眼科病床的合理安排模型

摘要

本文运用排队论的知识研究了眼科病床的合理安排问题。

在模型一中，我们参考了排队论中平均等待时间的标准，并从住院时间里分离出一个非必要手术等待时间，运用层次分析法构造损失代价函数作为评价标准。

运用模型一中的损失代价函数，我们在每次安排病床时，均以此函数求得的值作为优先级判断标准，建立当前最小损失优先规则模型（模型二）。同时，我们参考了现代计算机的作业调度算法理论，改进了 SJF 调度算法，不以整个住院时间，而以等待手术时间作为优先级判断标准，建立了 SPTF 算法（模型三）。用这种方法和 FCFS 算法求解问题二，得出 SPTF 算法更优的结论。

针对问题三，我们分数据量是否充足两种情况进行讨论，并就数据不足的情况建立了模型四。对于问题四，我们用 SPTF 法检验各种手术时间安排的损失代价，得出现行手术时间不用调整的结论。

其后，基于高负荷的 G/G/K 理论，我们运用等待时间期望近似公式建立了模型五，求解出问题五的最优病床数为：

病人类型	白内障（单眼）	白内障（双眼）	青光眼	视网膜疾病	外伤
病床数	8	16	15	30	10

最后，我们就模型五进行了稳定度分析，发现该模型稳定性很高，易于医院在实际中运用。

关键词：排队论　损失代价函数　SPTF 算法　高负荷 G/G/K 理论

目录

一. 问题重述

某医院眼科门诊每天开放，住院部共有病床 79 张。该医院手术主要分四大类：白内障、视网膜疾病、青光眼和外伤。

白内障手术较简单，而且没有急症。目前该院是每周一、三做白内障手术，此类病人的术前准备时间只需 1、2 天。做两只眼的病人比做一只眼的要多一些，大约占到 60%。如果要做双眼是周一先做一只，周三再做另一只。

外伤疾病通常属于急症，病床有空时立即安排住院，住院后第二天便安排手术。

其他眼科疾病比较复杂，有各种不同情况，但大致住院以后 2-3 天内就可以接受手术，主要是术后的观察时间较长。这类疾病手术时间可根据需要安排，一般不安排在周一、周三。由于急症数量较少，建模时这些眼科疾病可不考虑急症。

该医院眼科手术条件比较充分，在考虑病床安排时可不考虑手术条件的限制，但考虑到手术医生的安排问题，通常情况下白内障手术与其他眼科手术（急症除外）不安排在同一天做。当前该住院部对全体非急症病人是按照 FCFS（First come, First serve）规则安排住院，但等待住院病人队列却越来越长，医院方面希望你们能通过数学建模来帮助解决该住院部的病床合理安排问题，以提高对医院资源的有效利用。

问题一：试分析确定合理的评价指标体系，用以评价该问题的病床安排模型的优劣。

问题二：试就该住院部当前的情况，建立合理的病床安排模型，以根据已知的第二天拟出院病人数来确定第二天应该安排哪些病人住院。并对你们的模型利用问题一中的指标体系作出评价。

问题三：作为病人，自然希望尽早知道自己大约何时能住院。能否根据当时住院病人及等待住院病人的统计情况，在病人门诊时即告知其大致入住时间区间。

问题四：若该住院部周六、周日不安排手术，请你们重新回答问题二，医院的手术时间安排是否应作出相应调整?

问题五：有人从便于管理的角度提出建议，在一般情形下，医院病床安排可采取使各类病人占用病床的比例大致固定的方案，试就此方案，建立使得所有病人在系统内的平均逗留时间（含等待入院及住院时间）最短的病床比例分配模型。

二. 问题分析

这是一个以需要住院的病人为顾客源输入，病床安排为排队规则，病床为服务机构的典型排队论问题。[1]

问题的特点是不同病人比例、住院天数的差异大，这使得 FCFS 规则并非最优。难点是入院人数、出院人数及术后住院观察时间都是不满足特定分布的随机过程，这使得直接计算排队时间和逗留时间的数学期望难度增大。

分析题意可知，病人在服务系统经历三个阶段：第一阶段是在门诊确认需要住院手术后等待入院；第二阶段是入院后等待手术；第三阶段是手术及术后的住院观察。第三阶段的时间根据不同病人的手术顺利与否及体质等因素而有所差异

而定，与排队规则无关。排队规则的选择直接影响第一、二阶段的时间，因此我们可通过一、二阶段作为指标衡量排队规则。我们的任务是根据各类病人的数量分布及术前准备时间来确立比 FCFS 更好的排队规则，并且回答题目所给的问题。

三. 模型假设及符号说明

3.1 模型假设

（1） 入院排队病人不会因等待时间的长短离开医院，即排队系统容量无穷大；
（2） 在任何排队规则中，外伤病人以优先级最高分配入院；
（3） 青光眼与视网膜手术不与白内障手术安排在同一天做；
（4） 外伤手术可在任何一天进行；
（5） 在研究时间范围内医院的医疗水平不变。

