自动化车床最优刀具检测更换模型

戚正君　任　毅　司　勇

（大连理工大学，大连　116024）

指导教师　教师组

编者按　本文对问题一给出了正确的模型和结果，对问题二也进行了详细的分析，给出了基本正确的结果，这在所有提交的论文中是较少见的．本文缺点是没有考虑5%的其它故障，问题三的讨论也不充分．

摘　要　本文通过对自动化车床100次刀具故障的记录进行数理统计分析，研究了自动化车床连续加工单一零件时刀具的检测及更换模型．首先利用概率大样本场合的 D 检验方法证明了刀具的故障发生规律服从正态分布[1]，继而求出系统工序的寿命分布函数[2]，列出以合格零件单位期望损失为目标，关于检测间隔和刀具定期更换间隔为变量的多目标函数方程，最后利用计算机进行列举比较求解，从而得出取得最大经济效益的系统工序的最优检测间隔以及最优刀具更换策略．由于刀具的故障发生服从正态分布，我们对模型进行了改进，采取有规律的不等间隔的检查方式，结果取得了相对于等检查间隔的更优解．

本文利用算法较好地解决了问题，得到了问题的优化解．对于问题1，解得换刀间隔和检查间隔分别为369和18，单位合格零件损失4.615元，采用不等间隔的损失为4.405元；对于问题2，由于情况复杂，解得换刀间隔和检查间隔分别为306和28，单位合格零件损失9.268元，采用不等间隔的损失为9.047元，从而验证了本文提出的不等间隔检查方式的更优性．

1　问题的提出（略）

2　基本假设

(1) 假设在生产任一零件时出现故障的机会均相同．

(2) 假设无论95%的刀具损坏故障还是5%的其它故障，发生故障并使恢复正常的平均费用均为3000元/次．

(3) 假设问题2中工序正常时而误认为有故障停机产生的损失费用（1500元/次）不包括刀具费用，即发现检查有误时不进行换刀．

(4) 假设发现故障和停机维修所用的时间可忽略不计．

(5) 假设生产任一零件所需时间相同．

(6) 假设检查时不停止生产，只在检查出不合格零件时才停止生产进行维修．

(7) 假设提供的刀具故障记录数据是独立同分布的．

(8) 假设5%的其它故障不予考虑．

3　符号说明

Tc　　检查零件的单位时间间隔．

T　　定期换刀的单位时间间隔．

$T(C)$　　以检测时间间隔为 Tc 时，系统工序合格零件的单位期望损失．

Tc^*	以经济损失最小为目标的最优检查的时间间隔.
T^*	以经济损失最小为目标的最优的换刀间隔.
$T(C)^*$	在 Tc^* 和 T^* 的情况下,系统工序合格零件的最小单位期望损失.
$f(x)$	系统的失效概率密度.
$F(x)$	累计失效概率,亦即寿命分布函数.
f	故障时产出的零件损失费用 200 元/件.
t	检查的费用 10 元/次.
d	发现故障进行调节使恢复正常的平均费用 3000 元/次(包括刀具费).
k	未发现故障时更换一把新刀具的费用 1000 元/次.
μ	刀具平均寿命
σ	样本标准差

4　模型的建立与求解

4.1　建立模型前的数据处理

1. 正态性检验

首先根据大样本场合($n>50$)的 D 检验验证刀具寿命记录的概率分布的方式.

$$D=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(i-\frac{n+1}{2}\right)x_{(i)}}{n^{\frac{3}{2}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}\qquad Y=\frac{(D-0.28209479)\sqrt{n}}{0.02998598}$$

正态分布的拒绝域为$\{Y\leqslant Y_{\alpha/2}$或 $Y\geqslant Y_{1-\alpha/2}\}$ 取 $\alpha=0.05$ 由于 $n=100$,则拒绝域为$\{Y\leqslant -2.54$ 或 $Y\geqslant 1.31\}$,

经计算有 $D=0.2782$, $Y=-1.2933$

由于样本未落入拒绝域,故在 $\alpha=0.05$ 时可认为刀具故障记录满足正态分布.

2. 概率密度函数的求解

于是失效概率密度函数为: $f(t)=f_N(t;\sigma^2,x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(t-x)^2/2\sigma^2}$

其中 $\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i$

$$\sigma^2\approx S^2=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2$$

数据统计得 $\bar{x}=600$　$\sigma=196.6291695$

则累积失效概率分布函数(寿命分布函数)为

$$F(t)=F_N(t;\sigma^2,\bar{x})=\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$$

4.2　模型一

我们首先建立以合格零件的单位期望损失为目标函数的数学模型.

系统工序合格零件的单位期望损失 $T(C)=\frac{\text{系统工序的期望总损失 } U_{\text{总}}}{\text{系统工序产生的合格零件总数}}$

4.2.1　首先求系统工序的期望总损失 $U_{\text{总}}$

假设自动化车床在连续运行中将发生 N 次更新过程(每次换刀或者维修换刀为一次更新过程),即包括到固定换刀间隔才换刀和发生故障后立即维修换刀两类情况.

这 N 次更新刀具的过程又可分为两种情况:

1. 换刀间隔 T 前尚未出现故障. 发生这种情况时的更新间隔均为 T,出现的次数等于刀具更新的总次数乘以以 T 为更新间隔情况下换刀前仍未出现故障的概率,即 $N[1-F(T)]$,因此定期换刀前未出现故障的情况下的总损失 U_1 等于这种情况下的刀具更新次数 $N[1-F(T)]$乘以单位更新过程的损失费用 $P_1 \times U_1 = N[1-F(T)]P_1$

2. 换刀间隔 T 前就出现故障. 这时在故障发生后进行检查并进行维修换刀,从而完成了一个更新过程. 这种情况下总的发生次数等于总的更换次数乘以系统中发生这种情况的概率,即 $N\cdot F(T)$,因此定期换刀前出现故障的情况下的总损失 U_2 等于这种情况下的刀具更新次数 $N\cdot F(T)$乘以单位更新过程的损失费用 P_2. $U_2 = N\cdot F(T)\cdot P_2$

而 $U_{总} = U_1 + U_2$

注 其中 $F(T)$为以 T 为更新周期的情况下工序出现故障的概率,即为前面的数据处理 2 中的累计失效概率分布函数, $F(t) = \int_0^t f(x)\mathrm{d}x$, 当 $t = T$ 情况下 $F(T)$的结果.

下面我们将通过对一个换刀间隔 T 的研究来求 P_1 和 P_2.

1. 求到换刀间隔 T 尚未出现故障时一次更新所消耗费用P_1:

(1) 检查费用:检查费用等于检查的次数乘以单次检查所需的费用,即 $g_1 t$

注 其中 g_1 表示一次换刀前未出现故障的过程的检查次数,等于固定换刀间隔 T 除以检查周期 Tc 所得的整数部分.

(2) 换刀费用:k

(3) 不合格零件损失费用:0

所以 $P_1 = g_1 t + k + 0$

于是,在换刀前未出现故障的情况下总的损失费用 U_1 为:一次换刀周期内的损失乘以这种情况可能发生的总的更新次数,即

$$U_1 = N[1-F(T)][g_1 t + K + 0]$$

2. 求换刀时已出现故障时一次更新过程所消耗费用 P_2

这种更新过程如图 1 所示,即在定期换刀间隔 T 内发生故障,则在故障发生后的下一次检查时及时发现并维修换刀,从而完成一个更新过程. 一次更新过程的费用包括:

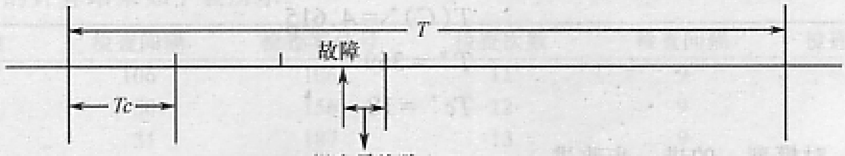


图 1

(1) 发生故障时的维修换刀费用:d

(2) 故障维修前所有的损失费用:由于故障发生的随机性,因此可以发生在 T 内的任何位置. 因此这部分的损失费用等于对于周期 T 内任意点 x 处发生故障所造成的损失与

在 x 处可能发生故障的概率的乘积进行积分的结果,即 $\int_0^T W_x \dfrac{f(x)}{F(T)}\mathrm{d}x$

其中 $\dfrac{f(x)}{F(T)}$ 表示在一个换刀周期 T 内任意的 x 处发生故障概率.

任意位置发生故障的损失费 W_x = 检查费用 + 零件损失费

a. 检查费用等于检查次数乘以单次检查费用,即 $[g_2+1]t$(g_2 为发生故障 x 前的检查次数,等于 x/Tc 所得的整数部分)

b. 零件损失费用等于从发生故障到维修检查之间产生的不合格零件数乘以单个零件的损失费用,即 $[Tc-H]f$

注　H 为发生故障的检查间隔内产生的合格零件数,即发生故障前的所有合格零件数除以检查间隔所得的余数.

