1 *Ergodic*

Theorem: Let $\mathcal{G} = (V, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{W})$ be a weighted graph with $|V| = n$ and f be a graph signal defined on $\mathcal{G}$. Let $\mathcal{H}(f, \mathcal{G}; \tau)$ denote the heavy snow transformation of f. Then there exists a unique stationary distribution $\boldsymbol{\pi}^\star$ such that $\boldsymbol{\pi}^0 \prod_{\tau=1}^{\infty} \boldsymbol{P}^\tau = \boldsymbol{\pi}^\star$, where $\boldsymbol{P}^\tau$ is a transition matrix with the (i,j)th element $P_{ij}^\tau = \text{Prob}\big(v_j = \tilde{v}^\tau | v_i = \tilde{v}^{\tau-1}\big)$ and $\boldsymbol{\pi}^0 = (1/n, \dots, 1/n)^\top$.

Proof. The necessary conditions for the ergodictiy of $\boldsymbol{P}^\tau$ are (i) irreducible and (ii) aperiodic. For (i) irreducible, it is clear due to $\gamma < 1$. To show (ii), suppose that $\gcd\{\tau > 0 : \text{Prob}(\tilde{v}^\tau = v | \tilde{v}^0 = u) > 0\} \geq 2$, where gcd denotes the greatest common divisor. For all $v_i \in V$ and $\ell > 0$, P_{ii}^ℓ should be 0, contrary to the assumption.

note: $\boldsymbol{P}$가 τ에 따라 변화해도 상관없는지?

Theorem: $\mathcal{G} = (V, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{W})$가 $\max_{i,j} |f(v_i) - f(v_j)| < \infty$인 regular graph 라면 모든 고정된 i, j에 대하여 아래가 성립한다.

$$p_{12}^\tau = \frac{W_{12}}{\sum_{j=1}^n W_{1j}} + o(1) \quad \text{for all } i, j.$$

여기에서

$$p_{12}^\tau := Prob(T^\tau = 2 | T^{\tau-1} = 1) = \begin{cases} \frac{d(v_2)}{\sum_{i=1}^n d(v_i)} & \mathcal{U}^{\tau-1} = \emptyset \\ \frac{1}{|\mathcal{U}^{\tau-1}|} & \mathcal{U}^{\tau-1} \neq \emptyset \text{ and } v_1 \in \mathcal{U}^{\tau-1} \\ 0 & \mathcal{U}^{\tau-1} \neq \emptyset \text{ and } v_1 \notin \mathcal{U}^{\tau-1} \end{cases}$$

Proof. 아래와 같이 쓰자.

$$\begin{aligned} p_{12}^\tau &= a^\tau + b^\tau + 0 \\ a^\tau &= I(\mathcal{U}^{\tau-1} = \emptyset) \times \frac{d(v_2)}{\sum_{i=1}^n d(v_i)} = I(\mathcal{U}^{\tau-1} = \emptyset)\frac{d(v_2)}{d} \\ b^\tau &= I(\mathcal{U}^{\tau-1} \neq \emptyset) I(1 \in \mathcal{U}^{\tau-1}) \times \frac{1}{|\mathcal{U}^{\tau-1}|} \end{aligned}$$

그런데 $\frac{I(v_1 \in \mathcal{U}^{\tau-1})}{|\mathcal{U}^{\tau-1}|} = \frac{d(v_1)}{d} + o_p(1)$ 이므로 $b^\tau = I(\mathcal{U}^{\tau-1} \neq \emptyset)\frac{d(v_1)}{d} + o_p(1)$ 이다. 정리하면

$$a^\tau = I(\mathcal{U}^{\tau-1} = \emptyset)\frac{d(v_2)}{d}$$
$$b^\tau = I(\mathcal{U}^{\tau-1} \neq \emptyset)\frac{d(v_1)}{d} + o_p(1)$$

따라서 만약에 $d(v_1) = d(v_2)$ 라면

$$p_{12}^\tau = a^\tau + b^\tau = \frac{d(v_1)}{d} + o_p(1) = \frac{d(v_2)}{d} + o_p(1)$$

그런데 $\frac{d(v_2)}{d} = \frac{W_{12}}{\sum_j W_{1j}}$ 이므로 증명끝.

2 예제2에 대한 백업 (1)

Theorem:

- 빨주노초파남보의 7개의 노드가 있다고 하자. 즉 $V = \{1, 2, 3, \dots, 7\}$ 이라고 하자. 그리고 이들이 서로 링형태로 연결되어 있다고 가정하자.

