SISTEMAS DIGITALES

UNIDAD 2- ÁLGEBRA BOOLEANA

Departamento de Ingeniería Informática y Ciencias de la Computación

UNIVERSIDAD DE ATACAMA

Tabla de Contenidos

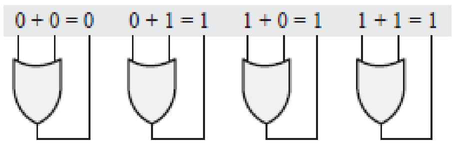
El álgebra de Boole son las matemáticas de los sistemas digitales. Es indispensable tener unos conocimientos básicos del álgebra booleana para estudiar y analizar los circuitos lógicos

Definición:

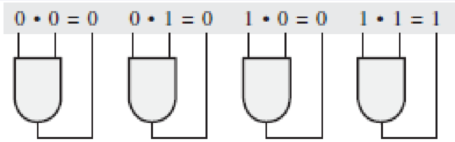
- **Variable:** es un símbolo (normalmente una letra mayúscula en cursiva) que se utiliza para representar magnitudes lógicas. Cualquier variable puede tener un valor de 0 o de 1.
- **El complemento:** es el inverso de la variable y se indica mediante una barra encima de la misma. Por ejemplo, el complement de la variable A es $\bar{A}$. Si $A = 1$, su complemento es 1.

Suma Y Multiplicación booleana ($A + B$, AB)

OR



AND



Ejercicio

Determinar los valores de A, B, C, y D

- que hacen que el término suma $A + \bar{B} + C + \bar{D}$ sea igual a cero.
- que hacen que el término producto $A\bar{B}C\bar{D}$ sea igual a uno.

Tabla de Contenidos

Leyes

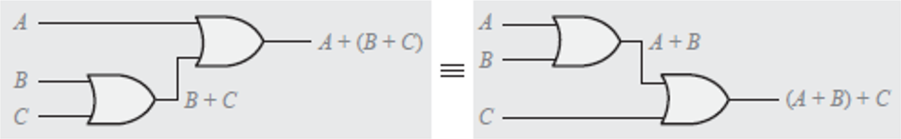
Las leyes básicas del álgebra de Boole (las leyes conmutativas de la suma y la multiplicación, y las leyes asociativas de la suma y la multiplicación y la ley distributiva) son las mismas que las del álgebra ordinaria. Cada una de las leyes se ilustra con dos o tres variables, pero el número de variables no está limitado a esta cantidad.

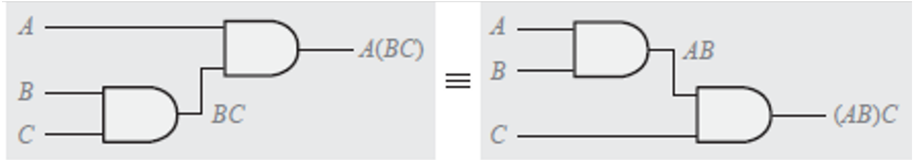
La ley conmutativa de la suma y multiplicación para dos variables se escribe como sigue:

- $A + B = B + A$
- $AB = BA$

La ley asociativa de la suma y multiplicación para tres variables se escribe como sigue:

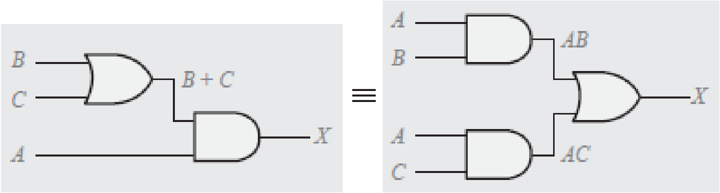
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $A(BC) = (AB)C$





La ley distribución para tres variables se escribe como sigue:

- $A(B + C) = AB + AC$
- Esta ley establece que aplicar la operación OR a dos o más variables y luego aplicar la operación AND al resultado de esa operación y a otra variable aislada, es equivalente a aplicar la operación AND a la variable aislada con cada uno de los sumandos y luego realizar la operación OR con los productos resultantes.