3.2 符号说明

$i,(i=1,\dots 5)$	病人类别，分别对应白内障（单）、白内障（双）、青光眼、视网膜疾病、外伤
$j,(j=0,1,\dots 6)$	分别对应星期天到星期六
j_0	第 0 天对应的星期几
ω_s	病人逗留时间
ω_{g_1}	病人等待入院时间
ω_{g_2}	病人非必要手术等待时间
ω_{g_3}	术前准备时间
ω_h	术后住院观察时间
ω_z	手术等待时间ω_{g_2}+ω_{g_3}
$E[\omega_{g_1}]$	病人等待入院时间的期望
$E[\omega_{g_2}]$	病人入院后术前准备之前的等待时间的期望
x_{ink}	ink 为病人编号，表示第 i 类病人，第 n 天入院的第 k 个病人
$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{n})$	第 n 天等待入院的病人集合
$\boldsymbol{X_1}(\mathrm{n})$	第 n 天到门诊看病的病人数
$\boldsymbol{Y}(n)$	第 n 天住院的病人集合
$\boldsymbol{Y_1}(\mathrm{n})$	第 n 天出院病人集合
|A|	集合 A 元素的个数
$\omega_{g_1}(x_{ilk},n)$	编号为 ilk 的病人第 n 天入院的等待入院时间
$\omega_{g_2}(x_{ilk},j)$	编号为 ilk 的病人星期 J 入院的非必要术前等待时间
$\mathrm{cost}_{ilk}(,n)$	编号为 ilk 的病人第 n 天入院的损失
$\boldsymbol{C}(\mathrm{n})$	$Cost(x_{ilk},n)$的集合
$\omega_{zilk}(\mathrm{n})$	编号为 ilk 的病人第 n 天入院的手术等待时间
$\boldsymbol{W_z}(n)$	$\omega_{zilk}(\mathrm{n})$的集合

S	住院天数
K_i	第 i 种病人的所占病床数
b_i	第 i 类病人的比例

四. 模型建立

4.1 模型一 （问题一的回答）

4.1.1 模型准备：

4.1.1.1 几种时间ω的定义

在一般排队论里，排队规则的选择是为了最小化排队的平均逗留时间。在本问题中，逗留时间ω_s由四部分组成，即

$$\omega_s = \omega_{g_1} + \omega_{g_2} + \omega_{g_3} + \omega_h$$

其中，$\omega_{g_1} = T_{入院时间} - T_{门诊时间}$，表示在门诊看病后等待入院的时间；$\omega_h = T_{出院时间} - T_{第一次手术时间}$,表示术后住院观察时间，当病人为白内障（双眼）患者时，$\omega_h' = \omega_h - 2$; ω_{g_2}表示非必要的手术等待时间，ω_{g_3}表示术前准备时间，则有$\omega_{g_2} + \omega_{g_3} = T_{第一次手术时间} - T_{入院时间}$。

4.1.1.2 术前准备时间ω_{g_3}的确定

将该医院眼科病人分为五类：白内障（单眼）、白内障（双眼）、青光眼、视网膜疾病、外伤，分别编号为 1～5，观察病人从入院到进行手术的间隔时间及日期对应为星期几后，得出以下几点结论：

（1） 外伤病人入院第二天立即进行手术；

（2） 白内障（双眼）病人第一次手术在星期一进行，第二次手术在两天后进行。若入院第二天是星期一，则第二天就安排手术；

（3） 白内障（单眼）病人入院第二天若是星期一或星期三，则第二天就安排手术；

（4） 青光眼及视网膜疾病病人通常需要 2 天的术前准备时间，若两天后为星期一或星期三，则推后一天进行手术。

由此，可以得出各类病人的术前准备时间的天数：

病人类型	白内障（单眼）	白内障（双眼）	青光眼	视网膜疾病	外伤
术前准备天数$\omega_{g_{3i}}$	1	1	2	2	1

同时，考虑到ω_h是由手术进行顺利与否及病人的体质决定的，我们设定的排队规则仅对ω_{g_1}、ω_{g_2}产生影响，所以评价标准只与ω_{g_1}、ω_{g_2}有关。

4.1.2 模型建立：

设$E[\omega_{g_1}]$、$E[\omega_{g_2}]$分别表示ω_{g_1}、ω_{g_2}的数学期望，定义平均等待时间损失代价函数：

$$Cost = f\left(E[\omega_{g_1}], E[\omega_{g_2}]\right)$$

我们的评价标准就是 *Cost* 的大小。

4.1.3 模型求解：

我们对每天的门诊人数、入院人数、出院人数进行统计，发现以下特征：

（1）从 8 月 8 日到 9 月 11 日的每日入院人数和出院人数相等；

（2）从 7 月 13 日开始累计的门诊人数总大于入院人数。(如果存在空余病床的话，这是不合理的)

由此，我们推断在这段时间内医院的病床利用率为 100％，每日入院的病人按当日出院的病人空出的床位进行分配。

所以，ω_{g_1}、ω_{g_2}是不会影响医院的经济效益的，再我们用 *Cost* 来评价病人的人均损失。将$f\left(E[\omega_{g_1}], E[\omega_{g_2}]\right)$定义为如下形式：

$$\begin{cases} f\left(E[\omega_{g_1}], E[\omega_{g_2}]\right) = a_1E[\omega_{g_1}] + a_2E[\omega_{g_2}] \\ a_1 + a_1 = 1 \end{cases}$$

其中，a_1，a_2分别为两个因素对 *Cost* 影响的权重。可利用层次分析法，建立一个简单的层次模型来确定权值向量(a_1, a_2)。

层次分析法是一种定性分析和定量计算相结合的方法，首先构造因素间的成对比较矩阵，在ω_{g_2}时间内，病人既要缴交住院费，又不能进行有效的治疗，损失权重较大，构造a_1，a_2之间的权重成对比较阵：$\begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$。

