4.1. Stopping Times

- 아래를 가정하자.

$$\begin{aligned}&\Omega=\{(\omega_1,\omega_2,\dots,):\omega_i\in S\}\\&\mathcal{F}=\mathcal{S}\times\mathcal{S}\times\dots\\&P=\mu\times\mu\times\dots\quad \mu \text{ is the distribution of } X_i.\\&X_n(\omega)=\omega_n\end{aligned}$$

- 맵핑 $\pi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 가 *finite permutation*이라는 것은 유한개의 i에 대해서면 $\pi(i)\neq i$가 성립한다는 의미이다. 따라서 퍼뮤테이션은 인덱스의 순서를 (유한개) 바꿔주는 함수라 볼 수 있다.

- 만약에 π가 $\mathbb{N}$의 *finite permutation*이고 $\omega\in S^{\mathbb{N}}$이라면 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$i\text{-th element of } \pi\omega=\omega\text{의 } \pi(i)\text{-th element}$$

따라서

$$\big(\pi\omega\big)_i=\omega_{\pi(i)}$$

와 같이 쓸 수 있다. 이 경우 array of realization:

$$\omega_1,\omega_2,\dots$$

이 π에 의해서 재정렬된다고 해석할 수 있다. (Note that $\omega_1=X_1(\omega)$)

- 따라서 array of realization 즉 어떠한 확률시행의 결과에 π를 취한다는 의미는 확률변수의 결과 중 유한개의 순서를 임의로 바꾼다는 것을 의미한다.

(def) 어떠한 사건 A가 *permutable*하다는 것은 사건 A가 아래를 식을 만족한다는 의미이다.

$$A=\pi^{-1}(A)$$

여기에서 $\pi^{-1}(A)=\{\omega:\pi\omega\in A\}$이다. 이 정의는 이해하기 그렇게 쉽지 않다. 아래의 설명들을 참고하여 보자.

- 우선 사건 A란 무엇인지 다시 생각해보자. 사건이란 확률시행의 결과를 재해석하여 구성한 어떠한 이벤트를 의미한다. 따라서 A는 예를들어 "주사위를 5번 던졌을때 짝수가 3번이상 나올 사건"과 같이 정의할 수 있다.

- 이제 퍼뮤터블의 의미를 살펴보자. 어떠한 사건 A 퍼뮤터블하다는 것은 확률변수의 결과 중 유한개의 순서를 임의로 바꾸어도 사건 A를 일관적으로 정의할 수 있다는 것을 의미한다.

example: 예를들어 보자. $X_1,X_2,\dots$이 1과 -1중 하나가 나오는 베르누이 시행이라고 하자. 만약

$$A: \text{랜덤변수들의 총합 즉 } X_1+X_2+X_3+\dots \text{ 가 음수일 사건}$$

이라 정의한다고 하자. 직관적으로 A는 확률변수들의 순서를 바꾸어서 상관없으므로 이럴 경우 사건 A를 퍼뮤터블 하다고 말한다. 이 예제를 좀 더 수학적으로 표현하여 보자.

$$A=\{\omega:X_1(\omega)+X_2(\omega)+\dots<0\}$$

π를 인덱스 1과 2를 바꾸는 변환이라고 하자. 그러면

$$\pi\omega=\pi(\omega_1,\omega_2,\dots)=(\omega_2,\omega_1,\dots)$$

따라서

$$\omega\in A\iff X_1(\omega)+X_2(\omega)+X_3(\omega)+\dots<0$$

에 대응하는 것은

$$\pi\omega\in A\iff X_2(\omega)+X_1(\omega)+X_3(\omega)+\dots<0$$

결국

$$\pi^{-1}(A)=\{\omega:\pi\omega\in A\}=\{\omega:\omega\in A\}=A.$$

example: 편의상 X_1,X_2,X_3을 베르누이시행에서 관측하였다고 하자.

$$A\text{: } X_1+X_2+X_3=1 \text{ 일 사건}$$

그러면

$$A=\{\omega:\boldsymbol{X}(\omega)=(1,0,0)\text{ or }\boldsymbol{X}(\omega)=(0,1,0)\text{ or }\boldsymbol{X}(\omega)=(0,0,1)\}$$

이다. 단, $\boldsymbol{X}(\omega)=\big(X_1(\omega),X_2(\omega),X_3(\omega)\big)$. 이때 A는 퍼뮤터블하다. 아래와 같은 collection을 고려하여 보자.

$$\mathcal{E}=\{\emptyset,A,A^c,\Omega\}$$

$\mathcal{E}$는 시그마필드이고 모든 원소가 퍼뮤터블하다.

