GBI Crashkurs WS 2016/17

Miguel Santos Correa

23. Februar 2017

miguel-correa@web.de

https://github.com/misaco93/GBI-Crashkurs-16-17

Gliederung

Graphen

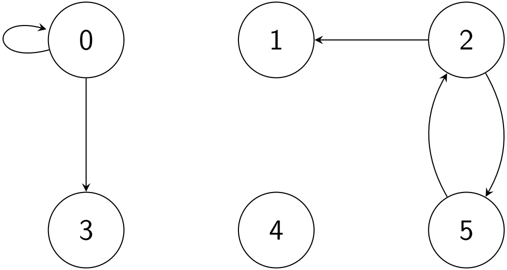
Gerichtete Graphen

Ein gerichteter Graph G ist definiert als:

- $G = (V, E)$
- Knotenmenge V
- Kantenmenge E
- $E \subseteq V \times V$

Beispielgraphen

$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
$E = \{(0, 0), (0, 3), (2, 1), (2, 5), (5, 2)\}.$



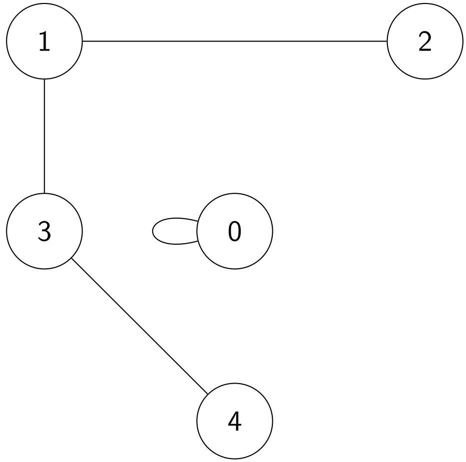
Ungerichtete Graphen

Ein ungerichteter Graph ist definiert als:

- $U = (V, E)$
- Knotenmenge V
- Kantenmenge E
- $E \subseteq \{\{x, y\} | x \in V \wedge y \in V\}$

Beispielgraphen

$U = (\{0, 1, 2, 3, 4\}, \{\{0\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}\})$



Ungerichtete Graphen

Achtung:

- für $x \neq y$ ist $\{x, y\}$ eine zweielementige Menge, ohne eine Festlegung von Reihenfolge
- für $x = y$ ist die Menge $\{x, y\} = \{x\}$ eine ein elementige Menge

Teilgraphen

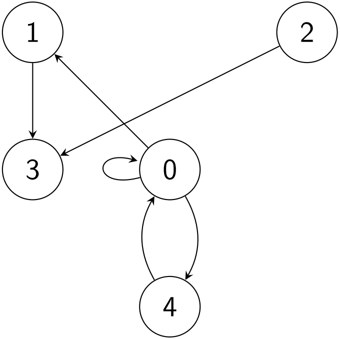
G' ist ein Teilgraph von G, wenn:

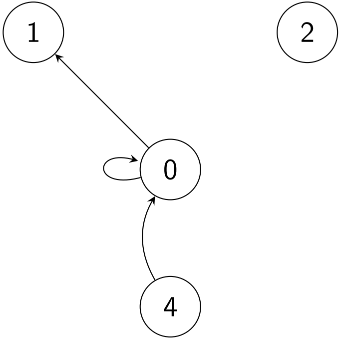
- $G = (V, E)$
- $G' = (V', E')$
- $V' \subseteq V$
- $E' \subseteq E \cap V' \times V'$

Ein Teilgraph besitzt also nur eine Teilmenge der Knoten mit einer Teilmenge an Kanten zwischen diesen Knoten.

Beispielgraphen

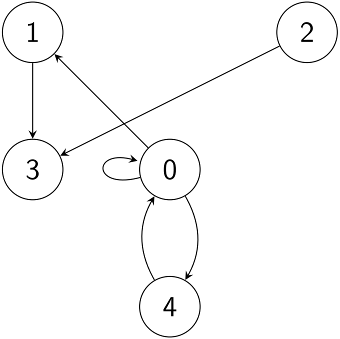
$G = (\{0, 1, 2, 3, 4\}, \{(0, 0), (0, 1), (0, 4), (1, 3), (2, 3), (4, 0)\})$
$G' = (\{0, 1, 2, 4\}, \{(0, 0), (0, 1), (4, 0)\})$

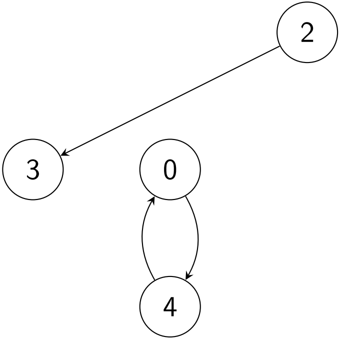




Beispielgraphen

$G = (\{0,1,2,3,4\}, \{(0,0),(0,1),(0,4),(1,3),(2,3),(4,0)\})$
$G' = (\{0,2,3,4\}, \{(0,4),(2,3),(4,0)\})$



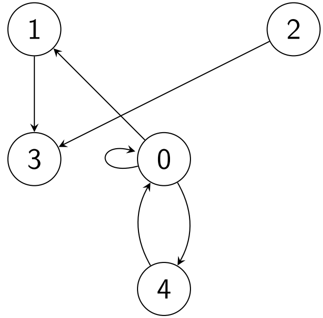


Pfade

Für einen Pfad p gilt:

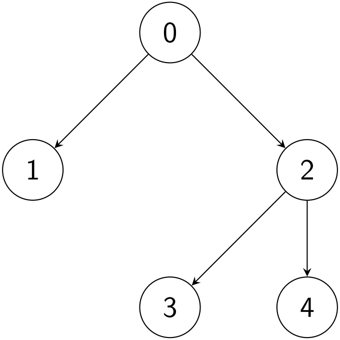
- $p = (v_0, ..., v_n) \in V^+$
- $(v_i, v_{i+1}) \in E$
- Bei ungerichteten Graphen nennen wir soetwas einen Weg

Pfade



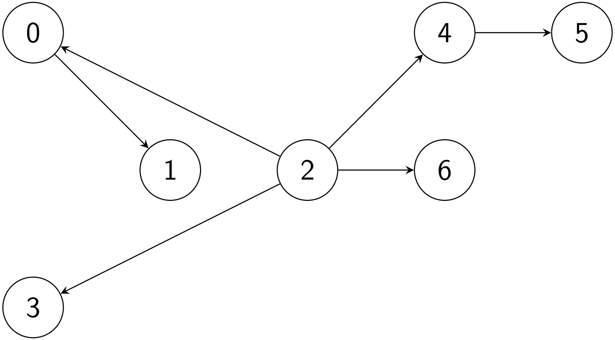
- $p_1 = (2, 3)$
- $p_2 = (0, 0, 4, 0)$
- $p_3 = (4, 0, 1, 3)$
- usw..