归一化可得，$(a_1, a_2) = (0.25, 0.75)$。则等待时间损失评价函数：

$$Cost = 0.25E[\omega_{g_1}] + 0.75E[\omega_{g_2}]$$

4.2 模型二　当前最小损失优先规则

只是我们基于模型一的损失函数为优先级的排队规则，其中涉及到ω_{g_1}，ω_{g_2}的取值，所以在模型建立之前，我们先要确定$\omega_{g_1}(\mathrm{n})$，$\omega_{g_2}(\mathrm{n})$的取值。(n 表示第 n 天)

4.2.1 $\omega_{g_1}(\mathrm{n})$的确定

我们定义X为等待入院病人的信息集合，记录着门诊日期以及往后的住院日期、手术日期、出院日期。x_{ilk}中的ilk是病人编号，表示第 i 类病人第 l 天第 k 个入院。因此，我们可通过当前时间 n 计算出该病人的$\omega_{g_1}(x_{ilk},\mathrm{n})$=n-l。

4.2.2 $\omega_{g_2}(\mathrm{n})$的确定

通过观察题给数据，可以得出入院后术前准备之前的等待时间ω_{g_2}随病人类型$i,(i=1,2\ldots5)$及入院时间星期$j,(j=0,1\ldots6)$的变化关系：

ω_{gij} j / i	0	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	4	3	2	1
2	0	6	5	4	3	2	1
3	1	2	1	1	1	1	2
4	1	2	1	1	1	1	2
5	0	0	0	0	0	0	0

由表可见$\omega_{g_2}(\mathrm{n})$是病人的种类以及星期 j 的确定分布，i，j 的值可直接确定ω_{g_2}。所以我们可以通过$j=(n+j_0)\ mod\ 7$，求得病人x_{ilk}第 n 天对应星期 j 得到$\omega_{g_2}(x_{ilk},\mathrm{j})=\omega_{gij}$ 。

4.2.3 模型思想描述

我们将病人x_{ilk}的ω_{g_1}，ω_{g_2}代入$Cost=f\left(\omega_{g_1}，\omega_{g_2}\right)$内求出$x_{ilk}$的时间损失$cost_{ilk}$，这为每个病人的时间损失，然后在当前住院安排中，以$cost$大小作为优先级判定，值越小，优先级越高。把病床按优先级从高到底分配给病人，直到床位排满或者排队人数为零时终止。

4.2.4 最少损失优先规则模型的建立

第 n 天到门诊看病的病人集合$\boldsymbol{X_1}(n)$为

$$\boldsymbol{X_1}(n)=\{x_{ink}\}，\left(i\in\{1,2\ldots5\}，n,k\in N\right)$$

定义一个过渡集合$\mathbf{X}'(n)$= $\mathbf{X}(n-1)\cup\boldsymbol{X_1}(n)$

第 n 天出院的病人集合$\boldsymbol{Y_1}(n)$为

$$\boldsymbol{Y_1}(n)=\{x_{in'k'}\}，\left(i\in\{1,2\ldots5\}，n',k'\in N\text{且}\mathrm{n}'<n\right)$$

编号为 ilk 的病人第 n 天入院的损失为

$$cost_{ilk}(n)=0.25\omega_{g_1}(x_{ilk},n)+\omega_{g_2}(x_{ilk},(n+j_0)\ mod\ 7)$$

其中$x_{ilk}\in\mathbf{X}'(n)$, $cost_{ilk}(n)$构成集合 ***C(n).***

定义一种排序准则 Sort，对集合 ***C(n)***，

$$\mathrm{Sort}[\mathbf{C}(\mathrm{n})]=\left\{\mathrm{m}_1,\mathrm{m}_2\ldots\mathrm{m}_{|\mathrm{A}|}\right\}$$

$\mathrm{m}_1,\mathrm{m}_2\ldots\mathrm{m}_{|\mathrm{A}|}$为 **C(n)**里的元素按从小到大排列后的下标。如$cost_{ilk}(n)$返回的是ilk。

若$|\mathbf{Y_1}(n)|<|\mathbf{X}(\mathrm{n})|$，编号为$x_{\mathrm{m}_1}, x_{\mathrm{m}_1} \dots x_{\mathrm{m}_{|Y_1(n)|}}$的病人就入院；否则将$\mathbf{X'}(\boldsymbol{n})$中的所有病人均安排住院，即：

$|\mathbf{Y_1}(n)|<|\mathbf{X'}(n)|$时

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}(n) = \boldsymbol{X'}(n) \backslash \{x_{m_1}, x_{m_1} \dots x_{m_{|Y_1(n)|}}\} \\ \boldsymbol{Y}(n) = (\boldsymbol{Y}(n) \backslash \boldsymbol{Y_1}(n)) \cup \{x_{m_1}, x_{m_1} \dots x_{m_{|Y_1(n)|}}\} \end{cases}$$

$|\mathbf{Y_1}(n)| \geqslant |\mathbf{X'}(n)|$时

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}(n) = \emptyset \\ \boldsymbol{Y}(n) = (\boldsymbol{Y}(n) \backslash \boldsymbol{Y_1}(n)) \cup \boldsymbol{X'}(n) \end{cases}$$

4.3 模型三 改进型 SJF 模型

4.3.1 改进算法 SPTF 法

SJF(Shortest Job First)调度算法，即短作业优先算法，是从队列中优先取出所需运行估计时间最短的作业优先执行。[3]对医院来说，SJF 用于病床安排使医院在同一时间内能治疗更多的病人，有效降低了病人的平均逗留时间。但从病人角度来看，SJF 算法使得住院时间短的病人总是能得到优先安排，这对术后需要很长的住院观察时间的病人是很不公平的。在本问题中，患视网膜疾病的病人的平均术后住院观察时间是 10 天，是各类病人中最长的，优先级最低，然而患视网膜病人在各类病人中所占的比例却是最大的，这使得平均损失增大。所以，有必要对 SJF 规则进行必要的改进。

