Big-O_p, little-o_p 와 Delta-method 활용예제.

- 이번에는 Big-O_p, little-o_p 와 Delta-method를 활용한 예제를 살펴보겠다.

- 김우철 수리통계학 교재의 연습문제를 참고함.

연습문제 5.14.

- $\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} \overset{idd}{\sim} F$ with

(1) $EX_1 = EY_1 = 0$,

(2) $EX_1^2 = EY_1^2 = 1$,

(3) $EX_1Y_1 = \rho$,

(4) $EX_1^4 < \infty$, $EY_1^4 < \infty$.

- $\hat{\rho}_n = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}$.

- 아래와 같은 기호를 약속하자.

(1) $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

(2) $\bar{X^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$.

(3) $\overline{XY} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_iY_i$.

(a) $\sqrt{n}\bar{X}\bar{Y} \xrightarrow{p} 0$ 임을 보여라.

(sol)

- $\sqrt{n}\bar{X} = O_p(1)$, $\bar{Y} = o_p(1)$ 이므로 자명함. 여기에서 $\sqrt{n}\bar{X} = O_p(1)$ 는 CLT에 의해서 성립하고 $\bar{Y} = o_p(1)$ 는 큰수의 법칙 즉 WLLN에 의해서 성립한다.

note: 추가적으로 $\bar{XY} - \bar{X}\bar{Y} = \bar{XY} + o_p(\frac{1}{\sqrt{n}})$ 임도 알 수 있다.

(b) 아래가 성립함을 보여라.

$$\sqrt{m_2 - m_1^2} - \sqrt{m_2} = \frac{-m_1^2}{\sqrt{m_2 - m_1^2} + \sqrt{m_2}}$$

이때 $m_1 = \bar{X}$, $m_2 = \bar{X^2}$ 라고 하자.

(sol) (자명하다)

note: 추가적으로 아래를 확인가능하다.

$$\sqrt{m_2 - m_1^2} = \sqrt{m_2} + \frac{-m_1^2}{\sqrt{m_2 - m_1^2} + \sqrt{m_2}} = \sqrt{m_2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

(pf)

- $\sqrt{n}m_1^2 = \sqrt{n}m_1m_1 = O_p(1)o_p(1) = o_p(1) \quad \therefore m_1^2 = o_p(\frac{1}{\sqrt{n}})$.

- $m_2 = 1 + o_p(1)$ 이다. 즉 $m_2 \xrightarrow{p} 1$이다. 또한 $m_1^2 = o_p(\frac{1}{\sqrt{n}})$ 이다. 따라서

$$\frac{-m_1^2}{\sqrt{m_2 - m_1^2} + \sqrt{m_2}} = o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

이다. 왜냐하면 분모는 1로 확률수렴하고 (continuous mappting thm) 분자는 $o_p(\frac{1}{\sqrt{n}})$이기 때문.

(c) 아래가 성립함을 보여라.

$$\sqrt{m_2} - 1 = \frac{m_2 - 1}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

(sol)

- 아래식을 관찰하라.

$$\sqrt{m_2} - 1 = \frac{m_2 - 1}{\sqrt{m_2} + 1} = \frac{m_2 - 1}{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{m_2} + 1} - \frac{1}{2}\right)(m_2 - 1)$$

- 이제 아래를 보이면 된다.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{m_2} + 1} - \frac{1}{2}\right)(m_2 - 1) := r_{3n} = o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

따라서 아래를 보이면 된다.

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{m_2} + 1} - \frac{1}{2}\right)(m_2 - 1) = o_p(1)$$

- 그런데 CLT에 의해서 $\sqrt{n}(m_2 - 1) = O_p(1)$ 가 성립한다.

- continuous mapping thm에 의해서 아래가 성립한다.

$$m_2 \xrightarrow{p} 1 \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{1}{\sqrt{m_2} + 1} - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{p} 0$$

- 따라서

$$\left(\frac{1}{\sqrt{m_2} + 1} - \frac{1}{2}\right) = o_p(1)$$

- 따라서 증명이 끝난다.