주장1: : ℓ 시점에서 그림1의 각 지형이 형성될 확률은 모두 같다.

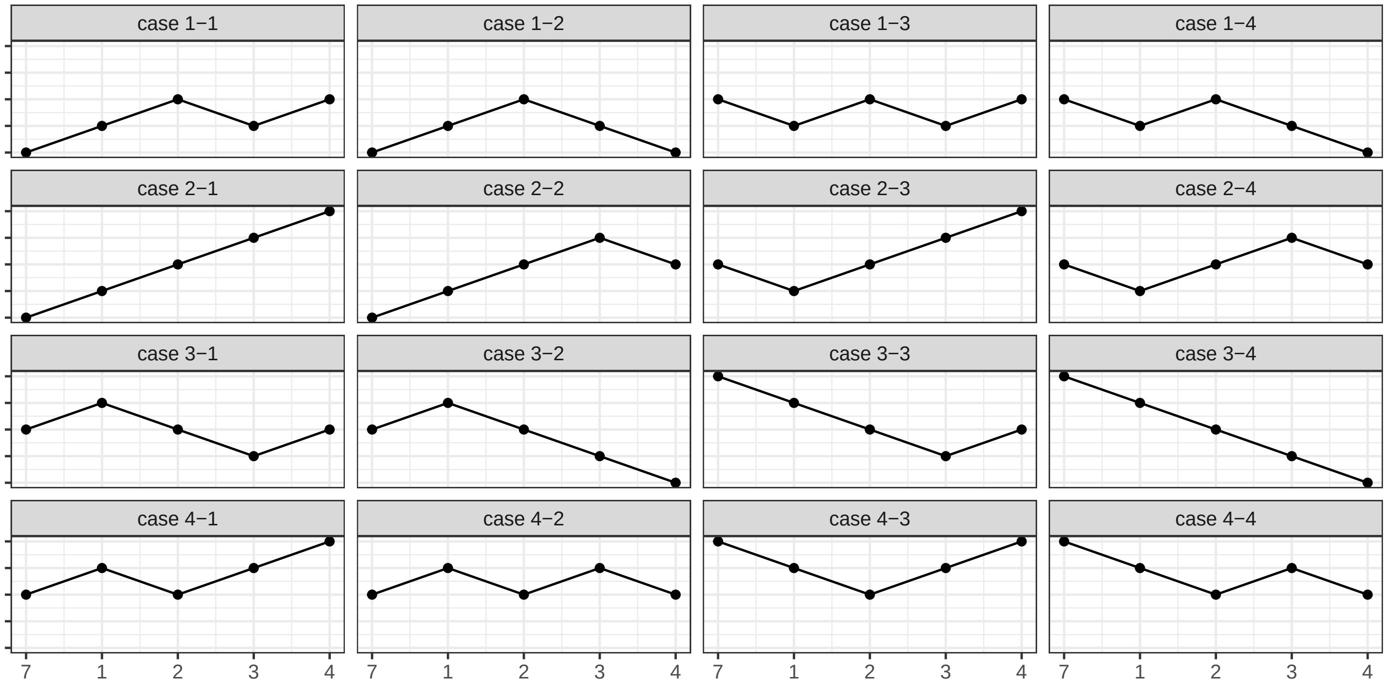

Figure 1: 가능한 지형들의 경우들

주장2: : $\tau = \ell - 1$에서 성립한다면 $\tau = \ell$에서도 성립한다.

주장2의 증명:

- 아래를 보이면 된다.

$$\Sigma_{13}^{\ell} - \Sigma_{12}^{\ell} = \Sigma_{13}^{\ell-1} - \Sigma_{12}^{\ell-1} + (h_1^{\ell} - h_3^{\ell})^2 - (h_1^{\ell} - h_2^{\ell})^2 \geq 0$$

그런데 $\Sigma_{13}^{\ell-1} - \Sigma_{12}^{\ell-1} > 0$ 이므로 아래를 보이면 충분하다.

