



SISTEMAS DIGITALES

UNIDAD 2- ANÁLISIS BOOLEANO DE LOS CIRCUITOS LÓGICOS

Departamento de Ingeniería Informática y Ciencias de la
Computación

UNIVERSIDAD DE ATACAMA

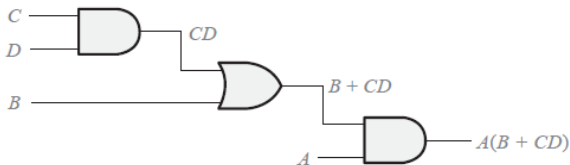


Tabla de Contenidos

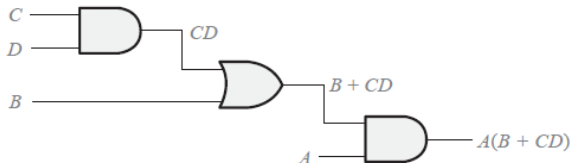
1 Expresión booleana de un circuito lógico



Para obtener la expresión booleana de un determinado circuito lógico, la manera de proceder consiste en comenzar con las entradas situadas más a la izquierda e ir avanzando hasta las líneas de salida, escribiendo la expresión para cada puerta.



Circuito lógico que muestra el desarrollo de la expresión booleana para la salida.



Circuito lógico que muestra el desarrollo de la expresión booleana para la salida.

- La expresión de la puerta AND situada más a la izquierda cuyas entradas son C y D es CD .
- La salida de la puerta AND situada más a la izquierda es una de las entradas de la puerta OR y B es su otra entrada. Por tanto, la expresión para la puerta OR es $B + CD$.
- La salida de la puerta OR es una de las entradas de la puerta AND situada más a la derecha, siendo A su otra entrada. Por tanto, la expresión de esta puerta AND será $A(B + CD)$, que es la expresión final de salida del circuito completo.



Construcción de una tabla de verdad para un circuitos lógico

- Una vez que se ha determinado la expresión booleana de un circuito dado, puede desarrollarse una tabla de verdad que represente la salida del circuito lógico para todos los valores posibles de las variables de entrada.
- El procedimiento requiere que se evalúe la expresión booleana para todas las posibles combinaciones de valores de las variables de entrada.
- En el caso del circuit anterior, existen cuatro variables de entrada (A, B, C y D) y, por tanto, hay dieciséis ($2^4 = 16$) posibles combinaciones de valores.



Construcción de una tabla de verdad para un circuitos lógico

$A(B + CD)$

- En primer lugar hallamos los valores de las variables que hacen que la expresión sea igual a 1, utilizando las reglas de la suma y la multiplicación booleanas.

$$A(B + CD) = 1 * 1 = 1.$$

- Ahora hay que determinar cuándo el término $B + CD$ es igual a 1. El término $B + CD = 1$ si $B = 1$ o $C = 1$ o si ambas variables son igual a 1, ya que:

$$B + CD = 1 + 0 = 1.$$

$$B + CD = 0 + 1 = 1.$$

$$B + CD = 1 + 1 = 1.$$

- El término $CD = 1$ sólo si $C = 1$ y $D = 1$.



Construcción de una tabla de verdad para un circuitos lógico

En resumen:

La expresión $A(B + CD) = 1$ cuando $A = 1$ y $B = 1$, independientemente de los valores de C y D , o cuando $A = 1$ y $C = 1$ o cuando $A = 1$ y $C = 1$ y $D = 1$, independientemente del valor de B .

La expresión $A(B + CD) = 0$ para todas las restantes combinaciones de valores de las variables.

Entradas				Salida
A	B	C	D	$A(B + CD)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1



Ejercicio

Reemplazar las puertas AND por puertas OR y la puerta OR por una puerta AND en la Figura anterior, y determinar la expresión booleana de salida y la tabla de verdad.



Tabla de Contenidos

- 1 Expresión booleana de un circuito lógico
 - Simplificación mediante álgebra boole
 - Formas estándar de las expresiones booleanas
 - Conversión a Tabla



Simplificar la siguiente expresión utilizando técnicas del álgebra de Boole:

$$AB + A(B + C) + B(B + C)$$

$$1. A + 0 = A$$

$$2. A + 1 = 1$$

$$3. A \cdot 0 = 0$$

$$4. A \cdot 1 = A$$

$$5. A + A = A$$

$$6. A + \overline{A} = 1$$

$$7. A \cdot \overline{A} = 0$$

$$8. \overline{\overline{A}} = A$$

$$9. \overline{\overline{A}} = A$$

$$10. A + \overline{A}B = A + B$$

$$11. A + \overline{A}B = A + B$$

$$12. (A + B)(A + C) = A + BC$$

A, B o C pueden representar una sola variable o una combinación de variables.