所以

$$P_2=\int_0^T\{[g_2+1]t+[Tc-H]f\}\frac{f(x)}{F(T)}\mathrm{d}x+d$$

于是得到在换刀前已出现故障的情况下的损失总费用 U_2 为

$$U_2=N\cdot F(T)\left|\int_0^T\{[g_2+1]t+[Tc-H]f\}\frac{f(x)}{F(T)}\mathrm{d}x+d\right|$$

因此工序总的期望损失为 $U_{总}=U_1+U_2$

系统工序产生的合格零件总数为:换刀前没发生故障情况产生的合格零件总数加上换刀前发生故障情况下产生的合格零件总数,即

$$N[1-F(T)]T+N\cdot F(T)\int_0^T x\frac{f(x)}{F(T)}\mathrm{d}x$$

系统工序合格零件的单位期望损失 $T(C)=\dfrac{\text{系统工序的期望总损失 } U_{总}}{\text{系统工序产生的合格零件总数}}=$

$$\frac{U_1+U_2}{N[1-F(T)T]+N\cdot F(T)\int_0^T x\dfrac{f(x)}{F(T)}\mathrm{d}x}\ (U_1,U_2\text{ 见上文})$$

上式中 N 可以约去,式子变成了以 T,Tc 为变量,$T(c)$ 为目标函数的方程. 为使 $T(c)$ 最小,我们利用计算机进行穷举比较法求解. 首先选取 $T=50$ 为步长进行求解比较,求得 $T=400,Tc=16$ 时出现最优解;然后在 $T\in(350,450)$ 之间逐一进行求解比较,从而得到模型的优化解如下:

$$T(C)^*=4.615$$
$$T^*=369$$
$$Tc^*=18$$

4.3　对模型一的进一步改进

由于故障记录满足正态分布,因此在等检查间隔内产生的不合格零件数并不相等,即故障发生在各间距内的概率并不相等,也就是说这样便不符合在生产任一零件时出现故障的机会均相等的假设. 为了使在任意检查区间内故障发生的概率积累均相同,我们根据故障记录的正态分布规律,开始时工序故障发生的概率小,到工序运行中期达到最大,然后再变小的变化规律,如图采用不等间隔的检查方式,即检查间隔由大一小一大的方式进行检

查,从而相对于等间隔检查更加合理. 如图 2 所示:

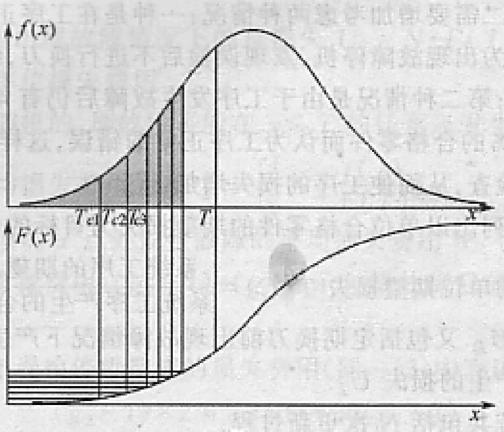


图 2

由图 2 已知单位检查间隔内产生的不合格零件的累计失效概率密度用面积 $area$ 表示,各块面积大小相等,即在各单位检查间隔内产生不合格零件的概率积累均相同,由此可以确定检查间隔 Tc 具体的变化规律. 设在一个换刀间隔内检测间隔次数为 $g_1(T)$,图 2 下半部分中的纵坐标累积失效概率即为图 2 上半部分中的面积 $area$,

因此, $$g_1(T)=F(T)\ div\ area\ (div\ 表示整除) \tag{1}$$

设在 T 的周期内任一点 X 处发生故障,设在故障 x 之前的检测次数为 $g_2(x)$

则 $$g_2(x)=[F(x-1)\ div\ area]+1 \tag{2}$$

于是得到损失零件数 $H(x)=F^{-1}[g_2(x)\times area]-x \quad (H(x)<T-x)$

如果 $H(x)\geqslant T-x$ 时则损失零件数为 $T-x$ (3)

我们将改进后的(1)、(2)、(3)的结果应用于模型一中,得到了模型一的更优解和更好的效益.

$$T(C)^*=4.405$$

$$T^*=369$$

$$area^*=0.006$$

改进后的模型得到的更优解较改进前期望损失的最小值降低了 5%,对于不等间隔检查,其检查间隔 $Tc(n)$ 的计算公式为:

$$Tc(n)=F^{-1}[area\times n]-F^{-1}[area(n-1)]$$

$Tc(n)$ 的计算结果如下表所示.

检查次数	检查间隔	检查零件号	检查次数	检查间隔	检查零件号
1	106	106	11	9	303
2	50	156	12	9	312
3	31	187	13	9	321
4	24	211	14	7	328
5	19	230	15	8	336
6	16	246	16	7	343
7	14	260	17	7	350
8	12	272	18	6	356
9	12	284	19	7	363
10	10	294	20	6	369

4.4　模型二

相对于模型一，模型二需要增加考虑两种情况：一种是在工序正常工作时有可能检查到2%的不合格零件而误认为出现故障停机，发现误检后不进行换刀，继续正常工作，每次误停机将造成1500元的损失；第二种情况是由于工序发生故障后仍有40%的合格零件产生，必然会导致因为检查到40%的合格零件而认为工序正常的错误，这样会增加不合格零件的数量和相应增加不必要的检查，从而使工序的损失增加.

同模型一，我们同样列出以单位合格零件的期望损失为目标的函数方程

$$\text{系统工序合格零件的单位期望损失 } T(C)=\frac{\text{系统工序的期望总损失 } U_{\text{总}}}{\text{系统工序产生的合格零件总数}}$$

系统工序的总损失 $U_{\text{总}}$ 又包括定期换刀前出现故障情况下产生的损失 U_1 加上定期换刀前未出现故障情况下产生的损失 U_2.

我们仍假设整个系统共包括 N 次更新过程.

换刀前出现故障的更新次数：$N\cdot F(T)$ （$F(T)$的含义同模型一）

换刀前未出现故障的更新次数：$N[1-F(T)]$

所以

$$U_1 = N[1-F(T)]P_1$$
$$U_2 = N\cdot F(T)\cdot P_2$$

下面我们将通过对一个换刀间隔 T 的研究来求 P_1、P_2

1. 换刀前未出现故障的更新过程的单位损失费用 P_1 包括：

(1) 一次换刀费用：k

(2) 检查费用：单位更新周期内的检查次数乘以单次检查费用

即 $g_1 t$

同模型一我们用 g_1 表示 T/Tc 的整数部分

(3) 由于车床在正常工作时将会产生2%的不合格产品，如果在检测时正好被检测到，将误认为有故障而停机，造成的误停机损失总费用等于误停机的次数乘以一次误停机的损失.

误检测而停机的次数＝总的检测次数×在正常情况下不合格产品所占总产品的百分含量，即：$2\% g_1=\frac{g_1}{50}$

所以，误检测而停机造成的损失费用为：$\frac{g_1}{50}\times 1500=30g_1$

(4) 在工序正常运行中产生的不合格零件的损失费用＝单位换刀间隔 T 内产生的不合格零件总数 $T\times 2\%$ 与单个不合格零件的损失 f 的乘积，即

$$Tf2\% = \frac{Tf}{50}$$

合计(1)、(2)、(3)、(4)各项的费用，即为换刀前未出现故障的更新过程的单位损耗费用 P_1：

$$P_1 = k + g_1 t + 30g_1 + \frac{Tf}{50}$$

所以换刀前未出现故障的情况下的损失费用 U_1 合计为：

$$U_1 = N[1 - F(T)]\left[k + g_1 t + 30 g_1 + \frac{Tf}{50}\right]$$

2. 同上,定期换刀前出现故障情况下的总损失 $U_2 = N \cdot F(T) \cdot P_2$,其中 P_2 为换刀前出现故障的更新过程的单位损失费用.

由于故障的出现是随机的,即故障可能在 $x \leqslant T$ 的任意点发生,同模型一,系统在此单位刀具更换间隔内的平均损失费用为:$P_2 = \int_0^T W_X \frac{f(x)}{F(T)} \mathrm{d}x$

其中单位换刀间隔内的 x 点处发生故障的平均损失费用 W_2 包括:

(1) 发生故障前的检查费用:$(g_2 - 1)t$(g_2 表示包括故障后的那次检查的故障前所有检查次数的和)

(2) 发生故障前由于误检停机造成的损失费用(同一(3)中表述):

$$(g_2 - 1) \times 2\% \times 1500 = 30(g_2 - 1)$$

(3) 正常工序中 2%的不合格零件造成的损失:

$$2\% xf = \frac{xf}{50}$$

(4) 发生故障后的检查所需费用:

① 因为每次故障后要进行一次检查,而这次检查时可能检查到 40% 的合格品,也就是下一次是否进行检查的可能性为 40%,于是对从 g_2 次(记为第 0 次)到 g_1(记为第 $g_1 - g_2$ 次)进行累计作为平均检查次数,即

$$\sum_{i=0}^{g_1 - g_2} 0.4^i \quad (\text{当 } T - x > H \text{ 时})$$

其中 H 等于 T_C 减去 X 除以 T_C 所得的余数,即为发生故障的检查间隔内,发生故障到下次检查之间产生的零件数.

这时发生故障后的检查所需费用为 $\sum_{i=0}^{g_1 - g_2} 0.4^i t$

② 而当 $T - x \leqslant H$ 时,即换刀发生在从故障发生到下一次检查维修之间的时候,检查次数为 0,所以检查费用为 0.

(5)对故障进行维修换刀的平均损失:

$$(1 - 0.4^{g_1 - g_2 + 1})d$$

其中 $0.4^{g_1 - g_2 + 1}$ 为第 $g_1 - g_2 + 1$ 次检查时检查到合格品时的概率.

(6)发生故障后产生的不合格零件的平均损失费用:

① 当 $T - x > H$ 时即当故障发生后第一次检查到合格零件而误认为是无故障发生直到检查出故障而进行换刀或维修为止的情况. 这时损失可分为两个部分:

a. 发生故障产生后到第一次检查的所产生不合格零件的损失,即

$$0.6Hf$$

b. 从发生故障后的第一次检查直到维修换刀时产生不合格零件的损失.

