

## 연습문제 5.12.

- $X_1 \dots X_n \sim Poi(\lambda).$

- $\sqrt{n}(g(\bar{X}) - g(\lambda)) \xrightarrow{d} Z, \quad Z \sim N(0, 1)$  을 만족하는 변환  $g$ 를 구하라.



- CLT를 쓰면

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda) \xrightarrow{d} N(0, \lambda)$$

- $g(\cdot)$ 이 미분가능한 함수라고 하자.

- $g(\cdot)$ 는 미분가능한 어떠한 형태도 가능하다. 예를들어 아래와 같은 형태들이 가능하다고 하자.

$$g(x) = x^2$$

혹은

$$g(x) = 2\sqrt{x}$$

- 예를들어서  $g(x) = 2\sqrt{x}$ 와 같은 형태라고 하자. 그렇다면  $x = a$ 에서  $g(x)$ 를 테일러 전개하면 아래와 같이 표현가능하다.

$$g(x) = g(a) + (x - a)g'(a) + (x - a)^2O(1)$$

- $x$ 대신에  $\bar{X}_n$   $a$ 대신에  $\lambda$ 를 대입하면

$$g(\bar{X}_n) = g(\lambda) + (\bar{X}_n - \lambda)g'(\lambda) + (\bar{X}_n - \lambda)^2O(1).$$

양변에  $\sqrt{n}$ 을 곱하고 정리하면

$$\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\lambda)) = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda)g'(\lambda) + \sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda)^2O(1).$$

그런데  $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda)^2O(1) = O_p(1)o_p(1)O(1) = o_p(1)$  이므로

$$\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\lambda)) = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda)g'(\lambda) + o_p(1)$$

그런데  $g(x) = 2\sqrt{x}$ 이므로  $g'(x) = 1/\sqrt{x}$ 이다. 따라서  $g'(\lambda) = 1/\sqrt{\lambda}$ .

- 정리하면

$$\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\lambda)) = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda)1/\sqrt{\lambda} + o_p(1)$$

CLT의 결과를 쓰면

$$\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\lambda)) \xrightarrow{d} N(0, \lambda)1/\sqrt{\lambda}$$

따라서

$$\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\lambda)) \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

**(결론)** 만약에  $g(x) = 2\sqrt{x}$ 로 설정한다면

$$\sqrt{n}(g(\bar{X}) - g(\lambda))$$

의 극한이 표준정규분포로 수렴하므로 문제에서 원하는 답을 구할 수 있다.

- 이는 바꾸어 말하면 포아송분포에 한정하여 (1) 관측한 확률변수에서 제곱근을 취한뒤 2배를 하고 (2) 그상태에서 CLT를 쓴다면 표준정규분포로 수렴한다는 것이다.

- 이 경우 그냥 포아송분포자체에서 CLT를 쓰는것보다 이득되는 경우가 있다. (일단 이렇게만 알아둘것)



- 그렇다면 어떻게  $g(x) = 2\sqrt{x}$ 임을 알 수 있을까?

- $g$ 가 미분가능하다면

$$g(x) \approx g(a) + (x - a)g'(a)$$

이고 다시 정리하면

$$\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\lambda)) \approx \sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda)g'(\lambda)$$

따라서

$$\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\lambda)) \xrightarrow{d} N(0, \lambda)g'(\lambda)$$

이고 정규분포의 특성에 따라서

$$\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\lambda)) \xrightarrow{d} N(0, \lambda(g'(\lambda))^2)$$

이다. 따라서

$$\lambda(g'(\lambda))^2 = 1$$

이어야 할 조건은

$$g'(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

일 조건이다. 즉  $g(x)$ 의 형태는 모르겠지만  $g'(x)$ 는 아래와 같아야 함을 알 수 있다.

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

이러부터  $g(x)$ 를 유추하면

$$g(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}.$$



- 이제  $\lambda$ 의 점근적인 신뢰구간을 구해보자. 아래의 식을 관찰하자.

$$2\sqrt{n}(\sqrt{\bar{X}_n} - \sqrt{\lambda}) \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

이때  $2\sqrt{n}(\sqrt{\bar{X}_n} - \sqrt{\lambda})$  자체를 하나의 통계량  $Y_n$ 으로 본다면

$$Y_n \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

$Y_n$ 이 정규분포를 따른다면 아래가 성립한다.

$$P(-Z_{\alpha/2} < Y_n < Z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

$Y_n$ 이 정규분포는 아니지만 점근적으로 정규분포를 따른다면 아래가 성립한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(-Z_{\alpha/2} < Y_n < Z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(-Z_{\alpha/2} < 2\sqrt{n}(\sqrt{\bar{X}_n} - \sqrt{\lambda}) < Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

