

Ejercicio 1. Dar un algoritmo que decida si dos expresiones regulares denotan el mismo lenguaje. Justificar la correctitud.

Ejercicio 2. Dar dos algoritmos distintos para determinar si el lenguaje aceptado por un autómata finito dado es el conjunto de todas las cadenas del alfabeto. Justificar cada uno.

Ejercicio 3. Dar un algoritmo que determine si un lenguaje regular dado es infinito. Justificar.

Ejercicio 4. ¿Cuántos autómatas finitos deterministas con dos estados pueden construirse sobre el alfabeto $\{0, 1\}$?

Ejercicio 5.

1. Sean AFD $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ y AFD $\bar{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q/F)$ AFD A es mínimo si y solo si \bar{A} es mínimo.
2. Para todo AFD $A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, q_{0,A}, F_A)$, AFD $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, q_{0,B}, F_B)$ y AFD $C = (Q_A \times Q_B, \Sigma, \delta, (q_{0,A}, q_{0,B}), F_A \times F_B)$ con $\delta((p, q), a) = (\delta_A(p, a), \delta_B(p, a))$, para todo $p \in Q_A, q \in Q_B, a \in \Sigma$. Se cumple que A y B son mínimos si y solo si C es mínimo.
3. Sean AFD $A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, q_0, F_A)$ con $|Q| > 1$. Sea AFD $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, q_0, F_B)$, donde $Q_B \subset Q_A$, $\delta_B(q, a) = \delta(q, a)$ para todo $p \in Q_B, a \in \Sigma$. Si A es mínimo, entonces B también es mínimo.

Ejercicio 6. Sean L1 y L2 lenguajes regulares. Hacer un AFD con dos cintas de entrada que reconoce el producto cartesiano de L1 y L2.

Ejercicio 7. Decir Verdadero o Falso y justificar:

1. Para cada AF hay infinitos AFD que reconocen el mismo lenguaje.
2. Si L es regular, todo subconjunto de L es libre de contexto
3. Si L es libre de contexto, todo subconjunto de L es libre de contexto
4. Los autómatas finitos determinísticos reconocen una cadena de longitud n en exactamente n transiciones.
5. Los autómatas de pila determinísticos reconocen una cadena de longitud n en exactamente n transiciones.
6. Las máquinas de Turing determinísticas reconocen una cadena de longitud n en exactamente n transiciones.
7. Sea M un AFD y sea M^R el autómata que resulta de revertir función de transición. $\mathcal{L}(M)$ intersección $\mathcal{L}(M^R)$ es regular.

Ejercicio 8. Indicar Verdadero o Falso y justificar:

1. Toda función total de \mathbb{N} en \mathbb{N} es total computable.
2. El conjunto de funciones parcialmente computables de \mathbb{N} en \mathbb{N} es c.e.
3. Para todo AFD, su función de transición extendida $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$ es total computable,
 $\hat{\delta}(q, \lambda) = q$,
 $\hat{\delta}(q, xa) = \delta(\hat{\delta}(q, x), a)$, para $a \in \Sigma, x \in \Sigma^*$.
4. Para todo ANFD- λ su función de transición extendida $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$ es total computable:
 $\hat{\delta}(q, \lambda) = Cl_\lambda(q)$
 $\hat{\delta}(q, xa) = Cl_\lambda\left(\bigcup_{p \in \hat{\delta}(q, x)} \delta(p, a)\right)$, para $a \in \Sigma, x \in \Sigma^*$.

Ejercicio 9. Sea \mathcal{A} el conjunto más pequeño que contiene a todos los conjuntos finitos, y está clausurado por union finita intersección finita, y complemento. Mostrar que \mathcal{A} está incluido en el conjunto de todos los lenguajes Regulares, pero no coinciden.

Ejercicio 10. Indicar V o F y justificar. Es decidable que

1. La intersección de dos conjuntos c.e. es un conjunto c.e.
2. La clausura de Kleene de un lenguaje c.e. es c.e.
3. La clausura de Kleene de lenguaje computable es computable.
4. La clausura de Kleene de un lenguaje regular es regular
5. La clausura de Kleene de un lenguaje libre de contexto es libre de contexto
6. La reversa de un lenguaje computable es computable.
7. La reversa de un lenguaje c.e es c.e.