Simplificar la siguiente expresión utilizando técnicas del álgebra de Boole:

$$AB + A(B + C) + B(B + C)$$

1. Aplicar la ley distributiva al segundo y tercer término del siguiente modo

$$AB + AB + AC + BB + BC$$

2. Aplicar la regla 7 ($BB = B$) al cuarto término.

$$AB + AB + AC + B + BC$$

3. Aplicar la regla 5 ($AB + AB = AB$) a los dos primeros términos

$$AB + AC + B + BC$$

4. Aplicar la regla 10 ($B + BC = B$) a los dos últimos términos

$$AB + AC + B$$

5. Aplicar la regla 10 ($AB + B = B$) al primero y tercer término.

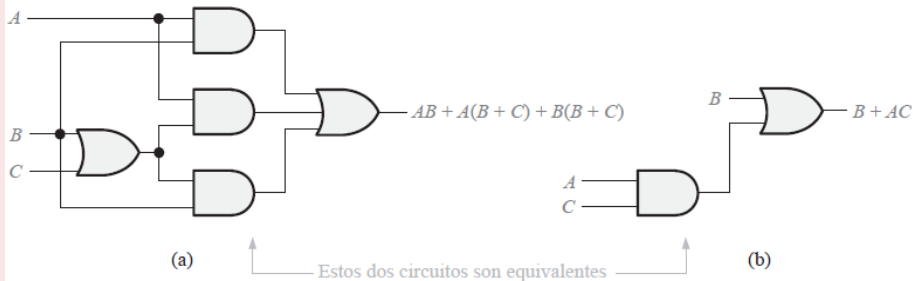
$$B + AC$$

```
|  
| | | | | | |  
| | | | | | |  
| | | | | | |  
| | | | | | |  
| | | | | | |  
| | | | | | |  
| | | | | | |
```

Expresa como circuitos lógicos ambas partes de la ecuación:

$$AB + A(B + C) + B(B + C) = B + AC$$

Respuesta:





Simplifique la expresión del lado izquierdo y llegue al lado derecho:

$$[\overline{A}\overline{B}(C + BD) + \overline{A}\overline{B}]C = \overline{B}C$$



$$[A\bar{B}(C + BD) + \bar{A}\bar{B}]C$$

1. Aplicar la ley distributiva
 $(\bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}BD + \bar{A}\bar{B})C$
2. Aplicar la regla 8 ($\bar{B}B = 0$) al segundo término entre paréntesis
 $(\bar{A}\bar{B}C + A0D + \bar{A}\bar{B})C$
3. Aplicar la regla 3 ($A0D = 0$) al segundo término contenido dentro de los paréntesis.
 $(\bar{A}\bar{B}C + 0 + \bar{A}\bar{B})C$
4. Aplicar la regla 1 (quitar el 0) dentro del paréntesis
 $(\bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B})C$
5. Aplicar la ley distributiva.
 $\bar{A}\bar{B}CC + \bar{A}\bar{B}C$



$$[A\bar{B}(C + BD) + \bar{A}\bar{B}]C$$

1. Aplicar la regla 7 ($CC = C$) al primer término.

$$A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}C$$

2. Sacar factor común.

$$\bar{B}C(A + \bar{A})$$

3. Aplicar la regla 6 ($A + \bar{A} = 1$)

$$\bar{B}C1$$

4. Aplicar la regla 4 (quitar el 1)

$$\bar{B}C$$



Tabla de Contenidos

1 Expresión booleana de un circuito lógico

Simplificación mediante álgebra boole

Formas estándar de las expresiones booleanas

Conversión a Tabla



Todas las expresiones booleanas, independientemente de su forma, pueden convertirse en cualquiera de las dos formas estándar: **suma de productos o producto de sumas**.

Suma de productos

Cuando dos o más productos se suman mediante la adición booleana, la expresión resultante se denomina **suma de productos**.

