Lenguajes Formales, Autómatas y Computabilidad
Teoría de Lenguajes

Autómatas finitos no determinísticos con transiciones instantáneas
Propiedades de lenguajes regulares

Segundo Cuatrimestre 2025

Bibliografía

Capítulo 3, *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*, J. Hopcroft, R. Motwani, J. Ullman, Second Edition, Addison Wesley, 2001.

En esta clase

- Autómatas finitos no determinísticos con transiciones instantáneas.
- Teorema: Equivalencia entre AFND-λ y AFND.
- Propiedades de lenguajes regulares

Definición (Autómata Finito No Determinístico con transiciones λ)

Un AFND-λ es una 5-upla $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ donde
Q es conjunto de estados
Σ es el alfabeto
q_0 es estado inicial
F es conjunto de estados finales
$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \to \mathcal{P}(Q)$.

Debemos definir formalmente el conjunto aceptado por AFND-λ.

Demostraremos que para todo AFND-λ hay un AFND que reconoce el mismo lenguaje. Vamos a necesitar herramientas.

Relaciones

Dados los conjuntos A y B, se llama relación de A en B a cualquier subconjunto de $A \times B$.

Una relación $R \subseteq A \times A$ es reflexiva cuando

$$\forall a \in A, (a, a) \in R.$$

Ejemplo: "$\leq$"sobre $\mathbb{N}$.

Una relación $R \subseteq A \times A$ es simétrica cuando

$$\forall a, b \in A, \Big(\text{Si } (a, b) \in R \text{ entonces } (b, a) \in R\Big).$$

Ejemplo: "$\neq$"sobre $\mathbb{N}$.

Una relación $R \subseteq A \times A$ es transitiva cuando

$$\forall a, b, c \in A, \Big(\text{Si } (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \text{ entonces } (a, c) \in R\Big).$$

Ejemplo: "a paralela a b", en el conjunto de rectas del plano.

Una relación es de equivalencia, cuando es reflexiva, simétrica y transitiva.

Composición de relaciones

Sean A, B y C tres conjuntos, y sean R y G dos relaciones tales que $R \subseteq A \times B$ y $G \subseteq B \times C$.

La relación de composición: $G \circ R \subseteq A \times C$ se define como

$$G \circ R = \{(a,c)\,, a \in A, c \in C : \exists b \in B \text{ tal que } (a,b) \in R \wedge (b,c) \in G\}\,.$$

Una relación R definida sobre A es de identidad (id_A) si se cumple que

$$\forall a, b \in A,\ a\, id_A\, b \text{ si y solo si } a = b.$$

La relación de identidad es el elemento neutro de la composición. Dada una relación $R \subseteq A \times B$ es cierto que

$$id_B \circ R = R \circ id_A$$

Relación potencia

Dada una relación $R \subseteq A \times A$, y dado n se define la potencia $R^n \subseteq A \times A$ como

$$R^n = \begin{cases} id_A & \text{si } n = 0 \\ R \circ R^{n-1} & \text{si no} \end{cases}$$

con $R = R^1$.

Notar que R^n es un conjunto de pares, cualquiera sea el valor de n.

Clausura transitiva

Dada una relación $R \subseteq A \times A$ se define clausura transitiva R^+,

$$R^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k.$$

Proposición

1. $R \subseteq R^+$
2. R^+ *es transitiva*
3. *Si* $S \subseteq A \times A$, $R \subseteq S$ *y* S *es transitiva entonces* $R^+ \subseteq S$.

Entonces, R^+ es la relación transitiva más pequeña que contiene a R.

Demostración de la proposición

1. Inmediato de la definición de R^+.

2. Queremos ver que si $(a, b) \in R^+$ y $(b, c) \in R^+$ enonces $(a, c) \in R^+$. Si $(a, b) \in R^+$, entonces existe una secuencia de elementos $d_1, \ldots, d_n$ tal que $(d_1, d_2) \in R, (d_2, d_3) \in R, \ldots (d_{n-1}, d_n) \in R$, donde $d_1 = a$ y $d_n = b$. Por lo tanto, $(a, b) \in R^n$ Análogamente, como $(b, c) \in R^+$ entonces existe una secuencia de elementos $e_1, \ldots, e_m$ tal que $(e_1, e_2) \in R, (e_2, e_3) \in R, \ldots (e_{m-1}, e_m) \in R$, donde $e_1 = b$ y $e_m = c$. Por lo tanto $(b, c) \in R^m$. Concluimos que $(a, c) \in R^{n+m}$ y esto implica $(a, c) \in R^+$.

