ТЕХНОСФЕРА

Алгоритмы и структуры данных

Лекция 2

Жадные алгоритмы

План лекции

1. Задача нахождения оптимальных значений
2. Жадные алгоритмы. Задача об интервалах.
3. Жадные алгоритмы. Задача о резервных копиях.
4. Применимость жадных алгоритмов.
5. Приближённое решение задачи о рюкзаке.
6. Алгоритм Хаффмена.
7. Префиксное дерево.
8. Абстракция: строка символов
9. Z-функция.

Задачи нахождения оптимальных значений

Задачи:

- Путешественник желает посетить несколько городов и потратить минимальную сумму денег.

Задачи нахождения оптимальных значений

Задачи:

- Путешественник желает посетить несколько городов и потратить минимальную сумму денег.
- Управление дорожного движения хочет определить длительность фаз светофора, при котором будет обеспечен наибольший трафик.

Задачи нахождения оптимальных значений

Задачи:

- Путешественник желает посетить несколько городов и потратить минимальную сумму денег.
- Управление дорожного движения хочет определить длительность фаз светофора, при котором будет обеспечен наибольший трафик.
- Задача о рюкзаке.

Экстремальные задачи

Экстремальные задачи — задачи на нахождение оптимальных (максимальных или минимальных) значений.
Решение таких задач — *оптимизация*.
Некоторые экстремальные задачи мы можем решить точно, некоторые — приближённо.

Жадные алгоритмы

Жадные алгоритмы

- состоят из итераций
- принимают решение на каждом шаге, стараясь найти *локально* оптимальное решение.

Покомпонентный спуск

Пример типичного жадного алгоритма.
Имеется непрерывная функция n переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, принимающая действительные значения на области определения.
Она определяет поверхность в $n-$мерном пространстве.
Один из алгоритм минимизации:

1. выбираем начальную точку $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, она становится текущей точкой алгоритма.
2. обследуя точки вокруг текущей находим такую, в которой $f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ имеет минимальное значение.
3. если найденная точка отлична от текущей, то делаем его текущей и переходим к второму шагу алгоритма.
4. конец.

Пример покомпонентного спуска

$f(x, y) = (x - 3)^2 + (y + 2)^2$
Начальная точка $(x_0 = 0, y_0 = 0)$. Шаг поиска 0.1.
Осматриваем окрестности начальной точки.

$$
\begin{aligned}
f(0, 0) &= 3^2 + 2^2 = 13 \\
f(0 + 0.1, 0) &= 2.9^2 + 2^2 = 8.41 + 4 = 12.41 \\
f(0 - 0.1, 0) &= 3.1^2 + 2^2 = 9.61 + 4 = 13.61 \\
f(0, 0 + 0.1) &= 9 + 4.41 = 13.41 \\
f(0, 0 - 0.1) &= 9 + 3.61 = 12.61
\end{aligned}
$$

Победила точка $(0.1, 0)$, она становится текущей точкой.

Программа для решения задачи

```
#include <stdio.h>
double f(double x, double y) {
   return (x-3)*(x-3) + (y+2)*(y+2);
}
int main() {
   double x0 = 0., y0 = 0., d = 0.1;
   double dx[] = {d, -d, 0, 0}, dy[] = {0, 0,  d, -d};
   double newx, newy;   bool bestfound = false;
   double maxf = f(x0, y0);
   while (!bestfound) {
      bestfound = true;
      for (int i = 0; i < 4; i++) {
        double newf = f(x0+dx[i],y0+dy[i]);
        if (newf < maxf) {
           maxf = newf;  bestfound = false;
           newx = x0+dx[i];  newy = y0+dy[i];
        }
      }
      if (!bestfound) {
         x0 = newx;  y0 = newy;
      }
   }
   printf("Best f(%.1f,%.1f)=%.2f\n", x0, y0, maxf);
}
```

Пример покомпонентного спуска

Следующий шаг. Текущая точка `(0.1, 0)`.
Мы выбираем из точек `(0.2, 0)`, `(0,0)`, `(0.1, 0.1)`, `(0.1, -0.1)`, что приводит нас к следующей точке `(0.2,0)`
Далее маршрут проходит через точки от `(0.3,0)` до `(1,0)`, затем попеременно до `(3,2)`.

Решение правильное.

Покомпонентный спуск

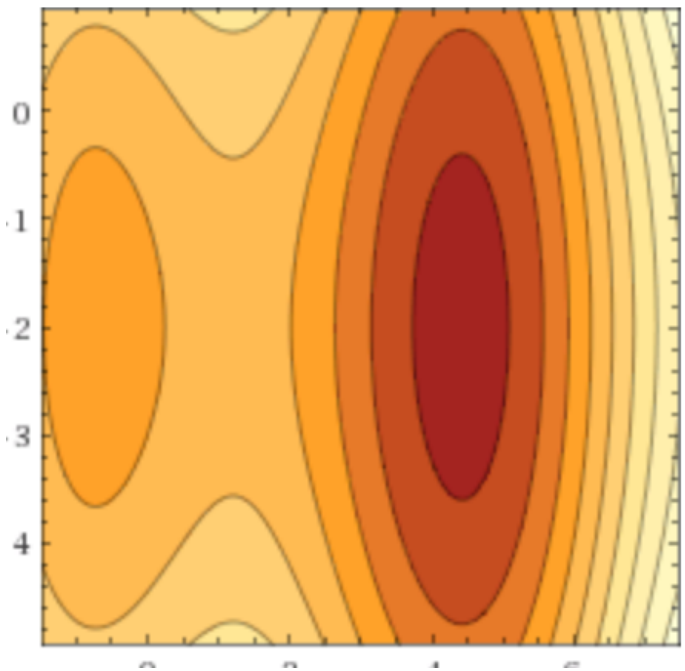
А что произойдёт с решением задачи для функции $(x-3)^2 + 10\sin x + (y+2)^2$?

Наш алгоритм выдаст, что лучшим решением будет точка `(-0.7,2)` с значением ≈ 7.24, хотя минимум этой функции достигается в точке $(\approx 4.4, -2)$ с значением ≈ -7.6.

Покомпонентный спуск

Функция $(x-3)^2 + 10\sin x + (y+2)^2$ имеет несколько локальных минимумов.

Её линии уровня:



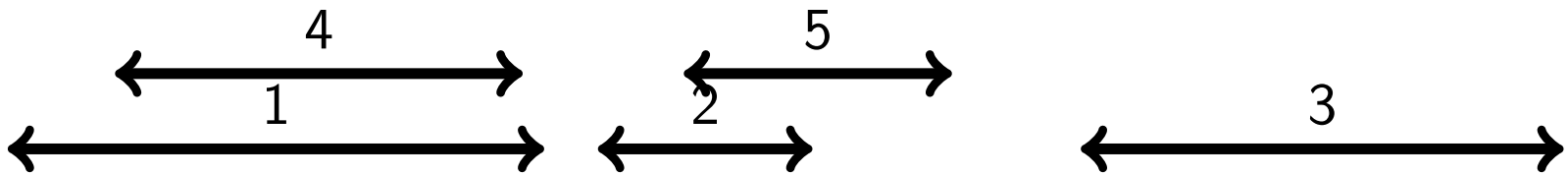
Покомпонентный спуск

Этот алгоритм, как и все жадные алгоритмы, склонен к нахождению локальных экстремумов.

Задача об интервалах

Задача об интервалах

Задача 1. На прямой дано множество отрезков. Необходимо найти максимальный размер множества непересекающихся отрезков.



Задача об интервалах

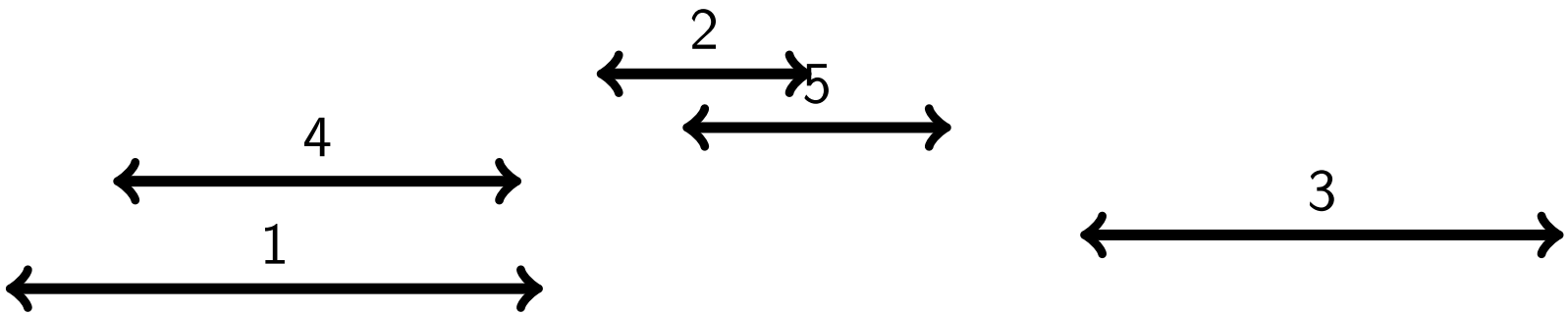
Предлагается рассмотреть следующий вариант жадной стратегии:

- упорядочить отрезки по какому-либо признаку.
- рассматриваем отрезки по-одному. Если он не перекрывается с каким-либо из уже внесённым в выходное множество, то добавляем её в это множество.

Жадность алгоритма здесь заключается в том, что каждый раз, когда мы видим подходящий вариант (рассматривая очередной отрезок), то сразу его хватаем.
Принципов упорядочивания можно выбрать несколько, но, как оказывается, не все из них одинаково полезны.

Задача об интервалах

По длительности. Сначала выберем самые короткие отрезки.

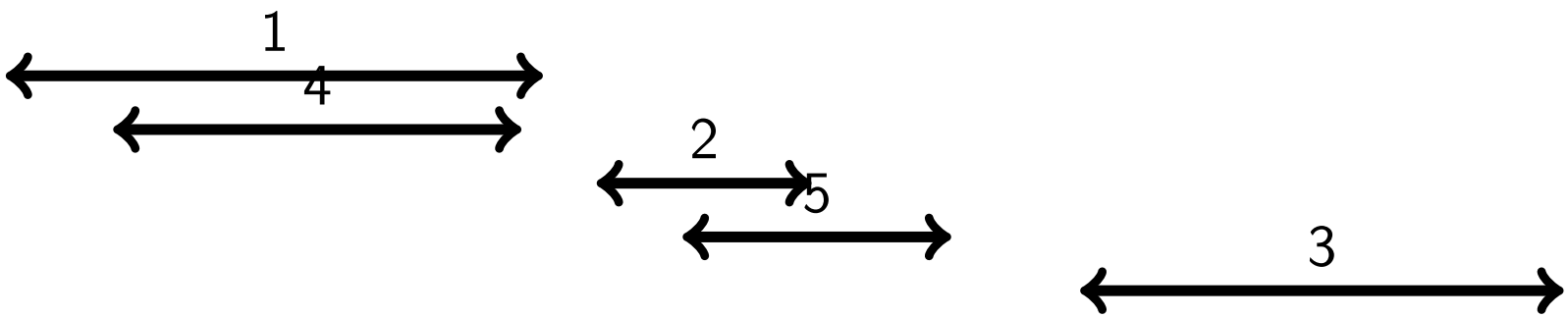


Задача об интервалах

По длительности: итоговая расстановка:

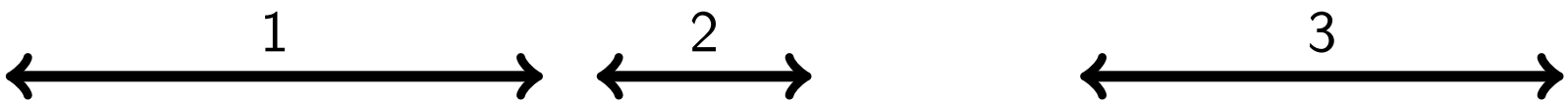
Задача об интервалах

По левой границе.



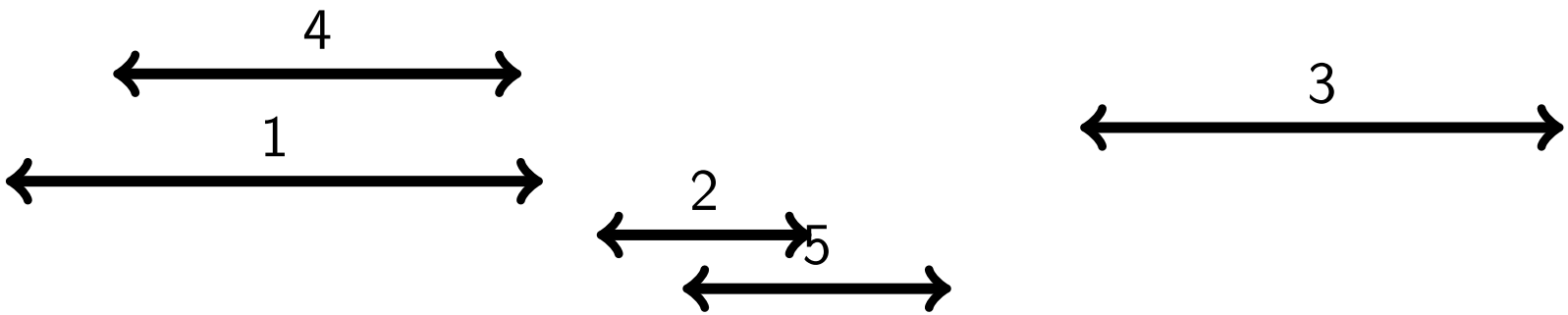
Задача об интервалах

Итоговая расстановка:



Задача об интервалах

По правой границе.