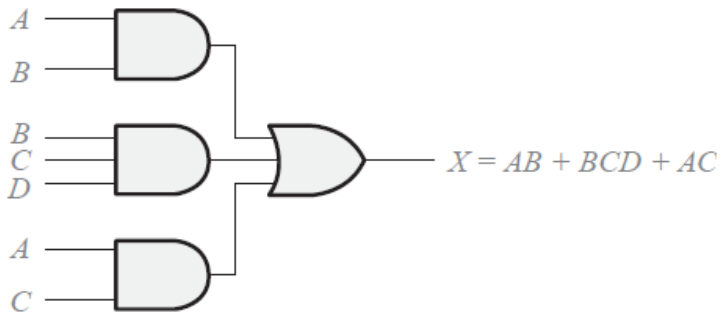
$$AB + ABC$$

Dominio de una expresión booleana

El dominio de una expresión booleana es el conjunto de variables contenido en la expresión bien en su forma complementada o no complementada



Implementación de la suma de productos





Una suma de productos estándar

Es aquella en la que todas las variables del dominio aparecen en cada uno de los términos de la expresión

$$\overline{A}BCD + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D$$

es una expresión suma de productos estándar.

Cualquier expresión suma de productos no estándar (que denominaremos simplemente **suma de productos**) puede convertirse al formato estándar utilizando el álgebra de Boole.



Representación binaria

Un término producto estándar es igual a 1 sólo para una combinación de los valores de las variables.

Por ejemplo: el término producto $A\bar{B}C\bar{D}$ es igual a 1 cuando $A = 1, B = 0, C = 1, D = 0$, como se muestra a continuación y es igual a 0 para todas las restantes combinaciones de valores de las variables.

$$A\bar{B}C\bar{D} = 1 * \bar{0} * 1 * \bar{0} = 1$$

En este caso, el término producto tiene un valor binario de 1010



Conversión de una suma de productos a su forma estándar.

Cada término producto de una suma de productos que no contenga todas las variables del dominio puede ampliarse a su forma estándar de manera que incluya todas las variables del dominio y sus complementos.

Multiplicar cada término producto no estándar por un término formado por la suma de la variable que falta y su complemento. Con esto se obtienen dos términos producto. Como se sabe, se puede multiplicar por 1 cualquier expresión sin que se altere su valor.

Repetir el paso 1 hasta que todos los términos de la expresión contengan todas las variables o sus complementos del dominio. Al convertir cada producto a su forma estándar, el número de términos producto se duplica por cada variable que falta.

Ejemplo

Convertir la siguiente expresión booleana al formato suma de productos estándar:

$$\overline{A}BC + \overline{A}\overline{B} + ABCD$$

Solución:

1. El dominio de esta suma de productos es A, B, C, D .
Considerando cada término por separado, se comprueba que al primer término, le falta la variable D o \overline{D} , por lo que multiplicamos dicho término por $D + \overline{D}$ como sigue:

$$\overline{A}BC = \overline{A}BC(D + \overline{D}) = \overline{A}BCD + \overline{A}BC\overline{D}$$

En este caso se obtienen dos productos estándar.

2. En el segundo término $\overline{A}\overline{B}$ faltan las variables C o \overline{C} y D o \overline{D} , por lo que la multiplicamos por $C + \overline{C}$:

$$\overline{A}\overline{B} = \overline{A}\overline{B}(C + \overline{C}) = \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}\overline{B}\overline{C}$$



Ejemplo

Solución:

1. Los dos términos que hemos obtenido carecen de la variable D o \bar{D} , por lo que multiplicamos dicho término por $D + \bar{D}$:

$$\overline{AB} = \overline{ABC} + \overline{ABC} = \overline{ABC}(D + \bar{D}) + \overline{ABC}(D + \bar{D})$$

2. El tercer término, $AB\bar{C}D$ ya está en forma estándar. **La suma de productos estándar completa que obtenemos finalmente es:**

$$\overline{ABC} + \overline{AB} + AB\bar{C}D =$$

$$\overline{AB}CD + \overline{AB}C\bar{D} + \overline{AB}CD + \overline{AB}C\bar{D} + \overline{AB}CD + \overline{AB}C\bar{D} + AB\bar{C}D$$



Productos de Sumas

Cuando dos o más términos suma se multiplican, la expresión resultante es un **producto de sumas**.

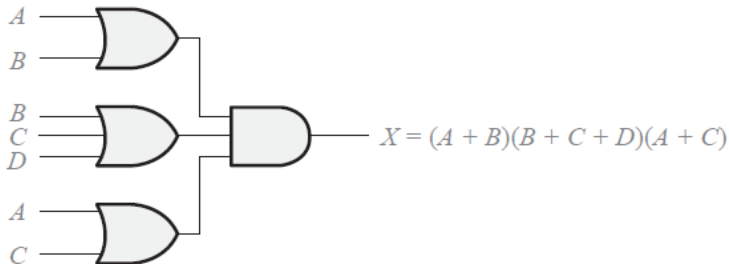
$$(\overline{A}B)(A + \overline{B} + C)$$

Conversión de un producto de sumas a su forma estándar

Cada término suma de una expresión producto de sumas que no contenga todas las variables del dominio puede extenderse para obtener su formato estándar incluyendo todas las variables del dominio y sus complementos. Como se establece en los pasos siguientes, **un producto de sumas no estándar se convierte a su formato estándar** utilizando la regla booleana número 8, que establece que una variable multiplicada por su complemento es igual a 0.



