[题　名]：高等学校试用教材 物理光学

[作　者]：浙江大学 梁铨廷

[书　目]：345 页 1980 年 8 月第 1 版 15033·4873

[SS　号]：10071901

目　录

第一章　光的电磁理论 …… 1
§1-1　麦克斯韦方程组 …… 1
§1-2　电磁场的波动性 …… 4
§1-3　平面电磁波 …… 6
§1-4　球面波和柱面波的波动公式 …… 11
§1-5　光波的辐射，辐射能 …… 12
§1-6　电磁场的边界条件 …… 16
§1-7　光在二透明电介质分界面上的反射和折射 …… 18
§1-8　全反射 …… 24
§1-9　光在金属表面上的反射 …… 27
第二章　光波的迭加与分析 …… 30
§2-1　两个频率相同、振动方向相同的单色光波的迭加 …… 30
§2-2　驻波 …… 34
§2-3　两个频率相同、振动方向互相垂直的光波的迭加 …… 36
§2-4　不同频率的两个单色光波的迭加 …… 39
§2-5　光波的分析 …… 42
第三章　光的干涉和干涉仪 …… 47
§3-1　产生干涉的条件 …… 47
§3-2　杨氏干涉实验 …… 49
§3-3　波阵面分割的其它干涉实验 …… 53
§3-4　条纹的可见度 …… 55
§3-5　平行平板产生的干涉 …… 60
§3-6　楔形平板产生的干涉 …… 65
§3-7　用牛顿环测量透镜的曲率半径 …… 70
§3-8　平面干涉仪 …… 72
§3-9　迈克耳逊干涉仪 …… 74
§3-10　泰曼干涉仪和科斯特干涉仪 …… 75
§3-11　马赫-泽德干涉仪 …… 78
§3-12　平行平板产生的多光束干涉 …… 80
§3-13　法布里-珀罗干涉仪和陆末-盖尔克板 …… 84
§3-14　多光束干涉原理在薄膜理论中的应用 …… 89
第四章　光的衍射 …… 101
§4-1　惠更斯-菲涅耳原理 …… 101
§4-2　基尔霍夫衍射公式 …… 103
§4-3　菲涅耳衍射与夫琅和费衍射 …… 104
§4-4　菲涅耳波带法 …… 106
§4-5　菲涅耳圆孔衍射 …… 109
§4-6　菲涅耳圆屏衍射 …… 111
§4-7　波带片 …… 112

§4-8 菲涅耳直边衍射 ……114
§4-9 夫琅和费矩孔和单缝衍射 ……117
§4-10 夫琅和费圆孔衍射 ……122
§4-11 光源大小对衍射条纹的影响 ……125
§4-12 光学系统的分辨本领 ……126
§4-13 双缝衍射 瑞利干涉仪 ……131
§4-14 衍射光栅 ……135
§4-15 平面定向光栅和光栅光谱仪 ……140
§4-16 凹面光栅 ……143
§4-17 计量光栅(莫尔光栅) ……143
第五章 傅里叶光学 ……148
§5-1 空间频率及其物理意义 ……148
§5-2 单色光波复振幅的分解 ……152
§5-3 衍射理论中的傅里叶分析方法 ……153
§5-4 透镜的傅里叶变换性质 ……157
§5-5 阿贝成象理论及阿贝-波尔特实验 ……158
§5-6 相干光学处理系统-双透镜相干成象系统 ……163
§5-7 简单空间滤波器的应用举例 ……164
§5-8 位相滤波器，暗场法和泽尼克相衬法 ……165
§5-9 切趾术(变迹术) ……168
§5-10 相干光成象系统的频谱分析，相干传递函数 ……170
§5-11 非相干成象系统的频率响应，光学传递函数 ……176
§5-12 全息照相的一般原理 ……185
§5-13 利思-乌帕特尼克斯离轴全息 ……189
第六章 光的偏振与晶体光学基础 ……199
§6-1 偏振光和自然光 ……199
§6-2 双折射 ……203
§6-3 偏振棱镜和波片 ……210
§6-4 偏振的矩阵表示 ……213
§6-5 偏振光的干涉 ……219
§6-6 旋光现象 ……222
§6-7 磁光效应 ……225
§6-8 电光效应 ……227
§6-9 光测弹性方法和玻璃内应力的测定 ……231
第七章 光的量子性 ……238
§7-1 辐射能的量子化 ……238
§7-2 光的发射与吸收的量子模型 ……242
§7-3 光的自发发射、受激发射与受激吸收 ……248
§7-4 光谱线的宽度 ……252
第八章 激光 ……259
§8-1 光在介质中的放大 ……259
§8-2 激光振荡 ……262

§8-3 谐振腔的几何光学理论 ……266
§8-4 光学谐振腔的物理光学理论 ……271
§8-5 激光的谱线宽度 ……277
§8-6 激光器的类型 ……279
§8-7 氦氖激光器的稳频 ……287
§8-8 调Q技术 ……291
§8-9 锁模技术 ……293
§8-10 非线性光学 ……297
§8-11 环形激光器(激光陀螺) ……304
§8-12 光通讯 ……310
§8-13 薄膜波导与集成光学 ……314
附录 ……323
Ⅰ 高斯定理、斯托克斯定理及矢量分析的几个基本公式 ……323
Ⅱ 傅里叶级数和傅里叶积分 ……328
Ⅲ 二维的傅里叶变换 ……331
Ⅳ 亥姆霍兹-基尔霍夫积分定理，基尔霍夫衍射公式 ……335
Ⅴ 贝塞尔函数 ……338
Ⅵ δ函数 ……340
Ⅶ 矩阵的基本性质 ……341
Ⅷ 基本物理常数表 ……344
部分习题答案 ……344

第一章　光的电磁理论

十九世纪六十年代，麦克斯韦(Maxwell)总结了前人在电磁学方面的研究成果，建立了经典电磁理论。与此同时，他把光学现象和电磁现象联系起来，指出光也是一种电磁波，从而产生了光的电磁理论。光的电磁理论的确立，推动了光学及整个物理学的发展。现代光学尽管产生了许多新的领域，并且许多光学现象需要用量子理论来解释，但是光的电磁理论仍然是掌握现代光学的一个重要的基础。本章将简要叙述光的电磁理论以及它对一些光学现象如光的反射和折射现象所作的简单处理，使我们对光的电磁本性有一个概念性的认识。关于光的电磁理论的系统论述可以参考其它一些书籍㊀。

§1-1　麦克斯韦方程组

电磁场的普遍理论总结为麦克斯韦方程组，它是麦克斯韦把稳定电磁场（静电场和稳恒电流的磁场）的基本规律推广到不稳定电磁场的普遍情况而得到的。从方程组出发，结合具体的条件，可以定量地计算在这些给定条件下发生的光学现象，例如光的辐射和传播、光的反射、折射、干涉、衍射和光与物质相互作用等现象。

静电场和稳恒电流的磁场的基本规律可以总结为下面四个方程式

$$\oiint \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\sigma = Q \tag{1-1}$$

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \tag{1-2}$$

$$\oiint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\sigma = 0 \tag{1-3}$$

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I \tag{1-4}$$

式中$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$分别表示电感强度(电位移矢量)、电场强度、磁感强度和磁场强度；对$\mathrm{d}\sigma$和$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$的积分分别表示对任一闭合曲面和闭合回路的积分，Q表示积分闭合曲面内包含的总电量，I表示积分闭合回路包围的传导电流。式(1-1)是我们熟知的高斯(Gauss)定理的数学表示，式(1-4)是安培(Ampere)环路定律。

这些方程式只在稳定情况下适用，要应用到不稳定情形，必须将它们作适当的修改和推广。麦克斯韦完成了这一工作，他假定在不稳定情况下，式(1-1)和(1-3)仍然成立，式(1-2)应代以法拉第(Faraday)电磁感应定律，只是式(1-4)需要修改。

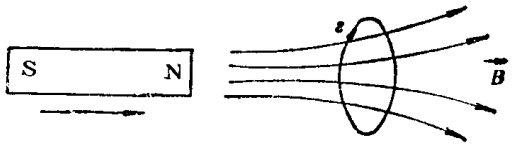


图1-1　永磁铁向闭合线圈移动时产生感应电动势

根据法拉第电磁感应定律，一闭合线圈处在变化的磁场中(图1-1)㊁，会产生感应电动势，这感应电动势的大小与磁通量的时间变化率成比例，它的方向由左手定则决定，以式子表示

㊀ 如M. 玻恩，E. 沃耳夫，光学原理，科学出版社，1978；H. Zajac，Optics，1976。

㊁ 本书文中所有矢量都以黑体字母表示，而图中的矢量仍以带箭头字母表示。

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\iint \boldsymbol{B}\cdot d\sigma = -\iint \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} d\sigma \tag{1-5}$$

式中$\frac{d\Phi}{dt}$表示线圈内磁通量的时间变化率，面积分取以线圈为边界的任意曲面的积分，负号表示感应电动势 e 的方向与磁通量变化的方向由左手定则联系。麦克斯韦认为感应电动势的产生是一种电场对线圈中自由电荷作用的结果，这种电场是由变化的磁场产生的，它具有涡旋性，与静电场不同，称为涡旋电场。这种电场的存在是独立的，不依赖于线圈的存在，即使没有线圈，只要在空间某一区域磁场发生变化，就会发生这种涡旋电场，所以法拉第定律实质上表示变化磁场和电场联系的普遍规律。

由于感应电动势 e 等于单位正电荷沿闭合回路移动一周时涡旋电场所作的功，即

$$e = \oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$$

由式(1-5)得到

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\iint \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} d\sigma \tag{1-6}$$

上式是法拉第电磁感应定律的数学表示。

不仅是变化的磁场能够产生电场，麦克斯韦进一步认为变化的电场也能够产生磁场，在激发磁场这一点上，电场的变化相当于一种电流，这种电流称为“位移电流”。譬如，当电容器两极板间的电场变化时，在电容器内部将激发一个磁场(图 1-2)，这个磁场可以看作是表示电场变化的位移电流所产生的，如同传导电流产生磁场一样。位移电流的引入，可以说明在接有电容器的电路中电流的连续性，更为重要的是它揭示了电场和磁场互相紧密联系的性质。

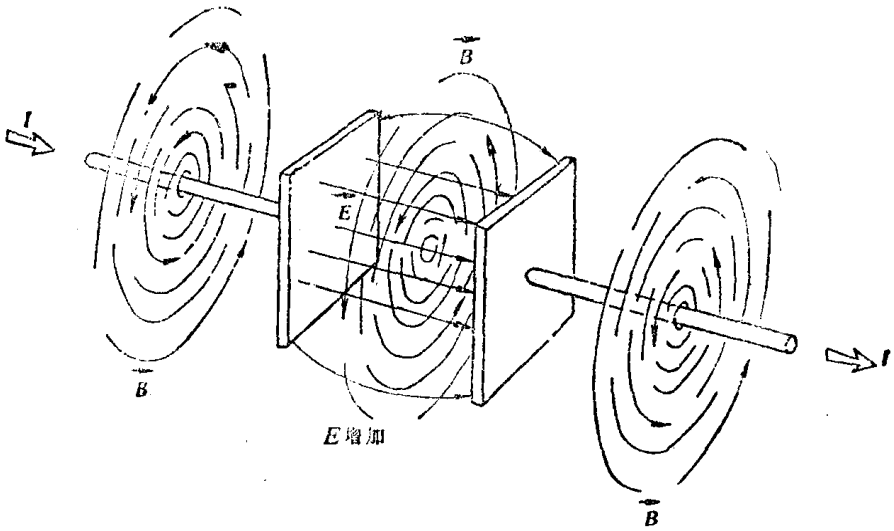


图1-2　变动电场在电容器两极板间产生磁场

通过电场中任一截面的位移电流强度等于通过该截面的电通量的时间变化率

$$I_D = \frac{d}{dt}\iint \boldsymbol{D}\cdot d\sigma = \iint \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} d\sigma \tag{1-7}$$

由于 $I_D = \iint \boldsymbol{j}_D \cdot d\sigma$，式中 $\boldsymbol{j}_D$ 为位移电流密度，所以位移电流密度

$$\boldsymbol{j}_D = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1-8}$$

位移电流和传导电流是两个不同的物理概念，传导电流意味着电荷的流动，而位移电流却意味着电场的变化，但是两者在产生磁场方面是等效的。因此，在不稳定电磁场的情况下，磁场既包括传导电流产生的磁场，也包括位移电流产生的磁场。这样式(1-4)变为

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I + \iint \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\mathrm{d}\sigma \tag{1-9}$$

总结起来，不稳定电磁场的普遍规律由下列四个方程表示

$$\left.\begin{aligned} &\oiint \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\sigma = Q \\ &\oiint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\sigma = 0 \\ &\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\iint \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\mathrm{d}\sigma \\ &\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I + \iint \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\mathrm{d}\sigma \end{aligned}\right\} \tag{1-10}$$

这四个方程通常称为积分形式的麦克斯韦方程组。

在实际应用中，由于积分形式的麦克斯韦方程组不适用于求解电磁场中某一给定点的场量这类问题，所以通常使用的是方程组的微分形式。要求得方程组的微分形式，可根据积分学中的定理把各有关积分式变换为相应的微分方程式。

对于方程组的第一式，如果闭合曲面积分域内包含的电荷是连续分布的，则 $Q = \iiint \rho \mathrm{d}V$，式中 ρ 为电荷密度，积分域是闭合曲面包围的体积。这样

$$\oiint \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\sigma = \iiint \rho \mathrm{d}V$$

根据积分学中的高斯定理(见附录Ⅰ)

$$\oiint \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\sigma = \iiint \nabla\cdot \boldsymbol{D}\mathrm{d}V$$

因此

$$\nabla\cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{1-11}$$

式中算符 $\nabla = \boldsymbol{x}_0\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{y}_0\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{z}_0\frac{\partial}{\partial z}$，称为哈密顿(Hamilton)算符，$\boldsymbol{x}_0$、$\boldsymbol{y}_0$、$\boldsymbol{z}_0$ 分别为 x、y、z 座标轴的单位矢。$\nabla\cdot \boldsymbol{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$ 表示 $\boldsymbol{D}$ 的散度(也记为 $\mathrm{div}\boldsymbol{D}$)，$D_x$、$D_y$、$D_z$ 分别为 $\boldsymbol{D}$ 在 x、y、z 座标轴上的分量。式(1-11)就是方程组第一式的微分形式。

再如方程组第四式，如把 I 写为 $I = \iint \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\sigma$，式中 $\boldsymbol{j}$ 为传导电流密度，表示垂直通过单位面积的电流量，这样方程变为

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint \boldsymbol{j}\mathrm{d}\sigma + \iint \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\mathrm{d}\sigma$$

根据积分学中的斯托克斯(Stokes)定理(见附录Ⅰ)

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint \nabla\times \boldsymbol{H}\mathrm{d}\sigma$$

得到

$$\nabla\times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1-12}$$

式中 $\nabla\times\boldsymbol{H}$ 表示$\boldsymbol{H}$的旋度(也记为rot$\boldsymbol{H}$ 或 curl$\boldsymbol{H}$)。同样地，容易得到第二方程和第三方程的微分形式：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{1-13}$$

和

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1-14}$$

因此，微分形式的麦克斯韦方程组为：

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{D}&=\rho\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}&=0\\ \nabla\times\boldsymbol{E}&=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\ \nabla\times\boldsymbol{H}&=\boldsymbol{j}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\end{aligned}\right\} \tag{1-15}$$

式(1-15)结合下列所谓物质方程

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H},\ \boldsymbol{j}=\gamma\boldsymbol{E}$$

构成一组完整的反映电磁场普遍规律的方程组。式中 ε、μ、γ 分别称为介电系数（或电容率)，磁导率和电导率。在各向同性的均匀电介质中，$\gamma=0$，ε 和 μ 为常数，在真空中 $\varepsilon=\varepsilon_0=8.8542\times10^{-12}$库仑^2/牛顿·米^2，$\mu=\mu_0=4\pi\times10^{-7}$牛顿·秒^2/库仑^2。

§1-2 电磁场的波动性

从上节的讨论，可得到两个结论：第一，任何随时间变化的磁场在周围空间产生电场，这种电场具有涡旋性，电场的方向由左手定则决定(图 1-1)；第二，任何随时间变化的电场(位移电流)在周围空间产生磁场，磁场是涡旋的，磁场的方向由右手定则决定(图 1-2)。由此可见，电场和磁场紧密相联，其中一个起变化时，随即出现另一个，它们互相激发形成统一的场——电磁场。变化的电磁场可以以一定的速度向周围空间传播出去。设在空间某区域内电场有变化，那么在邻近的区域就要引起随时间变化的磁场，这变化的磁场又在较远的区域引起新的变化电场，接着这新的变化电场又在更远的区域引起新的变化磁场，变化的电场和磁场的交替产生，使电磁场传播到很远的区域。电磁场在空间以一定速度由近及远的传播过程，称为电磁波。

从麦克斯韦方程组出发，可以证明电磁场的传播具有波动性。为简单起见，我们讨论在无限大均匀介质中的情况，这时 ε = 常数，μ = 常数，并且在远离辐射源的区域，不存在自由电荷和传导电流($\rho=0$，$\boldsymbol{j}=0$)，因而麦克斯韦方程组简化为

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{E}&=0\\ \nabla\cdot\boldsymbol{H}&=0\\ \nabla\times\boldsymbol{E}&=-\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\\ \nabla\times\boldsymbol{H}&=\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\end{aligned}\right\} \tag{1-16}$$

取第三式的旋度，并将第四式代入，得到

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E}) = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{H} = -\varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

根据矢量分析公式〔见附录式(Ⅰ-16)〕

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}) - \nabla^2\boldsymbol{E}$$

由于$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$，所以

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E}) = -\nabla^2\boldsymbol{E}$$

因此

$$\nabla^2\boldsymbol{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0$$

对于$\boldsymbol{H}$，同样可以得到

$$\nabla^2\boldsymbol{H} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2} = 0$$