Ejercicio 11. Indicar V o F y justificar. Es decidable que

1. Si $Halt : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ fuera computable entonces la complejidad de Kolmogorov $C : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$,

$$C(s) = \min\{\#(P) : \Psi_P^{(0)} = s\}$$

sería computable.

2. La pertenencia de una palabra a un lenguaje computable es computable.
3. Todo conjunto infinito c.e. tiene un subconjunto infinito computable

Ejercicio 12. Sea APD $P = (Q, \Sigma, \delta, \Gamma, q_0, F)$ y AP $S = (Q', \Sigma', \delta', \Gamma, q'_0, F')$.

Indicar V o F y justificar.

1. $\mathcal{L}(P)$ union $\mathcal{L}(S)$ es libre de contexto
2. $\mathcal{L}(P)$ interseccion $\mathcal{L}(S)$ es libre de contexto.
3. Para todo AP hay un APD que reconoce el mismo lenguaje.
4. Es decidable si dos AFs reconocen el mismo lenguaje o no.

Ejercicio 13. Dar un algoritmo que codetermine un automata finito.

Ejercicio 14. Dado un autómata finito determinístico $A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, q_0, F_A)$ y dado autómata de pila determinístico $P = (Q_P, \Sigma, \Gamma, \delta_P, p_0, F_P)$ dar un algoritmo que decida si el lenguaje $\mathcal{L}(A) \cap \mathcal{L}(P)$ es finito. Justificar la correctitud.

Ejercicio 15. Un un autómata de pila no determinístico, $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ es un contador si $\Gamma = \{Z_0, I\}$ el símbolo Z_0 representa el valor del cero y I representa el valor 1. En cada transición el autómata solamente puede consultar si el contador es 0 o no. El contador no puede volverse negativo, por lo que no puede restar el valor 1 de un contador que actualmente es 0.

Demostrar Verdadero o Falso

- a. Si un lenguaje es reconocible por un autómata contador entonces el lenguaje complemento también.
- b. Si dos lenguajes L_A y L_B reconocibles por autómatas contadores entonces el lenguaje de su union $L_A \cup L_B$ también.
- c. Si dos lenguaje L_A y L_B reconocibles por un autómatas contadores entonces el lenguaje de su intersección $L_A \cap L_B$ también.
- d. Todos los lenguajes reconocibles por autómatas finitos son reconocibles por autómatas contadores.
- e. No todos los lenguajes reconocibles por un autómata contador son reconocibles por un autómata finito.

Ayuda: Considerar como se demuestran y cómo se refutan las propiedades de clausura de los lenguajes libres de contexto,

Ejercicio 16. Un autómata de cola es un autómata no determinístico, similar a uno de pila pero tiene una cola en vez de una pila. Formalmente, un autómata de cola es $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ donde

Q es el conjunto de estados

Σ es el alfabeto de la cinta entrada

Γ es el alfabeto de cola,

$\delta : Q \times \Sigma \cup \{\lambda\} \times \Gamma \cup \{\lambda\} \rightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma \cup \lambda)$ es la función de transición

$q_0 \in Q$ es el estado inicial.

$F \subseteq Q$ es el conjunto de estados finales.

Por ejemplo $\delta(q_1, a, b) = \{(q_2, c), (q_3, d)\}$ dice que el estado q_1 si lee a de la entrada y b está primero en la cola, entonces b sale de la cola, el autómata pasa al estado q_2 , y pone c último en la cola. Se sabe (y no es difícil de demostrar) que los autómatas de cola reconocen todos los lenguajes libres de contexto.

Demostrar que los autómatas de cola reconocen más lenguajes que los reconocibles por autómatas de pila.

Ayuda: dar un lenguaje que no es libre de contexto.

Ejercicio 17. Dado R un lenguaje Regular, y dado L un lenguaje libre de contexto ¿Es decidable si L está incluido en R ?

Respuesta: Teorema 10.6 Hopcroft 1976

Ejercicio 18. Sea $g : \mathbb{N}^{(n+1)} \rightarrow \mathbb{N}$ parcial computable y sea índice e tal que $\phi_e^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = g(e, x_1, \dots, x_n)$. Dar otro índice d tal que tal que $\phi_d^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = g(d, x_1, \dots, x_n)$.

Ejercicio 19. Si $A \subseteq \mathbb{N}$ es computable entonces no es decidable si A es vacío.