

연습문제 5.12.

- $X_1 \dots X_n \sim Poi(\lambda).$

- $\sqrt{n}(g(\bar{X}) - g(\lambda)) \xrightarrow{d} Z, \quad Z \sim N(0, 1)$ 을 만족하는 변환 g 를 구하라.



- CLT를 쓰면

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda) \xrightarrow{d} N(0, \lambda)$$

- $g(\cdot)$ 이 미분가능한 함수라고 하자.

- $g(\cdot)$ 는 미분가능한 어떠한 형태도 가능하다. 예를들어 아래와 같은 형태들이 가능하다고 하자.

$$g(x) = x^2$$

혹은

$$g(x) = 2\sqrt{x}$$

- 예를들어서 $g(x) = 2\sqrt{x}$ 와 같은 형태라고 하자. 그렇다면 $x = a$ 에서 $g(x)$ 를 테일러 전개하면 아래와 같이 표현가능하다.

$$g(x) = g(a) + (x - a)g'(a) + (x - a)^2O(1)$$

- x 대신에 \bar{X}_n a 대신에 λ 를 대입하면

$$g(\bar{X}_n) = g(\lambda) + (\bar{X}_n - \lambda)g'(\lambda) + (\bar{X}_n - \lambda)^2O(1).$$

양변에 \sqrt{n} 을 곱하고 정리하면

$$\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\lambda)) = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda)g'(\lambda) + \sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda)^2O(1).$$

그런데 $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda)^2O(1) = O_p(1)o_p(1)O(1) = o_p(1)$ 이므로

$$\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\lambda)) = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda)g'(\lambda) + o_p(1)$$

그런데 $g(x) = 2\sqrt{x}$ 이므로 $g'(x) = 1/\sqrt{x}$ 이다. 따라서 $g'(\lambda) = 1/\sqrt{\lambda}$.

- 정리하면

$$\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\lambda)) = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda)1/\sqrt{\lambda} + o_p(1)$$

CLT의 결과를 쓰면

$$\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\lambda)) \xrightarrow{d} N(0, \lambda)1/\sqrt{\lambda}$$

따라서

$$\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\lambda)) \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

(결론) 만약에 $g(x) = 2\sqrt{x}$ 로 설정한다면

$$\sqrt{n}(g(\bar{X}) - g(\lambda))$$

의 극한이 표준정규분포로 수렴하므로 문제에서 원하는 답을 구할 수 있다.

- 이는 바꾸어 말하면 포아송분포에 한정하여 (1) 관측한 확률변수에서 제곱근을 취한뒤 2배를 하고 (2) 그상태에서 CLT를 쓴다면 표준정규분포로 수렴한다는 것이다.

- 이 경우 그냥 포아송분포자체에서 CLT를 쓰는것보다 이득되는 경우가 있다. (일단 이렇게만 알아둘것)



- 그렇다면 어떻게 $g(x) = 2\sqrt{x}$ 임을 알 수 있을까?

- g 가 미분가능하다면

$$g(x) \approx g(a) + (x - a)g'(a)$$

이고 다시 정리하면

$$\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\lambda)) \approx \sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda)g'(\lambda)$$

따라서

$$\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\lambda)) \xrightarrow{d} N(0, \lambda)g'(\lambda)$$

이고 정규분포의 특성에 따라서

$$\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\lambda)) \xrightarrow{d} N(0, \lambda(g'(\lambda))^2)$$

이다. 따라서

$$\lambda(g'(\lambda))^2 = 1$$

이어야 할 조건은

$$g'(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

일 조건이다. 즉 $g(x)$ 의 형태는 모르겠지만 $g'(x)$ 는 아래와 같아야 함을 알 수 있다.