于是当 $T - x > H$ 时,发生故障后产生的不合格零件的平均损失费用:

$$(H + 0.4 T_c + 0.4^2 T_c + \cdots 0.4^{g_1 - g_2} T_c) 0.6 f$$

② 当 $T - x \leqslant H$,即固定换刀发生在从故障发生到第一次检查之间时,发生故障后产生

的不合格零件的平均损失费用：

$$(T-x)\cdot 0.6f$$

所以换刀前出现故障的情况下总的损失费用 $U_2 = N\cdot F(T)\int_0^T W_X \frac{f(x)}{F(T)}\mathrm{d}x$

其中 W_X 等于(1)、(2)、(3)、(4)、(5)、(6)各项损失之和.

因此，整个系统的平均损失为

$$U_{总} = \left[k + g_1 t + 30g_1 + \frac{Tf}{50}\right]\cdot N\cdot[1-F(T)] + \int_0^T W_X \frac{f(x)}{F(T)}\mathrm{d}x\cdot N\cdot F(T)$$

共产生的合格零件总数为：

(1)换刀前未发生故障所产生的总的合格零件个数：它等于换刀前未发生故障的情况下产生的零件总数与合格零件所占百分比的乘积

$$N[1-F(T)]T\times 98\%$$

(2)换刀前发生故障所产生的总的合格零件个数

$$N\cdot F(T)\left[\int_0^T\left(98\%x + \frac{(6)}{0.6f}0.4\right)\frac{f(x)}{F(T)}\mathrm{d}x\right]\quad ((6)\text{ 结果见上式})$$

于是，模型二中系统工序的单位期望损失为

$T(C)=\dfrac{W_{总}}{(1)+(2)}$从而再次转化为确定 T 和 Tc 的值使 $T(c)$ 最小的关系式. ((1)、(2)结果见上式)

同模型一利用计算机进行穷举比较法计算得出最优解

$$T(C)^* = 9.268$$

$$T^* = 306$$

$$Tc^* = 28$$

同模型一的改进，我们对模型二进行不等间隔检查的改进，用改进的模型一中的 $g_1(T)$(单位换刀间隔内的检查次数)、$g_2(x)$(在故障 x 前进行检查的次数)、$H(x)$(从损坏到下次检查间产生的零件数)代入模型二中，求得

$$T(C)^* = 9.047$$

$$T^* = 316$$

$$area^* = 0.017$$

相对于模型一，由于模型二发生故障后仍有 40% 的合格品产生，因此给检查带来了困难，为了尽量减少误检造成的损失，于是相应的检查间隔变大而换刀间隔减小，从而单位期望损失也由 4.405 变为 9.047.

4.5　模型二检查方式的改进(问题 3 的解答)

对于问题二，由于工序正常时产出的零件仍有 2% 为不合格品，而工序故障时产生的零件有 40% 为合格品，这样工作人员在通过定期检查单个零件来确定工序是否出现故障的检查方式必然会导致正常工序时因检查到不合格零件而误认为出现故障停机的错误和工序发生故障后检查到的仍是合格品而认为工序正常的错误，都将造成很大损失. 于是我们建议工作人员当检查到一个零件为合格品时，再检查一个零件，若仍是合格品则判断工序正常，若为不合格品则判定为系统工序出现故障. 这样虽然会相应地增加检查的费用，但大大降

低了因误检而造成的损失，从而使系统工序获得更高的效益．（编者按：这就是 Bayes 决策的思想，最好具体算一下这样处理后，减少了多少误判概率．）

5 对模型的评价和改进

本文所阐述的模型是以单位期望效益为目标的更新报酬定理[3]的改进与推广．它广泛适用于自动化车床的管理系统，但只能是单道工序加工单一零件的情况，却对扩展到多道工序和多种零件的复杂车床管理系统产生指导意义．本文还应用等概率法对等间隔检查方式进行了改进，利用失效概率密度函数使检查间隔符合等概率分布，使模型更优．本模型对可能发生的故障损失逐一进行了细致的分析求解，但多目标的模型方程比较繁琐，于是本模型选择了用计算机进行了给定范围的穷举比较法来进行求解．

在假设中我们假设检查零件时如检查到不合格零件，立即停止生产(即不再产生不合格产品)，而实际中由于检查时间不容忽视，必然会多产生一些不合格产品，本模型中并没有考虑，会造成一些误差．另外本模型没有对故障及维修时间提出具体要求，即在整个工序中如何尽量提高生产效率问题上留下了遗憾．

参考文献

[1] 茆诗松，周纪芗．概率论与数理统计．中国统计出版社．

[2] *蔡 俊．可靠性工程学．黑龙江科学技术出版社．*

[3] 沈玉波，冯敬海．可修系统的最优检测更新模型．*数学的实践与认识，1996.3.*

这种创造过程所牵涉的是摸索、疏忽、猜测和假设。想象、直觉、预测、洞察实验、机会、运气、艰苦的工作以及巨大的耐心都被用来掌握一个关键的概念，构成一个猜想以及找到一个证明。总体来说，数学创造在于"用自己的智慧做自己最厌烦的事，同时把握住一切可能。"

数学家在创造性工作中所能得到的满意，射猎的兴奋，发现的颤音，取得成就的意识，以及成功的得意，所有这些都比他在按照演绎模式对证明做最后整理的工作中所能得到的要多得多，强烈得多。

Morris Kline；摘自 J. N. Kapur, Thought on Nature of Mathematics of Alexandrov et al., 1973；中译本，《数学家谈数学本质》，北京大学出版社，1989，320 – 321；

自动化车床管理

于　杰　蒋爱民　李荣冰
(南京航空航天大学,南京　210016)
指导教师　倪　勤

编者按　本文思路清晰,叙述简洁扼要,在处理5%其他故障方面有独到之处. 但问题二的分析和结果有不足和错误.

摘　要　本文讨论了系统的最优维修策略问题,考虑到题目中所涉及的变量大多为随机变量,我们建立了单目标的期望值模型. 并利用计算机采用穷举搜索法求解得第一种情况最优解为每生产18个零件检查1次,当检查到20次时更换刀具,这时生产单个零件的最低平均费用为4.62元.

最后,我们指出了模型中一些未考虑的因素,分析了这些因素可能对模型产生的影响,并提出了模型的改进方案.

1　问题的提出(略)

2　基本假设

(1) 假定生产任一零件出现故障机会均等,且相互独立

(2) 发现故障时无法区分刀具故障和其它故障

(3) 其它故障服从几何分布

(4) 每次只检查1个零件

(5) 零件检查时间很小,可忽略不计

(6) 检查间隔是相等的

(7) 假设随机变量 $X1$、$X2$ 是相互独立的,$X1$、$X2$ 的含义见符号说明

3　符号说明

n:每生产 n 个零件检查一次

m:检查第 m 次时更换新的刀具

T:定期更换刀具时已生产的产品的总数即刀具更换周期 $T = n \cdot m$

$\bar{T}$:刀具更换周期的数学期望(均值)

F:故障时产出的零件损失费用 $F = 200$ 元/件

J:进行检查的费用 $J = 10$ 元/次

D:发现故障进行调节使恢复正常的平均费用　$D = 3000$ 元/次(包括刀具费)

K:未发现故障时更换一把新刀具的费用 $K = 1000$ 元/次

M:工序正常而误认为有故障停机产生的损失费用 $M = 1500$ 元/次

$C(n, m)$:整个工序在刀具更换周期的总费用的数学期望值

$S(n, m)$:整个工序在刀具更换周期的生产单个零件平均费用的数学期望值

X_1:表示首次产生刀具故障时已加工的零件数

X_2:表示其它原因引起的首次故障时已加工的零件数

X:首次故障时已加工的零件数即故障间隔

4 问题分析

自动化车床发生故障时,要及时实施维修,如果检查周期太长,故障不能及时发现,给生产带来损失;检查周期太短,又会增加费用,因为车床出现故障是随机的,问题是如何安排设备检查方案,使得刀具更换时,每个零件的平均费用最低.

对于第1种情况若检查零件为合格的,则工序未出现故障,此时更换刀具称为预备性替换;若检查零件为不合格的,则工序必已出现故障,此时应立即更换刀具,此称为事后替换(参见文献[1]).

第2种情况较为复杂,因为仅凭1次检查零件是否合格,不能准确判断工序是否正常,这时我们可以分情况讨论,如果发现零件不合格,就停机检查工序是否正常,若正常继续生产,如果不正常就更换刀具,如果到周期结束时即第 m 次检查后零件仍合格必须换刀具.

为解决此问题我们建立了单目标期望值模型.

5 模型的建立

1.刀具故障完成零件个数的数据统计分析.

我们使用 MATLAB 软件包对100次刀具故障记录数据处理作直方图,用分布拟合检验法可以证明刀具故障数据近似服从正态分布.

假设 H_0: X_1 的概率密度为

$$f(x_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad -\infty<x<+\infty$$

由极大似然估计法得

$$\hat{\mu}=600,\hat{\sigma}=196.6292,$$

将 $X(0\sim1200)$ 分为12个区间,若 H_0 为真,则 X_1 的概率密度为

$$f(x_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\times196.6292}e^{-\frac{(x-600)^2}{2\times196.6292^2}}$$

按上式查标准正态分布函数表可得概率 P_i

$$\therefore\quad\sum_{i=1}^{12}(f_i-nP_i)^2/nP_i=4.09$$

因为

$$\chi^2_{0.05}(12-2-1)=\chi^2_{0.05}(9)=16.919>4.09$$

所以接受假设,在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下接受总体服从正态分布(参见文献[2]).