(def) $\mathcal{E}$를 *exchangeable* 시그마필드라고 말한다. 즉 어떠한 시그마필드를 구성하는 모든 사건이 퍼뮤터블하면 익스체인지어블하다고 말한다.

example:

- 퍼뮤터블이벤트에 대한 예제를 좀더 살펴보자. (교재에 있는 예제이다.) 아래의 사건은 퍼뮤터블하다.

$$\{\omega:S_n(\omega)\in B,\ i.o.\}$$

위의 사건이 의미하는 것은 유한개의 n을 제외하고 모두

$$S_n\in B^c$$

라는 의미이다. 왜냐하면

$$\begin{aligned}&S_n\in B,\ i.o.\\&\iff S_n\in B^c,\ a.b.f.\\&\iff S_n\in B^c,\ \text{for all } n\geq N_0\end{aligned}$$

이기 때문이다.

- 이제 편의상 확률변수열 $\{X_n\}$에서 유한개의 인덱스를 서로 바꾸어 확률변수열 $\{\tilde{X}_n\}$을 만들었다고 가정하자. 그리고

$$S_n=X_1+\dots+X_n=X_1(\omega)+\dots+X_n(\omega)$$

이라고 하고

$$\tilde{S}_n=\tilde{X}_1+\dots+\tilde{X}_n=X_1(\pi\omega)+\dots+X_n(\pi\omega)$$

이라고 하자. 유한개의 n을 제외하면

$$S_n\equiv S_n(\omega)=S_n(\pi\omega)\equiv\tilde{S}_n$$

임을 주장할 수 있다. 즉

$$\exists N_0\quad s.t.\quad \forall n\geq N_0:\quad S_n=\tilde{S}_n$$

가 성립함을 보일 수 있다. 그도 그럴것이 π는 유한개의 인덱스를 서로 바꾸는 역할을 하므로 적당히 큰 수 N_0이상으로는 그 유한개의 바꿈이 없다고 보일수 있다. (이때 큰 수 N_0의 존재성은 "유한"개의 바꿈이라는 조건때문에 증명된다.) 예를들어 100을 1로 1을 100으로 바꾼다고 하자. 그러면 $N_0=100$이 존재하여

$$\forall n\geq 100:\quad S_n=\tilde{S}_n$$

라고 주장할 수 있다.

- 이제

$$\exists N_0\quad s.t.\quad \forall n\geq N_0:\quad S_n=\tilde{S}_n$$

를 이용하면 아래를 얻을 수 있다. (풀이라기보다 표현들을 익숙하게 하기 위해 한번 쓴 것)

$$\begin{aligned}&\{S_n(\omega)\in B,\ i.o.\}\\&=\{S_n(\omega)\in B^c,\ a.b.f.\}\\&=\{\tilde{S}_n(\omega)\in B^c,\ a.b.f.\}\\&=\{S_n(\pi\omega)\in B^c,\ a.b.f.\}\\&=\{S_n(\pi\omega)\in B,\ i.o.\}\end{aligned}$$

따라서 사건 $A=\{\omega:S_n(\omega)\in B,\ i.o.\}$에 대하여

$$\omega\in A\iff\pi\omega\in A$$

이다.

<u>note:</u> $S_n(\omega)=S_n(\pi\omega)$은 그냥 모든 n에 대하여 성립하는것 아닌가? 하는 착각을 하지 않기를 바란다. 물론

$$S=X_1+X_2+X_3+\dots$$

은 항상

$$S(\omega)=S(\pi\omega)$$

가 성립하지만 S_n은 그렇지 않다. 예를들어서 π를 1과 100의 인덱스를 서로 바꾸는 규칙이라고 하자.

$$\begin{aligned}&S_1(\omega)=X_1\text{ and }S_1(\pi\omega)=X_{100}\\&S_2(\omega)=X_1+X_2\text{ and }S_2(\pi\omega)=X_{100}+X_2\\&\dots\end{aligned}$$

이므로 $n<100$에 대하여서는 $S_n(\omega)\neq S_n(\pi\omega)$이다.

example: 아래의 사건도 퍼뮤터블하다.

$$\left\{\omega:\limsup_{n\to\infty}S_n(\omega)/c_n\leq 1\right\}$$

이유는 적당히 큰 n에 대하여 $S_n(\omega)=S_n(\pi\omega)$라고 주장할 수 있기 때문이다.

