

# Chapter 1

## Vogt(2015)의 첫번째 리뷰

### 1.1 Model setting

(정의)  $\{X_{t,T} : t = 1, \dots, T\}_{T=1}^{\infty}$ 가 locally stationary라는 것은 모든  $u \in [0, 1]$ 에 대하여 아래식을 만족하는 strictly stationary process  $\{X_t(u) : t \in \mathbb{Z}\}$ 를 찾을 수 있다는 것이다.

$$\|X_{t,T} - X_t(u)\| \leq \left( \left| \frac{t}{T} - u \right| + \frac{1}{T} \right) U_{t,T}(u) \quad a.s.$$

- 이때  $u$ 는 rescaled time 이다. <sup>1</sup>
- 여기에서  $t$ 가 고정되었을때  $X_{t,T}$ 는  $d$ 차원 r.v.이고 따라서  $\|\cdot\|$ 는  $\mathbb{R}^d$ 에서의 norm이다.
- 또한  $\{U_{t,T} : t = 1, \dots, T\}_{T=1}^{\infty}$ 는  $E[U_{t,T}^{\rho}(u)] \leq C < \infty$ 를 만족하는 어떠한 양의 확률변수이다.

(정의)  $\lambda_{t,T}$ 는  $E(X_{t,T})$ 혹은  $V(X_{t,T})$ 와 같이 시간에 따라서 변화하는 locally stationary process  $X_{t,T}$ 의 특징이다.

- 여기에서  $\lambda_{t,T}$ 는 아래와 같은 성질을 만족한다.



<sup>1</sup> 보통  $u = \frac{t}{T}$ 로 정의하는데 이 정의는 모호한 편이다. 왜냐하면  $T = \infty$ 인 경우를 따지기 힘들기 때문임.

(1)  $\lambda_{t,T}$ 는  $\{X_{t,T}\}$ 에서 어떠한 measurable함수  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ 를 취한것의 평균으로 표현된다.  
즉

$$\lambda_{t,T} = E(f(X_{t,T}))$$

이다. 여기에서  $f$ 들의 집합을  $\mathcal{F}$ 라고 표현한다.

**example:**  $X_{t,T} = (X_{t,T,1}, \dots, X_{t,T,d})'$ 라고 하자.  $\lambda_{t,T} = cov(X_{t,T,i}, X_{t,T,j})$ 이면  $\mathcal{F} := \{f_{ij} : 1 \leq i \leq j \leq d\}$  where  $f_{ij}(x) = x_i x_j$

(2)  $\lambda_{t,T} = E(f(X_{t,T}))$ 는 아래를 만족한다.

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} |E[f(X_{t,T})] - E[f(X_t(u))]| \leq C \left( \left| \frac{1}{T} - u \right| + \frac{1}{T} \right).$$

즉  $\lambda_{t,T}$ 가 locally하게는  $\lambda(u)$ 에 수렴한다는 의미이다. 여기에서  $\lambda(u) = E(f(X_t(u)))$

(가정) 우리는  $\lambda(u)$ 가  $[0, u_0]$ 에서는 변화하지 않고,  $u_0$ 이후에서만 변화한다고 가정할 것이다.

(목표) 그리고 우리의 목적은  $u_0$ 를 찾는것, 즉  $\lambda(u)$ 가 시간에 따라 변화하기 시작하는 시점을 찾는 것이다.

## 1.2 A measure of time-variation

(정의)  $D(u, v, f)$ 는 아래와 같이 정의된다.

$$D(u, v, f) = \int_0^v E(f(X_t(w)))dw - \left(\frac{v}{u}\right) \int_0^u E(f(X_t(w)))dw$$

- 따라서 고정된  $f$ 와  $u$ 에 대하여

$$\sup_{v \in [0, u]} |D(u, v, f)|$$

의 값이 0이라면,  $E(f(X_t(w)))$ 는 구간  $[0, u]$ 에서 변화가 없다는 의미가 된다.

