

Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca
Facultatea de Automatică și Calculatoare
Specializarea Automatică și Informatică Aplicată



Identificarea Sistemelor

Anul universitar 2019-2020, Semestrul I

MODELAREA UNEI FUNCȚII NECUNOSCUTE

RAPORT

Studenți: Isărescu Mihai

Marteniuc Giorgia Simona

Vlassa Alexandra Anamaria

Îndrumător:

Prof. dr. ing. Bușoniu Lucian

Grupa: 30135

CUPRINS

Introducere	3
Elemente de teorie	3
Analiză și implementare	3
Rezultate obținute	5

Introducere

În cadrul proiectului, am creat un model matematic folosind metoda regresiei liniare cu funcții radiale de bază (RBF-uri) pentru aproximarea unei funcții necunoscute.

Alegerea funcțiilor RBF s-a făcut pe baza propagării erorii în sistem; față de un sistem cu regresori polinomiali, eroare se propagă local în jurul regresorului gaussian și nu global precum parabola unui polinom.

Elemente de teorie

Pornind de la formula generală a regresiei liniare $Y = \Phi\theta$, unde Y reprezintă intrarea sistemului, Φ regresorii și θ coeficienții regresorilor, iar ecuația în formă matriceală este:

$$\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \dots & \varphi_n(1) \\ \varphi_1(2) & \varphi_2(2) & \dots & \varphi_n(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(N) & \varphi_2(N) & \dots & \varphi_n(N) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix}$$

Am ales $\varphi_i = e^{-\sum_{j=1}^2 \left(\frac{x_j - c_{ij}}{b_{ij}} \right)^2}$, am creat o grilă C care conține R^2 centre, iar parametrii b_{ij} aleși au valoare egală cu distanța dintre două centre din C .

Pentru calculul valorii coeficienților θ am folosit formula $\theta = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y$.

Odată aflat θ , putem aproxima alte ieșiri folosind formula $g(x) = \sum_{i=1}^{R^2} \phi_i(x) \theta_i$.

Având modelul aproximat, am calculat eroarea medie pătratică $MSE = \frac{1}{N} \sum (y - g)^2$, iar în funcție de valorile obținute reglăm parametrii R și b pentru a obține MSE cât mai mic.

Analiză și implementare

Pentru simularea comportamentului sistemului am avut ca punct de plecare o colecție de date de intrare-ieșire separate în două seturi, de identificare și respectiv validare.

Am început prin a ne genera grila necesară, după care am trasformat intrarea X (de forma a doi vectori x_1, x_2) într-un format de un singur vector coloană care are toate combinațiile x_1, x_2 . Matricea Φ a fost generată folosind formula menționată anterior. Ieșirea Y a fost redimensionată dintr-o matrice pătratică, într-un vector coloană. Coeficienții regresorilor φ_i i-am memorat în vectorul θ , care a fost calculat folosind formula $\theta = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y$. Având coeficienții am reușit să prezicem ieșirea folosind modelul matematic obținut.

Pentru a ajusta performanțele modelului am testat mai multe valori pentru dimensiunea grilei și am ales valoarea ($R=11$) cu cea mai mică eroare obținută pe datele de validare.