Bäume



- eindeutiger Pfad von der Wurzel zu allen Knoten
- Bei ungerichteten Bäumen ist die Wurzel nicht eindeutig

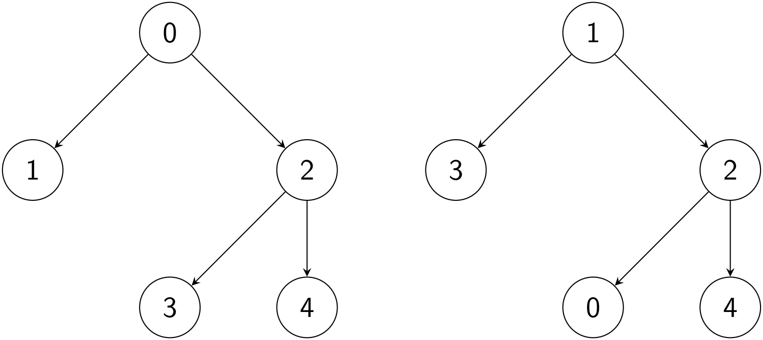
Bäume



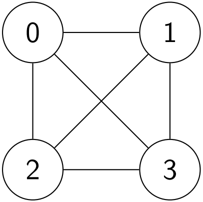
Isomorphe Graphen

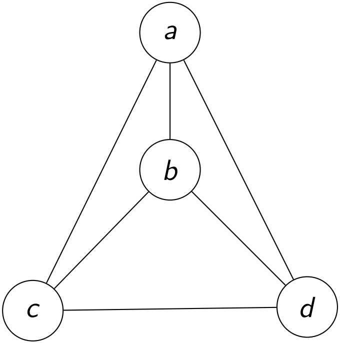
- Isomorphismus: bijektiver Homomorphismus
- Zwei Graphen sind isomorph, wenn sich der eine Graph durch Umbennung der Knoten des anderen Graphen bilden lässt.

Isomorphe Graphen



Isomorphe Graphen



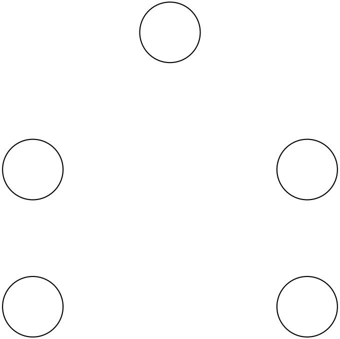


Klausuraufgabe: SS 2013 A2

Zeichnen Sie alle ungerichteten nicht-isomorphen Graphen mit 5 Knoten, für die gilt:
Genau ein Knoten besitzt Grad 4, all anderen Knoten haben Grad 2.

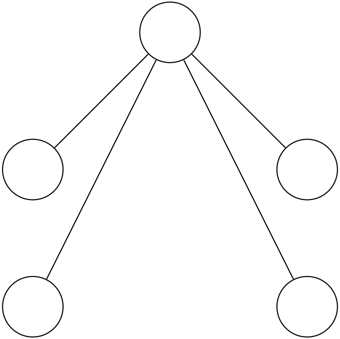
Klausuraufgabe: SS 2013 A2

Genau ein Knoten besitzt Grad 4, all anderen Knoten haben Grad 2.



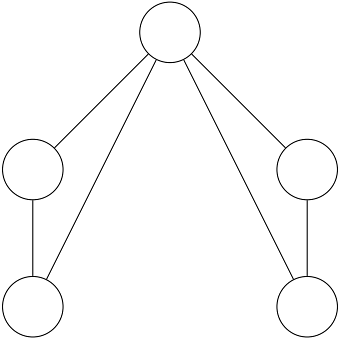
Klausuraufgabe: SS 2013 A2

Genau ein Knoten besitzt Grad 4, all anderen Knoten haben Grad 2.



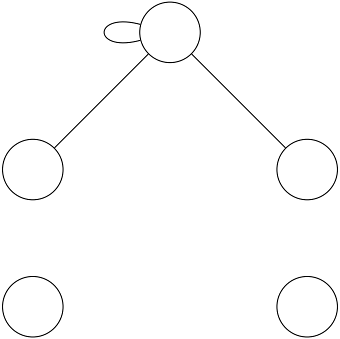
Klausuraufgabe: SS 2013 A2

Genau ein Knoten besitzt Grad 4, all anderen Knoten haben Grad 2.



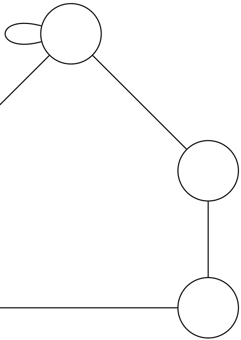
Klausuraufgabe: SS 2013 A2

Genau ein Knoten besitzt Grad 4, all anderen Knoten haben Grad 2.



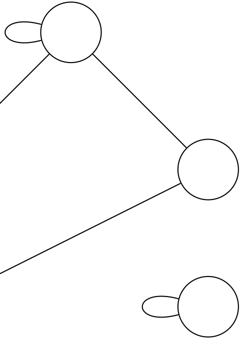
Klausuraufgabe: SS 2013 A2

Genau ein Knoten besitzt Grad 4, all anderen Knoten haben Grad 2.



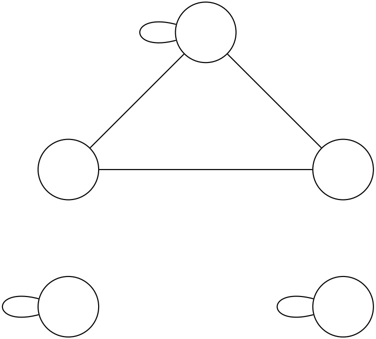
Klausuraufgabe: SS 2013 A2

Genau ein Knoten besitzt Grad 4, all anderen Knoten haben Grad 2.



Klausuraufgabe: SS 2013 A2

Genau ein Knoten besitzt Grad 4, all anderen Knoten haben Grad 2.