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

이러부터 $g(x)$ 를 유추하면

$$g(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}.$$



- 이제 λ 의 점근적인 신뢰구간을 구해보자. 아래의 식을 관찰하자.

$$2\sqrt{n}(\sqrt{\bar{X}_n} - \sqrt{\lambda}) \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

이때 $2\sqrt{n}(\sqrt{\bar{X}_n} - \sqrt{\lambda})$ 자체를 하나의 통계량 Y_n 으로 본다면

$$Y_n \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

Y_n 이 정규분포를 따른다면 아래가 성립한다.

$$P(-Z_{\alpha/2} < Y_n < Z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

Y_n 이 정규분포는 아니지만 점근적으로 정규분포를 따른다면 아래가 성립한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(-Z_{\alpha/2} < Y_n < Z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(-Z_{\alpha/2} < 2\sqrt{n}(\sqrt{\bar{X}_n} - \sqrt{\lambda}) < Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

이는

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(-Z_{\alpha/2} < 2\sqrt{n}(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\bar{X}_n}) < Z_{\alpha/2} \right) = 1 - \alpha$$

정리하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{-Z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}} + \sqrt{\bar{X}_n} < \sqrt{\lambda} < \frac{Z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}} + \sqrt{\bar{X}_n} \right) = 1 - \alpha$$

따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left(\frac{-Z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}} + \sqrt{\bar{X}_n} \right)^2 < \lambda < \left(\frac{Z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}} + \sqrt{\bar{X}_n} \right)^2 \right) = 1 - \alpha$$

이 성립한다.

- 위의 식이 의미하는것은 λ 가 구간

$$\left(\left(\frac{-Z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}} + \sqrt{\bar{X}_n} \right)^2, \left(\frac{Z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}} + \sqrt{\bar{X}_n} \right)^2 \right)$$

에 포함될 확률이 점근적으로 $1 - \alpha$ 에 수렴한다는 뜻이다. 이는 바꾸어 말하면 매우 큰 n 에 대하여 $1 - \alpha$ 의 확률로 모수가 위의 구간에 있음을 확신할 수 있다는 의미이다. 이를 $1 - \alpha$ 의 점근적 신뢰구간이라고 부른다.

- 예를들어 λ 의 점근적인 95퍼센트 신뢰구간은 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\left(\left(\frac{-1.96}{2\sqrt{n}} + \sqrt{\bar{X}_n} \right)^2, \left(\frac{1.96}{2\sqrt{n}} + \sqrt{\bar{X}_n} \right)^2 \right)$$

연습문제 5.14.

- $\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} \stackrel{iid}{\sim} F$ with

(1) $EX_1 = EY_1 = 0,$

(2) $EX_1^2 = EY_1^2 = 1,$

(3) $EX_1Y_1 = \rho,$

(4) $EX_1^4 < \infty, EY_1^4 < \infty.$

- $\hat{\rho}_n = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}.$

- 아래와 같은 기호를 약속하자.

(1) $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$

(2) $\bar{X}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2.$

(3) $\overline{XY} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i Y_i.$

(a) $\sqrt{n}\bar{X}\bar{Y} \xrightarrow{p} 0$ 임을 보여라.

(sol)

- $\sqrt{n}\bar{X} = O_p(1), \bar{Y} = o_p(1)$ 이므로 자명함. 여기에서 $\sqrt{n}\bar{X} = O_p(1)$ 는 CLT에 의해서 성립하고 $\bar{Y} = o_p(1)$ 는 큰수의 법칙 즉 WLLN에 의해서 성립한다.

note: 추가적으로 $\bar{X}\bar{Y} - \overline{XY} = \bar{X}\bar{Y} + o_p(\frac{1}{\sqrt{n}})$ 임도 알 수 있다.

(b) 아래가 성립함을 보여라.

$$\sqrt{m_2 - m_1^2} - \sqrt{m_2} = \frac{-m_1^2}{\sqrt{m_2 - m_1^2} + \sqrt{m_2}}$$

이때 $m_1 = \bar{X}, m_2 = \bar{X}^2$ 라고 하자.

