Lenguajes Formales, Autómatas y Computabilidad

Lema de "Pumping" y algoritmos de desición sobre lenguajes regulares

Segundo Cuatrimestre 2025

Bibliografía: Capítulo 4, *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*, J. Hopcroft, R. Motwani, J. Ullman, Second Edition, Addison Wesley, 2001.

Lema ("Pumping", Scott & Rabin 1959, Bar Hillel, Perles & Shamir 1961)

Sea L un lenguaje regular. Existe una longitud n tal que para toda $z \in L$ con $|z| \geq n$ existe $u, v, w \in \Sigma^*$ tales que

$$z = uvw,$$

$$|uv| \leq n,$$

$$|v| \geq 1,$$

$$\forall i \ \geq 0,\ uv^i w \in L.$$

Ejemplo

$L = \{a^k b^k : \ k \geq 0\}$ *sobre* $\Sigma = \{a, b\}$ *no es regular.*

Demostración.

Supongamos L es regular. Sea n la constante del Lema de Pumping.
Sea $z = a^n b^n$. Por el Lema de Pumping, hay una descomposicion
$z = uvw$ con $|uv| \leq n$ y $|v| \geq 1$ tal que $uv^i w$ en L, para $i \geq 0$.

Usando que $|uv| \leq n$, concluimos que v consiste solamente de $a$es.
Más aún, como $|v| \geq 1$, v contiene al menos una a.

Ahora bombeamos v y obtenemos $uv^2 w$.
Por Lema de Pumping, $uv^2 w$ está en L.
Pero $uv^2 w$ tiene más $a$es que bs, entonces no está en L.

Llegamos a una contradicción que provino de asumir que L es regular.
Por lo tanto, L no es regular. $\square$

Ejemplo

$L = \{0^{k^2} : \; k \geq 1\}$ *sobre* $\Sigma = \{0\}$ *no es regular.*

Demostración.

Supongamos L es regular. Sea n la constante del Lema de Pumping.
Sea $z = 0^{n^2}$. Por el Lema de Pumping, hay una descomposición $z = uvw$ con $|uv| \leq n$ y $|v| \geq 1$ tal que uv^iw en L, para $i \geq 0$.

Entonces $v = 0^m$ para algun valor de m entre 1 y n.
Por el Lema de Pumping, $uw = 0^{n^2-m}$ está en L.

Dado que $1 \leq m < n+1$, y asumiendo que $n \geq 2$

$$n^2 - m > n^2 - (n+1) \geq n^2 - (2n-1) = n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2$$

Entonces $n^2 - m$ no es cuadrado perfecto y por lo tanto uw no está en L
.
La contradicción que provino de asumir que L es regular.
Por lo tanto, L no es regular. $\square$

Ejemplo

$L = \{w : \ w$ *tiene la misma cantidad de* 0*s que de* 1*s*$\}$ *no es regular.*

Demostración.

Supongamos L es regular. Sea n la constante del Lema de Pumping.
Sea $z = 0^n 1^n$. Por el Lema de Pumping, hay una descomposición
$z = uvw$ con $|uv| \leq n$ y $|v| \geq 1$ tal que $uv^i w$ en L, para $i \geq 0$.
Entonces v tiene exclusivamente 0s.
Luego, uw tiene distinta cantidad de 0s que de 1s.
Por lo tanto, uw no está en L.
La contradicción que provino de asumir que L es regular.

$\square$

Definición (Configuración instantánea de un AFD)

Sea $AFD\ M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$*. Una configuración insantánea es un par* (q, α) *en* $Q \times \Sigma^*$ *donde* q *es el estado en el que está el autómata y* α *es la cadena de entrada aún no consumida.*

Definición (Transición entre configuraciones instantáneas $\vdash$)

Llamamos transición a la siguiente relación sobre $Q \times \Sigma^*$*:*

$(q, \alpha) \vdash (p, \beta)$ *si* $(\delta\,(q, a) = p \wedge \alpha = a\beta)$*.*

De lo anterior tenemos que $(q, \alpha\beta) \overset{*}{\vdash} (p, \beta)$ si y sólo si $\widehat{\delta}(q, \alpha) = p$ se puede pasar del estado q al estado p consumiendo la cadena α.

Lema

Sea el AFD $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ *Para todo* $q \in Q$ *y* $\alpha, \beta \in \Sigma^*$,

$$\textit{si } (q, \alpha\beta) \overset{*}{\vdash} (q, \beta) \textit{ entonces } \forall i \geq 0,\ \left(q, \alpha^i \beta\right) \overset{*}{\vdash} (q, \beta)\,.$$

Demostración.

Fijemos $\alpha \in \Sigma^*$ y $q \in Q$ arbitrarias. Demostración por inducción en i.

Caso base $(i = 0)$. $\left(q, \alpha^0 \beta\right) \overset{0}{\vdash} (q, \beta)$

Caso inductivo. Supongamos que la propiedad vale para i, es decir,

(HI) si $(q, \alpha\beta) \overset{*}{\vdash} (q, \beta)$ entonces $\left(q, \alpha^i \beta\right) \overset{*}{\vdash} (q, \beta)$.