因为手术后的观察时间ω_h为造成不公平的主要因素，所以，我们把它从住院总时间里剔除，研究入院后的手术等待时间ω_z。

通过数据处理后，可以得出手术等待时间ω_z随病人类型$i, (i = 1,2 \dots 5)$及入院时间星期$j, (j = 0,1 \dots 6)$的变化关系：

$\omega_{z_{ij}}$ (i \ j)	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	1	4	3	2	1
2	7	6	5	4	3	2	1
3	2	3	2	2	2	2	3
4	2	3	2	2	2	2	3
5	1	1	1	1	1	1	1

并有以下几点结论：

（1） ω_z是以 i，j 有关的确定性分布。

（2） 如果安排白内障（单眼）病人于星期日或星期二入院，白内障（双眼）病人于星期日入院，而青光眼、视网膜疾病病人不安排在星期六及星期一入院，可使ω_z的均值变小；

（3） 一周内，每类病人至少有一天ω_z是最小的(不考虑优先级最大的外伤病人)，即每类病人在一周内至少可以找到一天使自己得到优先安排。

所以，我们改进 SJF 算法为 SPTF(Shortest Prepared Time First)算法，即最小工作前准备时间优先算法，这里的工作前准备时间指入院后的手术等待时间ω_z。

同样可求得病人x_{ilk}第 n 天的$\omega_{zilk}(\mathrm{n})=\omega_{\mathrm{zij}}$

4.3.2 模型思想描述

计算出每个排队病人当天入院后的手术等待时候ω_z，根据ω_z的值确定优先级，值越小，优先级越高。把病床按优先级从高到底分配给病人，直到床位排满或者排队人数为零时终止。

4.3.3 SPTF 法模型的建立

第 n 天到门诊看病的病人集合$\boldsymbol{X_1}(n)$为

$$\boldsymbol{X_1}(n) = \{x_{ink}\}，\left(i \in \{1,2 \dots 5\}，n, k \in N\right)$$

定义一个过渡集合$\boldsymbol{X'}(n)$= $\boldsymbol{X}(n-1) \cup \boldsymbol{X_1}(n)$

第 n 天出院的病人集合$\boldsymbol{Y_1}(n)$为

$$\boldsymbol{Y_1}(n) = \{x_{in'k'}\}，\left(i \in \{1,2 \dots 5\}，n', k' \in N 且 \mathrm{n}' < n\right)$$

编号为 ilk 的病人第 n 天入院的手术等待时候集合

$$\omega_{zilk}(\mathrm{n}) \in \boldsymbol{W_z}(n),$$

定义一种排序准则 Sort，对集合$\boldsymbol{W_z}(n)$，

$$\mathrm{Sort}[\boldsymbol{W_z}(n)] = \left\{\mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2 \dots \mathrm{m}_{|\boldsymbol{W_z}(n)|}\right\}$$

$\mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2 \dots \mathrm{m}_{|\boldsymbol{W_z}(n)|}$为$\boldsymbol{W_z}(n)$里的元素按从小到大排列后的下标。如$\omega_{zilk}(\mathrm{n})$返回的是$ilk$。

若$|\mathbf{Y_1}(n)|$<$|\mathbf{X}(\mathrm{n})|$，编号为$x_{\mathrm{m}_1}, x_{\mathrm{m}_1} \dots x_{\mathrm{m}_{|\mathrm{Y}_1(n)|}}$的病人就入院；否则将$\mathbf{X'}(\boldsymbol{n})$中的所有病人均安排住院，即：

$|\mathbf{Y_1}(n)|$<$|\mathbf{X'}(\boldsymbol{n})|$时

$$\begin{cases} \mathbf{X}(\mathrm{n}) = \mathbf{X'}(\boldsymbol{n}) \backslash \{x_{\mathrm{m}_1}, x_{\mathrm{m}_1} \dots x_{\mathrm{m}_{|\mathrm{Y}_1(n)|}}\} \\ \mathbf{Y}(\mathrm{n}) = (\mathbf{Y}(\mathbf{n}) \backslash \boldsymbol{Y_1}(\boldsymbol{n})) \cup \{x_{\mathrm{m}_1}, x_{\mathrm{m}_1} \dots x_{\mathrm{m}_{|\mathrm{Y}_1(n)|}}\} \end{cases}$$

$|\mathbf{Y_1}(n)| \geqslant |\mathbf{X'}(\boldsymbol{n})|$时

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}(n) = \emptyset \\ \boldsymbol{Y}(n) = (\boldsymbol{Y}(n) \backslash \boldsymbol{Y}_1(n)) \cup \boldsymbol{X'}(n) \end{cases}$$

4.4 模型四——数据不足时的入院时间估计模型

我们在 FCFS 规则前提下建立模型求解这个预测问题。

4.4.1 必要数据的获取方式：

一．估算在院病人的出院时间

1. 我们先通过住院病人信息得知病人x_{ilk}的入院时间T_{ilk}；
2. 由上面讨论可知ω_{zilk}为确定值；
3. 由医生经验估计 i 类病人的术后观察时间的期望$E\left[\omega_{h_1}\right]$；
4. 由$T_{ilk} + W_{zilk} + E\left[\omega_{h_1}\right]$可得病人出院时间$T'_{ilk}$.

