1 Weak Ergodicity

Theorem A *(modified version of Theorem 2 in Hajnal 1958):* For any Ma chain and stopping time N,

$$[\boldsymbol{H}_n] \leq \prod_{j=1}^{n-1}(1-\{\boldsymbol{P}_j\})[\boldsymbol{P}_n] \leq \prod_{j=1}^{n}(1-\{\boldsymbol{P}_j\}) \quad \text{on } n \leq N.$$

From Theorem A we can prove Theorem B. which is upgrade version of Theorem 3 in Hajnal 1958.

Theorem B *(modified version of Theorem 3 in Hajnal 1958):*

Theorem C: Let $N_\tau = \inf_\tau\{\tau > N_{\tau-1} : \mathcal{U}_\tau = \emptyset\}$ for all $\tau = 1, 2, \ldots$ with $N_0 = 0$. Then for all $j = 1, 2, \ldots$ $\{N_j = \infty\} = \emptyset$, i.e., the snow can't flow infinitely.

proof: Let $M_j = N_{j+1} - N_j$. It is sufficient to show that $\{M_j = \infty\} = \emptyset$ for all $j = 0, 1, 2, \ldots$. Suppose $M_0 = \infty$, i.e., the snow is "never blocked". Denote the $v^\tau_{(1)}, \ldots, v^\tau_{(n)}$ as the ordered index by value of $h^\tau_1, \ldots, h^\tau_n$, i.e.,

$$h^\tau_{v^\tau_{(1)}} \leq \cdots \leq h^\tau_{v^\tau_{(n)}}.$$

Let $R_\tau = 1 - \prod_{k=1}^n I(v^\tau_{(k)} = v^{\tau+1}_{(k)})$. Thus $R_\tau = 0$ means that there is no changes in shape of land. Suppose that $\sum_{\tau=1}^\infty R_\tau = 0$, this means that there is no reversal in all τ. For all $i = 1, 2, \ldots, n$, let $N^*(v_i) = \inf_\tau\{\tau > 0 : T_\tau = v_i\}$. Clearly, $N^*(v^0_{(1)}) < \infty$. The assumption $\sum_{\tau=1}^\infty R_\tau = 0$ implies that $h^\tau(v^0_{(1)}) \leq \min_v h^\tau_v$ for all τ. This means that snow is "blocked" at least at $\tau = N^*(v^0_{(1)})$ (of course it could be faster), and it makes contradiction. Now suppose $\sum_{\tau=1}^\infty R_\tau < \infty$. Then there exists L such that $\sum_{\tau=L+1}^\infty R^\tau = 0$. Thus it makes contradiction again. Now suppose that $\sum_{\tau=1}^{\infty} R^{\tau} = \infty$. Then there exist $u, v \in V$ such that sign of $h_u^\tau - h_v^\tau$ changes infinitely often. Denote C_k be the k-th sign change of $h_u^\tau - h_v^\tau$, i.e.,

$$C_k = \inf_{\tau} \left\{ \tau > C_{k-1} : \left(h_u^{\tau-1} - h_v^{\tau-1}\right)\left(h_u^{\tau} - h_v^{\tau}\right) < 0 \right\}$$

with $C_0 = 0$. Denote $\Delta_k = |h_u^{C_k} - h_v^{C_k}|$ and $\Delta_k^- = |h_u^{C_k - 1} - h_v^{C_k - 1}|$.

Claim A: For all $k = 1, 2, \ldots$, there exists $C(k)$ such that $C_k \leq C(k) < C_{k+1}$ and

$$b\gamma^{C(k)} - b\gamma^{C_{k+1}} < \left| h_u^{C(k)-1} - h_v^{C(k)-1} \right| \leq \Delta_k.$$

Proof. asdf.

Claim B: For all $k = 1, 2, \ldots$, there exist $C(k)$ such that $C_k < C(k) < C_{k+1}$ and

$$\gamma^{C(k)} < 2\gamma^{C_{k+1}}$$

Proof. sdf

Claim C: There exists κ_0 such that

$$\min(\Delta_{\kappa_0}^-, \Delta_{\kappa_0}) < \min(\Delta_{\kappa_0+1}^-, \Delta_{\kappa_0+1})$$

Proof. sdf

Claim D: For all $\epsilon > 0$ there exists κ_1 such that

$$\frac{\left| h_u^{C(\kappa_1)-1} - h_v^{C(\kappa_1)-1} \right|}{b\gamma^{C_{\kappa_1+1}}} < \epsilon$$

Proof. sdf

For all k, there exists m such that

$$m > C_k \quad \text{and} \quad \left| h_u^{C(m)-1} - h_v^{C(m)-1} \right| < b\gamma^{C_k} - b\gamma^{C_{m+1}}$$

By Claim A, we have

$$b\gamma^{C(m)} - b\gamma^{C_{m+1}} < b\gamma^{C_{m+1}}\epsilon$$

Thus

$$1 - \gamma^{C_{m+1}-C(m)} < \epsilon$$

Since ϵ is arbitary, it makes contradiction.