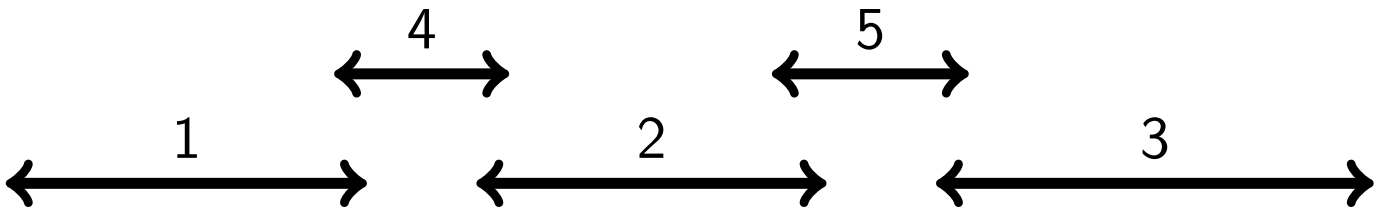


Задача об интервалах

Итоговая расстановка

Задача об интервалах

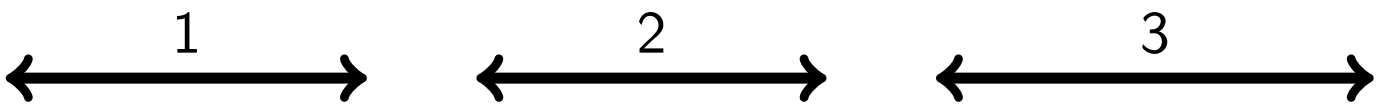
Как будто, все способы упорядочивания годятся?
А что насчёт такой расстановки?



Задача об интервалах

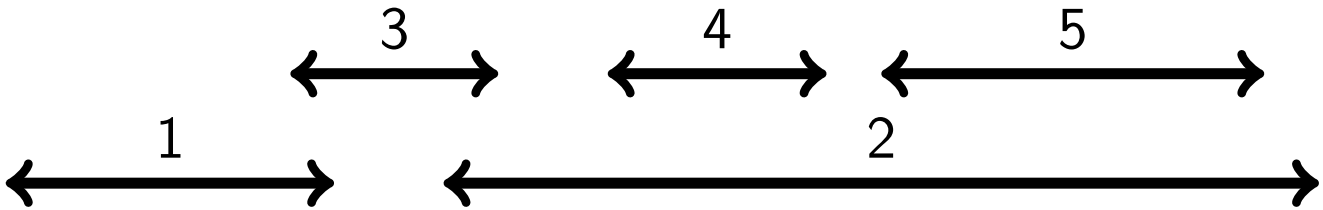
Сначала самые короткие:

По левой границе и по правой границе:



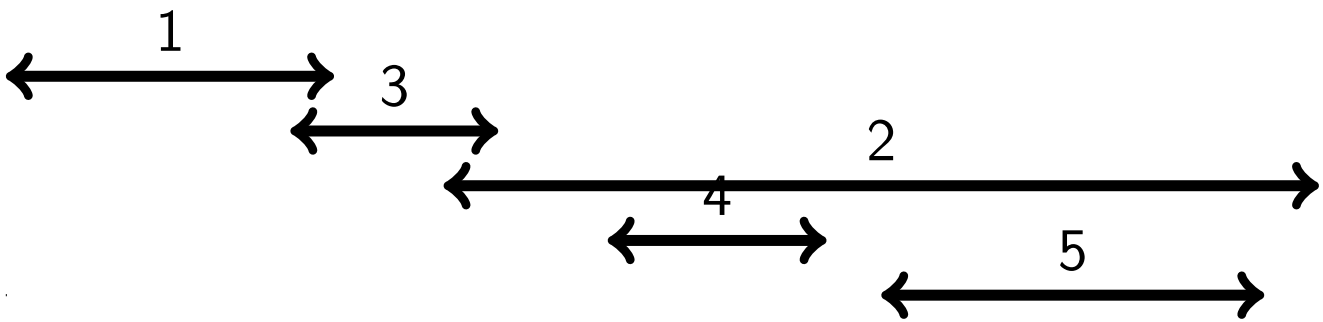
Первый вариант не всегда даёт точное решение.
Поиск контрпримера: мы хотим найти опровергающий какую-либо гипотезу вариант (*зелёную ворону*).

Рассмотрим следующее расположение отрезков:



Задача об интервалах

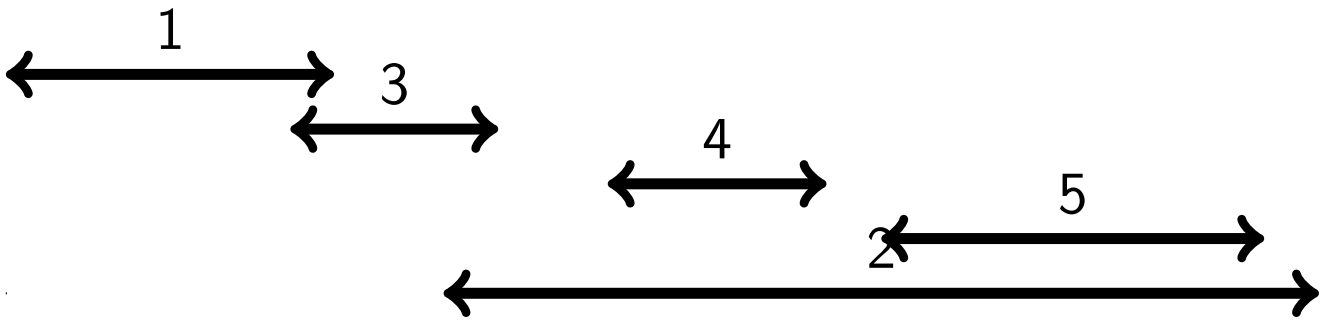
Упорядочивание по началу отрезка даёт нам:



Решение:

Задача об интервалах

Упорядочивание по концу отрезка даёт нам:



И это приводит к верному решению:

Задача об интервалах

Как доказать, что данный алгоритм верно решает задачу?

1. Первый шаг — доказательство того, что существует оптимальное подмножество отрезков, которое содержит первый отрезок, получившийся при применении нашего алгоритма. Если в некотором оптимальном подмножестве мы поменяем отрезок с минимальным значением конца на первый, то количество отрезков в подмножестве не изменится и подмножество останется решением. Таким образом, существует оптимальное подмножество, содержащее первый отрезок.
2. Второй шаг — удаляем из множества отрезков все отрезки, пересекающиеся с первым.
3. Третий шаг — повторяем алгоритм для усечённого множества, в котором находит первый отрезок.

Применив метод математической индукции, мы показали, что предложенный жадный алгоритм приводит к одному из оптимальных решений задачи.

Жадные алгоритмы не заглядывают вперёд. Они повторяют локально оптимальные по какому-либо критерию шаги и надеются, что решение будет глобально оптимальным. Возможно, что найдётся такой локально оптимальный критерий и общее решение окажется верным. Это бывает отнюдь не всегда, но тщательный выбор критерия может найти приемлемое решение.

Задача об резервных копиях

Задача о резервных копиях

Задача 2. Имеется распределённая система, состоящая из N хранилищ различной ёмкости, причём в i-м хранилище можно разместить A_i блоков информации.
Хранение одного блока считается надёжным, если имеется две его копии в различных хранилищах. Требуется определить наибольшее количество надёжных блоков, которое можно разместить во всех хранилищах.

Задача о резервных копиях: пример

4 хранилища размерами `(8, 7, 4, 3)`.

8	7	4	3
1	1	2	2
3	3	4	4
5	5	6	6
7	7	-	-
8	8	-	-
9	9	-	-
10	10	-	-
11	-	11 -	-

Задача о резервных копиях

- Попробуем решить жадным алгоритмом.
- Задачу можно решать многими стратегиями.
- Какая из стратегий оптимальная?

Для удобства сведём задачу к эквивалентной: имеется `N` кучек камней, каждым ходом можно выбрать по одинаковому количеству камней из любой пары кучек. Найти такой порядок игры, при котором останется минимальное количество камней.

Задача о резервных копиях: стратегия 1

Первая стратегия: выбрать две наименьших кучи и взять из них одинаковое наибольшее количество камней.

8	7	4	3
8	7	1	0
8	6	0	0
2	0	0	0

Интуиция подсказывает, что решение неверное.

Задача о резервных копиях: стратегия 2

Вторая стратегия: выбрать наибольшую и наименьшую кучи и взять из них одинаковое наибольшее количество камней.

8	7	4	3
5	7	4	0
5	3	0	0
2	0	0	0

Опять не повезло.

Задача о резервных копиях: стратегия 3

Третья стратегия: выбрать две наибольших кучи и взять из них одинаковое наибольшее количество камней.

8	7	4	3
0	1	4	3
0	1	1	0
0	0	0	0

Повезло. Как обычно в задачах на жадность: нужен контрпример.

Задача о резервных копиях: стратегия 3

Новая попытка:

8	7	7	6	5
0	1	7	6	5
0	1	1	0	5
0	0	1	0	4
0	0	0	0	3

И снова неудача. Есть ли вообще нужная стратегия?

Задача о резервных копиях: стратегия 4

Четвёртая стратегия: выбрать наибольшую и наименьшую кучи, и взять из них по одному камню.

8	7	4	3
7	7	4	2
7	6	4	1
6	6	4	0
5	6	3	0
5	5	2	0
4	5	1	0
4	4	0	0
0	0	0	0

Задача о резервных копиях: стратегия 4

8	7	7	6	5
7	7	7	6	4
7	7	6	6	3
7	6	6	6	2
6	6	6	6	1
6	6	6	5	0
6	6	5	4	0
6	5	5	3	0
5	5	5	2	0
5	5	4	1	0
5	4	4	0	0
4	4	3	0	0
4	3	2	0	0
3	3	1	0	0
3	2	0	0	0
1	0	0	0	0

Задача о резервных копиях: корректность алгоритма

- Очевидно, что на каждой «большой» итерации наименьшая из куч опустошается, так как из неё по условиям алгоритма всегда производится взятие.
- Когда останется три кучи $A \geqslant B \geqslant C$, то возможны следующие ситуации:
  - $A > B + C$. Тогда ответ: $A - B - C$. Так как на каждом ходе A оставалось наибольшим, на каждом их ходов, приведшем к позиции происходило вычитание из A, это значит, что $A > \sum$ всех оставшихся, что даёт верное решение.
  - $A = B + C$. Тогда результат равен нулю.
  - $A < B + C$. Тогда, после некоторой, возможно нулевой последовательности ходов достигается ситуация, когда $A' = B' > C'$, которая сведётся к позиции $A' - \left\lfloor \frac{C'}{2} \right\rfloor, A' - \left\lceil \frac{C'}{2} \right\rceil$.

Применимость жадных алгоритмов. Приближённое решение экстремальных задач

Применимость жадных алгоритмов. Приближённое решение экстремальных задач

Вернёмся к задаче о рюкзаке.
Одно из точных решений имеет сложность $O(2^N)$.
Как найти приближённое решение?

Формализация условия задачи о рюкзаке

Задача 3. (Задача о рюкзаке). Пусть имеется N предметов, стоимость $i-$го предмета v_i, а масса w_i. Найти набор предметов с наибольшей стоимостью и не превосходящей заданного W массой.

Приближённое решение Попробуем применить следующий локально оптимальный алгоритм:

1. Расположим предметы в порядке убывания отношения $\frac{v_i}{w_i}$.

   Пусть они образуют упорядоченное множество B.
2. Установим оставшийся вес $L = W$
3. Установим множество $S = \emptyset$.
4. Выбираем первый предмет I из упорядоченного множества, вес w_I которого не превосходит L.
5. Если такого предмета нет, то алгоритм закончен.
6. Кладём предмет в рюкзак, удаляя его из из B: $B \leftarrow B - I : L \leftarrow L - w_I; S \leftarrow S - I$. Переходим к 4-му шагу.

Приближённое решение задачи о рюкзаке

Данный алгоритм приведёт к какому-либо решению.
Рассмотрим пример:
$N = 3$
$W = 40$
$w_1 = 10; v_1 = 60$
$w_2 = 20; v_2 = 100$
$w_3 = 20; v_3 = 100$
Алгоритм выберет последовательно первый и второй предметы. Их суммарная стоимость окажется 160.
Верное решение — выбрать второй и третий предметы. Их суммарная стоимость будет 200.

Задача о сумме подмножества

Задача 4. Дано множество натуральных чисел $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и натуральное число L. Найти такое подмножество, сумма элементов Sum такова, что $Sum - L \geqslant 0$ и $Sum - L \to \min$.

Жадный алгоритм: сведение к жадной задаче с рюкзаком при стоимости равной a_i и весу, равному 1.