我们已假设其它随机原因对于任一零件出现故障的概

X_2 服从几何分布,其分布函数是

$$F(x_2)=\sum_{k=1}^{[x_2]}p(1-p)^{k-1},\ (0<p<1)$$

由题意知，刀具损坏故障占工序故障 95%，而其它故障占 5%，近似

$$\frac{E(X_2)}{E(X_1)} = \frac{1}{\mu p} = \frac{95\%}{5\%} = 19$$

求得

$$p = 0.000087719$$

所以总故障间隔 $X = \mathrm{MIN}(X_1, X_2)$，$X$ 分布函数

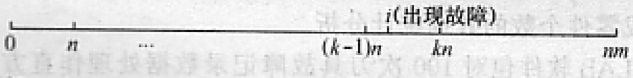
$$\begin{aligned} F_x(x) &= 1-(1-F_{x_1}(x))\,(1-F_{x_2}(x)) \\ &= 1-\left(1-\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)\left(1-\sum_{k=1}^{[x]} p(1-p)^{k-1}\right) \\ &= 1-\left(1-\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)(1-p)^{[x]} \quad (\text{参见文献[2]}) \end{aligned}$$

2. 模型 1：

对于第一种情况，设每生产 n 个零件检查 1 次，检查 m 次换刀具，若第 m 次检查零件仍合格，则前面生产的零件全部为合格的，即工序正常，这时费用记为 C_1，则

$$C_1 = (J \cdot m + K) \times P\{X > n \cdot m\}$$

若第 k 次检查零件不合格，则工序必出现故障，设故障出现在第 $(k-1)n+i$ 个（如图）.



这时费用记为 C_2

$$C_2 = \sum_{k=1}^{m}\left[J \cdot k + D + F \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} i \cdot P\{X = (k-1)n+i\}}{P\{(k-1)n < X \leqslant kn\}}\right] \cdot P\{(k-1)n < X \leqslant kn\}$$

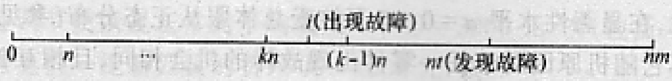
对于刀具更换周期 T 来说，因为它是 n, m 的函数，所以也是随机变量，求其数学期望值：

$$\begin{aligned} \overline{T} = E(n,m) &= \int_0^{nm} t\,\mathrm{d}F(t) + \int_{nm}^{\infty} nmf(t)\,\mathrm{d}t \\ &= mnF(nm) - \int_0^{nm} F(t)\,\mathrm{d}t + nm[1-F(nm)] \\ &= \int_0^{nm} [1-F(t)]\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \overline{S}(n,m) = \frac{\overline{C}(n,m)}{\overline{T}} = \frac{C_1 + C_2}{T} \qquad (\text{参见文献[3]})$$

3. 模型 2：

对于第二种情况，我们分为两类（如图）：



(1) 工序在生产第 $kn+i$ 个零件时出现故障，其概率为 $P\{X = kn+i\}$.

情况一：虽然故障发生在第 $(kn+i)$ 个零件，但直到第 t 次检查时才发现，并换刀具. 第 $(k+1)n$ 到第 tn 个零件中检查到的 $t-k-1$ 个零件均为合格的零件，其概率为 $0.6\times$

0.4^{t-k-1}.

此情况中,在生产第 $kn+i$ 个零件前工序正常. 不合格零件的平均个数为$(kn+i-1)\times0.02$ 个,因零件不合格损失$(kn+i-1)\times0.02\times F$ 元. 被查到的 k 个零件中平均有 $k\times0.02$ 个不合格,此种情况下停机检查工序需花费 $k\times0.02\times M$ 元.

生产第 $kn+i$ 个零件到 tn 个零件时,工序处于故障状态,不合格零件的平均个数是$(tn-kn-i+1)\times0.6$,零件不合格损失的费用为$(tn-kn-i+1)\times0.6\times F$ 元,到第 t 次检查完换刀,检查费用为 $J\cdot t$.

上述情形对于每一可能的 t,费用为 $S_{k,i,t}$

$$S_{k,i,t}=\{J\cdot t+D+[(tn-kn-i+1)\times0.6+(kn+i-1)\times0.02]\times F+0.02Mk\}\times\frac{0.6\times0.4^{t-k-1}}{tn},$$

$$t=k+1,k+2,\cdots,m$$

情况二,直到必须换刀具时,仍未发现工序故障,此情况的概率 0.4^{m-k}.

此情况下的损失包括:检查费 Jm、换刀具费 K、零件损失费$[(mn-kn-i)\times0.6+(kn+i+1)\times0.02]\cdot F$、故障出现前的误判损失费为 $0.02Mk$.

∴ 总平均费用为

$$S_{k,i,m}=\{J\cdot m+D+[(mn-kn-i)\times0.6+(kn+i+1)\times0.02]\times F+0.02Mk\}\times\frac{0.4^{m-k}}{m\,n}$$

将情况一和情况二合并得:情况(1)下的平均费用为

$$S_1=\sum_{t=k+1}^{m}S_{k,i,t}\qquad k=0,1,2,\cdots,m-1;\ i=1,2,\cdots,n$$

(2) 在必须换刀具的第 m 次检查以前工序一直正常,其概率为 $P\{X\geqslant nm+1\}$,单个零件平均费用为

$$S_2=(J\cdot m+K+0.02F\cdot n\cdot m+0.02M\cdot m)/(m\cdot n)$$

由(1)和(2)得总平均费用为

$$\bar{S}_{n,m}=\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=1}^{n}S_1\cdot P\{X=kn+i\}+S_2\cdot P\{X\geqslant nm+1\}$$

6 计算方法设计和计算机实现

对于模型 1,我们用 C 语言编程并采用穷举法进行搜索. 由 X_1 呈正态分布可知,当刀具生产 600 个零件附近时出现故障概率最大. 所以刀具更换周期 T 即 $m\cdot n$ 的最优解应在 600 附近,我们取 200～900 范围. 又因为 n 与 m 有关系,既不可能只检查 1 次就更换刀具,也不可能每生产一个零件都检查一次. 所以我们可以判定 m 和 n 的最优解必落在(10～100)之间. 现在先以 10 为步长计算费用. 可以发现最优解的区间 m 在(20～30),n 在(10～20)之间,改变步长为 1,在上述区间内再进行搜索得最优解为 $n=18$, $m=20$, $\bar{S}_{n\cdot m}=4.62$(详见附表).

对于模型 2,刀具更换周期的数学期望 $\bar{T}$ 近似用 $n\cdot m$ 代替,误差不大,用同样方法搜索得最优解为 $n=48$, $m=6$, $\bar{S}_{n\cdot m}=11.16$.

7　模型的改进

对于模型 2,我们作改进方案分析.

工序故障不服从均匀分布,而我们在模型 2 的建立和求解中均采用等间隔检查. 这是模型 2 的一个缺点,因此,我们依据工序故障服从的分布函数,用变间隔去逼近理想情况. 随着加工的零件的增多,刀具出现故障的概率会大大增加,故检查间隔应随之减小.

我们将间隔取为等差数列,利用这种方案在模型 2 得到的最优解的基础上进一步搜索,可以得到更好的结果.

参考文献

[1]　可靠性、维修性的数理基础.〔日〕三根久　河合一著. 机械工业出版社.

[2]　概率论与数理统计(第二版). 浙江大学,盛骤著. 高等教育出版社.

[3]　运筹学随机模型. 严颖、成世学等著. 中国人民大学出版社.

附　表

n \ m	10	20	30	40	50	60	70	80	90
10	11.14	6.33	5.04	4.83	5.20	5.87	6.60	7.19	7.56
20	5.63	4.71	6.31	8.12	8.87	8.98	8.99	8.99	8.99
30	4.77	7.07	10.02	10.48	10.49	10.49	10.49	10.48	10.48
40	5.20	10.72	12.06	12.07	12.07	12.07	12.06	12.06	12.06
50	6.88	13.45	13.68	13.68	13.68	13.68	13.68	13.67	13.67
60	9.60	15.30	15.31	15.31	15.31	15.30	15.30	15.30	15.29
70	12.90	16.96	16.96	16.99	16.94	16.94	16.94	16.93	16.94
80	15.22	18.60	18.60	18.59	18.59	18.58	18.58	18.57	18.57
90	19.11	20.25	20.25	20.89	20.23	20.23	20.22	20.21	20.21
100	21.47	21.90	21.90	21.89	21.88	21.87	21.87	21.86	21.85

车 床 管 理 优 化 模 型

张继伟 韩方华 顾利龙

(甘肃工业大学,兰州 730050)

指导教师 夏亚峰

编者按 本文的特色在于利用管理成本理论,得到了由四个部分组成的单位工件成本的表达式,及最优检查周期所满足的方程,作者特别细致地注意到由检查滞后而引起的成本部分,继而在定期更换刀具及考虑到其他非刀具因素故障情况下对成本公式作了修正,并用搜索法求得了最优解.

摘 要 本文讨论了自动化车床连续加工零件工序定期检查和刀具更换的最优策略.

针对问题一,应用管理成本理论结合概率统计方法,建立定期检查调节零件的平均管理成本的优化设计模型,通过计算机求解、模拟,得到工序设计效益最好的检查间隔和刀具更换间隔.针对问题二,在问题一的基础上,利用概率知识调整了检查间隔中的不合格品数带来的平均损失,同时加上了因工序正常而误认为有故障停机产生的平均损失,然后建立起目标函数,得到工序设计效益最好的检查间隔和刀具更换策略.对于工序故障采用自动检查装置,设计出了自动检查调节系统,并给出了算法框图,有效地避免工序正常而误认为有故障停机损失,提高工序效益.

1 问题的重述(略)

2 模型的假设

1. 工序出现故障是完全随机的,生产任一零件时出现故障的机会相同;

2. 累积的100次刀具故障记录中每一个记录是刀具完成的零件数,其中有一个不合格品(即滞后数);

3. 有完全充足的刀具可供更换;

4. 故障时产生的零件损失费理解为每产生不合格品就损失的费用;

5. 对一个零件进行检查的过程中,生产并不停止.从生产开始到检查结束,有1个零件生产出来.

