Definitions

Examples

Extensions of the Markov Property

Recurrence and Transience

Stationary Measures

- staionary measure 가 (1) 존재하고 (2) 유일하다는 것이 조사되었다고 하자. 이제 다음 관심사는 아래식을 만족하는 staionary distribution π이다.

$$\pi p = \pi$$

(정리) p가 irreducible 하다는 것과 아래는 동치이다. (듀렛 Thm 6.5.6.)

(1) .

(2) stationary distribution이 존재한다.

(3) .

Asymptotic Behavior

(레마) $d_x = 1$이라면 m_0보다 큰 모든 m에 대하여

$$p^m(x,x) > 0$$

를 만족시킬 수 있다.

(정리) **(Convergence theorem)** p가 (1) irreducible 하고 (2) aperiodic 하며 (3) stationary distribution π를 가진다고 하자. 그러면 아래가 성립한다.

$$p^n(x,y) \to \pi(y) \quad as\ n \to \infty.$$

note: p가 irreducible 인것만 보이면 stationary distribution π를 가진다는 것은 정리 6.5.6에 의해서 성립한다. 따라서 (1)-(2)만 조건으로 사용해도 위의 정리는 성립한다.

note: p가 에이피리오딕하다는 의미는 모든 state가 $d_x = 1$을 가진다는 것을 의미한다 .

(pf)

- $S^2 = S \times S$ 라고 하자.

- 전이확률 $\bar{p}$를 $S \times S$에서 아래와 같이 정의하자.

$$\bar{p}\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = p(x_1, x_2)p(y_1, y_2)$$

note: 이는 각각의 coordinate가 독립적으로 움직인다는 것을 의미한다.

- (step1) 먼저 $\bar{p}$가 이리듀시블임을 보이자. (이는 너무 당연해서 바보 같은 증명으로 보이지만 정리의 에이피리오딕조건을 사용하는 유일한 과정이다.) 우선 p가 이리듀시블하다는 조건으로부터 아래를 만족하는 적당한 K, L이 존재함을 알 수 있다.

$$p^K(x_1, x_2) > 0 \quad \text{and} \quad p^L(y_1, y_2) > 0.$$

그런데 레마 6.6.3에 의해서 M을 적당히 크게 설정한다면 아래를 만족시킬수 있음을 알 수 있다.

$$p^{L+M}(x_1, x_2) > 0 \quad \text{and} \quad p^{K+M}(y_1, y_2) > 0.$$

따라서 아래가 성립한다.

$$\bar{p}^{K+L+M}\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) > 0$$

- (step2) 두 코디네이츠가 독립이므로 $\bar{p}$의 stationary distribution을 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$\bar{\pi}(a, b) = \pi(a)\pi(b).$$

- 정리 6.5.4에 의해서 $\bar{p}$의 stationary distribution이 존재한다는 것은 $\bar{p}$의 모든상태가 recurrent하다는 것을 의미한다.

Periodicity, Tail σ-field

General State