Then $\Delta_1 = \Delta_1^-$ Choose C_k such that

$$b\gamma^{C_k} < \min(\Delta_1^-, \Delta_1)$$

From Lemma A and $\Delta_1 + \Delta_1^- = b\gamma^{C_1}$, we have

$$b\gamma^{C(k)} - \left| h_u^{C(k)-1} - h_v^{C(k)-1} \right| < \min(\Delta_1^-, \Delta_1)$$

Theorem D: Let $\mathcal{G} = (V, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{W})$ be a weighted graph with $|V| = n$ and f be a graph signal defined on $\mathcal{G}$. Let $\mathcal{H}(f, \mathcal{G}; \tau)$ denote the heavy snow transformation of f. Let $\{T_\tau\}$ as trace of snow with $p_{u,v}^\tau$. Then $\{T_\tau\}$ is *ergodic in the weak sense*, i.e., as $\tau \to \infty$

$$\left| p_{u,v}^{(\ell,\tau)} - p_{u',v}^{(\ell,\tau)} \right| \to 0 \quad \text{for any } \ell \text{ and all } u, u', v.$$

where $p_{u,v}^{(\ell,\tau)}$ is (u,v)-th element of $\boldsymbol{P}_\ell \boldsymbol{P}_{\ell+1} \ldots \boldsymbol{P}_{\ell+\tau}$.

Proof. Let

$$\{\boldsymbol{P}\} = \min_{u,u'} \sum_v \min(p_{u,v}, p_{u'v}).$$

Denote $N_\tau = \inf_\tau\{\tau > N_{\tau-1} : \mathcal{U}^\tau = \emptyset\}$ for all $\tau = 1, 2, \ldots$ with $N_0 = 0$. Let $M_j = N_{j+1} - N_j$. Note that $N_0, N_1, N_2, \ldots$

and $M_0, M_1, M_2, \dots$ is stopping time. Due to Theorem C, we can devide the set $\{0, 1, 2, 3, \dots, \}$ into infinitely many partition such that

$$\{0, \dots, N_1 - 1\}, \{N_1, \dots, N_2 - 1\}, \{N_2, \dots, N_3 - 1\}, \dots$$

Define $\boldsymbol{P}_{(N_j, M_j)} = \boldsymbol{P}_{N_j} \dots \boldsymbol{P}_{N_{j+1}-1}$ From Theorem B, it suffices to show that $\sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \boldsymbol{P}_{(N_j, M_j)} \right\}$ diverges. By Lemma 1 in Hajnal (1958)

$$\left\{ \boldsymbol{P}_{(N_j, M_j)} \right\} \geq \left\{ \boldsymbol{P}_{N_j} \right\} = 1 \quad \text{for all } j = 0, 1, 2 \dots,$$

Thus theorem is proved.

2 *Example 1*

쌍인눈 변환의 결과로 얻어지는 $\boldsymbol{W}(\tau)$을 고려하자. 이 매트릭스의 colsum을 $d_i(\tau)$이라고 하자. 따라서 $d_i(\tau)$는 어디에서 시작했는지 모르겠지만 노드 i로 도착할 확률의 합을 의미한다. 이를 이용하여 아래와 같은 행벡터를 만든다.

$$\boldsymbol{d}(\tau) = [d_1(\tau), \dots, d_n(\tau)]$$

이제 $\boldsymbol{d}$를 이용하여 $\alpha_i(\tau) = \frac{d_i(\tau)}{d_1(\tau) + \dots + d_n(\tau)}$ 와 같은 확률을 정의하자. 그리고

$$\boldsymbol{\alpha}(\tau) = [\alpha_1(\tau), \dots, \alpha_n(\tau)]$$

와 같은 행벡터를 생각하자. 즉 $\boldsymbol{\alpha}(\tau)$는 $\boldsymbol{W}(\tau)$의 columsum을 구해서 $\boldsymbol{d}(\tau)$와 같은 행벡터를 만들고 $\boldsymbol{d}(\tau)$를 표준화하여 얻을 수 있다.

- 정규그래프에서 $\boldsymbol{\alpha}(\tau) = \boldsymbol{\pi}(\tau)$임을 보이자.

proof:

• $e^{-x} \geq 1-x$이므로 $W_{12}^{\tau} = e^{-\frac{\Sigma_{12}^{\tau}}{2(\theta_n^{\tau})^2}} \geq 1 - \frac{\Sigma_{12}^{\tau}}{2(\theta_n^{\tau})^2}$가 성립한다. 따라서 아래가 성립한다. 그다지 큰 의미는 없는듯.

$$W_{11}^{\tau} + \cdots + W_{1n}^{\tau} \geq (n-1) - \frac{1}{2(\theta_n^{\tau})^2}\left(\Sigma_{12}^{\tau} + \cdots + \Sigma_{1n}^{\tau}\right)$$

• 고정된 i에 대하여 수열 $\left\{\pi_i^{\tau} - \pi_i^{\tau-1}\right\}$은 코시수열임을 보이자. 즉 아래를 보이면 된다.

$$\pi_i^{\tau} - \pi_i^{\tau-1} = \frac{d_i^{\tau}}{d_1^{\tau} + \cdots + d_n^{\tau}} - \frac{d_i^{\tau-1}}{d_1^{\tau-1} + \cdots + d_n^{\tau-1}} = o(1)$$

따라서 아래를 보이면 된다.

$$\frac{d_i^{\tau}}{d_1^{\tau} + \cdots + d_n^{\tau}} = \frac{d_i^{\tau-1}}{d_1^{\tau-1} + \cdots + d_n^{\tau-1}} + o(1)$$

case1: : $d_1^{\tau} + \cdots + d_n^{\tau} = d_1^{\tau-1} + \cdots + d_n^{\tau-1}$이라고 하자.