Asumamos el antecedente de (HI).

Ahora donde (HI) dice β podemos poner cualquier expresión. Pongamos $(\alpha\beta)$.

(HI') si $(q, \alpha(\alpha\beta)) \overset{*}{\vdash} (q, (\alpha\beta))$ entonces $(q, \alpha^i(\alpha\beta)) \overset{*}{\vdash} (q, (\alpha\beta))$.

Ya asumimos el antecedente de (HI), y por lo tanto el de (HI').

Entonces,	$(q, \alpha^i(\alpha\beta)) \overset{*}{\vdash} (q, (\alpha\beta))$.
Usando $\alpha^i\alpha = \alpha^{i+1}$ nos queda,	$(q, \alpha^{i+1}\beta) \overset{*}{\vdash} (q, (\alpha\beta))$.
Usando la suposición del antecedente de HI,	$(q, \alpha\beta) \overset{*}{\vdash} (q, \beta)$.
Por transitividad de $\overset{*}{\vdash}$ obtenemos	$(q, \alpha^{i+1}\beta) \overset{*}{\vdash} (q, \beta)$.

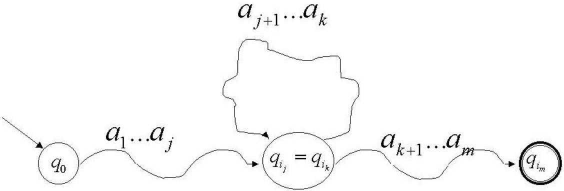
$\square$

Demostración del Lema de Pumping

Sea AFD M tal que $\mathcal{L}(M) = L$. Sea n su cantidad de estados.
Sea z una cadena de longitud $m \geq n$, $z = a_1 \cdots a_m,$.

Para aceptar z usamos m transiciones, por lo tanto $m + 1$ estados. (estado inicial, estado luego de consumir el primer símbolo, estado luego de consumir el segundo símbolo, etc). Como $m + 1 > n$, para aceptar z el autómata pasa DOS ó más veces por un mismo estado.

Sea $q_{\ell_0}, q_{\ell_1}, \cdots, q_{\ell_m}$, con $q_{\ell_0} = q_0$ y q_{ℓ_m} un estado final, la sucesión de estados desde q_0 hasta aceptar z.



Existen existen indices j y k mínimos tales que $q_{\ell_j} = q_{\ell_k}$ con $0 \leq j < k \leq n$.
El máximo valor posible de k es n porque M tiene n estados distintos, entonces al recorrerlo, antes de que se repita tenemos q_{ℓ_0}, q_{ℓ_1},... $q_{\ell_{n-1}}$, pero necesiariamente q_{ℓ_n} será repetido.
Esto determina z en tres cadenas u, v y w tales que

$$u = \begin{cases} a_1 \cdots a_j & \text{si } j > 0 \\ \lambda & \text{si } j = 0 \end{cases}$$

$$v = a_{j+1} \cdots a_k$$

$$w = \begin{cases} a_{k+1} \cdots a_m & \text{si } k < m \\ \lambda & \text{si } k = m. \end{cases}$$

Entonces,

$$|uv| \leq n$$

$$|v| \geq 1$$

y $$(q_0, uvw) \overset{*}{\vdash} \left(q_{\ell_j}, vw\right) \overset{*}{\vdash} (q_{\ell_k}, w) \overset{*}{\vdash} (q_{\ell_m}, \lambda) \,.$$

Pero, como $q_{\ell_j} = q_{\ell_k}$, aplicamos el lema anterior

$$\forall i \geq 0, \quad \left(q_{\ell_j}, v^i w\right) \overset{*}{\vdash} \left(q_{\ell_j}, w\right) .$$

Como $q_{\ell_j} = q_{\ell_k}$ y $q_{\ell_k} \in F$, concluimos $\forall i \geq 0$, $uv^i w \in L$, $\square$.

Definición

Un conjunto A de números naturales es decidible si hay un algoritmo que para cualquier número natural responde si pertenece o no al conjunto A.

La definición de decidibilidad se extiende a otros conjuntos que los naturales, y a otros problemas que la pertenecia. En cada caso significa la existencia de un algoritmos que resuelve la pregunta por sí o por no.

Teorema

Los siguentes problemas sobre lenguajes regulares son decidibles:

Finitud : Dado $L \subseteq \Sigma^*$ *regular, ¿Es* L *finito?*
Vacuidad: Dado $L \subseteq \Sigma^*$ *regular, ¿Es* $L = \emptyset$*?,*
Pertenencia: Dado $L \subseteq \Sigma^*$ *regular y dada un palabra* $w \in \Sigma^*$*, ¿*$w \in L$*?*
Equivalencia: Dados $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ *regular ¿*$L_1 = L_2$*?*

Proposición

Sea AFD $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$, *con* $|Q| = n$. $\mathcal{L}(M)$ *es no vacío si y solo si existe* w *en* Σ^* *tal que* $\widehat{\delta}(q_0, w) \in F$ *y* $|w| < n$.

Demostración.