id		id.Y												
id.Y														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	-768.2626	-787.1456	-720.8403	-721.9998	-682.1208	-591.0762	-608.4042	-602.4038	-520.9050	-517.7271	-492.6568	-443.9128	-407.4030	-401.6530
2	-693.1778	-635.9334	-645.1102	-564.6904	-506.7376	-503.1682	-485.0917	-453.3384	-437.6524	-412.3322	-385.4434	-368.2605	-344.6227	-250.1353
3	-541.6704	-515.2504	-494.5702	-450.1221	-479.4382	-449.9773	-380.6768	-365.3438	-342.5446	-326.0677	-288.3413	-251.5070	-278.0803	-239.8880
4	-435.4395	-395.8840	-412.8448	-375.1239	-366.5797	-348.4245	-316.7337	-293.9372	-291.5480	-264.1457	-215.2719	-163.8042	-177.1856	-187.5661
5	-350.0979	-347.5866	-350.4242	-275.8892	-284.7605	-256.1643	-224.8749	-246.1532	-190.3588	-148.4428	-150.4498	-158.4969	-109.1472	-154.1191
6	-292.1378	-281.8169	-247.7730	-246.6506	-199.8243	-226.3917	-174.7487	-158.8367	-149.6293	-122.6311	-156.4199	-124.1954	-124.5747	-87.3169
7	-201.8730	-186.2816	-201.0018	-167.3491	-193.0120	-117.6006	-121.1644	-124.3508	-146.1439	-105.3331	-116.5452	-80.4985	-43.4970	-93.7573
8	-138.7196	-180.1334	-151.6583	-156.2929	-75.5620	-104.4501	-92.8808	-90.3934	-72.5915	-61.3941	-73.8873	-59.5927	-30.3433	-18.8036
9	-168.1609	-141.6906	-82.5788	-86.3301	-118.0980	-66.2324	-101.4252	-75.2695	-32.4068	-16.6385	-12.4798	-15.3864	-32.3592	-44.4255
10	-110.2287	-74.9613	-60.8792	-78.8512	-93.2843	-61.5647	-78.2887	-37.7359	-4.8079	-4.7284	-22.6015	-12.5217	-23.0597	9.9036
11	-81.0519	-66.9213	-41.3299	-68.2062	-58.9467	-55.4187	-34.1354	-33.8441	16.7719	4.6413	12.9815	-0.7826	-15.3952	9.4515
12	-23.6302	-100.5316	-43.8939	-33.6603	-5.7232	-32.7707	-46.5888	-41.3438	-9.0448	10.1433	-40.3224	-7.1003	7.1903	-20.5188
13	-22.2770	-41.1710	1.2750	-37.4865	-34.8998	-50.2896	-24.4802	-2.6870	-1.0929	20.8745	3.2305	-27.9672	-12.3168	-0.4967
14	-46.6827	-5.8140	-22.6326	-33.6104	4.2099	0.2879	20.8988	-14.1373	7.3231	-3.7146	32.2532	40.1215	41.9163	12.2660
15	-37.4797	-38.9340	-2.7667	27.8642	-10.0066	-9.1384	-18.1789	23.1840	38.5545	-15.7307	7.6075	33.6628	-15.4369	-28.6676
16	-24.9601	7.1549	5.3261	24.5360	2.7843	20.2074	-7.7525	20.2554	3.2165	0.6796	36.3352	13.1747	-21.6910	-29.7607
17	-7.1533	-14.3585	-6.0453	-3.7262	3.6368	7.0696	10.3810	-10.6742	-29.9809	2.5917	-4.4966	3.9740	5.7657	-42.1089
18	15.7852	18.2377	24.8064	6.3420	7.7307	2.5069	1.0747	-11.5086	10.4503	28.0388	17.3015	-26.1358	-14.6455	-34.6563
19	-16.2789	14.5828	0.1352	-9.6627	38.5324	-13.1315	-22.7295	10.8464	-2.8509	18.1792	10.3661	-33.3701	-1.4633	-17.9516
20	18.9424	-14.1856	3.7650	5.7613	-20.9063	-25.2642	-8.1801	-2.8072	6.7846	-6.3998	-30.4704	-18.3319	-30.9719	-12.9016

Fig. 1. Y în formă de matrice

id id.Y Y

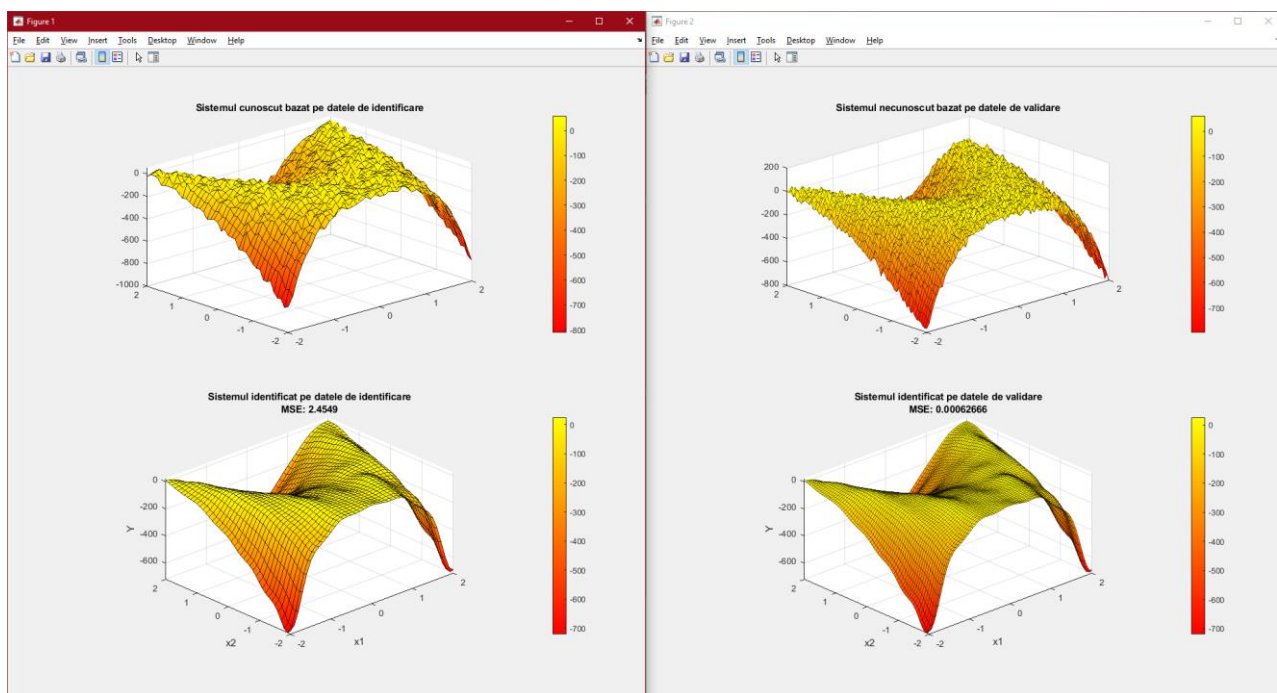
168x1 double															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
1	-768.2626														
2	-787.1456														
3	-720.8403														
4	-721.9998														
5	-682.1208														
6	-591.0762														
7	-608.4042														
8	-602.4038														
9	-520.9050														
10	-517.7271														
11	-492.6568														
12	-443.9128														
13	-407.4030														
14	-401.6530														
15	-403.5618														
16	-322.1453														
17	-317.5436														
18	-309.4686														
19	-264.9321														
20	-289.9465														