(thm) 테일-시그마필드에 속하는 모든 이벤트는 퍼뮤터블하다. 이때 *tail-σ-field*는 아래와 같이 정의되는 시그마필드 $\mathcal{T}$ 이다.

$$\mathcal{T}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}'_n\quad\text{where } \mathcal{F}'_n=\sigma(X_n,X_{n+1},X_{n+2},\dots)$$

<u>note:</u> 어떠한 이벤트 A가 $A\in\mathcal{T}$라는 것은 임의의 유한개의 realization의 결과를 **몰라도(=삭제하여도, 아무값이나 넣어도)** event A가 동일하게 정의될 수 있음을 의미한다.

- 위의 정리의 역은 성립하지 않는다. 즉 퍼뮤터블한 사건이 항상 테일 시그마 필드의 원소는 아니다. 아까 소개한 바 있는 아래의 사건

$$\{\omega:S_n(\omega)\in B,\ i.o.\}$$

은 $\mathcal{E}$에 속하지만(=퍼뮤터블하지만) $\mathcal{T}$에 속하지 않는(=테일시그마필드의 원소는아닌) 사건이다. 이를 이해하기 위해 좀 더 구체적인 예로 생각해보자. 아래와 같은 구조에서 확률변수가 생성된다고 하자.

$$\begin{aligned}&X_1\sim Ber(p)\\&X_2=-X_1\\&X_n=0\text{ for } n\geq 3.\end{aligned}$$

관측가능한 확률변수열 $\{X_n\}$은 아래의 2경우 뿐이다.

$$-1,1,0,0,0,0,\dots$$

$$1,-1,0,0,0,0,\dots$$

사건 A_n를 아래와 같이 정의하자.

$$A_n=\{S_n(\omega)\in B,\ i.o.\}\quad B=\{0\}$$

이라고 하자. 사건 A_n는 퍼뮤터블하다. 왜냐하면 확률변수열의 순서를 임의로 바꾸어도 적당히 큰 n에 대하여 (구체적으로는 $n\geq 2$에 대하여)

$$0=S_n=\tilde{S}_n=0$$

이 성립하기 때문이다. 즉 $X_1+X_2+\dots+X_n=0$이라는 사실은 확률변수열의 순서를 아무리 바꾸어도 $n\geq 2$에서 항상 성립한다. 하지만 사건 A_n는 테일시그마필드의 원소가 아니다. 왜냐하면 A_n가 테일시그마필드의 원소라면 특정 값을 삭제해도 그 결과가 균일하게 정의되어야 하는데 첫번째 값 X_1을 삭제한다면

$$\begin{aligned}&S_n=X_2+X_3+\dots+X_n=1\\&\Longrightarrow P(A_n)=P(S_n\in B,\ i.o.)=P(S_n=0,\ i.o.)=0\end{aligned}$$

만약에 X_2를 삭제한다면

$$\begin{aligned}&S_n=X_1+X_3+\dots+X_n=1\\&\Longrightarrow P(A_n)=P(S_n\in B,\ i.o.)=P(S_n=0,\ i.o.)=0\end{aligned}$$

X_1,X_2를 모두 삭제하면

$$\begin{aligned}&S_n=X_3+X_4+\dots+X_n=0\\&\Longrightarrow P(A_n)=P(S_n\in B,\ i.o.)=P(S_n=0,\ i.o.)=0\end{aligned}$$

이 되어서 A_n을 균일하게 정의할 수 없다.

$$B=\{X_1+X_2+\dots\in(-\infty,\infty)\}$$

와 같이 정의하면 라면 이 사건은 퍼뮤터블하고 테일시그마필드의 원소가 된다.

- 만약에 확률변수열 $X_1,X_2,\dots$이 iid 라면 $\mathcal{E}$와 $\mathcal{T}$는 차이가 없다. 이게 바로 **휴이트-새비지**의 정리이다.

(Theorem 4.1.1. Hewitt-Savage 0-1 law.) (1) $X_1,X_2,\dots$ 이 i.i.d.이고 (2) $A\in\mathcal{E}$ 이라면

$$P(A)\in\{0,1\}$$

이다.

