

# ВЕРОЈАТНОСТ И СТАТИСТИКА

(II колоквиум, 22.12.2012)

I група

Име и презиме: \_\_\_\_\_

бр. индекс: \_\_\_\_\_

1. (3) Нека  $X_i$  се независни случајни променливи со Пуасонови распределби  $Po(\lambda_i)$ . Функцијата изводница на Пуасонова случајна променлива  $X \sim Po(\lambda)$  е  $M_X(t) = e^{-\lambda(1-e^t)}$ . Да се определи распределбата на случајната променлива  $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ .
  
2. а) (1) Да се дефинира математичко очекување на случајна променлива од апсолутно непрекинат тип.  
б) (4) Нека  $X$  и  $Y$  се независни случајни променливи со нормални распределби,  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  и  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$  соодветно. Да се определи  $E(3X - 2XY + Y^2)$ .
  
3. а) (1) Да се наведе класичното неравенство на Чебишев.  
б) (3) Нека  $X$  е случајна променлива со Биномна распределба со  $B(n, 1/4)$ . Да се процени веројатноста  $P(|X - EX| > \sqrt{3n})$

4. (4) Даден е следниот примерок од набљудувања на обележје  $X$  на дадена популација: 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5.

Да се премета  $\min_{c \in R} \sum_{i=1}^7 (x_i - c)^2$ .

5. (4) Нека  $\bar{X}$  и  $S^2$  се просекот и дисперзија на случаен примерок со обем  $n$  од обележје  $X$  со  $E(X)=a$  и  $D(X)=\sigma^2$ . Наведете ги својствата на овие две статистики.

6. (2) Кои од следните искази се точни за непристрасен оценувач на параметарот на обележјето на популацијата? (Да се заокружи точниот одговор)

- а) Се приближува до вредноста на параметарот со зголемување на големината на популацијата.
- б) Неговото математичко очекување е исто со параметарот кој го оценува
- с) Со иста веројатност ќе биде поголем или помал од параметарот на популацијата

A. Само а)    Б. Само б)    В. Само с).    Г. а), б) и с).    Д. Точниот одговор не е даден со А, Б, В или Г

7. (2) Кој е основниот принцип на оценување по метод на максимална подобност? (Да се заокружи точниот одговор)

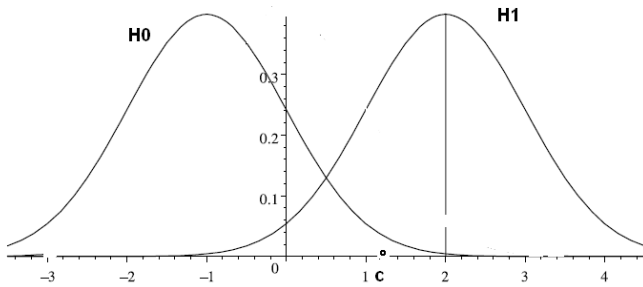
- а) Са се избере вредност на параметарот за која набљудуваните податоци имаат најголема можна веројатност или густина.
- б) Да се избере вредност на параметарот така што математичкото очекување на оценувачот ќе биде исто со параметарот што се оценува.
- с) Да се најде вредност на параметарот најблиска до податоците.
- д) Да се максимизира функцијата на подобност над просторот на примерокот.
- е) Да се најде оценувач со најмала дисперзија.

8. (2) Кои од следните искази се точни за 95% интервал на доверба за математичкото очекување на дадено обележје на популацијата? (Да се заокружи точниот одговор)

- а. Интервалот во просек вклучува 95% од вредностите во популацијата
- б. Интервалот во просек вклучува 95% од набљудувањата во примерокот
- с. Интервалот има шанси од 95% да го содржи просекот на примерокот

A. Само а)    Б. Само б)    В. Само с).    Г. а), б) и с).    Д. Точниот одговор не е даден со А, Б, В или Г

9. (4) На сликата е дадена распределбата на една тест статистика  $U$  кога е точна  $H_0$  и кога е точна  $H_1$ . Ако критичниот домен со ниво на значајност  $\alpha$  е  $U > c$ , да се дефинира веројатноста од тип I и веројатноста од тип II грешка и да се означи областа која одговара на веројатноста од тип I и веројатноста од тип II грешка.



10. (5) Нека  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  е случаен примерок од обележје  $X$  што има распределба  $F$  со конечно математичко очекување  $\mu$  и конечна дисперзија  $\sigma^2$ . Да се изведе тест за тестирање на хипотезата  $H_0: \mu = \mu_0$  наспроти алтернативната хипотеза  $H_a: \mu > \mu_0$  кај голем примерок.
11. Нека се дадени парови на точки на податоци  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , добиени со набљудување на независна променлива  $X$  и зависна променлива  $Y$ .
- (1) Како гласи регресиониот модел на популацијата?
  - (4) Наведете ги претпоставките за моделот.