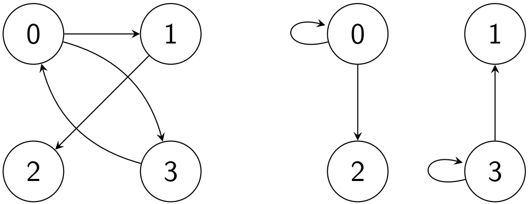


Relationen

- $E \subseteq V \times V$
- E ist eine Relation.
- Wie sieht ein Graph aus mit E^2, E^3?

Relationen

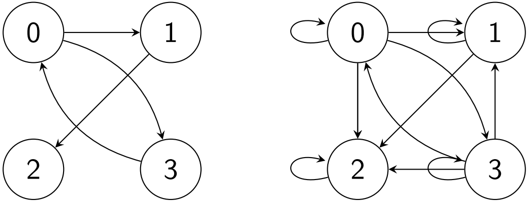
Links: $G = (V, E)$, Rechts: $G = (V, E^2)$



E^2 sind also alle Pfade der Länge 2.

Relationen

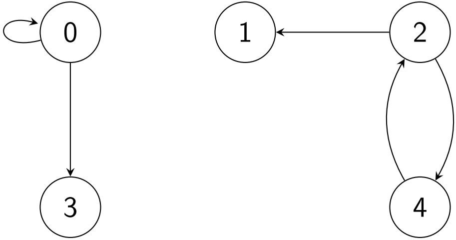
Links: $G = (V, E)$, Rechts: $G = (V, E^*)$



Adjazenzmatrix

- $n \times n$-Matrix bei einem Graphen mit n Knoten
- $A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j) \in E \\ 0 & \text{falls } (i,j) \notin E \end{cases}$
- A_{ij} gibt also an, ob eine Kante von i nach j existiert.

Adjazenzmatrix



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

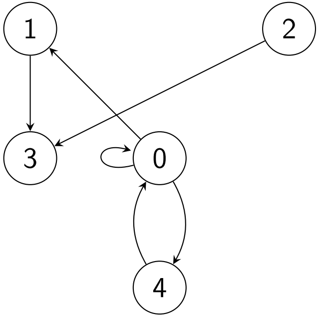
Adjazenzmatrix

- Woran erkennt man Schlingen?
- Wie sehen Adjazenzmatrizen bei ungerichteten Graphen aus?
- Wie sieht der Graph zu folgenden Adjazenzmatrizen aus?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wegematrix

- $W_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls ein Weg von i nach j existiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- Beispiel:



$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wegematrix

Gegeben sei eine 3×3-Matrix, die überall Einsen hat, außer an einer Stelle, die nicht auf der Hauptdiagonalen liegt. Zeigen Sie, dass A nicht die Wegematrix eines Graphen sein kann.

Wegematrix

Gegeben sei eine 3×3-Matrix, die überall Einsen hat, außer an einer Stelle, die nicht auf der Hauptdiagonalen liegt. Zeigen Sie, dass A nicht die Wegematrix eines Graphen sein kann.

Beispiel: $W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- $W_{01} = 0$, es existiert kein Weg von 0 zu 1
- $W_{02} = 1$, es existiert ein Weg von 0 zu 2
- $W_{21} = 1$, es existiert ein Weg von 2 zu 1

Klausuraufgabe: WS 2012/13 A6

Für $n \in \mathbb{N}_+$ sei folgender Graph $G_n = (V_n, E_n)$ definiert:
$V_n = \{x | x \subseteq \mathbb{G}_n \wedge |x| = 2\}$,
$E_n = \{\{u, v\} | u \in V, v \in V, u \cap v = \emptyset\}$.

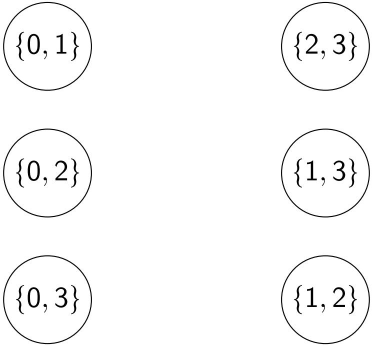
- Zeichnen Sie G_4.
- Wie viele Kanten hat G_5?
- Geben Sie die Wegematrix zu G_3 an.

Klausuraufgabe: WS 2012/13 A6

$V_n = \{x | x \subseteq \mathbb{G}_n \wedge |x| = 2\}$,
$E_n = \{\{u, v\} | u \in V, v \in V, u \cap v = \emptyset\}$.
V_4, E_4 gesucht.

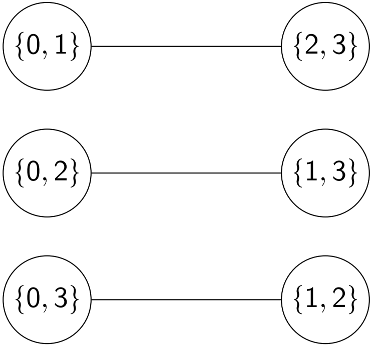
Klausuraufgabe: WS 2012/13 A6

$V_n = \{x | x \subseteq \mathbb{G}_n \wedge |x| = 2\}$,
$E_n = \{\{u, v\} | u \in V, v \in V, u \cap v = \emptyset\}$.
V_4, E_4 gesucht.



Klausuraufgabe: WS 2012/13 A6

$V_n = \{x | x \subseteq \mathbb{G}_n \wedge |x| = 2\}$,
$E_n = \{\{u, v\} | u \in V, v \in V, u \cap v = \emptyset\}$.
V_4, E_4 gesucht.

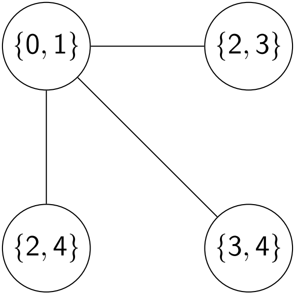


Klausuraufgabe: WS 2012/13 A6

$V_n = \{x | x \subseteq \mathbb{G}_n \wedge |x| = 2\}$,
$E_n = \{\{u, v\} | u \in V, v \in V, u \cap v = \varnothing\}$.
V_5, E_5 gesucht.

Klausuraufgabe: WS 2012/13 A6

$V_n = \{x | x \subseteq \mathbb{G}_n \wedge |x| = 2\}$,
$E_n = \{\{u, v\} | u \in V, v \in V, u \cap v = \emptyset\}$.
V_5, E_5 gesucht.