Fig. 2. Y în formă de vector coloană

id id.Y Y R_values sorted_values				
1x17 struct with 3 fields				
Fields	R	mse_id	mse_val	
1	11	2.4549	6.2666e-04	
2	12	2.0827	0.0021	
3	10	2.9498	0.0126	
4	7	2.9720	0.0134	
5	9	3.1558	0.0213	
6	13	1.5374	0.0268	
7	8	3.4187	0.0353	
8	5	3.7915	0.0599	
9	14	1.1190	0.0723	
10	6	4.0551	0.0801	
11	17	0.9262	0.1050	
12	18	0.8925	0.1117	
13	15	0.8778	0.1147	
14	16	0.8629	0.1179	
15	19	0.7338	0.1483	
16	20	0.5260	0.2125	
17	4	10.5287	0.9881	
18				
19				
20				

Fig. 3. Teste pentru determinarea celui mai bun R (dimensiunea grilei)

Rezultate obținute



Se poate observa după erorile medii pătratice și după formele graficelor că modelul aproximează funcția necunoscută foarte bine.

Anexă

În cele ce urmează este atașat codul principal din MATLAB versiunea 2019a .

```
clear
load('proj_fit_13.mat')

R = 11;

x1_min = id.X{1,1}(1);
x1_max = id.X{1,1}(end);

x2_min = id.X{2,1}(1);
x2_max = id.X{2,1}(end);

grid_x1 = linspace(x1_min, x1_max, R);
grid_x2 = linspace(x2_min, x2_max, R);

b1 = abs(x1_max - x1_min) / (R-1);
b2 = abs(x2_max - x2_min) / (R-1);

X = [];
for i = id.X{1,1}
    for j = id.X{2,1}
        elem.x1 = i;
        elem.x2 = j;
        X = [X, elem];
    end
end

C = [];
for i = grid_x1
    for j = grid_x2
        elem.x1 = i;
        elem.x2 = j;
        C = [C, elem];
    end
end

PHI = [];
for i = 1:length(C)
    PHI = [PHI, phi(X, C, i, b1, b2)'];
end

Y = Make_Y(id);

theta = inv(PHI' * PHI) * PHI' * Y;
YhatMat = g(X, theta, C, b1, b2);

close all
colormap autumn
ax1 = subplot(2,1,1);
surf(id.X{1,1}, id.X{2,1}, id.Y, 'FaceColor', 'interp', 'EdgeAlpha', 0.7)
title('Sistemul cunoscut bazat pe datele de identificare');

colorbar
```

```

ax2 = subplot(2,1,2);
surf(id.X{1,1},id.X{2,1},YhatMat', 'FaceColor', 'interp', 'EdgeAlpha',
0.7);
colorbar

title(['Sistemul identificat pe datele de identificare',newline,'MSE:
',num2str(mse(id.Y',YhatMat'))]);

xlabel('x1');
ylabel('x2');
zlabel('Y');

hlink = linkprop([ax1,ax2],{'CameraPosition','CameraUpVector'});
rotate3d on
addprop(hlink,'PlotBoxAspectRatio')

figure
colormap autumn
ax3 = subplot(2,1,1);
surf(val.X{1,1},val.X{2,1},val.Y', 'FaceColor', 'interp', 'EdgeAlpha', 0.5)
colorbar

Xval = [];
for i = val.X{1,1}
    for j = val.X{2,1}
        elem.x1 = i;
        elem.x2 = j;
        Xval = [Xval, elem];
    end
end
YhatMatVal = g(Xval,theta,C,b1,b2);

title('Sistemul necunoscut bazat pe datele de validare');
ax4 = subplot(2,1,2);
surf(val.X{1,1},val.X{2,1},YhatMatVal', 'FaceColor', 'interp', 'EdgeAlpha',
0.5)
colorbar

title(['Sistemul identificat pe datele de validare',newline,'MSE:
',num2str(mse(val.Y',YhatMatVal'))]);

xlabel('x1');
ylabel('x2');
zlabel('Y');

hlink2 = linkprop([ax3,ax4],{'CameraPosition','CameraUpVector'});
rotate3d on
addprop(hlink2,'PlotBoxAspectRatio')

```