Сжатие информации. Алгоритм Хаффмана.

Сжатие информации: алгоритм Хаффмана

Задача 5. Имеется текст, состоящий из символов.
Закодировать его таким образом, чтобы:

- каждый из встречающихся символов получил свой двоичный код
- множество кодов было префиксным
- суммарная длина всех кодов для всех символов была бы минимальной.

Алгоритм Хаффмана

Пример: пусть имеется текст, состоящий из множества из четырёх символов:
AAAABAABABABABCBCAAAD
Его длина — 21 символ.
Можно закодировать его следующим образом:

- A $\rightarrow$ 0
- B $\rightarrow$ 01
- C $\rightarrow$ 10
- D $\rightarrow$ 11

На кодирование каждого символа понадобится ровно два бита и общая длина кода составит 42 бита.

Префиксный код

Неформальное определение: код, в котором не имеется кодовых слов, начинающихся с других кодовых слов.
Формальное определение: если существует код со строкой a, то кодов с непустой строкой ab не существует.
Пример: код

- A $\rightarrow$ 00
- B $\rightarrow$ 10
- C $\rightarrow$ 01
- D $\rightarrow$ 101

префиксным не является, так как кодовое слово символа D начинается с кодового слова символа B.
Другое название: *безпрефиксный*.
Ещё одно название — код, удовлетворяющий *условиям Фано*.
Наша задача — найти *минимальный префиксный код* для множества.

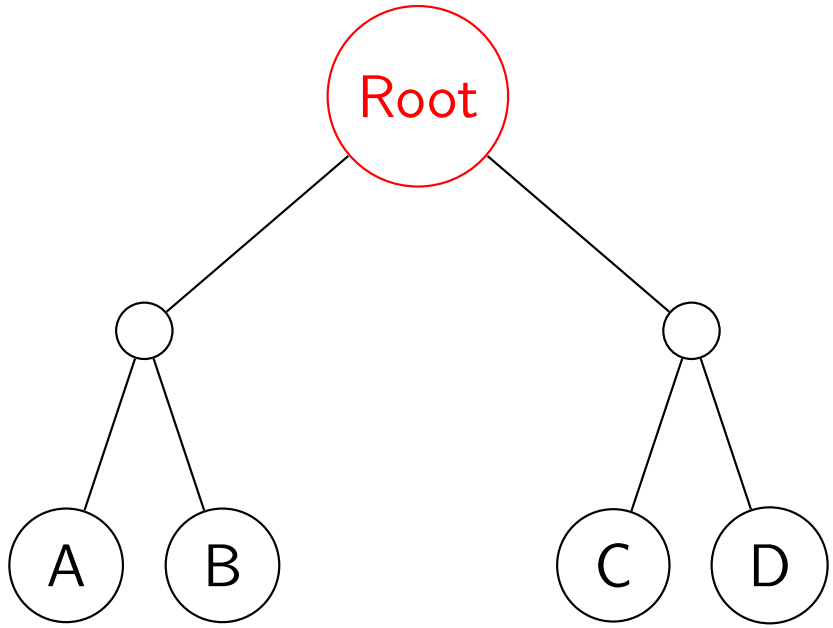
Кодирование с помощью дерева

Ещё раз рассмотрим равномерный код из четырёх символов

- `A` $\to$ `00`
- `B` $\to$ `01`
- `C` $\to$ `10`
- `D` $\to$ `11`

Попробуем представить его в виде двоичного дерева.

Двоичные деревья



Левая ветка — 0, правая ветка — 1.

Алгоритм Хаффмана

`AAAABAABABABABCBCAAAD`

Определим частоты символов:

- $F_A = 12$
- $F_B = 6$
- $F_C = 2$
- $F_D = 1$

Нужно построить дерево, вес которого минимален.

$$\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot L_i,$$

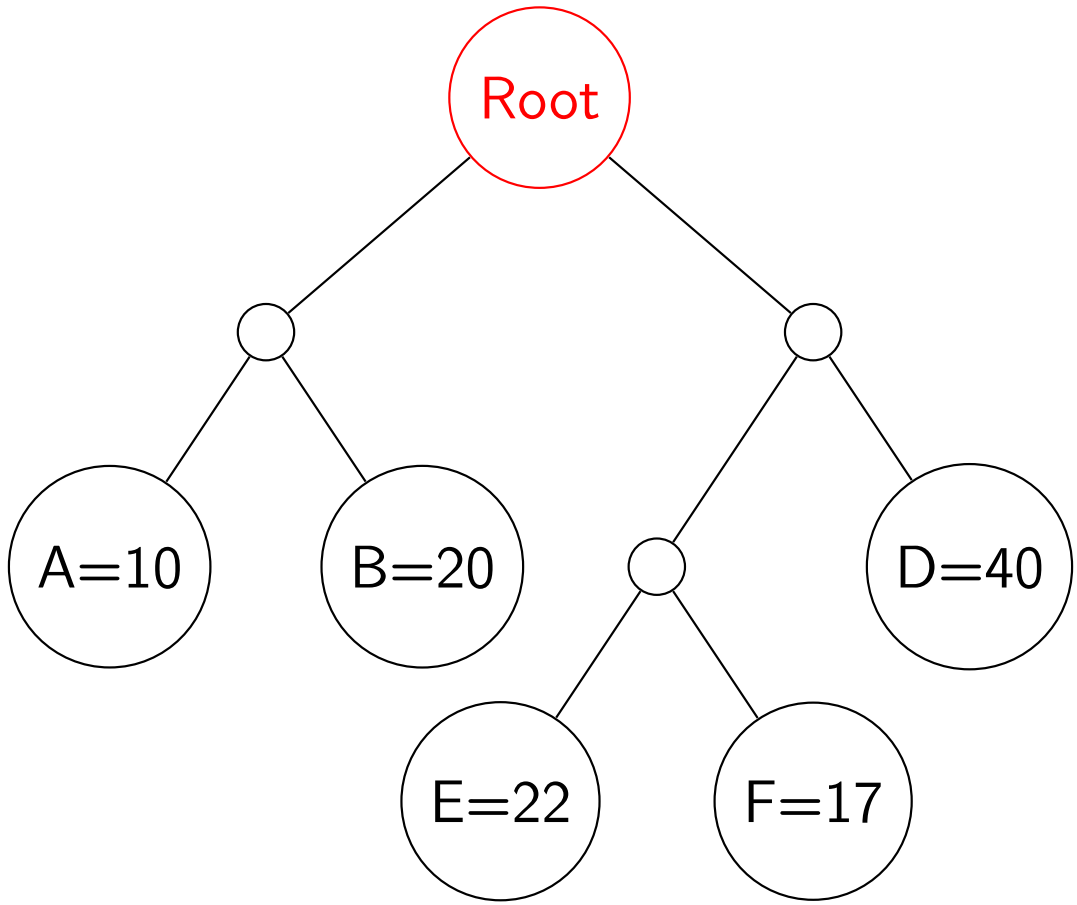
где L_i - глубина $i-$го символа.

Алгоритм Хаффмана

Свойства оптимального дерева:

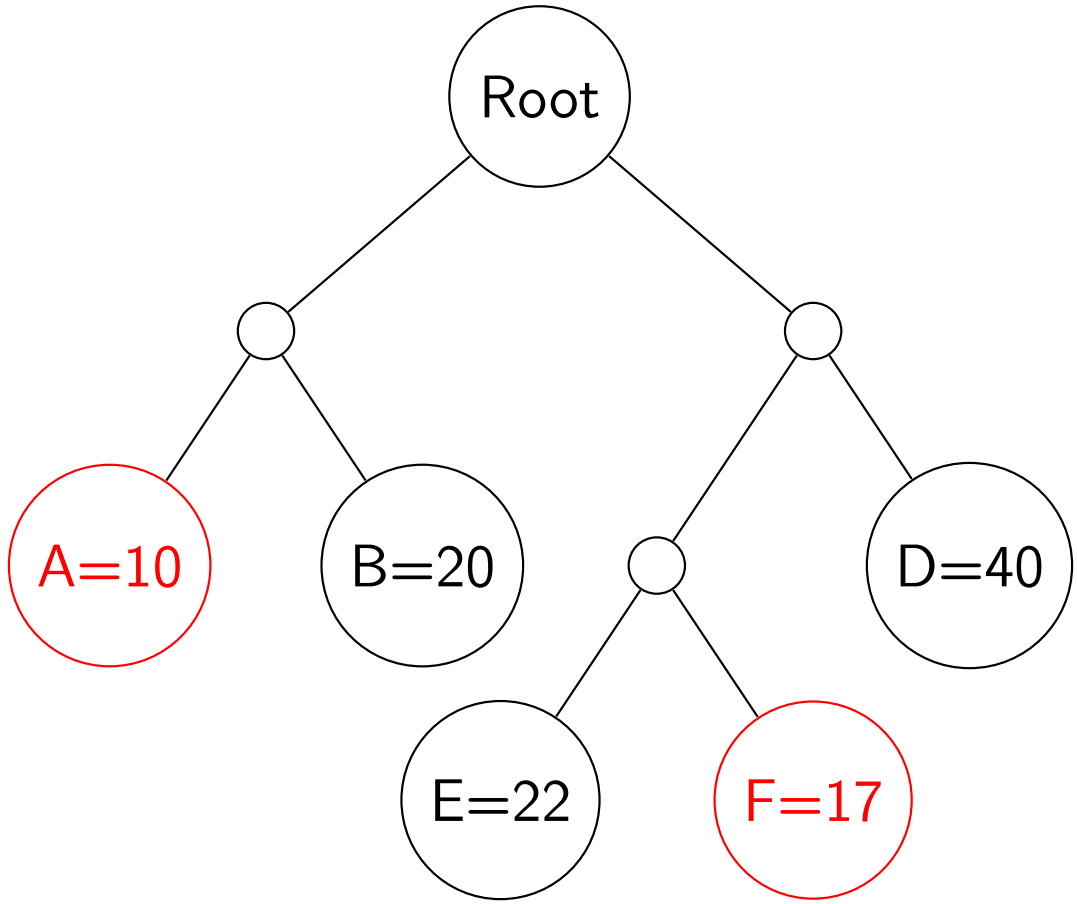
- Из каждого узла должно исходить ровно два пути.
- Не должно быть пустых вершин.
- Самое длинное кодовое слово должно быть парным.

Алгоритм Хаффмана



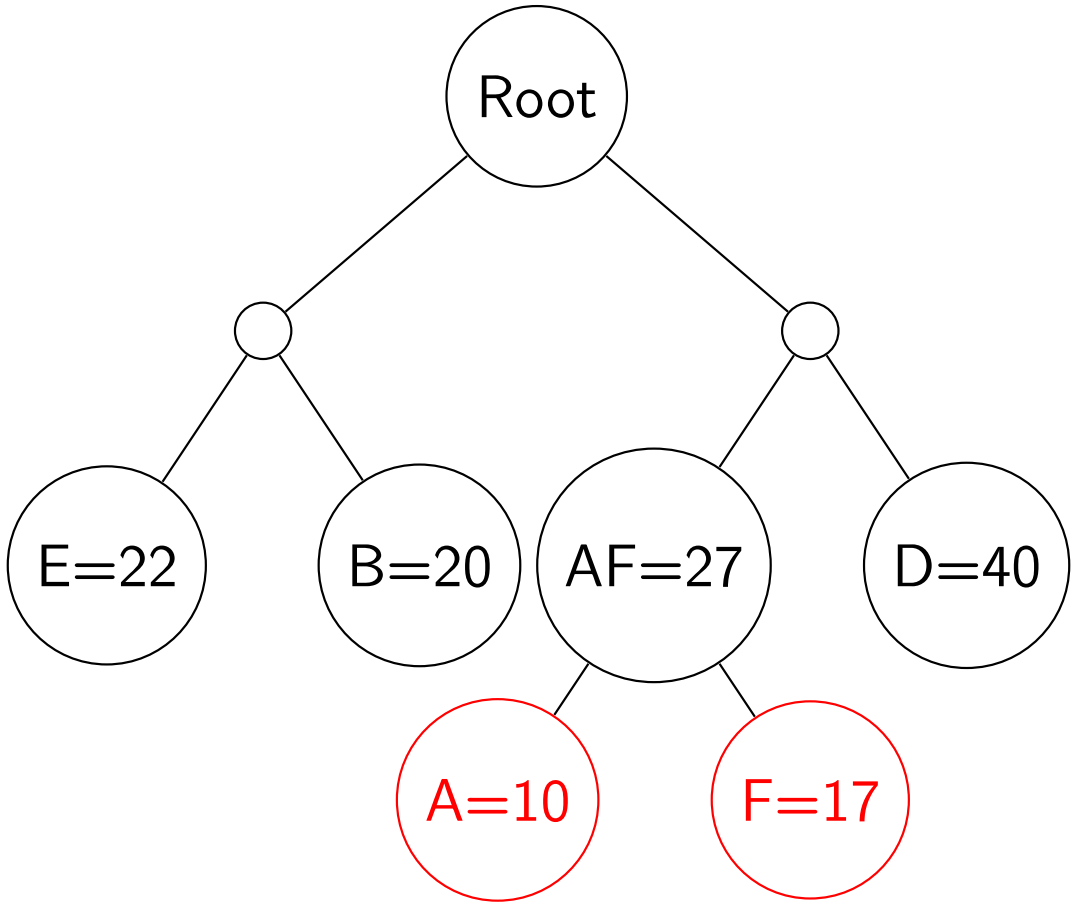
Алгоритм Хаффмана

Находим два самых редких символа.



