1+\frac{s_2-1}{2}+\frac{m_2-1}{2}+o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

정리하면

$$\sqrt{m_2-m_1^2}\sqrt{s_2-s_1^2}=\frac{s_2+m_2}{2}+o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

- 한편 (a) 로부터

$$m_1s_1=\bar{X}\bar{Y}=o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

- 따라서 증명이 끝난다.

(e) $\sqrt{n}(\hat{\rho}_n-\rho)=\sqrt{n}\bar{W}+o_p(1)$ 임을 보여라. 단

$$W=XY-\frac{\rho(X^2+Y^2)}{2}.$$

(sol)

- $\bar{W}=\bar{XY}-\frac{\rho(\bar{X}^2+\bar{Y}^2)}{2}=c_1-\frac{\rho(m_2+s_2)}{2}$.
- $\sqrt{n}(\hat{\rho}_n-\rho)=\sqrt{n}\times\frac{c_1-m_1s_1-\rho\sqrt{m_2-m_1^2}\sqrt{s_2-s_1^2}}{\sqrt{m_2-m_1^2}\sqrt{s_2-s_1^2}}$
- (d)에 의해서 "분자" $=c_1-\frac{\rho(m_2+s_2)}{2}+o_p(\frac{1}{\sqrt{n}})$
- 분모는 1로 확률수렴한다.
- 따라서

$$\sqrt{n}(\hat{\rho}_n-\rho)=\sqrt{n}\times\frac{c_1-\frac{\rho(m_2+s_2)}{2}+o_p(\frac{1}{\sqrt{n}})}{1+o_p(1)}=\frac{\sqrt{n}\bar{W}+o_p(1)}{1+o_p(1)}=\sqrt{n}\bar{W}+o_p(1)$$

정리 4.4.3

- X가 연속형 확률변수라고 하자. $F(x)$를 X의 *cdf*라고 하자.
- $F(x)$도 분명히 함수이므로 $F(X)$를 정의할 수 있다. $F(X)$는 확률변수가 된다.
- 확률변수이므로 분포를 따른텐데 $F(X)$는 아래의 분포를 따름이 알려져 있다.

$$F(X)\sim U(0,1)$$

- 또한 $F^{-1}(U)$ 역시 확률변수가 된다. (단 $U \sim U(0,1)$.) 그런데 이 확률변수는 $F^{-1}(U)$ 는 X와 분포가 같음이 알려져 있다. 즉

$$F^{-1}(U) \overset{d}{=} X$$

이다.

- $U_1, \dots, U_n \overset{iid}{\sim} U(0,1)$ 라고 하자. 그리고 $U_{(1)}, \dots, U_{(n)}$을 $U_1, \dots, U_n$의 순서통계량이라고 하자. 정리 4.4.3 에 의해서

$$F^{-1}(U_{(1)}) := X_1^* \sim F$$
$$F^{-1}(U_{(2)}) := X_2^* \sim F$$
$$\dots$$
$$F^{-1}(U_{(n)}) := X_n^* \sim F$$

이다.

- F가 순증가 함수이므로 $X_1^* < \dots < X_n^*$이다.

- 아래가 성립한다. (왜??)

$$\begin{pmatrix} X_1^* \\ \dots \\ X_n^* \end{pmatrix} \overset{d}{=} \begin{pmatrix} X_{(1)} \\ \dots \\ X_{(n)} \end{pmatrix}$$

이는 X의 cdf F를 알고 있을 경우 X의 순서통계량을 어떻게 생성할지 알려준다.

정리 4.4.3.

- 어떤분포의 순서통계량: $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} F \implies X_{(1)}, \dots, X_{(r)}$.

- 균등분포의 순서통계량: $U_1, \dots, U_n \overset{iid}{\sim} U(0,1) \implies U_{(1)}, \dots, U_{(n)}$.

- 지수분포의 순서통계량: $Y_1, \dots, Y_n \overset{iid}{\sim} Exp(1) \implies Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)}$.