令

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{1-17}$$

以上两式化为

$$\nabla^2\boldsymbol{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{1-18}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{H} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2} = 0 \tag{1-19}$$

式(1-18)和(1-19)是熟知的波动微分方程，表明电场和磁场以波动形式在空间传播，传播速度为$v\left(=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)$。麦克斯韦理论的这一结论已为后人的实践所证实。1889年，赫兹(Hertz)在实验中得到了波长为60厘米的电磁波，观察了电磁波在金属镜面上的反射，在石蜡制成的棱镜中的折射，以及干涉现象。赫兹的实验不仅以无可置疑的事实证实了电磁波的存在，而且也证明了电磁波具有光波的性质。

电磁波在介质中的传播速度由式(1-17)给出，根据式(1-17)，电磁波在真空中的传播速度

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \tag{1-20}$$

式中ε_0和μ_0为真空中的介电系数和磁导率，已知$\varepsilon_0 = 8.8542\times10^{-12}$库仑^2/牛顿·米^2，$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$牛顿·秒^2/库仑^2，所以

$$c = \frac{1}{\sqrt{8.8542\times10^{-12}\times4\pi\times10^{-7}}} = 2.99794\times10^8\text{米/秒}$$

这个数值与实验中测定的真空中光速的数值非常接近（现在测定的真空中光速的最精确的数值为$c = 2.997924562\times10^8$米/秒$\pm1.1$米/秒）。在历史上，麦克斯韦曾以此作为重要依据提出光的电磁理论并预言光是一种电磁波（当时麦克斯韦利用韦伯(Weber)和科尔劳许(Kohlrausch)的实验结果计算出电磁波在真空中的速度为3.1074×10^8米/秒，而1848年斐索(Fizeau)测量出的光速为3.14858×10^8米/秒）。

现在已经知道，除了光波和无线电波外，x 射线、γ 射线也都是电磁波，它们的波长比光波波长更短，但它们在本质上与光波或无线电波完全相同。我们按照波长或频率把这些电磁波排列成谱，称为电磁波谱，如图 1-3 所示。通常所说的光学区或光学频谱，包括紫外线、可见光和红外线，波长范围约从 10 埃（1 埃 $=10^{-8}$厘米）到 1 毫米。可见光是人眼可以感觉到各种颜色的光波，波长范围从 0.40 微米到 0.76 微米（4000 埃到 7600 埃）。紫外线和红外线则不能引起视觉。

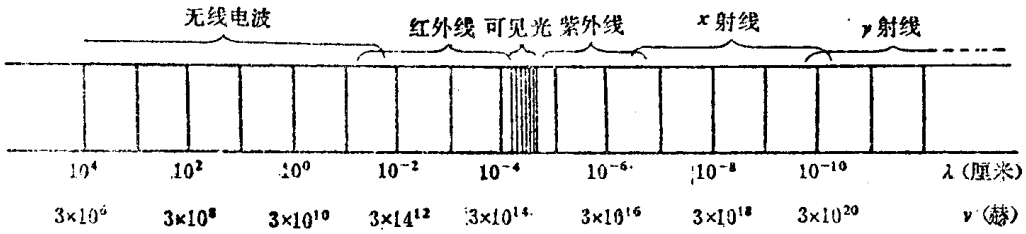


图1-3　电磁波谱

由式(1-17)和(1-20)，可以得到电磁波在传播介质中的绝对折射率

$$n=\frac{c}{v}=\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}=\sqrt{\varepsilon'\mu'} \tag{1-21}$$

式中ε'和μ'分别称为相对介电系数和相对磁导率。除了铁磁物质之外，对于大多数物质，只有很弱的磁性，$\mu'\approx 1$，因而上式变为

$$n=\sqrt{\varepsilon'} \tag{1-22}$$

这个关系称为麦克斯韦关系。表1-1列出了一些物质的$\sqrt{\varepsilon'}$的数值和对于光波（钠光D线 $\lambda=5893$ 埃）的折射率 n（$\sqrt{\varepsilon'}$的数值是对于 60 赫的低频电场测出的）。可见，对于化学结构简单的气体，两者符合得很好。对于液体烃，例如对苯也有很好的近似，但对于许多固体（如玻璃）和一些液体，两者相差较大。这是因为 ε'的数值与频率有关，对于光波，频率极高（$\approx 10^{15}$赫），所以对光波测出的折射率与低频下测出的$\sqrt{\varepsilon'}$的数值自然相差较大。介电常数 ε'或者折射率 n 随频率变化的关系，只有把物质的原子结构考虑进去才能处理。

表1-1　麦克斯韦关系

在 0 ℃和 1 大气压下的气体			20℃液体			室温下的固体		
物　质	$\sqrt{\varepsilon'}$	n	物　质	$\sqrt{\varepsilon'}$	n	物　质	$\sqrt{\varepsilon'}$	n
空气	1.000294	1.000293	苯	1.51	1.501	金刚石	4.06	2.419
氦	1.000034	1.000036	水	8.96	1.333	琥珀	1.6	1.55
氢	1.000131	1.000132	乙醇	5.08	1.361	溶融硅	1.94	1.458
二氧化碳	1.00049	1.00045	四氯化碳	4.63	1.461	氯化钠	2.37	1.50

§1-3　平面电磁波

波动微分方程(1-18)和(1-19)是两个偏微分方程，它们的解可以有多种形式，平面波、球面波和柱面波都可满足方程。在求解方程时，要根据 E 和 H 满足的边界条件和初始条件，决定解的具体形式。这里，以平面波为例，求解微分方程，并讨论平面波在各向同性均匀透

明介质中传播的一些特性。

一、波动微分方程的解

假设平面波沿直角座标系 $x\ y\ z$ 的 x 方向传播（图1-4），那么电磁场值与 y、z 座标无关，电磁场值只是 x 和 t 的函数。这样，电磁场的波动方程(1-18)和(1-19)化为

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0 \tag{1-23}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2}=0 \tag{1-24}$$

令

$$\xi=t-\frac{x}{v},\quad \eta=t+\frac{x}{v}$$

因而

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}&=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \xi}+\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \eta}\right)\\&=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \xi}+\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \xi}+\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial t}\\&=\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial \eta^2}\end{aligned}$$

同样

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial \xi}-2\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial \eta^2}\right)$$

所以

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}=-\frac{4}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial \xi\partial \eta}=0$$

或

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial \xi\partial \eta}=0$$

对 η 积分得到

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \xi}=\boldsymbol{g}(\xi)$$

$\boldsymbol{g}(\xi)$为 ξ 的任意函数。再对 ξ 积分得到

$$\boldsymbol{E}=\int \boldsymbol{g}(\xi)d\xi+\boldsymbol{f}_2(\eta)=\boldsymbol{f}_1(\xi)+\boldsymbol{f}_2(\eta)=\boldsymbol{f}_1\left(t-\frac{x}{v}\right)+\boldsymbol{f}_2\left(t+\frac{x}{v}\right)$$

$\boldsymbol{f}_1$ 和 $\boldsymbol{f}_2$ 为两个任意函数。$\boldsymbol{f}_1$ 表示以速度 v 沿 x 正方向传播的波，$\boldsymbol{f}_2$ 表示以同一速度沿 x 负方向前进的波。因为我们讨论的是由辐射源(光源)向外辐射的波的传播问题，所以只取第一项，即

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{f}\left(t-\frac{x}{v}\right) \tag{1-25}$$

按同样的方法解方程(1-24)，也会得到

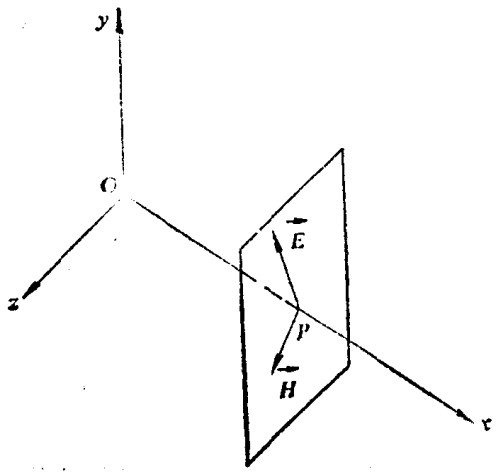


图1-4 沿 x 方向传播的平面电磁波

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{F}\left(t-\frac{x}{v}\right) \tag{1-26}$$

取一余弦(或正弦)函数作为波动方程的特解，于是

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right] \tag{1-27}$$

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{A}'\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right] \tag{1-28}$$

或写成标量形式⊖

$$E=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right] \tag{1-29}$$

$$H=A'\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right] \tag{1-30}$$

二、平面波的波动公式

式(1-29)和(1-30)通常称为平面简谐波的波动公式，对于光波来说，它们就是平面单色光波的波动公式。式中A和A'分别是电振动和磁振动的振幅，ω是角频率。余弦项的宗量$\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right]$称为位相，它是一个十分重要的量，它决定着平面波在传播轴上各点引起的振动的状态。角频率ω和平面波振动频率ν的关系为

$$\omega=2\pi\nu=2\pi\frac{1}{T} \tag{1-31}$$

T为周期。周期T与速度v的乘积称为波长(λ)，即

$$\lambda=v\cdot T \tag{1-32}$$

由于平面波的传播速度随介质而异，而频率与介质无关，因此在不同的介质中，波长有不同的数值。在真空中平面波的传播速度为c，所以在真空中平面波的波长

$$\lambda_0=c\cdot T \tag{1-33}$$

易见λ和λ_0的关系为

$$\lambda=\frac{\lambda_0}{n} \tag{1-34}$$

n是平面波在其中传播的介质的折射率。

引入沿波传播方向的波矢量$\boldsymbol{k}$，其大小(通常称波数)为

$$k=\frac{2\pi}{\lambda} \tag{1-35}$$

利用这些关系，可以把波动公式(1-29)写成下列两种形式

$$E=A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\right] \tag{1-36}$$

和

$$E=A\cos(\omega t-kx) \tag{1-37}$$

以后为说明问题方便起见，将根据不同的情况使用这些公式。

⊖ 用矢量表示的波称矢量波，用标量表示的波称标量波。在讨论光的偏振现象时，要讲究光波的振动方向，因而光波要用矢量波表示。在讨论光的干涉、衍射现象时，一般不必讲究振动方向，而只要知道振动的大小，因而光波可用标量波表示。

单色光波波动公式(1-37)〔或(1-36)和(1-29)〕最显著的特点是它的时间周期性和空间周期性，它表示单色光波是一种时间无限延续、空间无限延伸的波动，而任何时间周期性和空间周期性的破坏，都意味着单色光波单色性的破坏。为了表示单色光波的空间周期性，往往将波长λ称为单色光波的空间周期，$\frac{1}{\lambda}$称为空间频率，将波数 $k\left(=\frac{2\pi}{\lambda}\right)$称为空间角频率。单色光波的时间周期性和空间周期性紧密相关，彼此通过传播速度 v 由式(1-32)联系。

这里，我们有意把磁矢量撇开了，因为我们的注意力是光学问题，而对于光来说，虽然它亦包含电矢量和磁矢量，并从波的传播来看，电矢量和磁矢量处于同等的地位，但从光与物质的作用来看，两者并不相同。例如光波的电磁场对物质中带电粒子的作用，磁场的作用远比电场为弱。此外，实验证明使照相底板感光的是电场而不是磁场(见§2-2)，对视网膜起作用的也是电场而不是磁场，所以通常把电矢量 $\boldsymbol{E}$ 称为光矢量，把 $\boldsymbol{E}$ 的振动称为光振动。在讨论光的振动性质时，只考虑电矢量$\boldsymbol{E}$ 即可。

三、复数形式的波动公式

为了运算方便起见，常常把平面波的波动公式写成复数形式。例如波动公式(1-37)，实际上是复数表式的实数部分，写成

$$E = Re[Ae^{-i(\omega t-kx)}]$$

式中 $i=\sqrt{-1}$，$Re[\quad]$表示括号中复数的实数部分。在实际应用中，为简单起见可以省去表示实数部分的符号，而写成

$$E = Ae^{-i(\omega t-kx)} \tag{1-38}$$

这种替代完全是形式上的，目的是用比较简单的指数函数运算来代替比较繁琐的三角运算，使计算大大简化。例如，在光学的许多问题里，求振幅的平方 A^2很重要，A^2 决定着能量(光强度)，而要求得 A^2，只需将复数E乘以其共轭复数 E^*，即

$$E\cdot E^* = Ae^{i(kx-\omega t)}\cdot Ae^{-i(kx-\omega t)} = A^2 \tag{1-39}$$

复数波动公式(1-38)也可将时间位相因子和空间位相因子分开写为

$$E = Ae^{-i\omega t}\cdot e^{ikx} = \widetilde{E}e^{-i\omega t}$$

而将振幅和空间位相因子

$$\widetilde{E} = Ae^{ikx} \tag{1-40}$$

称为复振幅。在许多情况下，如果我们不考虑光波随时间的变化，可用复振幅表示光波，使计算公式简化。

应该指出，上述几个波动公式是假设平面波沿 x 方向传播得出的，但容易了解沿空间某一方向 $\boldsymbol{S}$传播的平面波(图1-5)的波动公式为

$$E=A\exp\{-i[\omega t-k(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}_0)]\}$$

式中$\boldsymbol{r}$ 为平面波面上任一点 P (x、y、z)的位置矢量，$\boldsymbol{S}_0$ 为 $\boldsymbol{S}$ 方向的单位矢。由于 $\boldsymbol{k}$ 方向与 $\boldsymbol{S}$ 方向相同，所以上式又可写为

$$E=A\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)] \tag{1-41}$$

相应的复振幅

$$\widetilde{E}=A\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})] \tag{1-42}$$

设 $\boldsymbol{S}$ 方向的方向余弦(即单位矢 $\boldsymbol{S}_0$ 在 x、y、z 座标轴上的投影)为 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$，那

末式(1-41)又可以写成

$$E = Ae^{-i[\omega t - k(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)]} \tag{1-43}$$

而复振幅

$$\widetilde{E} = Ae^{i[k(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)]} \tag{1-44}$$

四、平面电磁波的基本性质

最后，我们利用麦克斯韦方程组来讨论平面简谐电磁波的一些基本性质。设平面波沿 x 方向传播，因而可以写成

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}e^{-i(\omega t - kx)}$$

和

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{A}'e^{-i(\omega t - kx)}$$

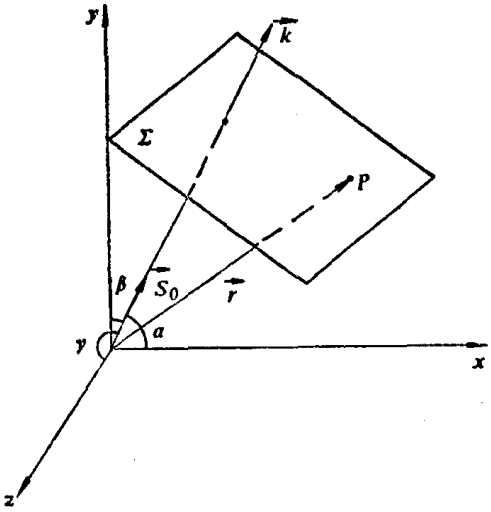


图1-5　沿 $\boldsymbol{S}$ 方向传播的平面波

1. 横向性　由麦克斯韦方程组 (1-15) 第一式，在远离辐射源区域($\rho = 0$)，有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0$$

因此

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{D} &= \varepsilon \nabla \cdot \boldsymbol{E} \\ &= \varepsilon\left(\boldsymbol{x}_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x} + \boldsymbol{y}_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial y} + \boldsymbol{z}_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial z}\right) \\ &= ik\varepsilon \boldsymbol{x}_0 \cdot \boldsymbol{E} = 0\end{aligned} \tag{1-45}$$

式中 $\boldsymbol{x}_0$、$\boldsymbol{y}_0$、$\boldsymbol{z}_0$ 为 x、y、z 座标轴的单位矢，这里假设平面波沿 $\boldsymbol{x}$ 方向传播。由式子 可见，$\boldsymbol{E}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 方向的分量为零，即电矢量的振动方向恒垂直于波的传播方向。同样，磁矢量的振动方向也垂直于波的传播方向，因为由方程组(1-15)第二式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \mu \nabla \cdot \boldsymbol{H} = ik\mu \boldsymbol{x}_0 \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{1-46}$$

由此得出结论：平面电磁波是横波，其电矢量和磁矢量的振动方向垂直于波的传播方向。

2. $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 互相垂直。由方程组(1-15)第三式

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

由于

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -i\omega \boldsymbol{H}, \quad \nabla \times \boldsymbol{E} = ik\boldsymbol{x}_0 \times \boldsymbol{E}$$

所以

$$i\omega\mu \boldsymbol{H} = ik\boldsymbol{x}_0 \times \boldsymbol{E}$$

而按照式(1-35)和(1-17)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$$

最后得到

$$\sqrt{\mu}\,\boldsymbol{H} = \sqrt{\varepsilon}\,(\boldsymbol{x}_0 \times \boldsymbol{E}) \tag{1-47}$$

可见，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 互相垂直，彼此又垂直于波的传播方向 $\boldsymbol{x}_0$。$\boldsymbol{x}_0$、$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 三者构成右手螺旋系统。

