Bibliography

[1] Van der Vaart, A. W. (2000). Asymptotic statistics (Vol. 3). Cambridge university press.

[2] 김우철, 수리통계학.

[3] 김우철, 통계이론1 강의노트.

Chapter 1

$O_p(R_n)$, $O(r_n)$ and $o_p(R_n)$, $o(r_n)$

1.1 Little o

(정의) $\{x_n\}$, $\{r_n\}$은 실수열이라고 하자.

$$x_n = o(r_n) \quad as\ n \to \infty$$
$$\iff x_n/r_n \to 0 \quad as\ n \to \infty$$

note: $x_n = o(1)$의 의미는 $x_n \to 0$의 의미이다.

note: $x_n = o(r_n)$의 의미는 $x_n/r_n \to 0$의 의미이다.

example: $x_n = 1/n$ 이면 $x_n = o(1)$.

example: $x_n = 1/n^2$ 이면 $x_n = o(1/n)$

note: $x_n = 1/n^2$ 일 경우 $x_n = o(1)$, $x_n = o(1/\sqrt{n})$, $x_n = o(1/n\sqrt{n})$도 가능함.

example: $x_n = n^2$이면 $x_n = o(n^3)$.

(느낌) $x_n = o(\bigstar_n)$ 의 표현은 x_n이 $\bigstar_n$ 보다 빠르게 0으로 수렴 (혹은 천천히 ∞ 로 발산) 하기만 하면 된다.

(정의) $f(x)$, $g(x)$는 실변수 함수

$$f(x) = o\big(g(x)\big) \quad as\ x \to a$$
$$\iff f(x)/g(x) \to 0 \quad as\ x \to a$$

(느낌) 함수열의 경우도 동일하게 해석할 수 있다.

$$f(x) = o\big(\bigstar(x)\big) \quad x \to a$$

는 x가 점점 a로 가까워질때 $f(x)$가 $\bigstar(x)$보다 빠르게 0으로 수렴하거나 천천히 ∞로 발산하면 된다.

1.2 Big O

(정의) $\{x_n\}$, $\{r_n\}$은 실수열이라고 하자.

$$x_n = O(r_n) \quad as\ n \to \infty$$
$$\iff \sup_n |x_n/r_n| < \infty$$

example: $x_n = n^2 + 2n + 100$ 이면 $x_n = O(n^2)$.

example: $x_n = n^{-2} + n^{-1} + 1$ 이면 $x_n = O(1)$.

(느낌) 따라서

$$x_n = O(\bigstar_n)$$

$\{x_n\}$의 최고차항이 $\bigstar_n$의 최고차항과 같다는 의미이다.

(정의) $f(x)$, $g(x)$는 실변수함수 라고 하자.

$$f(x) = O\big(g(x)\big) \quad as\ x \to a$$
$$\iff f(x)/g(x) \to 0 \quad as\ x \to a$$

1.3 Little o_p

(정의) $\{X_n\}$, $\{R_n\}$은 확률변수열이라고 하자.

$$X_n = o_p(R_n) \quad as\ n \to \infty$$
$$\iff X_n/R_n \xrightarrow{p} 0 \quad as\ n \to \infty$$

note: $X_n = o_p(R_n)$의 의미는 새로운 확률변수 $Y_n = X_n/R_n$의 수열이 $\{Y_n\}$이 0으로 확률수렴한다는 의미이다.

note: 여기에서 $\{R_n\}$ 은 확률변수열이 아니라 실수열로 생각할 수 있다. (실수는 확률변수의 한 종류이므로)

note: $\{X_n\}$ 과 $\{R_n\}$ 이 모두 실수열이라면 O_p의 정의가 O의 정의와 같아진다.

1.4 Big O_p

(정의) $\{X_n\}$, $\{R_n\}$은 확률변수열이라고 하자.

$$X_n = O_p(R_n) \quad as\ n \to \infty$$
$$\iff \sup_n P\{|X_n/R_n| > M\} \underset{M\to\infty}{\to} 0$$

- 이게 원래 실수버전으로 생각하면 엄청 큰 M에 대해서

$$\sup_n |X_n/R_n| < M < \infty$$

이어야 한다. 그런데 X_n/R_n은 확률변수이므로 위의 부등식이 성립하지 않게 된다. 결국 M을 엄청 크게 잡으면

$$\sup_n |X_n/R_n| > M$$

이 될 확률은 너무 작지않겠냐? 라는 식의 논의를 해야한다. 즉 아래의 느낌이 되어야 한다.

$$\text{for very large } M: \quad P\{\sup_n |X_n/R_n| > M\} \approx 0$$

- 이런 느낌을 살린것이 바로 아래의 statement이다.

$$P\{\sup_n |X_n/R_n| > M\} \underset{M\to\infty}{\to} 0$$

(느낌) 결국 $X_n = O_p(1)$의 의미는

$$\text{for very large } M: \quad P\{\sup_n |X_n| < M\} \approx 1$$

의 의미가 된다. 즉 확률변수 X_n이 어딘가에 bound 되어 있다는 의미가 된다.

