Algorithm Homework1

PB18111704 Zhu Enzuo

2020 年 12 月 6 日

0.1 Prob1

聚合分析

$Total\_Operation = N - logN + \sigma_{0<i<logN}2^i$

$Amortize\_Cost = Total_Operation/N = 1 - logN/N + (2^{(logN+1)} - 1)/N = O(logN)$

0.2 Prob2

核算法

Operation	Actual Cost	Amortized Cost
$i! = 2^k$	1	3
$i = 2^k$	2^k	2

0.3 Prob3

势能法

对于非 2 的幂的操作，累计 2 的势能。这样每当到了 2 的幂的操作就会正好累计这么多的势能。

所以摊还分析复杂度为 O(1)

0.4 Prob4

证明如下：

a

$$
\begin{aligned}
y_{k_1,k_2,...,k_d} &= \sum_{j_1=0}^{n_1-1}\sum_{j_2=0}^{n_2-1}...\sum_{j_d=0}^{n_d-1} a_{j_1j_2...j_d}\omega_{n_1}^{j_1k_1}\omega_{n_2}^{j_2k_2}...\omega_{n_d}^{j_dk_d} \\
&= \sum_{j_1=0}^{n_1-1}\sum_{j_2=0}^{n_2-1}...\sum_{j_{d-1}=0}^{n_{d-1}-1}\omega_{n_1}^{j_1k_1}\omega_{n_2}^{j_2k_2}...\omega_{n_{d-1}}^{j_{d-1}k_{d-1}}\sum_{j_d=0}^{n_d-1} a_{j_1j_2...j_d}\omega_{n_d}^{j_dk_d} \\
&= \sum_{j_1=0}^{n_1-1}\omega_{n_1}^{j_1k_1}\sum_{j_2=0}^{n_2-1}\omega_{n_2}^{j_2k_2}...\sum_{j_d=0}^{n_d-1} a_{j_1j_2...j_d}\omega_{n_d}^{j_dk_d}
\end{aligned}
$$

观察最终的求和，其为向量 $\vec{a}$ 先经过 d 维上的变换然后做 d-1 维上的变换最终做第 1 维上的变换。

b 由上问的公式，可以看出来求和号顺序的改变对结果没有影响。

c

$$
\begin{aligned}
Total\_Complexity &= \sum_{i=1}^{d} n_i log(n_i) \\
&\le n\sum_{i=1}^{d} n_i log(n_i) \quad = nlog(n_1 * n_2 * n_3 * ... * n_d) = O(nlogn)
\end{aligned}
$$