6.1. Definitions

(def) $(S,\mathcal{S})$를 measurable space라고 하자. $X_n:(\Omega,\mathcal{F})\to(S,\mathcal{S})$이라고 하자. 편하게

$$(S,\mathcal{S})=(\mathbb{R},\mathcal{R})$$

이라고 생각해도 무방하다. 어떠한 확률변수열 $\{X_n\}$이 filtration $\mathcal{F}_n:=\sigma(X_0,\dots,X_n)$에서 정의되어 있다고 하자. 확률변수열 $\{X_n\}$이 마코프체인이라는 것은 아래와 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}&\{X_n\}\text{ is Markovchain w.r.t. }\mathcal{F}_n\\&\overset{def}{\iff}\text{for all } B\in\mathcal{S}:\quad P(X_{n+1}\in B|\mathcal{F}_n)=P(X_{n+1}\in B|X_n)\end{aligned}$$

<u>note:</u> 확률변수열 $X_1,X_2,\dots$의 값이 바로 이전의 값에 의해서만 결정되면 마코프체인이라고 한다. 즉 X_2의 값을 알기 위해서는 X_1의 값에 대한 정보만 있으면 되고 X_3의 값을 알기 위해서는 X_2에 대한 정보만 있으면 될때 $X_1,X_2,\dots$을 마코프체인이라고 한다.

- 4×4 그리드 세계를 가정하자.

$$\Omega=\{(1,1),\dots,(4,4)\}$$

이고

$$S=\{1,2,3\dots,16\}$$

이라고 하자. 확률변수 $X_1:(\Omega,\mathcal{F})\to(S,\mathcal{S})$은 아래와 같이 정의할 수 있는 맵핑이라고 하자.

$$\begin{aligned}&X_1\big((1,1)\big)=1\\&X_2\big((1,2)\big)=2\\&\dots\\&X_1\big((4,4)\big)=16\end{aligned}$$

따라서

$$X_1=1,X_2=2$$

가 의미하는 것은 처음에는 $(1,1)$의 위치에 있다가 그다음에는 $(1,2)$의 위치로 이동하였다는 것을 의미한다. 이제 $(1,1)$의 위치에서 $(1,2)$의 위치로 이동하는 transition probability를 p라고 정의하자. 여기에서 p는 확률공간을 구성하는 P이지 pmf를 의미하는 것이 아님을 기억하자. p는 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$p:(S,\mathcal{S})\to\mathbb{R}$$

기호로는 아래와 같이 쓴다.

$$p(x,A)$$

여기에서 $x\in S$, $A\in\mathcal{S}$이다.

example: $x=1$, $A=\{1,2,5\}$이라고 하자.

$$\begin{aligned}&x=1\Leftrightarrow X(\omega)=1\Leftrightarrow\omega=(1,1)\\&A=\{1,2,5\}\Leftrightarrow\{\omega:X(\omega)\in A\}=\{(1,1),(1,2),(2,1)\}\end{aligned}$$

임을 주목하라. 따라서

$$p(x,A)$$

는 점 $(1,1)$에서 출발했는데 점 $(1,1),(1,2),(2,1)$중 하나에 도착할 확률이므로

$$p(x,A)=1$$

이라고 볼 수 있다.

(def) transition probability의 정의를 사용하면 아래를 만족하는 확률변수열 $\{X_n\}$을 마코프체인이라 정의할 수 있다.

$$P(X_{n+1}\in B|\mathcal{F}_n)=p_n(X_n,B)$$

여기에서 p_n은 n번째에 어떠한 위치 X_n에서 B의 부분집합중 하나의 위치로 이동할 확률을 의미한다.

(결론1,2,3의 가정) 만약에 (1) $(S,\mathcal{S})$이 *nice space* 이고 (2) $\{p_n\}$이 잘 정의되며 (3) $(S,\mathcal{S})$에서의 initional distribution μ가 잘 정의된다고 하자.