3. $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 同相。根据式(1-47)，有

$$\sqrt{\mu}H=\sqrt{\varepsilon}E$$

所以

$$\frac{E}{H}=\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \tag{1-48}$$

式子表明，E 和 H 的数值之比为一正实数，因此两矢量有同样的位相，传播时同步地变化。

综合上面的讨论，可以把一个沿 x 方向传播的，电矢量限于 xoy 平面的 EH 耦合平面简谐电磁波表示如图1-6。

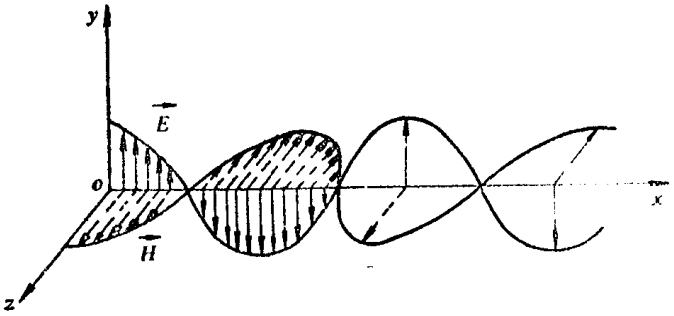


图1-6 EH 耦合的平面简谐电磁波

§1-4 球面波和柱面波的波动公式

前面已经讨论过平面波的情况，现在再来讨论两种常见的情况，即点光源和线光源所发出的光波。如果在真空中或各向同性的介质中的 O 点放一个点光源，容易想象，从 O 点发出的光波将以相同的速度向各个方向传播，经过一定时间以后，电磁振动所到达的各点将构成一个以 O 点为中心的球面（图1-7），即波阵面是球面，这种波称为球面波。球面波阵面上各点的位相相同，因此只要研究从 O 点出发的任一方向（例如 OR 方向）上各点的电磁场变化规律，就可以了解整个空间电磁场的情况。

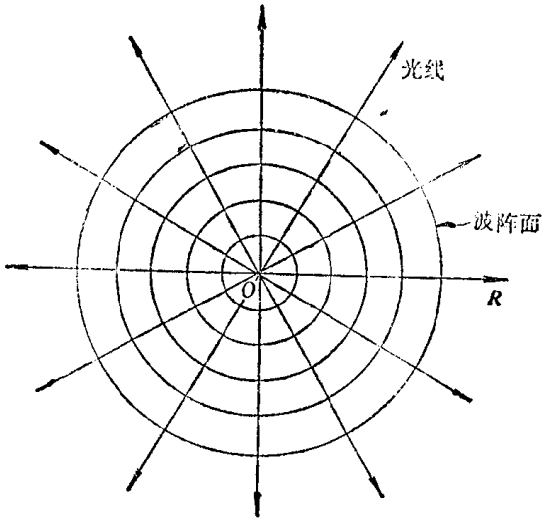


图1-7 球面波示意图

我们仍然研究最简单的单色光波。考虑波动沿 OR 方向传播，显然距 O 点为 r 的 P 点的位相为 $\left[\omega\left(t-\frac{r}{v}\right)\right]$ 或 $[\omega t-kr]$（假设 O 点的初位相为零），P 点振幅用 A_r 表示，则 P 点的电矢量可以表为

$$E=A_r\cos(\omega t-kr) \tag{1-49}$$

或

$$E=A_re^{-i(\omega t-kr)} \tag{1-50}$$

球面波的振幅 A_r 是随距离 r 变化的，因为单位时间内通过任一球面（波面）的能量相同，而随着球面的扩大单位时间内通过单位面积的能量将越来越少。设距 O 点为单位距离的 O_1 点和距 O 点为 r 的 P 点的光强分别用 I_1 和 I_p 表示，那末

$$I_1\times 4\pi=I_p\times 4\pi r^2$$

所以

$$\frac{I_P}{I_1}=\frac{1}{r^2} \tag{1-51}$$

在下一节里我们将要说明光强与振幅的平方成正比，即

$$\frac{I_P}{I_1}=\frac{A_r^2}{A_1^2} \tag{1-52}$$

式中 A_1 为 O_1 点的振幅 。由上面两式易见

$$A_r=\frac{A_1}{r} \tag{1-53}$$

代入式(1-50)，得到

$$E=\frac{A_1}{r}e^{-i(\omega t-kr)} \tag{1-54}$$

这就是球面波的波动公式，它表明球面波的振幅与离开波源的距离 r 成反比。

柱面波是一个无限长的线光源发出的光波，它的波阵面具有柱面的形状。用同样的方法可以证明，柱面波的振幅与$\sqrt{r}$成反比，因此，柱面波的波动公式可以写为

$$E=\frac{A_1}{\sqrt{r}}e^{-i(\omega t-kr)} \tag{1-55}$$

实际上，严格的球面波和柱面波都是不能实现的，因为光源都有一定的大小；只是在距离 r 比光源的线度大小大得多的情况下，可以近似地把光波看成是球面波或柱面波。

§1-5 光波的辐射，辐射能

前面已经说明了光是电磁波，那么光源发光就是物体辐射电磁波的过程，这个问题同样可以利用电磁场理论加以讨论。我们知道，一个物体微观上可以认为是由大量分子、原子和电子所组成，因而可看作是一个电荷体系。大部分物体发光属于原子发光类型，因此，可以只研究原子辐射电磁波的情况。

一、电偶极子辐射模型

经典电磁场理论把原子发光看作是原子内部过程形成的电偶极子的辐射。原子由带正电的原子核和绕核运动的带负电的电子组成，在外界能量的激发下，由于原子核和电子的剧烈运动和相互作用，原子的正电中心和负电中心常不重合，且正负电中心的距离在不断地变化，因而形成一个振荡电偶极子。设原子核所带的电荷为 q，正负电中心的距离为 $\boldsymbol{l}$(方向由负电中心指向正电中心)，则原子的电矩

$$\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{l} \tag{1-56}$$

最为简单的振荡电偶极子是电矩随时间作正弦或余弦变化(简谐变化)的电偶极子，其电矩 $\boldsymbol{p}$ 可表为

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_0\cos\omega t \tag{1-57}$$

式中$\boldsymbol{p}_0$是电偶极子电矩的振幅(电矩的最大值)，ω 是角频率。

既然原子是一个振荡电偶极子，它必定在周围空间产生变化的电磁场，即辐射出光波。图 1-8 表示电偶极子的电矩在作简谐变化时，电偶极子附近的电力线分布情况。其中图1-8 a

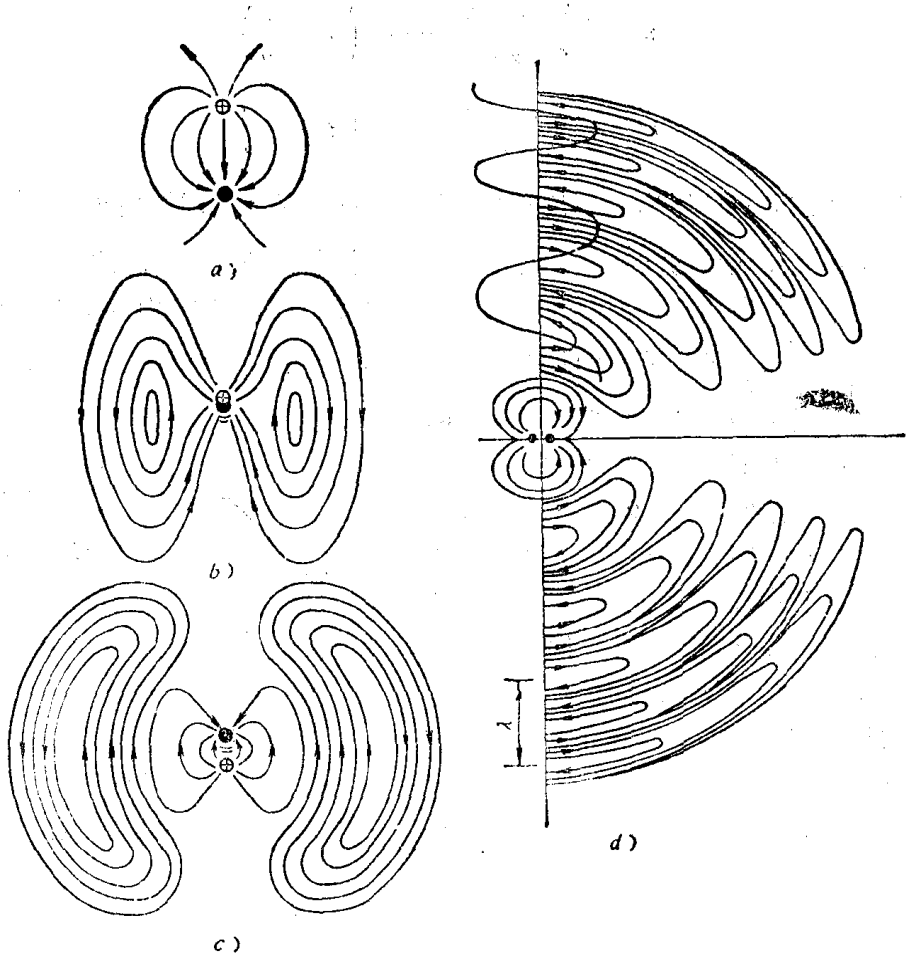


图1-8　电偶极子附近的电力线分布

是开始时刻正负电中心相隔某一距离时的电力线形状，图1-8 *b* 是正负电中心重合时的电力线形状，此时电力线开始闭合。当正负电中心继续运动时，场中除了有连结正负电中心的电力线以外，还有与正负电中心不连结的闭合电力线，如图1-8 *c* 所示。闭合电力线的出现表明已产生了涡旋电场，这电场是不稳定的，因而它将产生变化的磁场，而变化的磁场又将产生新的变化电场。这种作用继续下去，在电偶极子的周围空间便形成一个电磁场，这个电磁场在电偶极子附近的电力线分布如图1-8 *d* 所示。磁力线分布图中未画出，它们是一些以电偶极子的轴线为中心的同心圆。由图1-8 *d* 已可明显看出，电磁场传播有一定的空间周期 λ。

振荡电偶极子所辐射的电磁场，也可以应用麦克斯韦方程组进行计算，这种计算在经典电动力学的著作中都可以找到。这里，我们仅给出结果，并作简单分析。

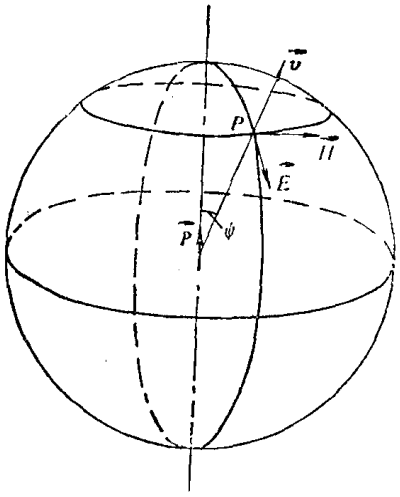


图1-9　振荡电偶极子辐射的球面电磁波

1．作简谐振荡的电偶极子在距离很远的 *P* 点(图1-9)，辐射的电磁场的数值为

$$E=\frac{\omega^2 p_0 \sin\psi}{4\pi\varepsilon v^2 r}\cos\omega\left(t-\frac{r}{v}\right) \tag{1-58}$$

$$H=\frac{\omega^2 p_0 \sin\psi}{4\pi v r}\cos\omega\left(t-\frac{r}{v}\right) \tag{1-59}$$

式中 r 是电偶极子到 P 点的距离，ψ 是 r 方向与电偶极子轴线之间的夹角，$v\left(=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)$是电磁场的传播速度，$\omega$ 是波动的角频率，与电偶极子的振荡角频率相同。式（1-58）和(1-59)表明，电偶极子辐射的电磁波是一个以电偶极子为中心的发散球面波，因为位相相同$\left(\left[\omega\left(t-\frac{r}{v}\right)\right]=\text{常数}\right)$的点的空间集合是一个球面，且波的振幅与 r 成反比。但是，与上节讨论的理想球面波不同的是，电偶极子辐射的球面波的振幅还随 ψ 角而变，如图 1-10 所示。

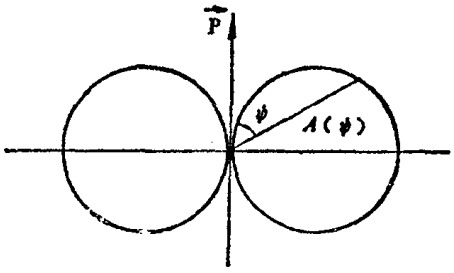


图1-10　电偶极子辐射的电磁波的振幅随 ψ 而变

2. $\boldsymbol{E}$ 在 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 所在的平面内振动，$\boldsymbol{H}$ 在与之垂直的平面内振动，同时 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 又都垂直于波的传播方向(见图1-9)。$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 分别在各自的平面内振动，这一特性称为偏振性，因此振荡电偶极子发射的光波又是偏振的球面波。

但是，如果我们考察的空间离开振荡电偶极子很远，并且考察的空间范围与 r 相比很小，这样球面波振幅随 r 和 ψ 的变化可以忽略，因而波动公式(1-58)和(1-59)可以用平面波的波动公式表示

$$E=A\cos\omega\left(t-\frac{x}{v}\right) \tag{1-60}$$

$$H=B\cos\omega\left(t-\frac{x}{v}\right) \tag{1-61}$$

式中 x 是离开波源的距离。图 1-11 表示出当距离增大时，球面波波阵面的一部分渐渐变为平面波阵面的情形。在光学上，只要把光源放在足够远的位置，而我们考察的范围又比较小，就可近似地把光波看成是平面波（平行光），或者是把点光源放在透镜的前焦点上，利用透镜的折射将球面光波变为平面光波。

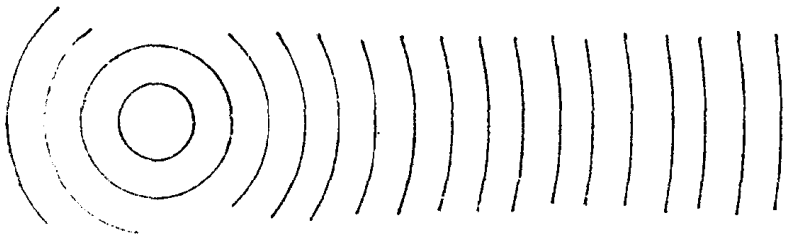


图1-11　球面波波阵面随距离增大而变为平面

二、辐射能

振荡电偶极子不断地向外界辐射电磁场，由于电磁场具有确定的能量，所以在辐射过程中，伴随着电磁能量的传播。在电磁学里，已经计算过电磁场的能量密度为

$$W=\frac{1}{2}\varepsilon E^2+\frac{1}{2}\mu H^2 \tag{1-62}$$

式中第一项是电场的能量密度，第二项是磁场的能量密度，为了描述电磁能量的传播，引进

辐射强度矢量或坡印亭(Poynting)矢量$\boldsymbol{S}$。这矢量的大小等于单位时间内通过垂直于传播方向的单位面积的电磁能量，其方向取能量的流动方向，设 $d\sigma$ 为垂直于电磁波传播方向的面积元，不考虑介质的吸收作用，在 dt 时间内通过面积 $d\sigma$ 的能量为$wvd\sigma dt$，因此在单位时间内垂直通过单位面积的能量——辐射强度矢量的大小为

$$S = wv = \frac{v}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)$$

把关系式(1-17)和(1-48)代入上式，得

$$S = v\varepsilon E^2 = v\mu H^2 = E \cdot H \tag{1-63}$$

由于$\boldsymbol{S}$的方向与电磁场的传播方向相同，而传播方向，$\boldsymbol{E}$的方向和$\boldsymbol{H}$的方向三者互相垂直，组成右旋系统(图1-12)，所以上式也可用矢量式表示为

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \tag{1-64}$$

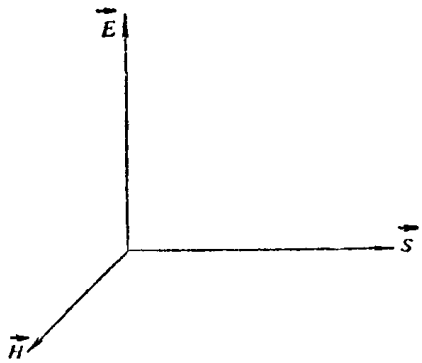


图1-12　$\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{H}$组成右旋系统

对于光波来说，电场和磁场的变化极其迅速，变化频率在10^{15}赫的数量级，所以$\boldsymbol{S}$的值也是迅速变化的，人眼和任何其他接收器都不可能接收到$\boldsymbol{S}$的瞬时值，而只能接收$\boldsymbol{S}$的平均值。易见，$\boldsymbol{S}$的平均值与电矢量振幅的平方成正比。就沿 x 方向传播的平面光波来说

$$S = v\varepsilon E^2 = v \cdot \varepsilon \cdot A^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

以$(\overline{S})$表示 s 在一个周期内的平均值，得到

$$(\overline{S}) = v\varepsilon A^2 \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t - kx)\,dt = \frac{1}{2}\,v\varepsilon A^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon/\mu}\,A^2 \tag{1-65}$$

在物理光学中通常把辐射强度的平均值$(\overline{S})$称为光强度，以 I 表示。因此，由式(1-65)，有

$$I = \alpha A^2 \tag{1-66}$$

式中 α 为比例常数㊀。

由式(1-65)，若已知光波的强度，便可以计算光波电矢量的振幅 A。例如一个 100 瓦的灯泡，在距离 10 米处的强度为(假设灯泡在各个方向均匀发光)

$$I = \frac{100}{4\pi(10)^2} = 7.8 \times 10^{-2}\ \text{瓦/米}^2$$

在空气中 $v \approx c$，$\varepsilon \approx \varepsilon_0$，因此

$$A = \left[\frac{2I}{c\varepsilon_0}\right]^{1/2} = \left[\frac{15.6 \times 10^{-2}}{2.66 \times 10^{-3}}\right]^{1/2} \approx 7.66\ \text{伏/米}$$

对于一束10^5瓦的激光束，可以用透镜将它聚焦到小于10^{-9}厘米^{2}的截面积上，因而在透镜焦面上激光束的强度为

$$I = \frac{10^5}{10^{-10}} = 10^{15}\ \text{瓦/米}^2$$

因此

$$A = \left[\frac{2 \times 10^{15}}{2.66 \times 10^{-3}}\right]^{1/2} \approx 0.75 \times 10^9\ \text{伏/米}$$