$$\begin{aligned}
A &:= (h_1^{\ell} - h_3^{\ell})^2 - (h_1^{\ell} - h_2^{\ell})^2 \\
&= (h_1^{\ell-1} + \xi_1^{\ell} - h_3^{\ell-1} - \xi_3^{\ell})^2 - (h_1^{\ell-1} + \xi_1^{\ell} - h_2^{\ell-1} - \xi_2^{\ell})^2 \\
&= (h_1^{\ell-1} - h_3^{\ell-1})^2 + (\xi_1^{\ell} - \xi_3^{\ell})^2 - 2(h_1^{\ell-1} - h_3^{\ell-1})(\xi_1^{\ell} - \xi_3^{\ell}) \\
&\quad - (h_1^{\ell-1} - h_2^{\ell-1})^2 - (\xi_1^{\ell} - \xi_2^{\ell})^2 + 2(h_1^{\ell-1} - h_2^{\ell-1})(\xi_1^{\ell} - \xi_2^{\ell}) \geq 0
\end{aligned}$$

그런데

$$(h_1^{\ell-1} - h_3^{\ell-1})^2 - (h_1^{\ell-1} - h_2^{\ell-1})^2 \geq 0$$

이므로 아래만 보이면 된다.

$$(\xi_1^{\ell} - \xi_3^{\ell})^2 - 2(h_1^{\ell-1} - h_3^{\ell-1})(\xi_1^{\ell} - \xi_3^{\ell}) - (\xi_1^{\ell} - \xi_2^{\ell})^2 + 2(h_1^{\ell-1} - h_2^{\ell-1})(\xi_1^{\ell} - \xi_2^{\ell}) \geq 0$$

아래와 같이 나누자.

$$A_1 := (\xi_1^{\ell} - \xi_3^{\ell})^2 - (\xi_1^{\ell} - \xi_2^{\ell})^2$$

$$A_2 := -2(h_1^{\ell-1} - h_3^{\ell-1})(\xi_1^{\ell} - \xi_3^{\ell}) + 2(h_1^{\ell-1} - h_2^{\ell-1})(\xi_1^{\ell} - \xi_2^{\ell})$$

- 먼저 $\ell - 1$시점에서 눈이 갇힌 (blocked) 경우를 고려하자. 눈이 갇히고 노드 1에 왔다면 $A_1 = 0$ 이다. 따라서

$$A = A_2 = 2b\left(h_3^{\ell-1} - h_2^{\ell-1}\right)$$

블락된 이후 노드2로 왔다면 $A_1 = -b^2$ 이고

$$A = -b^2 + A_2 = -b^2 + 2b(h_1^{\ell-1} - h_2^{\ell-1}) = 2b\left(h_2^{\ell-1} - h_1^{\ell-1} - \frac{b}{2}\right)$$

블락된 이후 노드3으로 왔다면 $A_1 = b^2$ 이고

$$A = b^2 + A_2 = b^2 + 2b(h_1^{\ell-1} - h_3^{\ell-1}) = 2b\left(h_1^{\ell-1} - h_3^{\ell-1} + \frac{b}{2}\right)$$

블락된 이후에 각 경우에 대하여 평균적으로 A는

$$2b\left(h_3^{\ell-1} - h_2^{\ell-1} + h_2^{\ell-1} - h_1^{\ell-1} - \frac{b}{2} + h_1^{\ell-1} - h_3^{\ell-1} + \frac{b}{2}\right) = 0$$

이는 지형에 상관없이 성립한다. 따라서 블락된 경우는 따질 필요가 없다.

- ℓ 시점에서 눈이 쌓이는 경우는 아래의 경우가 있다.
  - $(\xi_1^\ell, \xi_2^\ell, \xi_3^\ell) = (0,0,0) \Longrightarrow A = 0 := a_0$
  - $(\xi_1^\ell, \xi_2^\ell, \xi_3^\ell) = (\tilde{b},0,0) \Longrightarrow A = 2\tilde{b}(h_3^{\ell-1} - h_2^{\ell-1}) := a_1$
  - $(\xi_1^\ell, \xi_2^\ell, \xi_3^\ell) = (0,\tilde{b},0) \Longrightarrow A = 2\tilde{b}\left(h_2^{\ell-1} - h_1^{\ell-1} - \frac{\tilde{b}}{2}\right) := a_2$
  - $(\xi_1^\ell, \xi_2^\ell, \xi_3^\ell) = (0,0,\tilde{b}) \Longrightarrow A = 2\tilde{b}\left(h_1^{\ell-1} - h_3^{\ell-1} + \frac{\tilde{b}}{2}\right) := a_3$

note: $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ 임에 유의할것.

