Optimización numérica

Juan F. Olivares Pacheco*

Índice

1 Problema de optimización numérica

Un **problema de optimización numérica** consiste en determinar el **valor óptimo** (mínimo o máximo) de una **función objetivo** mediante la aplicación de algoritmos computacionales y métodos numéricos. Este proceso requiere la identificación de un conjunto de variables que optimizan dicha función, sujetas, potencialmente, a un conjunto de restricciones que definen el espacio de soluciones factibles.

*jfolivar@uda.cl

La relevancia de los métodos numéricos surge cuando la obtención de soluciones analíticas es inviable debido a la complejidad de las funciones o a la naturaliza de las restricciones. En tales escenarios, las técnicas numéricas son herramientas indispensables para aproximar la solución óptima con un grado de precisión controlable y adecuado para la aplicación práctica. Estos problemas son fundamentales en disciplinas como la ingeniería, econometría, finanzas y ciencias de datos, donde la toma de decisiones óptimas se basa en modelos matemáticos de alta complejidad.

2 Definición de la optimización

2.1 Formulación matemática

La **optimización** es el proceso de encontrar el mejor elemento de un conjunto de alternativas disponibles con respecto a un criterio de optimalidad. Matemáticamente, esto implica identificar el mínimo o máximo de una función objetivo $f(\mathbf{x})$, donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es el vector de variables de decisión en un espacio n-dimensional.

La formulación general de un problema de optimización es:

$$\begin{aligned} \text{optimizar (max o min)} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeto a} \quad & g_i(\mathbf{x}) \leq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m \\ & h_j(\mathbf{x}) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, p \\ & \mathbf{x} \in S \end{aligned}$$

Donde:

- $f(\mathbf{x})$: Es la **función objetivo** a minimizar o maximizar.
- $\mathbf{x}$: Es el vector de variables decisión.
- $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$: Son las m restricciones de desigualdad.
- $h_j(\mathbf{x}) = 0$: Son las p restricciones de igualdad.
- S: Es el conjunto factible, o dominio, donde se busca la solución.

2.2 Elementos de un problema de optimización

Un problema de optimización numérica se define por cuatro componentes clase:

1. **Función objetivo ($f(\mathbf{x})$):** Es la función escalar que se pretende minimizar o maximizar. Representa una medida cuantitativa del rendimiento, costo o error, y proporciona el criterio para evaluar la calidad de una solución. Su correcta definición es crítica para modelar adecuadamente el problema real.

2. **Variables de decisión ($\mathbf{x}$)**: Son los parámetros ajustables del sistema, cuyo valor óptimo constituye la solución del problema. Pueden representar asignaciones de recursos, parámetros de un modelo estadístico o cualquier otra magnitud controlable.

3. **Restricciones ($g_i(\mathbf{x})$ y $h_j(\mathbf{x})$):** Son condiciones matemáticas que las variables de decisión deben satisfacer, delimitando así el espacio de soluciones admisibles. Las restricciones de desigualdad ($g_i(\mathbf{x}) \leq 0$) suelen modelar limitaciones de recursos o requisitos de requerimientos, mientras que las de igualdad ($h_j(\mathbf{x}) = 0$) imponen relaciones funcionales exactas entre las variables.

4. **Conjunto factible (S):** Es el subconjunto del espacio de variables definido por la intersección de todas las restricciones. La búsqueda de la solución óptima se realiza exclusivamente dentro de este conjunto.

2.3 Clásificación según restricciones

La estructura de las restricciones define una clasificación primaria:

- **Optimización sin restricciones:** El conjunto factible S es todo el dominio de las variables. El objivo es encontrar un óptimo global sin limitaciones adicionales.

- **Optimización con restricciones:** El conjunto factible S es un subconjunto propio del espacio de variables, definido por las condiciones que deben cumplir la solución.

3 Relevancia y aplicaciones

3.1 En matemáticas

La optimización ha impulsado el desarrollo de áreas como el análisis de convexidad, el cálculo variacional y la teoría de puntos fijos. La formulación de condiciones de optimalidad, como las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), es un pilar teórico que caracteriza las soluciones óptimas. Adicionalmente, la teoría de optimización es crucial en el control óptimo y la programación dinámica.

3.2 En ingeniería

En ingeniería, la optimización es indispensable para el diseño de sistemas y procesos eficientes. Se utiliza para:

- **Diseño estructural:** Minimizar el uso de material en estructuras, sujeto a restricciones de resistencia y seguridad.
- **Ingeniería eléctrica:** Diseñar redes de distribución de energía eficientes.
- **Ingeniería mecánica:** Optimizar componentes para satisfacer múltiples criterios de desempeño, como resistencia y eficiencia térmica.
- **Procesos de producción:** Ajustar parámetros para minimizar costos y maximizar la calidad del producto

3.3 En ciencias de datos y otras ciencas

La optimización es el motor de los algoritmos de aprendizaje automático (**machine learning**), donde el objetivo es minimizar una función de pérdida (o loss function) para ajustar los parámetros de un modelo a un conjunto de datos masivo. En economía y finanzas, se aplica para maximizar utilidades, minimizar riesgos en carteras de inversión y modelar interacciones estratégicas en la teoría de juegos.

4 Tipos de problemas de optimización

4.1 Clasificación según la naturaleza matemática

La estructura matemática de la función objetivo y las restricciones determina la clasificación del problema:

- **Optimización lineal (LP):** La función objetivo y todas las restricciones son funciones lineales de las variables de decisión. El conjunto factible es un poliedro convexo y, si existe una solución óptima, esta se encuentra en al menos uno de sus vértices.
- **Optimización no lineal (NLP):** La función objetivo o al menos una de las restricciones es una función no lineal. Esta clase abarca una gran diversidad de problemas, incluyendo casos con múltiples óptimos locales, lo que exige algoritmos más sofisticados.
- **Optimización entera (IP):** Una o más variables de decisión están restringidas a tomar valores enteros. Esta restricción incrementa notablemente

la complejidad computacional, y muchos problemas se clasifican como NP-completos. Es común en problemas de asignación de recursos indivisibles.

- **Optimización combinatoria:** Consiste en encontrar una configuración óptima dentro de un conjunto finito, pero usualmente muy grande, de alternativas discretas. Ejemplos clásicos incluyen el problema del vendedor viajero y el problema de la mochila.

4.2 Clasificación según la estructura del problema

La presencia de restricciones también clasifica los problemas y los métodos de solución:

- **Optimización sin restricciones:** El problema es conceptualmente más simple y se resuelve utilizando métodos basados en el gradiente y la matriz Hessiana de la función objetivo. Es fundamental en aplicaciones como el ajuste de modelos estadísticos no lineales y el entrenamiento de redes neuronales.
- **Optimización con restricciones:** Limita el espacio de búsqueda a un subconjunto del dominio. El tratamiento de las restricciones requiere técnicas especializadas, como métodos de penalización, métodos de barrera o algoritmos de conjunto activo, cuya elección depende de la interacción entre la función objetivo y las restricciones.