3 参数的说明

f ——故障时产出的每件零件损失费用,$f=200$ 元/件;

t ——每次进行检查的费用,$t=10$ 元/次;

d ——发现故障进行调节使恢复正常的平均费用,$d=3000$ 元/次;

k ——未发现故障时更换一把新刀具的费用,$k=1000$/次;

L ——定间隔检查调节单位零件平均管理成本;

n ——检查间隔(生产多少个零件检查一次);

$\bar{u}$ ——平均故障间隔(每两次故障之间平均生产的零件数);

$\bar{u}^*$ ——采用定期更换后的平均故障间隔;

$\bar{u}'$ ——平均更换刀具间隔；

$\bar{u}_{定}$ ——考虑其它原因后定期更换刀具时的平均故障间隔；

$\bar{u}_{其它}$——由其它原因产生的平均故障间隔；

l ——检查滞后数，即检查过程中工序所生产出的零件数；

p' ——刀具寿命低于平均故障间隔中的零件数的比率；

p_1 ——除刀具损坏外其它原因的故障率.

4 问题分析

工序制造出的零件，总能以某种单位进行计量，要保持工序的正常状态，就要经常对工序进行检查，所谓对工序进行检查是通过对零件的检查来施行的. 检查过于频繁，自然能使工序经常处于正常状态而少出不合格品，然而，这将使诊断费用过高；诊断间隔过长，虽然可以减少诊断费用，但由于不能及时调节工序而可能导致大量不合格品出现，这也必将提高单位零件的平均管理成本，从而所求问题就转化为当检查间隔为多少时其平均管理成本最低.

5 模型的建立

对 100 个数据进行统计分析，利用 χ^2 检验得出这些数据符合正态分布 $N(600, 195.6^2)$.

5.1 问题 1

单位零件的平均管理成本 L 由下列四部分组成：

Ⅰ = 单个零件的平均检查费；

Ⅱ = 单个零件的平均调节费；

Ⅲ = 由检查滞后所产生的不合格带来的平均损失；

Ⅳ = 由检查间隔中的不合格品带来的平均损失.

因 n 个零件检查一次，所以每个零件所分推到的检查费用为 t/n，即：

$$\mathrm{I} = t/n$$

由于检查到故障时才进行调节，而平均每 $\bar{u}$ 个零件出一次故障，因此，每个零件所分推到的调节费是，即：

$$\mathrm{II} = d/\bar{u}$$

至于Ⅲ，由于检查时生产并不停止，而检查又需一定时间. 假设检查一个零件的同时，已又有 l 个零件生产出来. 因此，每一次故障由于检查滞后造成损失为 $l \cdot f$，于是每个零件所分推到的检查滞后损失为 $l \cdot f/\bar{u}$，即：

$$\mathrm{III} = l \cdot f/\bar{u}$$

最后来分析Ⅳ，注意每 n 个零件才检查一次，在某检查点一但发现零件为不合格品，一般说来，不合格品就不只这一个，详细情况见下图：

	前一检查点		某一检查点
(1)	0 0 0	⋯	0 0 0 x
(2)	0 0 0	⋯	0 0 x x
(3)	0 0 0	⋯	0 x x x
⋮		⋮	
$(n-1)$	0 x x	⋯	x x x
(n)	x x x	⋯	x x x x

注 1."0"代表零件是合格品;2."x"代表不合格品.

对于(1)情况,恰在某一检查点工序不正常,而前面是正常的.因此,恰有一个不合格品;(2)情况是在某检查点的前一个零件,工序开始不正常.因此有两个不合格品,…(n)情况是,在前一个检查点后,工序就不正常了,因此,有 n 个不合格品.所以,平均来说,在某个检查点发现零件不合格时,在检查间隔中平均有$\frac{1+2+\cdots+n}{n}=\frac{n+1}{2}$个不合格品.由此带来的损失为$\frac{n+1}{2}f$,平均每 $\bar{u}$ 个零件出一次故障,因此每个零件所分推到的该项损失是$\frac{n+1}{2}\cdot\frac{f}{\bar{u}}$,即:

$$\text{IV}=\frac{n+1}{2}\cdot\frac{f}{\bar{u}}$$

综上,可得出定间隔检查调节单位零件的平均管理成本的基本公式

$$L=\frac{t}{n}+\frac{d}{\bar{u}}+\frac{l\cdot f}{\bar{u}}+\frac{n+1}{2}\cdot\frac{f}{\bar{u}} \tag{1}$$

最好的检查间隔,即使 L 达到最小的 n,两边对 n 求得:

$$L'=-\frac{t}{n^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{f}{\bar{u}}$$

令 $L'=0$,解得:

$$n=\sqrt{\frac{2t\cdot\bar{u}}{f}} \tag{2}$$

如果再考虑对发现故障进行调节等一些细节,可得最宜检查间隔 n 的修正公式为:

$$n=\sqrt{\frac{2(l+\bar{u})t}{f\text{-}d/\bar{u}}} \tag{3}$$

由于检查滞后生产 l 个不合格品,可取 $l=1$ 即生产出一件不合格品就确定工序不正常.

由公式(1)可知要降低管理费用,可让平均故障间隔增大,定期更换刀具的办法可使平均故障间隔增大,不过由于进行定期更换刀具,刀具费也将会增加,这样管理费用就会增大,因此采用该办法是否合算的问题,要通过计算来加以验证.

由于工序故障绝大部分来自刀具损坏,具体来讲:

(1)其它原因的故障率 $p_1=0.05$;

(2)记刀具发生故障时平均加工的零件数低于 $\bar{u}'$件的比率为 p'.

引入定期更换后的平均故障间隔系数 $\bar{u}^*$，那么：

$$L^* = \frac{k}{u'} + \left[\frac{t}{n} + \frac{d}{u^*} + \frac{l \cdot f}{u^*} + \frac{n+1}{2} \cdot \frac{f}{u^*}\right] \tag{4}$$

对于 $\bar{u}^*$，可作如下估算：

$$\overline{u^*} = \frac{产品数}{故障数} = \frac{a \times \bar{u}'}{a \times p'} = \frac{\bar{u}'}{p'}$$

另外，工序故障可能由其它原因引起虽它仅占 5%，但也要考虑进去，则定期更换刀具平均故障间隔$\overline{u_{其它}}$可由下式给出：

$$\overline{u_{其它}} = \frac{产品数}{其它故障数} = \frac{产品数}{总故障数} \times \frac{总故障数}{其它故障数} = \bar{u}' \cdot \frac{1}{p'}$$

定期更换刀具时平均故障间隔$\overline{u_{定}}$，取$\overline{u^*}$，$\overline{u_{其它}}$的调和平均：

$$\bar{\mu}_{定} = \frac{1}{\dfrac{1}{u^*} + \dfrac{1}{u_{其它}}}$$

问题 1 的模型为：

$$\text{Min}: L_{定} = \frac{k}{u'} + \left[\frac{t}{n} + \frac{d}{\bar{u}_{定}} + \frac{l \cdot f}{\bar{u}_{定}} + \frac{n+l}{2} \cdot \frac{f}{\bar{u}_{定}}\right] \tag{5}$$

令 $L'_{定} = 0$ 得最宜检查间隔为：

$$n = \sqrt{\frac{2 \cdot \bar{u}_{定} \cdot t}{f}} \tag{6}$$

修正公式为：

$$n = \sqrt{\frac{2(\bar{u}_{定} + l)t}{f\text{-}d/\bar{u}_{定}}} \tag{7}$$

对该模型的求解可通过计算机编程进行一维搜索实现，其结果为：最宜检查间隔 $n = 15$(件)，最佳换刀间隔 $\bar{\mu}' = 365$(件)，最小单位零件的平均管理成本 $L = 4.65$(元).

5.2 问题 2(略)

5.3 问题 3

设计安装工序自动检查调节装置，对每个零件进行检查，假设检查费为零. 下面给出的自动检查调节系统可以有效避免问题 2 中正常工序而误认为故障停机产生的损失，从而降低单位零件的平均管理成本.

设 n 为自动检查调节装置统计的件数，本系统按顺序检查 n 个零件出现的不合格品数 m，建立动态检查模式，自动记录按顺序检查的 n 和 n 个零件中出现的不合格品数 m，并且自动记录工序正常时所检查的零件数 k，有以下四种情况：

1. 顺序统计的 n 个零件，次品率低于 2%，认为工序正常，继续生产；

2. 顺序统计的 n 个零件，次品率高于 2% 低于 60%，但所有已检查零件的次品率低于 2%，认为工序正常，继续生产；

3. 顺序统计的 n 个零件，次品率高于 60%，但所有已检查零件的次品率低于 2%，认为工序正常，继续生产；

4. 顺序统计的 n 个零件次品率高于 60%，并且所有检查零件的次品率高于 2%，认为

工序故障，系统自动发出信号并进行调节．（算法框图略）

6 模型的优缺点

优点：

(1)本文建模思想易于理解，模型可操作性强，有广泛的应用价值．

(2)所建两个模型的平均管理成本目标函数呈下凸曲线形态，由计算机求解极小值，所得结果稳定性强，而且得到的解与实际情况相吻合，能用一般的常识解释．

(3)本文用到的数学方法(一般的概率统计知识和一元函数求极值)都比较简单．

(4)由对已往数据通过概率统计建立的模型，得出的结论对以后工序长期生产有指导价值．

缺点：

(1)没有考虑到刀具寿命对零件的影响，降低了模型的实用性；

(2)零件生产过程的连续性有所欠缺，在模型的改进上扩展性不是太强．

参考文献

[1] 沈恒范．概率论与数理统计教程(第三版)．高等教育出版社，北京，1995．

[2] 现代质量管理统计方法编写组．现代质量管理统计方法．期刊出版社，北京，1988．

[3] 姜启源．数学模型．高等教育出版社，北京，1998．

[4] 谭浩强．C程序设计．清华大学出版社，北京，1998．

[5] 吕松棠等．C语言科学与工程程序库．电子工业出版社，北京，1992．

工程是"把科学和数学的原理应用于诸如设计、制造，以及有效又经济的结构、机器、过程和系统的操作的实际目的。"

The American Heritage Dictionary of the English Language, 4rd Edition, Houghton Mifflin Company, 2000, p. 592.