• 아래를 보이기만 하면 된다.

$$d_i^{\tau} - d_i^{\tau-1} = o(1)$$

그런데

$$d_i^{\tau} = W_{i1}^{\tau} + W_{i2}^{\tau} + \cdots + W_{in}^{\tau} = W_{i2}^{\tau} + \cdots + W_{in}^{\tau}$$

이므로 아래를 보이면 된다.

$$(W_{i1}^{\tau} - W_{i1}^{\tau-1}) + \cdots + (W_{in}^{\tau} - W_{in}^{\tau-1}) = o(1)$$

결국 모든 j에 대하여 아래를 보이면 된다.

$$W_{ij}^{\tau} - W_{ij}^{\tau-1} = o(1)$$

따라서 아래를 보이면된다.

$$\frac{W_{ij}^{\tau}}{W_{ij}^{\tau-1}} - 1 = o(1)$$

note: 아래를 관찰하자.

$$W_{ij}^{\tau} = e^{-\frac{\Sigma_{ij}^{\tau}}{2(\theta_n^{\tau})^2}} = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{h_i^0-h_j^0}{\theta_n^{\tau}}\right)^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{h_i^1-h_j^1}{\theta_n^{\tau}}\right)^2} \dots e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{h_i^{\tau-1}-h_j^{\tau-1}}{\theta_n^{\tau}}\right)^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{h_i^{\tau}-h_j^{\tau}}{\theta_n^{\tau}}\right)^2}$$

$$W_{ij}^{\tau-1} = e^{-\frac{\Sigma_{ij}^{\tau-1}}{2(\theta_n^{\tau-1})^2}} = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{h_i^0-h_j^0}{\theta_n^{\tau-1}}\right)^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{h_i^1-h_j^1}{\theta_n^{\tau-1}}\right)^2} \dots e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{h_i^{\tau-1}-h_j^{\tau-1}}{\theta_n^{\tau-1}}\right)^2}$$

- 따라서

$$\frac{W_{ij}^{\tau}}{W_{ij}^{\tau-1}} = A_1 \times \cdots \times A_{\tau-1} \times A_{\tau}$$

이때

$$\begin{aligned}
A_0 &= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(\theta_n^{\tau})^2} - \frac{1}{(\theta_n^{\tau-1})^2}\right)(h_i^0 - h_j^0)^2\right) \\
A_1 &= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(\theta_n^{\tau})^2} - \frac{1}{(\theta_n^{\tau-1})^2}\right)(h_i^1 - h_j^1)^2\right) \\
&\dots \\
A_{\tau-1} &= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(\theta_n^{\tau})^2} - \frac{1}{(\theta_n^{\tau-1})^2}\right)(h_i^{\tau-1} - h_j^{\tau-1})^2\right) \\
A_{\tau} &= \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{(\theta_n^{\tau})^2}(h_i^{\tau} - h_j^{\tau})^2\right)
\end{aligned}$$

(1) 그런데

$$\frac{1}{(\theta_n^{\tau})^2} - \frac{1}{(\theta_n^{\tau-1})^2} = o(1)$$

이다. 왜냐하면 $\left\{\frac{1}{(\theta_n^{\tau})^2}\right\}_{\tau=1}^{\infty}$ 이 수렴하는 수열이기 때문이다. (수렴하는 수열은 코시수열임)

(2) 또한 모든 τ에 대하여

$$\max_{i,j} |h_i^{\tau} - h_j^{\tau}| = O(1)$$

이다. (한쪽에만 눈이 쌓일수는 없음.)

(3) exp가 연속함수이므로 $A_1, \ldots, A_{\tau-1}$는 모두 1로 수렴한다. 그리고 A_τ 역시 1로 수렴한다.

- 따라서

$$\frac{W_{ij}^{\tau}}{W_{ij}^{\tau-1}} = 1 + o(1)$$

case2: : 이제 $d_1^\tau + \cdots + d_n^\tau \neq d_1^{\tau-1} + \cdots + d_n^{\tau-1}$ 라고 하자. 아래를 정의하자.

$$\begin{aligned} d^{\tau-1} &= d_1^{\tau-1} + \cdots + d_n^{\tau-1} \\ d^\tau &= d_1^\tau + \cdots + d_n^\tau \\ \tilde{d}^\tau &= \max(d^\tau, d^{\tau-1}) \end{aligned}$$

Clearly,

$$\tilde{d}^\tau = O(1)$$

따라서 case1 을 반복하면 증명이 된다.

prop: Let $\mathcal{G} = (V, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{W})$ be a weighted graph with $|V| = n$ and f be the graph function defined on $\mathcal{G}$. Assume that $\mathcal{G}$ is a regular graph. Suppose that $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ is $i.i.d$ random sample. Let $\mathcal{G}^\tau = (V, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{W}^\tau)$ be the weighted graph induced by the heavy snow transformation of f $\mathcal{H}(f, \mathcal{G}; \tau)$. Then we have $\boldsymbol{W}^\tau \xrightarrow{p} \boldsymbol{W}$ element-wisely as $\tau \to \infty$.

Proof. Using the results in Appendix A.2, we obtain $W_{ij}^\tau \sim N(T_{ij}(F$ where $T_{ij}(F) := \int W_{ij}^\tau dF^\tau$. Note that $T_{ij}(F^\tau) \to 1$ as $\tau \to \infty$ for $i \neq j$ and $T_{ij}(F^\tau) = 0$ for $i = j$. Further, we get $V_{ij}(T, F^\tau)/n \to 0$ as $\tau \to \infty$ for all i, j. Thus $\boldsymbol{W}^\tau \xrightarrow{p} \boldsymbol{W}$ element-wisely as $\tau \to \infty$.

