
Definitions

(def) (S, \mathcal{S}) 를 measurable space라고 하자. $X_n : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (S, \mathcal{S})$ 이라고 하자. 편하게

$$(S, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}, \mathcal{R})$$

이라고 생각해도 무방하다. 어떠한 확률변수열 $\{X_n\}$ 이 filtration $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, \dots, X_n)$ 에서 정의되어 있다고 하자. 확률변수열 $\{X_n\}$ 이 마코프체인이라는 것은 아래와 같이 정의한다.

$\{X_n\}$ is Markovchain w.r.t. \mathcal{F}_n

$$\stackrel{def}{\iff} \text{for all } B \in \mathcal{S}: P(X_{n+1} \in B | \mathcal{F}_n) = P(X_{n+1} \in B | X_n)$$

note: 확률변수열 X_1, X_2, \dots 의 값이 바로 이전의 값에 의해서만 결정되면 마코프체인이라고 한다. 즉 X_2 의 값을 알기 위해서는 X_1 의 값에 대한 정보만 있으면 되고 X_3 의 값을 알기 위해서는 X_2 에 대한 정보만 있으면 될때 X_1, X_2, \dots 을 마코프체인이라고 한다.

- 4×4 그리드 세계를 가정하자.

$$S = \Omega = \{(1, 1), \dots, (4, 4)\}$$

X_1 은

$$X_1((1, 1)) = 1, X_2((1, 2)) = 2, \dots, X_1((4, 4)) = 16$$

와 같이 정의하는 확률변수라고 하자. 따라서

$$X_1 = 1, X_2 = 2$$

가 의미하는 것은 처음에는 $(1, 1)$ 의 위치에 있다가 그다음에는 $(1, 2)$ 의 위치로 이동하였다는 것을 의미한다. 이제 $(1, 1)$ 의 위치에서 $(1, 2)$ 의 위치로 이동하는 transition probability를 p 라고 정의하자. 여기에서 p 는 확률공간을 구성하는 P 이지 pmf를 의미하는 것이 아님을 기억하자. 즉 p 는 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$p : (S, \mathcal{S}) \rightarrow \mathbb{R}$$

기호로는 아래와 같이 쓴다.

$$p(x, A)$$

여기에서 $x \in S, A \in \mathcal{S}$ 이다.

example: $x = 1, A = \{1, 2, 5\}$ 이라고 하자.

$$x = 1 \Leftrightarrow X(\omega) = 1 \Leftrightarrow \omega = (1, 1)$$

$$A = \{1, 2, 5\} \Leftrightarrow \{\omega : X(\omega) \in A\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$$

임을 주목하라. 따라서

$$p(x, A)$$

는 점 $(1, 1)$ 에서 출발했는데 점 $(1, 1), (1, 2), (2, 1)$ 중 하나에 도착할 확률
이므로

$$p(x, A) = 1$$

이라고 볼 수 있다.

- transition probability의 정의를 사용하면 아래를 만족하는 확률변수 열 $\{X_n\}$ 을 마코프체인이라 정의할 수 있다.

$$P(X_{n+1} \in B|\mathcal{F}_n) = p_n(X_n, B)$$

여기에서 p_n 은 n 번째에 어떠한 위치 X_n 에서 B 의 부분집합중 하나의 위치로 이동할 확률을 의미한다.

(thm) 만약에 (1) (S, \mathcal{S}) 이 *nice space* 이고 (2) $\{p_n\}$ 이 잘 정의되며 (3) (S, \mathcal{S}) 에서의 initional distribution이 잘 정의되면 Kolmogorov’s theorem에 의해서 우리는 임의의 j 에 대하여서도 consistence set of finite dimensional distribution을 아래와 같이 잘 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} &P(X_j \in B, 0 \leq j \leq n) \\ &= P(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \dots, X_n \in B_n) \\ &= \int_{B_0} \mu(dx_0) \int_{B_1} p_0(x_0, \mu(dx_1)) \cdots \int_{B_n} p_{n-1}(x_{n-1}, \mu(dx_n)) \end{aligned}$$

Examples

Extensions of the Markov Property

Recurrence and Transience

Stationary Measures

- 아래식을 만족하는 measure μ 를 stationary measure라고 한다.

$$\sum_x \mu(x)p(x, y) = \mu(y)$$

note: $p(x, y)$: 노드 x 에서 다음 노드 y 로 이동할 확률

note: $\mu(x)$: 노드 x 에 있을 확률

note: 따라서 stationary measure는 특정노드에 있을 확률을 측정하는 메저라 생각할 수 있다.