自 动 化 车 床 管 理

石 敏 林超友 方 斌

(海军工程大学,武汉 430033)

指导教师 数模组

编者按 该文思路正确,考虑较全面,对问题一给出了正确的模型和结果,并对检查方式、灵敏度分析、误差分析进行了详细讨论.本文另一特色是进行了计算机模拟,这对许多类似的问题都行之有效.本文缺点是对问题二的模型有欠缺.

摘 要 本文对自动化车床管理问题进行了讨论,将检查间隔和刀具更换策略的确定归结为单个零件期望损失最小的一个优化问题,并提供了有效算法.对问题一,得到检查间隔 $\tau_0=18$,定期换刀间隔 $\tau_1=342$,相应的单个零件期望损失费用 $C=4.75$ 元的最优解,并用蒙特卡罗法对结果进行了模拟检验.对问题二,得到检查间隔 $\tau_0=11$,定期换刀间隔 $\tau_1=242$,单个零件期望损失费用 $C=7.22$ 元.对问题三,我们采用新的改进方案使单个零件期望损失费用降为 5.34 元.本文还对变检查间隔、参数灵敏性、误差分析等进行了讨论.

1 问题的重述(略)

2 问题的分析

由于刀具损坏等原因会使工序出现故障,工序出现故障是完全随机的.工作人员通过检查零件来确定工序是否出现故障,并且计划在刀具加工一定件数的零件后定期更新刀具.

因此,给定检查间隔,对零件作检查,当发现零件不合格时则认为工序发生了故障并立即进行停机检查,若实际存在故障则进行修理,无故障则继续生产;当检查发现零件合格则不干涉设备的工作.当到了定期更换刀具时刻,即使设备未出现故障,也进行刀具更新.

显然,检查间隔过大,可能会使设备长时间处于故障状态,造成损失增大;若检查时间间隔过小,会使检查费用增加.定期更换刀具的情况亦是如此.问题是寻找最优的检查间隔和定期更换刀具的间隔,使工序效益达到最好.这里将工序效益最好表示为单个零件的期望损失最小,并把相邻两次刀具更新之间称为一个周期.则

$$\text{单个零件的期望损失费用 } C=\frac{\text{一个周期内的期望损失}}{\text{期望周期长}}$$

3 假 设

1. 生产单个零件的时间设为 1.
2. 不考虑检测时间和故障调节及更换刀具的时间.
3. 更换刀具或故障调节后,工序恢复初始状态.
4. 工作人员一经检查发现不合格零件,即认为工序出现故障.
5. 一台自动化车床只有一把刀具.

4 符号约定

f 产出不合格品的损失费用 $f=200$ 元/件

t	检查的费用 $t = 10$ 元/次
d	故障调节所需的平均费用 $d = 3000$ 元/次
k	未发现故障时更换一把新刀具的费用(定期更换刀具费) k = 1000 元/次
X	工序无故障工作时间
$F(x)$	X 的分布函数
$p(x)$	X 的概率密度函数
τ_0	检查间隔时间
τ_1	定期更换刀具间隔时间
$E(L)$	一个周期内的期望总损失费用
$E(T)$	期望周期长
C	单个零件期望损失费用

5 模型的设计及结果

5.1 建模的准备

1.100 次刀具故障记录的统计分析

首先画出频数分布的直方图(略). 通过检验可知:在 $\alpha = 0.10$ 的显著性水平下,刀具无故障工作时间近似服从 $N(\mu, \sigma^2)$分布,其中 $\mu = 600, \sigma^2 = 195.64^2$.

2. 工序无故障工作时间的概率分布

由于刀具损失故障占 95%,起决定作用. 我们认为,整个工序无故障工作时间长的分布近似于刀具无故障工作时间长的分布,即 $X \sim N(0.95\mu, (0.95\sigma)^2)$

3. 刀具更换策略

在定期更换前,必须进行检查. 若检查出故障,立即修理,若没有检查出故障,再进行定期更换. 为了实际操作的方便,可将定期更换周期定在第 m 次检查后,即若 τ_0 为常数,则 $\tau_1 = m\tau_0 (m = 1, 2, \cdots)$

5.2 模型的建立及求解

1. 模型 I(问题一的模型)

若 $X > \tau_1$

损失为: $L_1 = mt + k$;

若 $n\tau_0 < X \leqslant (n+1)\tau_0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots, m-1)$

损失为: $L_n = (n+1)t + d + [(n+1)\tau_0 - X]f$

期望损失 $E(L) = \int_{m\tau_0}^{\infty} L_1 p(x) \mathrm{d}x + \sum_{n=0}^{m-1} \int_{n\tau_0}^{(n+1)\tau_0} L_n p(x) \mathrm{d}x$

期望周期长 $E(T) = m\tau_0 \int_{m\tau_0}^{\infty} p(x) \mathrm{d}x + \sum_{n=0}^{(m-1)} \int_{n\tau_0}^{(n+1)\tau_0} (n+1)\tau_0 p(x) \mathrm{d}x$

要使效益最好,等价于求 τ_0、τ_1,使 $C = \dfrac{E(L)}{E(T)}$达到最小. 经计算得 $\tau_0 = 18$(即每生产 18 个零件检查一次),$\tau_1 = 342$(即每生产 342 个零件定期更换刀具一次),单个零件期望损失费用 $C = 4.75$ 元.

2. 模型Ⅱ(问题二的模型略)

3. 模型Ⅲ(问题三的模型)

考虑到一般设备使用期限内可分为稳定期和不稳定期.这里的稳定是指故障少,而所谓不稳定是指故障多.

我们改进等间隔检查方式,使其在稳定期内检查间隔长,在不稳定期内检查间隔短,从而获得更高的效益.这里检查间隔 τ_0 与时间 x 有关,记作 $\tau_0(x)$.

也就是说故障率大时(即设备运行到 x 时刻未发生故障的条件下,$[x,x+dx]$时间内设备发生故障的条件概率大),那么单位时间内的检查次数 $n(x)$也随之增大.$\left(\text{易知 } \tau_0(x)=\dfrac{1}{n(x)}\right)$.我们取

$$n(x)=\sqrt{\frac{f}{t}\cdot\frac{p(x)}{1-F(x)}}$$

其中:$p(x)dx$ 是设备在$[x,x+dx]$内发生故障的概率,

$1-F(x)$是 x 时刻设备未发生故障的概率.

因此,$\dfrac{p(x)dx}{1-F(x)}$是设备到 x 时刻未发生故障的条件下,$[t,t+dt]$内设备发生故障的条件概率.这里

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}185.9}e^{-\frac{(x-570)^2}{2\times185.9^2}}$$

根据以上分析,检查方式可表述如下:

第 1 次检查时间间隔为 $d_1=\left[\dfrac{1}{n(0)}\right]$;$\left(\left[\dfrac{1}{n(0)}\right]\text{表示对}\dfrac{1}{n(0)}\text{取整},d_i\text{ 表示第 } i \text{ 次检查的时间间隔}\right)$

第 2 次检查时间间隔为 $d_2=\left[\dfrac{1}{n(d_1)}\right]$;

第 3 次检查时间间隔为 $d_3=\left[\dfrac{1}{n(d_1+d_2)}\right]$;

… …

结果列表如下:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
d_i	72	42	32	26	22	20	18	16	15	14	13	12	12	11	10

i	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
d_i	10	10	9	9	9	8	8	8	8	7	7	7	7	7	7

i	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	……
d_i	7	6	6	6	6	6	6	6	6	6	5	5	5	……

将以上 d_i 代入问题(2)的目标函数 $C=\dfrac{E(L)}{E(T)}$中,即可得期望损失费用 $C=5.344$,比

费用小于问题(2)的期望损失费用.

并且在问题(2)定期更换刀具 $\tau_1=242$ 情况下,我们的检查方式为:对第 72、114、146、172、194、214、232、242 个零件检查,大大减少了检查次数,从而可以使效益提高.

6 模型的检验

1. 计算机模拟检验

针对问题一的情况,我们采取蒙特卡罗法进行模拟检验,具体步骤如下:

1)工序无故障工作时间 $X\sim N(570,185.9^2)$,用蒙特卡罗法模拟产生 1000 个无故障工作时间的伪随机数 $X_i(i=1,2,\cdots,1000)$ (编者按:1000 太少了)

2)给定检查间隔 τ_0 和刀具定期更换间隔 τ_1,可以计算出 X_i 所对应的损失费用 L_i

$$L_i=\begin{cases} k+\dfrac{\tau_1}{\tau_0}t & [X_i]>\tau_1 \quad ([X_i]\text{表示对 } X_i \text{ 取整}) \\ d+\dfrac{\tau_1}{\tau_0}\cdot t & [X_i]=\tau_1 \\ d+\left[\dfrac{X_i}{\tau_0}\right]t+(\tau_0-[X_i]\%\tau_0)f & [X_i]<\tau_1 \quad (\%\text{ 表示求余运算}) \end{cases}$$

3)计算单个零件的损失费用 C

$$C=\frac{\sum_{i=1}^{1000}L_i}{\sum_{i=1}^{1000}T_i} \qquad \text{其中 } T_i=\begin{cases}\tau_1 & [X_i]\geqslant\tau_1 \\ \left(\left[\dfrac{X_i}{\tau_0}\right]+1\right)\tau_0 & [X_i]<\tau_1\end{cases}$$

4)对 τ_0,τ_1 进行搜索,取 $\tau_0\in(0,200)$,$\tau_1\in(0,1000)$求得单个零件损失费用 C 最小时的最优检查间隔 $\tau_0=18$,定期更换刀具间隔,$\tau_1=378$,相应的单个零件损失费用为 4.16 元.