Implementación del producto de sumas





Representación binaria de un término suma estándar.

Un término suma estándar es igual a 0 sólo para una combinación de los valores de las variables.

Por ejemplo, el término suma $A + \overline{B} + C + \overline{D}$ es igual a 0 cuando $A = 0, B = 1, C = 0$ y $D = 1$, como se muestra a continuación y es igual a 0 para todas las restantes combinaciones de valores de las variables.

$$A + \overline{B} + C + \overline{D} = 0 + \overline{1} + 0 + \overline{1} = 0$$



Tabla de Contenidos

1 Expresión booleana de un circuito lógico

Simplificación mediante álgebra boole

Formas estándar de las expresiones booleanas

Conversión a Tabla



De suma de productos estándar a Tabla

Desarrollar una tabla de verdad para la expresión suma de productos estándar $\overline{A}BC + A\overline{B}C + ABC$.

Solución

Existen tres variables en el dominio, por lo que hay ocho posibles combinaciones de valores binarios de las variables, como se muestra en las tres columnas

Entradas			Salida	Término producto
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>X</i>	
0	0	0	0	
0	0	1	1	$\overline{A}\overline{B}C$
0	1	0	0	
0	1	1	0	
1	0	0	1	$A\overline{B}\overline{C}$
1	0	1	0	
1	1	0	0	
1	1	1	1	ABC



De productos suma estándar a Tabla

Desarrollar una tabla de verdad para la expresión producto de sumas estándar siguiente:

$$(A + B + C)(A + \bar{B} + C)(A + \bar{B} + \bar{C})(\bar{A} + B + \bar{C})(\bar{A} + \bar{B} + C)$$

Solución

Existen tres variables en el dominio, por lo que hay ocho posibles combinaciones de valores binarios de las variables, como se muestra en las tres columnas de la izquierda de la Tabla 4.7. Los valores binarios que hacen que los términos suma de la expresión sean igual a 0 son $A + B + C : 000$; $A + \bar{B} + C : 010$; $A + \bar{B} + \bar{C} : 011$; $\bar{A} + B + \bar{C} : 101$ y $\bar{A} + \bar{B} + C : 110$. Para cada uno de estos valores binarios, se escribe un 0 en la columna de salida, como se indica en la tabla. Para cada una de las restantes combinaciones, se escribe un 1 en la columna de salida.

Entradas			Salida	Término suma
A	B	C	X	
0	0	0	0	$(A + B + C)$
0	0	1	1	
0	1	0	0	$(A + \bar{B} + C)$
0	1	1	0	$(A + \bar{B} + \bar{C})$
1	0	0	1	
1	0	1	0	$(\bar{A} + B + \bar{C})$
1	1	0	0	$(\bar{A} + \bar{B} + C)$
1	1	1	1	

TABLA 4.7



Determinación de las expresiones estándar a partir de una tabla de verdad

A partir de la tabla de verdad de la Tabla 4.8, determinar la expresión suma de productos estándar y la expresión producto de sumas estándar equivalente.

Entradas			Salida
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>X</i>
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

TABLA 4.8

***Solución***

En la columna de salida hay cuatro 1s y los correspondientes valores binarios son 011, 100, 110 y 111. Convertir estos valores binarios a términos producto como sigue:

$$011 \rightarrow \bar{A}BC$$

$$100 \rightarrow A\bar{B}\bar{C}$$

$$110 \rightarrow AB\bar{C}$$

$$111 \rightarrow ABC$$

La expresión suma de productos estándar resultante para la salida X es:

$$X = \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C} + ABC$$

Para el producto de sumas, la salida es 0 para los valores binarios 000, 001, 010 y 101. Estos valores binarios se convierten en términos suma como sigue:

$$000 \rightarrow A+B+C$$

$$001 \rightarrow A+B+\bar{C}$$

$$010 \rightarrow A+\bar{B}+C$$

$$101 \rightarrow A+B+\bar{C}$$

La expresión producto de sumas estándar resultantes para la salida X es:

$$X = (A+B+C)(A+B+\bar{C})(A+\bar{B}+C)(A+B+\bar{C})$$