Алгоритм Хаффмана

Два самых редких символа должны находиться на самой длинной ветке. Если нет, то можно их поменять местами с символами на самой длинной ветке.

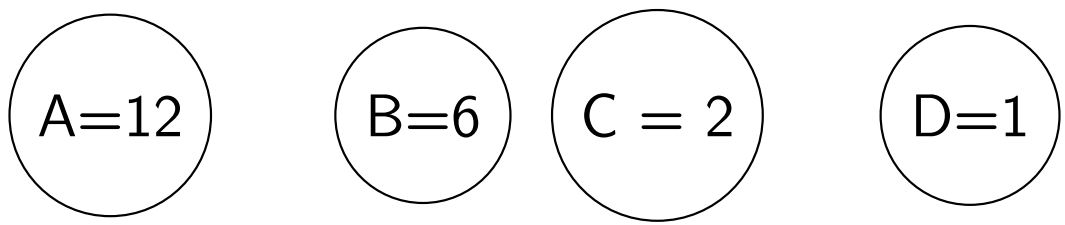


Алгоритм Хаффмана

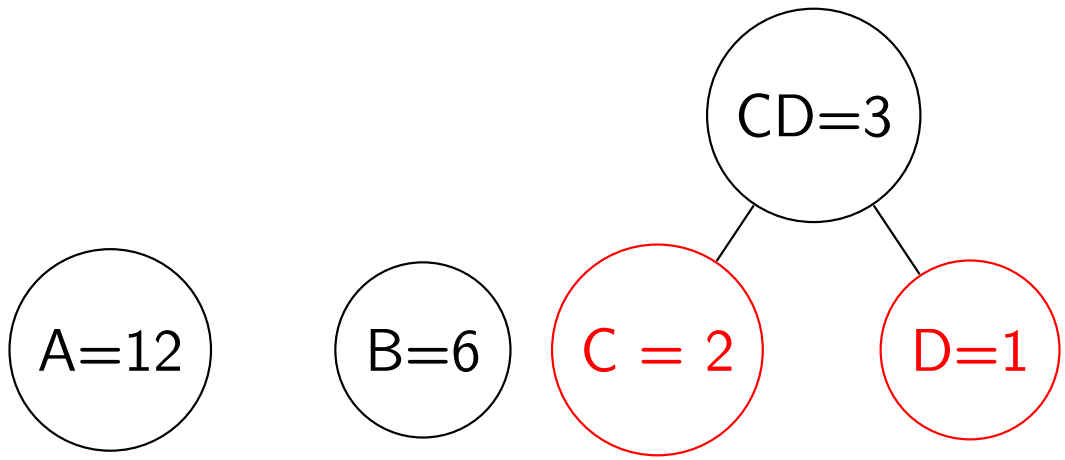
Жадный алгоритм:

1. Помещаем в каждый узел частоту символа
2. Располагаем узлы согласно убыванию частот.
3. Для двух узлов с наименьшей частотой добавляем узел, который их соединяет.
4. В узел помещаем сумму частот детей
5. Помечаем узлы или вершины, как уже обработанные (отправляем вниз)
6. Если необработанных не осталось, то конец алгоритма
7. Переходим к шагу 2.

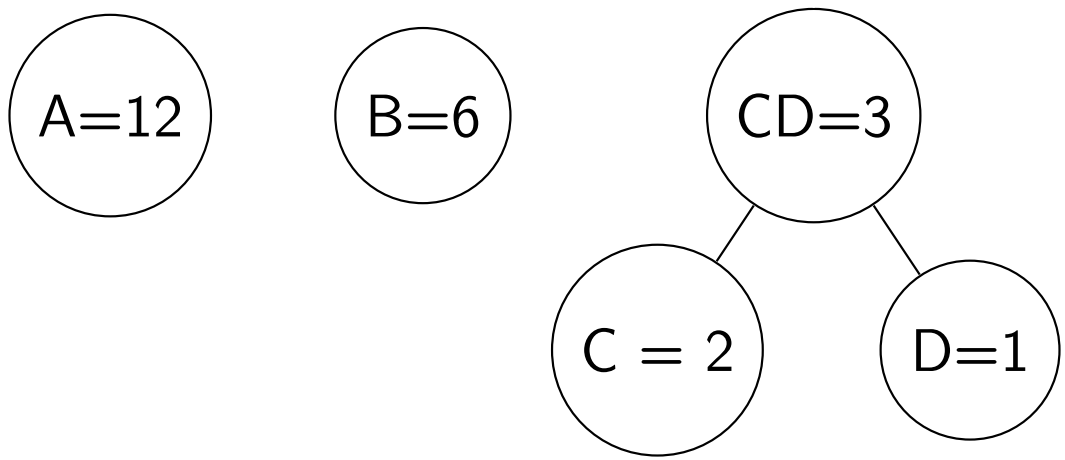
После шага 1



Шаги 2,3,4

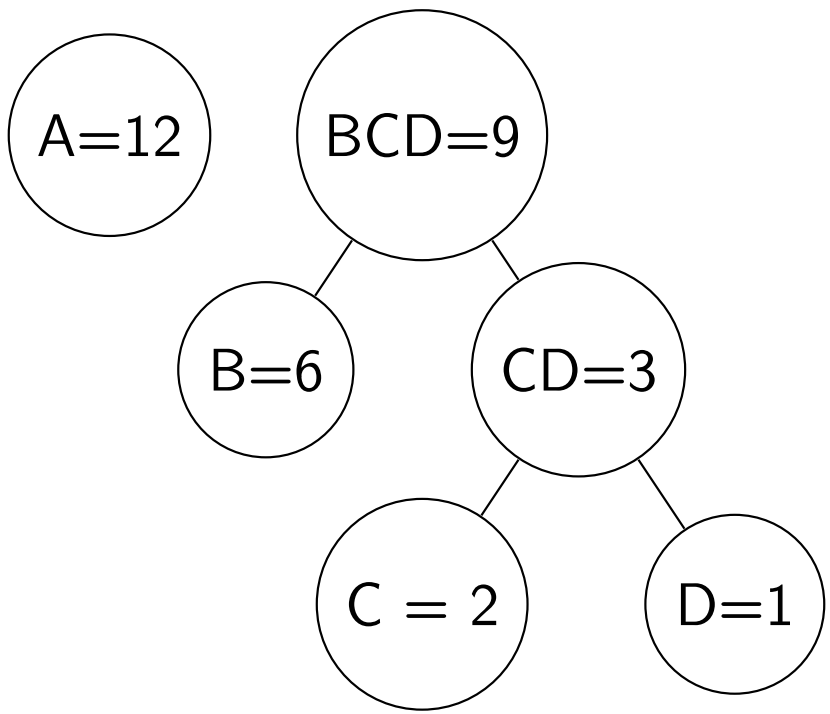


Шаг 5



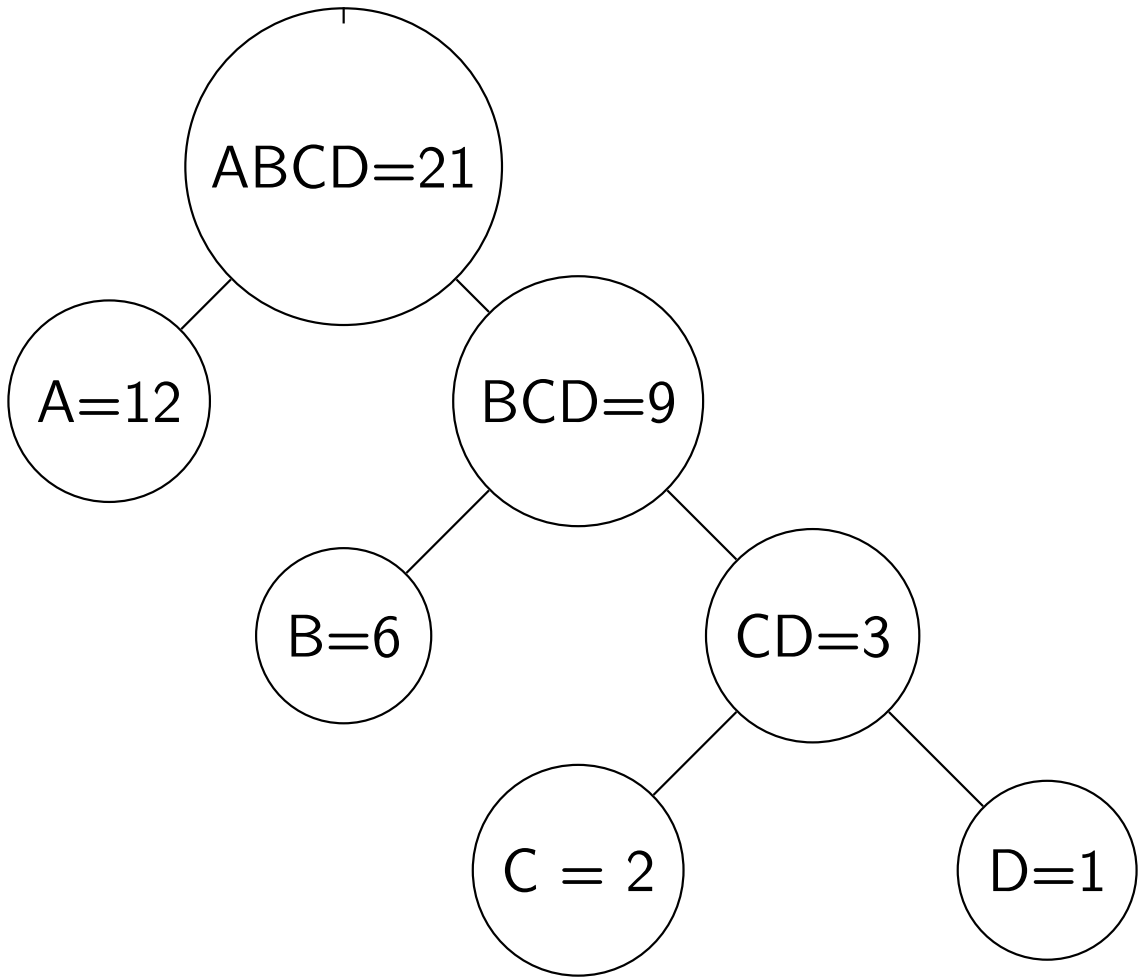
Алгоритм Хаффмана

Следующая итерация:



Алгоритм Хаффмана

Заключительное состояние:



Алгоритм Хаффмана

Получившиеся коды:

- $A \to 0$
- $B \to 10$
- $C \to 110$
- $D \to 111$

Общая длина всех кодовых слов
$12 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 33 < 42$

Префиксное дерево

Задача о покрытии строки

Задача 6. Имеется набор строк $s_i, i = 1 \ldots N$ — «слова», каждое из которых не начинается с другого (префиксный код).
Имеется «длинная» строка p.
Требуется определить, можно ли составить слово p из слов s_i.

Например, если слова $s_i = \{ab, ca, ra, dab\}$, то строку `abracadabra` из них составить можно `ab + ra + ca + dab + ra`, а вот слова `barca`, `abracadabraa` — нет.

Задача о покрытии строки

Цель задачи — не просто найти решение, а найти оптимальное решение.

Главные параметры алгоритма:

- N — длина строки p.
- M — сумма длин строк s_i.

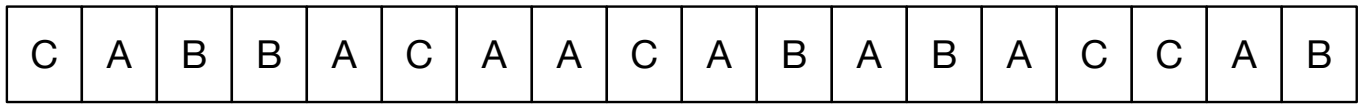
Решается ли эта задача жадным алгоритмом?