(정의) 함수  $\mathcal{D} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ 을 아래와 같이 정의하자.

$$\mathcal{D}(u) = \sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{v \in [0, u]} |D(u, v, f)|.$$

- 만약에  $X_{t,T}$ 가 strong stationary process라고 하면, 어떠한 함수  $f$ 에 대하여서도

$$\sup_{v \in [0, u]} |D(u, v, f)| = 0.$$

이다. 따라서 이때는  $\mathcal{D}(u) = 0$ 이 된다.

- 여기에서  $\int_0^v E[f(X_t(w))]dw$ 는 아래와 같이 추정할 수 있다.

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{[vT]} f(X_{t,T}).$$

이때 앞에  $\frac{1}{T}$ 를 곱해준 이유는 시간축이  $[0, 1]$ 로 scaling되어 있기 때문이다.

- 따라서  $\hat{D}_T(u, v, f)$ 와  $\hat{\mathcal{D}}_T(u)$ 는 각각 아래와 같이 추정하는 것이 바람직 하다.

$$\hat{D}_T(u, v, f) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{[vT]} f(X_{t,T}) - \left(\frac{v}{u}\right) \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{[uT]} f(X_{t,T}).$$

$$\hat{\mathcal{D}}_T(u) = \sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{v \in [0, u]} |\hat{D}(u, v, f)|.$$

### 1.3 Estimating the gradual change point $u_0$ .

- 일반적으로

$$\hat{\mathcal{D}}_T(u) = \sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{v \in [0, u]} |\hat{D}(u, v, f)|.$$

는  $u \leq u_0$ 에서는 0에 가까운 값을 가지고  $u > u_0$ 에서는 어떠한 bounded된 값을 가지게 된다. 즉  $\hat{\mathcal{D}}_T(u)$ 는 아래와 같은 느낌이다.

$$\hat{\mathcal{D}}_T(u) = \begin{cases} \xrightarrow{p} 0, & u \leq u_0, \\ \leq C < \infty, & u > u_0. \end{cases}$$

- 또한  $\sqrt{T}\hat{\mathcal{D}}_T(u)$ 는 대충 아래와 같은 느낌을 가지게 된다.

$$\sqrt{T}\hat{\mathcal{D}}_T(u) = \begin{cases} \xrightarrow{d} \mathcal{H}(u), & u \leq u_0, \\ \xrightarrow{p} \infty, & u > u_0. \end{cases}$$

- $\sqrt{T}\hat{\mathcal{D}}_T(u)$ 가 어떠한 분포를 가지지 않고  $\infty$ 값을 가지게 되는 시점을 찾기 위해서 아래와 같은 성질을 만족하는  $\tau_T$ 를 도입하자.

$$\begin{cases} P(\sqrt{T}\hat{\mathcal{D}}_T(u) \leq \tau_T) \rightarrow 1, & u \leq u_0 \\ P(\sqrt{T}\hat{\mathcal{D}}_T(u) \leq \tau_T) \rightarrow 0, & u > u_0 \end{cases}$$

**note:** 이를 위해서는 적당히  $\tau_T$ 를  $\mathcal{H}(u)$ 의 분포에서 나올수 있는 최대값으로 정의하는것이 바람직하다. 즉  $h_1, \dots, h_T$ 가 분포  $\mathcal{H}(u)$ 에서 나온 샘플이라고 한다면 대충

$$\tau_T \approx \max\{h_1, \dots, h_T\}$$

와 같이 정의하는 것이 바람직하다. 이렇게 정의하면 자연스럽게  $\tau_T$ 는  $T$ 가 커질수록 무한대로 (천천히) 발산하게 됨을 이해할 수 있다.

- 위의 식을 다시 쓰면

$$\begin{cases} P(1(\sqrt{T}\hat{\mathcal{D}}_T(u) \leq \tau_T) = 1) \rightarrow 1, & u \leq u_0 \\ P(1(\sqrt{T}\hat{\mathcal{D}}_T(u) \leq \tau_T) = 1) \rightarrow 0, & u > u_0 \end{cases}$$

와 같이 쓸 수 있고 여기에서  $\hat{r}_T(u) := 1(\sqrt{T}\hat{\mathcal{D}}_T(u) \leq \tau_T)$ 라고 정의하면

$$\hat{r}_T(u) \xrightarrow{p} \begin{cases} 1, & u \leq u_0 \\ 0, & u > u_0 \end{cases}$$

와 같이 된다. 따라서  $\int_0^1 \hat{r}_T(u)du$ 를 이용하여  $u_0$ 를 추정할 수 있다. 즉

$$\hat{u}_0(\tau_T) = \int_0^1 \hat{r}_T(u)du$$

와 같이 쓸 수 있다.



