
모수과잉

- 조신섭교수님 교재의 연습문제를 풀어보자.

연습문제 8.8.

- 아래와 같은 2개의 시계열 모형을 생각하자.

$$X_t = \phi X_{t-1} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$$

$$Y_t = \eta_t - \theta \eta_{t-1}, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2)$$

- $Z_t = X_t + Y_t$ 는 어떤 모형을 따르는지 밝혀라.

note: 아무래도 $\{X_t\}$ 가 AR(1)을 따르고 $\{Y_t\}$ 가 MA(1)을 따르니까 둘이 합치면 ARMA(1,1)을 따르지 않겠어? 싶지만 그렇지 않다.

- 우선 X_t 는 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$(1 - \phi B)X_t = \epsilon_t$$

- 또한 Y_t 는 아래와 같이 표현가능하다.

$$(1 - \phi B)Y_t = (1 - \phi B)(1 - \theta B)\eta_t$$

- 따라서

$$(1 - \phi B)Z_t = \epsilon_t + (1 - \phi B)(1 - \theta B)\eta_t$$

그런데 $\epsilon_t \stackrel{d}{=} \frac{\sigma_\epsilon}{\sigma_\eta} \eta_t$ 이므로

$$(1 - \phi B)Z_t = \frac{\sigma_\epsilon}{\sigma_\eta} \eta_t + (1 - \phi B)(1 - \theta B)\eta_t$$

우변을 정리하면

$$(1 - \phi B)Z_t = \left(1 + \frac{\sigma_\epsilon}{\sigma_\eta}\right) \eta_t - (\phi + \theta)\eta_{t-1} + \phi\theta\eta_{t-2}$$

따라서 $\left(1 + \frac{\sigma_\epsilon}{\sigma_\eta}\right) \eta_t$ 를 새로운 η_t^* 로 보면 이 모형이 ARMA(1,2)를 따름을 알 수 있다.

연습문제 8.9.

- 두 시계열 $\{X_t\}$ 와 $\{Y_t\}$ 가 각각 아래와 같은 MA(1)모형을 따른다고 하자.

$$X_t = \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1}, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$$

$$Y_t = \eta_t + \theta_1 \eta_{t-1}, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2)$$

- $\epsilon_t^* \sim N(0, 1)$ 라고 하자. 그러면 $\{X_t\}$ 와 $\{Y_t\}$ 는 각각 아래로 표현가능하다.

$$X_t = \sigma_\epsilon \epsilon_t^* - \theta_1 \sigma_\epsilon \epsilon_{t-1}^*$$

$$Y_t = \sigma_\eta \epsilon_t^* + \theta_1 \sigma_\eta \epsilon_{t-1}^*$$

- 두 시계열을 더하면

$$Z_t = (\sigma_\epsilon + \sigma_\eta) \epsilon_t^* + (-\theta_1 \sigma_\epsilon + \theta_1 \sigma_\eta) \epsilon_{t-1}^*$$

여기에서 $(\sigma_\epsilon + \sigma_\eta) \epsilon_t^*$ 를 새로운 오차항 ϵ_t^* 로 해석하면

$$Z_t = \epsilon_t^* + \theta_1^* \epsilon_{t-1}^*$$

처럼 볼수 있고 이때

$$\theta_1^* = \frac{-\theta_1 \sigma_\epsilon + \theta_1 \sigma_\eta}{\sigma_\epsilon + \sigma_\eta}$$

와 같이 된다.

- 따라서 $\{Z_t\}$ 는 기본적으로는 MA모형으로 볼 수 있으나 $\sigma_\epsilon = \sigma_\eta$ 인 경우에는

$$\theta_1^* = 0$$

이 되므로 화이트 노이즈가 된다.