二．每天出院人数的估计

由上面得出的住院病人出院时间的集合$\{T'_{ilk}\}$得出，每日出院人数集合

$\{y_1(\mathrm{n})\}$，求平均值$\overline{y_1}$就可以得到平均每日出院人数。
三．通过等待住院的病人的集合可以知道病人x_{ilk}前有 a 个人等待。
四．统计住院病人的信息，得出外伤病人中同一天入院的最大人数 b。

4.4.2 模型建立：

通过上面三步得出的近似数据$\overline{y_1}$，a，以及外伤病人日最多为 b 人次的数据。

当没有外伤病人时，等待入住天数可达最小值：

$$T_{\min}=\left\lfloor\frac{a}{\overline{y_1}}\right\rfloor$$

当每天都又外伤病人，且都为最大 b 人次时，等待入住天数达最大值：

$$T_{\max}=\left\lfloor\frac{a}{\overline{y_1}-b}\right\rfloor$$

所以入住天数区间为：

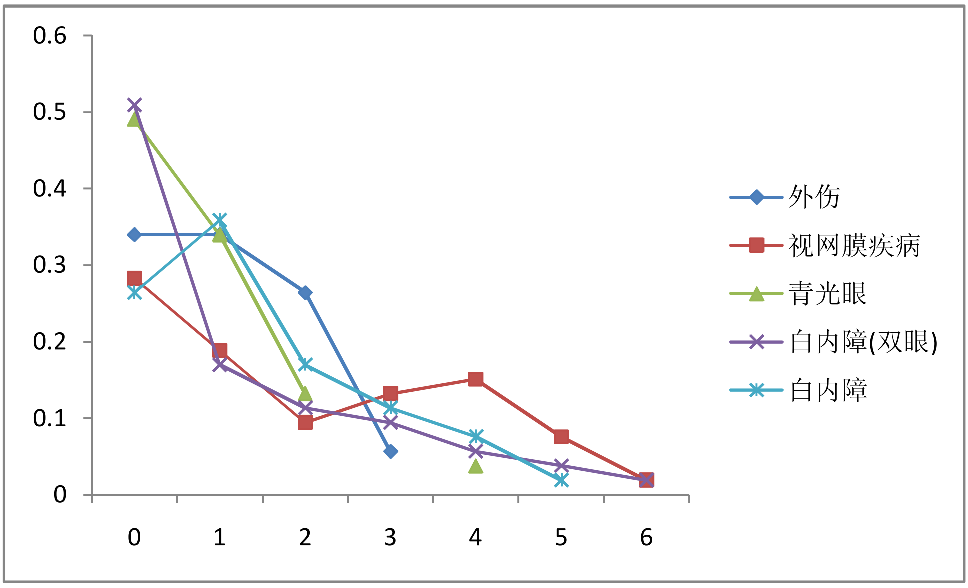
$$T\in\left[\left\lfloor\frac{a}{\overline{y_1}}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{a}{\overline{y_1}-b}\right\rfloor\right]$$

其中，$\left\lfloor\frac{a}{\overline{y_1}}\right\rfloor$是对$\frac{a}{\overline{y_1}}$作下取整运算。

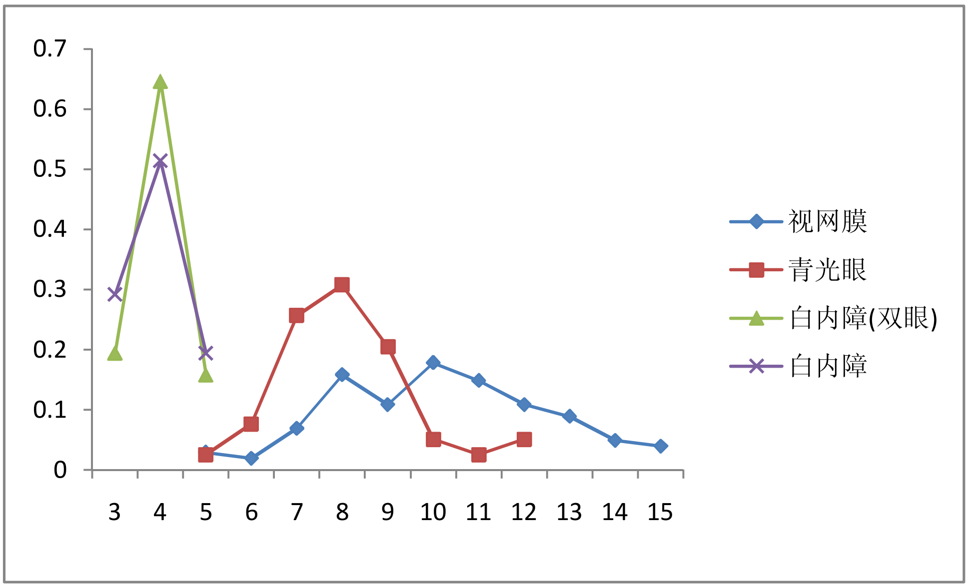
4.5 模型五　基于高负荷 G/G/K 理论的病床比例分配模型

4.5.1 模型准备

我们利用EXCEL画出门诊人数、术后住院时间的频率分布，如图表 1、图表 2 所示：



图表 1 门诊人数的频率分布图



图表 2 术后住院时间的频率分布图

根据图表猜想其可能分布，并用x^2法检验[2]，发现门诊人数、住院时间并不服从特定的分布，故只能将其当作一般分布处理。所以，本问题的排队系统记为$[G/G/K]:[\infty/\infty/FCFS]$。