- 균등분포의 순서통계량과 지수분포의 순서통계량에는 아래와 같은 관계가 있다. (예제 4.3.4.)

$$U_{(r)} \overset{d}{=} 1 - e^{-Y_{(r)}}, \quad r = 1, 2, \dots, n$$

- 그런데 임의의 $r = 1, 2, \dots, n$에 대하여 지수분포의 순서통계량 $Y_{(r)}$은 아래를 만족한다. (예제 4.3.3.)

$$\forall r, \ \exists Z_1, \dots, Z_r \overset{iid}{\sim} Exp(1) \ s.t. \quad Y_{(r)} \overset{d}{=} \frac{1}{n}Z_1 + \dots + \frac{1}{n-r+1}Z_r$$

- 순서통계량 $X_{(r)}$은 아래와 같이 얻을 수 있다.

$$X_{(r)} \overset{d}{=} F^{-1}(U_{(r)})$$

- 그런데 (1) $U_{(r)} \overset{d}{=} 1 - e^{-Y_{(r)}}$ 와 (2) $Y_{(r)} \overset{d}{=} \frac{1}{n}Z_1 + \dots + \frac{1}{n-r+1}Z_r$을 이용하면

$$X_{(r)} \overset{d}{=} F^{-1}\left(1 - e^{-(\frac{1}{n}Z_1 + \dots + \frac{1}{n-r+1}Z_r)}\right)$$

따라서 $h(\bigstar) = F^{-1}\big(1 - e^{-\bigstar}\big)$라고 정의하면

$$X_{(r)} \overset{d}{=} h\left(\frac{1}{n}Z_1 + \dots + \frac{1}{n-r+1}Z_r\right)$$

가 성립한다.

연습문제 5.16.

- $r_n \sim \alpha n \Longleftrightarrow r_n/n \to \alpha$.

- $s_n \sim \beta n \Longleftrightarrow r_n/n \to \beta$.

note: 위의정의는 예제 5.2.7 에 나와있다.

- 그리고 $0 < \alpha < \beta < 1$.

- 편의상 아래를 가정하자.

(1) r_n을 그냥 r로 쓰자. 여기에서 r은 n개의 sample 중 하위25%에 번째에 해당하는 수 이다. 즉 $r/n \approx 1/4$. 동일한 논리로 s_n도 그냥 s라고 쓰자.

(2) $r/n \to \frac{1}{4}$ and $s/n \to \frac{3}{4}$.

(3) α, β를 그냥 α_r, α_s로 정의하자. 이는 분위수의 느낌을 좀더 강조하기 위해서이다. α_r은 r에 해당하는 분위수라는 뜻임.

- $X_{(r)}$과 $X_{(s)}$의 join pdf를 구하라.

(sol)

- 우선 순서통계량 문제이므로 아래와 같은 확률변수를 가정하자.

$$Y_1, \dots, Y_n \overset{iid}{\sim} Exp(1).$$

- 아래와 같은 벡터를 가정하자.

$$\begin{bmatrix} Y_{(r)} \\ Y_{(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n}Z_1 + \dots + \frac{1}{n-r+1}Z_r \\ \frac{1}{n}Z_1 + \dots + \frac{1}{n-s+1}Z_s \end{bmatrix}$$

- 전체적인 그림.

$Y_{(r)}$과 $Y_{(s)}$번째 순서통계량의 분포

$\Longrightarrow X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} F$ 인 임의의 분포에서 $X_{(r)}$과 $X_{(s)}$의 분포

- 아래가 성립한다. (예제 5.2.7)

$$E(Y_{(r)}) = E\left(\frac{1}{n}Z_1 + \dots + \frac{1}{n-r+1}Z_r\right) = \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n-r+1}$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{r-1}\frac{1}{1-k/n} \approx \int_0^{\alpha_r}\frac{1}{1-x}dx = -\log(1-\alpha_r)$$

- 아래도 성립한다. (예제 5.2.7)

$$V(Y_{(r)})=V\left(\frac{1}{n}Z_1+\cdots+\frac{1}{n-r+1}Z_r\right)=\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{(n-r+1)^2}$$
$$=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{r-1}\frac{1}{(1-k/n)^2}\approx\int_0^{\alpha_r}\frac{1}{(1-x)^2}dx=\frac{1}{n}\frac{\alpha_r}{1-\alpha_r}$$