이는

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( -Z_{\alpha/2} < 2\sqrt{n}(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\bar{X}_n}) < Z_{\alpha/2} \right) = 1 - \alpha$$

정리하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \frac{-Z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}} + \sqrt{\bar{X}_n} < \sqrt{\lambda} < \frac{Z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}} + \sqrt{\bar{X}_n} \right) = 1 - \alpha$$

따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \left( \frac{-Z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}} + \sqrt{\bar{X}_n} \right)^2 < \lambda < \left( \frac{Z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}} + \sqrt{\bar{X}_n} \right)^2 \right) = 1 - \alpha$$

이 성립한다.

- 위의 식이 의미하는것은  $\lambda$ 가 구간

$$\left( \left( \frac{-Z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}} + \sqrt{\bar{X}_n} \right)^2, \left( \frac{Z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}} + \sqrt{\bar{X}_n} \right)^2 \right)$$

에 포함될 확률이 점근적으로  $1 - \alpha$ 에 수렴한다는 뜻이다. 이는 바꾸어 말하면 매우 큰  $n$ 에 대하여  $1 - \alpha$ 의 확률로 모수가 위의 구간에 있음을 확신할 수 있다는 의미이다. 이를  $1 - \alpha$ 의 점근적 신뢰구간이라고 부른다.

- 예를들어  $\lambda$ 의 점근적인 95퍼센트 신뢰구간은 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\left( \left( \frac{-1.96}{2\sqrt{n}} + \sqrt{\bar{X}_n} \right)^2, \left( \frac{1.96}{2\sqrt{n}} + \sqrt{\bar{X}_n} \right)^2 \right)$$

## 연습문제 5.14.

- $\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} \stackrel{iid}{\sim} F$  with

(1)  $EX_1 = EY_1 = 0,$

(2)  $EX_1^2 = EY_1^2 = 1,$

(3)  $EX_1Y_1 = \rho,$

(4)  $EX_1^4 < \infty, EY_1^4 < \infty.$

- $\hat{\rho}_n = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}.$

- 아래와 같은 기호를 약속하자.

(1)  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$

(2)  $\bar{X}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2.$

(3)  $\overline{XY} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i Y_i.$

(a)  $\sqrt{n}\bar{X}\bar{Y} \xrightarrow{p} 0$  임을 보여라.

(sol)

- $\sqrt{n}\bar{X} = O_p(1), \bar{Y} = o_p(1)$  이므로 자명함. 여기에서  $\sqrt{n}\bar{X} = O_p(1)$  는 CLT에 의해서 성립하고  $\bar{Y} = o_p(1)$  는 큰수의 법칙 즉 WLLN에 의해서 성립한다.

**note:** 추가적으로  $\bar{X}\bar{Y} - \overline{XY} = \bar{X}\bar{Y} + o_p(\frac{1}{\sqrt{n}})$  임도 알 수 있다.

(b) 아래가 성립함을 보여라.

$$\sqrt{m_2 - m_1^2} - \sqrt{m_2} = \frac{-m_1^2}{\sqrt{m_2 - m_1^2} + \sqrt{m_2}}$$

이때  $m_1 = \bar{X}, m_2 = \bar{X}^2$  라고 하자.

(sol) (자명하다)

**note:** 추가적으로 아래를 확인가능하다.

$$\sqrt{m_2 - m_1^2} = \sqrt{m_2} + \frac{-m_1^2}{\sqrt{m_2 - m_1^2} + \sqrt{m_2}} = \sqrt{m_2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

(pf)

- $\sqrt{n}m_1^2 = \sqrt{n}m_1m_1 = O_p(1)o_p(1) = o_p(1) \quad \therefore m_1^2 = o_p(\frac{1}{\sqrt{n}}).$

- $m_2 = 1 + o_p(1)$  이다. 즉  $m_2 \xrightarrow{p} 1$ 이다. 또한  $m_1^2 = o_p(\frac{1}{\sqrt{n}})$  이다. 따라서

$$\frac{-m_1^2}{\sqrt{m_2 - m_1^2} + \sqrt{m_2}} = o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

이다. 왜냐하면 분모는 1로 확률수렴하고 (continuous mapping thm) 분자는  $o_p(\frac{1}{\sqrt{n}})$ 이기 때문.