(sol) (자명하다)

note: 추가적으로 아래를 확인가능하다.

$$\sqrt{m_2 - m_1^2} = \sqrt{m_2} + \frac{-m_1^2}{\sqrt{m_2 - m_1^2} + \sqrt{m_2}} = \sqrt{m_2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

(pf)

- $\sqrt{n}m_1^2 = \sqrt{n}m_1m_1 = O_p(1)o_p(1) = o_p(1) \quad \therefore m_1^2 = o_p(\frac{1}{\sqrt{n}}).$

- $m_2 = 1 + o_p(1)$ 이다. 즉 $m_2 \xrightarrow{p} 1$ 이다. 또한 $m_1^2 = o_p(\frac{1}{\sqrt{n}})$ 이다. 따라서

$$\frac{-m_1^2}{\sqrt{m_2 - m_1^2} + \sqrt{m_2}} = o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

이다. 왜냐하면 분모는 1로 확률수렴하고 (continuous mapping thm) 분자는 $o_p(\frac{1}{\sqrt{n}})$ 이기 때문.

(c) 아래가 성립함을 보여라.

$$\sqrt{m_2} - 1 = \frac{m_2 - 1}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

(sol)

- 아래식을 관찰하라.

$$\sqrt{m_2} - 1 = \frac{m_2 - 1}{\sqrt{m_2} + 1} = \frac{m_2 - 1}{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{m_2} + 1} - \frac{1}{2} \right) (m_2 - 1)$$

- 이제 아래를 보이면 된다.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{m_2+1}} - \frac{1}{2}\right)(m_2-1) := r_{3n} = o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

따라서 아래를 보이면 된다.

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{m_2+1}} - \frac{1}{2}\right)(m_2-1) = o_p(1)$$

- 그런데 CLT에 의해서 $\sqrt{n}(m_2-1) = O_p(1)$ 가 성립한다.
- continuous mapping thm에 의해서 아래가 성립한다.

$$m_2 \xrightarrow{p} 1 \implies \left(\frac{1}{\sqrt{m_2+1}} - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{p} 0$$

- 따라서

$$\left(\frac{1}{\sqrt{m_2+1}} - \frac{1}{2}\right) = o_p(1)$$

- 따라서 증명이 끝난다.

(d) 아래를 보여라.

$$c_1 - m_1 s_1 - \rho \sqrt{m_2 - m_1^2} \sqrt{s_2 - s_1^2} = c_1 - \rho \frac{m_2 + s_2}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

이때 $c_1 = \bar{X}\bar{Y}$, $s_1 = \bar{Y}$, $s_2 = \bar{Y}^2$ 이다.

(sol)

- (b)의 결과로부터 아래가 성립한다.

$$\sqrt{m_2 - m_1^2} = \sqrt{m_2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

- (c)의 결과로부터 아래가 성립한다.

$$\sqrt{m_2} - 1 = \frac{m_2 - 1}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

- 둘을 종합하면

$$\sqrt{m_2 - m_1^2} = 1 + \frac{m_2 - 1}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

- 따라서

$$\sqrt{m_2 - m_1^2} \sqrt{s_2 - s_1^2}$$

는 아래식들의 합이다.

$$(1) \quad 1 + \frac{s_2 - 1}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$(2) \quad \frac{m_2 - 1}{2} \left(1 + \frac{s_2 - 1}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \frac{m_2 - 1}{2} + O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\underline{\text{note:}} \quad O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{n}}O_p(1) = \frac{1}{\sqrt{n}}o_p(1) = o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$(2) \quad \text{따라서 결국 } \frac{m_2 - 1}{2} \left(1 + \frac{s_2 - 1}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \frac{m_2 - 1}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

$$(3) \quad o_p(1/\sqrt{n}) \left(1 + \frac{s_2 - 1}{2} + o_p(1/\sqrt{n})\right) = o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

- 따라서

$$\sqrt{m_2 - m_1^2} \sqrt{s_2 - s_1^2} = 1 + \frac{s_2 - 1}{2} + \frac{m_2 - 1}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

정리하면

$$\sqrt{m_2 - m_1^2} \sqrt{s_2 - s_1^2} = \frac{s_2 + m_2}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

- 한편 (a)로부터

$$m_1 s_1 = \bar{X}\bar{Y} = o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

- 따라서 증명이 끝난다.