- 따라서

$$\sqrt{n}\left(\begin{bmatrix}Y_{(r)}\\Y_{(s)}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-\log(1-\alpha_r)\\-\log(1-\alpha_s)\end{bmatrix}\right)\xrightarrow{d}N\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{\alpha_r}{1-\alpha_r}&\frac{\alpha_r}{1-\alpha_r}\\\frac{\alpha_r}{1-\alpha_r}&\frac{\alpha_s}{1-\alpha_s}\end{bmatrix}\right).$$

- 그런데

$$\begin{bmatrix}X_{(r)}\\X_{(s)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}h(Y_{(r)})\\h(Y_{(s)})\end{bmatrix}=\boldsymbol{h}\left(\begin{bmatrix}Y_{(r)}\\Y_{(s)}\end{bmatrix}\right)$$

- 따라서

$$\sqrt{n}\times\left(\begin{bmatrix}X_{(r)}\\X_{(s)}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}?\\?\end{bmatrix}\right)$$
$$=\sqrt{n}\times\left(\boldsymbol{h}\left(\begin{bmatrix}Y_{(r)}\\Y_{(s)}\end{bmatrix}\right)-\boldsymbol{h}\left(\begin{bmatrix}-\log(1-\alpha_r)\\-\log(1-\alpha_s)\end{bmatrix}\right)\right)$$
$$=\sqrt{n}\times\left(\begin{bmatrix}h(Y_{(r)})\\h(Y_{(s)})\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}h(-\log(1-\alpha_r))\\h(-\log(1-\alpha_s))\end{bmatrix}\right)$$
$$\xrightarrow{d}\begin{bmatrix}??&??\\??&??\end{bmatrix}^T N\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{\alpha_r}{1-\alpha_r}&\frac{\alpha_r}{1-\alpha_r}\\\frac{\alpha_r}{1-\alpha_r}&\frac{\alpha_s}{1-\alpha_s}\end{bmatrix}\right)$$

note: 여기에서 $\boldsymbol{h}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 이므로 $\begin{bmatrix}??&??\\??&??\end{bmatrix}$와 같이 2×2매트릭스가 나왔다.

note: 만약에 $\boldsymbol{h}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$이었다면 즉 $h(x_1,x_2)=(y_1,y_2,y_3)$ 꼴이었다면

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\\frac{\partial}{\partial x_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1&y_2&y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial y_1}&\frac{\partial y_2}{\partial x_1}&\frac{\partial y_3}{\partial x_1}\\\frac{\partial y_1}{\partial x_2}&\frac{\partial y_2}{\partial x_2}&\frac{\partial y_3}{\partial x_2}\end{bmatrix}$$

일것이다.

- 잠시 시간을 투자하여 $\begin{bmatrix}??&??\\??&??\end{bmatrix}$를 계산하자.

$$\begin{bmatrix}??&??\\??&??\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial h(x_1)}{\partial x_1}&\frac{\partial h(x_2)}{\partial x_1}\\\frac{\partial h(x_1)}{\partial x_2}&\frac{\partial h(x_2)}{\partial x_2}\end{bmatrix}$$

이다. 그런데

$$h(x_1)=F^{-1}(1-e^{-x_1})$$

이므로

$$F\big(h(x_1)\big)=1-e^{-x_1}$$

그러므로

$$\frac{\partial}{\partial x_1}F(h(x_1))=e^{-x_1}$$

따라서

$$f(h(x_1))\frac{\partial h(x_1)}{\partial x_1}=e^{-x_1}\Longleftrightarrow\frac{\partial h(x_1)}{\partial x_1}=\frac{e^{-x_1}}{f(h(x_1))}$$

x_1대신에 $-\log(1-\alpha_r)$를 대입하자.

$$e^{-x_1}=e^{\log(1-\alpha_r)}=1-\alpha_r$$
$$f(h(x_1))=f(h(-\log(1-\alpha_r)))=f\big(F^{-1}(1-e^{\log(1-\alpha_r)})\big)=f\circ F^{-1}(\alpha_r)$$

따라서

$$\begin{bmatrix}??&??\\??&??\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1-\alpha_r}{f\circ F^{-1}(\alpha_r)}&0\\0&\frac{1-\alpha_s}{f\circ F^{-1}(\alpha_s)}\end{bmatrix}$$

