Pregunta 1

Estimador de la pendiente *

En el modelo de Regresión Lineal Simple

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2).$$

Calcular el Estimador de Mínimos Cuadrados del parámetro β_1.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i Y_i - n(\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} Y_i)}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

○ .-

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i Y_i - n(\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} Y_i)}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

○ -

$$\frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i - (\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} Y_i)}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

◉ .-

$$\frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i - (\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} Y_i)}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

○ -

Intento 1

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \quad / \quad \varepsilon_i \sim N(0; \sigma^2)$$

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i \quad \text{donde} \quad \varepsilon_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

$$\Rightarrow$$

$$\cancel{Y_i = \beta_0 + \beta_1 X + Y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i)}$$

$$\cancel{0 =}$$

Intento 2

$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \;/\; \varepsilon_i \sim N(0;\sigma^2)$

$\Rightarrow$

$\varepsilon_i = Y_i - \hat{Y}_i$

$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \beta_1 x_i \Rightarrow$

$F(\beta_0;\beta_1;X_i) = Y_i \approx \varepsilon_i^2 = [Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_i)]^2$

$\Rightarrow$

$\frac{\partial F}{\partial \beta_0} = \frac{\partial F}{\partial \beta_1} = 0 \Rightarrow \nabla F_{\text{respecto } \beta_{0;1}} \Rightarrow$

$F_{\beta_0} = 2[Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_i)] \cdot [0 - 1 + 0] \Rightarrow$

$F_{\beta_0} = 2[Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_i)][-1] = 0 \Rightarrow$

$\Sigma [Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i] \cdot -1 = 0 \Rightarrow / \frac{1}{n}$

$\beta_0 - Y_i + \beta_1 X_i = 0 \Rightarrow$

$\beta_0 = \bar{Y}_i - \beta_1 \bar{X}_i$

$\beta_0 = \bar{Y} - \beta_1 \bar{X}$

intento 1

$$F_{\beta_1} = 2[Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_i)] \cdot \frac{d[Y - ([Y + B_1 X] + B_1 X]}{d\beta_1}$$

$\Rightarrow$

$$F_{\beta_1} = 2[Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X)] \cdot [0 - [0 + 2X_i]] \Rightarrow$$

$$F_{\beta_1} = 2[Y_i - [(Y_i + B_1 X) + B_1 X] \cdot [-2X] = 0 \Rightarrow$$

$$F_{\beta_1} = 2[0 - 2\beta_1 X][-2X] = 0$$

intento 2

$$F_{\beta_1} = \frac{d}{d\beta_1}\left[Y_i - \left(\left[\bar{y} - \beta_1 \bar{X}\right] + \beta_1 X\right)\right]^2 \Rightarrow$$

$$2\left[Y - \left(\left[\bar{Y} - \beta_1 \bar{X}\right) + \beta_1 X\right)\right] \cdot \left[0 - \left(\left[0 - \bar{X}\right] + \beta_1 X\right)\right] = 0$$

$$\sum\left[Y - \left(\left[\bar{Y} - \beta_1 X\right] + \beta_1 X\right)\right]\left[+\bar{X} - \beta_1 X\right] = 0$$

$$\sum\left[(Y + \bar{X}) - (\bar{Y} + \bar{X}) + (\beta_1 X + \bar{X}) - (\beta_1 \bar{X} + \bar{X})\right.$$

Intento 3

$$F_{\beta_1} = 2[Y-(\beta_0+\beta_1 X)][0-(0+X)]=0$$

$$F_{\beta_1} = 2[Y-(\beta_0+\beta_1 X][X]=0 \Rightarrow$$

$$\sum[(YX)-([\beta_0 X]+[\beta_1 X^2])]=0$$

$$\sum YX - \sum \beta_0 X + \sum \beta_1 X^2 = 0$$

$$\sum Yx = \sum \beta_0 X + \sum \beta_1 X^2 = 0$$

$$\sum YX = \beta_0 \cdot \sum X + \beta_1 \sum X^2$$

$$\sum YX = (\bar{Y}-\beta_1 \bar{X})(\sum X)+(\beta_1 \sum X^2) \Rightarrow$$

$$\sum YX = \bar{Y}\sum(X) - \beta_1 \sum(X) + \beta_1 \sum(X^2) \Rightarrow$$

Y

$$\sum(yx) - \bar{y}\sum x = \beta_1\left[-\sum x + \sum x^2\right]$$

$$\frac{\sum(yx) - \bar{y}\sum x}{\sum(-x + x^2)} = \beta_1 \Rightarrow \frac{1}{-1} \Rightarrow$$

$$\frac{\sum(yx) - \bar{y}\sum x}{\sum(x - x^2)}$$

$$\beta_1 = \frac{\sum(yx) - \sum\bar{y} \cdot \sum x}{\sum(x - x^2)}$$

Pregunta 2

Estimador de la constante *

En el modelo de Regresión Lineal Simple

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2).$$

Calcular el Estimador de Mínimos Cuadrados del parámetro β_0.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - \widehat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i$$

