PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA PARA INGENIEROS

IRWIN MILLER
JOHN E. FREUND

EDITORIAL REVERTÉ

PROBABILIDAD Y ESTADISTICA PARA INGENIEROS

IRWIN MILLER

JOHN E. FREUND

Profesores de Matemáticas
de la Universidad de Arizona

EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · México

Título de la obra original:
Probability and Statistics for Engineers

Edición original en lengua inglesa publicada por:
Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA

Edición en papel:
© Editorial Reverté, S. A., 1963
ISBN: 978-84-291-5094-0 (España)
ISBN: 978-966-6708-30-7 (México)

Edición e-book (PDF):
© Editorial Reverté, S. A., 2021
ISBN 978-84-291-9123-3

Versión española por:
Ing. Carlos Ordóñez Romero R.

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15, Local
08029 Barcelona
Tel: (34) 93 419 33 36
e-mail: reverte@reverte.com
http://www.reverte.com

REVERTÉ EDICIONES, S.A. DE C.V.

PREFACIO

Este libro se ha escrito para un curso introductorio en Cálculo de Probabilidades y Estadística para estudiantes de ingeniería y ciencias físicas. Se ha experimentado reiteradamente tanto en cursos para estudiantes universitarios y como en cursos de entrenamiento para ingenieros. Los autores han visto que el material de este libro se puede dar en dos semestres o en tres trimestres cuando los cursos son de tres sesiones semanales. Sin embargo, seleccionando los temas, el libro puede servir también como texto para cursos más cortos, dirigidos ya sea a la teoría o a las aplicaciones.

Los capítulos 2, 3, 4 y 7 dan una breve, pero rigurosa, introducción a la teoría de la Estadística y, junto con parte del material de los capítulos 5 y 16, son suficientes para un semestre de introducción a las Matemáticas de la Probabilidad y de la Estadística. Los capítulos 6, 8, 9, 10 y 11 contienen el material común de los métodos abreviados y no paramétricos. Los capítulos 12, 13 y 14 comprenden una introducción a algunos de los métodos normales, y más avanzados, de la estadística experimental, y los capítulos 5, 15 y 16 presentan aplicaciones especiales, algunas muy recientes, que se han venido haciendo cada vez más importantes en los años recientes.

Los conocimientos matemáticos que debe tener el lector son los de un curso anual de Cálculo; éste se requiere principalmente para los capítulos 4 y 7, que tratan de la teoría básica de las distribuciones en el caso continuo, para los capítulos 5 y 16 que tratan las aplicaciones especiales (procesos aleatorios, fiabilidad, etc.) y para los métodos de mínimos cuadrados de los capítulos 12 y 13. El tratamiento de la probabilidad en el capítulo 2 es moderno en el sentido de que está basado en la teoría elemental de conjuntos.

Los autores desean expresar su agradecimiento a la D. Van Nostrand Company por permitir reproducir el material de la tabla II, a Sir Ronald A. Fisher, F. R. S., Cambridge, y a Messrs. Oliver and Boyd, Ltd., Edimburgh, por permitir la reimpresión de la tabla IV de sus libros, *Statistical Methods for Research Workers;* al profesor E. S. Pearson y a las compañías *Biometrika* por permitir la reproducción del material de las tablas V, VI y VIII; a Donald B. Owen y Adisson-Wesly, Inc., por permitir la reproducción de una parte de la tabla de números aleatorios de su *Handbook of Statistical Tables:* a Frank J. Massey Jr., y al *Journal of the American Statistical Association* por permitir la reproducción del material de la tabla IX; a D. B. Duncan, H. L. Harter, y *Biometrics* por la reproducción de la tabla X; a la American Society for Testing Materials por la reproducción de la tabla XI; y a la McGraw-Hill Book Company por la reproducción de la tabla XII.

Los autores desean expresar su agradecimiento también al equipo editorial de Prentice-Hall, Inc., por su amable cooperación en la producción de este libro, a las diferentes secretarias que ayudaron a escribir el manuscrito, y sobre todo a sus esposas por no quejarse demasiado por las exigencias de sus esposos durante el tiempo en que se escribió este libro.

IRWIN MILLER y JOHN E. FREUND

CONTENIDO

14 EXPERIMENTACION FACTORIAL, 274

15 APLICACIONES A LA GARANTIA DE CALIDAD, 313

16 APLICACIONES A LA FIABILIDAD Y A PRUEBAS DE DURACION DE VIDA, 338

1 INTRODUCCION

1.1 La moderna estadística

El origen de la estadística está ligado a dos ramas del interés humano muy diferentes: los juegos de azar y lo que en la actualidad se llama "ciencia política". Los estudios hechos a mediados del siglo XVIII sobre probabilidades, condusieron a la teoría matemática de los errores en las medidas, y las "leyes de los errores" derivadas de ella fueron la base de lo que hoy es la Estadística matemática. En el mismo siglo, el análisis de las unidades políticas fue el punto de partida de la *Estadística descriptiva.* Al principio, ésta se limitaba, simplemente a la presentación de datos en tablas y gráficas; posteriormente amplió sus objetivos al considerar descripciones numéricas que condensaban las tablas y gráficas mencionadas.

En décadas recientes, el crecimiento de la Estadística se ha dejado sentir en la mayor parte de las actividades humanas y el hecho más importante de su crecimiento ha sido el paso de la Estadística descriptiva a los métodos de *inferencia estadística* o *Estadística inductiva.* La inferencia estadística trata de obtener conclusiones generales a partir de los datos que se deducen de muestras; así, se aplica a problemas tales como el de hacer el *cálculo estimativo* del consumo medio de combustible de un proyectil a partir de los datos obtenidos en algunos vuelos de prueba, el de *investigar* la demanda de un producto por medio de ensayos hechos con muestras del mismo y el de *predecir* la dureza de un metal, partiendo de los datos obtenidos de las características de los productos resultantes de un proceso anterior de producción.

Las generalizaciones que se hacen en la inferencia estadística van más allá de la información contenida en un conjunto de datos. Al hacer inferencias inductivas de este tipo, se debe proceder con mucha cautela. Se ha de estudiar hasta dónde se puede llegar con estas generalizaciones, a partir de un conjunto de datos, si realmente son todos razonables y justificables, si será prudente esperar hasta reunir nuevos datos, etc .En efecto, algunos de los problemas más importantes de inferencia estadística se refieren a la evaluación de los riesgos y las consecuencias a que se está expuesto, al hacer generalizaciones a partir de los datos de muestras. Esto incluye la evaluación de las probabilidades de tomar decisiones erróneas, la posibilidad de hacer predicciones incorrectas y la de obtener estimaciones que se salgan de los límites permisibles.

En años recientes, se han hecho intentos para tratar todos estos problemas dentro de la estructura de una teoría unificada llamada *Teoría de la decisión.* Aunque esta teoría tiene muchas ventajas conceptuales y teóricas, existen algunos problemas en su aplicación difíciles de solventar. Para la comprensión de estos problemas, debemos tener en cuenta que, *independientemente de la objetividad con que hayamos planeado un experimento o una investigación, es imposible eliminar todos los elementos subjetivos.* Basar un experimento (por ejemplo, la determinación de un calor específico) en 5, 12, 25, o más, medidas, es, al menos parcialmente, una decisión subjetiva. También intervienen invariablemente factores subjetivos en el proyecto de un equipo, la selección de personal, o en la manera de *cómo* se ha de formular una hipótesis y la alternativa que va a venir para contrastar la primera. Este importante problema se discutirá con algún detalle en el capítulo 8). También entra un elemento de subjetividad siempre que definimos términos tales como "bueno" o "mejor", en relación con los criterios de decisión —por ejemplo, en el capítulo 12, trataremos el caso de la línea recta que "mejor" ajusta un conjunto dado de pares de datos. Sobre todo, los juicios subjetivos son inevitables cuando se trata de establecer valores efectivos sobre los distintos riesgos que uno mismo corre. En otras palabras, es imposible ser completamente objetivo al especificar "premios" por estar acertado (o cerca de ello) y "castigos" por estar equivocado (o muy alejado de lo correcto). Si se solicitara de un científico un juicio sobre la seguridad de una pieza de un equipo, ¿cómo podría dar un valor exacto de la posibilidad de no haber cometido un error, si tal error pudiera llevar a la pérdida de vidas humanas?

Ahora bien, independientemente de que la inferencia estadística se trate o no, desde el punto de vista de la teoría de la decisión, depende en gran medida del cálculo de probabilidades. Llegaremos al contenido de la Estadística como una ciencia, desarrollando cada idea estadística en lo posible, a partir de un fundamento probabilístico, y aplicando cada idea a problemas de Física o Ingeniería tan pronto como lo hayamos desarrollado. Los métodos que usaremos para proponer y resolver estos problemas, se pueden denominar *métodos clásicos,* por no tener en cuenta, *formalmente,* los factores subjetivos mencionados antes. Sin embargo, deberemos recordar continuamente al lector que dichos factores existen y, siempre que sea posible, indicaremos la influencia que tienen en la decisión final. La subjetividad juega un papel muy importante en la elección entre varios métodos estadísticos, o entre fórmulas que se hayan de emplear en un caso dado, en la decisión del tamaño de una muestra, en la especificación de las probabilidades que se pueden aceptar en los errores posibles, etc. Este método de exponer la Estadística presenta sus problemas en la forma que con tanto éxito ha contribuido al desarrollo de la Ingeniería, así como al de las Ciencias naturales y sociales en los últimos años.

1.2 Estadística e ingeniería

Hay pocas actividades en las que el impacto del reciente progreso de la Estadística se haya dejado sentir con más fuerza que en la Ingeniería y la dirección industrial. En efecto, es difícil sobreestimar las contribuciones de la Estadística a los problemas de producción, al uso eficiente de materiales y mano de obra, a la investigación básica y al desarrollo de nuevos productos. Lo mismo que en otras ciencias, la Estadística se ha convertido en una herramienta vital para el ingeniero, y por consiguiente, se han hecho necesarios ciertos conocimientos de Estadística sin los que el ingeniero no podría apreciar, entender o aplicar gran parte del trabajo desarrollado en su campo.

En este texto, pondremos especial atención en las aplicaciones a la Ingeniería, pero sin dejar de referirnos a otros temas, dando así al lector una idea de la gran generalidad de la mayoría de las técnicas estadísticas. Veremos que el mismo método estadístico empleado para determinar el coeficiente de dilatación de un metal, sirve también para saber el tiempo medio que tarda una secretaria en hacer un trabajo dado, o la longitud media de una iguana adulta. Análogamente, el método empleado para comparar las características de dos motores sirve para comparar la eficacia de dos métodos de enseñanza, las cualidades de dos fertilizantes o el interés del público hacia dos tipos de programas de televisión.

En contraste con la generalidad de la mayoría de las técnicas estadísticas, existen también casos específicos en los que por las circunstancias de los campos de aplicación es necesario desarrollar métodos especiales. Así la predicción económica ha traído como consecuencia la creación de métodos especiales usados en el análisis de series de datos financieros; el problema médico de establecer las dosis críticas, ha conducido a lo que se ha llamado "método del probit"; para problemas de "tests" psicológicos, se ha empleado el análisis de factores, etc. En lo que respecta a la Ingeniería, estudiaremos tres campos que han requerido el empleo de técnicas especiales. El capítulo 5 contiene una introducción a la *Investigación operativa,* una nueva tecnología que se caracteriza por la aplicación de técnicas científicas (incluyendo Cálculo de probabilidades y Estadística) a los problemas referentes a las operaciones de un "sistema" considerado como un todo. Este método se aplica a la conducción de una guerra, a la dirección de una empresa, a la manufactura de un producto y a otros muchos casos. Por supuesto, se ha de hacer notar que este capítulo, así como los dos que se mencionan en el próximo párrafo, son únicamente una introducción a los temas tratados en ellos. Existen libros dedicados enteramente a cada uno de los temas.