## 1.4 Asymptotic properties.

(약속)  $\ell_\infty(S)$ 를 supremum norm이 bound된  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ 들의 집합으로 정의하자.

(약속) 아래를 가정하자.

$$\frac{\mathcal{D}(u)}{(u - u_0)^\kappa} \longrightarrow c_\kappa > 0 \text{ as } u \downarrow u_0$$

여기에서  $\kappa$ 는 자연수이고  $c_\kappa$ 는 양수이다.

- 여기에서 큰 수의  $\kappa$ 는  $\mathcal{D}$ 가  $u_0$ 시점 이후로 좀 더 천천히 0으로부터 멀어짐을 의미한다. 즉  $\kappa$ 는  $\mathcal{D}$ 의 smoothness의 정도를 알려주는 파라미터이다.

**note:**  $u > u_0$ 에서  $u - u_0$ 는 1보다 작은 양수이므로,  $\kappa$ 가 클수록  $(u - u_0)^\kappa$ 는 매우 천천히 변화한다.



### 1.4.1 Assumption.

- 내용이없어서..



### 1.4.2 Weak convergence of the measure of time-variation.

- 아래와 같은 통계량을 정의하자.

$$\hat{H}_T(u, v, f) = \sqrt{T} \left( \hat{D}_T(u, v, f) - D(u, v, f) \right)$$

여기에서  $\hat{H}$ ,  $\hat{D}_T$ ,  $D$ 는 모두 공간  $\Delta \times \mathcal{F}$ 에서  $\mathbb{R}$ 로 가는 함수이다. 이때  $\Delta = \{(u, v) \in [0, 1]^2 : v \leq u\}$ 로 정의한다.

- 추가적으로  $\hat{H}_T$ 는  $\ell_\infty(\Delta \times \mathcal{F})$ 의 원소라고 가정하자. 즉  $\hat{H}_T$ 의 sup이 bound되어있다고 가정하자.

**note:** 생각해보면 이 가정은 매우 특이하다.  $X_{t,T}$ 가  $\Omega$ 에서 정의된 확률과정이었다면  $\hat{H}_T$ 는  $\Omega \times \Delta \times \mathcal{F}$ 에서 정의되는 일종의 확률변수로 볼 수 있는데, 이 확률변수의 최대값(=sup)이 bound되어 있다는 의미이기 때문이다.



(정리) 적당한 가정하에서 통계량  $\hat{H}_T(u, v, f)$ 의 분포가 평균이 0이고 분산이

$$\text{Cov}(H(u, v, f), H(u', v', f'))$$

인 Gaussian process  $H$ 로 수렴한다. 즉,

$$\hat{H}_T \xrightarrow{d} H$$

이다.

- $\hat{H}_T(u, v, f)$ 와  $\hat{H}_T(u', v', f')$ 는 모두  $X_{t,T}$ 로부터 유도된 확률변수이지만 엄연히 서로 다른 확률변수이다.

**note:**  $X$ 가 r.v.라고 할때  $Y_1 = f_1(X)$ ,  $Y_2 = f_2(X)$ 과 같은 느낌

- 따라서 두 확률변수의 분산을 구할수 있는데 이를 아래와 같이 정의한다.

$$\text{Cov}(H(u, v, f), H(u', v', f')).$$

(정의) 확률변수  $\hat{\mathcal{D}}_T(u)$ ,  $\hat{\mathcal{H}}_T(u)$ 를 아래와 같이 정의하자.

$$\hat{\mathcal{D}}_T(u) = \sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{v \in [0, u]} |\hat{D}_T(u, v, f)|.$$

$$\hat{\mathcal{H}}_T(u) = \sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{v \in [0, u]} |\hat{H}_T(u, v, f)|.$$

즉  $\hat{\mathcal{D}}_T(u)$ 는 고정된  $u$ 에 대하여 확률변수  $\hat{D}_T(u, v, f)$ 가 취할수 있는 값 중의 가장 큰 값을 의미하고,  $\hat{\mathcal{H}}_T(u)$ 역시 그러하다.