(•) .

$$\widehat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} Y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

( ) ._

$$\frac{\widehat{\beta}_1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - \frac{\widehat{\beta}_1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Intento 2

$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$ / $\varepsilon_i \sim N(0; \sigma^2)$

$\Rightarrow$

$\varepsilon_i = Y_i - \hat{Y}_i$

$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \beta_1 x_i \Rightarrow$

$F(\beta_0; \beta_1; X_i) = Y_i \approx \varepsilon_i^2 = [Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_i)]^2$

$\Rightarrow$

$\frac{\partial F}{\partial \beta_0} = \frac{\partial F}{\partial \beta_1} = 0 \Rightarrow \nabla F$ respecto $\beta_{0;1} \Rightarrow$

$F_{\beta_0} = 2[Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_i)] \cdot [0 - 1 + 0] \Rightarrow$

$F_{\beta_0} = 2[Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_i)][0 - 1] = 0 \Rightarrow$

$\sum [Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i] \cdot -1 = 0 \Rightarrow / \frac{1}{n}$

$\beta_0 - Y_i + \beta_1 X_i = 0 \Rightarrow$

$\beta_0 = \bar{Y}_i - \beta_1 \bar{X}_i$

$\checkmark$ $\beta_0 = \bar{Y} - \beta_1 \bar{X}$

Pregunta 3

Código R para EMC *

Considerar el modelo real

$$Y_i = X_i + \varepsilon_i, \quad X_i \sim U(0,1) \quad \text{y} \quad \varepsilon_i \sim N(0,1)$$

El modelo tentativo será $Y_i = \beta X_i + \varepsilon_i$.

Utiliza tu código de reproducibilidad `set.seed()` y $n = 20$ para hacer un código R que genere los datos siguiendo el modelo real y que calcule el EMC de β.

Por lo tanto, el EMC de β es:

El EMC de beta es: 0.7421

```r
set.seed(137)  # Fijamos la semilla para reproducibilidad

# Tamaño de la muestra
n <- 20

# Generamos los datos según el modelo real
X <- runif(n, min = 0, max = 1)  # X ~ U(0,1)
epsilon <- rnorm(n, mean = 0, sd = 1)  # ε ~ N(0,1)
Y <- X + epsilon

# Ajustamos el modelo de regresión lineal simple
modelo <- lm(Y ~ X)

# Extraemos el coeficiente estimado (EMC de β)
beta_hat <- coef(modelo)["X"]

# Imprimimos el resultado
cat("El EMC de beta es:", beta_hat, "\n")
```

Pregunta 4

Intercepto *

¿Qué representa el intercepto en el modelo de Regresión Lineal Simple?

- (•) El valor de la variable dependiente cuando la variable independiente es cero.
- ( ) El error estándar del modelo.
- ( ) La correlación entre las variables.
- ( ) El valor de la variable independiente cuando la dependiente es cero.
- ( ) La pendiente de la línea.

Pregunta 5

Código R *

Completar el siguiente código R con las instrucciones que sean necesarias para poder calcular los Estimadores de Mínimos Cuadrados (EMC) de los parámetros β_0 y β_1. Es decir, debes incorporar los códigos que necesites para responder. Además, tienes que utilizar el código de reproducibilidad `set.seed()` que te corresponde de acuerdo al listado enviado para este propósito.

```
set.seed() # Aquí debes poner tu código de reproducibilidad
x<-1:10
n<-length(x)
u<-rnorm(n,0,2)
Y<--2+3*x+u
plot(x,Y,pch=19,col="blue",lwd=3)
abline(-2,3,col="red",lwd=3)
```

