SARIMA의 ACF

- 시계열강의자료
- 조신섭교수님 교재의 문제풀이

예제

연습문제 10.3.

- 아래의 모형의 ACF를 구해보자.

$$(1-\phi B)Z_t=(1-\theta B)(1-\Theta B^4)\epsilon_t$$

- 이 모형은 정상이라고 가정하자.
- $\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,\gamma_5$ 까지만 어거지로 구하고 그 이후는 아래를 반복한다.

$$\begin{aligned}\gamma_6=&\phi\gamma_5\\ \gamma_7=&\phi\gamma_6\\ \dots\end{aligned}$$

- 모델을 아래와 같이 표현하자.

$$Z_t=\phi Z_{t-1}+\epsilon_t-\theta\epsilon_{t-1}-\Theta\epsilon_{t-4}+\theta\Theta\epsilon_{t-5}$$

- 양변에 Z_t를 곱하고 평균을 취하면

$$\gamma_0=\phi\gamma_1+cov(Z_t,\epsilon_t)-\theta cov(Z_t,\epsilon_{t-1})-\Theta cov(Z_t,\epsilon_{t-4})+\theta\Theta cov(Z_t,\epsilon_{t-5})$$

- 따라서 아래들을 구하면 좋겠다.

$$\begin{aligned}&cov(Z_t,\epsilon_t)\\&cov(Z_t,\epsilon_{t-1})\\&cov(Z_t,\epsilon_{t-4})\\&cov(Z_t,\epsilon_{t-5})\end{aligned}$$

- 먼저 $cov(Z_t,\epsilon_t)$를 구해보자.

$$cov(\phi Z_{t-1}+\epsilon_t-\theta\epsilon_{t-1}-\Theta\epsilon_{t-4}+\theta\Theta\epsilon_{t-5},\quad \epsilon_t)=\sigma^2$$

이다.

- 이제 $cov(Z_t,\epsilon_{t-1})$을 구해보자.

$$cov(\phi Z_{t-1}+\epsilon_t-\theta\epsilon_{t-1}-\Theta\epsilon_{t-4}+\theta\Theta\epsilon_{t-5},\quad \epsilon_{t-1})=\phi\sigma^2-\theta\sigma^2$$

이런식으로 계속 구할 수 없으니 좀 더 체계적인 방법을 알아보자.

- 아래의 식을 관찰하자. 오른쪽 등호는 울드의 정리에 의해 성립한다.

$$Z_t=\frac{(1-\theta B)(1-\Theta B^4)}{1-\phi B}\epsilon_t=(\psi_0+\psi_1B+\psi_2B^2+\dots)\epsilon_t$$

편의상 위의 식을 아래와 같이 약속하자.

$$(1)=(2)=(3)$$

- 식 $(2)=(3)$ 을 관찰하면 아래의 관계가 성립한다.

$$(1-\theta B)(1-\Theta B^4)=(1-\phi B)(\psi_0+\psi_1B+\psi_2B^2+\dots)$$

상수항, B의 계수 B^2의 계수... 등을 순차적으로 비교하면

$$\begin{aligned}1=&\psi_0\\-\theta=&\psi_1-\phi\psi_0\\0=&\psi_2-\phi\psi_1\\0=&\psi_3-\phi\psi_2\\-\Theta=&\psi_4-\phi\psi_3\\\theta\Theta=&\psi_5-\phi\psi_4\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\psi_0=&1\\\psi_1=&\phi-\theta\\\psi_2=&\phi(\phi-\theta)\\\psi_3=&\phi^2(\phi-\theta)\\\psi_4=&\phi^3(\phi-\theta)-\Theta\\\psi_5=&\phi(\phi^3(\phi-\theta)-\Theta)+\theta\Theta=\phi^4(\phi-\theta)-\phi\Theta+\theta\Theta\end{aligned}$$

- 위의 결과를 활용하기 위해 $(1)=(3)$의 양변에 $\epsilon_t,\epsilon_{t-1},\epsilon_{t-2},\dots$를 순차적으로 곱하고 평균을 취하자. 그러면 아래를 얻는다.

$$\begin{aligned}cov(Z_t,\epsilon_t)=&\psi_0\times\sigma^2=\sigma^2\\cov(Z_t,\epsilon_{t-1})=&\psi_1\times\sigma^2=(\phi-\theta)\sigma^2\\cov(Z_t,\epsilon_{t-2})=&\psi_2\times\sigma^2=\phi(\phi-\theta)\sigma^2\\cov(Z_t,\epsilon_{t-3})=&\psi_3\times\sigma^2=\phi^2(\phi-\theta)\sigma^2\\cov(Z_t,\epsilon_{t-4})=&\psi_4\times\sigma^2=\big(\phi^3(\phi-\theta)-\Theta\big)\sigma^2\\cov(Z_t,\epsilon_{t-5})=&\psi_5\times\sigma^2=\big(\phi^4(\phi-\theta)-\phi\Theta+\theta\Theta\big)\sigma^2\end{aligned}$$

- 이제 아래식의 양변에 각각 $Z_t,Z_{t-1},\dots,Z_{t-5}$를 곱한뒤 평균을 취하면 5개의 식이 나온다.

$$Z_t=\phi Z_{t-1}+\epsilon_t-\theta\epsilon_{t-1}-\Theta\epsilon_{t-4}+\theta\Theta\epsilon_{t-5}$$

따라서 그 식을 연립해서 풀면 된다.