(d) 아래를 보여라.

$$c_1 - m_1s_1 - \rho\sqrt{m_2 - m_1^2}\sqrt{s_2 - s_1^2} = c_1 - \rho\frac{m_2 + s_2}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

이때 $c_1 = \bar{XY}$, $s_1 = \bar{Y}$, $s_2 = \bar{Y^2}$이다.

(sol)

- (b)의 결과로부터 아래가 성립한다.

$$\sqrt{m_2 - m_1^2} = \sqrt{m_2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

- (c)의 결과로부터 아래가 성립한다.

$$\sqrt{m_2} - 1 = \frac{m_2 - 1}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

- 둘을 종합하면

$$\sqrt{m_2 - m_1^2} = 1 + \frac{m_2 - 1}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

- 따라서
$$\sqrt{m_2 - m_1^2}\sqrt{s_2 - s_1^2}$$
는 아래식들의 합이다.

(1) $1 + \frac{s_2-1}{2} + o_p(\frac{1}{\sqrt{n}})$

(2) $\frac{m_2-1}{2}\left(1 + \frac{s_2-1}{2} + o_p(\frac{1}{\sqrt{n}})\right) = \frac{m_2-1}{2} + O_p(\frac{1}{\sqrt{n}})O_p(\frac{1}{\sqrt{n}}) + o_p(\frac{1}{\sqrt{n}})$

note: $O_p(\frac{1}{\sqrt{n}})O_p(\frac{1}{\sqrt{n}}) = \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{n}}O_p(1) = \frac{1}{\sqrt{n}}o_p(1) = o_p(\frac{1}{\sqrt{n}})$

(2) 따라서 결국 $\frac{m_2-1}{2}\left(1 + \frac{s_2-1}{2} + o_p(\frac{1}{\sqrt{n}})\right) = \frac{m_2-1}{2} + o_p(\frac{1}{\sqrt{n}})$.

(3) $o_p(1/\sqrt{n})\left(1 + \frac{s_2-1}{2} + o_p(1/\sqrt{n})\right) = o_p(\frac{1}{\sqrt{n}})$

- 따라서
$$\sqrt{m_2 - m_1^2}\sqrt{s_2 - s_1^2} = 1 + \frac{s_2 - 1}{2} + \frac{m_2 - 1}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$
정리하면
$$\sqrt{m_2 - m_1^2}\sqrt{s_2 - s_1^2} = \frac{s_2 + m_2}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

- 한편 (a) 로부터
$$m_1 s_1 = \bar{X}\bar{Y} = o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

- 따라서 증명이 끝난다.

(e) $\sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \rho) = \sqrt{n}\bar{W} + o_p(1)$ 임을 보여라. 단
$$W = XY - \frac{\rho(X^2 + Y^2)}{2}.$$

(sol)

- $\bar{W} = \bar{XY} - \frac{\rho(\bar{X^2}+\bar{Y^2})}{2} = c_1 - \frac{\rho(m_2+s_2)}{2}$.

- $\sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \rho) = \sqrt{n} \times \frac{c_1 - m_1 s_1 - \rho\sqrt{m_2 - m_1^2}\sqrt{s_2 - s_1^2}}{\sqrt{m_2 - m_1^2}\sqrt{s_2 - s_1^2}}$

- (d)에 의해서 "분자" $= c_1 - \frac{\rho(m_2+s_2)}{2} + o_p(\frac{1}{\sqrt{n}})$

- 분모는 1로 확률수렴한다.

- 따라서
$$\sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \rho) = \sqrt{n} \times \frac{c_1 - \frac{\rho(m_2+s_2)}{2} + o_p(\frac{1}{\sqrt{n}})}{1 + o_p(1)} = \frac{\sqrt{n}\bar{W} + o_p(1)}{1 + o_p(1)} = \sqrt{n}\bar{W} + o_p(1)$$