- case2-1 $\sim$ case 3-4의 경우는 아래가 성립함이 자명함. (추후에 좀더 엄밀하게 서술할것임)

$$\Sigma_{13}^\ell - \Sigma_{12}^\ell \geq 0$$

case 1-1 $\sim$ 1-4:

- cases 1-1의 경우 (7번노드) $A = 0$ (1번노드)

(1) $A = 0$

(2) $A = \frac{a_1 + a_3}{2}$

(3) block

(4) $A = \frac{3a_3}{4}$

- 따라서 $\frac{5a_1 + 2a_3}{4}$

1-2:

(7) $A = 0$

(1) $A = 0$

(2) $A = \frac{a_1 + a_3}{2}$

(3) $A = 0$

(4) $A = 0$

- 따라서 $\frac{2a_1+2a_3}{4}$.

1-3:

(7) $A = \frac{3a_1}{4}$

(1) block

(2) $A = \frac{a_1+a_3}{2}$

(3) block

(4) $A = \frac{3a_3}{4}$

- 따라서 $\frac{4a_1+4a_3}{4}$.

1-4:

(7) $A = \frac{3a_1}{4}$

(1) block

(2) $A = \frac{a_1+a_3}{2}$

(3) $A = 0$

(4) $A = 0$

- 따라서 $\frac{5a_1+2a_3}{4}$.
- 경우1을 종합하면 $\frac{16a_1+10a_3}{4}$

4-1:

(7) $A = 0$

(1) $A = \frac{a_2}{2}$

(2) block

(3) $A = a_2$

(4) $A = \frac{3a_3}{4}$

- 따라서 $\frac{6a_2+3a_3}{4}$

4-2:

(7) $A = 0$

(1) $\frac{a_2}{2}$

(2) block

(3) $\frac{a_2}{2}$

(4) $A = 0$

- 종합 $\frac{4a_2}{4}$

4-3:

(7) $A = \frac{3a_1}{4}$

(1) $A = a_2$

(2) block

(3) $A = a_2$

(4) $A = \frac{3a_3}{4}$

- 종합 $\frac{3a_1+8a_2+3a_3}{4}$

4-4:

(7) $A = \frac{3a_1}{4}$

(1) $A = a_2$

(2) block

(3) $A = \frac{a_2}{2}$

(4) $A = 0$

- 종합 $\frac{6a_2+3a_3}{4}$
- 경우4를 종합하면 $\frac{3a_1+18a_2+9a_3}{4} = \frac{16a_2+6a_3}{4}$
- 경우1과 경우4를 종합하면 $\frac{16a_1+10a_3}{4} + \frac{16a_2+6a_3}{4} = \frac{16a_1+16a_2+16a_3}{4} = 0$

Theorem:

- 예제2에서 링과 링이 아닌 그룹은 분리가능함.

Theorem:

- 변형된 예제1의 caseA의 경우 2개 그룹은 서로 분리가능함.

Theorem (틀린듯): Let $\mathcal{G} = (V, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{W})$ be a weighted graph with $|V| = n$ and f be the graph function defined on $\mathcal{G}$. Assume that $\mathcal{G}$ is a regular graph. Suppose that $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ is $i.i.d$ random sample. Let $\mathcal{G}^\tau = (V, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{W}^\tau)$be the weighted graph induced by the heavy snow transformation of f $\mathcal{H}(f, \mathcal{G}; \tau)$. Then we have $\boldsymbol{W}^\tau \xrightarrow{p} \boldsymbol{W}$ element-wisely as $\tau \to \infty$.

Proof. Using the results in Appendix A.2, we obtain $W_{ij}^\tau \sim N(T_{ij}(F), V_{ij}(T, F)/$ where $T_{ij}(F) := \int W_{ij}^\tau dF^\tau$. Note that $T_{ij}(F^\tau) \to 1$ as $\tau \to \infty$ for $i \neq j$ and $T_{ij}(F^\tau) = 0$ for $i = j$. Further, we get $V_{ij}(T, F^\tau)/n \to 0$ as $\tau \to \infty$ for all i, j. Thus $\boldsymbol{W}^\tau \xrightarrow{p} \boldsymbol{W}$ element-wisely as $\tau \to \infty$.