Appendix 2: : Let $\mathcal{G} = (V, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{W})$ be a weighted graph with $|V| = n$ and f be a graph signal defined on $\mathcal{G}$. Assume that

$\mathcal{G}$ is a regular graph. Suppose that $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ is $i.i.d$ random sample. Let $\mathcal{H}(f, \mathcal{G}; \tau)$ be the heavy snow transformation of f. Since $f(v_i)$ is $i.i.d.$ random variable, $\boldsymbol{h}_i$ is $i.i.d.$ random vector with $\boldsymbol{h}_1^\tau, \ldots, \boldsymbol{h}_n^\tau \sim F^\tau$. Define a functional $T(F^\tau)$ as $T(F^\tau) := \int g(\boldsymbol{h}) dF^\tau$. Let F_n^τ be an empirical distribution function of $\boldsymbol{h}_1^\tau, \ldots, \boldsymbol{h}_n^\tau$ defined as

$$F_n^\tau(m) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1(\boldsymbol{h}_i^\tau \leq t).$$

From Glivenko-Cantelli Lemma, we obtain $F_n^\tau \to F^\tau$. Thus, for a sufficiently large n, we can say that F_n^τ is a neighborhood of F^τ. Hence, we have

$$\begin{aligned} T(F_n^\tau) &\approx T(F^\tau) + \int IF(\boldsymbol{h}^\tau, T, F^\tau) d(F_n^\tau - F^\tau) \\ &= T(F^\tau) + \int IF(\boldsymbol{h}^\tau, T, F^\tau) dF_n^\tau, \end{aligned}$$

where $IF(\boldsymbol{h}^\tau; T, F^\tau) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T((1-t)F^\tau + t\delta(\boldsymbol{h})) - T(F^\tau)}{t}$ is an influence function of T. Here, $\int IF(\boldsymbol{h}^\tau, T, F^\tau) dF^\tau = 0$ is used. Therefore, it follows that

$$\sqrt{n}\Big(T(F_n^\tau) - T(F^\tau)\Big) \to N(0, V(T, F^\tau)),$$

where $V(T, F^\tau) = \int IF(\boldsymbol{h}^\tau, T, F^\tau)^2 dF^\tau$.

2.1 약간의 수정

(1) $\Sigma_{ij}^\tau = \|\boldsymbol{h}_i^\tau - \boldsymbol{h}_j^\tau\|_2^2 = \sum_{\ell=0}^{\tau} (h_i^\ell - h_j^\ell)^2$

(2) $h_i^\tau = h_i^{\tau-1} + \xi_i^\tau$

(3) $W_{ij}^\tau = \begin{cases} \exp\big(-\frac{1}{2}\frac{\Sigma_{ij}^\tau}{(\theta_n^\tau)^2}\big) & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$

note: θ_n^τ은 어떤개념? $\left\{\Sigma_{ij}^\tau - \texttt{mean}(\Sigma_{ij}^\tau)\right\}_{i,j}$의 sample variance로 생각하고 싶은데 애매함.

(4) $d_i^\tau = \sum_{j=1}^n W_{ij}^\tau$.

note: $d_i^\tau := i$-th 노드와 연결된 weight들의 총합

note: d_i^τ값이 클수록 i-th 노드가 클러스터의 중심부에 있음을 의미함.

(5) $\pi_i^\tau := \frac{d_i^\tau}{\sum_i^n d_i^\tau}$.

note: π_i^τ는 전체를 1로 보았을때 i-번째값이 전체중에서 얼마나 비유사한 아이인지 판단함. (값이 작을수록 비유사하다) 만약에 총 100개의 점이 있다고 하자. $\pi_i^\tau = \frac{1}{100}$이라면 일단 평균정도 중요하다는 의미임. 아웃라이어일수록 $\pi_i^\tau \approx 0$임.

Theorem: 고정된 n에 대하여

(i) $\theta_n^\tau \to \infty \quad as \quad \tau \to \infty$

(ii) $\max_{i,j} |f(v_i) - f(v_j)| = O(1)$

이라면 아래를 만족하는 $\pi^\star$가 항상 존재한다.

$$\|\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\pi}^\star\|_2^2 = o(1)$$

2.2 수정할것들

thm: (1) $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{W})$를 모든 엣지가 연결된 레귤러 그래프라고 하자. 즉 $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{J} - \boldsymbol{I}$. (2) $f_1, \dots f_{100} \overset{iid}{\sim} N(\mu_1, 1)$. 그러면 아래가 성립한다.

$$\boldsymbol{W}^\tau \overset{p}{\to} \boldsymbol{J} - \boldsymbol{I}$$

thm: (1) $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{W})$를 모든 엣지가 연결된 레귤러 그래프라고 하자. 즉 $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{J} - \boldsymbol{I}$. (2) $f_1, \dots f_{50} \overset{iid}{\sim} N(\mu_1, 1)$ and $f_{51}, \dots, f_{100} \overset{iid}{\sim} N(\mu_2, 1)$. 그러면 아래가 성립한다.

$$\boldsymbol{W}^{\tau} \overset{p}{\to} \begin{bmatrix} \boldsymbol{J} - \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J} - \boldsymbol{I} \end{bmatrix}$$

3 MCU 예제에 대한 백업

thm: 눈을 쌓을수록 노드정보를 상실한다. HST는 노드정보와 그래프도메인에서의 정보를 연속적으로 변화시키는 장치이다.

note: 단순히 노드에서의 거리와 그래프도메인의 거리를 가중평균한것과 무슨 차이일까?