En el capítulo 15, trataremos someramente los métodos especiales empleados en los problemos de *estabilidad de la calidad,* incluyendo el problema de controlar la calidad (establecerla y mantenerla) en la producción en masa, la determinación de límites de tolerancia, y algunos ejemplos de inspección de muestras. Finalmente, en el capítulo 16, presentaremos algunas técnicas especiales elaboradas para satisfacer las necesidades de seguridad y confianza requeridas en los productos extremadamente complejos de la tecnología de la era del espacio.

2 PROBABILIDAD

2.1 Espacios de muestras

En Estadística, recibe el nombre de *experimento* cualquier proceso de observación. Un experimento puede consistir, por ejemplo, en el simple proceso de observar si una conexión soldada está rota o no lo está; también puede consistir en determinar cuál es la proporción de un conjunto de amas de casa (considerado como muestra) que prefiere la marca X a la marca Y; o bien un experimento mucho más complicado, consiste en determinar la masa del electrón. Los resultados de cualquiera de estas observaciones, ya se trate de simples respuestas, "sí" o "no", o de lecturas de instrumentos, etc., se denominan *resultados* de los experimentos respectivos. La totalidad de los resultados posibles de un experimento recibe el nombre de *espacio de muestras* o *espacio muestral* del experimento y se denota por la letra S.

Cuando se trata de problemas en los cuales se presentan incerteras ligadas a distintos resultados, es conveniente considerar los resultados del experimento, *elementos* del espacio muestral, como puntos de un espacio geométrico de una o varias dimensiones. Por ejemplo, si un experimento consiste en observar una conexión soldada, ésta puede estar en buen estado (lo que denotaremos con el número 0), o puede estar rota (lo que denotaremos con el número 1) y entonces, el espacio de muestreo es unidimensional, como se ve en la figura 2.1. Si en un circuito hay dos conexiones soldadas, habrá cuatro casos posibles, como se ve en el espacio de muestreo bidimensional de la figura 2.2. En esta representación, cada coordenada corresponderá a una de las uniones y pondrán tomar los valores de 0 ó 1, En general, si un circuito tiene n conexiones soldadas, habra 2^n casos posibles, que se representarán como puntos en un espacio n-dimensional. Es interesante notar que los espacios de muestreo usados en estos ejemplos para describir la inspección de conexiones soldadas, sirven igualmente para analizar los resultados de otros experimentos; por ejemplo, el número de caras obtenidas al tirar n veces una moneda, marcando ahora las "cruces" por 0 y las "caras" por 1.

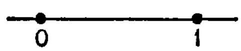


Fig. 2.1. Espacio de muestreo unidimensional

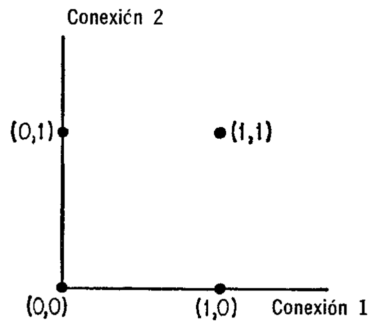


Fig. 2.2. Espacio de muestreo bidimensional

Fig. 2.3. Espacio de muestreo unidimensional

La configuración geométrica empleada para representar los resultados de un experimento no es necesariamente única. En efecto, en el problema de las dos conexiones soldadas se hubiera podido considerar como resultado el número total de conexiones rotas, y los resultados serían 0, 1 y 2, tal como se indica en el espacio de muestras unidimensional de la figura 2.3. El punto 1 de esta figura corresponde a los *dos* puntos (1, 0) y (0, 1) de la figura 2.2. Análogamente, para n conexiones, el punto 1 de un diagrama análogo al de la figura 2.3, corresponderá a los n puntos (1, 0, 0,. . ., 0), (0, 1, 0,. . ., 0),. . ., (0, 0,. . ., 0, 1) de un diagrama análogo al de la figura 2.2). Generalmente, es deseable el empleo de espacios muestrales cuyos elementos no se puedan "subdividir", esto es, los elementos individuales de tal espacio no deben representar dos o más resultados que se puedan diferenciar en alguna forma. En otras palabras, se preferirán espacios muestrales del tipo de los de las figuras 2.1 y 2.2 a los del tipo de la figura 2.3.

Con frecuencia, es conveniente clasificar los espacios muestrales de acuerdo con el *número de elementos* que contienen. Los espacios de las figuras 2.1, 2.2 y 2.3, tienen, respectivamente, 2, 4 y 3 elementos, y todos son espacios muestrales *finitos*. Otros ejemplos de espacios finitos son: el usado para representar las tiradas de un par de dados (tiene 36 elementos), el usado para representar la elección de un presidente y un vicepresidente entre los 25 socios de un club (tiene 600 elementos), y el usado para representar la clasificación de cinco aparatos de televisión con las calificaciones de "bueno", "regular" y "malo" (tiene $3^5 = 243$ elementos, como se explicará más adelante).

Para presentar un problema en el que no es suficiente un espacio muestral finito, consideremos que una persona inspecciona conexiones soldadas y que nos interesa saber el número de los que tendrá que inspeccionar antes de hallar la primera conexión rota. Esta podrá ser la primera, la segunda,. . . , la centésima,. . . , la millonésima, o más. Como no sabemos hasta qué valor se llegará en un ejemplo como éste, debemos tomar para nuestro espacio de muestras el conjunto total de los números naturales. El número de elementos de este espacio muestral es *infinito numerable.*

Damos un paso más adelante, si se trata de medir la resistencia en ohms de una conexión soldada, pues el espacio de muestras estará formado por todos los puntos de una escala continua (un intervalo determinado de la recta numérica real). Los elementos de este espacio no se pueden contar, esto es, no se puede establecer una correspondencia biunívoca con el conjunto de números naturales. En general, se llamará espacio muestral *discreto* al que tenga un número finito o una infinidad numerable de elementos. Si los elementos (puntos) de un espacio muestral constituyen un continuo; por ejemplo, todos los puntos de la recta o de un segmento de recta, o todos los puntos de un plano, etc.; se dice que el espacio es *continuo.* En el resto de este capítulo, sólo consideraremos espacios muestrales discretos y especialmente finitos.

En muchas ocasiones, será difícil, o al menos pesado, determinar por enumeración directa el número de elementos de un espacio finito de muestras. Para ilustrar un método que a veces simplifica este trabajo, consideremos el siguiente problema referente al lanzamiento de un cohete compuesto de tres subsistemas: propulsión, dirección y fuselaje. Supongamos que P_1, P_2 y P_3 representan las calificaciones de perfecto, bueno y malo, respectivamente, al comportamiento del sistema de propulsión; que G_1 y G_2 son las notaciones para indicar que el proyectil responde, o no responde, a los mandos; y que A_1, A_2 y A_3 representan respectivamente, que el fuselaje no sufre daños, que una o más superficies de control resulta deteriorada, y que el fuselaje se rompa. Los resultados posibles se pueden representar ahora por medio de un diagrama ramificado como el de la figura 2.4. Siguiendo de izquierda a derecha una trayectoria a lo largo del diagrama, obtendremos uno de los resultados posibles, es decir, uno de los elementos particulares del espacio muestral de nuestro experimento. Evidentemente, el árbol del diagrama tiene 18 ramas diferentes, por lo que el espacio muestral tiene 18 elementos. Hubiéramos podido determinar también este número notando que hay tres ramas P, que cada una de éstas tiene dos ramas G, y que cada G tiene, a su vez, tres ramas A. Entonces, habrá $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ combinaciones de ramas (o de trayectorias). Este resultado se puede generalizar por medio del siguiente teorema:

Teorema 2.1. Si los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ contienen respectivamente $n_1, n_2, \ldots, n_k$ elementos, entonces hay $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ formas diferentes de seleccionar, en primer lugar, un elemento de A_1, después, un elemento de $A_2, \ldots$, y, finalmente, un elemento de A_k.

Este teorema se puede probar construyendo un diagrama ramificado similar al de la figura 2.4. Para ilustrar el uso de este teorema, nos referiremos nuevamen-

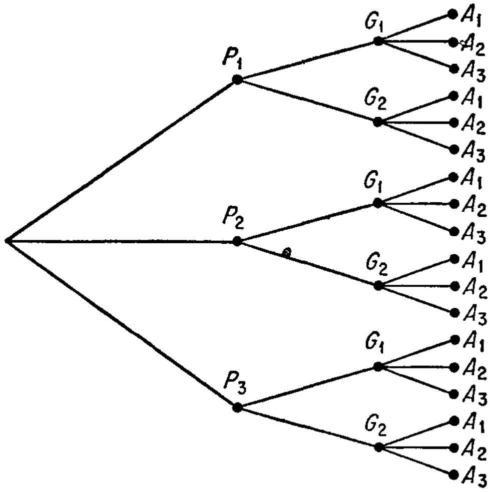


Fig. 2.4. Diagrama ramificado

te a dos de los ejemplos de la página 7. Un club de 25 miembros puede hacer la elección de su presidente de 25 maneras distintas (es decir, cada uno de los socios) y, por consiguiente, la elección del vicepresidente tendrá 24 posibilidades distintas; luego, la elección total se podrá hacer de $25 \cdot 24 = 600$ formas diferentes. En el ejemplo de los cinco equipos de televisión del problema que tratamos en párrafos anteriores, cada uno de los aparatos se puede considerar bueno, regular o malo, por lo que en total habrá $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$ maneras distintas de clasificarlos. Nótese que, si hubiéramos estado interesados únicamente en conocer cuántos televisores quedan dentro de cada una de las categorías, el espacio muestral contendría sólo 21 elementos (ver el problema 5 de la página 12).

2.2 Sucesos

Las probabilidades están siempre asociadas al hecho de que ocurra, o no ocurra, un suceso; por ejemplo, el suceso de que en una muestra de 50 bolas de cojinetes de bolas, se encuentren 3 defectuosas; el de que una cubierta de coche dure por lo menos 20.000 millas antes de ser recauchutada; el de que en un panel telefónico se reciban 8 llamadas en un cierto periodo de tiempo; etc. Entonces, en relación con las probabilidades, se considerará como un suceso, a un resultado individual o a un conjunto de resultados de un experimento. (El suceso de obtener exactamente cero caras al tirar cinco veces una moneda, es un ejemplo de un resultado individual, mientras que el de obtener una cara en el mismo número de tiradas es un ejemplo de un conjunto de cinco resultados.) En otras palabras, *consideraremos como suceso a un subconjunto de un adecuado espacio muestral.* Para ilustrar mejor esto, supongamos que un equipo está formado por dos "sub-equipos", que, a su vez, contienen 4 componentes el primero y 3 el segundo. Si nos

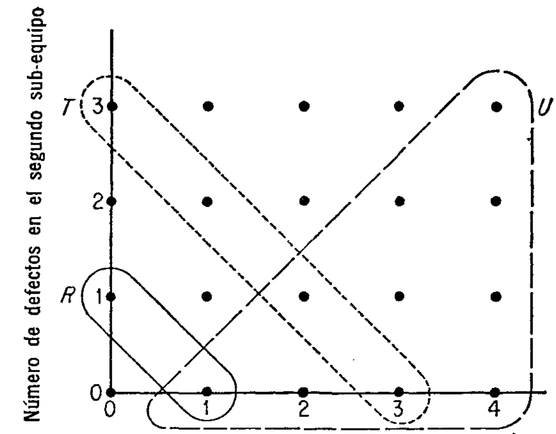


Fig. 2.5. Sucesos en un espacio de muestreo

interesamos exclusivamente del número total de componentes defectuosas de cada subequipo (sin precisar cuáles de las componentes son las defectuosas), el número de elementos del espacio muestral es $5 \cdot 4 = 20$, que se pueden situar en un espacio bidimensional, como se ve en la figura 2.5.