# ВЕРОЈАТНОСТ И СТАТИСТИКА

(II колоквиум, 22.12.2012)

II група

Име и презиме: \_\_\_\_\_

бр. индекс: \_\_\_\_\_

1. (3) Нека  $X_i$  се независни случајни променливи со гама распределби  $(\Gamma(\alpha_i, \beta))$ . Функцијата изводница на Гама случајна променлива  $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$  е  $M_X(t) = \frac{1}{(1 - \beta t)^\alpha}$ . Да се определи

распределбата на случајната променлива  $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ .

2. а) (1) Да се дефинира математичко очекување на дискретна преброива случајна променлива.  
б) (4) Нека  $X$  и  $Y$  се независни случајни променливи со Биномни распределби  $B(m, p)$  и  $B(n, p)$  соодветно. Да се определи  $E(X^2 - 3XY + 2Y)$ .

3. а) (1) Да се наведе централната гранична теорема.  
б) (3) Ако е дадена низа од независни сл. променливи  $\{X_n\}$ ,  $n > 0$ , со Пуасонова распределба  $Po(4)$ , да се процени веројатноста  $\sum_{i=1}^{36} X_i > 120$

4. (4) Даден е следниот примерок од набљудувања на обележје X на дадена популација: 1,2,2,3,4,4,5.

Да се премета  $\min \sum_{i=1}^7 |x_i - c|^2$ .

5. (4) Нека  $\bar{X}$  и  $S^2$  се просекот и дисперзија на случаен примерок со обем n од обележје X со Нормална распределба  $N(\mu, \sigma^2)$ . Наведете ги распределбите на овие две статистики.

6. (2) Кои од следните искази се точни за непристрасен оценувач на параметарот на обележјето на популацијата? (Да се заокружи точниот одговор)

- a) Со иста веројатност ќе биде поголем или помал од параметарот на популацијата
- b) Неговото математичко очекување е исто со параметарот кој го оценува
- c) Се приближува до вредноста на параметарот со зголемување на големината на популацијата.

A. Само a)    Б. Само b)    В. Само c).    Г. a), b) и c).    Д. Точниот одговор не е даден со А, Б, В или Г

7. (2) Кој е основниот принцип на оценување по метод на максимална подобност? (Да се заокружи точниот одговор)

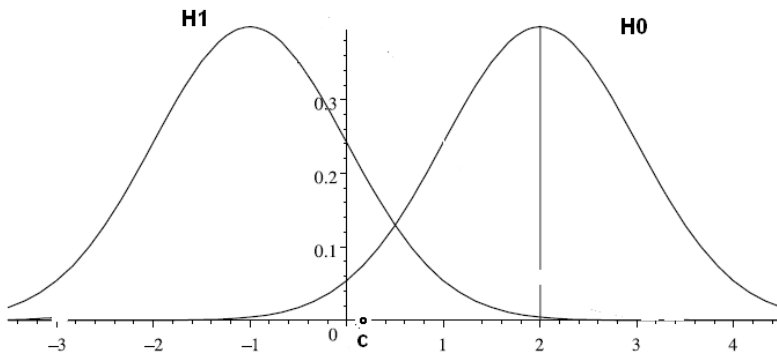
- a) Да се максимизира функцијата на подобност над просторот на примерокот.
- b) Са се избере вредност на параметарот за која набљудуваните податоци имаат најголема можна веројатност или густина.
- c) Да се избере вредност на параметарот така што математичкото очекување на оценувачот ќе биде исто со параметарот што се оценува.
- d) Да се најде оценувач со најмала дисперзија.
- e) Да се најде вредност на параметарот најблиска до податоците.

8. (2) Кои од следните искази се точни за 95% интервал на доверба за математичкото очекување на дадено обележје на популацијата? (Да се заокружи точниот одговор)

- a) Интервалот во просек вклучува 95% од набљудувањата во примерокот
- b) Интервалот во просек вклучува 95% од вредностите во популацијата
- c) Интервалот има шанси од 95% да го содржи просекот на примерокот

A. Само a)    Б. Само b)    В. Само c).    Г. a), b) и c).    Д. Точниот одговор не е даден со А, Б, В или Г

9. (4) На сликата е дадена распределбата на една тест статистика  $U$  кога е точна  $H_0$  и кога е точна  $H_1$ . Ако критичниот домен со ниво на значајност  $\alpha$  е  $U < c$ , да се дефинира веројатноста од тип I и веројатноста од тип II грешка и да се означи областа која одговара на веројатноста од тип I и веројатноста од тип II грешка.



10. (5) Нека  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  е случаен примерок од обележје  $X$  што има Нормална распределба  $N(\mu, \sigma^2)$  со непознати параметри  $\mu$  и  $\sigma^2$ . Да се изведе тест за тестирање на хипотезата  $H_0: \mu = \mu_0$  наспроти алтернативната хипотеза  $H_a: \mu < \mu_0$  кај мал примерок.

11. Нека се дадени парови на точки на податоци  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , добиени со набљудување на независна променлива  $X$  и зависна променлива  $Y$ .
- c) (1) Како гласи регресиониот модел на примерокот?
- d) (4) Ако  $r$  е коефициентот на корелација на податоците, да се интерпретираат неговите вредности.