(e) $\sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \rho) = \sqrt{n}\bar{W} + o_p(1)$ 임을 보여라. 단

$$W = XY - \frac{\rho(X^2 + Y^2)}{2}.$$

(sol)

$$\bullet \quad \bar{W} = \bar{X}\bar{Y} - \frac{\rho(\bar{X}^2 + \bar{Y}^2)}{2} = c_1 - \frac{\rho(m_2 + s_2)}{2}.$$

$$\bullet \quad \sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \rho) = \sqrt{n} \times \frac{c_1 - m_1 s_1 - \rho \sqrt{m_2 - m_1^2} \sqrt{s_2 - s_1^2}}{\sqrt{m_2 - m_1^2} \sqrt{s_2 - s_1^2}}$$

$$\bullet \quad (d) \text{에 의해서 "분자"} = c_1 - \frac{\rho(m_2 + s_2)}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

- 분모는 1로 확률수렴한다.

- 따라서

$$\sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \rho) = \sqrt{n} \times \frac{c_1 - \frac{\rho(m_2 + s_2)}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{1 + o_p(1)} = \frac{\sqrt{n}\bar{W} + o_p(1)}{1 + o_p(1)} = \sqrt{n}\bar{W} + o_p(1)$$

정리 4.4.3

- X 가 연속형 확률변수라고 하자. $F(x)$ 를 X 의 *cdf*라고 하자.

- $F(x)$ 도 분명히 함수이므로 $F(X)$ 를 정의할 수 있다. $F(X)$ 는 확률변수가 된다.

- 확률변수이므로 분포를 따르는데 $F(X)$ 는 아래의 분포를 따름이 알려져 있다.

$$F(X) \sim U(0, 1)$$

- 또한 $F^{-1}(U)$ 역시 확률변수가 된다. (단 $U \sim U(0, 1)$.) 그런데 이 확률변수는 $F^{-1}(U)$ 는 X 와 분포가 같음이 알려져 있다. 즉

$$F^{-1}(U) \stackrel{d}{=} X$$

이다.



- $U_1, \dots, U_n \stackrel{iid}{\sim} U(0, 1)$ 라고 하자. 그리고 $U_{(1)}, \dots, U_{(n)}$ 을 U_1, \dots, U_n 의 순서통계량이라고 하자. 정리 4.4.3 에 의해서

$$\begin{aligned} F^{-1}(U_{(1)}) &:= X_1^* \sim F \\ F^{-1}(U_{(2)}) &:= X_2^* \sim F \\ &\dots \\ F^{-1}(U_{(n)}) &:= X_n^* \sim F \end{aligned}$$

이다.

- F 가 순증가 함수이므로 $X_1^* < \dots < X_n^*$ 이다.

- 아래가 성립한다. (왜??)

$$\begin{pmatrix} X_1^* \\ \dots \\ X_n^* \end{pmatrix} \stackrel{d}{=} \begin{pmatrix} X_{(1)} \\ \dots \\ X_{(n)} \end{pmatrix}$$

이는 X 의 cdf F 를 알고 있을 경우 X 의 순서통계량을 어떻게 생성할지 알려준다.

정리 4.4.3.