㊀ 在光学的许多问题中，我们需要了解的是相对强度，因此常常把式(1-66)写成 $I = A^2$。

这样强的电场能够产生极高的温度，足以把任何目标烧毁。

三、对实际光波的认识

上述讨论假定电偶极子的电矩在作简谐变化，辐射出如式(1-58)和(1-59)所表示的无限延续的单色球面波，显然这只是一种理想的情况，实际情况远非如此。实际上由于原子的剧烈运动，彼此间不断地碰撞，电偶极子的辐射过程常常中断，因而原子发光是断断续续的。原子每次发光的持续时间是原子两次碰撞的时间间隔，即使是在最好的条件下（如稀薄气体发光），这个持续时间也极短，约为 10^{-8}秒的数量极。这样，原子发出的光波是由一段段有限长的称为波列的光波组成的；每一段波列，其振幅在持续时间内保持不变或缓慢变化，前后各段之间没有固定的位相关系，甚至光矢量的振动方向也不同。这种对实际光波的看法可用图 1-13 粗略地表示出来。

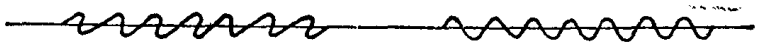


图1-13　由一段段波列组成的实际光波示意图

其次，实际光源辐射的光波没有偏振性，因为实际光源都是由大量原子和分子组成，这些原子和分子所发出的光的振动方向杂乱无章。另外，如上所述，在观察时间内，每个原子发生了多次辐射，每次辐射的振动方向和位相也是无规则的。因此，对于实际光源发出的光波来说，其光矢量的振动方向不是局限在一个平面内，而是具有一切可能的振动方向的许多光波的总和。在这一切可能的振动方向上没有一个振动方向较之其他方向更占优势，这样的光称为自然光。所以说，实际光源辐射的光不是偏振光而是自然光。在第六章里，将详细讨论从自然光获得偏振光的方法。

§1-6　电磁场的边界条件

在光学中，常常要处理光波从一种介质到另一种介质的传播问题，由于两种介质的物理性质不同(以 $\varepsilon_1\mu_1$ 和 $\varepsilon_2\mu_2$ 表征)，在两种介质的分界面上电磁场量将是不连续的，但它们之间具有一定的关系，通常把这种关系称为电磁场的边界条件。

为了导出边界条件，假想在分界面上作出一个扁平的小圆柱体，圆柱体的高为 δh，圆面积为 δA（图 1-14）。虽然从分界面一边到另一边 ε 和 μ 的值改变很快，但是假设在小圆柱体内它们是连续变化的，这样由麦克斯韦方程组（1-15）第二式，把 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}$ 对圆柱体积分并应用高斯定理，得到

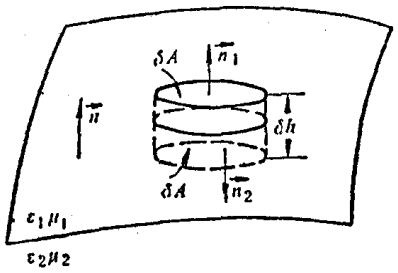


图1-14　分界面上的假想小圆柱体

$$\iiint\nabla\cdot\boldsymbol{B}\mathrm{d}V=\oiint\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\sigma=0$$

第二个积分遍及整个圆柱体表面，$d\sigma$ 的方向取外向法线的方向。第二个积分可写成对柱顶，柱底和柱壁三个面积积分之和，即

$$\oiint\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\sigma=\iint_{顶}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\sigma+\iint_{底}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\sigma+\iint_{壁}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\sigma=0$$

因为假设圆柱体的圆面积 δA 很小，所以可认为 $\boldsymbol{B}$ 在此范围内是常数，在柱顶和柱底分别为 $\boldsymbol{B}_1$ 和 $\boldsymbol{B}_2$，因此上式可改写为

$$\boldsymbol{B}_1\cdot\boldsymbol{n}_1\delta A+\boldsymbol{B}_2\cdot\boldsymbol{n}_2\delta A+\iint_{壁}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\sigma=0$$

式中 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$ 分别为柱顶和柱底的单位外向法线。如果柱高 δh 趋于零，上式第三项积分也趋于零，并且柱顶和柱底趋近分界面。以 $\boldsymbol{n}$（从介质 2 指向介质 1）表示分界面的单位法线，则 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1=-\boldsymbol{n}_2$，

因此

$$\boldsymbol{B}_1\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{B}_2\cdot\boldsymbol{n}=0$$

或

$$B_{1n}=B_{2n} \tag{1-67}$$

表明在通过分界面时磁感强度的法线分量是连续的，同样，在没有自由电荷的情况下 $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0$，因此也可以得到

$$D_{1n}=D_{2n} \tag{1-68}$$

表明在通过分界面时若没有自由电荷，电感强度的法线分量也是连续的。

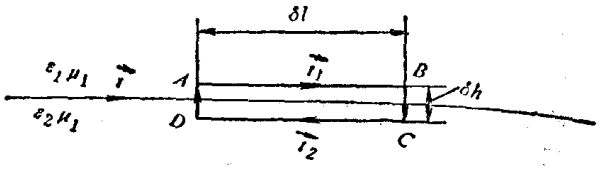


图1-15 分界面上的假想长方形面积

下面讨论切向分量的情况。为此，把图 1-14 的圆柱体换成一个矩形面积 $ABCD$，令其四边分别平行和垂直于分界面，如图 1-15 所示。把麦克斯韦方程组（1-15）第三式应用到这矩形面积上，有

$$\iint\nabla\times\boldsymbol{E}\mathrm{d}\sigma=-\iint\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\mathrm{d}\sigma$$

根据斯托克斯(Stokes)定理

$$\iint\nabla\times\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\sigma=\oint\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\iint\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\mathrm{d}\sigma$$

上式中线积分沿着矩形面积的周界（$\mathrm{d}l$ 取切线方向），它可以写成下面四个积分之和

$$\oint\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\left(\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CD}+\int_{DA}\right)\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\iint\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\mathrm{d}\sigma$$

如果 AB 和 CD 的长度很短，则在两线段范围内 $\boldsymbol{E}$ 值可认为是常数，分别为 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$；$\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ 也可认为是常数。此外，长方形的高 δh 趋于零时，沿 BC 和 DA 的积分便趋于零，并且因为长方形的面积趋于零，所以上式右边的积分也为零，因此得到

$$\int_{AB}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{CD}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$$

或

$$\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{t}_1\delta l=-\boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{t}_2\delta l$$

式中 $\boldsymbol{t}_1$ 和 $\boldsymbol{t}_2$ 分别为沿 AB 和 CD 的单位切线，δl 为 AB 和 CD 的长度。以 $\boldsymbol{t}$（取 A 向 B 的方向）表示分界面的单位切线，则 $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{t}_1=-\boldsymbol{t}_2$，因此

$$\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{t}=\boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{t}$$

或

$$E_{1t}=E_{2t} \tag{1-69}$$

即是在通过分界面时电矢量的切向分量是连续的。

同样，在没有面电流的情况下，由麦克斯韦方程组第四式，也可得到

$$H_{1t}=H_{2t} \tag{1-70}$$

总而言之，在两种介质的分界面上电磁场量是不连续的但在没有面电荷和面电流的情况下，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{D}$的法向分量以及 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的切向分量则是连续的。

§1-7 光在二透明电介质分界面上的反射和折射

光在二透明电介质分界面上的反射和折射，实质上是光波的电磁场与物质相互作用的问题，问题的精确处理是比较复杂的。我们知道，介质由原子和分子组成，而原子和分子则由原子核和绕核运动的电子构成，当光波的电磁场入射到介质时，就会引起场和介质中带电粒子的相互作用。比较轻的带电粒子——电子可以依着光波电矢量的振动步调振动起来，由于电子的振动，原子将成为振荡电偶极子而辐射出次电磁波——次波，它们彼此是相干的，与入射波也是相干的，要完备的研究光的反射、折射、色散和散射等现象都必须考虑这种干涉。不过，这种计算相当复杂，已超出本书范围。在这里将采取比较简单的方法：不考虑个别分子、原子的性质，而用介质的介电系数、磁导率和电导率表示大量分子的平均作用，根据麦克斯韦方程组和电磁场的边界条件，研究平面光波在二介质分界面上的反射和折射的问题。

一、反射定律和折射定律

反射定律和折射定律是我们熟知的。当一个平面光波射到两种不同介质的分界面上时，将分成两个波：一个透射波和一个反射波。从电磁场的边界条件也可以证明这两个波的存在，并求出它们的传播方向和振幅关系式。

假设平面光波

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}\exp[-i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]$$

沿着入射面 xoz 投射到折射率分别为 n_1 和 n_2 的二介质的分界面 xoy 上，以 θ_1、θ_1' 和 θ_2 分别表示入射角、反射角和折射角，如图1-16所示。$\boldsymbol{E}$ 的方向不一定与入射面垂直或平行，但可以把 $\boldsymbol{E}$ 分解为垂直于入射面的分量 E_s 和平行入射面的分量 E_p。E_s 的正向沿着 y 轴方向，即与图面垂直并指向读者；E_p 的正向如图所示（只要在整个讨论过程中保持统一规定，E_s 和 E_p 的正向可选为上述方向，也可选为与之相反的方向而不影响结果的普遍性）。下面我们只讨论电矢量垂直于入射面的光波在分界面上的反射与折射，对于电矢量平行于入射面的光波的情形，讨论方法完全类似。

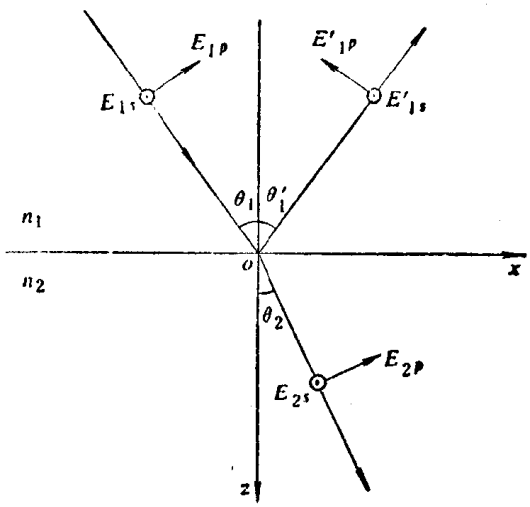


图1-16 平面波入射到分界面 xoy

以 E_{1s}、E'_{1s} 和 E_{2s} 分别表示入射波、反射波和折射波的垂直于入射面的电矢量分量，它

们的波动公式应为

$$\left.\begin{aligned} E_{1s} &= E_{1y} = A_{1s}e^{i[k_1(x\sin\theta_1+z\cos\theta_1)-\omega_1 t]} \\ E'_{1s} &= E'_{1y} = A'_{1s}e^{i[k_1(x\sin\theta'_1-z\cos\theta'_1)-\omega'_1 t]} \\ E_{2s} &= E_{2y} = A_{2s}e^{i[k_2(x\sin\theta_2+z\cos\theta_2)-\omega_2 t]} \end{aligned}\right\} \quad (1\text{-}71)$$

式中 ω_1、ω'_1 和 ω_2 分别为入射波、反射波和折射波的角频率，k_1 和 k_2 分别为平面 波在第一介质和第二介质中的波数。根据电磁场的边界条件，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量在界面连续，即

$$E_{1y} + E'_{1y} = E_{2y} \quad (1\text{-}72)$$

$$H_{1x} + H'_{1x} = H_{2x} \quad (1\text{-}73)$$

将式(1-71)中 $z = 0$ 的 E_{1y}、E'_{1y} 和 E_{2y} 代入式(1-72)，得到

$$A_{1s}e^{i(k_1x\sin\theta_1-\omega_1 t)} + A'_{1s}e^{i(k_1x\sin\theta'_1-\omega'_1 t)} = A_{2s}e^{i(k_2x\sin\theta_2-\omega_2 t)} \quad (1\text{-}74)$$

将式(1-74)对 t 微分，有

$$i\omega_1 A_{1s}e^{i(k_1x\sin\theta_1-\omega_1 t)} + i\omega'_1 A'_{1s}e^{i(k_1x\sin\theta'_1-\omega'_1 t)} = i\omega_2 A_{2s}e^{i(k_2x\sin\theta_2-\omega_2 t)} \quad (1\text{-}75)$$

比较式(1-74)和(1-75)，易见

$$\omega_1 = \omega'_1 = \omega_2 \quad (1\text{-}76)$$

即反射波、折射波与入射波的频率相同。同时，由于电磁场的边界条件对于 x 和 t 的任何值恒成立，所以式(1-74)各项的指数必相等，因此

$$k_1\sin\theta_1 = k_1\sin\theta'_1 = k_2\sin\theta_2$$

由前一等式，得到

$$\theta_1 = \theta'_1 \quad (1\text{-}77)$$

表明入射角等于反射角。由后一等式，得到

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} = n \quad (1\text{-}78)$$

式中 n 为第二介质对第一介质的相对折射率。上式是著名的折射定律，或称斯涅耳(Snell)定律。

二、菲涅耳公式

下面来导出关于反射波和折射波与入射波振幅比值的关系式——菲涅耳公式。

在平面波的电矢量垂直于入射面的情形，$E_x = E_z = 0$，由麦克斯韦方程组(1-15)第三式得到

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\mu\frac{\partial H_x}{\partial t} \\ 0 &= -\mu\frac{\partial H_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\mu\frac{\partial H_z}{\partial t} \end{aligned}\right\} \quad (1\text{-}79)$$

将式(1-73)对时间 t 微分，得

$$\frac{\partial H_{1x}}{\partial t} + \frac{\partial H'_{1x}}{\partial t} = \frac{\partial H_{2x}}{\partial t}$$

根据式(1-79)中第一式，以 $\frac{1}{\mu}\frac{\partial E_y}{\partial z}$ 代替上式中的 $\frac{\partial H_x}{\partial t}$，化成

$$\frac{\partial E_{1y}}{\partial z}+\frac{\partial E'_{1y}}{\partial z}=\frac{\partial E_{2y}}{\partial z}$$

将式(1-71)中对应值代入微商，得到(对于 $z=0$)

$$k_1\cos\theta_1 A_{1s}e^{i(k_1x\sin\theta_1-\omega t)}-k_1\cos\theta'_1 A'_{1s}e^{i(k_1x\sin\theta_1-\omega t)}=k_2\cos\theta_2 A_{2s}e^{i(k_2x\sin\theta_2-\omega t)} \tag{1-80}$$

由于式(1-74)和(1-80)各项指数相等，因而

$$A_{1s}+A'_{1s}=A_{2s} \tag{1-81}$$

$$k_1\cos\theta_1 A_{1s}-k_1\cos\theta_1 A'_{1s}=k_2\cos\theta_2 A_{2s}$$

应用折射定律(1-78)，有

$$\cos\theta_1\sin\theta_2(A_{1s}-A'_{1s})=\sin\theta_1\cos\theta_2 A_{2s} \tag{1-82}$$

将式(1-81)中 A_{2s} 值代入，得到

$$\left(1-\frac{A'_{1s}}{A_{1s}}\right)\cos\theta_1\sin\theta_2=\left(1+\frac{A'_{1s}}{A_{1s}}\right)\sin\theta_1\cos\theta_2$$

由此得出反射波和入射波的振幅之比

$$\frac{A'_{1s}}{A_{1s}}=-\frac{\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2}{\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2}$$

或写成

$$r_s=\frac{A'_{1s}}{A_{1s}}=-\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\sin(\theta_1+\theta_2)} \tag{1-83}$$

r_s 称为垂直分量的反射系数。将式(1-81)中 A'_{1s} 的值代入式(1-82)，有

$$\left(2-\frac{A_{2s}}{A_{1s}}\right)\cos\theta_1\sin\theta_2=\sin\theta_1\cos\theta_2\frac{A_{2s}}{A_{1s}}$$

因此，折射波和入射波的振幅之比——垂直分量的透射系数

$$t_s=\frac{A_{2s}}{A_{1s}}=\frac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)} \tag{1-84}$$

式(1-83)和(1-84)就是电矢量垂直于入射面的菲涅耳公式。用类似的推算也可求得电矢量平行于入射面的公式

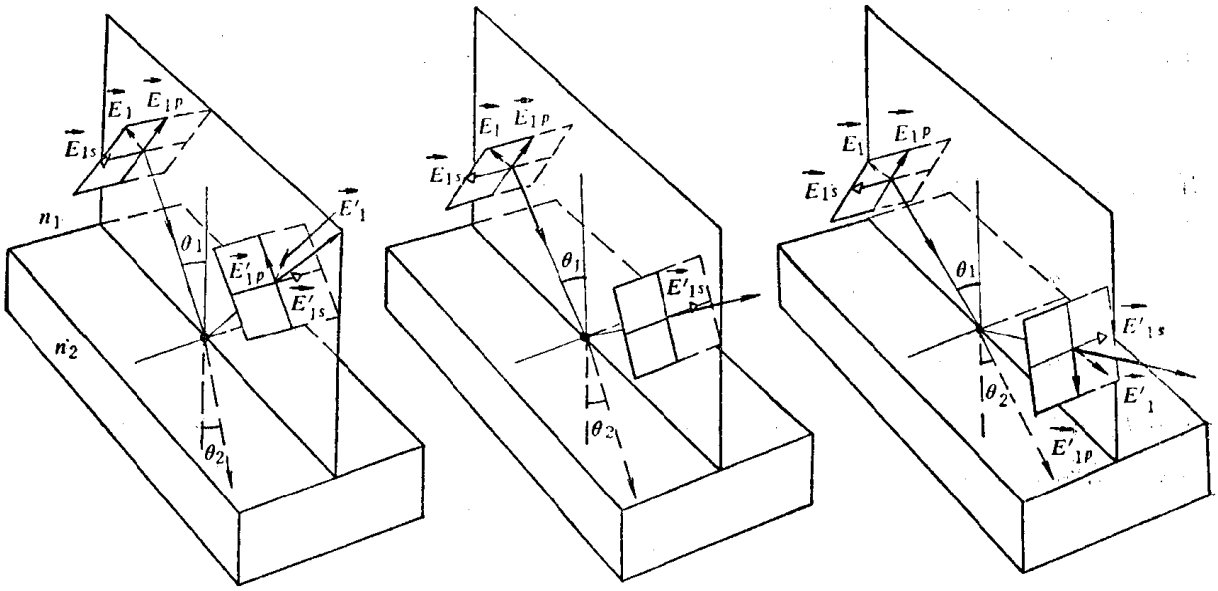
$$r_p=\frac{A'_{1p}}{A_{1p}}=\frac{\tan(\theta_1-\theta_2)}{\tan(\theta_1+\theta_2)} \tag{1-85}$$

$$t_p=\frac{A_{2p}}{A_{1p}}=\frac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)} \tag{1-86}$$

r_p 和 t_p 称为平行分量的反射系数和透射系数，它们是反射波和折射波平行分量与入射波平行分量的振幅之比。

从式(1-83)可以看出，当 $n_1<n_2$(光从光疏介质射到光密介质)时，由于 $\theta_1>\theta_2$，故 A'_{1s} 和 A_{1s} 总是异号。这表示电矢量垂直于入射面的分量在分界面上反射时，位相发生突变 π。因此当 E_{1s} 在入射波中取正方向时，E'_{1s} 在反射波中突变为负方向。对于 A'_{1p} 和 A_{1p}，情况稍为复杂一些，由式(1-85)，当 $\theta_1+\theta_2<\frac{\pi}{2}$ 时，A'_{1p} 和 A_{1p} 同号，而当 $\theta_1+\theta_2>\frac{\pi}{2}$ 时，两者异号。前一种情况表示在分界面上 E'_{1p} 和 E_{1p} 同取正方向或负方向，后一种情况表示它们分别取正(负)方向和负(正)方向。当 $\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}$ 时，$A'_{1p}=0$，入射光平行分量的反射系数为零，因而