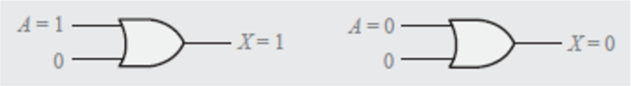
$X = A(B + C)$ $X = AB + AC$

Reglas del álgebra booleana

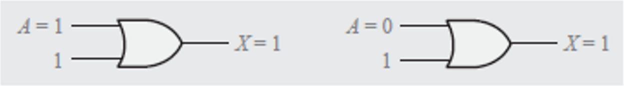
1. $A + 0 = A$	7. $A \cdot A = A$
2. $A + 1 = 1$	8. $A \cdot \overline{A} = 0$
3. $A \cdot 0 = 0$	9. $\overline{\overline{A}} = A$
4. $A \cdot 1 = A$	10. $A + AB = A$
5. $A + A = A$	11. $A + \overline{A}B = A + B$
6. $A + \overline{A} = 1$	12. $(A + B)(A + C) = A + BC$

A, B o C pueden representar una sola variable o una combinación de variables.

- **Regla 1:** $A + 0 = A$ Si aplicamos la operación OR a una variable cualquiera y a 0, el resultado es siempre igual a la variable. Si A es 1, la salida es igual a 1 y, por tanto, igual a A. Si A es 0, la salida es 0 e igualmente idéntica a A.
- **Regla 2:** $A + 1 = 1$ Si se aplica la operación OR a una variable y a 1, el resultado es siempre igual a 1. Un 1 en una entrada de una puerta OR produce siempre un 1 en la salida, independientemente del valor de la otra entrada.

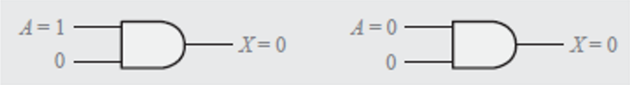


$X = A + 0 = A$

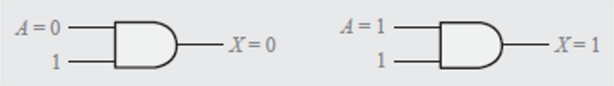


$X = A + 1 = 1$

- **Regla 3:** $A * 0 = 0$ Si se aplica la operación AND a una variable y a 0, el resultado es siempre igual a 0. Siempre que una de las entradas de una puerta AND sea 0, la salida siempre es 0, independientemente del valor de la otra entrada.
- **Regla 4:** $A * 1 = A$ Si se aplica la operación AND a una variable y a 1, el resultado es siempre igual a la variable. Si la variable A es 0, la salida de la puerta AND será siempre 0, mientras que si A es 1, la salida será 1, dado que las dos entradas son 1

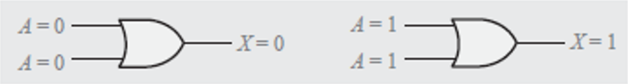


$X = A \cdot 0 = 0$



$X = A \cdot 1 = A$

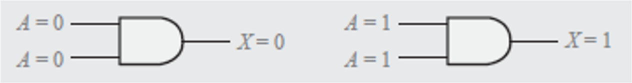
- **Regla 5:** $A + A = A$ Si se aplica la operación OR a una variable consigo misma, el resultado es siempre igual a la variable. Si A es 0, entonces 0 + 0 = 0, mientras que si A es 1, 1 + 1 =1.
- **Regla 6:** $A + \bar{A} = 1$ Si se aplica la operación OR a una variable y a su complemento, el resultado es siempre igual a 1. Si A es 0, entonces $0 + \bar{0} = 0 + 1 = 1$. Si A es 1, entonces $1 + \bar{1} = 1 + 0 = 1$.



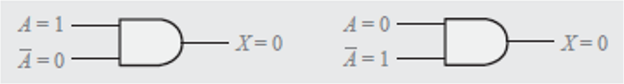
$X = A + A = A$

$X = A + \bar{A} = 1$

- **Regla 7:** $A * A = A$ Si se aplica la operación AND a una variable consigo misma, el resultado siempre es igual a la variable. Si $A = 0$, entonces $0 * 0 = 0$, y si $A = 1$, entonces $1 * 1 = 1$.
- **Regla 8:** $A * \bar{A} = 0$ Si se aplica la operación AND a una variable y a su complemento, el resultado es siempre igual a 0. Esta regla se basa en que siempre A o $\bar{A}$ será 0, y además en que cuando se aplica un 0 a una de las entradas de una puerta AND, la salida siempre es 0.