**note:**  $\hat{\mathcal{D}}_T(u)$ 는  $\Omega \times [0, 1]$ 에서 정의된 확률변수라고 볼 수 있고  $\hat{\mathcal{H}}_T(u)$ 역시 그러하다.

**note:** 만약에  $u = 0.6$ 으로 이라고 한다면  $\hat{\mathcal{D}}_T(0.6)$ 은 아래와 같은 확률변수들 중에서 최대값이다.

$$\hat{D}_T(0.6, 0.5, f_1)$$

$$\hat{D}_T(0.6, 0.4, f_1)$$

$$\hat{D}_T(0.6, 0.3, f_1)$$

$$\hat{D}_T(0.6, 0.2, f_1)$$

...

$$\hat{D}_T(0.6, 0.5, f_2)$$

$$\hat{D}_T(0.6, 0.4, f_2)$$

$$\hat{D}_T(0.6, 0.3, f_2)$$

$$\hat{D}_T(0.6, 0.2, f_2)$$

...



(정의) 확률변수  $\hat{\mathbb{D}}_T(u)$ ,  $\hat{\mathbb{H}}_T(u)$ 를 아래와 같이 정의하자.

$$\hat{\mathbb{D}}_T(u) = \sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{0 \leq w \leq v \leq u} |\hat{D}_T(v, w, f)|.$$

$$\hat{\mathbb{H}}_T(u) = \sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{0 \leq w \leq v \leq u} |\hat{H}_T(v, w, f)|.$$

**note:** 만약에  $u = 0.6$ 으로 이라고 한다면  $\hat{\mathbb{D}}_T(0.6)$ 은 아래와 같은 확률변수들 중에서 최대값이다.

$$\hat{D}_T(0.6, 0.5, f_1)$$

$$\hat{D}_T(0.6, 0.4, f_1)$$

$$\hat{D}_T(0.6, 0.3, f_1)$$

$$\hat{D}_T(0.6, 0.2, f_1)$$

...

$$\hat{D}_T(0.4, 0.2, f_1)$$

$$\hat{D}_T(0.4, 0.1, f_1)$$



$$\begin{aligned}
& \dots \\
& \hat{D}_T(0.3, 0.2, f_2) \\
& \hat{D}_T(0.3, 0.1, f_2) \\
& \dots
\end{aligned}$$

**note:** 따라서 자연스럽게  $\hat{\mathbb{D}}_T(u) \geq \hat{\mathcal{D}}_T(u)$ 임을 알 수 있다.

- 아래와 같이 정의하기도 한다.

$$\hat{\mathbb{D}}_T(u) = \sup_{v \in [0, u]} |\hat{\mathcal{D}}_T(v)|.$$

$$\hat{\mathbb{H}}_T(u) = \sup_{v \in [0, u]} |\hat{\mathcal{H}}_T(v)|.$$



(정리) 적당한 조건하에서  $H_T$ 가  $H$ 로 분포수렴한다는 정리를 이용하면 쉽게 아래를 보일 수 있다.

$$\begin{aligned}
\sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{v \in [0, u]} |\hat{H}_T(u, v, f)| &\xrightarrow{d} \sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{v \in [0, u]} |H(u, v, f)|. \\
\sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{0 \leq w \leq v \leq u} |\hat{H}_T(v, w, f)| &\xrightarrow{d} \sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{0 \leq w \leq v \leq u} |H(v, w, f)|.
\end{aligned}$$



### 1.4.3 Convergence of the estimator $\hat{u}_0(\tau_T)$ .

- 앞서서  $\hat{\mathcal{D}}$ 는 아래와 같은 느낌이라고 하였다.

$$\hat{\mathcal{D}}_T(u) = \begin{cases} \xrightarrow{p} 0, & u \leq u_0, \\ \leq C < \infty, & u > u_0. \end{cases}$$