反射光中没有平行于入射面的分量。图 1-17 绘出了三种不同入射角情况下在分界面反射时电矢量的取向情况，这里假设入射光是电矢量 $\boldsymbol{E}_1$ 所表示的偏振光，反射光电矢量 $\boldsymbol{E}'_1$ 的准确取向应该根据菲涅耳公式计算出 A'_{1s} 和 A'_{1p} 来决定，图中是示意画出的。由图 1-17 可以看出，在入射角很小（或正入射）和入射角接近90°（掠入射）时，$\boldsymbol{E}'_{1p}$ 和 $\boldsymbol{E}_{1p}$，$\boldsymbol{E}'_{1s}$ 和 $\boldsymbol{E}_{1s}$ 的方向正好相反，因此 $\boldsymbol{E}'_1$ 和 $\boldsymbol{E}_1$ 的取向也正好相反，表明在这两种情况下，反射光电矢量发生位相突变 π。由此可以得出结论：当平面波在接近正入射或掠入射下从光疏介质与光密介质的分界面反射时，反射光的电矢量相对于入射光的电矢量发生了 π 的位相突变。这一结论在讨论光的干涉现象时是极为重要的。我们通常把反射时发生的 π 位相突变称为“半波损失”，意即反射时损失了半个波长。



a）$n_1<n_2$　$\theta_1+\theta_2<\frac{\pi}{2}$　　b）$n_1<n_2$　$\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}$　　c）$n_1<n_2$　$\theta_1+\theta_2>\frac{\pi}{2}$

图1-17　不同入射角下平面波在分界面反射时电矢量取向的变化

如果光波是从光密介质入射到光疏介质($n_1>n_2$)，对反射波的 s 分量和 p 分量进行同样的讨论，所得到的结论将与 $n_1<n_2$ 的情况相反，因而在正入射时反射波电矢量没有 π 的位相突变，而掠入射时发生全反射现象(见下节)。对于折射波，则不论那一种情况，电矢量都不发生位相突变。

菲涅耳公式(1-83)、(1-84)、(1-85)和（1-86）在正入射或入射角很小时有很简单的形式

$$\frac{A'_{1s}}{A_{1s}}=-\frac{n-1}{n+1} \tag{1-87}$$

$$\frac{A_{2s}}{A_{1s}}=\frac{2}{n+1} \tag{1-88}$$

$$\frac{A'_{1p}}{A_{1p}}=\frac{n-1}{n+1} \tag{1-89}$$

$$\frac{A_{2p}}{A_{1p}}=\frac{2}{n+1} \tag{1-90}$$

因为这时 $\tan\theta\approx\sin\theta\approx\theta$，$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\approx\frac{\theta_1}{\theta_2}\approx n$。

三、反射率和透射率

现在讨论入射波、反射波和折射波的能量关系。我们知道，平面波的光强度由下式给出〔见式(1-65)〕

$$I=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}A^2$$

它表示单位时间内通过垂直于传播方向的单位面积的能量值。如果入射波的强度记为 I_1，则每秒入射到分界面单位面积上的能量是(参考图1-18)

$$W_1=I_1\cos\theta_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}A_1^2\cos\theta_1$$

而反射波和折射波每秒从分界面单位面积带走的能量是

$$W_1'=I_1'\cos\theta_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}A_1'^2\cos\theta_1$$

$$W_2=I_2\cos\theta_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}A_2^2\cos\theta_2$$

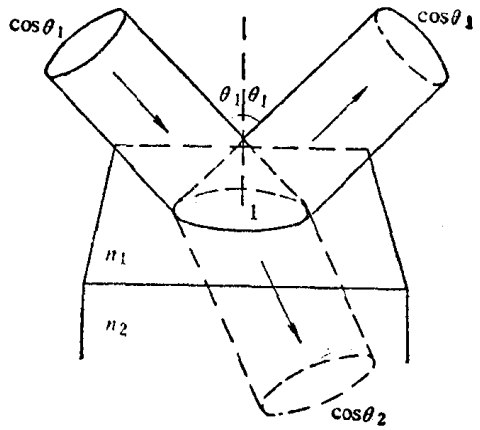


图1-18 光束截面积在反射和折射时的变化（在分界面上光束截面积为1）

式中 I_1' 和 I_2 分别为反射波和折射波的强度。因此，在分界面上反射波、折射波的能量流与入射波的能量流之比为

$$R=\frac{W_1'}{W_1}=\frac{I_1'}{I_1}=\frac{A_1'^2}{A_1^2} \tag{1-91}$$

$$T=\frac{W_2}{W_1}=\frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\theta_2A_2^2}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta_1A_1^2}=\frac{n_2\cos\theta_2A_2^2}{n_1\cos\theta_1A_1^2} \tag{1-92}$$

〔式(1-92)中利用了对于非磁性介质的近似 $\mu_1\approx\mu_2$〕R 和 T 分别称为反射率和透射率。将菲涅耳公式代入上面二式，可得到光矢量垂直于入射面的偏振光的反射率和透射率为

$$R_s=\frac{\sin^2(\theta_1-\theta_2')}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)} \tag{1-93}$$

$$T_s=\frac{n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1}\cdot\frac{4\sin^2\theta_2\cos^2\theta_1}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)} \tag{1-94}$$

光矢量平行于入射面的偏振光的反射率和透射率为

$$R_p=\frac{\tan^2(\theta_1-\theta_2)}{\tan^2(\theta_1+\theta_2)} \tag{1-95}$$

$$T_p=\frac{n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1}\cdot\frac{4\sin^2\theta_2\cos^2\theta_1}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)\cos^2(\theta_1-\theta_2)} \tag{1-96}$$

容易看出

$$\left.\begin{aligned} R_s + T_s &= 1 \\ R_p + T_p &= 1 \end{aligned}\right\} \quad (1\text{-}97)$$

即光在反射和折射时能量是守恒的。

如果入射光是自然光，可以把光矢量分解为垂直于入射面和平行于入射面的两个分量，而且这两个分量的能量都等于入射光能量的一半，即

$$W_{1s} = W_{1p} = \frac{1}{2}W_1 \quad (1\text{-}98)$$

所以自然光的反射率为

$$R_n = \frac{W_1'}{W_1} = \frac{W_{1s}' + W_{1p}'}{W_1} = \frac{W_{1s}'}{2W_{1s}} + \frac{W_{1p}'}{2W_{1p}} = \frac{1}{2}(R_s + R_p) \quad (1\text{-}99)$$

将式(1-93)和(1-95)代入，得到自然光反射率随入射角变化的关系为

$$R_n = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin^2(\theta_1 - \theta_2)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)} + \frac{\tan^2(\theta_1 - \theta_2)}{\tan^2(\theta_1 + \theta_2)}\right] \quad (1\text{-}100)$$

图 1-19 绘出了光在空气和玻璃分界面反射时($n = 1.52$)，R_s，R_p 和 R_n 随入射角变化的曲线。可见自然光在 $\theta_1 < 45°$ 的区域内反射率几乎不变，约等于正入射的值。而正入射时自然光的反射率为

$$R_n = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2\right] = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \quad (1\text{-}101)$$

在空气-玻璃分界面（$n = 1.52$）反射的情况，$R_n = 0.043$，即约有 4%的光能量被反射。对于一些构造复杂的光学系统，即使是近于正入射下入射，但由于反射面过多，光能量的损失也是相当严重的。例如一个包含六块透镜的系统，反射面共有 12 面，若透镜的玻璃折射率同为1.52，光在各面的入射角很小，则透过这系统的光能量为

$$W_2 = (1 - 0.043)^{12}W_1 = 0.59W_1$$

式中 W_1 为入射光能量，可见由于反射而损失的能量占41%。为了减少光能量的反射损失，近代光学技术普遍采用在光学元件表面镀增透膜的方法。关于它的原理，在第三章里我们再来讨论。

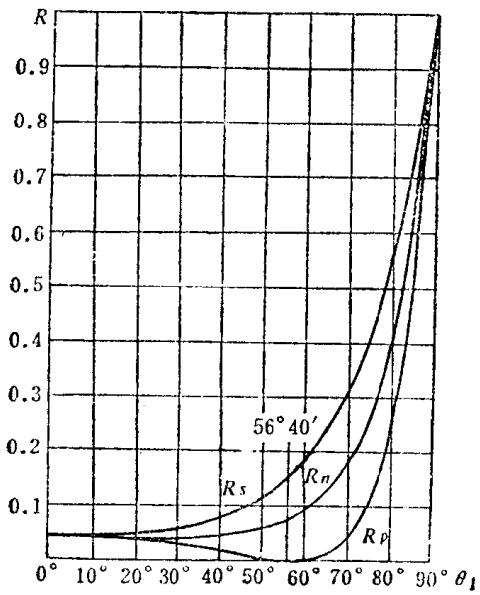


图1-19 反射光强度随入射角的变化
(玻璃折射率设为1.52)

四、反射和折射产生的偏振

由式(1-95)及图 1-19 可见，自然光投射到两种不同介质的分界面时，当入射角满足关系 $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ 时，$R_p = 0$，反射光中没有振动平行于入射面的分量，因而反射光是完全偏振光，其电矢量的振动垂直于入射面。这个结论通常称为布儒斯特定律，而这时的入射角称为起偏振角或布儒斯特角，记为 θ_B。将 $\theta_B + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ 的关系代入折射定律，可以得到

$$\tan\theta_B = n \quad (1\text{-}102)$$

上式通常称为布儒斯特公式。已知介质的折射率时，由这个公式可以很方便的计算出起偏振角，例如 $n=1.52$，相应的起偏振角 $\theta_B=\tan^{-1}1.52=56^\circ 40'$。这个公式也提供了测量折射率的一种简单的方法。

从光与物质相互作用的观点来看布儒斯特定律，其物理意义是很明确的。入射光波的电磁场在第二介质中将激发起原子中电子的振动，因而原子作为振荡电偶极子向四周辐射出次波，这些次波在第一介质中组成反射波。由于原子的振动方向和光波电矢量的振动方向相同，因此原子的振动也可以用平行入射面和垂直入射面的两个分量表示（图1-20）。当入射光在起偏振角 θ_B 入射到分界面时，折射光线 OC 垂直于反射光线 OB，因此在第二介质中振动方向平行于入射面的原子振动在其振动方向上即反射光线方向上没有辐射(参考图1-10,原子振动方向上 $\psi=0$，没有辐射)，结果反射光中就只有垂直入射面的振动。如果 OB 不垂直于 OC,则沿 OB 方向传播的反射光，不单是由垂直入射面振动的原子辐射的次波组成，也可以有平行入射面振动的原子发出的次波,所以一般反射光是部分偏振的。

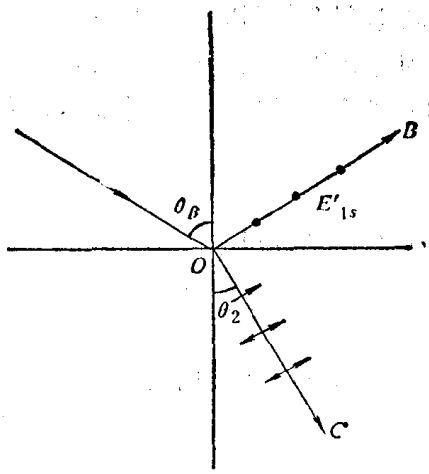


图1-20 布儒斯特定律的解释
"点"代表垂直入射面的原子振动
"线"代表平行入射面的原子振动

§1-8 全反射

如果光波从光密介质射向光疏介质（$n_2<n_1$），根据折射定律 $\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{n_2}{n_1}<1$，当 $\sin\theta_1>\frac{n_2}{n_1}$ 时会有 $\sin\theta_2>1$，这是没有意义的，我们不可能求出任何实数的折射角。事实上，这时没有折射光存在，所有的光全部反射回第一介质，这个现象称为全反射。满足 $\sin\theta_c=\frac{n_2}{n_1}$ 条件的入射角 θ_c 称为临界角，相应的折射角 $\theta_2=90^\circ$。

全反射时光能全部反射回第一介质，这一点可以从菲涅耳公式得到证明。例如，对于以临界角入射的情况，$\theta_1=\theta_c$，$\theta_2=90^\circ$，有

$$\frac{W'_1}{W_1}=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin^2(\theta_1-\theta_2)}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)}+\frac{\tan^2(\theta_1-\theta_2)}{\tan^2(\theta_1+\theta_2)}\right]=1$$

由于光能没有透射的损失，所以许多光学仪器都利用全反射来改变光线的传播方向和使象倒转，如图 1-21 所示。在新兴的光学领域——纤维光学和集成光学中也利用全反射来传导光能。图 1-22 所示的是一根折射率为 n_1 的圆形直纤维，包围纤维的外界介质的折射率为 n_2，如果 $n_1>n_2$，且光线在纤维与外界介质分界面上的入射角 θ_1 大于临界角时，光线将不断地在纤维内全反射，由纤维的一端传播到另一端，纤维因而起着波导的作用。纤维也可以做成弯曲的，只要曲率半径不是太小以致全反射条件受到破坏，光线就可以沿着弯曲纤维传播。数以万计的纤维构成的纤维束不仅能传导光能，也能把图象从一端传送到另一端。图1-23所示的是一种可弯曲的纤维镜，外纤维把入射光传导到所考察的物体，而内纤维把物体的象传导

到观察者。现在已可制成长度为 4 米，截面积为 1 平方厘米，所包含纤维数多达 50000 条的纤维镜。

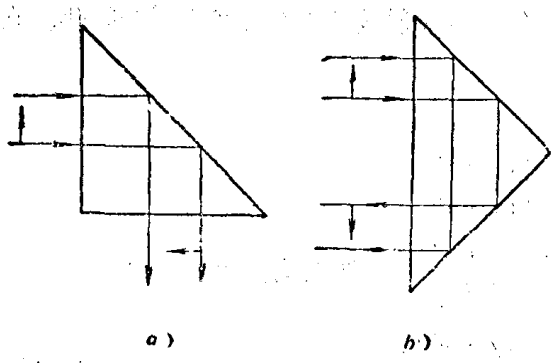


图1-21　全反射棱镜

a）转向棱镜　b）倒象棱镜

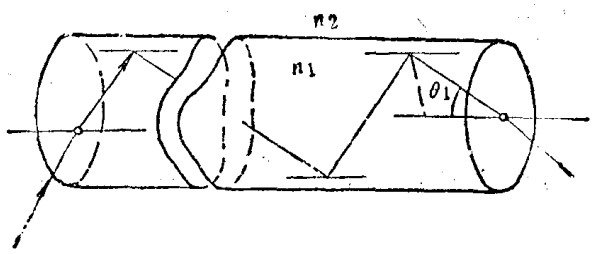


图1-22　光线在纤维内表面的全反射

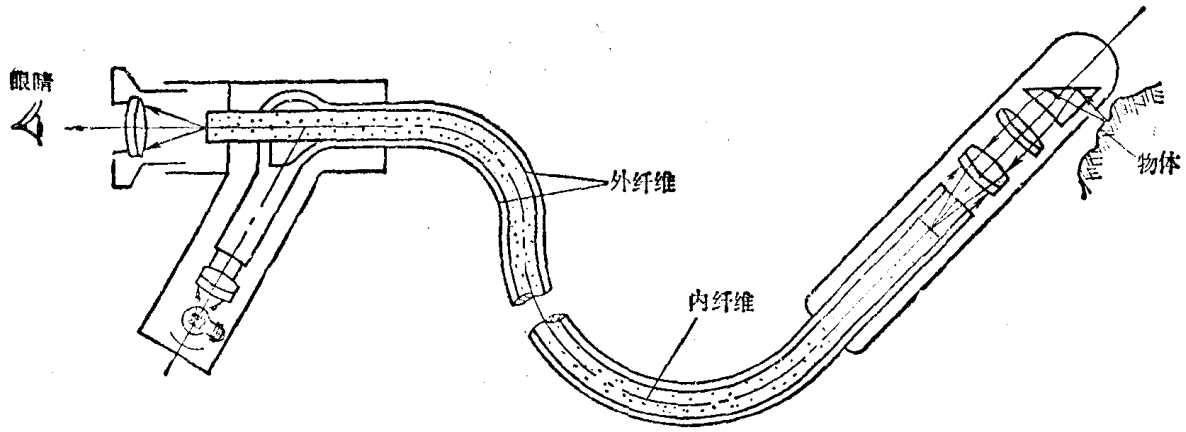


图1-23　纤维镜

下面讨论全反射时光波的位相变化，仍然分开电矢量垂直于入射面和平行于入射面的 S 和 P 分量来讨论。对于 S 分量

$$\frac{A'_{1s}}{A_{1s}}=-\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\sin(\theta_1+\theta_2)}=-\frac{\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2}{\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2}$$