(결론1) 일단 유한개의 확률변수열 $\{X_n\}$에 대하여 consistence set of finite dimensional distribution을 아래와 같이 잘 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned}&\text{Prob}(X_1\in B_1,X_2\in B_2,\dots,X_n\in B_n)\\&=P(X_1\in B_1,X_2\in B_2,\dots,X_n\in B_n)\\&=\int_{B_0}\mu(dx_0)\int_{B_1}p_0\big(x_0,\mu(dx_1)\big)\cdots\int_{B_n}p_{n-1}\big(x_{n-1},\mu(dx_n)\big)\end{aligned}$$

<u>note:</u> 이때 $\text{Prob}(X_1\in B_1,X_2\in B_2,\dots,X_n\in B_n)$와 같은 표현은 이해하기 쉽지만 수학적으로 엄밀하지 않은 표현이다. 따라서 엄밀하게 하려면 아래의 공간에서 정의되는 확률측도 P를 사용하여 표현해야한다.

$$(S_0\times S_1\dots\times S_n,\mathcal{S}_0\times\mathcal{S}_1\dots\times\mathcal{S}_n)$$

이 공간은 간단하게 아래와 같이 표현하기도 한다.

$$\left(S^{\{0,1,\dots,n\}},\mathcal{S}^{\{0,1,\dots,n\}}\right)$$

<u>note:</u> 즉 결론1은 $\big(S^{\{0,1,\dots,n\}},\mathcal{S}^{\{0,1,\dots,n\}}\big)$에서의 확률측도 P는 (혹은 임의의 유한 확률변수열 $\{X_n\}$에 대한 확률측도 P는) 초기분포 μ와 p_n만 잘 정의하면 모순없이 정의가능하다는 것을 의미한다.

- 하지만 무한일 경우에도 잘 정의될까?

(결론2) (1)-(3)의 가정하에 Kolmogorov's theorem은 확률변수열 $\{X_n\}$이 무한수열을 가지더라도 아래와 같은 확률이 잘 정의됨을 보여준다.

$$\text{Prob}(X_1\in B_1,X_2\in B_2,\dots,)$$

즉 이는 μ와 $\{p_n\}$만 잘 정의되면 위의 같은 확률들을 모순없이 정의할 수 있음을 의미한다. 교재에서는 유한인 경우와 구분하기 위해서 위의 확률을 표현하는 확률측도를 특별히 P_μ라고 하였다. 즉 아래와 같이 써야 올바르다.

$$P_\mu(X_1\in B_1,X_2\in B_2,\dots)$$

이때 P_μ는 $\big(S^{\{0,1,\dots\}},\mathcal{S}^{\{0,1,\dots,\}}\big)$에서의 확률측도이다.

<u>note:</u> 아래의 기호는 외우는 것이 좋겠다.

$$\begin{aligned}&\text{Prob}(X_0\in B_0)=\int_{B_0}\mu(dx_0)\\&\text{Prob}(X_0\in B_0,X_1\in B_1)=\int_{B_0}\mu(d(x_0))\int_{B_1}p\big(x_0,\mu(dx_1)\big)\end{aligned}$$

- 지금까지는 콜모고로프의 정리덕에 P_μ가 잘 정의된다는 사실까지 살펴보았다. 즉 (1) 초기분포 μ와 (2) transition 확률 $\{p_n\}$이 잘 정의되면 무한하게 눈을 쌓아도 P_μ가 잘 정의된다.

(결론3, Thm 6.1.1) (1)-(3)의 조건하에 $\{X_n\}$이 마코프체인이 된다.

(pf) 아래의 기호를 정의하면서 증명을 시작하자.

(notation) $\mu = \delta_x$를 x에서의 포인트매스라고 하자. 그리고 기호 $P_x = P_{\delta_x}$라고 정의하자. P_x가 정의되면 아래와 같이 P_μ를 정의할 수 있다.

$$P_\mu(A) = \int \mu(dx) P_x(A), \quad A \in \mathcal{S}^{\{0,1,\dots,\}}$$

(Thm 6.1.2, 결론1의 변형) (1)-(3)의 조건중 체크하기 까다로운 것은 (1)이다. 오히려 (1)의 조건대신에 $\{X_n\}$이 마코프체인임을 가정하면 결론2와 동일한 결과를 얻을 수 있다. 즉 (1) $\{X_n\}$이 마코프체인이고 (2) transition prob $\{p_n\}$이 주어졌고 (3) initional distribution μ 가 주어졌다면 *finite dimensional distribution*이 아래와 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
&P(X_j \in B_j, 0 \le j \le n) \\
&= P(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \dots, X_n \in B_n) \\
&= \int_{B_0} \mu(dx_0) \int_{B_1} p_0\big(x_0, \mu(dx_1)\big) \cdots \int_{B_n} p_{n-1}\big(x_{n-1}, \mu(dx_n)\big)
\end{aligned}$$

6.2. Examples

6.3. Extensions of the Markov Property

6.4. Recurrence and Transience

6.5. Stationary Measures

- 아래식을 만족하는 measure μ를 stationary measure라고 한다.

$$\sum_x \mu(x) p(x,y) = \mu(y)$$

note: $p(x,y)$: 노드 x에서 다음 노드 y로 이동할 확률

note: $\mu(x)$: 노드 x에 있을 확률

note: 따라서 stationary measure는 특정노드에 있을 확률을 측정하는 메져라 생각할 수 있다.