Klausuraufgabe: WS 2012/13 A6

- Es gibt $5 \cdot 4/2$ Knoten
- Jeder Knoten hat 3 Kanten
- $5 \cdot 4/2 \cdot 3 = 30$
- $30/2 = 15$ Kanten (Doppelzählung)

Reguläre Ausdrücke / Endliche Akzeptoren

Reguläre Ausdrücke

A ist ein beliebiges Alphabet, $Z = \{|, (,), *, \emptyset\}$
Dann:

- $\emptyset$ ist ein regulärer Ausdruck
- Für jedes $a \in A$ ist a ein regulärer Ausdruck
- Für die regulären Ausdrücke A_1 und A_2 sind $(A_1|A_2)$ und (A_1A_2) auch reguläre Ausdrücke
- Ist A ein regulärer Ausdruck, so ist auch $A*$
- Nichts anderes ist ein regulärer Ausdruck

Reguläre Ausdrücke

$\langle R \rangle$ sei die Sprache über dem regulären Ausdruck R.
Dann:

- $\forall x \in A : \langle x \rangle = \{x\}$
- $\langle R_1 | R_2 \rangle = \langle R_1 \rangle \cup \langle R_2 \rangle$
- $\langle R_1 R_2 \rangle = \langle R_1 \rangle \langle R_2 \rangle$
- $\langle R* \rangle = \langle R \rangle^*$

Reguläre Ausdrücke

- $R = a$, $\langle R \rangle = \{a\}$

Reguläre Ausdrücke

- $R = a$, $\langle R \rangle = \{a\}$
- $R = (a|b)$, $\langle R \rangle = \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$

Reguläre Ausdrücke

- $R = a$, $\langle R \rangle = \{a\}$
- $R = (a|b)$, $\langle R \rangle = \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$
- $R = (aa|b)*$, $\langle R \rangle = \{aa, b\}^*$

Reguläre Ausdrücke

- $R = a$, $\langle R \rangle = \{a\}$
- $R = (a|b)$, $\langle R \rangle = \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$
- $R = (aa|b)*$, $\langle R \rangle = \{aa, b\}^*$
- $R = aba(ab|aa)*$, $\langle R \rangle = \{aba\}\{ab, aa\}^*$

Reguläre Ausdrücke

- $R = a$, $\langle R \rangle = \{a\}$
- $R = (a|b)$, $\langle R \rangle = \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$
- $R = (aa|b)*$, $\langle R \rangle = \{aa, b\}^*$
- $R = aba(ab|aa)*$, $\langle R \rangle = \{aba\}\{ab, aa\}^*$
- $R = aa|(bb)*$, $\langle R \rangle = \{aa\} \cup \{bb\}^*$

Reguläre Ausdrücke

- $R = a$, $\langle R \rangle = \{a\}$
- $R = (a|b)$, $\langle R \rangle = \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$
- $R = (aa|b)*$, $\langle R \rangle = \{aa, b\}^*$
- $R = aba(ab|aa)*$, $\langle R \rangle = \{aba\}\{ab, aa\}^*$
- $R = aa|(bb)*$, $\langle R \rangle = \{aa\} \cup \{bb\}^*$
- $R = \emptyset$, $\langle R \rangle = \{\}$

Reguläre Ausdrücke

- $R = a$, $\langle R \rangle = \{a\}$
- $R = (a|b)$, $\langle R \rangle = \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$
- $R = (aa|b)*$, $\langle R \rangle = \{aa, b\}^*$
- $R = aba(ab|aa)*$, $\langle R \rangle = \{aba\}\{ab, aa\}^*$
- $R = aa|(bb)*$, $\langle R \rangle = \{aa\} \cup \{bb\}^*$
- $R = \emptyset$, $\langle R \rangle = \{\}$
- $R = \emptyset*$, $\langle R \rangle = \{\epsilon\}$

Reguläre Ausdrücke

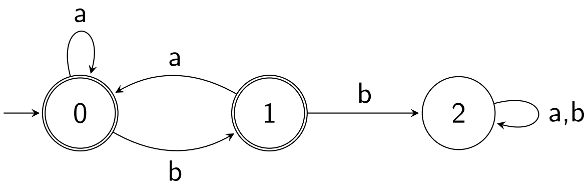
- $R = a$, $\langle R \rangle = \{a\}$
- $R = (a|b)$, $\langle R \rangle = \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$
- $R = (aa|b)*$, $\langle R \rangle = \{aa, b\}^*$
- $R = aba(ab|aa)*$, $\langle R \rangle = \{aba\}\{ab, aa\}^*$
- $R = aa|(bb)*$, $\langle R \rangle = \{aa\} \cup \{bb\}^*$
- $R = \emptyset$, $\langle R \rangle = \{\}$
- $R = \emptyset*$, $\langle R \rangle = \{\epsilon\}$
- $R = \emptyset * |ab$, $\langle R \rangle = \{\epsilon, ab\}$

Endliche Akzeptoren

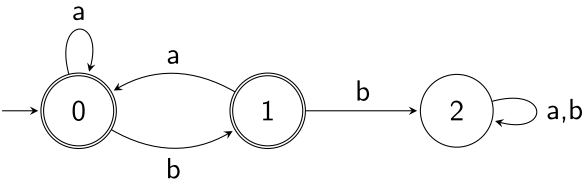
Ein endlicher Akzeptor $A = (Z, z_0, X, f, F)$ wird festgelegt durch

- endliche Zustandsmenge Z
- einen Anfangszustand $z_0 \in Z$
- ein Eingabealphabet X
- eine Zustandsüberführungsfunktion $f : Z \times X \to Z$
- eine Menge $F \subseteq Z$ akzeptierender Zustände

Endliche Akzeptoren



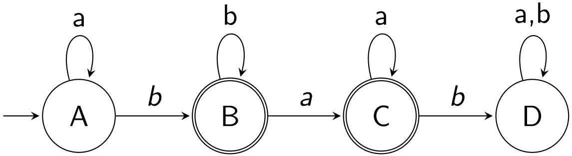
Endliche Akzeptoren



$$L = \{a, b\}^* \setminus \{w_1 bb w_2 | w_1, w_2 \in \{a, b\}^*\}$$

Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6

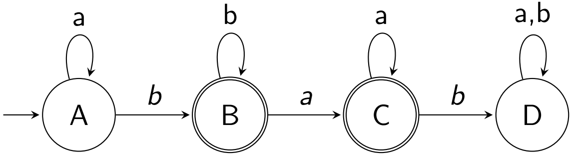
Es sei der folgende endliche Akzeptor M mit Zustandsmenge $Z = \{A, B, C, D\}$ und Eingabealphabet $X = \{a, b\}$ gegeben:



- Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, so dass gilt: $\langle R \rangle = L(M)$.
- Geben sie einen endlichen Akzeptor an, der folgende formale Sprache akzeptiert:

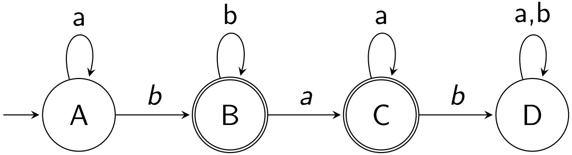
$$\{w | w \in L(M) \text{ und die Anzahl } N_a(w) \text{ der } a \text{ in } w \text{ ist gerade}\}$$

Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6



Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, so dass gilt: $\langle R \rangle = L(M)$.