将模型 I 的结果与蒙特卡罗模拟的结果进行比较,列表如下

	τ_0	τ_1	C
模型 I	18	342	4.75
蒙特卡罗模拟	18	378	4.16

由以上数据观察可发现用计算机模拟的结果与模型 Ⅰ 的结果比较接近.因此说明模型 Ⅰ 的结果较为稳定.

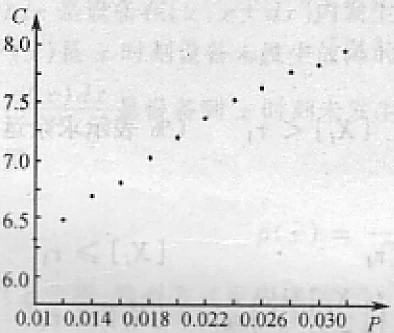
2. 灵敏度分析

对于 $X\sim N(570,185.86^2)$的正态分布,我们改变 P(P 为工序正常时不合格产品的比例)和 q(q 为工序故障时不合格产品的比例)得下表及 $P-C$、$q-C$ 散点图:

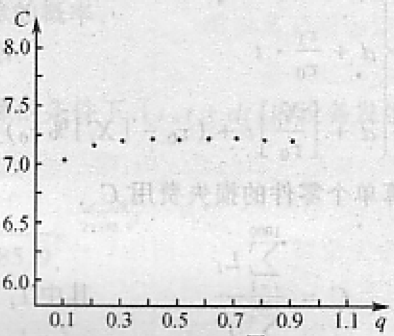
P	0.01	0.012	0.014	0.016	0.018	0.02	0.022	0.024	0.026	0.028	0.03	0.035
τ_0	13	13	12	12	12	11	11	11	10	10	9	7
m	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22
τ_1	286	286	264	264	264	242	242	242	220	220	198	154
C	6.3	6.5	6.7	6.88	7.05	7.22	7.37	7.52	7.64	7.76	7.85	7.93

q	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
τ_0	12	12	12	11	11	11	11	11	11
m	22	22	22	22	22	22	22	22	22
τ_1	264	264	242	242	242	242	242	242	242
C	7.06	7.14	7.18	7.21	7.22	7.22	7.22	7.21	7.20

由 $P-C$、$q-C$ 图可知，P、q 的变化都会对单个零件的损失费 C 产生影响. 由 $P-C$ 图可知，P 与 C 之间的关系基本上是线性的且 P 对 C 的影响较 q 显著. 从 $q-C$ 图可知，当 q 达到0.4左右时，q 的继续增大对 C 的影响不大. 总之，C 对 P 的变化反应灵敏，而对 q 的变化反应迟钝. 因此在实际管理中只要控制好 P 的大小就能较好地控制单个零件的期望损失费. 我们要尽量减小 P，使 C 达到最小，从而使效益最高.



$P-C$图



$q-C$图

同理，改变误认为有故障而停机产生的损失费(1500 元/次)，发现它的变化对 C 的影响并不明显.

3. 误差分析

我们在分析工序无故障的工作时间时，用刀具无故障工作时间的分布来近似，但实际工序无故障的工作时间是未知的. 若用正态分布来描述，其均值 μ、均方差 σ 的不确定性，对结果会造成误差. 我们利用模型 I 的结果来进行误差分析，得下表：

μ	570	570	580	590	600	600
σ	185.86	195.64	185.86	185.86	185.86	195.64
C	4.75	4.9	4.63	4.51	4.4	4.55
Δ	0	3.2%	2.5%	5%	7.4%	4.2%

Δ 代表相对误差，用 $\left|\dfrac{C-C_0}{C_0}\right| \times 100\%$ (C_0 取 4.75)表示.

由表可见均值 μ、均方差 σ 的较小变化对结果的影响不大，因此我们采用文中所给方法近似工序无故障工作时间的分布是合理的.

7　模型的评价及改进

1．本模型通过对检查间隔和换刀间隔进行遍历搜索，得到了固定检查间隔下的最优解．

2．进行蒙特卡洛方法模拟的次数有限、使得模拟结果精度有限，误差较大．

3．对问题三，只提供了一种有效的方案，而没能给出最优解．我们建议提出一种简单易行的方案，便于工作人员在实际操作中按方案进行检查．

参考文献

[1]　曹晋华等．可靠性数学引论．科学出版社，北京．
[2]　蔡常丰．数学模型建模分析．科学出版社，北京．
[3]　徐士良．C常用算法程序集．清华大学出版社，北京．

在应用数学中一种特别具有挑战性的活动是发现应用数学的新思想并在至今没有系统地使用数学方法的领域中发展数学理论(社会科学和生物学是常提起的例子)。这些努力可以导致新的数学思想和定理(通过抽象、推广和别的工作)，这就其自身而言就是纯数学的一部分。认识这种二元性对于应用数学的精神是必要的。强调了这种二元性，显然就强调了应用数学和纯数学，以及应用数学与实验科学间的差别。

C. C. Lin（林家翘）．摘自 J. N. Kapur，Thought on Nature of Mathematics of Alexandrov et al.，1973；中译本，《数学家谈数学本质》，北京大学出版社，1989，p. 62.

自动化车床管理建模分析

北京大学

孙山泽

今年全国大学生数学建模竞赛采用了一道有随机因素的优化题——自动化车床管理(A题). 该题有较强的实际应用背景,在一般数学建模教材和可靠性书藉中,通常将工序流程中的定期检查和预防性保全刀具更换作为两个论题,分别进行讨论. 本题将这两个措施同时用于一个工序流程,另外除刀具故障外还涉及非刀具故障,这两点增加了问题的难度,此次竞赛中许多队完全不考虑非刀具故障,显然降低了难度.

解决此问题,当然首先要建立损失函数(效益函数). 日本质量管理专家田口玄一博士在其著作《线上质量管理》一书中曾讨论过这一问题,给出了本题第一问情形下的损失函数式. 此次竞赛中,有些同学查到了有关的参考书藉,如1988年,学术期刊出版社出版的《现代质量管理统计方法》. 这次我们也选刊了一篇利用田口的损失函数式解题的参赛论文. 但从这些论文可以看到,多数同学对这一损失函数式的来龙去脉并不是了解得很清楚. 下面我们对此解法作一较详细的分析,然后再讨论此次参赛中较多的队采用的另一种解法.

1 解法一

1. 首先我们明确一下解题的假设,该题给出了100次刀具故障记录,应该看到这批数据产生的经验分布或由它们拟合的连续型分布是一个条件分布,是在无刀具故障,新刀起始点已知的条件下,刀具的寿命分布. 当工序流程中存在非刀具故障,且出现非刀具故障进行修复时,不必换刀(实际工作中一般是这样处理的),这样工序流程没有明显的周期状态. 我们随机地在工序流程中取一点作为管理的始点,在这种考虑下,假定在流程中各点发生故障的无条件概率均相同,是一个合理的假定. 这一假定与前述刀具寿命的条件分布是正态分布或其他类型分布不是一回事,两者并不相悖.

工序检查和刀具更换均考虑固定间隔.

现在我们将模型的基本假设复述如下:

1) 刀具每加工 u 件零件后定期更换,更换费用为 k.

2) 每生产 n 件零件定期进行检查,检查费用为 t,通常 $n \ll u$,为简化计算,不妨设 $u = sn$.

3) 在1),2)下,工序的平均故障间隔记为 c 件,此时平均故障率 $p = 1/c$.

4) 检查时发现零件不合格,认定为工序故障,进行修复,修复的平均费用为 d.

5) 每件不合格品的损失费为 f.

6) 刀具寿命的分布由所给数据确定记为 $F(x)$.

2. 效益函数可考虑为生产每个零件的平均费用 L. 从理论上讲,考虑为每个合格零件的平均更为合理,但由于工序故障率较小,在不同的换刀间隔和检查间隔下,生产的合格零件数与全部零件数之比变化很小,因而两种考虑下建立的效益函数的最优解不会有大的差异,而考虑为生产每个零件的平均费用时,效益函数会简单些. L 包括预防保全费用 L_1,检

查费用 L_2，和故障造成的不合格品损失和修复费用 L_3.

3. 第一问的效益函数：按每个零件分摊.

$$L_1 = \frac{k}{u}, L_2 = \frac{t}{n}, L_3 = [(m+h)f + d]/c,$$

其中 m 为相邻两次检查的后一次检查发现故障时，n 件零件中不合格品的平均数，h 为检查发现故障至停止生产的过程中，产生的零件数，此数对问题的解法无影响，不妨设 $h=0$. 于是问题为确定 u，n 使

$$L = \frac{k}{u} + \frac{t}{n} + \frac{mf}{c} + \frac{d}{c} \tag{1}$$

最小. 式中的 m，c 可如下计算.

m 的计算. 由假设 3)，在相邻两次检查的后一次发现故障的条件下，出现 i 件不合格品的概率为 $(1-p)^{n-i}\cdot p/[1-(1-p)^n]$，$i=1,2,\cdots,n$，于是

$$m = \sum_{i=1}^{n} i(1-p)^{n-i}p/[1-(1-p)^n]. \tag{2}$$

上式经运算可得

$$m = \frac{n+1}{2} + \frac{n^2-1}{12}p + O(p^2) \approx \frac{n+1}{2},$$

其中由于 $p=\frac{1}{c}$ 很小，将 $O(p)$ 忽略，代入(1)得

$$L = \frac{k}{u} + \frac{t}{n} + \frac{(n+1)f}{2c} + \frac{d}{c}. \tag{3}$$

c 的计算. 首先根据给出的 100 个数据算出无预防性更换时，刀具故障平均间隔为 $a=600$ 件. 由题设刀具故障占 95%，非刀具故障占 5%，故非刀具平均故障间隔为 $b=a\cdot\frac{95}{5}=11\,400$ 件.