- 살짝 다른풀이.

- 식 (1) = (2) = (3)을 다시 관찰하자.

$$Z_t = \frac{(1-\theta B)(1-\Theta B^4)}{1-\phi B}\epsilon_t = (\psi_0 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots)\epsilon_t$$

- 아래식을 관찰하자.

$$\begin{aligned} 1 =& \psi_0 \\ -\theta =& \psi_1 - \phi\psi_0 \\ 0 =& \psi_2 - \phi\psi_1 \\ 0 =& \psi_3 - \phi\psi_2 \\ -\Theta =& \psi_4 - \phi\psi_3 \\ \theta\Theta =& \psi_5 - \phi\psi_4 \\ 0 =& \psi_6 - \phi\psi_5 \\ 0 =& \psi_7 - \phi\psi_6 \\ & \dots \end{aligned}$$

정리하면

$$\begin{aligned} \psi_0 =& 1 \\ \psi_1 =& \phi\psi_0 - \theta \\ \psi_2 =& \phi\psi_1 \\ \psi_3 =& \phi\psi_2 \\ \psi_4 =& \phi\psi_3 - \Theta \\ \psi_5 =& \phi\psi_4 - \theta\Theta \\ \psi_6 =& \phi\psi_5 \\ \psi_7 =& \phi\psi_6 \\ & \dots \end{aligned}$$

- 잘 생각해보면 위의 식을 이용하여 $\psi_0, \dots, \psi_5$까지 구하는것은 일도 아닌것 같다. ψ_6부터는 아래를 활용하여 구하면 된다.

$$\begin{aligned} \psi_6 =& \phi\psi_5 \\ \psi_7 =& \phi\psi_6 \\ & \dots \end{aligned}$$

- $cov(Z_t, Z_t)$는 아래와 같이 표현가능하다.

	ϵ_t	ϵ_{t-1}	ϵ_{t-2}	ϵ_{t-3}	$\dots$
Z_t	ψ_0	ψ_1	ψ_2	ψ_3	$\dots$
Z_t	ψ_0	ψ_1	ψ_2	ψ_3	$\dots$

- 따라서 $\gamma_0 = \sigma^2\big(\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j^2\big)$.
- 동일한 논리로 $cov(Z_t, Z_{t-1})$는 아래와 같이 표현가능하다.

	ϵ_t	ϵ_{t-1}	ϵ_{t-2}	ϵ_{t-3}	$\dots$
Z_t	ψ_0	ψ_1	ψ_2	ψ_3	$\dots$
Z_{t-1}		ψ_0	ψ_1	ψ_2	$\dots$

- 따라서 $\gamma_1 = \sigma^2\big(\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\psi_{j-1}\big)$.
- 결국 $\psi_0, \psi_1, \dots$을 하나의 시계열로 보고 R에서 SACF를 구하듯이 구하면 된다.

연습문제 10.5.

- 아래의 모형의 ACF를 구해보자.

$$(1-\phi B)Z_t = (1-\Theta B^4)\epsilon_t$$

- 연습문제 10.4.의 결과에서 $\theta = 0$을 대입.

연습문제 10.6.

- 아래의 모형의 ACF를 구해보자.

$$(1-\phi B)(1-\Phi B^4)Z_t = \epsilon_t$$

- 아래의 식으로 만든뒤

$$Z_t - \phi Z_{t-1} - \Phi Z_{t-4} + \phi\Phi Z_{t-5} = \epsilon_t$$

양변에 $Z_t, \dots, Z_{t-5}$를 곱하여 $\gamma_0, \dots \gamma_5$를 푼다.

- 따라서 아래가 성립하면 된다.

$$(1+\phi B + (\phi B)^2 + \dots)(1 + \Phi B^4 + (\Phi B^4)^2 + \dots) = \psi_0 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots$$

간단하게 아래처럼 쓸수도 있다.

$$\phi(B)\Phi(B) = \psi_0 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots$$

- 상수항을 비교하면 $\psi_0 = 1$ 이다. 그런데 상수항의 비교는 아래와 같이 표현가능하다.

$$\phi(0)\Phi(0) = \psi_0 \Longleftrightarrow 1 = \psi_0$$

- 양변을 B로 미분하고 $B = 0$을 대입하자.

$$\phi'(0)\Phi(0) + \phi(0)\Phi'(0) = \psi_1$$

그런데 $\phi'(0) = \phi$이고 $\Phi'(0) = 0$이고 $\phi(0) = \Phi(0) = 1$이므로

$$\phi = \psi_1.$$

- 양변을 B로 두번미분하고 $B = 0$를 대입하면