Por lo tanto, los EMC de β_0 y β_1 son, respectivamente:

ta0 es: -0.3662   El EMC de beta1 es: 2.902

```
set.seed(137)  # Fijamos la semilla para reproducibilidad

# Generamos los datos
x <- 1:10
n <- length(x)
u <- rnorm(n, 0, 2)
Y <- -2 + 3*x + u

# Visualizamos los datos y la recta teórica
plot(x, Y, pch = 19, col = "blue", lwd = 3)
abline(-2, 3, col = "red", lwd = 3)

# Ajustamos el modelo de regresión lineal
modelo <- lm(Y ~ x)

# Extraemos los coeficientes estimados (EMC)
coeficientes <- coef(modelo)
beta0_hat <- coeficientes["(Intercept)"]
beta1_hat <- coeficientes["x"]

# Imprimimos los resultados
cat("El EMC de beta0 es:", beta0_hat, "\n")
cat("El EMC de beta1 es:", beta1_hat, "\n")
```

Pregunta 6

Residuos *

¿Cuál es la interpretación práctica de los residuos en un modelo de Regresión Lineal Simple?

- ◯ Son los puntos donde las variables no son lineales.
- ◉ Representan el error entre los valores observados y los estimados.
- ◯ Son los coeficientes del modelo.
- ◯ Representan la correlación entre las variables.
- ◯ Son los valores predichos por el modelo.

Pregunta 7

Pendiente de la Recta *

¿Qué significa un coeficiente de pendiente β_1 igual a cero en un modelo de Regresión Lineal Simple?

- ◯ La variable independiente explica completamente a la dependiente.
- ◯ Todos los puntos caen exactamente sobre la línea.
- ◉ No existe relación entre la variable independiente y la dependiente.
- ◯ La relación entre las variables es no lineal.
- ◯ La varianza del modelo es infinita.

Pregunta 8

Estimador de la varianza *

El modelo de Regresión Lineal Simple escrito en forma matricial está dado

$$Y = X\beta + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N_n(0, I_n\sigma^2),$$

donde $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}$, $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$,

N_n es la distribución normal multivariada y I_n es la matriz identidad de orden n .

Calcular el Estimador del parámetro σ^2.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i + \beta_0 + \beta_1 x_i)^2}{n}$$

- ( ) .

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_1 - \beta_0 x_i)^2}{n}$$

- ( ) .

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 + \beta_1 x_i)^2}{n}$$

- ( ) .

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2}{n}$$

- (•) .

LUN MAR MIE JUE VIE SAB DOM FECHA:

$\odot$ = Producto punto / $\boxtimes$ = Producto cruz /

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \sim N(\emptyset; \sigma^2 \cdot I_n)$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$N = \left(\begin{bmatrix} \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \\ \vdots \end{bmatrix} ; \sigma^2 \cdot I_n = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \dots \\ \emptyset & \sigma^2 & \emptyset & \emptyset & \dots \\ \emptyset & \emptyset & \sigma^2 & \emptyset & \dots \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \sigma^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \right)$$

Distribución conjunta de $\varepsilon = f(\varepsilon) \Rightarrow$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \sim N(0; \sigma^2 \cdot I_n)$$

$$N = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} ; \sigma^2 \cdot I_n = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sigma^2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sigma^2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \right)$$

Distribución conjunta de $\varepsilon = f(\varepsilon) \Rightarrow$

$$f(\varepsilon) = f(\varepsilon_1; \varepsilon_2; \varepsilon_3; \dots; \varepsilon_n) = \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma^2}} \cdot e^{\left[\frac{-1}{2\sigma^2} \cdot \varepsilon_i\right]} \right]$$

$$\prod_{i=1}^{n} (\dots) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \cdot e^{\left(\frac{-1}{2\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} [\varepsilon_i] \right)} =$$

$x^t = x^t$

$$\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{\left(\frac{-1}{2\sigma^2} \cdot \{\varepsilon^t \cdot \varepsilon\}\right)}$$

$$Y = X\beta + \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = Y - X\beta$$

$$f(\ldots) = \left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{\left[\frac{-1}{2\sigma^2} \cdot (Y - X\beta)^t \cdot (Y - X\beta)\right]}$$

$\downarrow$

$$f(Y;\sigma;\beta) \Rightarrow Y \in \mathbb{R}^n \quad \beta \in \mathbb{R}^n \quad \sigma > 0$$

$$f(Y;\sigma;\beta) > 0$$

$$f > 0 \rightarrow \underset{min}{max} = \log(f > 0) \rightarrow \underset{min}{max} = \ln(f > 0) \rightarrow \underset{min}{max}$$

$\Rightarrow$

$-\frac{n}{2}$ $(Y - X\beta)^t (Y - X\beta)$

$$Y = X\beta + \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = Y - X\beta$$

$$f(\dots) = \left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{\left[\frac{-1}{2\sigma^2} \cdot (Y - X\beta)^t \cdot (Y - X\beta)\right]}$$