2. Demostremos que si $R \subseteq S$ y S es transitiva entonces $R^+ \subseteq S$. Supongamos $(a, b) \in R^+$. Entonces, existe una secuencia de elementos $c_1, \ldots, c_n$ tal que $(c_1, c_2) \in R, (c_2, c_3) \in R, \ldots (c_{n-1}, c_n) \in R$, donde donde $c_1 = a$ y $c_n = b$. Como $R \subseteq S$ tenemos que $(c_1, c_2) \in S, (c_2, c_3) \in S, \ldots (c_{n-1}, c_n) \in S$, y como S es transitiva entonces, la aplicación repetida de la transitividad nos lleva a que $(c_1, c_n) \in S$, o sea $(a, b) \in S$. $\square$

Clausura transitivo-reflexiva : R^*

$$R^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i = R^+ \cup id$$

Clausura λ

La clausura λ de un estado q, $Cl_{\lambda}(q)$, es el conjunto de estados alcanzable desde q, siguiendo sólo transiciones λ.
Usamos la noción de clausura transitivo-reflexiva para definir Cl_{λ}.

Definición (clausura λ de un estado)

Dado un AFND-λ $(Q, \Sigma, \delta, q_o, F)$.
Sea $R \subseteq Q \times Q$ tal que $R = \{(q,p) : p \in \delta(q,\lambda)\}$.
Definimos $Cl_{\lambda} : Q \to \mathcal{P}(Q)$,

$$Cl_{\lambda}(q) = \{p \in Q : (q,p) \in R^*\}$$

Notar que $q \in Cl_{\lambda}(q)$.

Definición (clausura λ de un conjunto de estados P)

$Cl_{\lambda} : \mathcal{P}(Q) \to \mathcal{P}(Q)$,

$$Cl_{\lambda}(P) = \bigcup_{q \in P} Cl_{\lambda}(q).$$

Definición (función transición-sin-λ $\overline{\delta}$)

Sea AFND-λ $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ con $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \to \mathcal{P}(Q)$. Definimos

$$\overline{\delta} : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}\left(Q\right),$$
$$\overline{\delta}\left(q, a\right) = Cl_\lambda\Big(\bigcup_{p \in Cl_\lambda(q)} \delta(p, a)\Big)$$

$$\widehat{\overline{\delta}} : Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}\left(Q\right), \quad x \in \Sigma^*, a \in \Sigma$$
$$\widehat{\overline{\delta}}\left(q, \lambda\right) = Cl_\lambda\left(q\right), \quad \widehat{\overline{\delta}}(q, xa) = \left(\bigcup_{p \in \widehat{\overline{\delta}}(q,x)} \overline{\delta}(p, a)\right).$$

Atención!!
Aqui se usa $\widehat{\overline{\delta}}$ para definir aceptación en AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$.

Definición (lenguaje aceptado por un AFND-λ)

Sea AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$. El lenguaje aceptado por M, $\mathcal{L}(M)$, es el conjunto de cadenas aceptadas por M,

$$\mathcal{L}(M) = \left\{ x \in \Sigma^* : \widehat{\overline{\delta}}(q_0, x) \cap F \neq \phi \right\}.$$

Teorema (equivalencia entre AFND y AFND-λ)

Dado un AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ hay un AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F'\rangle$ tal que $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M')$.

Demostración del teorema, continuación

Sea AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ donde $\delta : Q \times \Sigma \cup \{\lambda\} \to \mathcal{P}(Q)$.
Sea $\overline{\delta} : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ la ya definida función de transición-sinλ,

$$\overline{\delta}\,(q, a) = Cl_\lambda\Big(\bigcup_{p \in Cl_\lambda(q)} \delta(p, a) \Big)$$

Definimos AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$, donde
$\delta' : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$, para todo $q \in Q$, $a \in \Sigma$,

$$\delta'(q, a) = \overline{\delta}(q, a)$$

Sin embargo, las respectivas funciones sombrero no son idénticas.
En AFND-λ, $\widehat{\overline{\delta}} : Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$,

$$\widehat{\overline{\delta}}(q, \lambda) = Cl_\lambda(q), \qquad \widehat{\overline{\delta}}(q, xa) = \bigcup_{p \in \widehat{\overline{\delta}}(q,x)} \overline{\delta}(p, a), \quad x \in \Sigma^*, a \in \Sigma$$

En AFND, $\widehat{\delta'} : Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$,

$$\widehat{\delta'}(q, \lambda) = \{q_0\}, \qquad \widehat{\delta'}(q, xa) = \bigcup_{p \in \widehat{\delta}(q,x)} \delta'(p, a), \quad x \in \Sigma^*, a \in \Sigma$$

Luego, $\widehat{\overline{\delta}}(q_0, \lambda) = Cl_\lambda(q_0)$ y $\widehat{\delta'}(q_0, \lambda) = \{q_0\}$, entonces pueden diferir.