对题给数据进行处理，得到每天病人平均到达时间间隔 E[T]=0.115，人均住院时间 E[S]=9.003，而病床数 K=79，则

$$\mathrm{KE[T]-E[S]=0.082\approx 0}$$

根据参考文献[4]，我们可以将这个 G/G/K 系统等效为一个以 T 为到达时间间隔，S/K 为服务时间的 G/G/1 系统。此时，我们可给出高负荷状态下系统延误时间（即平均等待入院时间）$E\left[\omega_{g_1}\right]$的近似解：

$$E\left[\omega_{g_1}\right]\approx\frac{\mathrm{Var[S/K]+Var[T]}}{\mathrm{2(E[T]-E[S/K])}}$$

$$=\frac{\mathrm{K^2Var[T]+Var[S]}}{\mathrm{2K(KE[T]-E[S])}}$$

其中$\mathrm{Var[S/K]}$、$\mathrm{Var[T]}$分别为 S/K 和 T 的方差。

则平均逗留时间为：

$$E[\omega_s]=E\left[\omega_{g_1}\right]+E[S]$$

将病床按固定比例分配实际上就是将一个 G/G/K 系统分割成五个独立的 G/G/$\mathrm{K_i(i=1,2,\ldots,5)}$系统，显然，要使医院效率最大化，就需使 5 个系统同时处于高负荷状态，即上面的近似公式对每个系统都适用。

4.5.2 模型建立

$$Min\ \ E[\omega_s]$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}
E[\omega_s]=\sum_{i=1}^{5} b_i * E[\omega_{si}] \quad （1） \\
E[\omega_{si}]=\dfrac{{K_i}^2 Var[T_i]+Var[S_i]}{2K_i(K_iE[T_i]-E[S_i])}+E[S_i] \quad （2） \\
\sum_{i=1}^{5} K_i = 79 \quad （3）
\end{cases}
$$

4.5.3 模型说明

决策变量：K_i：分配给每类病人的床位

约束条件：（1）—平均逗留时间约束；（2）—每类病人逗留时间约束；（3）—总床位约束

五. 问题回答与模型求解

5.1 问题二的解答

根据排队论理论，G/G/K排队系统极难求解，目前数学上尚未有行之有效的解法。我们用计算机多次仿真模拟实现对期望$E\left[\omega_{g_1}\right]$及$E\left[\omega_{g_2}\right]$的求解。仿真步骤如下：

Step1：根据题中给出的数据得出每种病人每日到诊频数分布和术后住院观察时间分布；

Step2：根据上述分布生成大量算例，模拟今后每天来门诊的各类病人；

Step3：统计每天的出院病人数，优先将外伤病人安排入院，再的定优先级规则将余下床位分配给等待入院的病人；

Step4：模拟3个月的数据，取出中间那个月所有病人的数据，算出*Cost*的值。

按以上规则进行20次仿真，求出三种优化准则中所有病人及各类病人的*Cost*值，如下表所示，

算法 / *Cost* / i	FCFS 法	最少损失优先法	SPTF 法
白内障（单眼）	3.649	3.301	1.648
白内障（双眼）	5.025	4.044	2.383
青光眼	3.508	3.517	3.780
视网膜疾病	3.428	3.471	3.801
外伤	0.25	0.25	0.25
所有病人平均	3.949	3.646	2.876

从以上结果可以看出：

（1） 对总平均损失而言，SPTF 法最好，最小损失优先法次之，FCFS 法最差。SPTF 法较 FCFS 法有多于 30%的提升；

（2） 对白内障（单眼和双眼）病人而言，SPTF 法远优于 FCFS 法；

（3） 对青光眼及视网膜疾病病人而言，FCFS 法最好。

5.2 问题三的解答

我们把问题分为两种情况。

一、 **没有大量的历史统计数据**

这个问题我们以建立了模型四对这个问题进行了求解。

二、 **具有大量的历史统计数据**

1. 在 FSCS 条件下：

在此体系下，病人除了外伤外的类型都不具有优先级。所以我们剔除外伤病人的数据，统计求出其他类病人的平均等待时间$E[\omega_{g_1}]$，以及标准差$\sigma[\omega_{g_1}]$，然后粗略估计病人的入院时间区间为$(E[\omega_{g_1}]-\sigma[\omega_{g_1}],\ E[\omega_{g_1}]+\sigma[\omega_{g_1}])$。

2. 在 SPTF 条件下：

在此体现下，病人的种类 i 对因不同的优先级，所以，我们要对五类病人分开统计其$E[\omega_{g_{1i}}]$，即其方差$\sigma[\omega_{g_{1i}}]$，则可以粗略估计病人第 i 类病人入住区间$(E[\omega_{g_{1i}}]-\sigma[\omega_{g_{1i}}],\ E[\omega_{g_{1i}}]+\sigma[\omega_{g_{1i}}])$。

5.3 问题四的解答

5.3.1 周六、日不安排手术时的问题二回答

当星期六、星期天不安排手术后，第 i 类病人星期 j 的手术等待时间ω_{zij}会发生相应的变化。在之前的数据处理中我们已经确定ω_{zij}的值为确定分布，而在手术前必要准备时间ω_{g_3}不变的情况下，安排变更后的ω_{zij}仍为确定分布，其值如下表所示：

$\omega_{z_{ij}}$ j / i	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	1	4	3	2	1
2	1	7	6	5	4	3	2
3	2	3	2	2	5	4	3
4	2	3	2	2	5	4	3
5	1	1	1	1	1	3	2