这时

$$\sin\theta_2=\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1=\frac{\sin\theta_1}{n}\quad\left(n=\frac{n_2}{n_1}\right)\tag{1-103}$$

$$\cos\theta_2=\pm\, i\sqrt{\frac{\sin^2\theta_1}{n^2}-1}\quad(i=\sqrt{-1})\tag{1-104}$$

但是由于物理上的考虑(见26页倏逝波一段)，根号前只能取正号，即

$$\cos\theta=+\,i\sqrt{\frac{\sin^2\theta_1}{n^2}-1}\tag{1-105}$$

代入菲涅耳公式

$$\frac{A'_{1s}}{A_{1s}}=\frac{\cos\theta_1-i\sqrt{\sin^2\theta-n^2}}{\cos\theta_1+i\sqrt{\sin^2\theta-n^2}}$$

A'_{1s} 和 A_{1s} 之比为一复数，可以将它写成一实数和一复数 $e^{i\delta_s}$ 的乘积：

$$\frac{A'_{1s}}{A_{1s}}=\left|\frac{A'_{1s}}{A_{1s}}\right|e^{i\delta_s}$$

式中$\left|\frac{A'_{1s}}{A_{1s}}\right|$表示实振幅之比，而$\delta_s$表示反射波的$S$分量对入射波的$S$分量的位相变化。在全反射下，$\left|\frac{A'_{1s}}{A_{1s}}\right|=1$，所以

$$e^{i\delta_s}=\frac{\cos\theta_1-i\sqrt{\sin^2\theta_1-n^2}}{\cos\theta_1+i\sqrt{\sin^2\theta_1-n^2}}$$

利用欧拉公式$\cos\delta_s=\frac{e^{i\delta_s}+e^{-i\delta_s}}{2}$和$\sin\delta_s=\frac{e^{i\delta_s}-e^{-i\delta_s}}{2i}$变换上式，可以得到

$$\tan\frac{\delta_s}{2}=\frac{\sin\delta_s}{1+\cos\delta_s}=-\frac{\sqrt{\sin^2\theta_1-n^2}}{\cos\theta_1} \tag{1-106}$$

同样由P分量的菲涅耳公式也可求出全反射时P分量的位相变化δ_p：

$$\tan\frac{\delta_p}{2}=-\frac{\sqrt{\sin^2\theta_1-n^2}}{n^2\cos\theta_1} \tag{1-107}$$

由式(1-106)和(1-107)可见，在全反射条件下，两个分量有不同的位相变化；全反射后，两个分量之间的位相差$\delta=\delta_p-\delta_s$由下式决定

$$\tan\frac{\delta}{2}=\frac{\cos\theta_1\sqrt{\sin^2\theta_1-n^2}}{\sin^2\theta_1} \tag{1-108}$$

易见，当入射角等于临界角时，两个分量的位相差为零，如果这时入射光为线偏振光，则反射光也为线偏振光。但当入射角大于临界角，且入射线偏振光的振动面与入射面的交角又非0或$\pi/2$，这时由于反射光的两个分量有一定的位相差，反射光将变成椭圆偏振光。关于形成椭圆偏振光的原理，我们在§2-3里再来说明。

前面已经指出，全反射时全部光能都反射回第一介质，但是光波在分界面上的行为如何，有没有光波进入第二介质，我们并没有说明。深入研究指出，全反射时光波将透入第二介质很薄的一层表面（深度约为光波波长），并沿界面流动约半个波长再返回第一介质，如图1-24所示。透入第二介质表面的这个波，称为倏逝波。倏逝波的存在从满足电磁场的边界条件来看也是必然的，因为电场和磁场不可能中断在两种介质的分界面上，它应该满足连续条件，因而在第二介质中就一定会存在透射波。只是在全反射条件下，这个透射波有着特殊的性质。由式（1-71），透射波的波动公式为

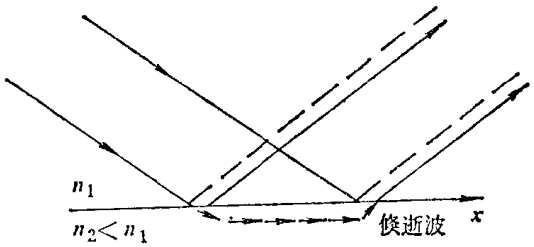


图1-24　全反射对透入第二介质的倏逝波

$$E_2=A_2e^{-i[\omega t-k_2(x\sin\theta_2+z\cos\theta_2)]}$$

式中的$\sin\theta_2$和$\cos\theta_2$分别有〔见式(1-103)和(1-104)〕

$$\sin\theta_2=\frac{\sin\theta_1}{n}\text{ 和 }\cos\theta_2=\pm i\sqrt{\frac{\sin^2\theta_1}{n^2}-1}$$

所以

$$E_2 = A_2\exp\left(\mp k_2 z\sqrt{\frac{\sin^2\theta_1}{n^2}-1}\right)\cdot\exp\left[-i\left(\omega t - k_2\frac{x\sin\theta_1}{n}\right)\right] \tag{1-109}$$

式子表示一个沿x方向传播的振幅在z方向按指数规律变化的波。现在振幅项是$A_2\exp\left(\pm k_2 z\sqrt{\frac{\sin^2\theta_1}{n^2}-1}\right)$显然平方根前只能取负号，取正号时上式失去意义，它表示离开分界面向第二介质深入时，振幅值随距离增大而增大，这在物理上是不可能的〔在式(1-104)中只取正号原因即在于此〕。平方根前取负号后，式(1-109)表示一个沿x方向传播的振幅在z方向按指数衰减的波，这个波就是倏逝波。可以看出，振幅随进入深度z减小得非常快，有效进入深度约为一个波长。同时，由于倏逝波在第二介质中平行分界面(x方向)流动，最后仍返回第一介质(如图1-24实反射线所示)，所以总的来说没有能量进入第二介质。

§1-9 光在金属表面上的反射

光在金属的清洁磨光表面上一般有着强烈的反射，这与金属中存在密度很大的自由电子有关（在1厘米^{3}中电子数约为10^{22}的数量级），自由电子受到光波电磁场的强迫振动而产生次波，这些次波造成了强烈的反射波和比较弱的传播到金属内的透射波。由于自由电子的密度如此之大，所以即使非常薄的金属片也能够把大部分入射光反射回去，以及把进入金属内的透射光吸收掉。

各种金属反射光的能力不同，在于它所包含的自由电子的密度不同，一般说来，自由电子密度越大（电导率越大），反射本领也越高。对于同一种金属来说，入射光波长不同，反射率也不同。频率比较低的红外线，主要对金属中自由电子发生作用，而频率较高的可见光和紫外光，也可以对金属中的束缚电子发生作用。束缚电子有本身的固有频率，这频率正处在可见和紫外区，束缚电子的作用将使金属的反射能力降低，透射能力增大，呈现出非金属的光学性质。例如，银对于红光和红外光反射率很大(在90%以上)，并有显著吸收，而在紫外区，反射率很低，在$\lambda=3160$埃附近，反射率降到4.2%(图1-25)，相当于玻璃的反射，而透射能力则明显增大。铝的反射本领随波长的变化比较平缓，对于紫外光仍有相当高的反射率，这一特性和它的很好的抗腐蚀性，使它常用作为反射镜的涂料。

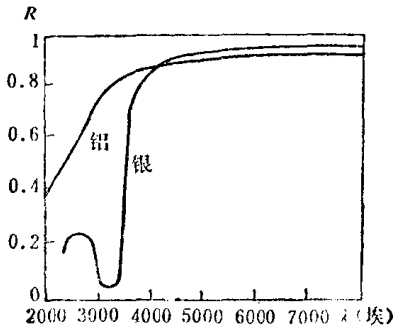


图1-25 银和铝反射率与波长的关系

金属表面的反射率除了与波长有关外，还与光波的入射角有关。但是与电介质表面的反射不同，对于金属不论在什么角度下反射，都不能使反射光成为全偏振。进一步研究还表明，光在金属表面上反射时，反射波的平行于入射面和垂直于入射面的振动与入射波相应的振动之间有一定的位相变化，位相变化的数值非0或π；反射波两个分量彼此之间也有一定的位相差，因此平面偏振光在金属表面上反射后将变为椭圆偏振光。

习 题

1.1 一个平面电磁波可以表示为$E_x=0$，$E_y=2\cos[2\pi\times10^{14}(t-x/c)+\pi/2]$，$E_z=0$。问：

（1）该电磁波的频率，波长，振幅和原点的初位相为多少(用国际单位表示)？

（2）波的传播和电矢量的振动取哪一个方向？

（3）磁矢量的表示式如何写？

1.2　一个线偏振光在玻璃中传播时可表示为

$$E_z = A\cos\pi 10^{15}\left(t - \frac{x}{0.65\,c}\right)$$

试求(1)光的频率；(2)波长；(3)玻璃的折射率。

1.3　证明 $E = A\cos(\omega t - kx)$ 是波动微分方程(1-23)的解。

1.4　画出一种机械波波动公式 $y = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ 所代表的 $y - x$ 曲线。设 $A = 20$毫米，$T = 12$秒，$\lambda = 20$毫米，$t = 3$秒；以 y 为纵座标，x 为横座标，从 $x = 0$ 画到 $x = 40$毫米。

1.5　在与一平行光束垂直的方向上插入一透明薄片，它的厚度 $h = 0.01$毫米，折射率 $n = 1.5$，若光束的波长 $\lambda = 5000$埃，试计算插入玻璃片前后光束光程和位相的变化。

1.6　地球表面每平方米接收到来自太阳光的能量约为 1.33 千瓦，试计算投射到地球表面的太阳光的电场强度。假设可以把太阳光看作是波长为 $\lambda = 6000$埃的单色光。

1.7　一台功率为 1000 瓦的发射机，在均匀介质中发出的电磁波的波长为 $\lambda = 40$米，试计算离发射机 1 公里远的电磁波的电场强度。

1.8　光束在空气和火石玻璃($n = 1.7$)的分界面上反射，试计算此情形的布儒斯特角。若光束的入射角为60°，问电矢量平行于入射面和垂直于入射面分量的反射系数 r_p 和 r_s 各为多少？

1.9　一个电矢量振动方向与入射面成45°的线偏振光入射到两种电介质的分界面上，若入射角 $\theta_1 = 60°$，第一介质和第二介质的折射率为 $n_1 = 1$，$n_2 = 1.5$，问反射光中光矢量与入射面所成的角度为多少？若 $\theta_1 = 60°$，反射光光矢量与入射面所成角度又为多少？

1.10　有一光学系统由两片分离的透镜组成，两片透镜的折射率分别为 1.5 和1.7，求此系统的反射光能损失。如透镜表面镀有增透膜使反射率降为 1 %，问此系统的光能损失又是多少？

1.11　光束在折射率分别为 n_1 和 n_2 的二电介质分界面上产生反射和折射，当入射角为 θ_1 时〔折射角为 θ_2，见图1-26 a〕，光束电矢量的 s 分量和 p 分量的反射系数为 r_s 和 r_p，透射系数为 t_s 和 t_p。若光束反过来从 n_2 介质入射到 n_1 介质，且当入射角为 θ_2 时〔折射角为 θ_1，图1-26 b〕，光束电矢量的 s 分量和 p 分量的反射系数为 r_s' 和 r_p'，透射系数为 t_s' 和 t_p'。试利用菲涅耳公式证明

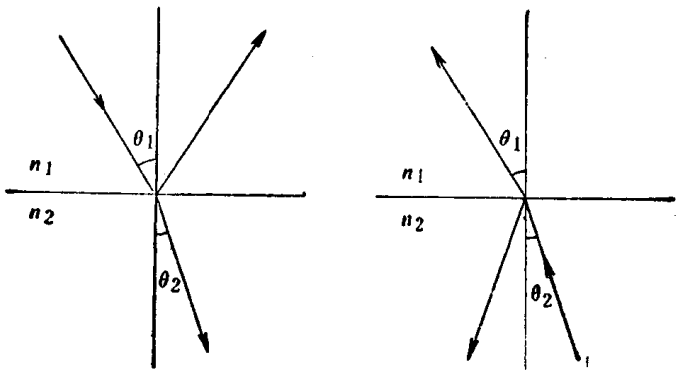
$$r_s = -r_s'$$

$$r_p = -r_p'$$

$$t_s t_s' = T_s$$

和

$$t_p t_p' = T_p$$



a)　　图 1-26　　b)

1.12　图 1-27 所示的是一根直圆筒形纤维，纤维芯的折射率为 n_1，纤维外套的折射率为 n_2，$n_1 > n_2$。

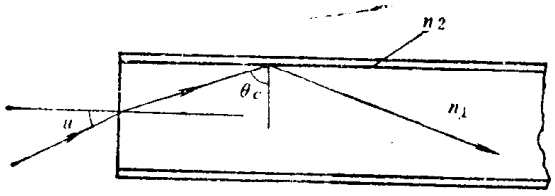


图　1-27

（1）证明入射光的最大孔径角 $2u$（保证光束在纤维芯和外套的界面发生全反射）满足关系式 $\sin u = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$。

（2）若 $n_1 = 1.62$，$n_2 = 1.52$，求最大孔径角 $2u$。

1.13　图 1-28 表示的是一根弯曲的筒形纤维，纤维芯和外套的折射率分别为 n_1 和 n_2（$n_1 > n_2$），纤维芯的直径为 D，曲率半径为 R。

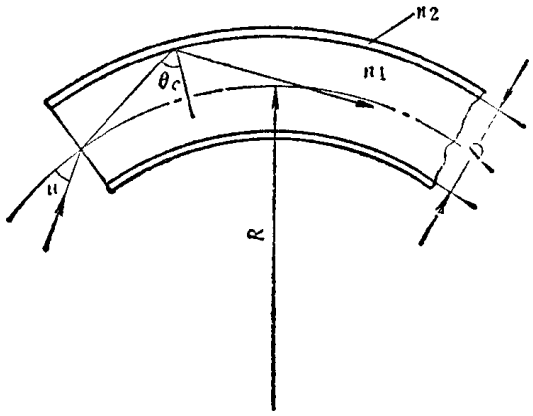


图　1-28

（1）证明入射光的最大孔径角 $2u$ 满足关系式

$$\sin u = \sqrt{n_1^2 - n_2^2\left(1 + \frac{D}{2R}\right)^2}$$

（2）若 $n_1 = 1.62$，$n_2 = 1.52$，$D = 70$ 微米，$R = 12$ 毫米，最大孔径角 $2u$ 等于多少？

第二章　光波的迭加与分析

两个（或多个）光波在空间某一区域相遇时，发生光波的迭加问题。一般说来，频率、振幅和位相都不相同的光波的迭加，情形是很复杂的。这里，只限于讨论频率相同或频率相差很小的单色光波的迭加，在这种情况下，可以写出结果的数学表示式。尽管实际光源发出的光波不能认为是余弦函数或正弦函数表示的单色光波，但是我们将会看到任何复杂的波动都可以分解为一组由余弦函数和正弦函数表示的单色波之和，因此讨论单色光波有着实际意义。

波的迭加服从迭加原理，这个原理可以表述为：几个波在相遇点产生的合振动是各个波单独产生的振动的矢量和。迭加原理实质上是表示波传播的独立性，也就是说，每一个波独立地产生作用，这种作用不因其他波的存在而受到影响。日常生活中有许多现象都可以说明光波或任何其他波动传播的独立性，譬如两个光波在相遇之后又分开，而每一个光波仍保持原有的特性（频率、波长、振动方向等）按照自己的传播方向继续前进，好象在各自的路程上并未遇到其他光波一样。另一方面，迭加原理也是介质对光波的线性响应的一种反映，但这只是当光波的强度较低时是正确的，而当光波的强度很大时（例如电场强度高达 10^{12}伏/米的激光），将产生非线性效应，这时介质对光波的响应是非线性的（见§8-10），上述线性迭加原理不再适用。

光波的分析要利用数学上的两个定理：傅里叶级数定理和傅里叶积分定理。有关这两个定理的数学内容可参阅附录Ⅱ，这两个定理也是傅里叶光学（第五章）的数学基础，读者必须熟练掌握。

§2-1　两个频率相同、振动方向相同的单色光波的迭加

如图 2-1 所示，设两个频率相同，振动方向相同（同在 y 方向）的单色光波分别发自光源 S_1 和 S_2，P 点是两光波相遇区域内的任意一点，P 到 S_1 和 S_2 的距离分别为 r_1 和 r_2，因此，两光波各自在 P 点产生的光振动可以写为

$$E_1 = a_1 \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) \qquad (2\text{-}1)$$

$$E_2 = a_2 \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right) \qquad (2\text{-}2)$$

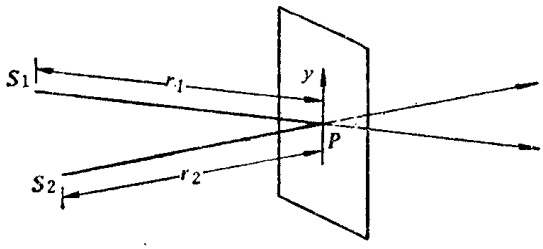


图2-1　两光波在 P 点迭加

式中 a_1 和 a_2 分别为两光波的振幅。根据迭加原理，在 P 点的合振动为

$$E = E_1 + E_2 = a_1 \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) + a_2 \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right)$$