Demostración del teorema, continuación

Definimos

$$F' = \begin{cases} F \cup \{q_0\} & \text{si } Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \emptyset \\ \\ F & \text{, caso contrario} \end{cases}$$

Observar que $F' \supseteq F$.

Debemos ver para toda $x \in \Sigma^*$, $x \in \mathcal{L}(M)$ si y solo si $x \in \mathcal{L}(M')$.

Caso $x = \lambda$.

Supongamos $\lambda \in \mathcal{L}(M)$. Entonces, $\widehat{\overline{\overline{\delta}}}(q_0, \lambda) \cap F \neq \emptyset$.
Como $\widehat{\overline{\overline{\delta}}}(q_0, \lambda) = Cl_\lambda(q_0)$ tenemos $Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \emptyset$.
Luego $F' = F \cup \{q_0\}$ y por lo tanto $q_0 \in F'$, entonces $\lambda \in \mathcal{L}(M')$.

Supongamos $\lambda \in \mathcal{L}(M')$. Entonces, $\widehat{\delta'}(q_0, \lambda) \cap F' \neq \emptyset$.
Dado que $\widehat{\delta'}(q_0, \lambda) = \{q_0\}$. Luego $q_0 \in F'$.
Necesariamente $Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \emptyset$
(sino, $Cl_\lambda(q_0) \cap F = \emptyset$ y esto implica $q_0 \notin F$, $F = F'$ y $q_0 \notin F'$, lo que contradice $q_0 \in F'$).
Dado que $\widehat{\overline{\overline{\delta}}}(q_0, \lambda) = Cl_\lambda(q_0)$, tenemos $\widehat{\overline{\overline{\delta}}}(q_0, \lambda) \cap F \neq \emptyset$, y por la definición de palabra aceptada en AFND-λ, $\lambda \in \mathcal{L}(M)$.

Caso $x \neq \lambda$. Debemos ver que $x \in \mathcal{L}(M)$ si y solo si $x \in \mathcal{L}(M')$.
Demostremos primero que $\widehat{\delta'}(q_0, x) = \widehat{\overline{\delta}}(q_0, x)$, para todo $x \in \Sigma^+$.
Lo hacemos por inducción en la estructura de la cadena.

Caso base $x = a$, $a \in \Sigma$, por lo tanto $|x| = 1$. Por definición de M', $\delta'(q, a) = \overline{\delta}(q, a)$. Y tenemos que $\widehat{\delta'}(q, a) = \delta'(q, a)$, $\widehat{\overline{\delta}}(q, a) = \overline{\delta}(q, a)$.
Por lo tanto, $\widehat{\delta'}(q, a) = \widehat{\overline{\delta}}(q, a)$.

Caso inductivo $x = wa$, $w \in \Sigma^*$ con $|w| = n$, $a \in \Sigma$, y asumamos que la propiedad vale para w. Entonces,

$$\widehat{\delta'}(q_0, wa) = \bigcup_{p \in \widehat{\delta'}(q_0, w)} \delta'(p, a) = \bigcup_{p \in \widehat{\overline{\delta}}(q_0, w)} \overline{\delta}(p, a) = \widehat{\overline{\delta}}(q_0, wa)$$

ya que ,
por HI, las expresiones debajo de las uniones son iguales.
por la definicion de δ', $\delta'(p, a) = \overline{\delta}(p, a)$.

Seguimos con el caso $|x| \geq 1$.

Supongamos $x \in \mathcal{L}(M)$. Entonces, $\widehat{\overline{\delta}}(q_0, x) \cap F \neq \varnothing$,
Por lo tanto, usando $\widehat{\delta'}(q, x) = \widehat{\overline{\delta}}(q, x)$ y $F \subseteq F'$, $\widehat{\delta'}(q_0, x) \cap F' \neq \varnothing$.
Concluimos $x \in \mathcal{L}(M')$.