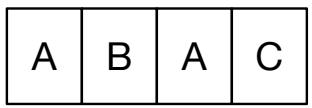
Задача о покрытии строки

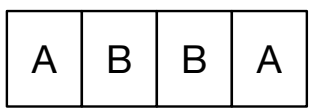
Жадный алгоритм:

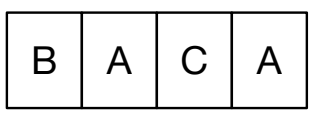
1. Устанавливаем указатель позиции на начало «длинной» строки
2. Выбираем слово, которое полностью совпадает с подстрокой, начинающейся с указателя
3. Если такого слова не найдено, выводим «нет», завершение алгоритма
4. Если такое слово есть, перемещаем указатель на длину слова.
5. Если слово закончилось, то выводим «да» и завершаем алгоритм
6. Возвращаемся к пункту 2

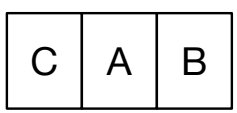
Задача о покрытии строки

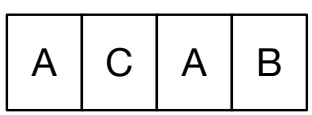




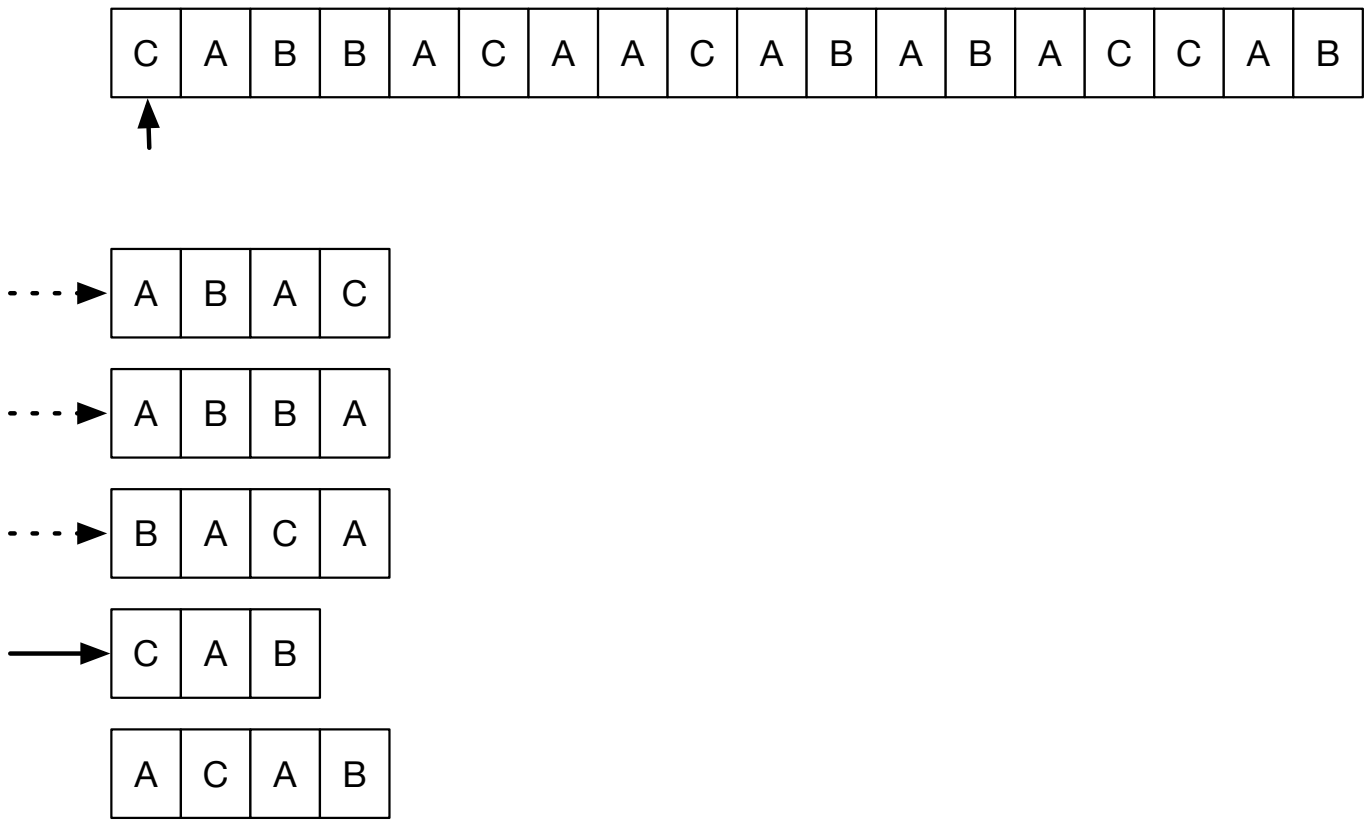






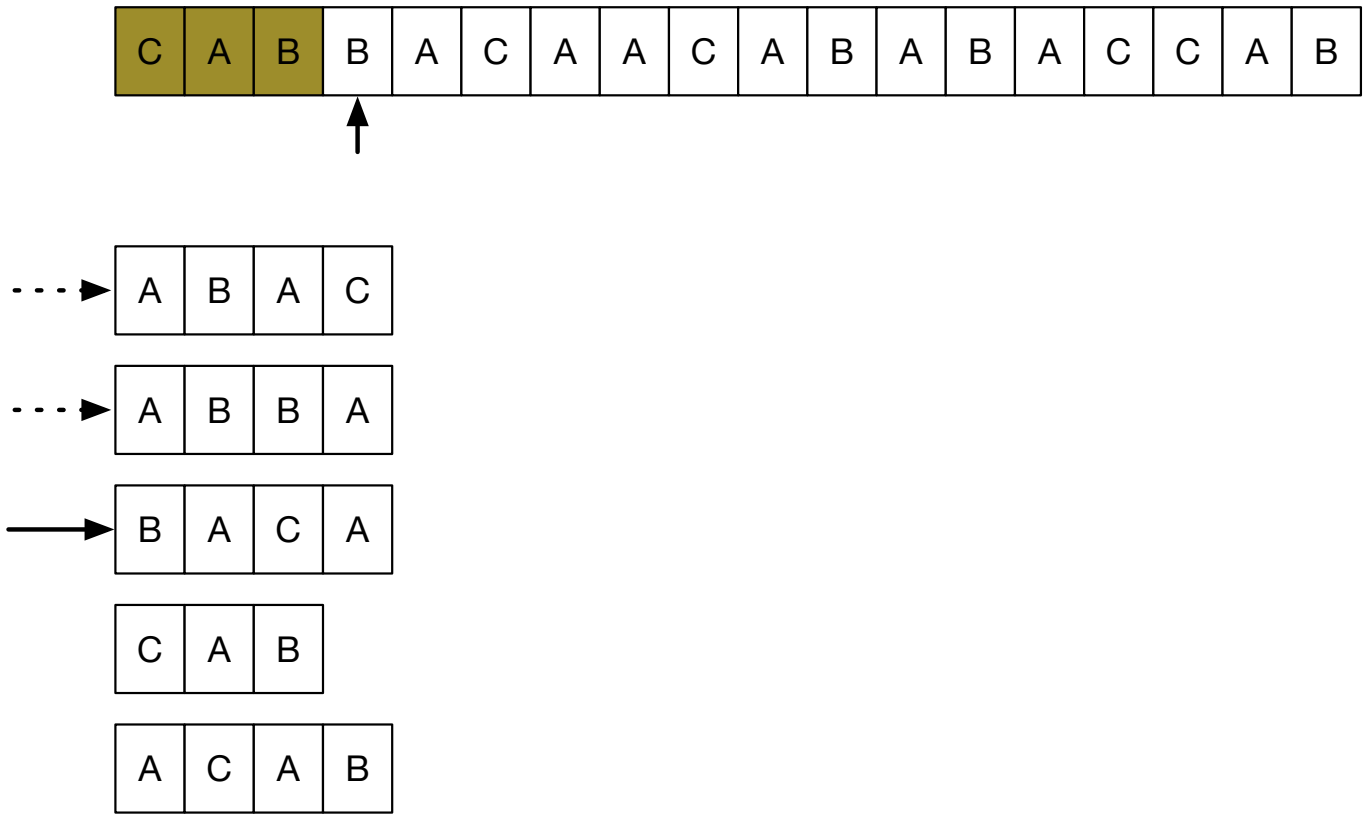


Задача о покрытии строки



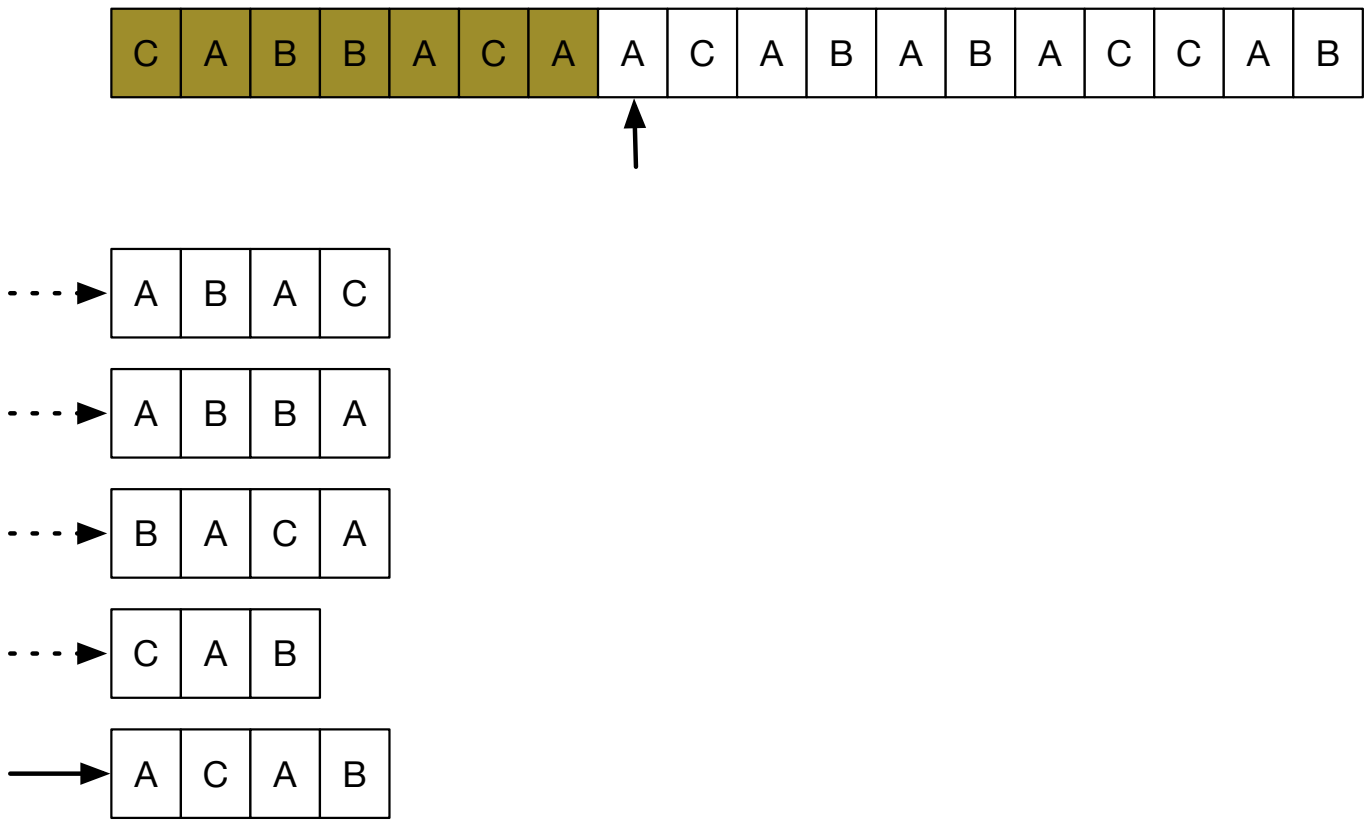
Этап 1. Нашли первое слово.

Задача о покрытии строки



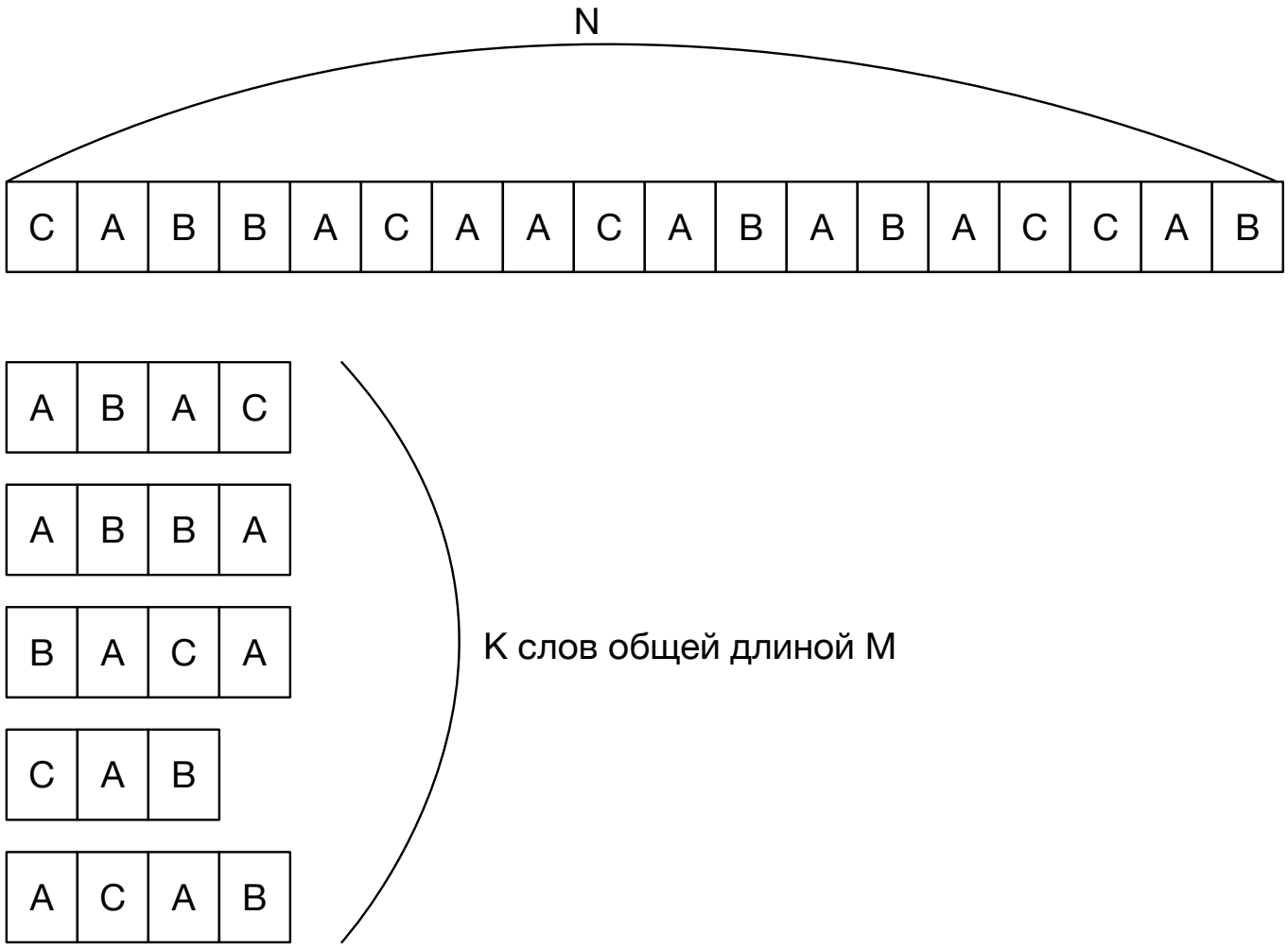
Этап 2. Переместили указатель и нашли второе слово.