- stationary measure(=stationary distribution)가 (1) 존재하고 (2) 유일하다는 것이 조사되었다고 하자. 이제 다음 관심사는 아래식을 만족하는 staionary distribution π이다.

$$\pi p = \pi$$

(정리 6.5.6.)

(정리 6.5.6.) p가 irreducible 하다는 것과 아래는 동치이다.

(1) .

(2) stationary distribution이 존재한다.

(3) .

Asymptotic Behavior

(레마 6.6.3.) $d_x = 1$이라면 m_0보다 큰 모든 m에 대하여

$$p^m(x,x) > 0$$

를 만족시킬 수 있다.

(정리 6.6.4.) p가 (1) irreducible 하고 (2) aperiodic 하며 (3) stationary distribution π를 가진다고 하자. 그러면 아래가 성립한다.

$$p^n(x,y) \to \pi(y) \quad as\ n \to \infty.$$

note: p가 irreducible 인것만 보이면 stationary distribution π를 가진다는 것은 정리 6.5.6에 의해서 성립한다. 따라서 (1)-(2)만 조건으로 사용해도 위의 정리는 성립한다.

note: p가 에이피리오딕하다는 의미는 모든 state가 $d_x = 1$을 가진다는 것을 의미한다 .

(pf)

- $S^2 = S \times S$ 라고 하자.

- 전이확률 $\bar{p}$를 $S \times S$에서 아래와 같이 정의하자.

$$\bar{p}\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = p(x_1,x_2)p(y_1,y_2)$$

note: 이는 각각의 coordinate가 독립적으로 움직인다는 것을 의미한다.

(step 1)

- 먼저 $\bar{p}$가 이리듀시블임을 보이자. (이는 너무 당연해서 바보같은 증명으로 보이지만 정리의 에이피리오딕조건을 사용하는 유일한 과정이다.) 우선 p가 이리듀시블하다는 조건으로부터 아래를 만족하는 적당한 K, L이 존재함을 알 수 있다.

$$p^K(x_1,x_2) > 0 \quad \text{and} \quad p^L(y_1,y_2) > 0.$$

그런데 레마 6.6.3에 의해서 M을 적당히 크게 설정한다면 아래를 만족시킬수 있음을 알 수 있다.

$$p^{L+M}(x_1,x_2) > 0 \quad \text{and} \quad p^{K+M}(y_1,y_2) > 0.$$

따라서 아래가 성립한다.

$$\bar{p}^{K+L+M}\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) > 0$$

(step 2)

- 두 코디네이츠가 독립이므로 $\bar{p}$의 stationary distribution을 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$\bar{\pi}(a,b) = \pi(a)\pi(b).$$

- 정리 6.5.4에 의해서 $\bar{p}$의 stationary distribution이 존재한다는 것은 $\bar{p}$의 모든상태가 recurrent하다는 것을 의미한다.

- (X_n, Y_n)을 $S \times S$에서의 체인이라고 하자.

- T를 이 체인이 처음으로 대각 $\{(y,y) \in S\}$을 치는 시간이라고 하자.

- $T(x,x)$를 (x,x)를 hit하는 시간이라고하자.

- $\bar{p}$가 (1) irreducible 하고 (2) recurrent 하므로 $T(x,x) < \infty\ a.s.$ 이고 따라서 $T < \infty\ a.s.$ 이다.

(step 3)

- 우선 두개의 코디네이트 (X_n, Y_n)가 $\{T \le n\}$에서 같은 분포를 가진다는 것을 관찰하자.

- (X_n, Y_n)이 첫 교차점을 가지는 시간과 장소를 고려하여보자. 마코프 성질을 이용하면

$$P(X_n = y, T \le n) = \sum_{m=1}^{n} \sum_x P(T = m, X_m = x, X_n = y)$$

6.6. Periodicity, Tail σ-field

6.7. General State