Supongamos $x \in \mathcal{L}(M')$. Entonces, $\widehat{\delta'}(q_0, x) \cap F' \neq \varnothing$.
Usando $\widehat{\delta'}(q, x) = \widehat{\overline{\delta}}(q, x)$ y ($F' = F$, ó, $F' = F \cup \{q_0\}$), tenemos
$\left(\widehat{\overline{\delta}}(q_0, x) \cap F \neq \varnothing\right)$ ó $\left(\widehat{\overline{\delta}}(q_0, x) \cap \{q_0\} \neq \varnothing \wedge Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \varnothing\right)$
La parte izquierda nos dice que $x \in \mathcal{L}(M)$.
La parte derecha nos dice dos cosas. La primera es que
$q_0 \in \widehat{\overline{\delta}}(q_0, x)$. Entonces por la definición de $\overline{\delta}$, $Cl_\lambda(q_0) \subseteq \widehat{\overline{\delta}}(q_0, x)$,
La segunda es que $Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \varnothing$
Juntando la primera y la segunda tenemos $\widehat{\overline{\delta}}(q_0, x) \cap F \neq \emptyset$, lo que implica que $x \in \mathcal{L}(M)$.

Juntando izquierda y derecha obtenemos
$x \in \mathcal{L}(M)$ ó $x \in \mathcal{L}(M)$
Concluimos,
$x \in \mathcal{L}(M)$.

$\square$

Hemos demostrado que para todo AFND-λ M existe AFND M' tal que $\mathcal{L}(M)$=$\mathcal{L}(M')$, y
Y la clase pasada demostramos que para todo AFND N existe AFD N' tal que $\mathcal{L}(N) = \mathcal{L}(N')$.
Concluimos

Teorema

Para todo AFND-λ M existe AFD M' tal que $\mathcal{L}(M)$=$\mathcal{L}(M')$.

Ejercicios

1. Demostrar que para cada AFND $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ existe otro AFND -λ $M' = \left\langle Q', \Sigma, \delta', q_0', F' \right\rangle$ tal que $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M')$ y F' tiene un único estado final.
2. Indicar Verdadero o Falso y justificar
   Sea Σ un alfabeto con al menos dos símbolos, y sea a un símbolo de Σ.
   Sea AFND $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$. Considerar el AFND-$\lambda$
   $M' = \left\langle Q, \Sigma \setminus \{a\}, \delta', q_0, F \right\rangle$ que se obtiene de reemplazar todas las transiciones con el símbolo a por transiciones λ. Es decir,
   - para todo $q \in Q$, para todo $x \in \Sigma$ tal que $x \neq a$, $\delta'(q, x) = \delta(q, x)$,
   - para todo $q \in Q$, $\delta'(q, \lambda) = \delta(q, a)$,

   ¿Cual es el lenguaje aceptado por M'?
3. ¿Se puede acotar superiormente cuantas transiciones requiere la aceptación de una palabra en un AFND-λ?
4. ¿Puede haber ciclos de transiciones-λ?

Propiedades de los lenguajes regulares

Teorema

El conjunto de los lenguajes regulares está cerrado por union, intersección y complemento.

Es decir, el conjunto de los lenguajes regulares incluidos en Σ^* es un álgebra Booleana de conjuntos.

Demostración: el conjunto de los lenguajes regulares está cerrado por unión

Sean L_1 y L_2 lenguajes regulares. Debemos pobar que $L_1 \cup L_2$ es regular.
Sean AFDs $M_1 =< Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1 >$ y $M_2 =< Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2 >$, $\delta_1 : Q_1 \times \Sigma \to Q_1$, $\delta_2 : Q_2 \times \Sigma \to Q_2$, donde $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$ tales que $L_1 = \mathcal{L}(M_1)$ y $L_2 = \mathcal{L}(M_2)$.

Definimos AFND-λ $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$, con $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \to \mathcal{P}(Q)$ donde

- q_0 es un nuevo estado es decir, $q_0 \notin Q_1$ y $q_0 \notin Q_2$.
- $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\}$.
- *si* $\lambda \notin L_1$ y $\lambda \notin L_2$ entonces $F = F_1 \cup F_2$. Sino, $F = F_1 \cup F_2 \cup \{q_0\}$.
- $\delta(q_0, \lambda) = \{q_1, q_2\}$.
- $\forall q \in Q_1, \forall a \in \Sigma$, $\delta(q, a) = \{\delta_1(q, a)\}$.
- $\forall q \in Q_2, \forall a \in \Sigma$, $\delta(q, a) = \{\delta_2(q, a)\}$.