Theorem C: Suppose that $\max_{i,j} |f(v_i) - f(v_j)| < \infty$. Then for all i, j,

$$p_{ij}^{\tau} = \frac{W_{ij}}{\sum_{k=1}^{n} W_{ik}} + o(1).$$

Here

$$\begin{aligned} p_{ij}^{\tau} &:= \text{Prob}(T^{\tau} = j | T^{\tau-1} = i) \\ &= \begin{cases} \frac{d(v_j)}{\sum_{k=1}^{n} d(v_k)} & \mathcal{U}^{\tau-1} = \emptyset \\ \frac{1}{|\mathcal{U}^{\tau-1}|} & (\mathcal{U}^{\tau-1} \neq \emptyset \text{ and) } v_j \in \mathcal{U}^{\tau-1} \\ 0 & \mathcal{U}^{\tau-1} \neq \emptyset \text{ and } v_j \notin \mathcal{U}^{\tau-1} \end{cases} \end{aligned}$$

Proof. For fixed i, j, p_{ij}^{τ} can be expressed as

$$p_{ij}^{\tau} = I(\mathcal{U}^{\tau-1} = \emptyset) \times \frac{d(v_j)}{\sum_{k=1}^{n} d(v_k)} + I(\mathcal{U}^{\tau-1} \neq \emptyset) \times \frac{I(v_j \in \mathcal{U}^{\tau-1})}{|\mathcal{U}^{\tau-1}|}$$

Here the left term means the probability that snow blocked at $\tau - 1$ and then (randomly) fall down to v_j at τ, and right term means the probability that snow flow from v_i to v_j.

claim 1: $\frac{I(v_j \in \mathcal{U}^{\tau-1})}{|\mathcal{U}^{\tau-1}|} = \frac{d(v_j)}{\sum_{k=1}^n d(v_k)} + o_p(1)$.

Proof. to be showed

From claim 1, we have

$$\begin{aligned} p_{ij}^{\tau} &= I(\mathcal{U}^{\tau-1} = \emptyset) \times \frac{d(v_j)}{\sum_{k=1}^n d(v_k)} \\ &\quad + I(\mathcal{U}^{\tau-1} \neq \emptyset) \times \left(\frac{d(v_j)}{\sum_{k=1}^n d(v_k)} + o_p(1) \right) \\ &= \end{aligned}$$

그런데 $\frac{I(v_1 \in \mathcal{U}^{\tau-1})}{|\mathcal{U}^{\tau-1}|} = \frac{d(v_1)}{d} + o_p(1)$ 이므로 $b^{\tau} = I(\mathcal{U}^{\tau-1} \neq \emptyset)\frac{d(v_1)}{d} + o_p(1)$ 이다. 정리하면

$$\begin{aligned} a^{\tau} &= I(\mathcal{U}^{\tau-1} = \emptyset)\frac{d(v_2)}{d} \\ b^{\tau} &= I(\mathcal{U}^{\tau-1} \neq \emptyset)\frac{d(v_1)}{d} + o_p(1) \end{aligned}$$

따라서 만약에 $d(v_1) = d(v_2)$ 라면

$$p_{12}^{\tau} = a^{\tau} + b^{\tau} = \frac{d(v_1)}{d} + o_p(1) = \frac{d(v_2)}{d} + o_p(1)$$

그런데 $\frac{d(v_2)}{d} = \frac{W_{12}}{\sum_j W_{1j}}$ 이므로 증명끝.

4 예제2에 대한 백업 (1)

4.1 regular graph에서의 성질

Theorem: $\mathcal{G} = (V, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{W})$ 가 $k-regular$ 그래프라고 하자. 그리고 $f(v_i) = 0$ 이라고 하자. 그러면 모든 고정된 $i, j, \ell = 1, 2, \ldots, \tau$ 에

대하여 아래가 성립한다.

$$p_{ij}^{\ell} = \frac{1}{k}$$

4.2 regular graph에서의 성질, 링내에서는 빨-보가 유지된다.

- 빨주노초파남보의 7개의 노드가 있다고 하자. 즉 $V = \{1, 2, 3, \ldots, 7\}$ 이라고 하자.

- 이들은 서로 링형태로 연결되어 있다고 하자.

주장 1: : $\ell = 2$에서 아래가 성립한다.

$$\Sigma_{13}^{\ell} - \Sigma_{12}^{\ell} \geq 0$$

등호는

주장 1의 증명::

경우1: 먼저 $\ell = 1$에서 노드1에 눈이 있다고 가정하자. (1) 먼저 눈이 노드1에서 블락되었다고 가정하자. $\Longrightarrow$ 이런 경우는 없다. (2) 눈이 노드1에서 2로 흘렀다고 가정하자. 그러면

$$\begin{aligned}\Sigma_{12}^{\ell} &= b^2 + (1-\gamma)^2 b^2 \\ \Sigma_{13}^{\ell} &= 2b^2\end{aligned}$$

이므로

$$\Sigma_{13}^{\ell} - \Sigma_{12}^{\ell} = \left(1 - (1-\gamma)^2\right) b^2 > 0$$

(3) 눈이 노드1에서 7로 흘렀다고 가정하자. 즉 노드1에서 노드2,3을 제외한 다른이웃으로 흘렀다고 가정하자. 그러면

$$\Sigma_{13}^{\ell} = \Sigma_{12}^{\ell}$$

이다. 따라서 경우 1에서는 아래가 성립한다.