令　$\alpha_1 = -\dfrac{2\pi r_1}{\lambda}$，$\alpha_2 = -\dfrac{2\pi r_2}{\lambda}$，上式化为

$$E = a_1\cos(\omega t + \alpha_1) + a_2\cos(\omega t + \alpha_2)$$

应用两角和的余弦公式，此式可展开为

$$\begin{aligned} E &= a_1\cos\omega t\cos\alpha_1 - a_1\sin\omega t\sin\alpha_1 \\ &\quad + a_2\cos\omega t\cos\alpha_2 - a_2\sin\omega t\sin\alpha_2 \\ &= (a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2)\cos\omega t \\ &\quad - (a_1\sin\alpha_1 + a_2\sin\alpha_2)\sin\omega t \end{aligned}$$

因为 a_1a_2 和 $\alpha_1\alpha_2$ 都是常数，所以可令

$$a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2 = A\cos\alpha \tag{2-3}$$

$$a_1\sin\alpha_1 + a_2\sin\alpha_2 = A\sin\alpha \tag{2-4}$$

两式中 A 和 α 均为待定常数。把两式平方后相加，得到

$$\begin{aligned} A^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) &= a_1^2(\sin^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_1) \\ &\quad + a_2^2(\sin^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_2) \\ &\quad + 2a_1a_2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \sin\alpha_1\sin\alpha_2) \end{aligned}$$

即

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2) \tag{2-5}$$

将式（2-3）除式（2-4）得到

$$\tan\alpha = \frac{a_1\sin\alpha_1 + a_2\sin\alpha_2}{a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2} \tag{2-6}$$

因此，P 点的合振动可写为

$$\begin{aligned} E &= A\cos\alpha\cos\omega t - A\sin\alpha\sin\omega t \\ &= A\cos(\omega t + \alpha) \end{aligned} \tag{2-7}$$

可见，P 点的合振动也是一个简谐振动，振动频率和振动方向都与两单色光波相同，振幅 A 和初位相 α 分别由式（2-5）和（2-6）决定。

如果所讨论的两单色光波的振幅相等，即 $a_1 = a_2 = a$，则 P 点的合振幅由下式决定

$$\begin{aligned} A^2 &= a^2 + a^2 + 2aa\cos(\alpha_1 - \alpha_2) \\ &= 2a^2 + 2a^2\cos\delta = 4a^2\cos^2\frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

或以光强度表示

$$I = 4I_0\cos^2\frac{\delta}{2} \tag{2-8}$$

式中 $I_0 = a^2$，是单个光波的强度。上式表示在 P 点的迭加光强度决定于位相差 $\delta = (\alpha_1 - \alpha_2)$。当位相差为 π 的偶数倍时，即

$$\delta = \pm 2m\pi \quad (m = 0,\ 1,\ 2, \cdots) \tag{2-9}$$

时，$I = 4I_0$，P 点光强度达到最大值。而当位相差为 π 的奇数倍时，即

$$\delta = \pm(2m + 1)\pi \tag{2-10}$$

时，$I = 0$，P 点的光强度有最小值。位相差介于两者之间时，P 点强度在 0 和 $4I_0$ 之间。因此，很明显，如果两光波在光源处的位相相同，那么两光波在 P 点的位相差是由于从两光源到 P 点的距离不同而引起的。我们很容易把位相差表示为 P 点到两光源的距离 r_1 和 r_2 之差。因为 $\alpha_1 = -\frac{2\pi r_1}{\lambda}$，$\alpha_2 = -\frac{2\pi r_2}{\lambda}$，所以

$$\delta = \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$$

式中 λ 为光波在介质中的波长，$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$，$\lambda_0$ 为真空中的波长，n 为介质的折射率。这样上式又可写为

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} n (r_2 - r_1)$$

通常为简便起见，把 λ_0 仍写作 λ，表示真空中波长，因而

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} n (r_2 - r_1) \tag{2-11}$$

式中 $n(r_2 - r_1)$ 是光程差，以后用符号 Δ 表示。光程差是从光源 S_1 和 S_2 到 P 点的光程之差。所谓光程，就是光波在某一种介质中所通过的几何路程和这介质的折射率的乘积。采用光程概念的好处是，可以把光在不同介质中的传播路程都折算为在真空中的传播路程，便于相互进行比较。式(2-11)在物理光学中是一个重要的关系式，表示从两个不同的光源到考察点 P 的光程差和它所引起的位相差之间的关系。根据这个关系式，也可以把在 P 点产生最大光强度的条件〔式（2-9)〕写为

$$\Delta = n(r_2 - r_1) = \pm m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \cdots) \tag{2-12}$$

即光程差等于波长的整数倍；把在 P 点产生最小光强度的条件〔式（2-10)〕写为

$$\Delta = n(r_2 - r_1) = \pm(2m + 1)\frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2\cdots) \tag{2-13}$$

即光程差等于半波长的奇数倍。

应该指出：写出式（2-1）和（2-2）时，实际上是假设在 S_1 和 S_2 两点光振动的初位相（$t = 0$ 时的位相）为零。如果在 S_1 和 S_2 两点的初位相不同，则式（2-11）所表示的两光波在 P 点的位相差还必须加上 S_1 和 S_2 的初位相差这一项。

显而易见，在两光波迭加区域内，不同的点将有不同的光程差，因而就有不同的光强度。满足条件（2-12）的点，光强度最大；满足条件（2-13）的点，光强度最小，其余的点介于最大强度和最小强度之间。只要两光波的初位相差保持不变（现在讨论的理想单色光波便是这样），在迭加区域内各点的强度分布也是不变的。我们把这种在迭加区域出现的光强度稳定的强弱分布的现象称为光的干涉，把产生光干涉的光波称为相干光波，而把光源称为相干光源。

但是我们知道，实际光源发出的光波并不是理想的单色光波，它是由一段段有限长的波列组成的。由于每一段波列的初位相和偏振方向是无规则变化的，所以实际光波产生干涉必须满足一些条件，这些条件我们将在第三章里加以详细讨论。

求解两个或多个光波的迭加问题，常常还应用另外两种较为简便的方法，现分别介绍如下。

一、复数方法

采用复数表式时，光源 S_1 和 S_2 发出的单色光波在 P 点产生的光振动可以写为

$$E_1 = a_1 e^{-i(\omega t + \alpha_1)} \tag{2-14}$$

$$E_2 = a_2 e^{-i(\omega t + \alpha_2)} \tag{2-15}$$

合振动为

$$E = E_1 + E_2 = a_1 e^{-i(\omega t+\alpha_1)} + a_2 e^{-i(\omega t+\alpha_2)}$$
$$= (a_1 e^{-i\alpha_1} + a_2 e^{-i\alpha_2}) e^{-i\omega t} \tag{2-16}$$

上式括号内两复数之和仍为一复数，设

$$Ae^{-i\alpha} = a_1 e^{-i\alpha_1} + a_2 e^{-i\alpha_2} \tag{2-17}$$

并代入式（2-16），得到

$$E = Ae^{-i\alpha} \cdot e^{-i\omega t} = Ae^{-i(\omega t+\alpha)} \tag{2-18}$$

这一结果与式（2-7）相对应。P点的合振动的振幅A容易由复数运算求得

$$A^2 = (Ae^{-i\alpha})(Ae^{-i\alpha})^*$$
$$= (a_1 e^{-i\alpha_1} + a_2 e^{-i\alpha_2})(a_1 e^{-i\alpha_1} + a_2 e^{-i\alpha_2})^*$$
$$= a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2 [e^{i(\alpha_1-\alpha_2)} + e^{-i(\alpha_1-\alpha_2)}]$$
$$= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \tag{2-19}$$

为求到合振动的初位相α，把式（2-17）右边的复数式展开为三角函数式

$$Ae^{-i\alpha} = a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2 - i\,(a_1\sin\alpha_1 + a_2\sin\alpha_2)$$

根据复数的性质，得到

$$\tan\alpha = \frac{a_1\sin\alpha_1 + a_2\sin\alpha_2}{a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2} \tag{2-20}$$

式（2-19）和（2-20）与式（2-5）和（2-6）完全相同。

二、振幅矢量加法

这是一种图解法，这种方法利用振幅矢量的概念：振幅矢量$\boldsymbol{a}$，它的长度代表某一振动的振幅大小，它与某一给定轴——ox轴的夹角相当于该振动的位相。图2-2画出了初始时刻的振幅矢量$\boldsymbol{a}_1$和$\boldsymbol{a}_2$的位置；若两矢量绕o点以角速度ω反时针方向旋转，则两矢量的末端在ox轴上投影的运动便表示两个简谐振动

$$E_1 = a_1\cos(\omega t + \alpha_1)$$
$$E_2 = a_2\cos(\omega t + \alpha_2)$$

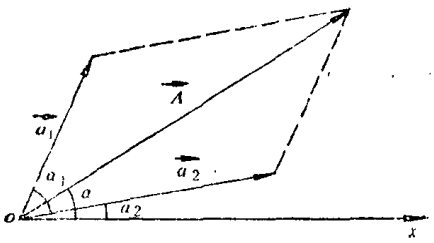


图2-2　振幅矢量相加

随着$\boldsymbol{a}_1$和$\boldsymbol{a}_2$绕o点以角速度ω反时针方向旋转，显然$\boldsymbol{a}_1$和$\boldsymbol{a}_2$的合矢量$\boldsymbol{A}$(利用平行四边形加法求出)也绕o点以同一角速度反时针方向旋转，且$\boldsymbol{A}$的末端在ox轴上投影的运动也为一简谐振动

$$E = A\cos(\omega t + \alpha)$$

式中α是振动的初位相。显然，$\boldsymbol{A}$在ox轴上投影的运动等于$\boldsymbol{a}_1$和$\boldsymbol{a}_2$在ox轴上投影的运动之和，即$E = E_1 + E_2$。因此两个单色光波在某一点的光振动的迭加可以通过它们的振幅矢量相加而求得。由图2-2可见

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$$

和

$$\tan\alpha = \frac{a_1\sin\alpha_1 + a_2\sin\alpha_2}{a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2}$$

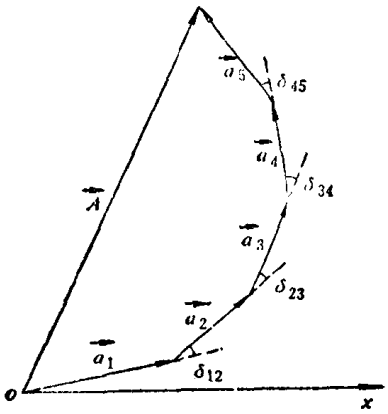


图2-3　五个振幅矢量相加

它们分别为合振动的振幅和初位相，结果与式（2-5）和（2-6）完全一致。

振幅矢量加法对于求多个谐振动的合成特别有用。这时可应用矢量的多边形加法求出矢量$\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、$\boldsymbol{a}_3$……$\boldsymbol{a}_k$等的合矢量$\boldsymbol{A}$。如果不是要求很精确时，可根据合矢量的长度和与ox轴的夹角估计合振动的振幅和位相的大小。图2-3表示五个振幅矢量的多边形加法，两相邻矢量间的夹角为两相应振动的位相差。

§2-2 驻　　波

两个频率相同，振动方向相同而传播方向相反的单色光波，例如垂直入射到两种介质分界面的单色光波与反射波的迭加，产生驻波。

假定光波反射面是$z=0$平面，z的正方向指向入射波所在的介质，其折射率为n_1，另一介质的折射率为n_2（图2-4）。如果正入射的单色光波的波动公式为

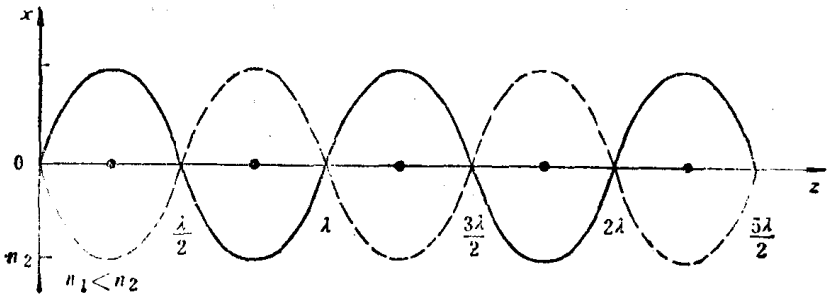


图2-4　驻波

$$E_1=a\cos\ (\omega t+kz)$$

则在$z=0$平面反射的光波的波动公式为

$$E_1'=a\cos(\omega t-kz+\delta)$$

式中δ表示反射时的位相变化，反射波的振幅与入射波相同是我们假设两种介质分界面的反射率很高。当$n_2>n_1$时，$\delta=\pi$；当$n_2<n_1$时，$\delta=0$。z符号的改变，相当于传播方向相反。反射波与入射波的迭加，得到

$$E=E_1+E_1'=a\cos(\omega t+kz)+a\cos(\omega t-kz+\delta)$$

将余弦函数展开并化简

$$E=2a\cos\left(kz-\frac{\delta}{2}\right)\cos\left(\omega t+\frac{\delta}{2}\right) \tag{2-21}$$

因子$2a\cos\left(kz-\frac{\delta}{2}\right)$与时间无关，表示合成波的振幅$A$；更确切些说，振幅（是一个正量）等于这个因子的绝对值

$$A=\left|2a\cos\left(kz-\frac{\delta}{2}\right)\right| \tag{2-22}$$

可见振幅随z值而变，表明对于介质中不同的点有不同的振幅，这种波称为驻波。在驻波中有一系列振幅为零的点，这些点称为波节；有另外一些点，振幅等于两迭加光波的振幅之和，

这些点称为波腹。由式（2-22）易见，形成波节的条件为

$$\cos\left(kz-\frac{\delta}{2}\right)=0$$

或

$$kz-\frac{\delta}{2}=\pm n\frac{\pi}{2} \qquad n=1,\ 3,\ 5\cdots(\text{奇数}) \tag{2-23}$$

形成波腹的条件为

$$\left|\cos\left(kz-\frac{\delta}{2}\right)\right|=1$$

或

$$kz-\frac{\delta}{2}=\pm n\frac{\pi}{2} \qquad n=0,\ 2,\ 4\cdots(\text{偶数}) \tag{2-24}$$

显然，两个相邻波节或相邻波腹之间的距离等于$\frac{\lambda}{2}$；而波节与最近的波腹的距离等于$\frac{\lambda}{4}$。对于光波在光疏介质-光密介质分界面反射的情况，$\delta=\pi$，$z=0$点形成波节。图2-4画出了反射波与入射波迭加后形成的驻波，并表示了各点的振动状态。在式(2-21)中，随时间周期性变化的因子$\cos\left(\omega t+\frac{\delta}{2}\right)$与座标无关，似乎表示所有点都有相同的位相，但事实上经过波节时各点的位相反转，这是因为决定振幅的因子$\cos\left(kz+\frac{\delta}{2}\right)$在波节处经零值而改变符号。

维纳（Wiener）在1890年首先做了光驻波的实验，实验装置如图2-5所示。M为一平面镜，由一束接近单色的平行光垂直照射。F为一透明玻璃片，与平面镜成很小的φ角（图中大大地夸大了这一角度），玻璃片上涂有一层很薄的感光乳胶膜，厚度不到1/20波长。近单色平行光反射所形成的驻波，在波腹处使乳胶发生感光，因而显影后乳胶上这些地方变黑，而在波节处感光乳胶不起变化。因为两波腹间的距离等于$\frac{\lambda}{2}$，由图2-5易见乳胶上黑纹的距离l等于

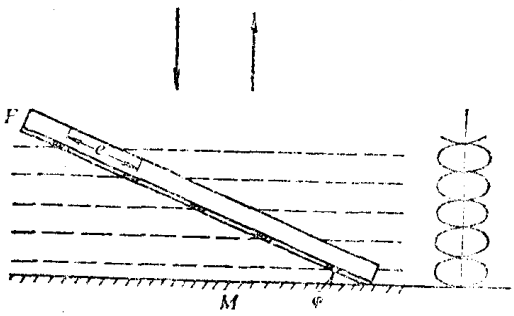


图2-5 维纳驻波实验

$$l=\frac{\lambda}{2\sin\varphi} \tag{2-25}$$

维纳实验中，φ角约为$1'$，对应的$l\approx1\sim2$毫米。

维纳的实验，不仅证实了光驻波的存在，而且也证实了光波中对乳胶起感光作用的是电矢量而不是磁矢量。因为我们知道，在光疏介质-光密介质的分界面反射时，电矢量发生位相变化π，磁矢量则没有位相变化，所以电波反射形成的驻波在分界面上是波节，而磁波形成的驻波在分界面上是波腹。实验证明，乳胶上第一黑纹不和镜面重合，而在镜面1/4波长的地方，说明是电驻波的波腹而不是磁驻波的波腹使乳胶感光，也就是说，感光作用与电矢量有关，而与磁矢量无关。正是由于这样的原因，我们常常把光波的电矢量称为光矢量。

光驻波是李普曼（Lippmann）彩色照相法的基础（1891 年），它使用的照相底片有一层很厚的感光乳胶，且乳胶面背向入射光，与水银镜面相接触（图 2-6）。垂直射入的光经水银镜面反射在乳胶层内形成驻波，对应于波腹所在的地方，乳胶产生感光作用，所以显影后形成一系列与底片表面平行的银层。若乳胶某处入射光波长为 λ_1，则对应该处的两银层间距离等于 $\frac{\lambda_1}{2}$。以后观看这底片时，入射光为白光（包含可见光各种波长），各种波长相继由上述一系列银层反射，但唯有波长 λ_1 的光波在该处反射最为强烈，因为由相邻银层反射的光波的光程差为 λ_1，光波干涉的结果将互相加强，而对其它波长的光波并不满足干涉加强条件，所以从底片该处反射的光呈现出原来感光时的颜色。