- 따라서 수렴하는 분포는

$$\begin{bmatrix}\frac{1-\alpha_r}{f\circ F^{-1}(\alpha_r)}&0\\0&\frac{1-\alpha_s}{f\circ F^{-1}(\alpha_s)}\end{bmatrix}^T N\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{\alpha_r}{1-\alpha_r}&\frac{\alpha_r}{1-\alpha_r}\\\frac{\alpha_r}{1-\alpha_r}&\frac{\alpha_s}{1-\alpha_s}\end{bmatrix}\right)$$

와 같다. 따라서 수렴하는 분포의 분산은

$$\begin{bmatrix}\frac{1-\alpha_r}{f\circ F^{-1}(\alpha_r)}&0\\0&\frac{1-\alpha_s}{f\circ F^{-1}(\alpha_s)}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\frac{\alpha_r}{1-\alpha_r}&\frac{\alpha_r}{1-\alpha_r}\\\frac{\alpha_r}{1-\alpha_r}&\frac{\alpha_s}{1-\alpha_s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1-\alpha_r}{f\circ F^{-1}(\alpha_r)}&0\\0&\frac{1-\alpha_s}{f\circ F^{-1}(\alpha_s)}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\frac{1-\alpha_r}{f\circ F^{-1}(\alpha_r)}&0\\0&\frac{1-\alpha_s}{f\circ F^{-1}(\alpha_s)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\alpha_r}{1-\alpha_r}\frac{1-\alpha_r}{f\circ F^{-1}(\alpha_r)}&\frac{\alpha_r}{1-\alpha_r}\frac{1-\alpha_s}{f\circ F^{-1}(\alpha_s)}\\\frac{\alpha_r}{1-\alpha_r}\frac{1-\alpha_r}{f\circ F^{-1}(\alpha_r)}&\frac{\alpha_s}{1-\alpha_s}\frac{1-\alpha_s}{f\circ F^{-1}(\alpha_s)}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\frac{1-\alpha_r}{f\circ F^{-1}(\alpha_r)}\frac{\alpha_r}{1-\alpha_r}\frac{1-\alpha_r}{f\circ F^{-1}(\alpha_r)}&\frac{1-\alpha_r}{f\circ F^{-1}(\alpha_r)}\frac{\alpha_r}{1-\alpha_r}\frac{1-\alpha_s}{f\circ F^{-1}(\alpha_s)}\\\frac{1-\alpha_s}{f\circ F^{-1}(\alpha_s)}\frac{\alpha_r}{1-\alpha_r}\frac{1-\alpha_r}{f\circ F^{-1}(\alpha_r)}&\frac{1-\alpha_s}{f\circ F^{-1}(\alpha_s)}\frac{\alpha_s}{1-\alpha_s}\frac{1-\alpha_s}{f\circ F^{-1}(\alpha_s)}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\frac{(1-\alpha_r)\alpha_r}{(f\circ F^{-1}(\alpha_r))^2}&\frac{\alpha_r(1-\alpha_s)}{f\circ F^{-1}(\alpha_r)\times f\circ F^{-1}(\alpha_s)}\\\frac{\alpha_r(1-\alpha_s)}{f\circ F^{-1}(\alpha_r)\times f\circ F^{-1}(\alpha_s)}&\frac{(1-\alpha_s)\alpha_s}{(f\circ F^{-1}(\alpha_s))^2}\end{bmatrix}$$

- 결론적으로 아래와 같이 주장할 수 있다.

$$\sqrt{n}\times\left(\begin{bmatrix}X_{(r)}\\X_{(s)}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}?\\?\end{bmatrix}\right)\xrightarrow{d}N\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{(1-\alpha_r)\alpha_r}{(f\circ F^{-1}(\alpha_r))^2}&\frac{\alpha_r(1-\alpha_s)}{f\circ F^{-1}(\alpha_r)\times f\circ F^{-1}(\alpha_s)}\\\frac{\alpha_r(1-\alpha_s)}{f\circ F^{-1}(\alpha_r)\times f\circ F^{-1}(\alpha_s)}&\frac{(1-\alpha_s)\alpha_s}{(f\circ F^{-1}(\alpha_s))^2}\end{bmatrix}\right)$$

