1 논의점1

<u>***problem setting:***</u> $\{X_\ell\}$을 눈이 이동한 자취라고 해석하자. 예를들어 눈을 3번 쌓아서 $(\tau = 3)$ 아래와 같이 눈이 이동하였다고 한다면

$$v_1 \to v_{20} \to v_5$$

X_1, X_2, X_3은 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$X_1 = v_1, \quad X_2 = v_{20}, \quad X_3 = v_5$$

$h_(v, \ell)$을 노드 v에서 ℓ번째 눈을 쌓았을때 얻어지는 지형이라고 하자. $\ell = 0$일 경우에는 $h(v, 0) = f(v)$라고 정의하자. X_ℓ과 $h(v, \ell)$의 묶음을 아래와 같이 정의하자.

$$\bar{\mathbf{X}}_\ell = (h(v_1, \ell), \ldots, h(v_n, \ell), X_\ell)$$

(여기에서 bar는 extended의 의미로 사용하였다.) 이 확률벡터는 아래의 공간에서 정의됨을 기억하자.

$$S = \mathbb{R}^n \times \mathcal{V}$$

여기에서 n은 노드들의 총수이고, $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$은 노드들의 집합이다.

<u>***example:***</u> $\mathcal{V} = \{v_1, v_2\}$ 이고

$$f(v_1) = 3, \quad f(v_2) = 4$$

라고 하자. $X_0 = v_2$이고 눈이 쌓이는 양 $b = 0.5$라고 하자. 이 경우 $X_1 = v_1$이 된다. 그리고

$$\bar{\mathbf{X}}_0 = (3, 4, v_2)$$

이고

$$\bar{\mathbf{X}}_1 = (3.5, 4, v_1)$$

와 같이 표현할 수 있다.

- 확률벡터의 열

$$\bar{\mathbf{X}}_1, \bar{\mathbf{X}}_2, \ldots$$

는 틀림없이 (homogeneous) 마코프체인이다. 따라서 적당한 transition probability $p : (S, \mathcal{S}) \to [0, 1]$를 설정할 수 있다. 이때 p는 transition probability의 정의에 따라서 아래의 성질을 만족한다.

(i) 모든 $x \in S$에 대하여 $A \to p(x, A)$가 probability measure on $(S, \mathcal{S})$

(ii) 모든 $A \in \mathcal{S}$에 대하여 $x \to p(x, A)$가 measurable function.

이럴때 $\{\bar{\mathbf{X}}_\ell\}$는 전이확률 p를 가지는 마코프체인이라고 표현한다. (w.r.t. $\mathcal{F}_\ell = \sigma(\bar{\mathbf{X}}_0, \ldots, \bar{\mathbf{X}}_\ell)$)

• 그런데 $\bar{\mathbf{X}}_\ell$은 모든 state가 transient하다. 왜냐하면 눈이 쌓일수록 $h(v,\ell)$은 점점 증가하기 때문에 $\bar{\mathbf{X}}_\ell$이 머물러있는 state를 다시 방문할 수 없기 때문이다. 위의 예제로 들면 $\bar{\mathbf{X}}_0$가 머물러 있는 state

$$\bar{\mathbf{X}}_0 = (3,4,v_2)$$

를 모든 $\bar{\mathbf{X}}_1, \bar{\mathbf{X}}_2, \dots$ 들이 다시 방문할 수 없다. (눈은 점점 쌓이기만 하니까) 이는 에르고디시티와 같은 일부 유용한 성질들을 증명할 수 없다는 것과 같다. 따라서 우리는 $\bar{\mathbf{X}}_\ell$에 관심을 두지 않고 X_ℓ에 관심을 둘것이다.

• $\bar{\mathbf{X}}_\ell$이 정의되는 공간은 $S = \mathbb{R}^n \times \mathcal{V}$이며 state의 수가 무한개이지만 X_ℓ은 $\mathcal{V}$에서 정의되며 state의 수가 유한개인 n이다. 어떠한 (homogeneous) 마코프체인이 finite state를 가지고 irreducible하면 에르고드하므로 X_ℓ에 관심을 둔다면 에르고디시티와 같은 성질들을 보일 수 있을것 같다. 물론 X_ℓ은 homogeneous하지 않으므로 위의 정리를 곧바로 적용할 순 없다.