그런데

$$\begin{cases} P(\sqrt{T}\hat{\mathcal{D}}_T(u) \leq \tau_T) \rightarrow 1, & u \leq u_0 \\ P(\sqrt{T}\hat{\mathcal{D}}_T(u) \leq \tau_T) \rightarrow 0, & u > u_0 \end{cases}$$

이므로 아래가 성립한다.

$$\begin{cases} P(\hat{\mathcal{D}}_T(u) \leq \frac{\tau_T}{\sqrt{T}}) \rightarrow 1, & u \leq u_0 \\ P(\hat{\mathcal{D}}_T(u) \leq \frac{\tau_T}{\sqrt{T}}) \rightarrow 0, & u > u_0 \end{cases}$$

**(약속)** 이런 사실을 종합하면  $\tau_T$ 가 아래의 성질을 만족해야 함을 유추할 수 있다.

(i)  $\tau_T \rightarrow \infty$

(ii)  $\tau_T/\sqrt{T} \rightarrow 0$

따라서 앞으로는 특별한 언급이 없어도  $\tau_T$ 가 위의 두 성질을 만족한다는 것으로 생각하자.

**(정의)**  $\gamma_T$ 를 아래와 같이 정의하자.

$$\gamma_T = \left( \frac{\tau_T}{\sqrt{T}} \right)^{1/\kappa}$$

**note:** 이때  $\kappa$ 는 앞에서 약속한것 처럼 다음식을 만족시켜야 한다.

$$\frac{\mathcal{D}(u)}{(u - u_0)^\kappa} \rightarrow c_\kappa > 0 \text{ as } u \downarrow u_0$$

- $(\gamma_T)^\kappa$ 는  $T$ 가 커짐에 따라 0으로 수렴한다. 따라서  $\gamma_T$ 역시  $T$ 가 커짐에 따라서 0으로 수렴한다. 동일한  $\kappa$ 일경우 굳이 따지면  $(\gamma_T)^\kappa$ 이  $\gamma_T$ 보다 빠르게 수렴한다.

- 그런데  $P(\hat{\mathcal{D}}_T(u) \leq \frac{\tau_T}{\sqrt{T}}) \rightarrow 1$ 임을 생각하면 대충  $T$ 가 무한대로 감에 따라  $\mathcal{D}(u) \leq (\gamma_T)^\kappa$ 와 같은 식이 성립한다고 생각할 수 있다. 또한

$$\frac{\mathcal{D}(u)}{(u - u_0)^\kappa} \rightarrow c_\kappa > 0 \text{ as } u \downarrow u_0$$

임을 감안하면, 아래식이 성립하는 느낌이 든다.

$$\frac{(\gamma_T)^\kappa}{(u - u_0)^\kappa} \rightarrow c_\kappa > 0 \text{ as } u \downarrow u_0, T \rightarrow \infty.$$

즉  $T \rightarrow \infty$ 일때  $(\gamma_T)^\kappa$ 가 0으로 가는 속도는  $u \downarrow u_0$ 일때  $(u - u_0)^\kappa$ 가 0으로 가는 속도와 비슷하다. 즉  $\gamma_T$ 는 적당하게  $u - u_0$ 가 0으로 가는 속도와 비슷하도록  $\kappa$ 와  $\tau_T$ 를 조절하여 얻을 수 있다. 기본적으로  $\gamma_T$ 의 값은  $\kappa$ 와  $\tau_T$ 에 따라서 아래와 같은 규칙으로 변화한다.

(1)  $\kappa$ 가 커질수록, 즉  $\mathcal{D}$ 의 부드러움의 정도가 클수록  $\gamma_T$ 는 천천히 0으로 수렴한다.

(2)  $\tau_T$ 가 천천히 무한대로 갈수록, 즉  $\sqrt{T}\hat{\mathcal{D}}_T$ 의 극한분포  $\mathcal{H}$ 에서 나오는 최대값을 좀더 타이트하게 잡을수록  $\gamma_T$ 는 빠르게 0으로 수렴한다.