Designemos ahora por R el suceso de que el equipo completo tenga una sola componente defectuosa, por T el suceso en que en el equipo se presenten exactamente tres componentes defectuosas, y por U el suceso de que el primer subequipo tenga más componentes defectuosas que el segundo. Los elementos del espacio muestral que corresponden a estos tres sucesos se indican en la figura 2.5 por los conjuntos de puntos limitados por una línea continua, una punteada y una de trazos respectivamente. Nótese que R y T no tienen elementos comunes, o sea, se trata de sucesos que *mutuamente se excluyen.*

En muchos problemas de Cálculo de probabilidades nos interesarán sucesos que son, a su vez, combinaciones de dos o más sucesos. Por ejemplo, en el caso anterior, nos puede interesar el suceso de que el equipo completo tenga 1 ó 3 componentes defectuosas, o el suceso de que el equipo completo tenga tres componentes defectuosas y al mismo tiempo que el primer subequipo tenga más componentes defectuosas que el segundo. Para tratar tales situaciones, definiremos la *unión* y la *intersección* de dos conjuntos. Formalmente, si A y B son dos sucesos cualesquiera del espacio S, su *unión*, $A \cup B$, es el subconjunto de S que contiene todos los elementos que están en A, en B, o en ambos. La *intersección*, $A \cap B$, es el subconjunto de S que contiene todos los elementos que están a la vez en A y B. Volviendo ahora a nuestro ejemplo, vemos que $R \cup T$ contiene los elementos:

$$(0,1),\quad (0,3),\quad (1,0),\quad (1,2),\quad (2,1),\quad (3,0)$$

mientras que $R \cap T$ no tiene elementos. Denotando por $\varnothing$ al *conjunto vacío* o *conjunto nulo*, tendremos $R \cap T = \varnothing$, que es la forma matemática de indicar que R y T son mutuamente excluyentes. Notemos también que $R \cap U$ tiene un solo elemento (1, 0) y que $T \cap U$ contiene los elementos (2, 1) y (3, 0).

Finalmente, nótese que los elementos (0, 0), (0, 1), (1, 1), (0, 2), (1, 2), (2, 2), (0, 3), (1, 3), (2, 3) y (3, 3) pertenecen a S, pero no a U. El subconjunto formado por estos 10 elementos se llama *complementario* de U con respecto a S y se designa por U'. En general, el complementario A' de un conjunto A en un espacio muestral S, es el conjunto formado por todos los elementos de S que no son elementos de A. El complementario de S con respecto a sí mismo es el conjunto nulo, o sea, $S' = \varnothing$.

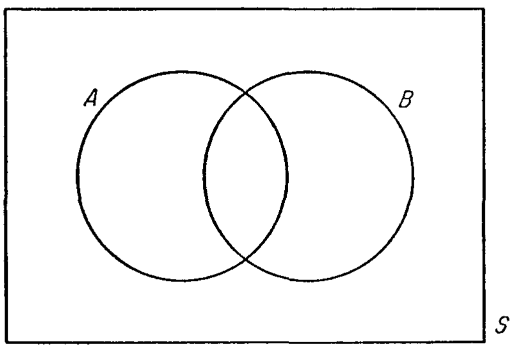
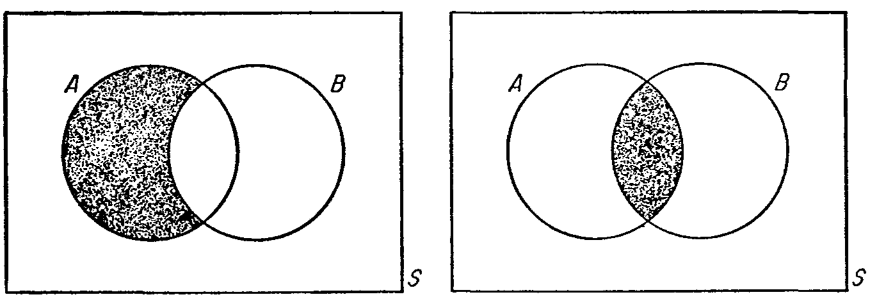


Fig. 2.6. Diagrama de Venn



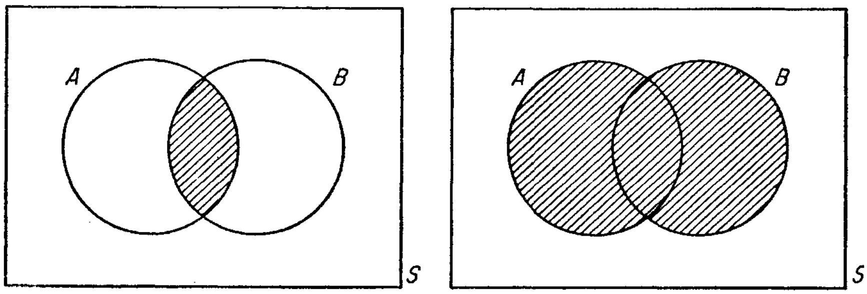
(a) A es un subconjunto de B (b) A y B son mutuamente excluyentes

Figura 2.7

Los espacios muestrales y los sucesos y, en particular, las relaciones entre sucesos, se pueden representar gráficamente por medio de los *diagramas de Venn*, como los mostrados en las figuras 2.6, 2.7 y 2.8. El espacio muestral S se representa por un rectángulo, mientras que los subconjuntos o sucesos, por círculos, partes de círculos o combinaciones de ambos.

Por ejemplo, la figura 2.7(a) nos indica la relación "A es un subconjunto de B", y la 2.7(b) "A y B son disjuntos".

Las operaciones $\cap$ y $\cup$ para conjuntos se pueden representar por diagramas de Venn, como se ve en la figura 2.8. Las operaciones con conjuntos que hemos



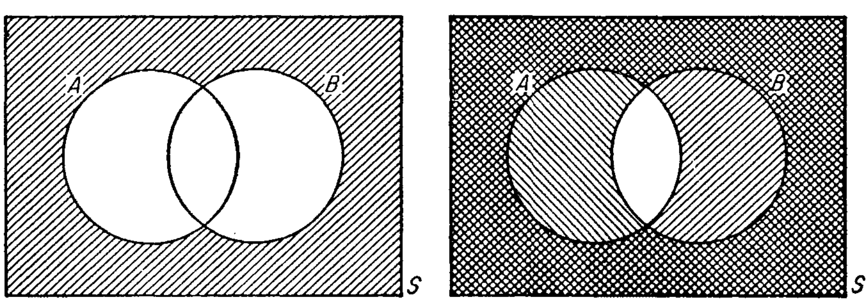
(a) $A \cap B$ (b) $A \cup B$

Fig. 2.8 Operaciones con conjuntos

establecido, unidas a axiomas apropiados, dan lugar al álgebra de conjuntos, o álgebra Boole, como también se denomina. No haremos un estudio formal de la misma, pero sí justificaremos, con ayuda de los diagramas de Venn, algunos teoremas que se necesitan en el desarrollo del libro. Como un ejemplo, demostraremos

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

que expresa que el complementario de la unión de dos conjuntos es igual a la intersección de sus respectivos complementarios. Notemos, ante todo, que la región sombreada de la figura 2.9(a) representa el conjunto $(A \cup B)'$ (compárese con el de la figura 2.8(b)). La región cuadriculada de la figura 2.9(b) se obtuvo som-



(a) $(A \cup B)'$ (b) $A' \cap B'$

Fig. 2.9 $(A \cup B)' = A' \cap B'$

breando la región que representa A' con líneas en una dirección y, la que representa B', con líneas en dirección opuesta. Esta región cuadriculada representa, entonces, la intersección de A' y B', y se puede ver que es idéntica a la región sombreada de la figura 2.9(a).

EJERCICIOS

1. Un fabricante de cubiertas de automóvil desea probar cuatro tipos de cubiertas con dibujos diferentes en tres clases diferentes de superficies de carreteras y a cinco velocidades distintas. ¿Cuántas carreras de prueba se deberán hacer?
2. Un experimentador tiene 4 recubrimientos protectores diferentes para aplicar a ambos lados de una lámina de acero. Determinar de cuántos modos puede recubrir ambos lados de la lámina si:
   (a) los dos lados de la lámina se deben cubrir con el mismo material.
   (b) los dos lados se pueden recubrir, sin que esto sea necesario, con el mismo material.
   (c) ambos lados se deben cubrir con diferentes materiales.
3. Un experimento consiste en tirar un dado y después lanzar una moneda si, y sólo si, en el dado ha salido alguno de los números nones (1, 3 y 5). Dibujar un diagrama ramificado y contar el número de casos posibles.
4. Construir un diagrama ramificado para determinar el número de formas en que se puede tirar una moneda 4 veces seguidas, de tal manera que, a lo largo de la serie de tiradas, el número de caras sea siempre mayor o igual al número de cruces.
5. Enumerando todos los casos posibles, verificar la afirmación de la página 8, de que hay 21 casos distintos, si en el ejemplo considerado sólo nos interesa conocer cuántos de los cinco aparatos de televisión se ajustan a cada una de las tres especificaciones.
6. En cada uno de los experimentos siguientes, decidir cuándo sería apropiado usar un espacio de muestreo finito, numerable o continuo:
   (a) Uno de los 12 vicepresidentes de una compañía va a ser elegido presidente.
   (b) Se va a medir experimentalmente el coeficiente de dilatación de cierto tipo de ladrillos refractarios.
   (c) Medidas de la intensidad de radiación por medio de un contador Geiger.
   (d) Un policía mide el contenido de alcohol en la sangre de un automovilista.
   (e) Se tira una moneda cierto número de veces hasta que aparece la primera cara.
   (f) En una ciudad se hace una inspección de tránsito para estimar el número de coches que tienen defectos en los faros delanteros.
7. Las seis personas siguientes han hecho una solicitud para ocupar un empleo: El Sr. Andrews, es casado, no juega al golf y no tiene casa propia; el Sr. Bailey, es soltero, no juega al golf y tiene casa propia; el Sr. Clark, es casado, juega al golf y tiene casa propia; el Sr. Dodds, es soltero, juega al golf y no tiene casa propia; el Sr. Edwards, está casado, no juega al golf y tiene casa propia; y el Sr. Fox, es soltero, juega al golf y tiene casa propia. Uno de estos aspirantes obtendrá el empleo y, por ejemplo, el suceso de que éste se dé a un jugador de golf se denotará por {Clark, Dodds, Fox}. Indicar, de una manera similar, los conjuntos que corresponden a los sucesos de que el empleo se dé a:
   (a) alguien que tenga casa propia.
   (b) un casado que juegue al golf.
   (c) un soltero que no tenga casa propia.
   (d) un jugador de golf casado o soltero.
8. En relación con el problema 7, indicar:
   (a) el complementario del conjunto dado en el apartado (a).
   (b) la unión de los conjuntos de los apartados (a) y (b).