- 어떤분포의 순서통계량: $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} F \implies X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$.
- 균등분포의 순서통계량: $U_1, \dots, U_n \stackrel{iid}{\sim} U(0, 1) \implies U_{(1)}, \dots, U_{(n)}$.
- 지수분포의 순서통계량: $Y_1, \dots, Y_n \stackrel{iid}{\sim} Exp(1) \implies Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)}$.
- 균등분포의 순서통계량과 지수분포의 순서통계량에는 아래와 같은 관계가 있다. (예제 4.3.4.)

$$U_{(r)} \stackrel{d}{=} 1 - e^{-Y_{(r)}}, \quad r = 1, 2, \dots, n$$

- 그런데 임의의 $r = 1, 2, \dots, n$ 에 대하여 지수분포의 순서통계량 $Y_{(r)}$ 은 아래를 만족한다. (예제 4.3.3.)

$$\forall r, \exists Z_1, \dots, Z_r \stackrel{iid}{\sim} Exp(1) \text{ s.t. } Y_{(r)} \stackrel{d}{=} \frac{1}{n}Z_1 + \dots + \frac{1}{n-r+1}Z_r$$



- 순서통계량 $X_{(r)}$ 은 아래와 같이 얻을 수 있다.

$$X_{(r)} \stackrel{d}{=} F^{-1}(U_{(r)})$$

- 그런데 (1) $U_{(r)} \stackrel{d}{=} 1 - e^{-Y_{(r)}}$ 와 (2) $Y_{(r)} \stackrel{d}{=} \frac{1}{n}Z_1 + \dots + \frac{1}{n-r+1}Z_r$ 을 이용하면

$$X_{(r)} \stackrel{d}{=} F^{-1} \left(1 - e^{-\left(\frac{1}{n}Z_1 + \dots + \frac{1}{n-r+1}Z_r\right)} \right)$$

따라서 $h(\star) = F^{-1}(1 - e^{-\star})$ 라고 정의하면

$$X_{(r)} \stackrel{d}{=} h \left(\frac{1}{n}Z_1 + \dots + \frac{1}{n-r+1}Z_r \right)$$

가 성립한다.

연습문제 5.16.

- $r_n \sim \alpha n \iff r_n/n \rightarrow \alpha$.

- $s_n \sim \beta n \iff s_n/n \rightarrow \beta$.

note: 위의정의를 예제 5.2.7 에 나와있다.

- 그리고 $0 < \alpha < \beta < 1$.

- 편의상 아래를 가정하자.

(1) r_n 을 그냥 r 로 쓰자. 여기에서 r 은 n 개의 sample 중 하위25%에 번째에 해당하는 수 이다. 즉 $r/n \approx 1/4$. 동일한 논리로 s_n 도 그냥 s 라고 쓰자.

(2) $r/n \rightarrow \frac{1}{4}$ and $s/n \rightarrow \frac{3}{4}$.

(3) α, β 를 그냥 α_r, α_s 로 정의하자. 이는 분위수의 느낌을 좀더 강조하기 위해서이다. α_r 은 r 에 해당하는 분위수라는 뜻임.

- $X_{(r)}$ 과 $X_{(s)}$ 의 join pdf를 구하라.

(sol)

- 우선 순서통계량 문제이므로 아래와 같은 확률변수를 가정하자.

$$Y_1, \dots, Y_n \stackrel{iid}{\sim} Exp(1).$$

- 아래와 같은 벡터를 가정하자.

$$\begin{bmatrix} Y_{(r)} \\ Y_{(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n}Z_1 + \dots + \frac{1}{n-r+1}Z_r \\ \frac{1}{n}Z_1 + \dots + \frac{1}{n-s+1}Z_s \end{bmatrix}$$

- 전체적인 그림.

$Y_{(r)}$ 과 $Y_{(s)}$ 번째 순서통계량의 분포

$$\implies X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} F \quad \text{인 임의의 분포에서 } X_{(r)} \text{과 } X_{(s)} \text{의 분포}$$

- 아래가 성립한다. (예제 5.2.7)

$$\begin{aligned} E(Y_{(r)}) &= E \left(\frac{1}{n}Z_1 + \dots + \frac{1}{n-r+1}Z_r \right) = \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n-r+1} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{1-k/n} \approx \int_0^{\alpha_r} \frac{1}{1-x} dx = -\log(1 - \alpha_r) \end{aligned}$$