Notemos que $Cl_\lambda(q_0) = \{q_0, q_1, q_2\}$ y para todo $q \neq q_0$, $Cl_\lambda(q) = \{q\}$.

Notemos que
para todo $q \in Q_1$, $a \in \Sigma$, $\delta(q, a) = \{\delta_1(q, a)\}$, y
para todo $q \in Q_2$, $a \in \Sigma$, $\delta(q, a) = \{\delta_2(q, a)\}$.

Por definición tenemos $\mathcal{L}(M) = \{w \in \Sigma^* : \widehat{\overline{\delta}}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$
donde
$\overline{\delta} : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$,

$$\overline{\delta}(q, a) = Cl_\lambda \left(\bigcup_{p \in Cl_\lambda(q)} \delta(p, a) \right)$$

$\widehat{\overline{\delta}} : Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$,
$\widehat{\overline{\delta}}(q, \lambda) = Cl_\lambda(q)$,

$$\widehat{\overline{\delta}}(q, xa) = \bigcup_{p \in \widehat{\overline{\delta}}(q,x)} \overline{\delta}(p, a).$$

Caso $w = \lambda$.

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathcal{L}(M) &\Leftrightarrow \widehat{\overline{\delta}}(q, \lambda) \cap F \neq \emptyset \\
&\Leftrightarrow \{q_0, q_1, q_2\} \cap F \neq \emptyset, \quad \text{porque } \widehat{\overline{\delta}}(q, \lambda) = Cl_\lambda(q_0) \\
&\Leftrightarrow q_1 \in F_1 \text{ o } q_2 \in F_2, \quad \text{por def de } M \\
&\Leftrightarrow \lambda \in \mathcal{L}(M_1) \text{ o } \lambda \in \mathcal{L}(M_2) \\
&\Leftrightarrow \lambda \in (\mathcal{L}(M_1) \cup \mathcal{L}(M_2)).
\end{aligned}$$

Caso $w \neq \lambda$. Consideremos
$\widehat{\delta_1} : Q_1 \times \Sigma^* \to Q_1$, $\widehat{\delta_1}(q, \lambda) = q$, $\widehat{\delta_1}(q, xa) = \delta_1(\widehat{\delta_1}(q, x), a)$
$\widehat{\delta_2} : Q_2 \times \Sigma^* \to Q_2$, $\widehat{\delta_2}(q, \lambda) = q$, $\widehat{\delta_2}(q, xa) = \delta_2(\widehat{\delta_2}(q, x), a)$

Demostremos que para todo $q \in Q$, $w \in \Sigma^+$,

$$\widehat{\overline{\delta}}(q_0, w) = \{\widehat{\delta_1}(q_1, w)\} \cup \{\widehat{\delta_2}(q_2, w)\}$$

Para $w = a$.

$$\widehat{\overline{\delta}}(q_0, a) = \overline{\delta}(q_0, a) = Cl_\lambda\Big(\bigcup_{p \in Cl_\lambda(q_0)} \delta(p, a)\Big) = \{\delta_1(q_1, a)\} \cup \{\delta_2(q_2, a)\}.$$

Para $w = xa$, con $x \in \Sigma^+$, es decir $|x| \geq 1$.
Supongamos la propiedad vale para x.

$$\begin{aligned}
\widehat{\overline{\delta}}(q_0, xa) &= \cup_{p \in \widehat{\overline{\delta}}(q_0, x)} \overline{\delta}(p, a) \\
&= \cup_{p \in (\{\widehat{\delta_1}(q_1, x)\} \cup \{\widehat{\delta_2}(q_2, x)\})} \overline{\delta}(p, a), \quad \text{ por HI} \\
&= \Big(\cup_{p \in \{\widehat{\delta_1}(q_1, x)\}} \{\delta_1(p, a)\}\Big) \cup \Big(\cup_{p \in \{\widehat{\delta_2}(q_1, x)\}} \{\delta_2(p, a)\}\Big) \\
&= \{\delta_1(\widehat{\delta_1}(q_1, x), a)\} \cup \{\delta_2(\widehat{\delta_2}(q_1, x), a)\} \\
&= \{\widehat{\delta_1}(q_1, xa)\} \cup \{\widehat{\delta_2}(q_1, xa)\}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
w \in \mathcal{L}(M) &\Leftrightarrow \widehat{\overline{\delta}}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset \\
&\Leftrightarrow \{\widehat{\delta_1}(q_1, w), \widehat{\delta_2}(q_2, w)\} \cap (F_1 \cup F_2) \neq \emptyset \\
&\Leftrightarrow \widehat{\delta_1}(q_1, w) \in F_1, \text{ o } \widehat{\delta_2}(q_1, w) \in F_2 \\
& w \in \mathcal{L}(M_1) \cup \mathcal{L}(M_2).
\end{aligned}
$$

Demostración: El conjunto de lenguajes regulares es cerrado por complemento.

Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ completo, con $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ y sea $M' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \setminus F)$.
Usamos $\widehat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$,
$\widehat{\delta}(q, \lambda) = q$, $\widehat{\delta}(q, xa) = \delta(\widehat{\delta}(q, x), a)$, Sea $w \in \Sigma^*$.

$$
\begin{aligned}
w \in \mathcal{L}(M) &\text{ si y solo si } \widehat{\delta}(q_0, w) \in F \\
&\text{ si y solo si } \widehat{\delta}(q_0, w) \notin (Q \setminus F) \\
&\text{ si y solo si } w \notin \mathcal{L}(M').
\end{aligned}
$$

$\square$

El conjunto de lenguajes regulares es cerrado por intersección.

Sean L_1 y L_2 regulares.

$$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1 \cap L_2}} = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}.$$

Dado que los lenguajes regulares están cerrdos por unión y complemento, concluimos que $L_1 \cap L_2$ es regular. $\square$

Una demostración alternativa

El conjunto de lenguajes regulares está cerrado por intersección.

Dados M_1 y M_2 AFDs, definimos M' tal que $\mathcal{L}\left(M'\right) = \mathcal{L}\left(M_1\right) \cap \mathcal{L}\left(M_2\right)$.
Sea $M^{'} =< Q', \Sigma, \delta', q_0', F' >$ con

- $Q' = Q_1 \times Q_2$
- $\delta'\left(\left(q, r\right), a\right) = \left(\delta_1\left(q, a\right), \delta_2\left(r, a\right)\right)$ para $q \in Q_1$ y $r \in Q_2$
- $q_0' = \left(q_{0_1}, q_{0_2}\right)$
- $F' = F_1 \times F_2$

entonces

$$\begin{aligned}
\alpha \in \mathcal{L}(M^{'}) \quad &\Leftrightarrow \quad \widehat{\delta'}\left(\left(q_{0_1}, q_{0_2}\right), \alpha\right) \in F' \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\widehat{\delta_1}\left(q_{0_1}, \alpha\right), \widehat{\delta_2}\left(q_{0_2}, \alpha\right)\right) \in F_1 \times F_2 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\widehat{\delta_1}\left(q_{0_1}, \alpha\right) \in F_1\right) \text{ y } \left(\widehat{\delta_2}\left(q_{0_2}, \alpha\right) \in F_2\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \alpha \in \mathcal{L}\left(M_1\right) \text{ y } \alpha \in \mathcal{L}\left(M_2\right).
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema

El conjunto de los lenguajes regulares está cerrado por concatenacion.

Teorema

El conjunto de los lenguajes regulares está cerrado por reversa.

Teorema

La unión finita y la intersección finita de lenguajes regulares dan por resultado un leguaje regular.

Demostración.

Debemos ver que

$\forall n \in \mathbb{N}, \bigcup_{i=1}^{n} L_i$ es regular, y $\forall n \in \mathbb{N}, \bigcap_{i=1}^{n} L_i$ es regular.

Por inducción en n.

- Caso base $n = 0$: $\bigcup_{i=1}^{0} L_i = \emptyset$ es regular.
- Caso inductivo:

  Supongamos que para $n > 0$, $\bigcup_{i=1}^{n} L_i$ es regular. Veamos que vale para $n + 1$.

  $\bigcup_{i=1}^{n+1} L_i = \bigcup_{i=1}^{n} L_i \cup L_{n+1}$ es regular, por ser la union de dos regulares.

La demostración para $\cap$ es similar. □

Teorema

Todo lenguaje finito es regular.

Demostración.

Sea L un lenguaje finito, con n cadenas, $L = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$.

Para cada $i = 1, 2, \ldots n$, sea $L_i = \{\alpha_i\}$.

Entonces $L = \bigcup_{i=1}^{n} \{\alpha_i\}$.

Como cada $\{\alpha_i\}$ es regular, entonces L también lo es. $\square$