(c) la intersección de los conjuntos de los apartados (a) y (d).
(d) la intersección de los conjuntos de los apartados (b) y (c).

9. Un fabricante compra material a cuatro vendedores diferentes que llamaremos 1, 2, 3 y 4. Refiriéndonos a las órdenes de compra en dos días sucesivos, por ejemplo, se indicará por (1, 4) el suceso de que el primer día la orden se dio al vendedor 1, y en el segundo día al vendedor 4. Si A representa el suceso de que el vendedor 1 tenga, al menos, una de las dos órdenes; B el de que el mismo vendedor tenga ambas órdenes; y C el de que los vendedores 1 y 3 no tengan ninguna orden, hágase una lista de los elementos de:

(a) el espacio muestral completo.	(e) A'
(b) A,	(f) $B \cup C$,
(c) B,	(g) $A \cap B$,
(d) C,	(h) $A \cap C$.

10. Usense diagramas de Venn para verificar que:
(a) $(A \cap B)' = A' \cup B'$,
(b) $A \cup (A \cap B) = A$,
(c) $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$,
(d) $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B)$,
(e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2.3 Probabilidad

En esta sección definiremos la probabilidad, empleando el concepto de *función de conjunto,* o más exactamente, *función aditiva de conjunto.* Como posiblemente el lector está más familiarizado con funciones en las que los elementos del dominio y del recorrido son números, consideraremos primero un ejemplo muy

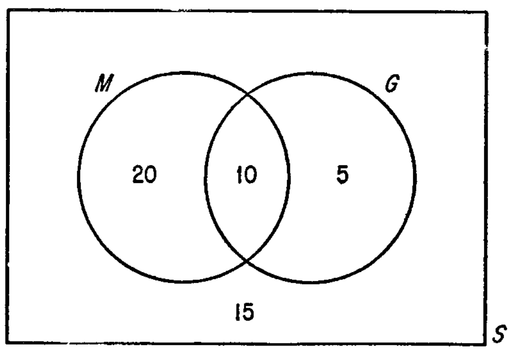


Fig. 2.10 Distribución de elementos en S

simple en que los elementos del dominio son conjuntos y los elementos del recorrido números reales. En otras palabras, estudiaremos una función, es decir una correspondencia, que asigna números reales a los subconjuntos de un conjunto dado (por ejemplo, a los subconjuntos de un espacio muestral, si nos ocupamos de los resultados de un experimento dado). La función de conjunto que consideraremos es aquella que asigna a cada subconjunto A de un conjunto finito dado, el *número de elementos* de A, lo que denotaremos por $N(A)$. Supongamos, pues, que una compañía tiene cincuenta empleados clasificados de acuerdo con su estado civil (casado M, y no casados M'), y de acuerdo, también, con que se hayan graduado o no (G o G').

La distribución de estos 50 empleados se muestra en el diagrama de Venn de la figura 2.10, y utilizando este diagrama podemos ahora determinar el valor de $N(A)$ para cada una de las 16 categorías (subconjuntos) en las que pueden ser clasificados los empleados. (En el ejercicio núm. 1 de la página 22, se pide al lector que compruebe que, en efecto, existen 16 subconjuntos, incluyendo el conjunto S formado por todos los empleados, y el conjunto vacío $\varnothing$.) Los números marcados en la figura 2.10 representan el número de empleados casados que no acabaron sus estudios, el número de empleados casados que acabaron sus estudios, el número de empleados no casados que no terminaron sus estudios y el número de empleados no casados que terminaron sus estudios, esto es:

$$N(M \cap G') = 20, \quad N(M \cap G) = 10, \quad N(M' \cap G) = 5,$$
$$N(M' \cap G') = 15$$

Para encontrar el número de empleados casados, no tenemos más que añadir el número de empleados casados que son graduados al número de empleados casados que no son graduados, con lo que obtendremos:

$$N(M) = N(M \cap G) + N(M \cap G') = 10 + 20 = 30$$

Análogamente, encontramos que el número de empleados que acabaron sus estudios es:

$$N(G) = N(M \cap G) + N(M' \cap G) = 10 + 5 = 15$$

y como $N(S) = 50$, donde S es el conjunto de los 50 empleados, obtenemos, por substracción:

$$N(M') = 50 - 30 = 20 \qquad \text{y} \qquad N(G') = 50 - 15 = 35$$

La función de conjunto que hemos introducido en este ejemplo, se llama *aditiva,* lo que significa que el número que asignamos a la unión de dos subconjuntos que no tienen elementos comunes es igual a la *suma* de los números asignados a los subconjuntos individuales.* Esta propiedad es la que nos permite calcular el número de empleados casados, sumando el número de los empleados casados y graduados con el número de los casados no graduados. Nótese que esta propiedad se aplica solamente a subconjuntos que no tienen elementos comunes, los cuales reciben el nombre de subconjuntos *disjuntos;* como indicamos en la página 8, los sucesos correspondientes a subconjuntos disjuntos se llaman *sucesos que*

* Un ejemplo simple de función de conjunto que *no* es aditiva es aquella que asigna a cada subconjunto el cuadrado del número de elementos que contiene.

mutuamente se excluyen. Si se trata de dos subconjuntos A y B que puedan tener elementos comunes, emplearemos la fórmula más general:

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$$

que, aplicada a nuestro ejemplo, nos da:

$$N(M \cup G) = N(M) + N(G) - N(M \cap G) = 30 + 15 - 10 = 35$$

para el número de empleados que están casados, o que están graduados, o ambas cosas. Nótese que restamos el número de los casados y graduados porque fueron contados dos veces, la primera entre los empleados casados y, la segunda, entre los graduados.

Usando el concepto de función aditiva de conjunto, definiremos la *probabilidad de un suceso.* Dado un espacio muestral finito S y un suceso A en S, definimos $P(A)$, a la que llamaremos probabilidad de A, como un valor de una función aditiva de conjunto **P** llamada *función de probabilidad.* Para que una función de conjunto sea una función de probabilidad debe satisfacer las tres condiciones siguientes:

Axioma 1. $0 \leq P(A) \leq 1$ *para cada suceso* A *en* S.

Axioma 2. $P(S) = 1$.

Axioma 3. Si A *y* B *son sucesos que mutuamente se excluyen en* S, *entonces* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

El primer axioma establece que la función de probabilidad asigna a cada suceso A en S un número real comprendido entre 0 y 1, incluidos éstos. El segundo axioma nos indica que al espacio muestral, como un todo, se le asigna el número 1, lo que expresa la idea de que la probabilidad de un suceso cierto es igual a 1. El tercer axioma nos dice que la función de probabilidad debe ser aditiva y, empleando la inducción matemática, se puede extender la aditividad a cualquier número finito de sucesos que mutuamente se excluyen. En otras palabras, se puede demostrar que

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

donde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son sucesos que mutuamente se excluyen en S. (En la sección 2.7 discutiremos cómo esta tercera propiedad se puede modificar cuando S no es finito.)

Las tres propiedades anotadas son axiomas de la teoría de probabilidades y no requieren demostración. Sin embargo, si esta teoría se aplica al mundo físico, podremos ver que estos axiomas corresponden a hechos reales, es decir, veremos que nos dan resultados razonables. Con este objeto, diremos algunas palabras de la llamada *interpretación frecuencial* de la probabilidad. De acuerdo con esta interpretación generalmente aceptada, consideraremos una probabilidad como una *proporción o frecuencia relativa, a partir de un gran número de casos.* Así, si decimos: "la probabilidad de que un hombre de 50 años viva hasta los 65 es de

0.72", esto nos indica que, si las condiciones actuales no varían, el 72% de todos los hombres de 50 años vivirán hasta los 65; y si decimos: "la probabilidad de que una persona que entre a un supermercado compre un producto determinado es 0.25", esto nos indica que el 25% de un gran número de personas que entre en el supermercado comprará dicho producto. Nótese que "la probabilidad de obtener cara con una moneda es 0.50", significa que haciendo un gran número de tiradas, la mitad de las veces saldrá cara y la otra mitad cruz. Sin embargo, esto *no* significa que necesariamente obtengamos 10 caras y 10 cruces al tirar 20 veces la moneda, ó 50 caras y 50 cruces al tirarla 100, pero si una moneda no defectuosa se tira muchísimas veces, se puede esperar que obtendremos aproximadamente el mismo número de caras que de cruces.

Para demostrar que los tres axiomas de probabilidad corresponden a las propiedades de las frecuencias, en la interpretación anterior, nos basta con observar que el porcentaje de las veces en que se presenta un suceso no puede ser negativo ni exceder a 1, y que un resultado u otro se presentará con un porcentaje de un 100% de las veces, esto es, con una probabilidad de 1. También, si A y B son sucesos que mutuamente se excluyen, el porcentaje de las veces que se presenta uno u otro es la suma del porcentaje de las veces en que se presenta uno y del porcentaje correspondiente al otro. Si la proporción de votantes que están a favor de una ley es 0.42 y la proporción de abstenciones es 0.19, entonces 0.61 es la proporción de votantes que están a favor de la ley o que se han abstenido.

Antes de dar algunos ejemplos de funciones de probabilidad, es importante aclarar que *los tres axiomas no nos indican la manera de asignar las probabilidades a los distintos resultados de un experimento, sino que restringen las formas en que esto se puede hacer*. En la práctica, las probabilidades se asignan por la estimación de los resultados de las experiencias anteriores, por un análisis cuidadoso de las condiciones que rigen el experimento o haciendo la suposición común de que varios casos son equiprobables (es decir, que hay la misma probabilidad de que se presente cualquiera de ellos).

Los siguientes, son tres ejemplos de formas *aceptables* de asignar las probabilidades en un experimento en que hay tres casos posibles que mutuamente se excluyen, A, B y C:

(a) $P(A) = 1/3, \quad P(B) = 1/3, \quad P(C) = 1/3$

(b) $P(A) = 0.57, \quad P(B) = 0.24, \quad P(C) = 0.19$

(c) $P(A) = 24/27, \quad P(B) = 2/27, \quad P(C) = 1/27$

sin embargo,

(d) $P(A) = 0.64, \quad P(B) = 0.38, \quad P(C) = -0.02$

(e) $P(A) = 0.35, \quad P(B) = 0.52, \quad P(C) = 0.26$

no son aceptables porque contradicen los axiomas 1 y 2, respectivamente.

Si un espacio muestral tiene n resultados, se puede demostrar que contiene 2^n subconjuntos, incluyendo el espacio completo y el conjunto vacío. Así, cuando

$n = 20$, hay más de un millón de sucesos en S, y el problema de determinar las probabilidades para cada suceso resulta sumamente complicado. Afortunadamente, esto se puede simplificar considerablemente usando el siguiente teorema:

Teorema 2.2. Si A es un suceso de S, $P(A)$ es igual a la suma de las probabilidades de los resultados individuales que constituyen A.

Para probar este teorema, sean $E_1, E_2, \ldots, E_n$ los n resultados que componen A; entonces, podemos escribir $A = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$.