Appendix 2: : Let $\mathcal{G} = (V, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{W})$ be a weighted graph with $|V| = n$ and f be a graph signal defined on $\mathcal{G}$. Assume that $\mathcal{G}$ is a regular graph. Suppose that $f(v_1), \dots, f(v_n)$ is $i.i.d$ random sample. Let $\mathcal{H}(f, \mathcal{G}; \tau)$ be the heavy snow transformation of f. Since $f(v_i)$ is $i.i.d.$ random variable, $\boldsymbol{h}_i$ is $i.i.d.$ random vector with $\boldsymbol{h}_1^\tau, \dots, \boldsymbol{h}_n^\tau \sim F^\tau$. Define a functional $T(F^\tau)$ as $T(F^\tau) := \int g(\boldsymbol{h}) dF^\tau$. Let F_n^τ be an empirical distribution function of $\boldsymbol{h}_1^\tau, \dots, \boldsymbol{h}_n^\tau$ defined as

$$F_n^\tau(m) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1(\boldsymbol{h}_i^\tau \leq t).$$

From Glivenko-Cantelli Lemma, we obtain $F_n^\tau \to F^\tau$. Thus, for a sufficiently large n, we can say that F_n^τ is a neighborhood of F^τ. Hence, we have

$$\begin{aligned} T(F_n^\tau) &\approx T(F^\tau) + \int IF(\boldsymbol{h}^\tau, T, F^\tau) d(F_n^\tau - F^\tau) \\ &= T(F^\tau) + \int IF(\boldsymbol{h}^\tau, T, F^\tau) dF_n^\tau, \end{aligned}$$

where $IF(\boldsymbol{h}^\tau; T, F^\tau) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T((1-t)F^\tau + t\delta(\boldsymbol{h})) - T(F^\tau)}{t}$ is an influence function of T. Here, $\int IF(\boldsymbol{h}^\tau, T, F^\tau) dF^\tau = 0$ is used. Therefore, it follows that

$$\sqrt{n}\Big(T(F_n^\tau) - T(F^\tau)\Big) \to N(0, V(T, F^\tau)),$$

where $V(T, F^\tau) = \int IF(\boldsymbol{h}^\tau, T, F^\tau)^2 dF^\tau$.

Theorem: 고정된 n에 대하여

(i) $\theta_n^\tau \to \infty \quad as \quad \tau \to \infty$

(ii) $\max_{i,j} |f(v_i) - f(v_j)| = O(1)$

이라면 아래를 만족하는 $\pi^\star$가 항상 존재한다.

$$\|\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\pi}^\star\|_2^2 = o(1)$$

단 $\pi_i^\tau := \frac{d_i^\tau}{\sum_i^n d_i^\tau}$, $d_i^\tau = \sum_{j=1}^n W_{ij}^\tau$ and $W_{ij}^\tau = \begin{cases} \exp\Big(-\frac{1}{2}\frac{\Sigma_{ij}^\tau}{(\theta_n^\tau)^2}\Big) & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$

Proof. 모든 $v_i \in V$에 대하여 아래를 보이면 된다.

$$\pi_i^\tau - \pi_i^{\tau-1} = \frac{d_i^\tau}{d_1^\tau + \cdots + d_n^\tau} - \frac{d_i^{\tau-1}}{d_1^{\tau-1} + \cdots + d_n^{\tau-1}} = o(1)$$

따라서 아래를 보이면 된다.

$$\frac{d_i^\tau}{d_1^\tau+\cdots+d_n^\tau}=\frac{d_i^{\tau-1}}{d_1^{\tau-1}+\cdots+d_n^{\tau-1}}+o(1)$$

case1: : $d_1^\tau+\cdots+d_n^\tau=d_1^{\tau-1}+\cdots+d_n^{\tau-1}$ 이라고 하자.

- 아래를 보이기만 하면 된다.

$$d_i^\tau-d_i^{\tau-1}=o(1)$$

그런데

$$d_i^\tau=W_{i1}^\tau+W_{i2}^\tau+\cdots+W_{in}^\tau=W_{i2}^\tau+\cdots+W_{in}^\tau$$

이므로 아래를 보이면 된다.

$$(W_{i1}^\tau-W_{i1}^{\tau-1})+\cdots+(W_{in}^\tau-W_{in}^{\tau-1})=o(1)$$

결국 모든 j 에 대하여 아래를 보이면 된다.

$$W_{ij}^\tau-W_{ij}^{\tau-1}=o(1)$$

따라서 아래를 보이면된다.

$$\frac{W_{ij}^\tau}{W_{ij}^{\tau-1}}-1=o(1)$$

note: 아래를 관찰하자.