Задача о покрытии строки



Этап 3. Переместили указатель и нашли третье слово.

Оценка сложности алгоритма



Оценка сложности алгоритма

- Определить, что слово подошло, мы можем только просмотрев всё слово.
- Определить, что слово не подошло, можно даже с первого символа слова.
- Грубо оценим количество попыток на слово длины L как $\frac{L}{2}$
- Средняя длина слова есть $L = \frac{M}{K}$
- При одном этапе поиска мы в среднем перебираем $\frac{K}{2}$ слов, каждое средней длиной L.
- Каждый этап продвигает нас в среднем на L позиций в «длинной» строке, итого количество этапов $T = \frac{N}{L}$
- Итого $F = \frac{N}{L} \times \frac{K}{2} \times \frac{L}{2} = \frac{NK}{4} = O(NK)$

Оценка сложности алгоритма

- Парадоксально, но сложность алгоритма не зависит от общей длины всех слов!
- Представим, что $K = 1$, то есть, ищется покрытие ровно одним словом длины M (пусть $N \vdots M$).
- Тогда каждый успешный поиск продвигает нас по «длинной» строке на M позиций. Всего наибольшее количество поисков $\frac{N}{M}$, в каждом из которых сравнивается M символов.
- Итого $F = O(N)$

Исследование задачи для поиска другого алгоритма

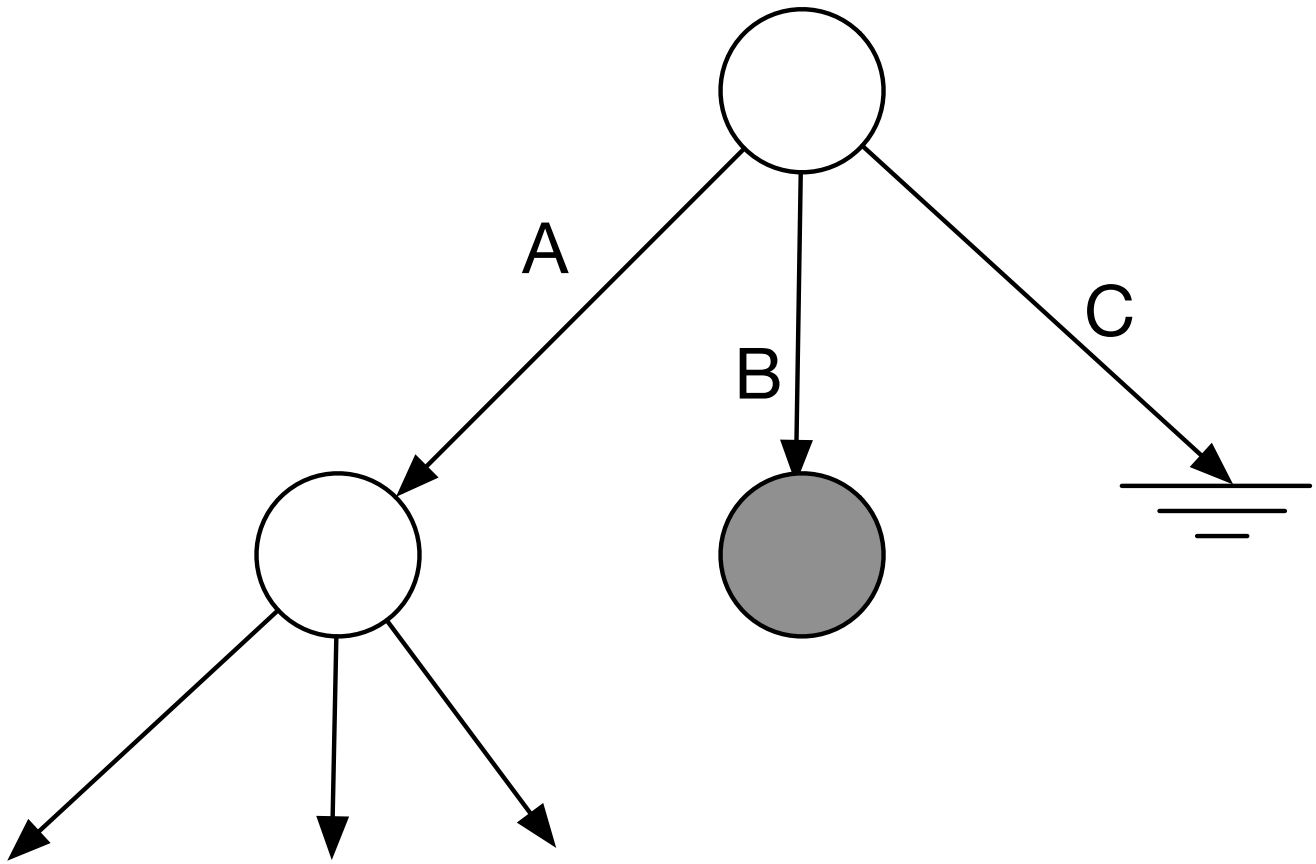
- Для большого K алгоритм становится неэффективен.
- Имеется ли более короткое решение?

Исследование задачи для поиска другого алгоритма

- Для большого K алгоритм становится неэффективен.
- Имеется ли более короткое решение?
- Да, если мы изменим структуру данных.
- Проблема в том, что мы, обнаружив несовпадение с одной подстрокой, ничего не получаем для следующих.
- Усложним представление тех строк, которые мы ищем.
- Попробуем производить поиск параллельно по всем подстрокам.
- Построим *префиксное дерево*.
- Алгоритм останется жадным, но с другой структурой данных.

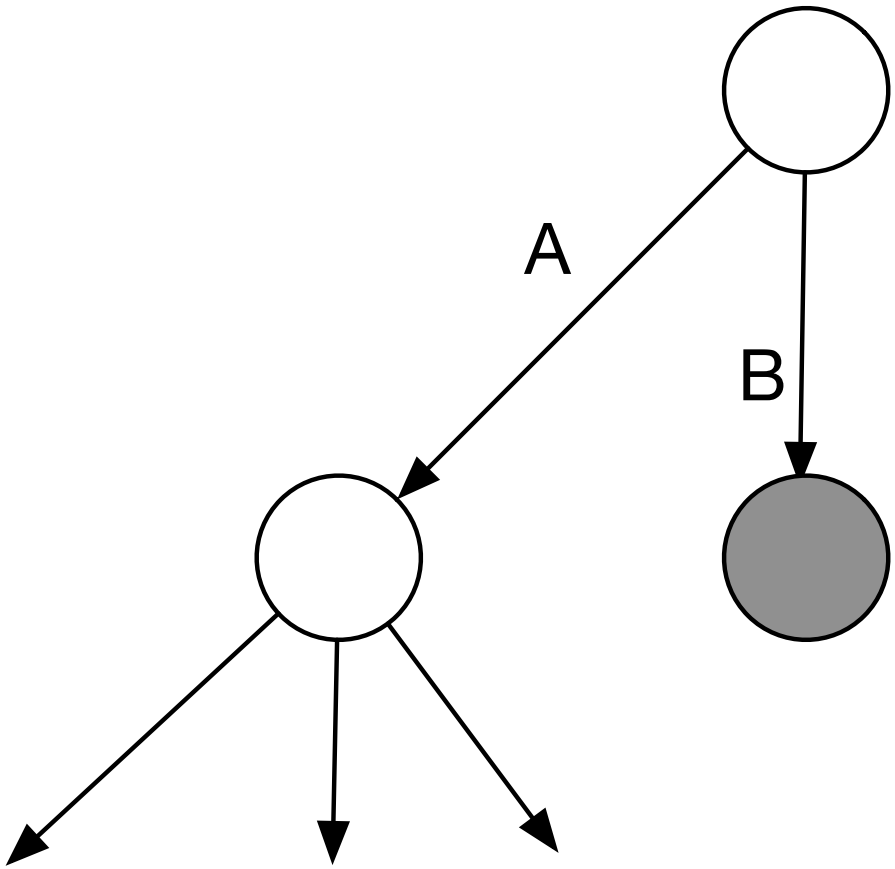
Префиксное дерево

- Из каждого узла всегда выходит ровно три ветви, `A`, `B` и `C`.
- Каждая из веток приходит или в узел, либо в вершину, либо в никуда.



Префиксное дерево

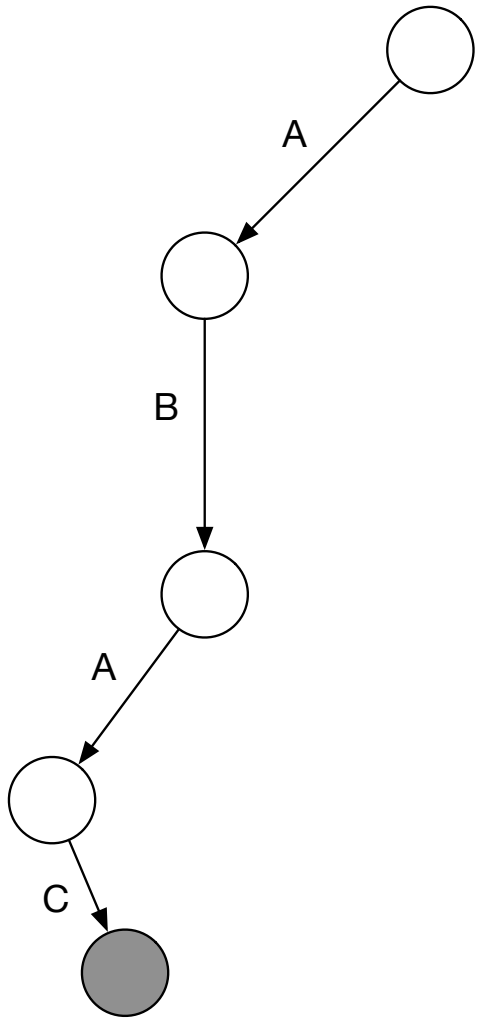
- Для простоты не будем рисовать ветви, уходящие в никуда.