- 아래도 성립한다. (예제 5.2.7)

$$\begin{aligned} V(Y_{(r)}) &= V\left(\frac{1}{n}Z_1 + \cdots + \frac{1}{n-r+1}Z_r\right) = \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{(n-r+1)^2} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{(1-k/n)^2} \approx \int_0^{\alpha_r} \frac{1}{(1-x)^2} dx = \frac{1}{n} \frac{\alpha_r}{1-\alpha_r} \end{aligned}$$

- 따라서

$$\sqrt{n} \left(\begin{bmatrix} Y_{(r)} \\ Y_{(s)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\log(1-\alpha_r) \\ -\log(1-\alpha_s) \end{bmatrix} \right) \xrightarrow{d} N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\alpha_r}{1-\alpha_r} & \frac{\alpha_r}{1-\alpha_r} \\ \frac{\alpha_r}{1-\alpha_r} & \frac{\alpha_s}{1-\alpha_s} \end{bmatrix} \right).$$

- 그런데

$$\begin{bmatrix} X_{(r)} \\ X_{(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(Y_{(r)}) \\ h(Y_{(s)}) \end{bmatrix} = g \left(\begin{bmatrix} Y_{(r)} \\ Y_{(s)} \end{bmatrix} \right)$$

- 따라서

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \times \left(\begin{bmatrix} X_{(r)} \\ X_{(s)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ? \\ ? \end{bmatrix} \right) &= \sqrt{n} \times \left(g \left(\begin{bmatrix} Y_{(r)} \\ Y_{(s)} \end{bmatrix} \right) - g \left(\begin{bmatrix} -\log(1-\alpha_r) \\ -\log(1-\alpha_s) \end{bmatrix} \right) \right) \\ &\xrightarrow{d} \mathbf{H}^T N(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}) \end{aligned}$$



- (예제 5.2.7) 이때

$$\boldsymbol{\mu}_x = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\mu}_y) = \begin{bmatrix} F^{-1}(\alpha) \\ F^{-1}(\beta) \end{bmatrix}$$

이다. 왜냐하면

$$h(\star) = F^{-1}(1-e^{-\star}) \implies h(-\log(1-\alpha)) = F^{-1}(1-e^{\log(1-\alpha)}) = F^{-1}(\alpha).$$



- 분산탐을 계산하여 보자. $\boldsymbol{h} = \begin{bmatrix} h(\tau_1) \\ h(\tau_2) \end{bmatrix}$ 이므로

$$\text{일차미분항} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau_1} \\ \frac{\partial}{\partial \tau_2} \end{bmatrix} \boldsymbol{h}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau_1} \\ \frac{\partial}{\partial \tau_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(\mu_{x1}) & h(\mu_{x2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(\tau_1)}{\partial \tau_1} & \frac{\partial h(\tau_2)}{\partial \tau_1} \\ \frac{\partial h(\tau_1)}{\partial \tau_2} & \frac{\partial h(\tau_2)}{\partial \tau_2} \end{bmatrix}$$

이다. 그런데

$$h(\tau_1) = F^{-1}(1-e^{-\tau_1})$$

이므로

$$F\big(h(\tau_1)\big) = 1-e^{-\tau_1}$$

그러므로

$$\frac{\partial}{\partial \tau_1} F(h(\tau_1)) = e^{-\tau_1}$$

따라서

$$f(h(\tau_1)) \frac{\partial}{\partial \tau_1} h(\tau_1) = e^{-\tau} \iff \frac{\partial}{\partial \tau_1} h(\tau_1) = \frac{e^{-\tau_1}}{f(h(\tau_1))}$$

τ_1 대신에 $-\log(1-\alpha)$ 를 대입하자.

$$e^{-\tau_1} : 1-\alpha$$

$$f(h(\tau_1)) : F^{-1}(\alpha)$$

- asdf

$$\begin{pmatrix} asdf & asdf \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{1-\alpha} & \frac{\alpha}{1-\alpha} \\ \frac{\alpha}{1-\alpha} & \frac{\beta}{1-\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} asdf \\ asdf \end{pmatrix}$$