Como las E'son casos individuales, se excluirán mutuamente, y por la generalización del axioma 3, tendremos

$$\begin{aligned} P(A) &= P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) \\ &= P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_n) \end{aligned}$$

lo que completa la demostración.

Para ilustrar el empleo de este teorema, consideremos el ejemplo del proyectil de la página 7. Los 18 casos posibles y sus probabilidades se muestran en la tabla que sigue. (Las probabilidades asignadas a cada uno de los casos se escogieron arbitrariamente en este ejemplo, pero de tal forma que los axiomas de probabilidad se satisfagan. En la práctica, estas probabilidades se podrían estimar por los resultados de experiencias anteriores, o también por hipótesis adecuadas; véase la página 28.)

Sucesos	*Probabilidad*	*Sucesos*	*Probabilidad*
$P_1 \cap G_1 \cap A_1$	0.336	$P_2 \cap G_2 \cap A_1$	0.042
$P_1 \cap G_1 \cap A_2$	0.096	$P_2 \cap G_2 \cap A_2$	0.012
$P_1 \cap G_1 \cap A_3$	0.048	$P_2 \cap G_2 \cap A_3$	0.006
$P_1 \cap G_2 \cap A_1$	0.084	$P_3 \cap G_1 \cap A_1$	0.056
$P_1 \cap G_2 \cap A_2$	0.024	$P_3 \cap G_1 \cap A_2$	0.016
$P_1 \cap G_2 \cap A_3$	0.012	$P_3 \cap G_1 \cap A_3$	0.008
$P_2 \cap G_1 \cap A_1$	0.168	$P_3 \cap G_2 \cap A_1$	0.014
$P_2 \cap G_1 \cap A_2$	0.048	$P_3 \cap G_2 \cap A_2$	0.004
$P_2 \cap G_1 \cap A_3$	0.024	$P_3 \cap G_2 \cap A_3$	0.002

De esta tabla, podemos calcular la probabilidad $P(G_1)$ de que el proyectil responda a los mandos, sumando las probabilidades de los 9 casos en que interviene el suceso G_1, con lo que obtendremos

$$\begin{aligned} P(G_1) = 0.336 + 0.096 + 0.048 + 0.168 + 0.048 + 0.024 \\ + 0.056 + 0.016 + 0.008 = 0.800 \end{aligned}$$

Usando el teorema 2.2, obtendremos similarmente

$$P(A_1) = 0.336 + 0.084 + 0.168 + 0.042 + 0.056 + 0.014 = 0.700$$

$$P(P_1) = 0.336 + 0.096 + 0.048 + 0.084 + 0.024 + 0.012 = 0.600$$

$$P(P_1 \cap G_1) = 0.336 + 0.096 + 0.048 = 0.480$$

el último valor es la probabilidad de que el sistema de propulsión del proyectil trabaje perfectamente y que el proyectil responda a los mandos. Para encontrar la probabilidad de que dos, o más, de los componentes del sistema operen imperfectamente, tenemos simplemente que sumar las probabilidades de todos los resultados que tienen 2 ó 3 subíndices distintos de 1, lo que nos da 0.212.

Otra ilustración nos da el problema de la página 14 en el que supondremos que uno de los 50 empleados va a ser elegido por sorteo para intervenir en un comité obrero patronal. Considerando que cada empleado tiene una probabilidad de 1/50 de ser elegido, es fácil verificar, por medio del teorema 2.2, que la probabilidad de que este cargo corresponda a un empleado casado es $P(M) = 3/5$, la probabilidad de que sea graduado es $P(G) = 3/10$, y la probabilidad de que el empleado sea casado, o graduado, o ambas cosas, es $P(M \cup G) = 7/10$. (Usando el teorema 2.2, cada una de estas probabilidades se obtiene sumando 1/50 tantas veces como resultados individuales se presentan en el suceso respectivo.)

En este último ejemplo hubiéramos podido emplear también el siguiente teorema que se aplica a experimentos en los que todos los resultados individuales son equiprobables:

Teorema 2.3. Si un experimento tiene n resultados posibles equiprobables y si s de estos resultados son "favorables", entonces la probabilidad de un resultado favorable es s/n.

Este teorema se deduce inmediatamente del teorema 2.2 y de la generalización del tercer axioma de probabilidad. Así hubiéramos podido encontrar que la probabilidad de que salga elegido un empleado casado es

$$P(M) = \frac{N(M)}{N(S)} = \frac{30}{50} = 3/5$$

y que la probabilidad de que salga elegido un empleado casado y que sea graduado es

$$P(M \cap G) = \frac{N(M \cap G)}{N(S)} = \frac{10}{50} = 1/5$$

El teorema 2.3 es particularmente útil en problemas de juegos de azar, en los que se supone, que si se ha barajado bien un juego de cartas, cada carta tiene la misma oportunidad de salir; que si una moneda se tira correctamente cada lado tiene también la misma oportunidad; y que si un dado se tira correctamente, cada cara tiene las mismas posibilidades que las demás. Luego, la probabilidad de sacar un rey de una baraja ordinaria de 52 cartas es 4/52, la probabilidad de obtener cara al tirar una moneda es 1/2, y la probabilidad de sacar un número impar en un dado es 3/6.

2.4 Algunos teoremas elementales

Usando los axiomas de probabilidad es posible desarrollar muchos teoremas que juegan un papel importante en las aplicaciones. En primer lugar, consideraremos

Teorema 2.4. Si A es cualquier suceso de S, $P(A') = 1 - P(A)$.

que expresa el hecho de que si llueve el 34% del tiempo, no llueve el restante 66% del tiempo; que si el 13% de los estudiantes reprueban cierto curso, entonces el 87% lo aprueban; y que si alguien gana en un juego el 43% de las veces, pierde el 57%. Para comprobar este teorema, observemos que A y A', por definición, se excluyen mutuamente y que $A \cup A' = S$ (es decir, que A y A' contienen, entre ambos, todos los elementos de S), luego tenemos

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A')$$

por el axioma 3,

$$P(A \cup A') = P(S) = 1$$

por el axioma 2, y por lo tanto,

$$P(A) + P(A') = 1$$

lo cual comprueba el teorema 2.4. Como un caso especial, vemos que $P(\varnothing) = 1 - P(S) = 1 - 1 = 0$, ya que el conjunto vacío $\varnothing$ es el complemento de S. En el ejemplo de la página 18, hallamos que la probabilidad de que el sistema de propulsión del proyectil no trabaje perfectamente es $1 - P(P_1) = 1 - 0.600 = 0.400$ y la probabilidad de que *al menos uno* de los subsistemas trabaje imperfectamente es $1 - 0.212 = 0.788$.

En la página 16 observamos que el axioma 3 se puede generalizar para incluir más de dos sucesos que mutuamente se excluyen. Otra generalización importante de este axioma nos permite encontrar la probabilidad de la unión de 2 sucesos cualesquiera de S, independientemente de que sean, o no, mutuamente excluyentes. Para entender el teorema que sigue, consideremos nuevamente el ejemplo de la página 14 referente a los 50 empleados, en el cual obtuvimos el *número* de empleados que son casados, que son graduados, o ambas cosas a la vez, escribiendo.

$$\begin{aligned} N(M \cup G) &= N(M) + N(G) - N(M \cap G) \\ &= 30 + 15 - 10 \\ &= 35 \end{aligned}$$

Como indicamos entonces, fue necesario restar el número de empleados casados y graduados para no contarlo dos veces, una entre los empleados casados y la otra entre los graduados. Dividiendo cada una de las expresiones anteriores entre 50, o sea, el número total de empleados, vemos que el *porcentaje* de empleados que son casados, o que son graduados, o ambas cosas, es igual al *porcentaje* de empleados casados *más* el *porcentaje* de empleados graduados, *menos* el *porcentaje* de empleados casados y graduados. De acuerdo con esta justificación intuitiva, probaremos ahora el siguiente teorema, llamado usualmente *ley general de adición:*

Teorema 2.5. Si A y B son dos sucesos cualesquiera en S

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Notemos ahora en el diagrama de Venn de la figura 2.11 que

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B)$$

y también

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$$

$$B = (A \cap B) \cup (A' \cap B)$$

(El lector habrá verificado estas importantes relaciones en las partes (c) y (d) del problema 10 de la página 14). Como es evidente que $A \cap B$, $A \cap B'$ y $A' \cap B$ se excluyen mutuamente, la generalización del axioma 3 nos da

$$P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A \cap B') + P(A' \cap B)$$

y después de sumar y restar $P(A \cap B)$, tendremos

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= [P(A \cap B) + P(A \cap B')] + [P(A \cap B) \\ &\quad + P(A' \cap B)] - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

Cuando A y B se excluyen mutuamente, el teorema 2.5 se reduce al axioma 3, ya que, en tal caso, $P(A \cap B) = 0$. Por esta razón, llamamos al axioma 3 *ley particular de adición,* mientras que el teorema 2.5 se llama *ley general de adición.* Para ilustrar el empleo de esta teoría, consideraremos nuevamente el ejemplo del pro-

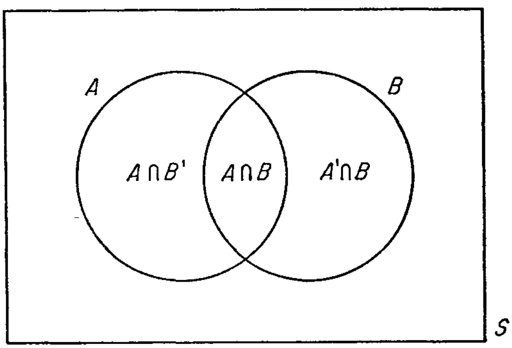


Fig. 2.11 Partición de $A \cup B$

yectil y determinaremos la probabilidad de que el sistema de propulsión trabaje perfectamente, que el proyectil responda a los mandos, o ambas cosas. Llamaremos a esta probabilidad $P(P_1 \cup G_1)$, que se podrá obtener a partir de la tabla de la página 18, sumando las probabilidades de todos aquellos casos en que aparecen al menos una de las letras P y G con el subíndice 1. Por otra parte, usando el teorema 2.5 y las probabilidades de la tabla, tendremos

$$\begin{aligned} P(P_1 \cup G_1) &= 0.600 + 0.800 - 0.480 \\ &= 0.920 \end{aligned}$$

Nótese que, si hubiésemos cometido el error de usar la ley particular de adición en este ejemplo, se hubiera obtenido el resultado absurdo de que la probabilidad buscada era 1.400.