考虑到问题二得到的结论，仅在 SPTF 法和 FCFS 法中选取最优算法。经过大量算例模拟，得到如下结果：

算法	SPTF	FCFS
所有病人平均损失	3.162	4.6533

可以看出，在本问题中，SPTF 法仍然优于 FCFS 法，故选取 SPTF 法来确定手术时间的安排。

5.3.2 手术时间的安排

分析题意可知，手术时间的安排的变化与否，主要取决于白内障手术的安排，而白内障手术的安排主要考虑下列因素：

（1）　出于对病人身体恢复的考虑，双眼白内障病人两只眼的手术间隔时间应该相隔至少一天；

（2）　由于使用 SPTF 法进行安排，青光眼病人及视网膜疾病病人的时间损失较大，作为补偿，一周内不安排三次白内障手术。

（3）　双眼白内障的手术安排时间尽量使两次手术间隔最小。

因此，白内障手术的安排组合为$C_5^2-4=6$种，下面分别列出余下 5 种不同安排的ω_{zij}分布：

1.周二、四进行白内障手术：

$\omega_{z_{ij}}$ j / i	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	1	4	3	2	1
2	1	7	6	5	4	3	2
3	2	3	2	2	5	4	3
4	2	3	2	2	5	4	3
5	1	1	1	1	1	3	2

2. 周三、五：

$\omega_{z_{ij}}$ j / i	0	1	2	3	4	5	6
1	3	2	1	2	1	5	4
2	3	2	1	7	6	5	4
3	2	3	2	5	4	3	2
4	2	3	2	5	4	3	2
5	1	1	1	1	3	2	1

3. 周一、四：

$\omega_{z_{ij}}$ j / i	0	1	2	3	4	5	6
1	1	3	2	1	4	3	2
2	1	7	6	5	4	3	2
3	2	2	3	2	5	4	3
4	2	2	3	2	5	4	3
5	1	1	1	1	3	2	1

4. 周二、五：

$\omega_{z_{ij}}$ j / i	0	1	2	3	4	5	6
1	2	1	3	2	1	4	3
2	2	1	7	6	5	4	3
3	3	2	2	5	4	3	2
4	3	2	2	5	4	3	2
5	1	1	1	1	3	2	1

5.周一、五（根据（3），周五做白内障双眼）：

$\omega_{z_{ij}}$ j / i	0	1	2	3	4	5	6
1	1	4	3	2	1	3	2
2	5	4	3	2	1	7	6
3	2	2	2	6	5	4	3
4	2	2	2	6	5	4	3
5	1	1	1	1	3	2	1

用 SPTF 准则进行模拟，得出结果如下表：

安排	周一、三	周二、四	周三、五	周一、四	周二、五	周一、五
所有病人平均损失	3.162	3.343	3.248	3.755	3.302	3.692

从表中数据可以看出，将每周的两次白内障手术安排在星期一和星期三能使总评价损失最小，所以手术安排不需要改动。

5.4 问题五的解答

5.4.1 模型五参数的给出

根据附录中给出的数据，分别计算出不同类型病人的平均到达时间间隔$\mathrm{E_i[T]}$及其方差$\mathrm{Var_i[T]}$、人均住院时间$\mathrm{E_i[S]}$及其方差$\mathrm{Var_i[S]}(\mathrm{i}=1,2,3,4,5)$, 其列表如下：

i	1	2	3	4	5
$\mathrm{E_i[T]}$	0.68529	0.58017	0.78658	0.50383	0.73333
$\mathrm{Var_i[T]}$	0.096363	0.10395	0.07675	0.10354	0.0752
$\mathrm{E_i[S]}$	5.236	8.561	11.172	13.954	7.036
$\mathrm{Var_i[S]}$	2.078	4.3727	2.888	6.0104	3.369

同时，计算出五种病人各自所占的比重$\mathrm{b_i}$，分别为：

$\mathrm{b_1}=0.1887$，$\mathrm{b_2}=0.2509$，$\mathrm{b_3}=0.1188$，$\mathrm{b_4}=0.3207$，$\mathrm{b_5}=0.1207$

5.4.2 问题求解

根据公式$\mathrm{E[W_{g1}]}=\frac{\mathrm{K_i}^2\mathrm{Var[T_i]}+\mathrm{Var[S_i]}}{2\mathrm{K_i}(\mathrm{K_iE[T_i]}-\mathrm{E[S_i]})}$可知$\mathrm{K_iE[T_i]}$，$\mathrm{E[S_i]}$必须满足$\mathrm{K_iE[T_i]}-\mathrm{E[S_i]}>0$，否则$\mathrm{E[W_{g1}]}<0$,但这是不可能的。所以：

$$\mathrm{K_i}>\frac{\mathrm{E[S_i]}}{\mathrm{E[T_i]}}\quad(\mathrm{i}=1,2,3,4,5)$$

可以计算得到$\mathrm{K_1}\geq 8$，$\mathrm{K_2}\geq 15$，$\mathrm{K_3}\geq 15$，$\mathrm{K_4}\geq 28$，$\mathrm{K_5}\geq 10$，此时$\mathrm{K_1}+\mathrm{K_2}+\mathrm{K_3}+\mathrm{K_4}+\mathrm{K_5}\geq 76$,即仅剩下 3 张床位可供分配,共有$5^3=125$种分配方式。对所有的分配方式进行穷举可以得到最优解为：

$$\begin{cases}\mathrm{K_1}=8\\ \mathrm{K_2}=16\\ \mathrm{K_3}=15\\ \mathrm{K_4}=30\\ \mathrm{K_5}=10\end{cases}$$