$$\Sigma_{13}^{\ell} \geq \Sigma_{12}^{\ell}$$

경우2: $\ell = 1$에서 노드2에 눈이 있다고 가정하자. (1) 노드2에서 블락될경우는 없다. (2) 노드2에서 노드1로 흐르는 경우에는 아래와 같다.

$$\Sigma_{12}^{\ell} = b^2 + (1-\gamma)^2 b^2$$
$$\Sigma_{13}^{\ell} = \gamma^2 b^2$$

이때는 보는것처럼 $\Sigma_{13}^{\ell} < \Sigma_{12}$ 이다. (3) 노드2에서 노드3으로 흐르는 경우는 아래와 같다.

$$\Sigma_{12}^{\ell} = 2b^2$$
$$\Sigma_{13}^{\ell} = \gamma^2 b^2$$

이때는 보는것처럼 $\Sigma_{13}^{\ell} > \Sigma_{12}$ 이다. (4) 노드2에서 노드1,3이외에 다른 이웃으로 흐르는 경우는 항상 $\Sigma_{13}^{\ell} = \Sigma_{12}^{\ell}$이다. 따라서 차이는 항상 0 이다. 이제 (2)와 (3)이 같은 확률 $p^\star$로 일어난다는 것을 고려하여보자. (Access time이 같다고 하자.) 그러면 평균적으로는 아래와 같이 차이난다.

$$E(\Sigma_{13}^{\ell} - \Sigma_{12}^{\ell}) = p^\star \left[2\gamma^2 - 3 - (1-\gamma)^2\right] b^2 = (\gamma^2 + 2\gamma - 4)p^\star b^2$$

경우3: $\ell = 1$에서 노드3에 눈이 있다고 하자. (1) 노드3에서 블락되는 경우는 없다. (2) 노드3에서 2로 흘렀다고 하자. 이 확률은 $p^\star$이다.

$$\Sigma_{12}^{\ell} = \gamma^2 b^2$$
$$\Sigma_{13}^{\ell} = 2b^2$$

(3) 노드3에서 1로 흐를수는 없다. (4) 노드3에서 1,2를 제외한 이웃으로 흘렀다고 하자. (이 확률은 $(1-p^\star)$ 임)

$$\Sigma_{12}^{\ell} = 2b^2$$
$$\Sigma_{13}^{\ell} = 2b^2$$

따라서 평균적으로

$$E(\Sigma_{13}^{\ell} - \Sigma_{12}^{\ell}) = \left(4 - 2(1-p^\star) - p^\star\gamma^2\right) b^2 = (2 + (2-\gamma^2)p^\star) b^2$$

• 경우2와 3을 종합하면 평균적으로

$$\big(2+(\gamma^2+2\gamma-4+2-\gamma^2)p^\star\big)b^2=\big(2+(2\gamma-2)p^\star\big)b^2\geq 0$$

경우4: $\ell=1$에서 노드4에 눈이 있다고 가정하자.

$$\Sigma_{13}^{\ell}\geq\Sigma_{12}^{\ell}=0$$

경우5: $\ell=1$에서 노드5에 눈이 있다고 가정하자.

$$\Sigma_{13}^{\ell}=\Sigma_{12}^{\ell}=0$$

경우6: $\ell=1$에서 노드6에 눈이 있다고 가정하자.

$$\Sigma_{13}^{\ell}=\Sigma_{12}^{\ell}=0$$

경우7: $\ell=1$에서 노드7에 눈이 있다고 가정하자.

$$\Sigma_{13}^{\ell}=\Sigma_{12}^{\ell}$$

주장2: : ℓ시점에서 그림1의 각 지형이 형성될 확률은 모두 같다.

주장3: : $\tau=\ell-1$에서 성립한다면 $\tau=\ell$에서도 성립한다.

주장3의 증명::