Построение префиксного дерева

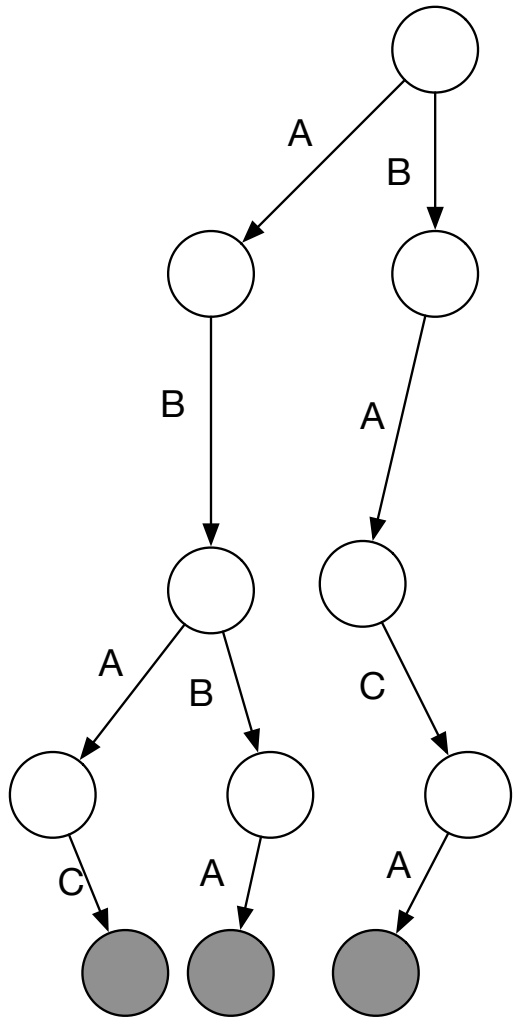
Слова: `ABAC`, `ABBA`, `BACA`, `CAB`, `ACAB`

- Строим дерево для каждого слова посимвольно.
- Для первого слова, `ABAC` дерево будет таким:



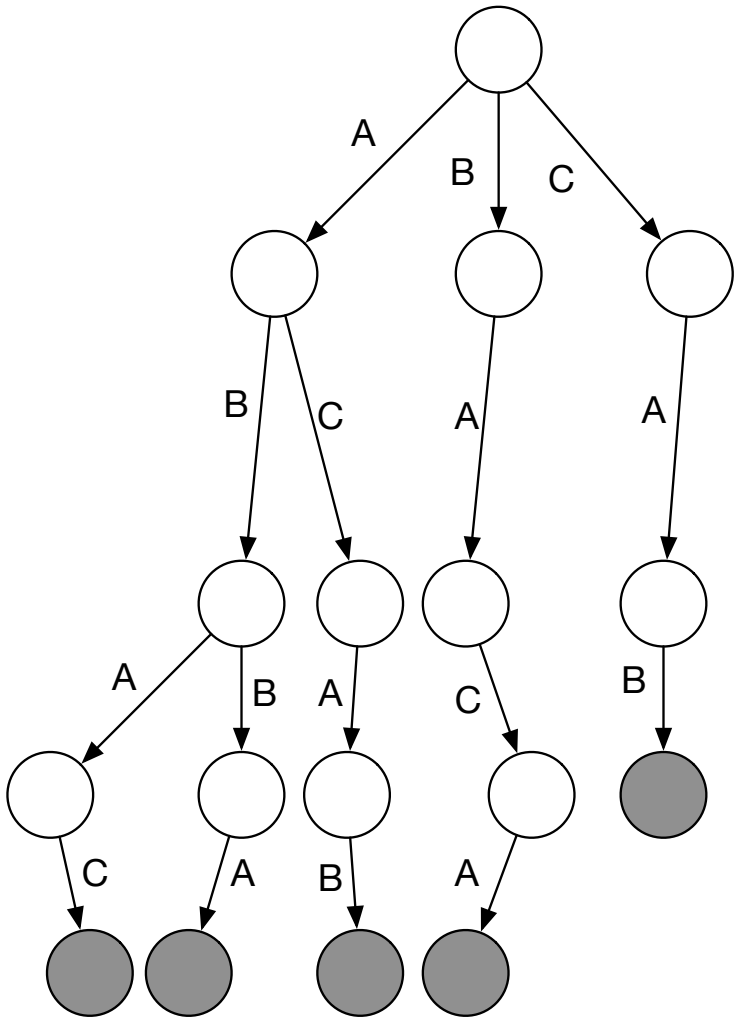
Построение префиксного дерева

- Добавим слова ABBA и BACA:



Построение префиксного дерева

- Теперь слова CAB и ACAB:



Алгоритм построения префиксного дерева

1. Создаём вершину дерева — узел с пустыми ветвями.
2. Для каждого слова исполняем:
   - 2.1 Устанавливаем указатель в вершину дерева.
   - 2.2 Считываем очередную букву.
   - 2.3 Если текущей узел не содержит нужной ветви, создаём эту ветвь и пустой узел на ней.
   - 2.4 Переходим в нужную ветвь.
   - 2.5 Если узел уже серый или не пустой, завершаем алгоритм с неудачей.
   - 2.6 Если слово закончилось, то помечаем узел серым цветом.
   - 2.7 Переходим к 2.2
3. Завершаем алгоритм с успехом.

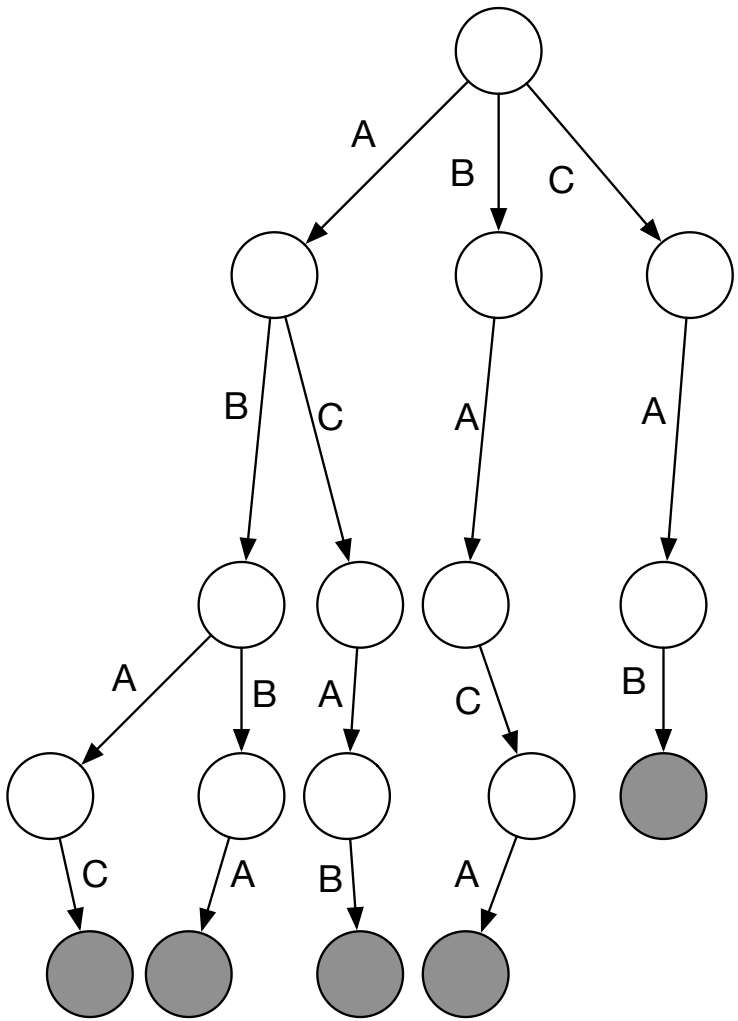
Оценка сложности алгоритма

- Один шаг алгоритма продвигает нас на ровно один символ в образце.
- Повторно образцы не обрабатываются.
- Количество операций есть $O(M)$, где M — сумма длин образцов.

Поиск с помощью префиксного дерева

- Поиск по получившемуся дереву стал совсем простым:

C	A	B	B	A	C	A	A	C	A	B	A	B	A	C	C	A	B



Алгоритм поиска по префиксному дереву

1. Устанавливаем указатели на начало строки и на вершину дерева.
2. Если указатель стоит за последним символом в строке то:
   - 2.1 Если указатель в дереве находится в корне — алгоритм завершён с успехом.
   - 2.2 Иначе алгоритм завершён с неудачей.
3. Считываем очередной символ строки и передвигаем указатель.
4. Если такой ветви дерева нет — завершаем алгоритм с неудачей.
5. Переходим по дереву по соответствующей ветке.
6. Если мы попали в серый узел — возвращаемся в корень дерева.
7. Переходим к пункту 2.

Оценка сложности алгоритма поиска

- Каждое перемещение символа в исходной строке приводит к перемещению указателя в дереве.
- Сложность каждого перемещения постоянна ($O(1)$).
- Количество перемещений в случае успеха равно N, где N-длина строки.
- Сложность алгоритма поиска — $O(N)$.
- Общая сложность алгоритма — $(N + M)$
- Сложность первой версии алгоритма — $O(N \times K)$.

Абстракция *строка символов*.

Строка символов

Работа со строками символов — необходимая часть интерфейса программы с пользователем.
Строки нужны для:

- вывода информации на экран
- именования внешних объектов — файлов, компьютеров, сетевых ресурсов

Главная проблема — динамически изменяемый размер.
Как считать строку неизвестной заранее длины?

- не разрешать пользователям работать с длинными строками?
- зарезервировать под неё место определённого размера?
- вводить посимвольно и расширять строку?

Строка символов

Классические представления:

1. Строка в языке Паскаль
   - появилась в ObjectPascal
   - $+$ удобные операции +, =, []
   - $+$ быстрая операция `length`
   - $-$ ограниченная длина
   - $-$ отсутствие контроля по умолчанию
2. Строка в языке Си
   - $+$ удобная операция []
   - $+$ неограниченная длина
   - $+$ простое представление
   - $-$ операция `length` $O(N)$
   - $-$ низкоуровневое программирование с указателями
   - $-$ очень низкая надёжность

Строка символов

Что нам хотелось бы от строк:

- отсутствие ограничений на размер и содержание
- удобные способы ввода и вывода
- интерфейс с операционной системой. Если требуется имя файла, то строка должна его предоставить в требуемом виде
- операции сложения строк с другими строками и с одиночными символами
- определение размера строки
- выделение подстроки

Абстракция *строка символов*

Интерфейс абстракции *строка символов*

- `=` — присвоение строки другой
- `+=` — добавить символ или строку в конец
- `[]` — получение символа из строки/присвоение элементу строки
- `size` — получить размер
- `substr` — вырезать подстроку
- `c_str` — получить представление строки для системы

Символы строки представляются своими кодами в какой-либо кодировке.

Z-функция

Несколько определений

Пусть имеется строка `s[0..n)`

- *Подстрока* `sub(s,p,l)` — строка, состоящая из символов `s[p..p+l)`
- *Префикс* длины `l` — подстрока `s[0..l)`
- *Суффикс* длины `l` строки `s[0...k)` — подстрока `s[k-l..k)`
- *Собственный префикс* строки `s[0..k)` — префикс длины `l < n`
- *Собственный суффикс* строки `s[0..k)` — суффикс длины `l < n`

Z-функция

- Z-функция от строки s и позиции p определяется как длина наибольшей подстроки строки s, начинающейся в позиции p, совпадающей с собственным префиксом строки s.

a	b	r	a	s	h	v	a	b	r	a	c	a	d	a	b	r	a
0	0	0	1	0	0	0	4	0	0	1	0	1	0	4	0	0	1

Как разработать алгоритм решения данной задачи?

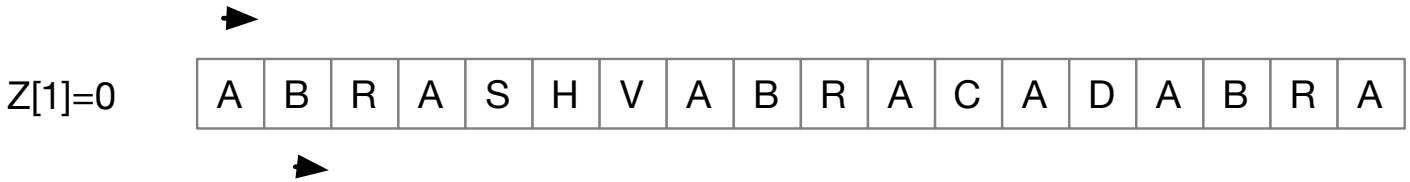
Z-функция: итерация 1

1. Обнулить выходной массив `ret`.
2. Для всех значений `j` от 1 до размера строки делать:
   2.1 Установить `ret[j]` равным длине максимальных совпадающих подстрок, начинающихся с 0 и с `j`.

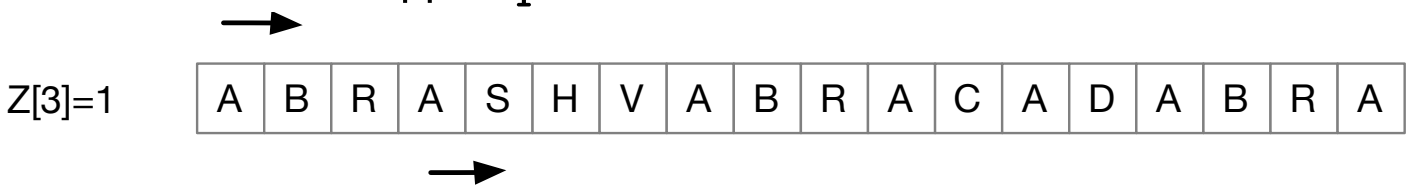
Z-функция: итерация 1

Верхняя стрелка — префикс, нижняя — подстрока с позиции p. Конец стрелок — точка, где сопоставление закончено.