$$W_{ij}^\tau=e^{-\frac{\Sigma_{ij}^\tau}{2(\theta_n^\tau)^2}}=e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{h_i^0-h_j^0}{\theta_n^\tau}\right)^2}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{h_i^1-h_j^1}{\theta_n^\tau}\right)^2}\dots e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{h_i^{\tau-1}-h_j^{\tau-1}}{\theta_n^\tau}\right)^2}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{h_i^\tau-h_j^\tau}{\theta_n^\tau}\right)^2}$$

$$W_{ij}^{\tau-1}=e^{-\frac{\Sigma_{ij}^{\tau-1}}{2(\theta_n^{\tau-1})^2}}=e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{h_i^0-h_j^0}{\theta_n^{\tau-1}}\right)^2}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{h_i^1-h_j^1}{\theta_n^{\tau-1}}\right)^2}\dots e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{h_i^{\tau-1}-h_j^{\tau-1}}{\theta_n^{\tau-1}}\right)^2}$$

- 따라서

$$\frac{W_{ij}^\tau}{W_{ij}^{\tau-1}}=A_1\times\cdots\times A_{\tau-1}\times A_\tau$$

이때

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(\theta_n^\tau)^2} - \frac{1}{(\theta_n^{\tau-1})^2}\right)(h_i^0 - h_j^0)^2\right) \\
A_1 &= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(\theta_n^\tau)^2} - \frac{1}{(\theta_n^{\tau-1})^2}\right)(h_i^1 - h_j^1)^2\right) \\
&\cdots \\
A_{\tau-1} &= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(\theta_n^\tau)^2} - \frac{1}{(\theta_n^{\tau-1})^2}\right)(h_i^{\tau-1} - h_j^{\tau-1})^2\right) \\
A_\tau &= \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{(\theta_n^\tau)^2}(h_i^\tau - h_j^\tau)^2\right)
\end{aligned}
$$

(1) 그런데

$$
\frac{1}{(\theta_n^\tau)^2} - \frac{1}{(\theta_n^{\tau-1})^2} = o(1)
$$

이다. 왜냐하면 $\left\{\frac{1}{(\theta_n^\tau)^2}\right\}_{\tau=1}^\infty$ 이 수렴하는 수열이기 때문이다. (수렴하는 수열은 코시수열임)

(2) 또한 모든 τ 에 대하여

$$
\max_{i,j} |h_i^\tau - h_j^\tau| = O(1)
$$

이다. (한쪽에만 눈이 쌓일수는 없음.)

(3) exp 가 연속함수이므로 $A_1, \dots, A_{\tau-1}$ 는 모두 1 로 수렴한다. 그리고 A_τ 역시 1 로 수렴한다.

- 따라서

$$
\frac{W_{ij}^\tau}{W_{ij}^{\tau-1}} = 1 + o(1)
$$

case2: : 이제 $d_1^\tau + \cdots + d_n^\tau \neq d_1^{\tau-1} + \cdots + d_n^{\tau-1}$ 라고 하자. 아래를 정의하자.

$$
\begin{aligned}
d^{\tau-1} &= d_1^{\tau-1} + \cdots + d_n^{\tau-1} \\
d^\tau &= d_1^\tau + \cdots + d_n^\tau \\
\tilde{d}^\tau &= \max(d^\tau, d^{\tau-1})
\end{aligned}
$$

Clearly,

$$\tilde{d}^{\tau} = O(1)$$

따라서 case1 을 반복하면 증명이 된다.

lem: (1) $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{W})$를 모든 엣지가 연결된 레귤러 그래프라고 하자. 즉 $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{J} - \boldsymbol{I}$. (2) $f_1, \dots f_{100} \overset{iid}{\sim} N(\mu_1, 1)$. 그러면 아래가 성립한다.

$$\boldsymbol{W}^{\tau} \overset{p}{\to} \boldsymbol{J} - \boldsymbol{I}$$

lem: (1) $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{W})$를 모든 엣지가 연결된 레귤러 그래프라고 하자. 즉 $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{J} - \boldsymbol{I}$. (2) $f_1, \dots f_{50} \overset{iid}{\sim} N(\mu_1, 1)$ and $f_{51}, \dots, f_{100} \overset{iid}{\sim} N(\mu_2, 1)$. 그러면 아래가 성립한다.

$$\boldsymbol{W}^{\tau} \overset{p}{\to} \begin{bmatrix} \boldsymbol{J} - \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J} - \boldsymbol{I} \end{bmatrix}$$

---

thm: 눈을 쌓을수록 노드정보를 상실한다. HST는 노드정보와 그래프도메인에서의 정보를 연속적으로 변화시키는 장치이다.

note: 단순히 노드에서의 거리와 그래프도메인의 거리를 가중평균한것과 무슨 차이일까?