(정리) 적당한 조건하에서 아래가 성립한다.

$$\hat{u}_0(\tau_T) - u_0 = O_p(\gamma_T).$$

- $\gamma_T$ 는 기본적으로  $\mathcal{D}$ 의 부드러움의 정도가 클수록 천천히 0으로 수렴하기 때문에  $\hat{u}_0(\tau_T)$ 이 보다 정확한 추정량이 되기 위해서는  $u_0$ 에서 파라미터가 서서히 변화하는 모델보다 파라미터가 급격하게 변화하는 모델이 유리함을 알 수 있다.

- 또한  $\tau_T$ 가 좀 더 천천히 발산할수록  $\gamma_T$ 를 보다 빠르게 0으로 수렴시킬수 있기 때문에  $\sqrt{T}\hat{\mathcal{D}}_T$ 의 극한분포  $\mathcal{H}$ 에서 나오는 최대값을 좀더 타이트 하게 잡을수록  $u_0$ 를 정확하게 추정할 수 있음을 알 수 있다.



### 1.4.4 Some mean squared error considerations.



### 1.4.5 Choice of the threshold level $\tau_T$

(약속)  $q_\alpha(u)$ 를  $\mathbb{H}(u)$ 의  $1 - \alpha$ -분위수라고 약속하자.

(약속) 모든  $u \in [0, 1]$ 에 대하여  $\mathbb{H}(u)$ 의 분포를 알고있다고 약속하자.

**note:** 실제로는 분포를 몰라서 적당한 방법을 통하여 추론을 해야한다. 이런 방법은 다음장 (Implementation)에서 자세히 다룸.)

- 참고로  $u < u_0$ 인곳에서  $\mathbb{H}(u) = \sqrt{T}\mathbb{D}(u)$ 임을 기억하자.
- 또한  $\mathbb{H}(u)$ 의 분포는 고정된  $u$ 에 대해서 정규확률과정  $H(u, v, f)$ 에서 나오는 확률변수들의 최대값들의 분포를 의미한다.



### Preliminary choice of $\tau_T$

- $H_0$ 를 “변화점이 없다.”로 설정하자. 우선 우리의 첫번째 목표는 귀무가설하에서

$$P(\hat{u}_0(\tau_T) < 1) = \alpha$$

가 되도록 하는 어떠한  $\tau_T$ 를 구하는 것이다.

- 우선  $\tau_T$ 가  $T$ 에 depend하지 않는 어떠한 상수  $\tau$ 라고 하자. 즉 모든  $T$ 에 대하여  $\tau_T = \tau$ 이다.

- 아래식이 성립한다.

$$P(\hat{u}_0(\tau) < 1) \leq P(\sqrt{T}\hat{\mathcal{D}}_T(u) > \tau, \text{ for some } u \in [0, 1]) = P(\sqrt{T}\mathbb{D}_T(1) > \tau)$$

그런데 changing point가 없다고 하였으므로

$$P(\sqrt{T}\mathbb{D}_T(1) > \tau) \longrightarrow P(\mathbb{H}(1) > \tau)$$

가 된다.  $\mathbb{H}(1)$ 의 분포를 완전히 알고 있다고 가정하였으므로 그것의  $1 - \alpha$ -분위수  $q_\alpha(1)$ 를 정확하게 알 수 있다. 이것을  $\tau$ 로 잡자. 즉  $\tau = q_\alpha(1)$ 로 잡자. 그러면,

$$P(\hat{u}_0(\tau) < 1) \leq \alpha + o(1)$$

이 된다. 이때의  $\tau$ 를  $\tau_\alpha^\circ$ 이라고 하자. 즉  $\tau_\alpha^\circ = q_\alpha(1)$ . 그러면 위의식을 아래와 같이 다시 쓸 수 있다.

$$P(\hat{u}_0(\tau_\alpha^\circ) < 1) \leq \alpha + o(1)$$

- 하지만  $\tau_\alpha^\circ$ 는 앞에서 가정한것 처럼  $T$ 가 커짐에 따라서 (천천히) 무한대로 발산하는 수가 아니라  $T$ 에 영향을 받지 않는 어떠한 상수이다. 따라서  $\hat{u}_0(\tau_\alpha^\circ)$ 는 consistent estimator가 될 수 없다.  $\hat{u}_0(\tau_\alpha^\circ)$ 를 consistent estimator가 되게 하려면  $\tau_\alpha^\circ$ 를 무한대로 천천히 발산시켜야 한다. 그 방법은  $T$ 가 커짐에 따라서  $\alpha$ 를 0으로 보내야 한다. 즉 아래와 같은 수열을 정의해야 한다.