(정리) $Y_n \xrightarrow{d} Y$ 이라면 $Y_n = O_p(1)$ 이다.

note: 이 정리는 김우철 수리통계학 [2] 연습문제 5.11, 김우철 통계이론 강의노트 [3] 의 Review C, 그 외 다수에 소개되어 있다.

(정의) (*tightness* of X)

The random variable X is *tight*

$$\overset{def}{\iff} \forall\epsilon > 0 \quad \exists M \quad s.t. \quad P(|X| > M) < \epsilon$$
$$\overset{def}{\iff} P(|X| > M) \to 0 \quad as\ M \to \infty$$
$$\overset{def}{\iff} \mu^\star\big([-M, M]^c\big) \to 0 \quad as\ M \to \infty$$
$$\overset{def}{\iff} \epsilon > 0 \quad \exists M \quad s.t. \quad 1 - F(M) + F(-M) < \epsilon$$

note: $\mu^\star\big([0, M)\big) = F(M) = P(X < M)$

note: $\mu^\star\big([-M, M]^c\big) = 1 - \big(P(X < M) - P(X < -M)\big) = 1 - F(M) + F(-M)$

note: 아무리 ϵ을 작게 잡아도 결국 M을 크게 잡으면 된다.

note: 따라서 대충 $M \approx \infty$ 일때 $P(|X| > M) \approx 0$ 인 느낌이다.

(정리) 모든 확률변수 X는 *tight* 하다.

(정의) (*uniformly tightness* of $\{X_n\}$)

$\{X_n\}$ is *uniformly tight*

$$\overset{def}{\iff} \forall\epsilon > 0 \quad \exists M \quad s.t. \quad \sup_n P(|X_n| > M) < \epsilon$$
$$\overset{def}{\iff} \sup_n P(|X_n| > M) \to 0 \quad as\ M \to \infty$$
$$\overset{def}{\iff} \sup_n \mu_n^\star\big([-M, M]^c\big) \to 0 \quad as\ M \to \infty$$
$$\overset{def}{\iff} \epsilon > 0 \quad \exists M \quad s.t. \quad \limsup_{n\to\infty}\big(1 - F_n(M) + F_n(-M)\big) < \epsilon$$
$$\overset{def}{\iff} X_n = O_p(1) \quad as\ n \to \infty$$

- 결국 확률변수열이 $\{X_n\}$이 *uniformly tight* 하다는 것은 확률적으로 유계라는 말과 같다. ([1] p.8.)

note: 애초에 *uniformly tightness* 는 $\{X_n\}$ 이 *iid* 인 상황에서는 살짝 어색한 개념이다. 왜냐하면 *iid* 인 경우라면 하나의 분포 X_1만 잡아서 확률적으로 유계임을 보이면 되기 때문이다. 즉 *uniformly* 라는 말을 쓸 필요가 없다. 직관적으로 *uniformly*라는 말을 쓴다는 것은 sup을 취한다는 느낌을 받아야 하는데 *iid* 의 경우

$$\sup_n P(|X_n| > M) = P(|X_1 > M)$$

이 되어서 sup이 그냥 날아가버린다.

1.5 Calculus with O_p and o_p

(정리) 아래는 증명없이 받아들이자 [1]. 여기에서 $\{R_n\}$은 (아무런 추가 조건없는) 확률변수열이다.

(1) $O_p(1) + O_p(1) = O_p(1)$.

(2) $o_p(1) + o_p(1) = o_p(1)$.

(3) $o_p(1) + O_p(1) = O_p(1)$.

(4) $O_p(1)O_p(1) = O_p(1)$.

(5) $o_p(1)o_p(1) = o_p(1)$.

(6) $O_p(1)o_p(1) = o_p(1)$.

(7) $\big(1 + o_p(1)\big)^{-1} = O_p(1)$.

(8) $o_p(R_n) = R_n o_p(1)$.

(9) $O_p(R_n) = R_n O_p(1)$.