EJERCICIOS

1. Hacer una lista de los 16 subconjuntos en que se pueden clasificar los 50 empleados del ejemplo de la página 14.
2. Con respecto a la figura 2.10, hallar
   (a) $N(M \cup G')$,
   (b) $N(M' \cup G)$,
   (c) $N[(M \cap G)']$.
3. Entre 100 estudiantes de ingeniería, 15 estudian para ingenieros químicos, 60 están estudiando el ciclo preparatorio para entrar a la escuela de ingeniería, y 5 de los que estudian el ciclo preparatorio van a estudiar ingeniería química. ¿Cuántos de estos estudiantes cumplen con las condiciones siguientes?
   (a) No están estudiando para ser ingenieros químicos.
   (b) No estudian cursos preparatorios.
   (c) Están estudiando para ser ingenieros químicos, estudian cursos preparatorios, o ambas cosas.
   (d) Estudian cursos preparatorios pero no van a ser ingenieros químicos.
   (e) No estudian cursos preparatorios y van a ser ingenieros químicos.
   (f) No estudian cursos preparatorios y no van a ser ingenieros químicos.
4. Un distribuidor tiene 75 automóviles, de los cuales los de (A) tienen tracción delantera. los de (B) son compactos, y los de (C) tienen transmisión automática. Usando la información dada en la figura 2.12, hallar:
   (a) $N(A)$,
   (b) $N(B)$,
   (c) $N(C)$,
   (d) $N(A \cap B)$,
   (e) $N(A \cap C)$,
   (f) $N(A \cap B \cap C)$,
   (g) $N(A \cup B)$,
   (h) $N(B \cup C)$,
   (i) $N(A' \cup B' \cup C)$,
   (j) $N[B \cap (A \cup C)]$.
5. Un experimento presenta exactamente cuatro casos distintos: A, B, C y D. Indicar en qué casos las probabilidades asignadas son aceptables.
   (a) $P(A) = 0.36$, $P(B) = 0.18$, $P(C) = 0.21$, $P(D) = 0.25$,
   (b) $P(A) = 0.29$, $P(B) = 0.35$, $P(C) = 0.18$, $P(D) = 0.15$,
   (c) $P(A) = 0.42$, $P(B) = 0.17$, $P(C) = -0.08$, $P(D) = 0.49$,
   (d) $P(A) = 17/80$, $P(B) = 11/40$, $P(C) = 1/2$, $P(D) = 1/80$.
6. En el espacio muestral ilustrado en la figura 2.5, denotaremos por (i, j) el resultado en el que hay i componentes defectuosos en el primer subequipo, y j en el segundo ($i = 0, 1, 2, 3, 4$; $j = 0, 1, 2$ y 3). Suponiendo que la probabilidad del caso (0, 0) es 1/2 y las probabilidades de los resultados restantes son inversamente proporcionales a $i + j$, número total de componentes defectuosas en el equipo completo, hallar la probabilidad de cada resultado en el espacio de muestreo.
7. Con los resultados del problema anterior, encontrar las probabilidades siguientes:
   (a) El primer subequipo tiene, a lo más, una componente defectuosa.
   (b) El segundo subequipo tiene por lo menos dos componentes defectuosas.
   (c) El equipo completo tiene como máximo una componente defectuosa.
   (d) El segundo subequipo tiene más componentes defectuosas que el primero.
8. En el ejemplo de la página 18, se supuso que cada uno de los 50 empleados tenía la misma probabilidad de entrar en el comité obreropatronal. Si, en lugar de ello, supone-

mos que un empleado que se graduó tiene probabilidad doble que el que no lo terminó, encontrar: (a) $P(M)$, (b) $P(G)$, (c) $P(M \cap G)$, y (d) $P(M \cup G)$.

9. En la tabla de la página 18, determinar:

(a) $P(P_2)$,	(d) $P(P_2 \cap A_2)$,
(b) $P(P_3)$,	(e) $P(P_2 \cup A_2)$,
(c) $P(A_2)$,	(f) $P(P_3 \cup A_1)$.

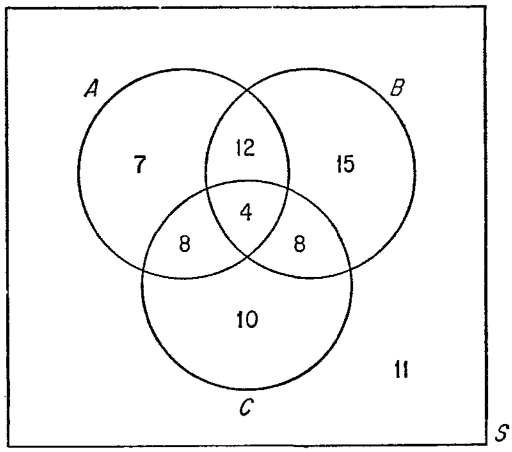


Fig. 2.12 Problema 4

10. Al tirar dos dados defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de que los números sumen (a) 7, (b) 11, (c) 7 ó 11, (d) 2, 3 ó 12?
11. Con una baraja de 52 cartas, determinar la probabilidad de sacar (a) una reina negra, (b) una carta roja, (c) un cinco, un seis o un siete, (d) un as negro o un rey rojo.
12. Para un sorteo de lotería se venden números del uno al 10 000. ¿Cuál es la probabilidad de que el número premiado sea divisible entre 20?
13. Supongamos que uno de los automóviles del problema 4 sufra daños durante una tormenta. Considerando probabilidades iguales, determinar la probabilidad de que el coche dañado:
    (a) Sea compacto.
    (b) Tenga tracción delantera.
    (c) Sea un compacto sin transmisión automática.
    (d) No sea compacto, pero tenga transmisión automática y tracción delantera.
14. Si A y B son sucesos que mutuamente se excluyen, $P(A) = 0.20$ y $P(B) = 0.55$, hallar:

(a) $P(A')$,	(c) $P(A \cap B)$,
(b) $P(A \cup B)$,	(d) $P(A' \cap B')$.

15. Sean $P(A) = 0.30$, $P(B) = 0.78$ y $P(A \cap B) = 0.16$, encontrar:

(a) $P(A \cup B)$,	(c) $P(A' \cup B')$,
(b) $P(A \cap B')$,	(d) $P(A' \cap B)$.

16. La probabilidad de que se presente, al menos, uno de los tres sucesos A, B y C, está dada por:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Comprobar esta fórmula con las probabilidades indicadas en la figura 2.13.

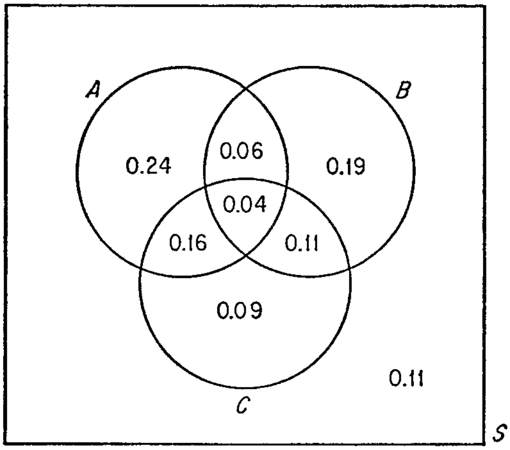


Fig. 2.13 Problema 16

17. En el control de calidad de una producción en masa de ladrillos de vidrio, la probabilidad de que un inspector encuentre: un ladrillo rajado es 0.0025, uno con burbujas de aire 0.0020, uno decolorado 0.0020, uno rajado y con burbujas de aire 0.0006, uno rajado y decolorado 0.0005, uno con burbujas de aire y decolorado 0.0004, y uno con estas tres imperfecciones 0.0001. ¿Cuál es la probabilidad de que encuentre un ladrillo con una de estas tres imperfecciones por lo menos?
18. Demostrar que (a) $P(A) \geq P(A \cap B)$, y (b) $P(A) \leq P(A \cup B)$. *Sugerencia:* Véanse los apartados (c) y (d) del problema 10 de la página 4.
19. Supuesto que A, B y C son sucesos que mutuamente se excluyen, explicar por qué no son admisibles ninguna de las siguientes asignaciones de probabilidades:
    (a) $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.4$, $P(A \cup C) = 0.2$,
    (b) $P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.1$, $P(B \cap C) = 0.3$,
    (c) $P(A) = 0.6$, $P(A \cap B') = 0.5$.

2.5 Probabilidad condicional

En la forma en que hemos definido la probabilidad, sólo podremos hablar de ella con relación a un espacio muestral S dado. La probabilidad de que un ingeniero tenga un salario de 10 000 dólares o más, no tiene significado, a menos que especifiquemos si nos referimos a toda una nación, a una industria en particular, a una fábrica dada, etc., y además, que precisemos cómo se hace la selección. Entonces, cuando usamos el símbolo $P(A)$ para indicar la probabilidad de A, realmente nos estamos refiriendo a la probabilidad de *A con respecto a algún espacio muestral dado, S.* Como el precisar S no siempre es evidente, y como hay problemas en que nos interesa la probabilidad de A con respecto a más de un espacio de muestreo, usaremos la notación $P(A \mid S)$ para aclarar a qué espacio S nos referimos en particular. Diremos que $P(A \mid S)$ es "*la probabilidad condicional* de A con respecto a S", y, por consiguiente, cualquier probabilidad será una probabilidad condicional.

Naturalmente que se empleará la notación simplificada $P(A)$ cuando se sobreentiende el espacio S de referencia y no haya lugar a dudas.

Para ilustrar algunas ideas referentes a probabilidades condicionales, consideraremos una vez más el conjunto de 50 personas ,algunas casadas y algunas que son graduadas como muestra la figura 2.10. Suponiendo probabilidades iguales, vimos en la página 19, que la probabilidad de que una persona graduada sea elegida para el comité obreropatronal es $P(G) = 3/10$; veamos ahora si esta probabilidad cambia al saber que una persona casada ha sido elegida. Para encontrar $P(G \mid M)$, no tenemos más que analizar el espacio muestral reducido M, de la figura 2.14, y suponer

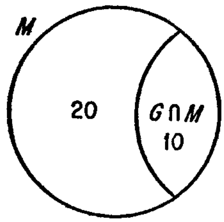


Fig. 2.14 Espacio de muestreo reducido

que cada uno de los 30 empleados casados, entre los que hay 10 que son graduados, tienen la misma probabilidad de ser elegidos. Así, usando el teorema 2.3 se obtiene

$$P(G \mid M) = \frac{N(G \cap M)}{N(M)} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

Nótese que si dividimos el numerador y el denominador de la última expresión por $N(S)$, tendremos

$$P(G \mid M) = \frac{\dfrac{N(G \cap M)}{N(S)}}{\dfrac{N(M)}{N(S)}} = \frac{P(G \cap M)}{P(M)}$$

y se puede ver que la probabilidad condicional buscada es la *razón* de la probabilidad de que la persona elegida sea graduada, tomada con respecto al espacio muestral reducido M, a la probabilidad de que dicha persona pertenezca a M, tomada con respecto al espacio muestral S.