$$\alpha_T \rightarrow 0, \text{ as } T \rightarrow \infty$$

여기에서  $\alpha_T$ 를 충분히 천천히 0으로 보내야 함을 이해해야 한다.  $\alpha_T$ 를 빠르게 0으로 보내면 어떤일이 생길까? 그렇다면  $\tau_T$ 가  $\sqrt{T}$ 보다 빠르게 무한대로 발산할 수도 있을 것이고 이것은 적절한  $\tau_T$ 에 대한 선택이 아니다.

- 얼마나 천천히  $\alpha_T$ 를 0으로 보내야 하는 것일까? 만족시켜야 할것은

$$\frac{\tau_{\alpha_T}^\circ}{T} \rightarrow 0$$

이어야 한다는 것이다. 그런데 이것은 적당한  $c$ 와  $r$ 에 대하여  $\alpha_T \leq cT^{-r}$ 를 만족하는  $\alpha_T$ 만 잡으면 된다고 논문에 나와있다.

- 실제로  $T$ 는 고정되어 있으므로, 천천히 수렴하는 수열  $\{\alpha_T\}$ 를 잡는다느니 하는 말은 다 이론용이다. 실제로는 하나의  $\alpha_T$ 만 정해주면 된다.



### Refined choice of $\tau_T$

- 귀무가설을 살짝 수정하여  $u_0$ 이전까지는 변화점이 없다고 하자.
- 편의상  $u_0$ 를 알고 있다고 생각하자.
- 아래식이 성립한다.

$$P(\hat{u}_0(\tau) < u_0) \leq P(\sqrt{T}\hat{\mathcal{D}}_T(u) > \tau, \text{ for some } u \in [0, u_0]) = P(\sqrt{T}\mathbb{D}_T(u_0) > \tau)$$

그런데  $u_0$ 까진 changing point가 없다고 하였으므로

$$P(\sqrt{T}\mathbb{D}_T(u_0) > \tau) \longrightarrow P(\mathbb{H}(u_0) > \tau)$$

가 된다.  $\mathbb{H}(u_0)$ 의 분포를 완전히 알고 있다고 가정하였으므로 그것의  $1 - \alpha$ 분위수  $q_\alpha(u_0)$ 를 정확하게 알 수 있다. 이것을  $\tau_\alpha$ 로 잡자. 그러면 아래가 성립한다.

$$P(\hat{u}_0(\tau_\alpha) < u_0) \leq \alpha + o(1)$$

- 추가적으로 아래도 성립함을 논문에서 증명하였다.

$$P(\hat{u}_0(\tau_\alpha) > u_0 + C\gamma_T) = o(1)$$

(정리) 적당한 가정하에서 아래식들이 성립한다.

$$P(\hat{u}_0(\tau_\alpha) < u_0) \leq \alpha + o(1)$$

$$P(\hat{u}_0(\tau_\alpha) > u_0 + C\gamma_T) = o(1)$$

여기에서  $C > 0$ 이고,  $\gamma_T = \left(\frac{\tau_T}{\sqrt{T}}\right)^{1/\kappa}$ 이다.

• 실제로는  $u_0$ 를 모르기 때문에  $\tau_\alpha$ , 혹은  $\{\tau_{\alpha_T}\}$ 를 잡을 수 없다. 따라서 아래의 과정을 통하여  $u_0$ 의 추정치 혹은 추정치열을 구하고 그것을 이용하여  $\tau_\alpha$  혹은  $\{\tau_{\alpha_T}\}$ 를 잡아야 한다.

(i) 0으로 천천히 수렴하는 적당한 수열  $\{\alpha_T\}$ 를 잡는다. 여기에서  $\alpha_T$ 는 적당한  $c$ 와  $r$ 에 대하여  $\alpha_T \leq cT^{-r}$ 를 만족하기만 하면 된다.