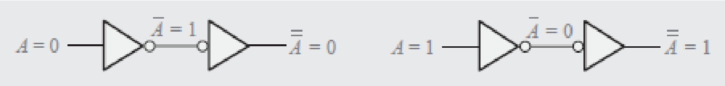


$X = A \cdot A = A$



$X = A \cdot \bar{A} = 0$

- **Regla 9:** $\bar{\bar{A}} = A$ El complemento del complemento de una variable es siempre la propia variable. El complemento de la variable A es $\bar{A}$ y el complemento de $\bar{A}$ será de nuevo A, que es la variable original



$$\bar{\bar{A}} = A$$

Ejercicio

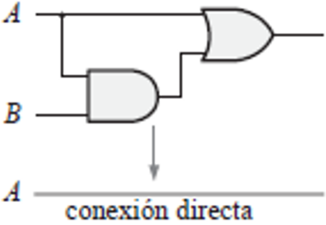
Comprobar la regla 10

- $A + AB = A$

A	B	AB	A + AB
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	0	0	1

Solución

$$
\begin{aligned}
A + AB &= A(1 + B)(\textbf{Ley distribución}) \\
&= A * 1(\textbf{Regla 2}) \\
&= A(\textbf{Regla 4})
\end{aligned} \qquad (1)
$$



A	B	AB	A + AB
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	0	0	1

Tabla de Contenidos

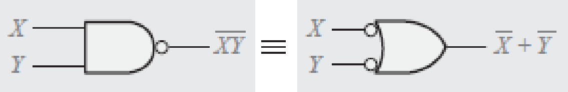
Teorema DeMorgan:

1. El complemento de un producto de variables es igual a la suma de los complementos de las variables.

$$\overline{XY} = \bar{X} + \bar{Y} \tag{2}$$

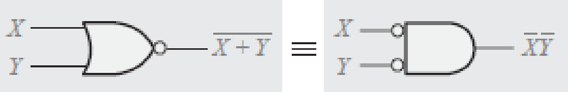
2. El complemento de una suma de variables es igual al producto de los complementos de las variables.

$$\overline{X + Y} = \bar{X}\,\bar{Y} \tag{3}$$



NAND Negativa-OR

Entradas		Salida	
X	Y	$\overline{XY}$	$\overline{X}+\overline{Y}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0



NOR Negativa-AND

Entradas		Salida	
X	Y	$\overline{X+Y}$	$\overline{X}\,\overline{Y}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

Ejercicio

Aplicar el teorema DeMorgan a:

$$\overline{\overline{A + B\overline{C}} + D(\overline{E + \overline{F}})}$$

Ejercicio

Aplicar el teorema DeMorgan a:

$$\overline{\overline{A+B\overline{C}}+\overline{D(E+\overline{F})}}$$

- **Paso 1:** Identificamos los términos a los que se pueden aplicar los teorema de DeMorgan y consideramos cada término como una única variable, por lo que establecemos $\overline{A+B\overline{C}} = X$ y $\overline{D(E+\overline{F})} = Y$
- **Paso 2:** Siguiendo el orden propuesto por el teorema $\overline{X+Y} = \bar{X}\bar{Y}$ nos quedaría:
  $\overline{\overline{A+B\overline{C}}+\overline{D(E+\overline{F})}} = \overline{\overline{A+B\overline{C}}} + \overline{\overline{D(E+\overline{F})}}$

Ejercicio

- **Paso 3:** Utilizamos la regla 9 ($\overline{\overline{A}} = A$) para eliminar la bara doble sobre el término de la izquierda (esto no es parte del teorema de DeMorgan):
$$\overline{\overline{A+B\overline{C}}} + \overline{D(\overline{E+\overline{F}})} = (A+B\overline{C})(\overline{D(\overline{E+\overline{F}})})$$
- **Paso 4:** Aplicando el teorema de DeMorgan al segundo término:
$$(A+B\overline{C})(\overline{D(\overline{E+\overline{F}})}) = (A+B\overline{C})(\overline{D}+(\overline{\overline{E+\overline{F}}}))$$
- **Paso 5:** Aplicando la regla 9 al último término para borrar la doble barra:
$$(A+B\overline{C})(\overline{D(\overline{E+\overline{F}})}) = (A+B\overline{C})(\overline{D}+E+\overline{F})$$

Resultado

$$\overline{\overline{A+B\overline{C}}+\overline{D(E+\overline{F})}} = (A+B\overline{C})(\overline{D}+E+\overline{F})$$

TALLER

Envie la expresión matemática, tabla de verdad, y diseño compuertas lógicas para los siguientes casos.

Comprobar las reglas 11 y 12

- $(A+B)(A+C) = A + BC$
- $A + \bar{A}B = A + B$

Aplicar teorema de DeMorgan a:

- $\overline{\overline{A+B}+\overline{C}}$
- $\overline{(A+B)\overline{CD}+E+\overline{F}}$