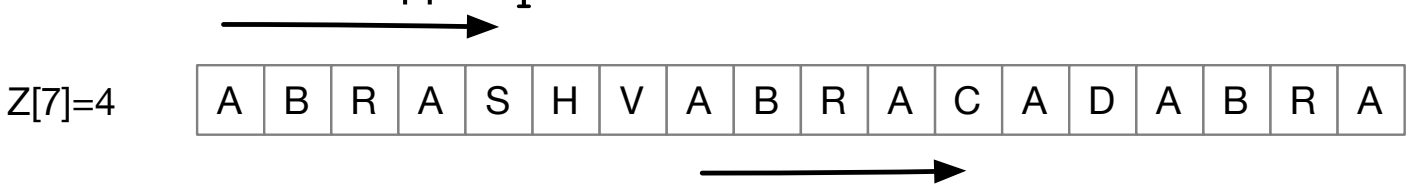
- Сопоставление для p=1



- Сопоставление для p=3



- Сопоставление для p=7



Z-функция: итерация 1

```
vector<int> z1(string const &s) {
    vector<int> ret(s.size());
    for (size_t j = 1; j < s.size(); j++) {
        size_t p = j;
        while (p < s.size() && s[p] == s[i-j])
           p++;
        ret[j] = p-j;
    }
    return ret;
}
```

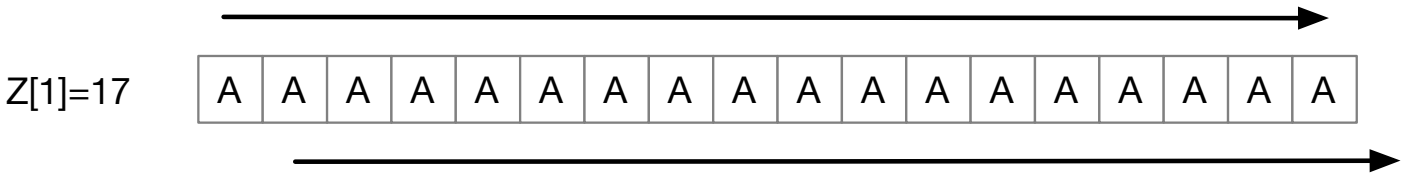
Z-функция: итерация 1

Три ключевых вопроса:

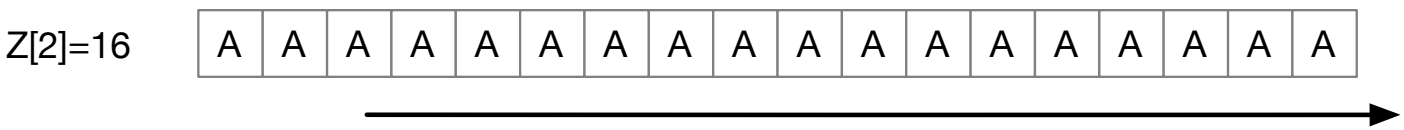
1. Корректен ли алгоритм?
2. Какова его сложность?
3. Можно ли его улучшить?

Z-функция: итерация 1: сложность

- Сопоставление для p=1



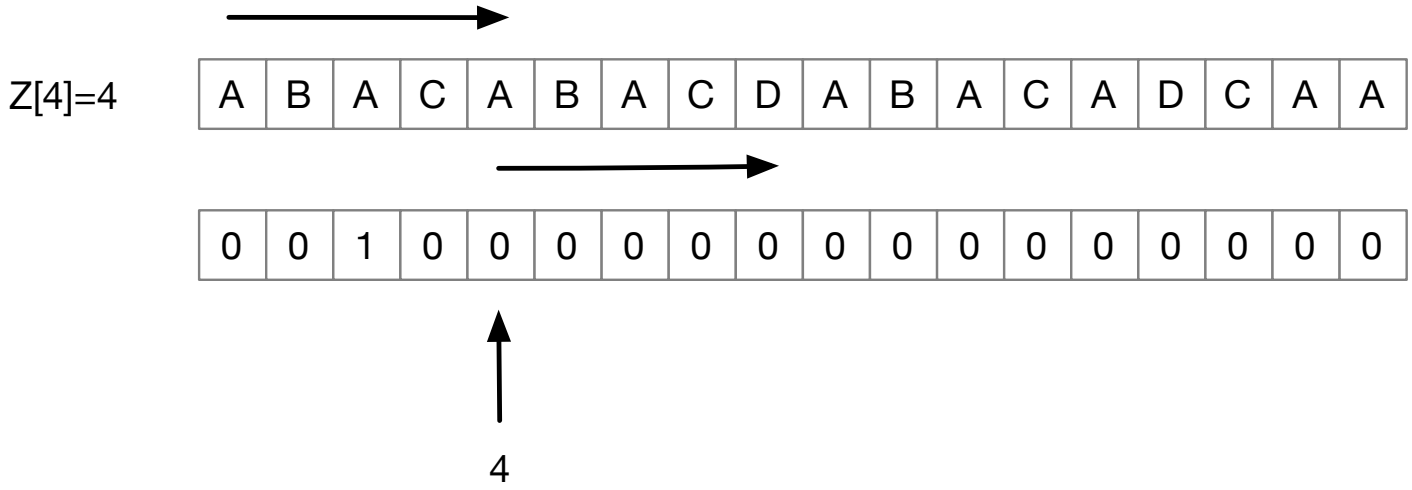
- Сопоставление для p=2



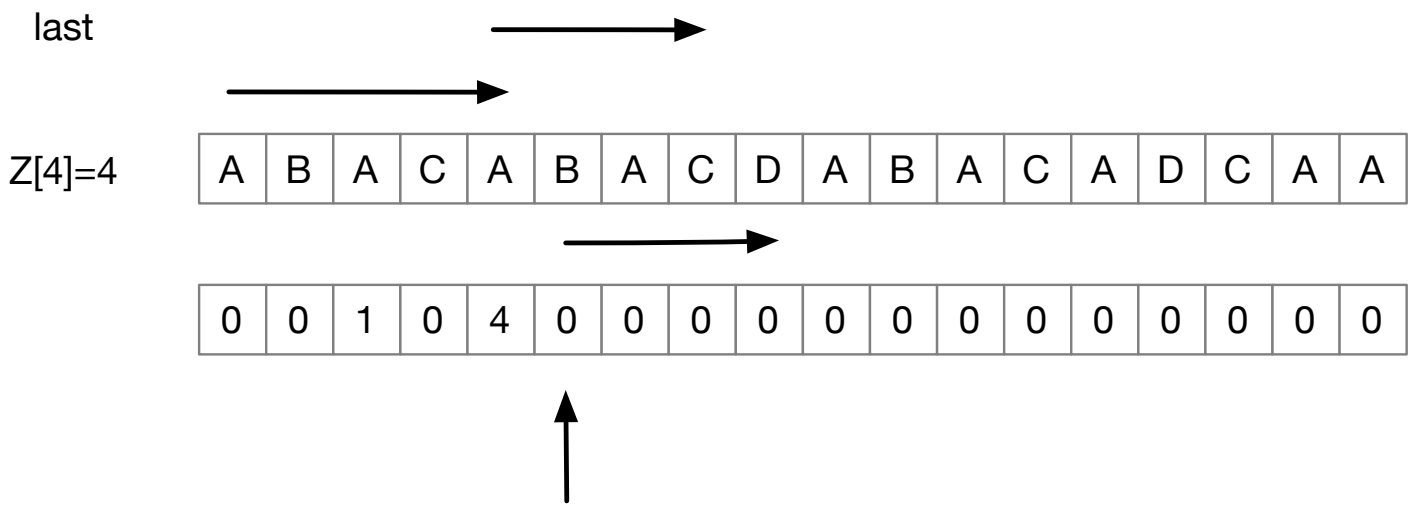
$$T(N) = (N-1) + (N-2) + \cdots + 1 = O(N^2)$$

Z-функция: наблюдение над поведением

- Сопоставление для p=4

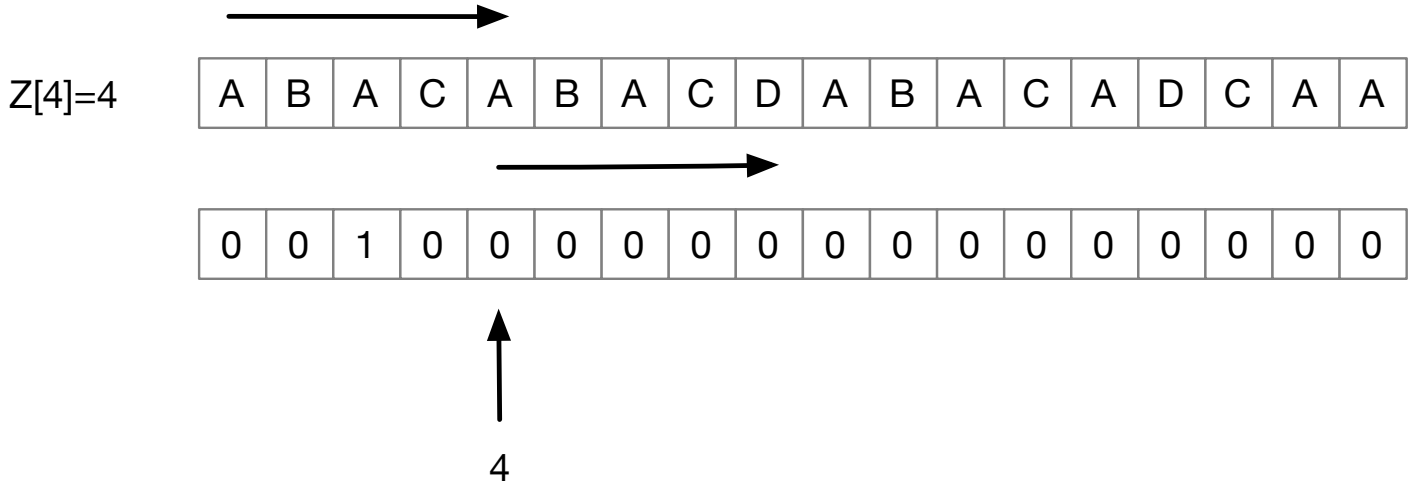


- Сопоставление для p=5

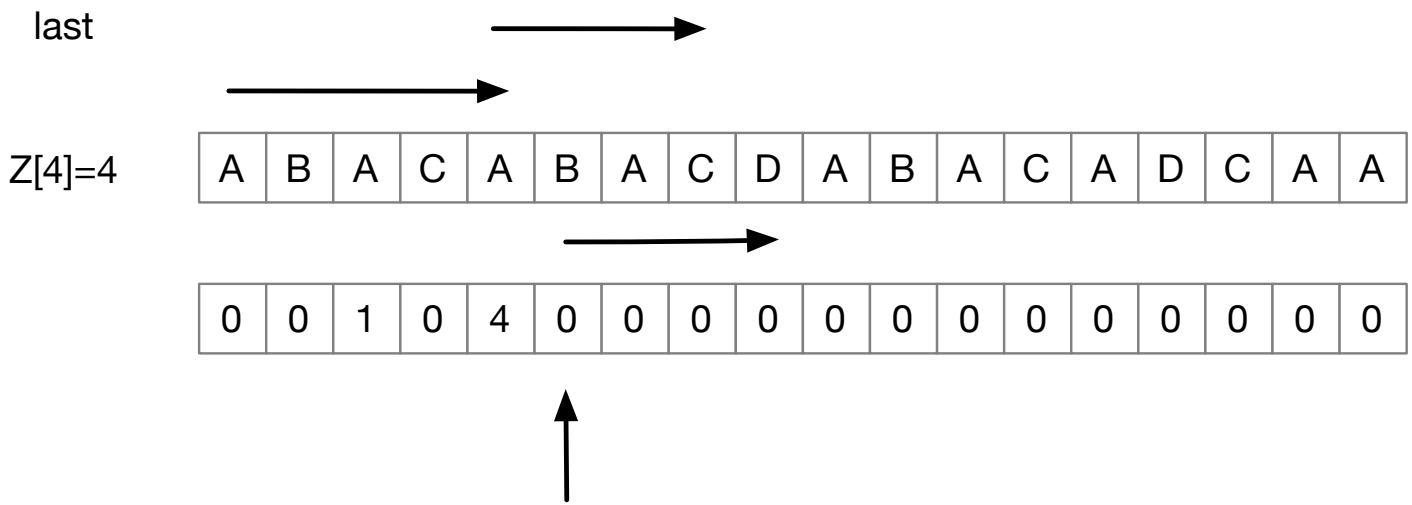


Z-функция: наблюдение над поведением

- Введём понятие *последняя сопоставленная подстрока*



- Сопоставление для p=5



- Если p попадает внутрь подстроки сопоставления, то сдвигаем его сразу за правую границу.
- Если p *не* попадает, то ищем как обычно.

Два изменения алгоритма:

1. начало поиска теперь может сдвинуться сразу на несколько позиций;
2. при выходе p за границу подстроки сопоставления меняем эту подстроку на новую.

Z-функция: итерация 2

```
vector<int> z2(string const &s) {
    vector<int> ret(s.size());
    for (int j = 1, l = 0, r = 0; j < s.size(); j++) {
        int p = j > r ? j : j+min(r-j+1,ret[j-l]);
        while (p < s.size() && s[p] == s[p-j])
            p++;
        ret[j] = p-j;
        if (p > r) {
            l = j; r = p-1;
        }
    }
    return ret;
}
```

Z-функция: итерация 2

Те же самые три вопроса:

1. Корректен ли алгоритм?
2. Какова его сложность?
3. Можно ли его улучшить?

Сложность алгоритма теперь посчитать труднее.
Инвариант: положение конца подстроки сопоставления изменяется на её длину.
Сложность

$$T(N) = O(N)$$

Z-функция: время работы в худшем случае

Время исполнения программы для разных N

N	z1	z2
0.5K	0.00017	<0.00001
1K	0.00063	0.00001
2K	0.0021	0.00002
4K	0.0078	0.00004
8K	0.030	0.00009
16K	0.11	0.00014
32K	0.42	0.0026
64K	1.71	0.0051
128K	6.83	0.010
256K	25.8	0.019

Спасибо за внимание.

Следующая лекция — сортировка