Considerando este ejemplo desde otro punto de vista, podemos decir que, con respecto al espacio de muestreo total S, se tiene

$$P(G \cap M) = \frac{N(G \cap M)}{50} = \frac{1}{5}$$

$$P(G' \cap M) = \frac{N(G' \cap M)}{50} = \frac{2}{5}$$

suponiendo, como antes, que cada uno de los 50 empleados tiene la misma probabilidad de ser elegido para el comité. Así, las probabilidades de que la persona elegida, sea o no sea graduada, supuesto que es casada, deben estar en la razón 1:2. Como todas las probabilidades en el espacio muestral reducido sumadas deben dar 1, tenemos

$$P(G \mid M) = \frac{1}{3} \qquad \text{y} \qquad P(G' \mid M) = \frac{2}{3}$$

lo que concuerda con el resultado obtenido anteriormente. Esto explica también por qué tuvimos que dividir por $P(M)$ cuando escribimos

$$P(G \mid M) = \frac{P(G \cap M)}{P(M)}$$

en la página 26. Al dividir por $P(M)$, o lo que es lo mismo, multiplicar por $1/P(M)$, estamos tomando en cuenta el *factor de proporcionalidad* que hace que la suma de las probabilidades en el espacio muestral reducido sea igual a 1. De acuerdo con lo anterior, daremos la siguiente definición formal:

Si A y B son dos sucesos cualesquiera de S y $P(B) \neq 0$, la probabilidad condicional de A con respecto a B está dada por

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Para ilustrar esta definición, supongamos que se va a mandar una orden desde la Costa Este de E.U. a Los Angeles, pasando por Chicago. De experiencias pasadas se ha estimado que la probabilidad de que la orden llegue a tiempo a Chicago es 0.80, y la probabilidad de que habiendo llegado tarde a Chicago, llegue a tiempo a Los Angeles, es 0.10. Suponiendo que la orden llegue tarde a Chicago, queremos determinar la probabilidad de que llegue a tiempo a Los Angeles. Si L representa la llegada a tiempo a Los Angeles y C la llegada tarde a Chicago, tenemos $P(C) = 1 - 0.80 = 0.20$, $P(L \cap C) = 0.10$ y, por lo tanto,

$$P(L \mid C) = \frac{0.10}{0.20} = 0.50$$

Una consecuencia inmediata de nuestra definición de probabilidad condicional es el teorema siguiente, que recibe el nombre de *ley general de multiplicación:*

Teorema 2.6. Si A y B son dos sucesos cualesquiera en S, se tiene

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B \mid A) \qquad \text{si } P(A) \neq 0 \\ &= P(B) \cdot P(A \mid B) \qquad \text{si } P(B) \neq 0 \end{aligned}$$

La segunda de estas relaciones se deduce de la definición de probabilidad condicional, multiplicando ambos miembros por $P(B)$; la primera se ha obtenido intercambiando las letras A y B en la misma definición y multiplicando después los dos miembros por $P(A)$. Nótese que la definición de $P(B \mid A)$ y $P(A \mid B)$ presupone que $P(A) \neq 0$ y $P(B) \neq 0$, respectivamente.

Para ilustrar el uso del teorema 2.6 supongamos se trata de determinar la probabilidad de hallar dos bombillas seguidas defectuosas al elegirlas sucesivamente en un lote de 500, entre las que hay un total de 25 defectuosas. Suponiendo la igualdad de probabilidad es cada una de la elecciones de una bombilla entre las del lote, la probabilidad de que en la primera elección se encuentre una bombilla defectuosa es 25/500 y, la probabilidad en la segunda, 24/499, *dado que en la primera se halla una bombilla defectuosa.* Sustituyendo estos valores, obtenemos la probabilidad buscada, que es (25/500)·(24/499) = 6/2495.

Volvamos ahora al ejemplo del proyectil para el que las probabilidades de cada caso están dadas en la tabla de la página 18. Determinaremos ahora la probabilidad de que el proyectil responda a los mandos, supuesto que el sistema de propulsión trabaje correctamente. Empleando los datos de la tabla, obtenemos

$$P(G_1 \mid P_1) = \frac{P(P_1 \cap G_1)}{P(P_1)} = \frac{0.480}{0.600} = 0.800$$

y es interesante notar que este es el mismo valor que obtuvimos antes para $P(G_1)$. Ello significa que la probabilidad de que el proyectil responda a los mandos es la misma, independientemente de que el sistema de propulsión trabaje o no correctamente; en otras palabras, *el funcionamiento correcto de los mandos es independiente de las características del sistema de propulsión.* En general, si A y B son dos sucesos un espacio muestral S, decimos que A *es independiente* de B si, y sólo si, $P(A \mid B) = P(A)$. Empleando el teorema 2.6, podemos demostrar fácilmente que, *si A es independiente de B, entonces B es independiente de A;* es decir, $P(A \mid B) = P(A)$ implica $P(B \mid A) = P(B)$, supuesto que $P(A) \neq 0$. En este caso, diremos simplemente que *A y B son independientes.*

En el caso especial en que A y B son independientes, el teorema 2.6 nos da la siguiente *ley especial de multiplicación:*

Teorema 2.7. Si A y B son sucesos independientes, entonces,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Aplicando esta regla, vemos que, por ejemplo, la probabilidad de obtener dos caras en dos tiradas sucesivas de una moneda es $(1/2) \cdot (1/2) = 1/4$ y que la probabilidad de obtener dos ases sucesivos en una baraja de 52 cartas es $(4/52) \cdot (4/52) = 1/169$, siempre que se reponga la primera carta en la baraja, antes de sacar la segunda.

La ley especial de multiplicación se puede generalizar para aplicarla a más de dos sucesos independiente: *si tres, o más, sucesos son independientes, la probabilidad de que todos ellos ocurran está dada por el producto de sus respectivas probabilidades.* De hecho, esta ley es la que usamos al determinar las probabilidades de la tabla de la página 18, suponiéndolas independientes y haciendo $P(P_1) = 0.60$, $P(P_2) = 0.30$, $P(P_3) = 0.10$, $P(G_1) = 0.80$, $P(G_2)$ 0.20, $P(A_1) = 0.70$, $P(A_2) = 0.20$ y $P(A_3) = 0.10$. Subsistuyendo estos valores, se obtuvo

$$P(P_1 \cap G_1 \cap A_1) = P(P_1) \cdot P(G_1) \cdot P(A_1) = (0.60)(0.80)(0.70) = 0.336$$

$$P(P_3 \cap G_2 \cap A_2) = P(P_3) \cdot P(G_2) \cdot P(A_2) = (0.10)(0.20)(0.20) = 0.004$$

y las otras 16 probabilidades de la página 18.

2.6 Regla de Bayes

La ley general de multiplicación es útil en la solución de muchos problemas en que el último resultado de un experimento depende de los resultados que se presentan en varias etapas intermedios. Supóngase, por ejemplo, que estamos interesados en conocer cómo trabajan los reguladores de voltaje instalados en una fábrica por dos abastecedores, B_1 y B_2, estando en la proporción de 3 a 1 el número de los instalados por B_1 y B_2. En otras palabras, la probabilidad de que cualquier regulador de voltaje recibida por la planta, provenga del abastecedor B_1, es $3/4$, y la probabilidad de que provenga del B_2 es $1/4$. Supóngase, además, que el 95% de los reguladores de B_1 y el 80% de los de B_2 trabajan de acuerdo con las especificaciones exigidas. Quisiéramos saber cuál es la probabilidad del suceso A, de que un regulador cualquiera recibido en la fábrica trabaje de acuerdo con las especificaciones.

Partiendo de que $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)$ y de que $(A \cap B_1)$ y $(A \cap B_2)$ se excluyen mutuamente (ver figura 2.11, poniendo B_1 y B_2 en lugar de B y B' respectivamente), la ley particular de adición nos da

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2)$$

si ahora aplicamos la ley general de multiplicación a $P(A \cap B_1)$ y $P(A \cap B_2)$, obtenemos

$$P(A) = P(B_1)\cdot P(A \mid B_1) + P(B_2)\ P(A \mid B_2)$$

Substituyendo las probabilidades dadas $P(B_1) = 3/4$, $P(B_2) = 1/4$, $P(A \mid B_1) = 0.95$, y $P(A \mid B_2) = 0.80$, se tiene

$$P(A) = \tfrac{3}{4}(0.95) + \tfrac{1}{4}(0.80) = 0.9125$$

que es la probabilidad buscada de que uno cualquiera de los reguladores de voltaje recibidos cumpla con las especificaciones.

En este ejemplo particular hay 2 alternativas en la etapa intermedia, los abastecedores B_1 y B_2. En general, si hay n alternativas mutuamente excluyentes $B_1, B_2, \ldots B_n$ en la etapa intermedia, podemos hallar la probabilidad del resultado final, suceso A, por medio de la fórmula *

$$\blacklozenge \qquad P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)\cdot P(A \mid B_i) \qquad \blacklozenge$$

llamada algunas veces *regla de eliminación.* Esta situación se puede visualizar construyendo un diagrama ramificado como el mostrado en la figura 2.15, donde la probabilidad del resultado final A está dado por la suma de los productos de las probabilidades correspondientes a cada una de las ramas individuales. Como ilustración, supongamos que hay tres abastecedores en nuestro ejemplo y que las probabilida-

---

* Los símbolos ◆ se usan para hacer resaltar fórmulas o expresiones importantes que, de otra forma, no se distinguirían como partes de teoremas o definiciones.

des son las mostradas en la figura 2.16. Entonces, la probabilidad de que un regulador cumpla las especificaciones es

$$\begin{aligned} P(A) &= (0.60)(0.95) + (0.30)(0.80) + (0.10)(0.65) \\ &= 0.875 \end{aligned}$$

Estudiaremos ahora un problema muy relacionado con el anterior. Supongamos que queremos determinar la probabilidad de que un regulador provenga del abaste-

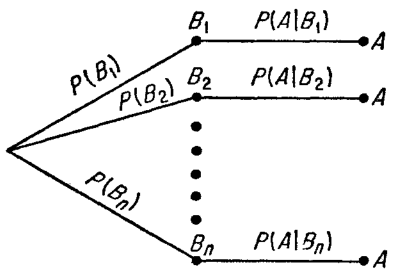


Fig. 2.15 Regla de eliminación

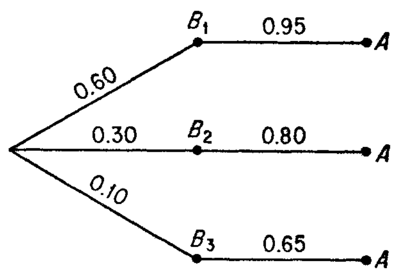


Fig. 2.16 Regla de eliminación

cedor B_3, *cuando se sabe que cumple con las especificaciones.* Refiriéndonos a la figura 2.16, usaremos la misma información que antes, pero ahora buscamos $P(B_3 \mid A)$ en lugar de $P(A)$. Para resolver este problema, escribimos

$$P(B_3 \mid A) = \frac{P(A \cap B_3)}{P(A)}$$

y substituimos

$$P(A \cap B_3) = P(B_3) \cdot P(A \mid B_3)$$

y

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)$$

respectivamente, en el numerador y el denominador, de acuerdo con la ley general de multiplicación y la regla de eliminación. Así, obtendremos la fórmula

$$P(B_3 \mid A) = \frac{P(B_3) \cdot P(A \mid B_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)}$$

que expresa la probabilidad buscada en función de las probabilidades dadas. Substituyendo los valores de la figura 2.16, tendremos, finalmente,

$$\begin{aligned} P(B_3 \mid A) &= \frac{(0.10)(0.65)}{(0.60)(0.95) + (0.30)(0.80) + (0.10)(0.65)} \\ &= 0.074 \end{aligned}$$

Nótese que la probabilidad de que un regulador provenga de B_3 disminuye de 0.10 a 0.074, una vez que sabemos que trabaja de acuerdo con las especificaciones.

El método empleado para resolver este último ejemplo se puede generalizar obteniéndose la fórmula siguiente, llamada *regla de Bayes:*

Teorema 2.8. Si B_1 *y* $B_2, \ldots, B_n$ *son sucesos que se excluyen mutuamente, de los cuales uno necesariamente debe ocurrir, esto es,* $\sum_{i=1}^{n} P(B_i) = 1$, *entonces,*

$$P(B_r \mid A) = \frac{P(B_r)\cdot P(A \mid B_r)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\cdot P(A \mid B_i)}$$

para $r = 1, 2, \ldots,$ ó n.