$\downarrow$

$f(Y;\sigma;\beta) \Rightarrow Y \in \mathbb{R}^n$ / $f(Y;\sigma;\beta) > 0$

$\beta \in \mathbb{R}^n$

$\sigma > 0$

$f > 0 \to \underset{min}{max} = Log(f > 0) \to \underset{min}{max} = ln(f > 0) \to \underset{min}{max}$

$\Rightarrow$

$$ln\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)^{-\frac{n}{2}} - \frac{1}{2\sigma^2}(Y - X\beta)^t(Y - X\beta)$$

$$-\frac{n}{2} ln\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right) - \frac{1}{2\sigma^2}(Y - X\beta)^t(Y - X\beta)$$

$$(\mathbb{Y} - \mathbb{X}\beta) = \begin{bmatrix} y_1 - \beta_0 - \beta_1 x_1 \\ y_2 - \beta_0 - \beta_1 x_2 \\ y_3 - \beta_0 - \beta_1 x_3 \\ \cdots \\ y_m - \beta_0 - \beta_1 x_m \end{bmatrix}$$

$$(A \circ B)^t = B^t \circ A^t$$

$$(\mathbb{Y} - \mathbb{X}\beta)^t = \mathbb{Y}^t - \beta^t \circ \mathbb{X}^t$$

$$(\mathbb{Y} - \mathbb{X}\beta)^t \circ (\mathbb{Y} - \mathbb{X}\beta) =$$

$$\underbrace{\mathbb{Y}^t \cdot \mathbb{Y}}_{\text{Escalar}} - \underbrace{\mathbb{Y}^t \cdot \mathbb{X} \cdot \beta - \beta^t \mathbb{X}^t \cdot \mathbb{Y}} - \underbrace{\beta^t \mathbb{X}^t \cdot \mathbb{X}\beta}_{\text{Escalar}}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{Y}^t \cdot \mathbb{X}\beta = \beta^t \mathbb{X}^t \cdot \mathbb{Y} \Rightarrow$$

$$Y_{(1\times n)} \cdot X_{(n\times 2)} \cdot \beta_{(2\times 1)}$$

$$\vee$$

$$XY_{(1\times 2)} \cdot \beta_{(2\times 1)}$$

$$\vee$$

$$YX\beta_{(1\times 1)} = \text{Escalon}$$

$$f = -\frac{n}{2} \ln(\sqrt{2\pi\sigma^2}) - \frac{1}{2\sigma^2} \cdot [Y'Y - 2Y'X\beta - \beta'X'X\beta]$$

$$f' \,/\, \frac{\partial}{\partial\beta} \quad i \; \frac{\partial}{\partial\sigma^2}$$

FECHA: 03/12/2024

$$-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y'\cdot Y-2Y'X\beta+\beta'X'X\beta\right)\Big/\frac{d}{d\beta};\frac{d}{d\sigma^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\Rightarrow 0-\frac{1}{2\sigma^2}\left(0-2Y'X\cancel{\beta}+2X'X\beta\right)$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial\beta}=\frac{1}{2\sigma^2}\left(-2Y'X\cancel{\beta}+2X'X\beta\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\rightarrow\frac{\cancel{2}n}{2}\cdot\frac{1}{2\pi\sigma^2}\cdot 2\pi-\frac{1}{2\sigma^4}(Y-X\beta)^t(Y-X\beta)=0$$

$$\Rightarrow$$

$$X'X\beta=Y'X\quad/\ (X'X)^{-1}\Rightarrow$$

$$I\beta=(Y'X)(X'X)^{-1}\Rightarrow$$

$$\beta=(Y'X)(X'X)^{-1}$$

$$\frac{n}{2\sigma^2} - \frac{(Y - X\beta)'(Y - X\beta)}{2\sigma^4} = 0$$

$$\frac{n}{2\sigma^2} = +\frac{(Y - X\beta)'(Y - X\beta)}{2\sigma^4}$$

$$\frac{n(\cancel{2}\sigma^{\cancel{4}\,2})}{\cancel{2}\,\cancel{\sigma^2}} = +(Y - X\beta)'(Y - X\beta)$$

$$n\sigma^2 = (Y - X\beta)'(Y - X\beta)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}(Y - X\beta)'(Y - X\beta)$$

$$\sigma^2 = \frac{\|Y - X\beta\|^2}{n} \Rightarrow = \frac{\|\varepsilon\|^2}{n}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_i = Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i \Rightarrow \sigma^2 = \sum (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)$$