

Big- O_p , little- o_p 와 Delta-method 활용예제.

- 이번에는 Big- O_p , little- o_p 와 Delta-method를 활용한 예제를 살펴보겠다.
- 김우철 수리통계학 교재의 연습문제를 참고함.



연습문제 5.14.

- $\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} \stackrel{iid}{\sim} F$ with

(1) $EX_1 = EY_1 = 0,$

(2) $EX_1^2 = EY_1^2 = 1,$

(3) $EX_1Y_1 = \rho,$

(4) $EX_1^4 < \infty, EY_1^4 < \infty.$

- $\hat{\rho}_n = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}.$

- 아래와 같은 기호를 약속하자.

(1) $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$

(2) $\bar{X}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2.$

(3) $\overline{XY} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_iY_i.$



(a) $\sqrt{n}\bar{X}\bar{Y} \xrightarrow{p} 0$ 임을 보여라.

(sol)

- $\sqrt{n}\bar{X} = O_p(1), \bar{Y} = o_p(1)$ 이므로 자명함. 여기에서 $\sqrt{n}\bar{X} = O_p(1)$ 는 CLT에 의해서 성립하고 $\bar{Y} = o_p(1)$ 는 큰수의 법칙 즉 WLLN에 의해서 성립한다.

note: 추가적으로 $\bar{XY} - \bar{X}\bar{Y} = \bar{XY} + o_p(\frac{1}{\sqrt{n}})$ 임도 알 수 있다.



(b) 아래가 성립함을 보여라.

$$\sqrt{m_2 - m_1^2} - \sqrt{m_2} = \frac{-m_1^2}{\sqrt{m_2 - m_1^2} + \sqrt{m_2}}$$

이때 $m_1 = \bar{X}, m_2 = \bar{X}^2$ 라고 하자.

(sol) (자명하다)



note: 추가적으로 아래를 확인가능하다.

$$\sqrt{m_2 - m_1^2} = \sqrt{m_2} + \frac{-m_1^2}{\sqrt{m_2 - m_1^2} + \sqrt{m_2}} = \sqrt{m_2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

(pf)

- $\sqrt{n}m_1^2 = \sqrt{n}m_1m_1 = O_p(1)o_p(1) = o_p(1) \quad \therefore m_1^2 = o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$

- $m_2 = 1 + o_p(1)$ 이다. 즉 $m_2 \xrightarrow{p} 1$ 이다. 또한 $m_1^2 = o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 이다. 따라서

$$\frac{-m_1^2}{\sqrt{m_2 - m_1^2} + \sqrt{m_2}} = o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

이다. 왜냐하면 분모는 1로 확률수렴하고 (continuous mapping thm) 분자는 $o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 이기 때문이다.



(c) 아래가 성립함을 보여라.

$$\sqrt{m_2} - 1 = \frac{m_2 - 1}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

(sol)

- 아래식을 관찰하라.

$$\sqrt{m_2} - 1 = \frac{m_2 - 1}{\sqrt{m_2} + 1} = \frac{m_2 - 1}{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{m_2} + 1} - \frac{1}{2}\right)(m_2 - 1)$$

- 이제 아래를 보이면 된다.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{m_2} + 1} - \frac{1}{2}\right)(m_2 - 1) := r_{3n} = o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

따라서 아래를 보이면 된다.

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{\sqrt{m_2} + 1} - \frac{1}{2}\right)(m_2 - 1) = o_p(1)$$

- 그런데 CLT에 의해서 $\sqrt{n}(m_2 - 1) = O_p(1)$ 가 성립한다.

- continuous mapping thm에 의해서 아래가 성립한다.

$$m_2 \xrightarrow{p} 1 \implies \left(\frac{1}{\sqrt{m_2} + 1} - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{p} 0$$

- 따라서

$$\left(\frac{1}{\sqrt{m_2} + 1} - \frac{1}{2}\right) = o_p(1)$$

- 따라서 증명이 끝난다.



(d) 아래를 보여라.

$$c_1 - m_1s_1 - \rho\sqrt{m_2 - m_1^2}\sqrt{s_2 - s_1^2} = c_1 - \rho\frac{m_2 + s_2}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

이때 $c_1 = \bar{X}\bar{Y}$, $s_1 = \bar{Y}$, $s_2 = \bar{Y}^2$ 이다.

(sol)

- (b)의 결과로부터 아래가 성립한다.

$$\sqrt{m_2 - m_1^2} = \sqrt{m_2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

- (c)의 결과로부터 아래가 성립한다.

$$\sqrt{m_2} - 1 = \frac{m_2 - 1}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

- 둘을 종합하면

$$\sqrt{m_2 - m_1^2} = 1 + \frac{m_2 - 1}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

- 따라서

$$\sqrt{m_2 - m_1^2} \sqrt{s_2 - s_1^2}$$

는 아래식들의 합이다.

$$(1) \quad 1 + \frac{s_2 - 1}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$(2) \quad \frac{m_2 - 1}{2} \left(1 + \frac{s_2 - 1}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \frac{m_2 - 1}{2} + O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

note: $O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{n}}O_p(1) = \frac{1}{\sqrt{n}}o_p(1) = o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$$(2) \quad \text{따라서 결국 } \frac{m_2 - 1}{2} \left(1 + \frac{s_2 - 1}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \frac{m_2 - 1}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

$$(3) \quad o_p(1/\sqrt{n}) \left(1 + \frac{s_2 - 1}{2} + o_p(1/\sqrt{n})\right) = o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

- 따라서

$$\sqrt{m_2 - m_1^2} \sqrt{s_2 - s_1^2} = 1 + \frac{s_2 - 1}{2} + \frac{m_2 - 1}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

정리하면

$$\sqrt{m_2 - m_1^2} \sqrt{s_2 - s_1^2} = \frac{s_2 + m_2}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

- 한편 (a)로부터

$$m_1 s_1 = \bar{X}\bar{Y} = o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

- 따라서 증명이 끝난다.



(e) $\sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \rho) = \sqrt{n}\bar{W} + o_p(1)$ 임을 보여라. 단

$$W = XY - \frac{\rho(X^2 + Y^2)}{2}.$$

(sol)

- $\bar{W} = \bar{X}\bar{Y} - \frac{\rho(\bar{X}^2 + \bar{Y}^2)}{2} = c_1 - \frac{\rho(m_2 + s_2)}{2}.$

- $\sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \rho) = \sqrt{n} \times \frac{c_1 - m_1 s_1 - \rho \sqrt{m_2 - m_1^2} \sqrt{s_2 - s_1^2}}{\sqrt{m_2 - m_1^2} \sqrt{s_2 - s_1^2}}$

- (d)에 의해서 "분자" $= c_1 - \frac{\rho(m_2 + s_2)}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

- 분모는 1로 확률수렴한다.

- 따라서

$$\sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \rho) = \sqrt{n} \times \frac{c_1 - \frac{\rho(m_2 + s_2)}{2} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{1 + o_p(1)} = \frac{\sqrt{n}\bar{W} + o_p(1)}{1 + o_p(1)} = \sqrt{n}\bar{W} + o_p(1)$$