Esta regla nos da una fórmula para encontrar la probabilidad de que el "efecto" A haya sido "causado" por el suceso B_r. Así, en nuestro ejemplo, hallábamos la probabilidad de que un regulador de voltaje aceptable fuera suministrado por el abastecedor B_3. Las probabilidades $P(B_i)$ se llaman probabilidades "a priori" de las "causas" B_i, y, en la práctica, es generalmente difícil asignarles valores numéricos. Durante muchos años se desconfió de la regla de Bayes porque se usaba haciendo la suposición, frecuentemente errónea, de que las probabilidades a priori eran todas iguales. Esta dificultad se ha eliminado, ya que las probabilidades $P(B_i)$ pueden determinarse por separado en cada caso, analizando la naturaleza del problema, preferentemente basándonos en experiencias pasadas. Volveremos a tratar este problema en el capítulo 8, donde daremos un ejemplo de *inferencia Bayesiana.*

Demos ahora otra ilustración de la regla de Bayes: supondremos que una oficina tiene cuatro secretarias que manejan, respectivamente, el 20, 60, 15 y 5% de los archivos de todos los informes gubernamentales. Las probabilidades de que estas secretarias los traspapelen son, respectivamente, 0.05, 0.10, 0.10 y 0.05 y se trata de encontrar la probabilidad de que se culpe a la secretaria núm. 1 de un informe traspapelado. Substituyendo estos valores en la fórmula de la regla de Bayes, obtenemos

$$\begin{aligned} P(B_1 \mid A) &= \frac{(0.20)(0.05)}{(0.20)(0.05) + (0.60)(0.10) + (0.15)(0.10) + (0.05)(0.05)} \\ &= 0.114 \end{aligned}$$

Es interesante notar que, aunque sólo el 5% de los informes manejados por la secretaria núm. 1 se han traspapelado, alrededor del 11% del total de los informes traspapelados son de su responsabilidad.

EJERCICIOS

1. Refiriéndonos a la figura 2.10, hallar $P(M \mid G)$ y $P(M \mid G')$; supóngase que, originalmente, cada uno de los 50 empleados tenían la misma probabilidad de ser elegidos.
2. Si en el ejemplo de la página 27 se da también $P(L) = 0.60$, hallar la probabilidad de que un envío haya llegado tarde a Chicago, sabiendo que llegó a tiempo a Los Angeles.
3. Con respecto al ejercicio 13 de la página 24 y la figura 2.12, hallar las probabilidades de que el automóvil dañado:
   (a) Sea un compacto, sabiendo que tiene tracción delantera.
   (b) Tenga transmisión automática, sabiendo que es compacto.

(c) Tenga tracción delantera o transmisión automática, sabiendo que es compacto.
(d) Sea un compacto con transmisión automática, sabiendo que no tiene tracción delantera.
(e) No sea compacto, sabiendo que tiene tracción delantera y transmisión automática.
(f) No sea compacto, sabiendo que tiene tracción delante, transmisión automática, o ambas cosas.

4. En relación con las probabilidades dadas en la figura 2.13, determinar:
(a) $P(A \mid B)$,
(b) $P(B \mid C')$,
(c) $P(A \cap B \mid C)$,
(d) $P(B \cup C \mid A')$,
(e) $P(A \mid B \cup C)$,
(f) $P(A \mid B \cap C)$,
(g) $P(A \cap B \cap C \mid B \cap C)$,
(h) $P(A \cap B \cap C \mid B \cup C)$.
5. Empleando los resultados del problema 6 de la página 22, hallar la probabilidad de que:
(a) El equipo completo tenga dos componentes defectuosas, sabiendo que el primer subequipo tiene una componente defectuosa.
(b) El primer subequipo tenga al menos dos componentes defectuosas, sabiendo que el equipo completo tiene tres.
(c) El equipo completo tenga al menos tres componentes defectuosas, sabiendo que el primer subequipo tiene más defectos que el segundo.
6. La probabilidad de que una construcción se acabe a tiempo es 17/20, la probabilidad de que no haya huelgas es 3/4, la probabilidad de que la construcción se acabe a tiempo, partiendo del supuesto de que no haya huelgas, es 14/15. Hallar la probabilidad de que:
(a) La construcción se termine a tiempo y que no haya huelgas.
(b) No haya huelgas, partiendo del hecho de que la construcción se terminó a tiempo.
7. Una urna contiene 40 bolas blancas y 10 negras. Si se sacan dos bolas al azar (con iguales probabilidades), determinar la probabilidad de que las dos sean blancas si:
(a) La primera se vuelve a meter antes de sacar la segunda.
(b) Se saca la segunda sin haber metido la primera.
8. ¿Cuál es la probabilidad de sacar 3 ases seguidos de una baraja de 52 cartas, si aquéllos no se vuelven a meter en la baraja después de haber sido sacados?
9. Supóngase que la probabilidad de que los Dodgers de Los Angeles ganen la Liga Nacional es 0.25 y la de que la ganen los Gigantes de San Francisco es 0.20. Además, la probabilidad de que el equipo de la Liga Nacional gane la Serie Mundial es 0.45, 0.55 ó 0.35, dependiendo esto de que el equipo sea, respectivamente, los Dodgers, los Gigantes, u otro cualquiera de la misma Liga. ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo de la Liga Nacional gane la Serie Mundial?
10. En el problema 2 anterior, hallar la probabilidad de que el envío citado en él, llegue a tiempo a Los Angeles, sabiendo que llegó a tiempo a Chicago. [*Sugerencia:* Emplee la regla de eliminación.]
11. En la ilustración de la página 29 encontrar $P(B_1 \mid A)$ y $P(B_2 \mid A)$.
12. Sabiendo que un equipo de la Liga Nacional ganó la Serie Mundial, emplear las probabilidades del problema 9 anterior para determinar la probabilidad de que los Dodgers hayan ganado la Liga Nacional.
13. La probabilidad de que un accidente de aviación debido a fallas estructurales se diagnostique correctamente es 0.85 y la probabilidad de que un accidente no debido a estas fallas se diagnostique incorrectamente, atribuyéndolo a fallas estructurales, es 0.35. Si el 30% de todos los accidentes de aviación se deben a fallas estructurales, hallar la probabilidad de que el accidente se deba a fallas de este tipo, sabiendo que el diagnóstico lo atribuye a ellas.
14. Un corredor usa un auto Corvette en el 50% de las carreras en que participa; un Jaguar, en el 30%; un Alfa Romeo, en el 20% restante. De las 25 carreras en que ha corrido, un Corvette ha ganado 5; de las 15 que ha corrido con un Jaguar, ha ganado 4; y de las 10

que ha corrido con Alfa Romeo, también ha ganado 4. Usando estos números para estimar las respectivas probabilidades, ¿cuál es la probabilidad de que este corredor gane su próxima carrera?

15. Suponiendo que el corredor del problema 14 gane la carrera, ¿cuál es la probabilidad de que haya corrido en un Corvette?

2.7 Espacios de muestreo más generales

Hasta aquí, hemos discutido la teoría de probabilidades tal como se aplica a espacios muestrales finitos. Esta restricción se ha hecho para simplificar nuestra introducción a la teoría; sin embargo, esto no implica que existan diferencias esenciales con las aplicaciones referentes a los espacios muestrales continuos o infinitos numerables. En esta sección trataremos varios ejemplos de tales espacios, indicando en cada caso qué modificaciones se debe hacer a la teoría para definir las funciones de probabilidad.

Para dar un ejemplo de un experimento que se analiza más fácilmente en un espacio muestral discreto pero infinito, supongamos que nos interesa el número de defectos (tales como soldaduras o roturas) en 100 m de alambre. Es evidente que el espacio de muestreo es discreto y consta de casos o resultados posibles que se pueden poner en correspondencia con los números 0, 1, 2,. . . Como no podemos encontrar un número N tal que el número máximo de defectos en los 100 m de alambre no exceda a N, *sin que este número sea arbitrario,* el espacio será infinito numerable.

Para construir funciones de probabilidad en un espacio infinito como el descrito, se modificará el axioma 3 de la manera siguiente, para incluir también la unión de una infinidad numerable de subconjuntos:

Axioma 3'. Si A_1, A_2, A_3,. . . es una sucesión finita o infinita de sucesos que se excluyen mutuamente en S, entonces:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$$

Un ejemplo de función de probabilidad que cumple con los axiomas 1, 2 y 3' se obtendría suponiendo, en la ilustración anterior, que la probabilidad de que hubiera x defectos en 100 metros de alambre fuera

$$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

para $x = 0, 1, 2, \ldots$ (la letra griega λ, *lambda* es una constante positiva). Como las probabilidades son no negativas y, además, probaremos que su suma es uno, la función de probabilidad dada cumple evidentemente con el axioma uno. Para demostrar que también lo hace con el axioma 2, nos bastará verificar que $P(S) = 1$, por lo que, usando el axioma 3', tendremos

$$P(S) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$

Como la suma infinita anterior es el desarrollo en serie de Maclaurin de e^{λ}, se concluye que $P(S) = 1$. La función de probabilidad de este ejemplo tiene muchas aplicaciones importantes, como se verá en los capítulos 3, 5 y 16.

El problema de definir probabilidades referentes a espacios muestrales continuos es algo más complicado. Por ejemplo, supongamos que ocurre un accidente en una carretera cuya longitud es de 200 kilómetros y nos interesa conocer la probabilidad de que el accidente haya sucedido en determinado lugar, o en un tramo fijado de la carretera. Los resultados de este experimento se pueden considerar como los puntos de un continuo, tal como el intervalo de los números de 0 a 200. Se puede tomar como probabilidad de que el accidente ocurra en cualquier intervalo de longitud L igual a $L/200$, con L medido en kilómetros. Nótese que esta asignación arbitraria de la probabilidad cumple con los axiomas 1 y 2, ya que todas las probabilidades son no negativas y menores, o iguales, a uno, y $P(S) = 200/200 = 1$. Por supuesto, estamos considerando solamente sucesos representados por intervalos que forman parte del segmento de línea de 0 a 200. Usando el axioma 3', podemos obtener también las probabilidades de sucesos que no sean intervalos, pero que se puedan representar por la unión de varios intervalos finitos o de una infinidad numerable de intervalos. Así, para dos intervalos de longitudes L_1 y L_2 que no se superpongan, tendremos la probabilidad:

$$\frac{L_1 + L_2}{200}$$

y para una sucesión infinita de intervalos $L_1, L_2, L_3, \ldots$, que no se superpongan, tendremos la probabilidad:

$$\frac{L_1 + L_2 + L_3 + \ldots}{200}$$

Nótese que la probabilidad de que un accidente ocurra en cualquier punto dado es igual a 0, puesto que podemos considerar un punto como un intervalo de longitud 0. Sin embargo, la probabilidad de que el accidente ocurra en un intervalo muy corto es positiva; por ejemplo, para un intervalo de un decímetro de longitud, la probabilidad es $9.5(10)^{-7}$.

Al definir una función de probabilidad en un espacio continuo, usaremos otra vez los axiomas 1, 2 y 3' pero restringiremos el significado del término "suceso". En lo que se refiere a la práctica, esta restricción no tiene consecuencias; simplemente, no se asignarán probabilidades a algunos conjuntos de puntos de naturaleza complicada, como son los que no se pueden expresar como uniones o intersecciones de un número finito o de una infinidad numerable de intervalos. La función de probabilidad empleada en el ejemplo anterior, es efectivamente un caso especial; y es similar en naturaleza a la función considerada en un espacio discreto con probabilidades iguales. En el capítulo 4 se darán otros ejemplos de funciones de probabilidad en espacios muestrales continuos.