(ii)  $\mathbb{H}(1)$ 의 분포를 알고 있으므로  $\mathbb{H}(1)$ 의  $1 - \alpha_T$ 분위수에 해당하는 값들을 각각 구하고 이를  $\{\tau_{\alpha_T}^\circ\}$ 로 정의한다. (1차선택!!)

(iii) 각각의  $\{\tau_{\alpha_T}^\circ\}$ 에 대하여  $\hat{\mu}_0(\tau_{\alpha_T}^\circ)$ 를 계산한다. 아래식을 써야한다.

$$\hat{\mu}_0(\tau_{\alpha_T}^\circ) = \int_0^1 1(\sqrt{T}\hat{\mathcal{D}}_T(u) \leq \tau_{\alpha_T}^\circ) du.$$

여기에서

$$\hat{\mathcal{D}}_T(u) = \sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{v \in [0, u]} \left| \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{[vT]} f(X_{t,T}) - \left(\frac{v}{u}\right) \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{[uT]} f(X_{t,T}) \right|$$

이다. 따라서 이 과정을 계산할때 주어진 샘플들, 즉  $\{X_{t,T}\}$ 이 사용된다.

(iv)  $\hat{\mu}_0(\tau_{\alpha_T}^\circ)$ 를 값을 넣어서  $\mathbb{H}(\hat{\mu}_0(\tau_{\alpha_T}^\circ))$ 의 분포를 구하고 또 그것의  $1 - \alpha_T$ 분위수에 해당하는 값들을 각각 구하고 이를  $\{\hat{\tau}_{\alpha_T}^\circ\}$ 로 정의한다. 이것이  $\{\tau_T\}$ 이다. (2차선택!!)

(정리)  $\tau_\alpha$  대신에  $\hat{\tau}_\alpha$ 를 넣어도 위의 정리가 성립한다. 즉 적당한 가정하에서 아래식들이 성립한다.

$$P(\hat{u}_0(\hat{\tau}_\alpha) < u_0) \leq \alpha + o(1)$$

$$P(\hat{u}_0(\hat{\tau}_\alpha) > u_0 + C\gamma_T) = o(1)$$

여기에서  $C > 0$ 이고,  $\gamma_T = \left(\frac{\tau_T}{\sqrt{T}}\right)^{1/\kappa}$ 이다.

## Chapter 2

### Vogt(2015)의 두번째 리뷰

#### 2.1 Introduction

- goal

#### 2.2 Model setting

- 시계열  $\{X_t\}$  가 locally stationary process 라고 하자.
- 우리는  $\{X_t\}$  에서 생성된 하나의 realization  $\{x_t\}$  를 관측했다고 하자.
- Let  $\lambda_t$  be some time-varying feature of  $X_t$ .

*example:*  $\lambda_t = E(X_t)$ .

*example:*  $\lambda_t = V(X_t)$ .

*note:* 만약에  $\{X_t\}$ 가 정상이라면  $\lambda_t$ 는 항상 상수이어야 할것이다.

- $\lambda_t$ 는 구체적으로 (1) 시계열  $\{X_t\}$  에서 (2) 임의의 measurable function  $f \in \mathcal{F}$ 를 취한 후 (3) 그것의 평균으로 정의된다. 즉 아래와 같은 형태를 가져야한다.

$$\lambda_t = E(f(X_t)), \quad f \in \mathcal{F}$$



*example:*  $\lambda_t = E(X_t)$ 인 경우  $\mathcal{F} = \{\text{id}\}$ .



- 관측한 시계열이 univariate timeseries 이지만  $\lambda_t$ 가 벡터일수도 있다. (이때는 univariate 를 관측했지만 multivariate를 관측했다고 가정한다) 아래는 그 예제이다.

*example:*  $\{Y_t\}$ 가 univariate timeseries라고 하자. 우리는 아래에 관심이 있다고 하자.

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \dots \\ \gamma_p \end{bmatrix}$$

이럴때는

$$\lambda_t = \gamma$$

로 설정한다. 여기에서  $\gamma_\ell = \text{Cov}(X_t, X_{t-\ell})$ 을 의미함.

# Bibliography

- [1] Vogt, M., & Dette, H. (2015). Detecting gradual changes in locally stationary processes. *The Annals of Statistics*, 43(2), 713-740.