- stationary measure(=stationary distribution)가 (1) 존재하고 (2) 유일하다는 것이 조사되었다고 하자. 이제 다음 관심사는 아래식을 만족하는 staionary distribution π 이다.

$$\pi p = \pi$$

(정리 6.5.6.)

(정리 6.5.6.) p 가 irreducible 하다는 것과 아래는 동치이다.

- (1) .
- (2) stationary distribution이 존재한다.
- (3) .

Asymptotic Behavior

(레마 6.6.3.) $d_x = 1$ 이라면 m_0 보다 큰 모든 m 에 대하여

$$p^m(x, x) > 0$$

를 만족시킬 수 있다.

(정리 6.6.4.) p 가 (1) irreducible 하고 (2) aperiodic 하며 (3) stationary distribution π 를 가진다고 하자. 그러면 아래가 성립한다.

$$p^n(x, y) \rightarrow \pi(y) \quad as \ n \rightarrow \infty.$$

note: p 가 irreducible 인것만 보이면 stationary distribution π 를 가진다는 것은 정리 6.5.6에 의해서 성립한다. 따라서 (1)-(2)만 조건으로 사용해도 위의 정리는 성립한다.

note: p 가 에이피리오딕하다는 의미는 모든 state가 $d_x = 1$ 을 가진다는 것을 의미한다 .

(pf)

- $S^2 = S \times S$ 라고 하자.
- 전이확률 \bar{p} 를 $S \times S$ 에서 아래와 같이 정의하자.

$$\bar{p}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = p(x_1, x_2)p(y_1, y_2)$$

note: 이는 각각의 coordinate가 독립적으로 움직인다는 것을 의미한다.

(step 1)

- 먼저 \bar{p} 가 이리듀시블임을 보이자. (이는 너무 당연해서 바보같은 증명으로 보이지만 정리의 에이피리오덕조건을 사용하는 유일한 과정이다.) 우선 p 가 이리듀시블하다는 조건으로부터 아래를 만족하는 적당한 K, L 이 존재함을 알 수 있다.

$$p^K(x_1, x_2) > 0 \quad \text{and} \quad p^L(y_1, y_2) > 0.$$

그런데 레마 6.6.3에 의해서 M 을 적당히 크게 설정한다면 아래를 만족시킬 수 있음을 알 수 있다.

$$p^{L+M}(x_1, x_2) > 0 \quad \text{and} \quad p^{K+M}(y_1, y_2) > 0.$$

따라서 아래가 성립한다.

$$\bar{p}^{K+L+M}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) > 0$$

(step 2)

- 두 코디네이츠가 독립이므로 \bar{p} 의 stationary distribution을 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$\bar{\pi}(a, b) = \pi(a)\pi(b).$$

- 정리 6.5.4에 의해서 \bar{p} 의 stationary distribution이 존재한다는 것은 \bar{p} 의 모든상태가 recurrent하다는 것을 의미한다.
- (X_n, Y_n) 을 $S \times S$ 에서의 체인이라고 하자.
- T 를 이 체인이 처음으로 대각 $\{(y, y) \in S\}$ 을 치는 시간이라고 하자.
- $T(x, x)$ 를 (x, x) 를 hit하는 시간이라고하자.
- \bar{p} 가 (1) irreducible 하고 (2) recurrent 하므로 $T(x, x) < \infty$ a.s. 이고 따라서 $T < \infty$ a.s. 이다.

(step 3)

- 우선 두개의 코디네이트 (X_n, Y_n) 가 $\{T \leq n\}$ 에서 같은 분포를 가진다는 것을 관찰하자.
- (X_n, Y_n) 이 첫 교차점을 가지는 시간과 장소를 고려하여보자. 마코프 성질을 이용하면

$$P(X_n = y, T \leq n) = \sum_{m=1}^n \sum_x P(T = m, X_m = x, X_n = y)$$

Periodicity, Tail σ -field

General State