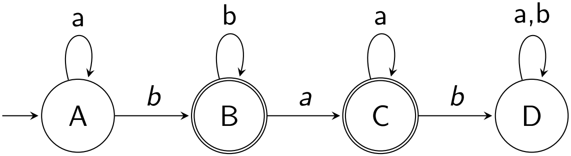
Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6



Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, so dass gilt: $\langle R \rangle = L(M)$.

- $R_B = a * bb*$

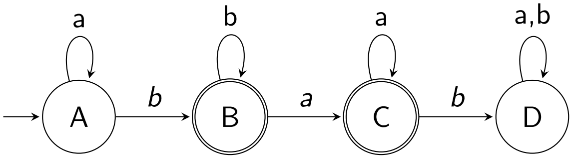
Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6



Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, so dass gilt: $\langle R \rangle = L(M)$.

- $R_B = a * bb*$
- $R_C = a * bb * aa*$

Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6

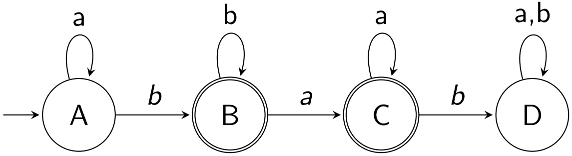


Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, so dass gilt: $\langle R \rangle = L(M)$.

- $R_B = a * bb*$
- $R_C = a * bb * aa*$
- $R = R_B | R_C = (a * bb*)|(a * bb * aa*) = a * bb * a*$

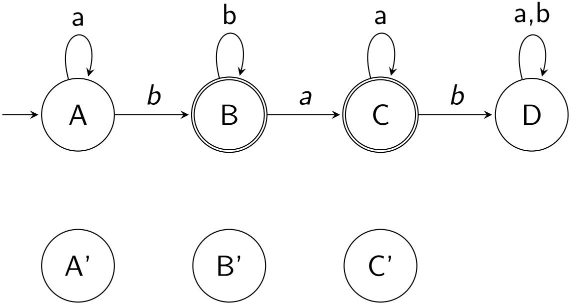
Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6

$\{w | w \in L(M)$ und die Anzahl $N_a(w)$ der a in w ist gerade$\}$



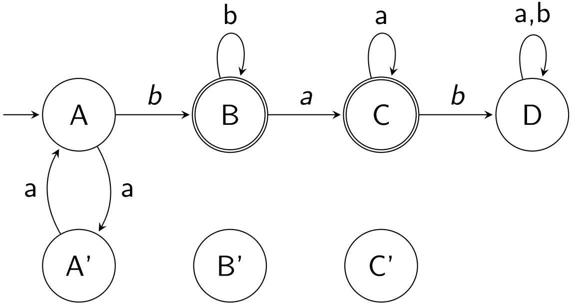
Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6

$\{w | w \in L(M)$ und die Anzahl $N_a(w)$ der a in w ist gerade$\}$



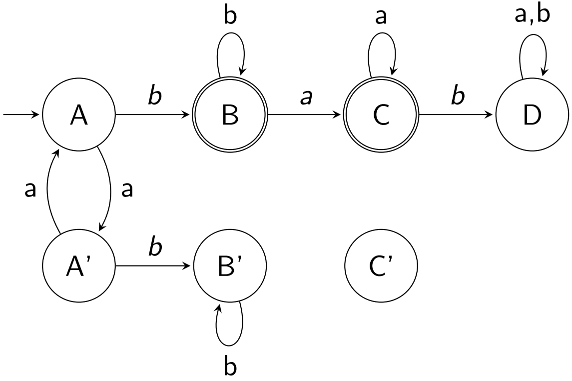
Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6

$\{w | w \in L(M)$ und die Anzahl $N_a(w)$ der a in w ist gerade$\}$



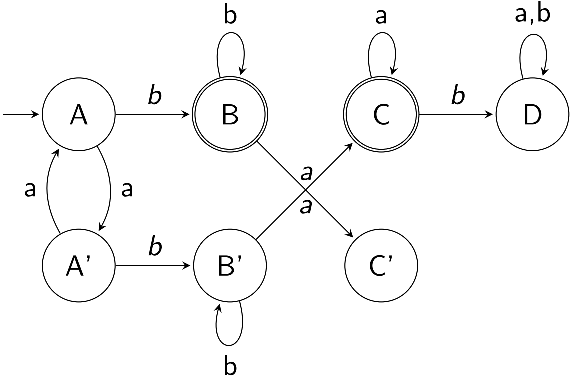
Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6

$\{w | w \in L(M) \text{ und die Anzahl } N_a(w) \text{ der } a \text{ in } w \text{ ist gerade}\}$



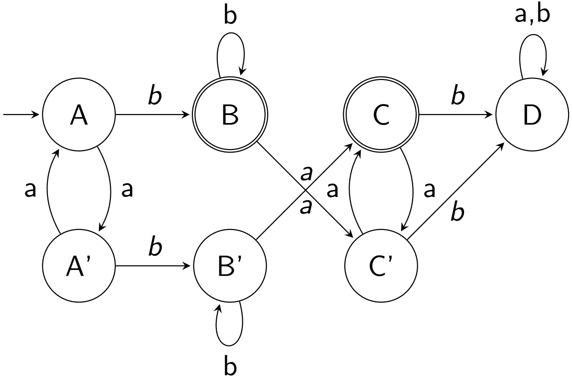
Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6

$\{w | w \in L(M) \text{ und die Anzahl } N_a(w) \text{ der } a \text{ in } w \text{ ist gerade}\}$

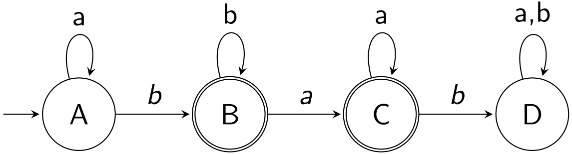


Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6

$$\{w | w \in L(M) \text{ und die Anzahl } N_a(w) \text{ der } a \text{ in } w \text{ ist gerade}\}$$

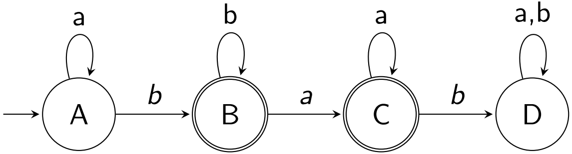


Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6



Wie viele verschiedene formale Sprachen kann man mit endlichen Akzeptoren erkennen, deren Eingabealphabet, Zustandsmenge, Anfangszustand und Zustandsüberführungsfunktion wie bei dem oben angegebenen Akzeptor *M* sind?

Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6



Wie viele verschiedene formale Sprachen kann man mit endlichen Akzeptoren erkennen, deren Eingabealphabet, Zustandsmenge, Anfangszustand und Zustandsüberführungsfunktion wie bei dem oben angegebenen Akzeptor M sind?
16

Klausuraufgabe: SS 2015 A6

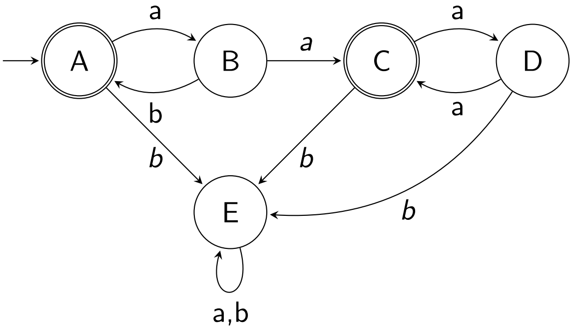
- Geben Sie einen endlichen Akzeptor an, der die formale Sprache erkennt, die durch den regulären Ausdruck $(ab) * (aa)*$ beschrieben wird.
- Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die die formale Sprache

$$L = \{a^k b^{m+k} c^{m+l} d^l | k, l, m \in \mathbb{N}_0\}$$

- Gibt es einen regulären Ausdruck, der die formale Sprache beschreibt?

Klausuraufgabe: SS 2015 A6

$$(ab)*(aa)*$$



Klausuraufgabe: SS 2015 A6

$$L = \{a^k b^{m+k} c^{m+l} d^l | k, l, m \in \mathbb{N}_0\}$$

Gibt es einen regulären Ausdruck, der die formale Sprache beschreibt?

Klausuraufgabe: SS 2015 A6

$$L = \{a^k b^{m+k} c^{m+l} d^l | k, l, m \in \mathbb{N}_0\}$$

Gibt es einen regulären Ausdruck, der die formale Sprache beschreibt?
Nein.

Quantitative Aspekte

$\asymp$-Relation

$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ wächst asymptotisch oder größenordnungsmäßig so schnell wie $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ wenn gilt:

- $\exists c, c' \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geqslant n_0 : cf(n) \leqslant g(n) \leqslant c'f(n)$
- $f(n) \asymp g(n)$

$\asymp$-Relation

Beispiel:

- $g(n) = n^3 + 3n^2$
- $f(n) = 8n^3$

$\asymp$-Relation

Beispiel:

- $g(n) = n^3 + 3n^2$
- $f(n) = 8n^3$
- $g(n) = n^3 + 3n^2 \leqslant n^3 + 3n^3 = 4n^3 = 0.5f(n)$
  $\Rightarrow g(n) \leqslant 0.5f(n)$

$\asymp$-Relation

Beispiel:

- $g(n) = n^3 + 3n^2$
- $f(n) = 8n^3$
- $g(n) = n^3 + 3n^2 \leqslant n^3 + 3n^3 = 4n^3 = 0.5f(n)$
  $\Rightarrow g(n) \leqslant 0.5f(n)$
- $g(n) = n^3 + 3n^2 \geqslant n^3 = \frac{1}{8}f(n)$
  $\Rightarrow g(n) \geqslant \frac{1}{8}f(n)$
- $\Rightarrow \frac{1}{8}f(n) \leqslant g(n) \leqslant 0.5f(n)$
- $f(n) \asymp g(n)$

$\asymp$-Relation

Beispiel:

- $g(n) = 2^n$
- $f(n) = 3^n$

$\asymp$-Relation

Beispiel:

- $g(n) = 2^n$
- $f(n) = 3^n$
- $g(n) \geqslant cf(n)$
- $2^n \geqslant c3^n$

$\asymp$-Relation

Beispiel:

- $g(n) = 2^n$
- $f(n) = 3^n$
- $g(n) \geqslant cf(n)$
- $2^n \geqslant c3^n$
- $(\frac{2}{3})^n \geqslant c$

$\asymp$-Relation

Beispiel:

- $g(n) = 2^n$
- $f(n) = 3^n$
- $g(n) \geqslant cf(n)$
- $2^n \geqslant c3^n$
- $(\frac{2}{3})^n \geqslant c$
- Kein $c > 0$ erfüllt diese Ungleichung.

Θ-Notation

- $\Theta(f)$ ist die Menge aller Funktionen die größenordnungsmäßig so schnell wachsen wie f
- $\Theta(f) = \{g | g \asymp f\}$
- Beispiel: $\Theta(8n^3) = \{n^3 + 3n^2, 100n^3 - 10n, 0.01n^3 + 1000, ...\}$
- Alle Polynome gleichen Grades wachsen gleich schnell

O-Notation

- $O(f)$ ist die Menge aller Funktionen die größenordnungsmäßig höchstens so schnell wachsen wie f
- $O(f) = \{g | g \preceq f\}$
  $= \{g | \exists c \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geqslant n_0 : g(n) \leqslant cf(n)\}$
- Beispiele:
  - $n^2 \in O(8n^3)$
  - $3n \in O(n^3 + 3n^2)$
  - $n^4 \in O(n^4)$
  - $n^a \in O(n^b)$ für $a \leqslant b$

Ω-Notation

- $\Omega(f)$ ist die Menge aller Funktionen die größenordnungsmäßig mindestens so schnell wachsen wie f
- $\Omega(f) = \{g | g \succeq f\}$
  $= \{g | \exists c \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geqslant n_0 : cf(n) \leqslant g(n)\}$
- Beispiele:
  - $n^2 \in \Omega(log(n))$
  - $e^n \in \Omega(n^a)$

Wachstum wichtiger Funktionen

$$1 \preceq log(x) \preceq \sqrt{x} \preceq x \preceq xlog(x) \preceq x^2 \preceq 2^x < x!$$

Quiz

- $sin(x) + 2 \in \Theta(1)$?