• 지형의 모양은 모두 4가지 경우가 있다. (1) 로칼맥시멈 (2) 우상향 (3) 좌상향 (4) 로칼미니멈

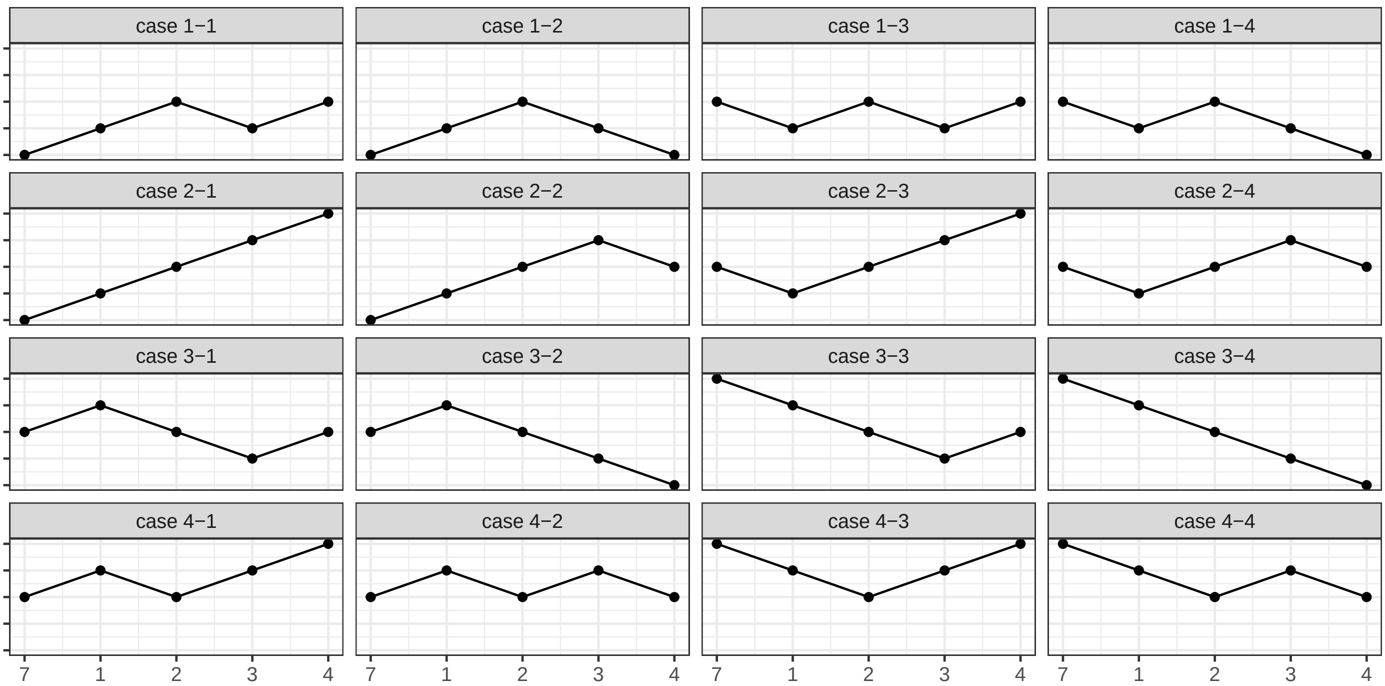

Figure 1: 가능한 지형들의 경우들

- 아래를 보이면 된다.

$$\Sigma_{13}^{\ell} - \Sigma_{12}^{\ell} = \Sigma_{13}^{\ell-1} - \Sigma_{12}^{\ell-1} + (h_1^{\ell} - h_3^{\ell})^2 - (h_1^{\ell} - h_2^{\ell})^2 \geq 0$$

그런데 $\Sigma_{13}^{\ell-1} - \Sigma_{12}^{\ell-1} > 0$ 이므로 아래를 보이면 충분하다.

$$\begin{aligned} A &:= (h_1^{\ell} - h_3^{\ell})^2 - (h_1^{\ell} - h_2^{\ell})^2 \\ &= (h_1^{\ell-1} + \xi_1^{\ell} - h_3^{\ell-1} - \xi_3^{\ell})^2 - (h_1^{\ell-1} + \xi_1^{\ell} - h_2^{\ell-1} - \xi_2^{\ell})^2 \\ &= (h_1^{\ell-1} - h_3^{\ell-1})^2 + (\xi_1^{\ell} - \xi_3^{\ell})^2 - 2(h_1^{\ell-1} - h_3^{\ell-1})(\xi_1^{\ell} - \xi_3^{\ell}) \\ &\quad - (h_1^{\ell-1} - h_2^{\ell-1})^2 - (\xi_1^{\ell} - \xi_2^{\ell})^2 + 2(h_1^{\ell-1} - h_2^{\ell-1})(\xi_1^{\ell} - \xi_2^{\ell}) \geq 0 \end{aligned}$$

그런데

$$(h_1^{\ell-1} - h_3^{\ell-1})^2 - (h_1^{\ell-1} - h_2^{\ell-1})^2 \geq 0$$

이므로 아래만 보이면 된다.

$$(\xi_1^{\ell} - \xi_3^{\ell})^2 - 2(h_1^{\ell-1} - h_3^{\ell-1})(\xi_1^{\ell} - \xi_3^{\ell}) - (\xi_1^{\ell} - \xi_2^{\ell})^2 + 2(h_1^{\ell-1} - h_2^{\ell-1})(\xi_1^{\ell} - \xi_2^{\ell}) \geq$$

아래와 같이 나누자.

$$A_1 := (\xi_1^{\ell} - \xi_3^{\ell})^2 - (\xi_1^{\ell} - \xi_2^{\ell})^2$$

$$A_2 := -2(h_1^{\ell-1} - h_3^{\ell-1})(\xi_1^{\ell} - \xi_3^{\ell}) + 2(h_1^{\ell-1} - h_2^{\ell-1})(\xi_1^{\ell} - \xi_2^{\ell})$$

• 먼저 $\ell-1$시점에서 블락된 경우를 고려하자. 블락되고 노드 1에 왔다면 $A_1=0$ 이다. 따라서

$$A = A_2 = 2b\left(h_3^{\ell-1} - h_2^{\ell-1}\right)$$

블락된 이후 노드2로 왔다면 $A_1 = -b^2$ 이고

$$A = -b^2 + A_2 = -b^2 + 2b(h_1^{\ell-1} - h_2^{\ell-1}) = 2b\left(h_2^{\ell-1} - h_1^{\ell-1} - \frac{b}{2}\right)$$

블락된 이후 노드3으로 왔다면 $A_1 = b^2$ 이고

$$A = b^2 + A_2 = b^2 + 2b(h_1^{\ell-1} - h_3^{\ell-1}) = 2b\left(h_1^{\ell-1} - h_3^{\ell-1} + \frac{b}{2}\right)$$

블락된 이후에 각 경우에 대하여 평균적으로 A는

$$2b\left(h_3^{\ell-1} - h_2^{\ell-1} + h_2^{\ell-1} - h_1^{\ell-1} - \frac{b}{2} + h_1^{\ell-1} - h_3^{\ell-1} + \frac{b}{2}\right) = 0$$

이는 지형에 상관없이 성립한다. 따라서 블락된 경우는 따질 필요가 없다.