• X_ℓ은 전이확률행렬 $\mathbf{P}(\ell)$이 일정하지 않고 ℓ에 따라 달라지므로 non-homogeneous한 마코프체인으로 해석할 수 있다고 생각하였다. 다행이 Hajnal의 연구에 따르면 적당한 조건하에서 X_ℓ이 에르고드함을 보일 수 있다.

• 문제는 X_ℓ이 전이확률행렬 $\mathbf{P}(\ell)$를 가지는 마코프체인이라고 볼 수 있는지 그렇지 않은지 헷갈린다는 점이다. 헷갈리는 이유는 아래와 같다.

(1) X_ℓ이 정의되는 상태집합은 $\mathcal{V}$인데 $\mathbf{P}(\ell)$이 정의되는 공간은 $(S,\mathcal{S}) = (\mathbb{R}^n \times \mathcal{V}, \mathcal{S})$이다. 왜냐하면 지형의 모양을 알아야 다음확률을 결정할 수 있기 때문이다.

(2) 하지만 혹시 아래와 같이 표현할수도 있지 않을까? 하는 생각이 든다.

$\mathbf{P}(\ell)$ as non-homogeneous transition matrix and $X_0, X_1, \dots, X_\ell$ as non-homogeneous Markov chain w.r.t $\mathcal{F}_\ell$ with $\mathbf{P}(\ell)$.

• 문제의 핵심은 어떠한 확률벡터가 마코프체인일경우 그 벡터의 일부원소를 취하면 그것을 마코프체인으로 해석할 수 있느냐는 것이다.

• 질문을 바꾸어 표현하면 다음과 같다. 보통 X_n이 마코프체인일 경우 임의의 measurable function $f:\Omega_o \to \mathbb{R}$에 대하여 아래와 같은 strong markov property가 성립함이 알려져 있다.

$$E\Big(f(X_0,\dots,X_{n+1})|\mathcal{F}_n\Big) = E_{X_n} f(X_0,\dots,X_{n+1})$$

여기에서 $\Omega_o = S^{\{0,1,2,\dots\}}$이다. 이 성질을 우리의 문제상황에 맞추어 다시쓰면 아래와 같다.

$$E\Big(f(\bar{\mathbf{X}}_0,\dots,\bar{\mathbf{X}}_{\ell+1})|\mathcal{F}_\ell\Big) = E_{\bar{\mathbf{X}}_\ell} f(\bar{\mathbf{X}}_0,\dots,\bar{\mathbf{X}}_{\ell+1})$$

아래와 같이 함수 f를 정의한다면

$$\begin{aligned}&f(\bar{\mathbf{X}}_0,\dots,\bar{\mathbf{X}}_{\ell+1}) \in S^{\{0\}} \times \dots \times S^{\{\ell\}} \times \big(\mathbb{R}^n \times V^*\big) \times \dots \times S^{\{\ell+2\}} \times \dots \\ &\iff 1(X_\ell \in V^*)\end{aligned}$$

아래와 같이 쓸 수 있다.

$$P\Big(X_{\ell+1} \in V^* | \mathcal{F}_\ell\Big) = P_{\bar{\mathbf{X}}_\ell}\Big(X_{\ell+1} \in V^*\Big) = P\Big(X_{\ell+1} \in V^* \mid \bar{\mathbf{X}}_\ell\Big)$$

위의 식이 성립한다면

$X_0, X_1, \ldots, X_\ell$ as non-homogeneous Markov chain w.r.t $\mathcal{F}_\ell$ with $\mathbf{P}(\ell)$.

라고 표현할 수 있을까?

2 논의점2

- Hajnal 1958의 정리3을 적용하려면 반드시 $\{X_\ell\}$이 마코프체인임을 보여야 하는 것일까? $\mathbf{P}(\ell)$이 단지 stochastic matrix[1]이어도 충분하지 않을까?

3 논의점3

- Hajnal 1958의 정리3에서 n 대신에 stopping time을 넣어도 성립하는가?

[1] row-sum이 1인 매트릭스