Quiz

- $sin(x) + 2 \in \Theta(1)$? Ja, weil $1 \leqslant sin(x) + 2 \leqslant 3 \cdot 1$

Quiz

- $sin(x) + 2 \in \Theta(1)$? Ja, weil $1 \leqslant sin(x) + 2 \leqslant 3 \cdot 1$
- $log_a(x) \in \Theta(log_b(x))$?

Quiz

- $sin(x) + 2 \in \Theta(1)$? Ja, weil $1 \leqslant sin(x) + 2 \leqslant 3 \cdot 1$
- $log_a(x) \in \Theta(log_b(x))$? Ja, weil $log_b(x) = \frac{log_a(x)}{log_a(b)}$

Quiz

- $sin(x) + 2 \in \Theta(1)$? Ja, weil $1 \leqslant sin(x) + 2 \leqslant 3 \cdot 1$
- $log_a(x) \in \Theta(log_b(x))$? Ja, weil $log_b(x) = \frac{log_a(x)}{log_a(b)}$
- $log(x) \in \Omega(n^{0.1})$?

Quiz

- $sin(x) + 2 \in \Theta(1)$? Ja, weil $1 \leqslant sin(x) + 2 \leqslant 3 \cdot 1$
- $log_a(x) \in \Theta(log_b(x))$? Ja, weil $log_b(x) = \frac{log_a(x)}{log_a(b)}$
- $log(x) \in \Omega(n^{0.1})$? Nein.

Quiz

- $sin(x) + 2 \in \Theta(1)$? Ja, weil $1 \leqslant sin(x) + 2 \leqslant 3 \cdot 1$
- $log_a(x) \in \Theta(log_b(x))$? Ja, weil $log_b(x) = \frac{log_a(x)}{log_a(b)}$
- $log(x) \in \Omega(n^{0.1})$? Nein.
- $nlog(n) \in \Theta(log(n!))$?

Quiz

- $sin(x) + 2 \in \Theta(1)$? Ja, weil $1 \leqslant sin(x) + 2 \leqslant 3 \cdot 1$
- $log_a(x) \in \Theta(log_b(x))$? Ja, weil $log_b(x) = \frac{log_a(x)}{log_a(b)}$
- $log(x) \in \Omega(n^{0.1})$? Nein.
- $nlog(n) \in \Theta(log(n!))$? Ja, weil

$$\begin{aligned} log(n!) &= log(1) + log(2) + ... + log(n-1) + log(n) \\ &\leqslant log(n) + log(n) + ... + log(n) + log(n) = nlog(n) \\ &\geqslant log(n/2) + log(n/2) + ... + log(n/2) = n/2log(n/2) \end{aligned}$$

Unvergleichbare Funktionen

Es gibt unvergleichbare Funktionen. Beispiel:

$$f = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ n & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$g = \begin{cases} n & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$f \notin O(g)$ und $g \notin O(f)$

Klausuraufgabe: WS 2013/14 A1

Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ an, für die gilt:

$$f(n) \notin O(n^3) \wedge f(n) \notin \Omega(n^3)$$

Klausuraufgabe: WS 2013/14 A1

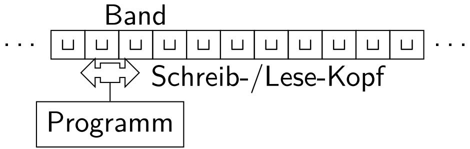
Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ an, für die gilt:

$$f(n) \notin O(n^3) \wedge f(n) \notin \Omega(n^3)$$

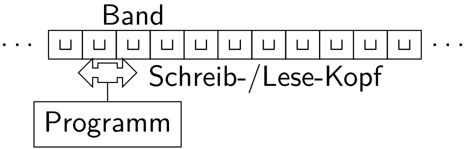
$$f = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ n^4 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Turingmaschinen

Turingmaschine - anschaulich



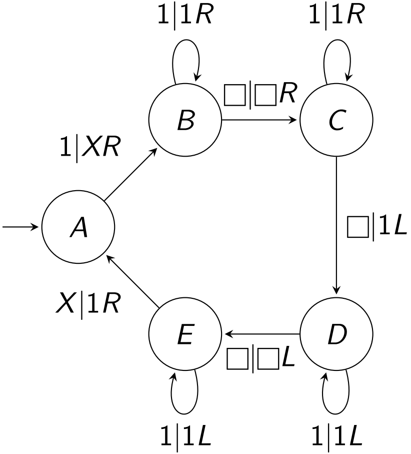
Turingmaschine - anschaulich



- f : In welchen Zustand geht die Maschine?
- g : Was schreibt die Maschine auf das Band?
- m : Wohin bewegt sich der Kopf?

Turingmaschinen

Beispiel einer Turingmaschine:



Turingmaschinen

	A	B	C	D	E
$\square$		$C, \square, R$	$D, 1, L$	$E, \square, L$	
1	B, X, R	$B, 1, R$	$C, 1R$	$D, 1, L$	$E, 1, L$
X					$A, 1, R$

Turingmaschinen

A
□ 1 1 □ □ □

B
□ X 1 □ □ □

B
□ X 1 □ □ □

C
□ X 1 □ □ □

D
□ X 1 □ 1 □

E
□ X 1 □ 1 □

E
□ X 1 □ 1 □

A
□ 1 1 □ 1 □

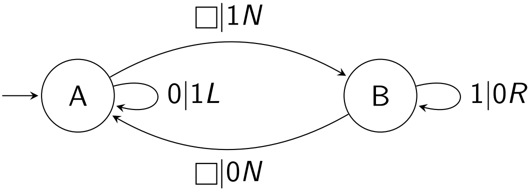
.
.
.

Endkonfiguration:

A
□ 1 1 □ 1 1

Klausuraufgabe: WS 2015/16 A7

Die Turingmaschine T sei graphisch gegeben durch



Dabei bedeuten L und R, dass der Kopf nach links bzw. rechts bewegt wird und N, dass er nicht bewegt wird.
Geben Sie die ersten elf Konfigurationen an, die die Turingmaschine T durchläuft, wenn zu Beginn alle Felder mit dem Blanksymbol beschriftet sind.

