Algorithm Homework1

PB18111704 Zhu Enzuo

2020 年 11 月 3 日

0.1 Prob1

a1 线性查找伪代码如下

Algorithm 1 线性查找

```
procedure FETCH(A, v)
    for i ← 1, n do
        if a_i = v then
            return i
        end if
    end for
    return NIL
end procedure
```

a2 循环不变式证明如下

初始化 首先需要证明迭代开始之前循环不变式成立。此时 i=0，已查找的元素集合中和 v 不相等的元素的集合 S 为 $\emptyset$。而空集中不会有元素和 v 相等。

保持 我们需要证明每一次循环之后 $v \notin S$，而我们可以看到只有满足 $a_i \neq v$ 的 a_i 才会被加入到 S 当中。故该性质对循环成立。

终止 当循环中途跳出的时候，说明我们找到了一个 $a_i = v$，满足要求。当循环正常结束之后，说明对任意 a_i，都有 $a_i \neq v$，满足题目要求。故我们可以得出结论该算法是正确的。

b 平均需要检查的元素个数 $P = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{k+1}{2}$，最坏情况需要检查的元素个数为 n。$f(A, v) = O(n) = \Theta(n)$

0.2 Prob2

a 错误。考虑 $f(n) = \frac{1}{n}$，可以发现 $O(f(n)^2) = \frac{1}{n^2} < f(n)$。

b 正确。利用 Θ 的定义，取 $c1 = 1, c2 = 2, n_0 = 1$，有 $\forall n \geq n_0, 0 \leq max(f(n), g(n)) \leq f(n) + g(n) \leq 2max(f(n), g(n))$。故命题正确。

c $True$。$g(n) = O(f(n)), 0 < g(n), cf(n)$

d 错误。$f(n) = \Sigma(g(n)) \rightarrow \exists n_0, \forall n > n_0, f(n) \leq g(n)$，而后者与之矛盾。

0.3 Prob3

证明 $lg(n!) = \Theta(nlg(n))$

$$
\begin{aligned}
n! &= \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n e^{\alpha_n} \\
lg(n!) &= lg(\sqrt{2\pi n}) + nlg(n) - nlg(e) + \alpha_n lg(e) \\
&= \Theta(lgn) + \Theta(nlgn) + \Theta(n) + \Theta(\frac{1}{n}) \\
&= \Theta(nlgn)
\end{aligned}
$$

证明 $n! = \omega(2^n)$

令 $n_0 = 4$，则 $\forall n \geq n_0$, 有

$n! = n * (n-1) * (n-2) * ... * 4 * 3 * 2 * 1 \geq 2 * 2 * 2 * ... * 2 * 2 * 2 * 2$

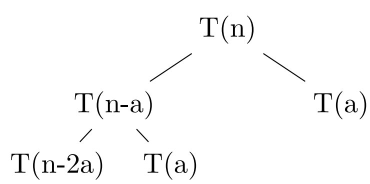
故 $n! = \omega(2^n)$

证明 $n! = o(n^n)$
令 $n_0 = 2$，则 $\forall n \geq n_0$，有
$n! = n*(n-1)*(n-2)*...*2*1 \leq n*n*n*...*n*n$
故 $n! = o(2^n)$

0.4 Prob4

证明 假设 $T(n) = O(lgn)$
不妨设 T(n)=O(lgn)，则对于 $n_0 = 2$，有 $2lg2 \geq T(2) = T(1) + 1 = 2$
又 $\forall n > n_0$, 若已知 $T(n) \leq 2lgn$, 有 $T(n+1) = T(\frac{n+1}{2})+1 \leq 2lg(\frac{n+1}{2})+1 = 2lg(n+1) - 2lg2 + 1 = 2lg(n+1) - 1 \leq 2lg(n+1)$
故 $T(n) = O(lgn)$

0.5 Prob5



树的深度是 $\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor$，第 h 层的值为 c(n-ha)。故可求得

$$
\begin{aligned}
O(T(n)) &= \sum_{h=0}^{\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor} c(n-ha) \\
&= c\sum_{h=0}^{\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor}(n-ha) \\
&= c\sum_{h=0}^{\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor} n - c\sum_{h=0}^{\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor} ha \\
&= O(n^2)
\end{aligned}
$$

0.6 Prob6

a $T(n) = \sqrt{n}lgn$

b $T(n) = n^2$

0.7 Prob7

不可以，由于对于递归式有 $n^{\log_2 4} < n^2 lgn$，但不存在 $\epsilon > 0$，使得 $f(n) = \Omega(n^(4+\epsilon))$。故考虑递归树。可以看出来第 i 层的复杂度为 $n^2 lg(\frac{n}{2^i})$。故总复杂度为 $n^2 lg(\frac{n^(lgn)}{2^{1+2+...+lgn}}) = n^2 lg^2(n)$