Debemos ver que $\mathcal{L}(M)$ es no vacío si y solo si existe w en Σ^* tal que $\widehat{\delta}(q_0, w) \in F$ y $|w| < n$, donde $n = |Q|$.

$\Rightarrow$). Supongamos $\mathcal{L}(M)$ es no vacío. Sabemos que es regular.
Sea z en $\mathcal{L}(M)$ de longitud mayor o igual a n y supongamos que no hay ninguna más corta en $\mathcal{L}(M)$.

El Lema de Pumping garantiza que hay u, v, w apropiados tal que $|v| \geq 1$, $z = uvw$ y $\forall i \geq 0$, uv^iw en $\mathcal{L}(M)$.

Entonces uw está en $\mathcal{L}(M)$. Pero uw es más corta que z, lo que contradice nuestra suposición de que z era la más corta.
Concluimos que en $\mathcal{L}(M)$ hay cadenas más cortas que n.

$\Leftarrow$). Es obvio que L es no vacío.

Proposición

$\mathcal{L}(M)$ es infinito si y solo si existe w en Σ^* tal que $\widehat{\delta}(q_0, w) \in F$ y $n \leq |w| < 2n$.

Demostración

Debemos ver que $\mathcal{L}(M)$ es infinito si y solo si existe w en Σ^* tal que $\widehat{\delta}(q_0, w) \in F$ y $n \leq |w| < 2n$, donde $n = |Q|$.

$\Rightarrow$). Supongamos $\mathcal{L}(M)$ es infinito.
Supongamos que no hay ninguna cadena en $\mathcal{L}(M)$ de longitud entre n y $2n-1$.
Sin pérdida de generalidad, sea z en $\mathcal{L}(M)$ de longitud $2n$
(ya que si la longitud de z es mayor, aplica el mismo argumento, usandolo tantas veces como haga falta hasta llegar a la contradicción buscada).

Por Lema de Pumping, hay u, v, w tal que $z = uvw$, con $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ y $\forall i \geq 0$ uv^iw está en $\mathcal{L}(M)$. Entonces $uw \in \mathcal{L}(M)$.

Como $|uvw| = 2n$ y $1 \leq |v| \leq n$ tenemos $n \leq |uw| \leq 2n-1$, contradiciendo que no había ninguna en $\mathcal{L}(M)$ de esta longitud.

$\Leftarrow$). Supongamos z pertenece a $\mathcal{L}(M)$ y $n \leq |z| < 2n$.

Por el Lema de Pumping $z = uvw$ y para todo $i \geq 0$, uv^iw esta en $\mathcal{L}(M)$. Luego $\mathcal{L}(M)$ es infinito.

Observación

Los lenguajes regulares no están clausurados por unión infinita.

Demostración.

Damos un contraejemplo.
Para cada $i \geq 1$ sea el lenguaje regular $L_i = \{a^i b^i\}$.
Si los lenguajes regulares estuvieran clausurados por unión infinita, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} L_i$ debería ser regular.

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{a^i b^i\} = \{a^k b^k : k \in \mathbb{N}\}$$

Usando el el Lema de Pumping se demuestra que no es regular. $\square$

Demostración del teorema

- (Pertenencia) Para toda $\alpha \in \Sigma^*$, ¿pertenece α a L?
Sí. Sea AFD M tal que $\mathcal{L}(M) = L$. Si α es aceptada, *entonces* pertenece a L y *sino* no.
- (Vacuidad): Dado el lenguaje regular L,
Se construye su AFD M tal que $\mathcal{L}(M) = L$ Se determina el conjunto A de estados alcanzables. Si $F \cap A = \emptyset$ *entonces* el lenguaje L es vacío y *sino* no.
- (Equivalencia) Dados los lenguajes regulares L_1 y L_2, Es decidible si $\mathcal{L}(M_1) = \mathcal{L}(M_2)$?
Sí . Dados los lenguajes regulares L_1 y L_2, aceptados por los AFDs M_1 y M_2 respectivamente

$$\left(L_1 \cap \overline{L_2}\right) \cup \left(\overline{L_1} \cap L_2\right)$$

es vacío entonces L_1 y L_2 son equivalentes, sino no lo son.

$\square$

Ejercicios

1. Demostrar que los siguientes lenguajes no son regulares
   $L = \{a^i b^j : i \neq j\}$
   $L_a = \{xay : x \in \Sigma^*, y \in \Sigma^*, |x| = |y|\}$, donde a es un elemento prefijado de Σ.
2. Sea L un lenguaje regular, y sea n la constante del Lema de Pumping para L. Indicar Verdadero o Falso y justificar.
   - Para cada cadena z en L, con $|z| \geq n$, la descomposición de z en uvw, con $|v| \geq 1$ y $|uv| \leq n$, es única.
3. Indicar Verdadero o Falso y justificar:
   Sean L_1 y L_2 lenguajes sobre el alfabeto Σ, tal que $L_1 \cup L_2$ es regular. Entonces, tanto L_1 como L_2 son regulares.
4. Dar un algoritmo de decisión que determine si el lenguaje aceptado por un autómata finito es cofinito.