Klausuraufgabe: WS 2015/16 A7

		A			
$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
		B			
$\square$	$\square$	1	$\square$	$\square$	$\square$
			B		
$\square$	$\square$	0	$\square$	$\square$	$\square$
			A		
$\square$	$\square$	0	0	$\square$	$\square$
		A			
$\square$	$\square$	0	1	$\square$	$\square$
	A				
$\square$	$\square$	1	1	$\square$	$\square$

	B				
$\square$	1	1	1	$\square$	$\square$
		B			
$\square$	0	1	1	$\square$	$\square$
			B		
$\square$	0	0	1	$\square$	$\square$
				B	
$\square$	0	0	0	$\square$	$\square$
				A	
$\square$	0	0	0	0	$\square$

Klausuraufgabe: WS 2015/16 A7

Für jede nicht-negative ganze Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\varphi(n)$ die Anzahl der Schirtte, die die Turingmaschine T bei Eingabe ϵ benötigt, bis das Wort 0^{2n} auf dem Band steht.

(i) Geben Sie $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ und $\varphi(2)$ an.

(ii) Vervollständigen Sie die Rekursionsformel

$$\varphi(n+1) = \varphi(n) + ...$$

durch einen arithmetischen Ausdruck, in dem n vorkommt.

Geben Sie eine Abbildung $\psi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ so an, dass $\varphi \in \Theta(\psi)$ gilt. Dazu dürfen Sie *keine* trigonometrischen Funktionen (cos,sin, usw.) verwenden.

Klausuraufgabe: WS 2015/16 A7

- $\varphi(0) = 0$
- $\varphi(1) = 3$
- $\varphi(2) = 10$

Klausuraufgabe: WS 2015/16 A7

- $\varphi(0) = 0$
- $\varphi(1) = 3$
- $\varphi(2) = 10$
- $\varphi(n+1) = \varphi(n) + 4n + 3$

Klausuraufgabe: WS 2015/16 A7

- $\varphi(0) = 0$
- $\varphi(1) = 3$
- $\varphi(2) = 10$
- $\varphi(n+1) = \varphi(n) + 4n + 3$
- $\varphi(n) \in \Theta(\psi)$

Klausuraufgabe: WS 2015/16 A7

- $\varphi(0) = 0$
- $\varphi(1) = 3$
- $\varphi(2) = 10$
- $\varphi(n+1) = \varphi(n) + 4n + 3$
- $\varphi(n) \in \Theta(\psi)$
- $\varphi(n) \in \Theta(n^2)$

Klausuraufgabe: WS 2015/16 A7

- $\varphi(0) = 0$
- $\varphi(1) = 3$
- $\varphi(2) = 10$
- $\varphi(n+1) = \varphi(n) + 4n + 3$
- $\varphi(n) \in \Theta(\psi)$
- $\varphi(n) \in \Theta(n^2)$
- $\varphi(n) \in \Theta(\sum_{i=0}^{n-1}(4i + 3))$

Klausuraufgabe: SS 2013 A7

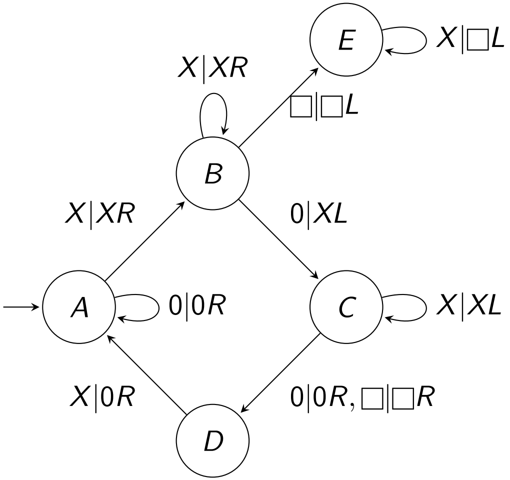
Sei T die Turingmaschine, die als Eingabe ein wort w über $\{0, X\}$ erhält und folgenden Homomorphismus h berechnet
$h(0) = 0$, $h(X) = \epsilon$,
so dass nach der Abarbeitung $h(w)$ auf dem Band steht.
Geben Sie T explizit grafisch an.

Klausuraufgabe: SS 2013 A7

Sei T die Turingmaschine, die als Eingabe ein wort w über $\{0, X\}$ erhält und folgenden Homomorphismus h berechnet
$h(0) = 0$, $h(X) = \epsilon$,
so dass nach der Abarbeitung $h(w)$ auf dem Band steht.
Idee:

- Finde eine 0 rechts von X
- Ersetze die 0 durch ein X
- Ersetze das erste X von links durch eine 0
- Wiederhole die Schritte

Klausuraufgabe: SS 2013 A7



Klausuraufgabe: SS 2013 A7

- Geben Sie in Abhängigkeit der Länge des Eingabewortes w eine möglichst scharfe obere Schranke in O-Notation für die worst case Lautzeit von T an.
- Geben Sie in Abhängigkeit der Länge des Eingabewortes w eine Eingabe an, deren Bearbeitung (bis auf einen konstanten Faktor) worst case Laufzeit benötigt.
- Geben Sie in Abhängigkeit der Länge des Eingabewortes w eine Eingabe an, deren Bearbeitung asymptotisch nicht worst case Laufzeit benötigt.

Klausuraufgabe: SS 2013 A7

Welche Wörter haben die schlechteste Laufzeit?

- $w = 00000000$?

Klausuraufgabe: SS 2013 A7

Welche Wörter haben die schlechteste Laufzeit?

- $w = 00000000$? Nein

Klausuraufgabe: SS 2013 A7

Welche Wörter haben die schlechteste Laufzeit?

- $w = 00000000$? Nein
- $w = XXXXXXXX$?

Klausuraufgabe: SS 2013 A7

Welche Wörter haben die schlechteste Laufzeit?

- $w = 00000000$? Nein
- $w = XXXXXXXX$? Nein

Klausuraufgabe: SS 2013 A7

Welche Wörter haben die schlechteste Laufzeit?

- $w = 00000000$? Nein
- $w = XXXXXXXX$? Nein
- $w = XXXX0000$

worst case Laufzeit?

Klausuraufgabe: SS 2013 A7

Welche Wörter haben die schlechteste Laufzeit?

- $w = 00000000$? Nein
- $w = XXXXXXXX$? Nein
- $w = XXXX0000$

worst case Laufzeit?

- $Time_T(n) \in O(n^2)$