(c) 아래가 성립함을 보여라.

$$\sqrt{m_2} - 1 = \frac{m_2 - 1}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

(sol)

- 아래식을 관찰하라.

$$\sqrt{m_2} - 1 = \frac{m_2 - 1}{\sqrt{m_2} + 1} = \frac{m_2 - 1}{2} + \left( \frac{1}{\sqrt{m_2} + 1} - \frac{1}{2} \right) (m_2 - 1)$$

- 이제 아래를 보이면 된다.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{m_2+1}} - \frac{1}{2}\right)(m_2-1) := r_{3n} = o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

따라서 아래를 보이면 된다.

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{m_2+1}} - \frac{1}{2}\right)(m_2-1) = o_p(1)$$

- 그런데 CLT에 의해서  $\sqrt{n}(m_2-1) = O_p(1)$  가 성립한다.
- continuous mapping thm에 의해서 아래가 성립한다.

$$m_2 \xrightarrow{p} 1 \implies \left(\frac{1}{\sqrt{m_2+1}} - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{p} 0$$

- 따라서

$$\left(\frac{1}{\sqrt{m_2+1}} - \frac{1}{2}\right) = o_p(1)$$

- 따라서 증명이 끝난다.

**(d)** 아래를 보여라.

$$c_1 - m_1 s_1 - \rho \sqrt{m_2 - m_1^2} \sqrt{s_2 - s_1^2} = c_1 - \rho \frac{m_2 + s_2}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

이때  $c_1 = \bar{X}\bar{Y}$ ,  $s_1 = \bar{Y}$ ,  $s_2 = \bar{Y}^2$ 이다.

**(sol)**

- (b)의 결과로부터 아래가 성립한다.

$$\sqrt{m_2 - m_1^2} = \sqrt{m_2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

- (c)의 결과로부터 아래가 성립한다.

$$\sqrt{m_2} - 1 = \frac{m_2 - 1}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

- 둘을 종합하면

$$\sqrt{m_2 - m_1^2} = 1 + \frac{m_2 - 1}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

- 따라서

$$\sqrt{m_2 - m_1^2} \sqrt{s_2 - s_1^2}$$

는 아래식들의 합이다.

$$(1) \quad 1 + \frac{s_2 - 1}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$(2) \quad \frac{m_2 - 1}{2} \left(1 + \frac{s_2 - 1}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \frac{m_2 - 1}{2} + O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\underline{\text{note:}} \quad O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{n}}O_p(1) = \frac{1}{\sqrt{n}}o_p(1) = o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$(2) \quad \text{따라서 결국 } \frac{m_2 - 1}{2} \left(1 + \frac{s_2 - 1}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \frac{m_2 - 1}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

$$(3) \quad o_p(1/\sqrt{n}) \left(1 + \frac{s_2 - 1}{2} + o_p(1/\sqrt{n})\right) = o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

- 따라서

$$\sqrt{m_2 - m_1^2} \sqrt{s_2 - s_1^2} = 1 + \frac{s_2 - 1}{2} + \frac{m_2 - 1}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

정리하면

$$\sqrt{m_2 - m_1^2} \sqrt{s_2 - s_1^2} = \frac{s_2 + m_2}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

- 한편 (a)로부터

$$m_1 s_1 = \bar{X}\bar{Y} = o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

- 따라서 증명이 끝난다.

**(e)**  $\sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \rho) = \sqrt{n}\bar{W} + o_p(1)$  임을 보여라. 단

$$W = XY - \frac{\rho(X^2 + Y^2)}{2}.$$

**(sol)**

$$\bullet \quad \bar{W} = \bar{X}\bar{Y} - \frac{\rho(\bar{X}^2 + \bar{Y}^2)}{2} = c_1 - \frac{\rho(m_2 + s_2)}{2}.$$

$$\bullet \quad \sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \rho) = \sqrt{n} \times \frac{c_1 - m_1 s_1 - \rho \sqrt{m_2 - m_1^2} \sqrt{s_2 - s_1^2}}{\sqrt{m_2 - m_1^2} \sqrt{s_2 - s_1^2}}$$

$$\bullet \quad (d) \text{에 의해서 "분자"} = c_1 - \frac{\rho(m_2 + s_2)}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad ' '$$

- 분모는 1로 확률수렴한다.

- 따라서

$$\sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \rho) = \sqrt{n} \times \frac{c_1 - \frac{\rho(m_2 + s_2)}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{1 + o_p(1)} = \frac{\sqrt{n}\bar{W} + o_p(1)}{1 + o_p(1)} = \sqrt{n}\bar{W} + o_p(1)$$

**5.16.**