(10) $o_p\big(O_p(1)\big) = o_p(1)$

note: (2)번 공식, 즉 $o_p(1) + o_p(1) = o_p(1)$ 가 의미하는것은 $X_n \overset{p}{\to} 0$ 이고 $Y_n \overset{p}{\to} 0$ 일때 $Z_n = X_n + Y_n \overset{p}{\to} 0$ 라는 의미이다. 이는 continuous mapping thm 즉 김우철 정리 5.2.3 [2]의 한 형태가 된다.

note: (6)번 공식, 즉 $O_p(1)o_p(1) = o_p(1)$ 이 의미하는 것은 (1) $\{X_n\}$ 이 확률적으로 유계이고 (2) $\{Y_n\}$ 이 0으로 확률수렴한다면 (★) $\{X_nY_n\}$ 은 0 으로 확률수렴한다는 의미이다. 여기에서 (1) 대신에 $\{X_n\}$이 어떠한 분포로 분포수렴한다는 가정이 추가적으로 있다면 이는 슬러츠키 정리의 한 형태가 된다.

1.6 Delta method

(정리) $\{X_n\}$ 이 확률변수열이라고 하자. (1) $\sqrt{n}(X_n - \theta) \overset{d}{\to} Z$ 이고 (2) $g(x)$가 θ에서 미분가능하다면 아래가 성립한다.

$$\sqrt{n}\big(g(X_n) - g(\theta)\big) \overset{d}{\to} \dot{g}(\theta)Z$$

note: $\{X_n\}$이 *iid* 일 필요는 없다.

note: 일반적인 함수 $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$에 대하여 (2)의 조건은 아래와 같이 표현가능하다. [1]

(1) g is *differentialbe* at θ

(2) there is linear map (matrix) $g'_\theta : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ such that

$$g(\theta + h) - g(\theta) = g'_\theta(h) + o(\|h\|)$$

여기에서 linear map $h \to g'_\theta(h)$을 *total derivate* 라고 부른다. (이는 *partial derivate*와 구분된다.)

note: $g(x) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$이 *totally differentiable* 하기 해서는 (1) $g(x)$의 모든 편미분이 존재하고 즉 모든 $i = 1, 2, \ldots, k$ and $j = 1, 2, \ldots, m$에 대하여

$$\frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i}$$

가 존재하고 (2) 그것이 연속이어야 한다. 단순히 편미분이 존재하기만 해서는 안된다.

note: 위의 조건을 *continuously differentiable* 이라고 하기도 한다.

- 증명을 해보자. 아래가 성립한다. $g(x)$를 $x = a$에서 테일러 전개하면

$$g(x) = g(a) + (x-a)\dot{g}(a) + O\big((x-a)^2\big) \quad as\ x \to a$$

그런데 $O\big((x-a)^2\big) = (x-a)^2 O(1)$ 이므로

$$g(x) = g(a) + (x-a)\big(\dot{g}(a) + (x-a)O(1)\big) \quad as\ x \to a$$

양변에 $\sqrt{n}$을 곱하면

$$\sqrt{n}\big(g(x) - g(a)\big) = \sqrt{n}(x-a)\big(\dot{g}(a) + (x-a)O(1)\big) \quad as\ x \to a$$

- x대신에 X_n을 대입하고 a대신에 θ를 대입하면

$$\sqrt{n}\big(g(X_n) - g(\theta)\big) = \sqrt{n}(X_n - \theta)\big(\dot{g}(\theta) + (X_n - \theta)O(1)\big) \quad as\ X_n \to \theta$$

정리하면

$$\sqrt{n}\big(g(X_n) - g(\theta)\big) = \sqrt{n}(X_n - \theta)\dot{g}(\theta) + \sqrt{n}(X_n - \theta)^2 O(1) \quad as\ X_n \to \theta$$

- 그런데 조건 (1) 에 따라서 $\sqrt{n}(X_n - \theta) = O_p(1)$이다. 따라서 $X_n - \theta = o_p(1)$이다. 따라서 $\sqrt{n}(X_n - \theta)^2 = o_p(1)$이다. 따라서

$$\sqrt{n}\big(g(X_n) - g(\theta)\big) = \sqrt{n}(X_n - \theta)\dot{g}(\theta) + o_p(1)O(1) \quad as\ X_n \to \theta$$

- $o_p(1)O(1) = o_p(1)$이므로

$$\sqrt{n}\big(g(X_n) - g(\theta)\big) = \sqrt{n}(X_n - \theta)\dot{g}(\theta) + o_p(1)$$

따라서

$$\sqrt{n}\big(g(X_n) - g(\theta)\big) \xrightarrow{d} \sqrt{n}(X_n - \theta)\dot{g}(\theta)$$