• $\ell-1$ 시점에서 형성된 지형의 조합수는 무한하다. 하지만 그림1과 같은 경우로 요약할 수 있다.

• ℓ 시점에서 눈이 쌓이는 경우는 아래의 경우가 있다.

- $(\xi_1^\ell, \xi_2^\ell, \xi_3^\ell) = (0,0,0) \Longrightarrow A = 0 := a_0$
- $(\xi_1^\ell, \xi_2^\ell, \xi_3^\ell) = (\tilde{b},0,0) \Longrightarrow A = 2\tilde{b}(h_3^{\ell-1} - h_2^{\ell-1}) := a_1$
- $(\xi_1^\ell, \xi_2^\ell, \xi_3^\ell) = (0,\tilde{b},0) \Longrightarrow A = 2\tilde{b}\left(h_2^{\ell-1} - h_1^{\ell-1} - \frac{\tilde{b}}{2}\right) := a_2$
- $(\xi_1^\ell, \xi_2^\ell, \xi_3^\ell) = (0,0,\tilde{b}) \Longrightarrow A = 2\tilde{b}\left(h_1^{\ell-1} - h_3^{\ell-1} + \frac{\tilde{b}}{2}\right) := a_3$

note: $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ 임에 유의할것.

- cases 2에 해당하는 경우들을 따져보자. $\Xi_{\bullet 1}$

$$C_i = \left\{ \boldsymbol{\Xi}^{\ell} : \xi_i^{\ell-1} > 0 \right\}$$

case 1-1 $\sim$ 1-4:

- cases 1-1의 경우 (7번노드) $A = 0$ (1번노드)

(1) $A = 0$

(2) $A = \frac{a_1+a_3}{2}$

(3) block

(4) $A = \frac{3a_3}{4}$

- 따라서 $\frac{5a_1+2a_3}{4}$

1-2:

(7) $A = 0$

(1) $A = 0$

(2) $A = \frac{a_1+a_3}{2}$

(3) $A = 0$

(4) $A = 0$

- 따라서 $\frac{2a_1+2a_3}{4}$.

1-3:

(7) $A = \frac{3a_1}{4}$

(1) block

(2) $A = \frac{a_1+a_3}{2}$

(3) block

(4) $A = \frac{3a_3}{4}$

- 따라서 $\frac{4a_1+4a_3}{4}$.

1-4:

(7) $A = \frac{3a_1}{4}$

(1) block

(2) $A = \frac{a_1+a_3}{2}$

(3) $A = 0$

(4) $A = 0$

- 따라서 $\frac{5a_1+2a_3}{4}$.
- 경우1을 종합하면 $\frac{16a_1+10a_3}{4}$

4-1:

(7) $A = 0$

(1) $A = \frac{a_2}{2}$

(2) block

(3) $A = a_2$

(4) $A = \frac{3a_3}{4}$

- 따라서 $\frac{6a_2+3a_3}{4}$

4-2:

(7) $A = 0$

(1) $\frac{a_2}{2}$

(2) block

(3) $\frac{a_2}{2}$

(4) $A = 0$

- 종합 $\frac{4a_2}{4}$

4-3:

(7) $A = \frac{3a_1}{4}$

(1) $A = a_2$

(2) block

(3) $A = a_2$

(4) $A = \frac{3a_3}{4}$

- 종합 $\frac{3a_1+8a_2+3a_3}{4}$

4-4:

(7) $A = \frac{3a_1}{4}$

(1) $A = a_2$

(2) block

(3) $A = \frac{a_2}{2}$

(4) $A = 0$

- 종합 $\frac{6a_2+3a_3}{4}$
- 경우4를 종합하면 $\frac{3a_1+18a_2+9a_3}{4} = \frac{16a_2+6a_3}{4}$
- 경우1과 경우4를 종합하면 $\frac{16a_1+10a_3}{4} + \frac{16a_2+6a_3}{4} = \frac{16a_1+16a_2+16a_3}{4} = 0$
- 따라서 각경우가 존재할 확률이 같다는 것만 증명하면 끝난다.

- 다른연습장
- ℓ-시점에서 눈이 빨강상태에 있다고 하자. 즉 $\xi^{\ell}(v_1) > 0$. 그리고 $\ell + N^{\ell}_{1,7}$ 시점에서 보라에 있다고 하자. 즉 $\xi^{\ell+N^{\ell}_{1,7}}(v_7) > 0$. 아래가 성립함을 주장할 수 있다.

$$\text{for all } i,j\text{:}\ N^0_{i,j} = N^1_{i,j} = N^2_{i,j} = \dots$$

따라서 그냥 아래와 같이 쓰자.

$$N_{i,j}$$

이때 $N_{i,j}$는 노드 i에서 출발하여 j로 도착한 횟수이다. 이것을 hitting time이라고 하자.

- unweighted regular graph의 경우 아래가 존재한다.

$$N^* = \min_{i,j} N_{i,j}$$

따라서 아래도 존재한다. $E(N^*)$도 존재한다. 구체적으로 $E(N^*) = \frac{1}{\sum_j^n E_{1j}}$이다. 그리고 임의의 두 노드사이의 hitting time의 평균 즉 $EN_{i,j}$은 EN^*의 배수로 표현가능하다.

4.3 링과 링이 아닌 그룹은 분리할 수 있다.