따라서

$$\sqrt{n}\times\begin{bmatrix}X_{(r)}\\X_{(s)}\end{bmatrix}\xrightarrow{d}N\left(\begin{bmatrix}?\\?\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{(1-\alpha_r)\alpha_r}{(f\circ F^{-1}(\alpha_r))^2}&\frac{\alpha_r(1-\alpha_s)}{f\circ F^{-1}(\alpha_r)\times f\circ F^{-1}(\alpha_s)}\\\frac{\alpha_r(1-\alpha_s)}{f\circ F^{-1}(\alpha_r)\times f\circ F^{-1}(\alpha_s)}&\frac{(1-\alpha_s)\alpha_s}{(f\circ F^{-1}(\alpha_s))^2}\end{bmatrix}\right)$$

여기에서

$$\begin{bmatrix}?\\?\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}h(EY_{(r)})\\h(EY_{(s)})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}h(-\log(1-\alpha_r))\\h(-\log(1-\alpha_s))\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}F^{-1}\circ\big(1-e^{\log(1-\alpha_r)}\big)\\F^{-1}\circ\big(1-e^{\log(1-\alpha_r)}\big)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F^{-1}(\alpha_r)\\F^{-1}(\alpha_s)\end{bmatrix}$$

따라서

$$\sqrt{n}\times\begin{bmatrix}X_{(r)}\\X_{(s)}\end{bmatrix}\xrightarrow{d}N\left(\begin{bmatrix}F^{-1}(\alpha_r)\\F^{-1}(\alpha_s)\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{(1-\alpha_r)\alpha_r}{(f\circ F^{-1}(\alpha_r))^2}&\frac{\alpha_r(1-\alpha_s)}{f\circ F^{-1}(\alpha_r)\times f\circ F^{-1}(\alpha_s)}\\\frac{\alpha_r(1-\alpha_s)}{f\circ F^{-1}(\alpha_r)\times f\circ F^{-1}(\alpha_s)}&\frac{(1-\alpha_s)\alpha_s}{(f\circ F^{-1}(\alpha_s))^2}\end{bmatrix}\right)$$

- 마지날을 구해보자.

$$\sqrt{n}X_{(r)} \xrightarrow{d} N\left(F^{-1}(\alpha_r), \frac{(1-\alpha_r)\alpha_r}{(f\circ F^{-1}(\alpha_r))^2}\right)$$

$$\sqrt{n}X_{(s)} \xrightarrow{d} N\left(F^{-1}(\alpha_s), \frac{(1-\alpha_s)\alpha_s}{(f\circ F^{-1}(\alpha_s))^2}\right)$$

- $X_{(s)} - X_{(r)}$의 분포를 구해보자. 정규분포의 차는 다시 정규분포를 따르므로

$$\sqrt{n}(X_{(s)} - X_{(r)}) \xrightarrow{d} N(E, V)$$

여기에서

$$E = F^{-1}(\alpha_s) - F^{-1}(\alpha_r)$$

$$V = \frac{(1-\alpha_s)\alpha_s}{(f\circ F^{-1}(\alpha_s))^2} + \frac{(1-\alpha_r)\alpha_r}{(f\circ F^{-1}(\alpha_r))^2} + 2\frac{\alpha_r(1-\alpha_s)}{f\circ F^{-1}(\alpha_r)\times f\circ F^{-1}(\alpha_s)}$$

- 위의식에서 $\alpha_r = \frac{1}{4}$, $\alpha_s = \frac{3}{4}$를 대입하면

$$E = F^{-1}(3/4) - F^{-1}(1/4)$$

$$V = \frac{(1-3/4)3/4}{(f\circ F^{-1}(3/4))^2} + \frac{(1-1/4)1/4}{(f\circ F^{-1}(1/4))^2} + 2\frac{1/4(1-3/4)}{f\circ F^{-1}(1/4)\times f\circ F^{-1}(3/4)}$$

$$= \frac{1}{16}\left(\frac{3}{(f\circ F^{-1}(3/4))^2} + \frac{3}{(f\circ F^{-1}(1/4))^2} + \frac{2}{f\circ F^{-1}(1/4)\times f\circ F^{-1}(3/4)}\right)$$