其次由 100 个数据确定刀具寿命的经验分布或拟合分布 $F(x)$.

当进行预防保全定期 u 更换刀具时，刀具故障的平均间隔

$$a_u = \frac{1}{F(u)}\left[\sum_{c=1}^{u-1} i\cdot(F(i)-F(i-1)+u(1-F(u))\right], \tag{4}$$

若 $F(x)$ 为连续型分布，有密度函数 $f(x)$，则可有

$$a_u = \frac{1}{F(u)}\left[\int_0^u tf(t)\mathrm{d}t + u(1-F(u))\right].$$

工序的平均故障间隔 c 由 a_u 和 b 决定，满足 $1/c = 1/a_u + 1/b$，

$$c = \frac{1}{1/a_u + 1/b}, \tag{5}$$

所以 c 是 u 的函数.

4. 对目标函数(3)的参数优化可如下进行. 给定 u，计算出 c，则 L 是 n 的函数，由(3)不难求得

$$n = \sqrt{\frac{2ct}{f}} \tag{6}$$

L 达到极小，按一定的步长，比如步长取 50，对 $u=100,150,200,\cdots$ 逐个求出 L 的极小值及相应的 n 值，其中使 L 最小者所对应的 u 和 n 即为所求.

有部分参赛队,对两参数的目标函数,固定第一个参数,求得另一参数的最优值. 然后在此最优值下,求第一个参数的优化值,例如在 $n=1$ 或不考虑检查时求出最优的 u 值 u_1,固定 u_1 再求出 n 的优化值 n_1,认为 (u_1, n_1) 即为最优解,这种单参数分别寻优的做法是不正确的. 此种做法只有在目标函数非常规则的情况下才能找到最优点.

5. 第二问的效益函数要考虑两种误判. 一是工序正常时检查到不合格品误判停机,将使检查的费用增加;二是工序故障时检查到合格品,将继续生产直到下一次检查,使不合格品损失增加,此时两次故障间由此产生的不合格品平均数为

$$\begin{aligned}&\frac{n+1}{2}\\&+W\cdot n\Big[\sum_{j=1}^{s}\Big(\sum_{i=1}^{j}iW^{i-1}(1-W)\Big)\frac{(1-p)^{(j-1)n}-(1-p)^{(jn)}}{1-(1-p)^{n}}\Big]\\&\approx\frac{n+1}{2}+n\,\frac{W}{1-W},\end{aligned}\tag{7}$$

式中 $W=40\%$ 为工序故障时的合格品率,p 为工序在生产一零件时的平均故障率,$u=sn$. 故在第二问的条件下,效益函数应为

$$L=\frac{k}{u}+\frac{1}{n}[t+(1-p)^{n}ve]+\frac{f}{c}\left(\frac{n+1}{2}+n\,\frac{W}{1-W}\right)+\frac{d}{c},\tag{8}$$

式中 $v=2\%$ 是工序正常时零件的不合格品率,$e=1500$ 为第一种误判产生停机的损失费.

确定目标函数后,解的其他过程与第一问类似.

6. 第三问是一个开放性的问题. 有充分的空间可供讨论思考. 这次竞赛中有不少队提出了自己的想法,主要可归纳为两类. 一类是建议减少误判,在检查时不限于检查一个零件,适当时可再查一个零件. 另一类是建议在刀具新使用时采用大的检查间隔,而刀具使用一定时间后采用小的检查间隔,但讨论大多比较抽象,没有具体的计算结果支持.

2 解法二

1. 本次竞赛中多数队采用有更新点的周期计算效益函数. 此解法需假定工序故障后一律换刀具,不论是刀具故障还是非刀具故障均更换新刀,形成更新点. 主要的几点假定可明确如下:

1) 工序故障均换刀,从新刀至下一次工序故障或预防性换刀构形一个周期.

2) 非刀具故障在任一零件处发生的概率均相同,记为 q.

3) 无非刀具故障的条件下,从更新点起刀具寿命为 $F(x)$(以下设 $F(x)$ 为连续型分布,有密度函数 $f(x)$).

4) 检查的固定间隔记为 n,预防性换刀的固定间隔 $u=sn$.

计算一个周期内每一零件平均费用.

2. 不考虑非刀具故障时,分两种情况考虑费用.

1) 刀具至 u 未坏,费用为 $c_1=(s-1)t+k$.

2) 刀具在 u 前故障,费用为

$$c_2=\sum_{i=1}^{s-1}\left(it+d+f\cdot\frac{n+1}{2}\right)\frac{F(in)-F((i-1)n)}{F(u)}$$

$$+\left[(s-1)t+k+f\frac{n+1}{2}\right]\frac{F(u)-F((s-1)n)}{F(u)}.$$

两种情况的加权平均费用

$$C_a=c_1(1-F(u))+c_2F(u)\approx\left(d+f\frac{n+1}{2}\right)F(u)$$
$$+k(1-F(u))+\frac{t}{n}\left[u-\int_o^u F(x)\mathrm{d}x\right], \tag{9}$$

而在一周期内完成零件的平均数

$$T_a=\int_o^u xf(x)\mathrm{d}x+u(1-F(u))=u-\int_o^u F(x)\mathrm{d}x. \tag{10}$$

每一零件平均费用

$$L=\frac{C_a}{T_a}. \tag{11}$$

有一部分参赛队对两种情况分别求每一零件平均费用，然后再加权平均，也应该是合理的.

3．考虑非刀具故障. 可算出在工序中每一零件处非刀具平均故障率 $q=1/11400$.

u 之前出现非刀具故障的费用

$$C_o=\sum_{j=1}^{u-1}\left(\left(\frac{j}{n}\right)t+d+f\frac{n+1}{2}\right)(1-q)^{j-1}q$$
$$+[(s-1)t+k](1-q)^{u-1}, \tag{12}$$

u 之前出现非刀具故障，平均产出零件数

$$T_o=\sum_{j=1}^{u-1}j(1-q)^{j-1}q+u(1-q)^{u-1}=\frac{1-(1-q)^u}{q}. \tag{13}$$

无非刀具故障条件下，平均费用 C_a，产出零件平均数 T_a，如 2 中所叙. 故加权平均的费用和零件数

$$C=C_o[1-(1-q)^u]+C_a(1-q)^u,$$
$$T=T_o[1-(1-q)^u]+T_a(1-q)^u. \tag{14}$$

每一零件平均费用为

$$L=\frac{C}{T}. \tag{15}$$

由此目标函数可确定最优的 (u,n).

有些同学忽略了刀具寿命分布 $F(x)$ 是无非刀具故障条件下的条件分布，出现各种情况加权时，权的总和不等于 1 的错误.

4．有许多参赛队采用修正刀具寿命分布 $F(x)$ 的办法，得到工序故障间隔的分布(包括刀具故障和非刀具故障)按照前述 2 确定目标函数. 修正的方法有下列几种：

1) 设 x_1 为刀具故障间隔(刀具寿命)，x_2 为非刀具故障间隔，$Y=\min(x_1,x_2)$ 为工序故障间隔，求得 Y 的分布 $G(x)$，以 $G(x)$ 取代 $F(x)$.

2) 直接将刀具故障间隔 x_1 乘以 0.95，取 $Y=0.95x_1$，作为工序故障间隔. 以 Y 的分布 $G(x)$ 取代 $F(x)$.

3) 以 $G(x)=0.95F(x)+0.05H(x)$，其中 $H(x)$ 是非刀具故障间隔的分布，取代 $F(x)$.

这三种修正办法,1)似乎比较合理,2)和3)则较为粗糙.

5. 第二问和第三问的考虑与解法一差不多,需要对目标函数中的某些费用作适当调整,发表的参赛论文中有较详细的考虑,这里不再赘述.

以上是关于基本模型和基本解法的分析. 另外在具体的数值计算上,有些参赛队在选用适宜的数学软件和编程上也存在一些问题, 在模型基本正确的情况下,解出的最优解与正确答案相去甚远.

参考文献

[1] 田口玄一. 线上质量管理. 日本标准协会,1979

[2] 现代质量管理统计方法编写组编. 现代质量管理统计方法. 学术期刊出版社,1988

掌握从现实到抽象的数学模型的变换,以及对精确程度和可逼近程度做出鉴别,都需要直觉感觉,而后者是依靠经验才变得敏锐了的。此外,也可能常常还牵扯到构造那些真正困难的数学问题,而这些问题又难到目前科学的已有技术无法解决的地步。这种困难性成为某些数学家从事智力冒险的部分原因,也是他们所达到满意的本质,这些数学家是和工程师、自然科学家共同工作以掌握"真实"问题的,而那些问题又是在人们延伸他们对自然的理解与控制时大量出现的。

R. Courant, 摘自 J. N. Kapur, Thought on Nature of Mathematics of Alexandrov et al., 1973; 中译本,《数学家谈数学本质》,北京大学出版社, 1989, p. 124.