得到$E[W]=11.327$。

六. 稳定度分析

我们针对模型五进行稳定度分析，当某一类型病人平均到达时间间隔 $\mathrm{E}[\mathrm{T_i}]$、$\mathrm{E}[\mathrm{S_i}](\mathrm{i}=1,2,3,4,5)$发生变化时，观察床位分配的变化。这里，我们以白内障(单)为例。

1. $\mathrm{E}[\mathrm{T_1}]$变化

我们假设所有的白内障(单)病人的平均到达时间间隔均增加 a，根据公式$\begin{cases}\mathrm{E}[\mathrm{T}+\mathrm{a}]=\mathrm{E}[\mathrm{T}]+\mathrm{a}\\ \mathrm{Var}[\mathrm{T}+\mathrm{a}]=\mathrm{Var}[\mathrm{T}]\end{cases}$，确保此时仅$\mathrm{E}[\mathrm{T_1}]$变化，而$\mathrm{Var}[\mathrm{T_1}]$不发生改变，下表给出 a 不同取值时$\mathrm{K_i}(\mathrm{i}=1,2,3,4,5)$及$E[W]$的取值：

<table>
<tr><td>a</td><td>-0.1</td><td>-0.05</td><td>−0.01</td><td>0</td><td>0.01</td><td>0.05</td><td>0.1</td></tr>
<tr><td>$E[W]$</td><td>12.741</td><td>11.474</td><td>11.382</td><td>11.327</td><td>11.23</td><td>11.083</td><td>10.025</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{K_1}$</td><td>10</td><td colspan="2">9</td><td colspan="4">8</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{K_2}$</td><td>15</td><td colspan="6">16</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{K_3}$</td><td colspan="7">15</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{K_4}$</td><td colspan="3">29</td><td colspan="4">30</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{K_5}$</td><td colspan="7">10</td></tr>
</table>

当$\mathrm{E}[\mathrm{T_1}]$发生微小变化的时，床位分配的变化很小，可见其稳定度很高。

2. $\mathrm{E}[\mathrm{S_i}]$变化

我们假设所有的白内障(单)病人的人均住院时间均增加 b，同理，此时仅$\mathrm{E}[\mathrm{S_i}]$变化，而$\mathrm{Var}[\mathrm{S_1}]$不发生改变，下表给出 b 不同取值时$\mathrm{K_i}(\mathrm{i}=1,2,3,4,5)$及$E[W]$的取值：

<table>
<tr><td>b</td><td>-1</td><td>-0.5</td><td>−0.1</td><td>0</td><td>0.1</td><td>0.5</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$E[W]$</td><td>10.941</td><td>11.0623</td><td>11.213</td><td>11.327</td><td>11.383</td><td>11.454</td><td>12.742</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{K_1}$</td><td colspan="5">7</td><td colspan="2">8</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{K_2}$</td><td colspan="7">16</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{K_3}$</td><td colspan="7">15</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{K_4}$</td><td colspan="5">30</td><td colspan="2">29</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{K_5}$</td><td colspan="7">11</td></tr>
</table>

当$\mathrm{E}[\mathrm{S_i}]$发生微小变化的时，床位分配的变化很小，可见其稳定度很高。

综合得，该模型稳定度很高。医院依照该方案分配病床，即使当该地某病发病状况发生改变时，医院只需做小范围地调整。因此，该方案适于医院采用。

七. 模型评价

1、 模型一——等待时间损失评价

优点：考虑了服务时间（住院期间）内的代价很高的非必要等待时间，比只考虑服务等待时间（等待住院时间）更能衡量等待时间的代价；

缺点：只是在病人角度考虑等待损失，并没有考虑各手术费用对医院利益的影响。

2、 模型二——最小损失优先规则模型

优点：以等待时间损失最小化为原则进行优先级处理，每一步都寻求最优解；
缺点：实际上是一种贪婪算法，局部的最优解并不代表全局最优解。

3、 模型三——SPTF 模型

优点：既具有 SJF 算法的优点，争取是服务时间最短，同时运用动态优先级的兼顾了住院时间长病人，实验证明在等待时间损失评价体系中远比 FCFS 好；
缺点：对住院时间长病人仍然存在一定不公平性。

4、 模型四——数据不足下的入院时间估计模型

优点：能在没有大量统计数据的情况下，在仅知道当前住院病人及等待住院病人的信息下病人入住的大致入院时间区间。

缺点：仅是一种经验估计，误差大。

5、模型五——基于高负荷 G/G/K 理论的病床比例分配模型

优点：把复杂的 **G/G/K** 排队系统简单化，且根据高负荷约束，能快速得出解的可行域，即使用穷举法求解时间复杂度也不大。

缺点：其等待时间期望仅仅是经过很多化简后的计算，误差大，且参数变化的幅度过多时，很容易无解。

参考文献：

[1]徐玖平，胡知能，运筹学——数据·模型·决策，北京：科学出版社，2006

[2]http://jpk.syau.edu.cn/course/gcycx/FUploadFile/2008-12/8.ppt，排队论 2009-09

[3]江志华，齐文静，常用作业调度算法的分析与评价，乐山示范学院学报，第 23 卷，第 12 期：P57-P59，2008

[4]杨骅，高及仁，程传苗，应用排队论理论合理安排医院急诊工作，中国医院管理，第 19 卷第 6 期：P18-P19，1999

[5]姜启源等，数学模型（第三版），北京：高等教育出版社，2003