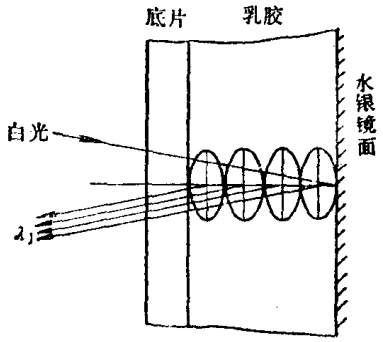


图2-6　李普曼彩色照相法原理

§2-3　两个频率相同、振动方向互相垂直的光波的迭加

如图 2-7 所示，假设光源 S_1 和 S_2 发出两个频率相同而振动方向互相垂直的单色光波，一个波的振动方向平行于 x 轴，另一个波的振动方向平行于 y 轴。现在考察它们沿 z 轴方向传播时的迭加。取 z 轴上任一点 P，显然两单色光波在该点产生的光振动可写为

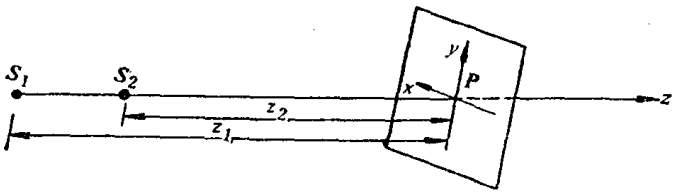


图2-7　两个频率相同，振动方向互相垂直的光波的迭加

$$E_x = a_1\cos\left(\omega t - \frac{2\pi z_1}{\lambda}\right)$$

$$E_y = a_2\cos\left(\omega t - \frac{2\pi z_2}{\lambda}\right)$$

式中 z_1 和 z_2 分别为两光源到 P 点的距离，且为简单起见，假设在 S_1 和 S_2 光振动的初位相为零。令 $\alpha_1 = -\frac{2\pi z_1}{\lambda}$，$\alpha_2 = -\frac{2\pi z_2}{\lambda}$，因而上面两式化为

$$E_x = a_1\cos(\omega t + \alpha_1) \tag{2-26}$$

$$E_y = a_2\cos(\omega t + \alpha_2) \tag{2-27}$$

由于 E_x 和 E_y 分别在 x 方向和 y 方向，所以这两个光振动的迭加必需按迭加原理作矢量相加。易见，合矢量的大小和方向都是随时间变化的，合矢量末端的运动轨迹可由上面两式中消去 t 而得到，为此将上面两式写成

$$\frac{E_x}{a_1} = \cos\omega t\cdot\cos\alpha_1 - \sin\omega t\cdot\sin\alpha_1 \tag{2-28}$$

$$\frac{E_y}{a_2} = \cos\omega t\cdot\cos\alpha_2 - \sin\omega t\cdot\sin\alpha_2 \tag{2-29}$$

以 $\cos\alpha_2$ 乘式（2-28），以 $\cos\alpha_1$ 乘式（2-29），然后把两式相减，得到

$$\frac{E_x}{a_1}\cos\alpha_2-\frac{E_y}{a_2}\cos\alpha_1=\sin\omega t\sin(\alpha_2-\alpha_1) \tag{2-30}$$

以 $\sin\alpha_2$ 乘式(2-28)，以 $\sin\alpha_1$ 乘式(2-29)，再将两式相减，得到

$$\frac{E_x}{a_1}\sin\alpha_2-\frac{E_y}{a_2}\sin\alpha_1=\cos\omega t\sin(\alpha_2-\alpha_1) \tag{2-31}$$

将式（2-30）和（2-31）平方后相加便可以消去 t，最后得出合矢量末端的轨迹方程式

$$\frac{E_x^2}{a_1^2}+\frac{E_y^2}{a_2^2}-2\frac{E_xE_y}{a_1a_2}\cos(\alpha_2-\alpha_1)=\sin^2(\alpha_2-\alpha_1) \tag{2-32}$$

一般说来，这方程式是椭圆方程式，表示合矢量末端的轨迹为一椭圆。这椭圆内接于一长方形，长方形各边与座标轴平行，边长为 $2a_1$ 和 $2a_2$（图 2-8）。可以证明，椭圆的长轴和 x 轴的夹角 ψ 由下式决定

$$\tan 2\psi=\frac{2a_1a_2}{a_1^2-a_2^2}\cos\delta \tag{2-33}$$

式中 $\delta=\alpha_2-\alpha_1$，是振动方向平行于 y 轴的光波与振动方向平行于 x 轴的光波的位相差。我们把电矢量末端的运动描成一椭圆的这种光称为椭圆偏振光。因此，使两个频率相同，振动方向互相垂直且具有一定位相差的光波迭加，一般可以得到椭圆偏振光。

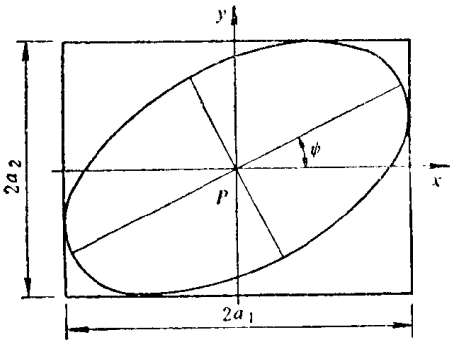


图2-8　偏振椭圆

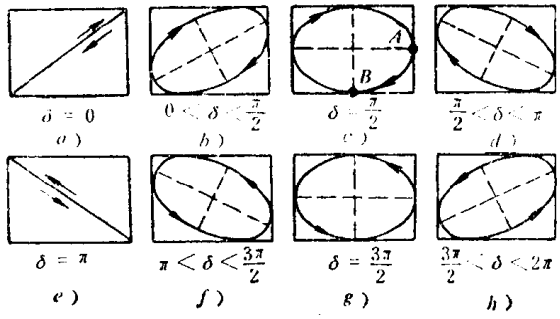


图2-9　位相差取不同值时的椭圆偏振

图 2-9 是根据式（2-32）画出的与几种不同 δ 值对应的偏振椭圆的形状，可见椭圆的形状由两迭加光波的位相差 δ 和振幅比 a_2/a_1 决定。在两种特殊的情况下，合成电矢量的运动沿直线进行，因而合成光波仍为线偏振光。这两种特殊的情况是：

（一）$\delta=0$ 或 $\pm2\pi$ 的整数倍，这时式（2-32）化为

$$E_y=\frac{a_2}{a_1}E_x \tag{2-34}$$

表示合成电矢量的运动沿着一条经过座标原点而斜率为 a_2/a_1 的直线进行，如图 2-9 a 所示。

（二）$\delta=\pm\pi$ 的奇数倍，这时式（2-32）化为

$$E_y=-\frac{a_2}{a_1}E_x \tag{2-35}$$

表示合成电矢量的运动沿着一条经过座标原点而斜率为 $-a_2/a_1$ 的直线进行，如图 2-9 e 所示。

还可以指出，当 $\delta=\pm\frac{\pi}{2}$ 和它们的奇数倍时，式（2-32）化为

$$\frac{E_x^2}{a_1^2}+\frac{E_y^2}{a_2^2}=1 \tag{2-36}$$

这是一个标准的椭圆方程，表示一个长短轴 a_1、a_2 和座标轴 x、y 重合的椭圆（图 2-9 c）。若在这种情况下同时有 $a_1=a_2=a$，则由式（2-36）得到

$$E_x^2+E_y^2=a^2 \tag{2-37}$$

表示合成电矢量末端的运动描成一个圆，因此两光波合成的结果是圆偏振光。

根据合成电矢量旋转方向的不同，可以将椭圆（或圆）偏振光分为右旋和左旋两种。通常规定当对着光传播的方向（即沿"$-z$"方向）看去，合成电矢量是顺时针方向旋转时，偏振是右旋的，反之是左旋的。如果分析一下式（2-26）和（2-27）在相隔 1/4 周期的两个时刻的值，即可看出右旋情况下 $\sin\delta>0$，而左旋情况下 $\sin\delta<0$。例如 $\delta=\frac{\pi}{2}$，式（2-26）和（2-27）可以写为

$$E_x=a_1\cos(\omega t+\alpha_1)$$

$$E_y=a_2\cos\left(\omega t+\alpha_1+\frac{\pi}{2}\right)$$

若在 $t=t_0$ 时刻 $(\omega t_0+\alpha_1)=0$，则 $E_x=a_1$，而 $E_y=0$，因此合成电矢量的末端在图 2-9 c 中的 A 点。当 $t=t_0+\frac{T}{4}$（T 为周期）时，$E_x=0$，$E_y=-a_2$，此时合成电矢量的末端在图 2-9 c 中的 B 点，可见合成电矢量的末端是顺时针方向旋转的，偏振因而是右旋的。

由于两迭加光波的角频率为 ω，因此容易看出，合成电矢量旋转的角频率也等于 ω。

以上讨论的是两光波传播路程上某一点 P 的合成电矢量的运动情况。如果要考察某一时刻传播路程上各点的合成电矢量位置，容易看出它们的末端构成一螺旋线，螺旋线的空间周期等于光波波长，同时各点电矢量的方向和大小不一，在与传播方向垂直的平面上的投影为一个椭圆，如图 2-10 所示。

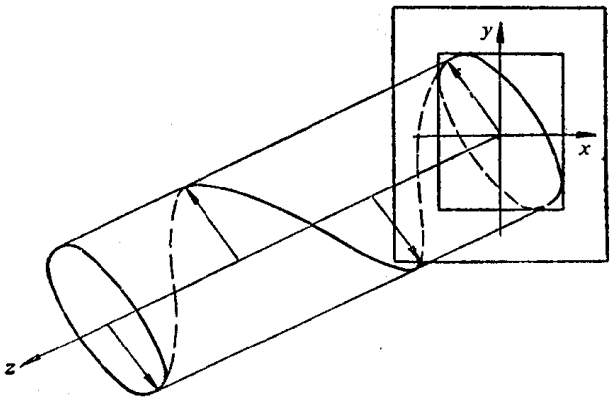


图2-10　椭圆偏振光电矢量的末端在空间构成一螺旋线

在§1-8中曾经指出，利用线偏振光在二介质分界面上的全反射可以产生椭圆偏振光，其原因就是全反射后垂直于入射面的振动分量和平行于入射面的振动分量之间有了某一位相差 δ。在特殊情况下，对于玻璃-空气分界面（玻璃折射率 $n=1.5$），当入射角 $\theta_1=54°37'$ 时，全反射后两互相垂直分量的位相差 $\delta=45°$〔由式(1-108)算出〕。若在这个角度下反射两次，位相差为 $\frac{\pi}{2}$。此时，如果入射线偏振光的振动方向和入射面成 45° 时，全反射后两互相垂直的分量的振幅相等，则反射光变为圆偏振光。图 2-11 所示的玻璃块是为此目的设计的，称为菲涅耳菱体。入射的平面偏振光如果振动方向与菱体的主平面成 45°，经这菱体在 54°37′ 下全反射两次后，出射光就是圆偏振光。

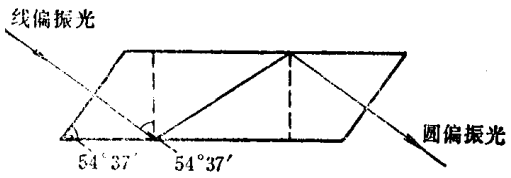


图2-11　菲涅耳菱体

§2-4 不同频率的两个单色光波的迭加

现在讨论两个振动方向相同，振幅相等而频率相差很小的单色光波的迭加，这样两个波的迭加将产生光学上很有意义的“拍”现象。

一、光学拍

设角频率分别为 ω_1 和 ω_2 的两单色光波沿 z 方向传播，它们的波动公式为

$$E_1 = a\cos(\omega_1 t - k_1 z)$$

$$E_2 = a\cos(\omega_2 t - k_2 z)$$

这两个光波的迭加得到

$$E = E_1 + E_2 = a\left[\cos(\omega_1 t - k_1 z) + \cos(\omega_2 t - k_2 z)\right]$$

应用三角公式

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

上式可写为

$$E = 2a\cos\frac{1}{2}\left[(\omega_1-\omega_2)t - (k_1-k_2)z\right]\cos\frac{1}{2}\left[(\omega_1+\omega_2)t - (k_1+k_2)z\right] \quad (2\text{-}38)$$

引入平均角频率 $\bar{\omega}$ 和平均波数 $\bar{k}$

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2),\quad \bar{k} = \frac{1}{2}(k_1+k_2) \quad (2\text{-}39)$$

以及调制频率 ω_m 和调制波数 k_m

$$\omega_m = \frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2),\quad k_m = \frac{1}{2}(k_1-k_2) \quad (2\text{-}40)$$

这样，式（2-38）可写为

$$E = 2a\cos(\omega_m t - k_m z)\cos(\bar{\omega}t - \bar{k}z) \quad (2\text{-}41)$$

若令

$$A = 2a\cos(\omega_m t - k_m z) \quad (2\text{-}42)$$

上式化为

$$E = A\cos(\bar{\omega}t - \bar{k}z) \quad (2\text{-}43)$$

表明合成波是一个频率为 $\bar{\omega}$ 而振幅 A 随时间和位置在 0 与 $2a$ 间变化的波。图 2-12 表示了这样两个波的迭加情况，其中图 2-12 a 是两个单色波，图 2-12 b 是合成波，图 2-12 c 是合成波振幅的变化曲线。由于光波的频率很高，若 $\omega_1 \approx \omega_2$，则 $\bar{\omega} \gg \omega_m$，因而 A 变化缓慢而 E 变化极快（图 2-12 c、b）。合成波的强度与 A^2 成比例，有

$$I = A^2 = 4a^2\cos^2(\omega_m t - k_m z)$$

或

$$I = A^2 = 2a^2\left[1 + \cos 2(\omega_m t - k_m z)\right] \quad (2\text{-}44)$$

因此合成波的强度随时间和位置在 0 和 $4a^2$ 之间变化（图 2-12 d），这种强度时大时小的现象通常称为拍。由式（2-44）可见拍频等于 $2\omega_m$，即等于振幅调制频率的两倍，或由 ω_m 的定义，等于 $\omega_1-\omega_2$——两迭加单色光波频率之差。

光学拍现象是福莱斯特(A·Forrester)等人在1955年首先观察到的，他们用塞曼（Zeemen）效应分裂的两条频率相差很小的光谱线作单色光波，迭加在光电混频管的表面产生拍频。他们所记录到的光电流的变化曲线与图2-12 d 的曲线有相同的形式。在激光问世后，由于激光有很好的单色性和强度，光学拍现象的观察就变得非常容易了。

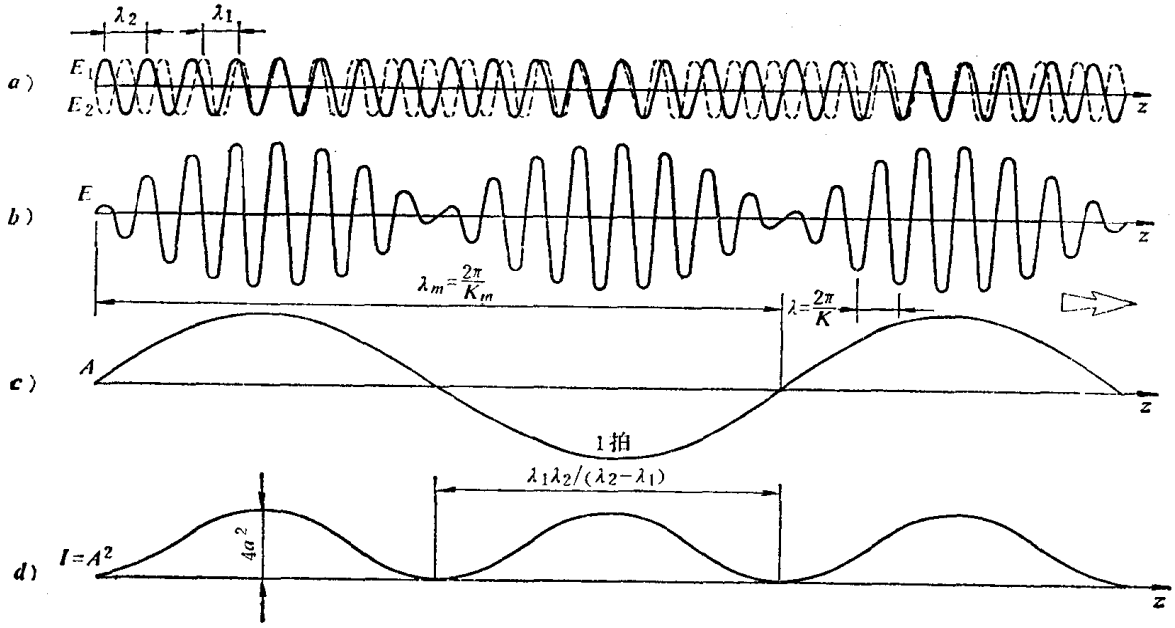


图2-12 频率不同的两单色光波的迭加

二、群速度和相速度

单色光波的传播速度由它的波动公式易见就是单色光波等相面的传播速度，现在合成波是一个较为复杂的波动，它的传播速度应该如何表示，下面我们来讨论这个问题。

合成波

$$E = 2a\cos(\omega_m t - k_m z)\cos(\bar{\omega} t - \bar{k} z)$$

包含两种传播速度：等相面的传播速度和等幅面的传播速度。前者也称为相速度，它可由位相不变条件（$\bar{\omega} t - \bar{k} z =$ 常数）求出

$$v = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}} \tag{2-45}$$

后者是振幅恒值点的移动速度，按照瑞利（Rayleigh）的说法，这速度称为群速度。当迭加的两单色光波在真空中传播时，它们的速度相同，这时合成波的相速度和群速度也相等。但如果光波在色散介质中传播时，由于两单色光波频率不同，两单色光波将以不同的速度传播，这时合成波的群速度将不等于相速度。这情形可以从图2-13中看出，我们考察振幅最大点的移动速度：设 $t = t_1$ 时刻，两单色光波的波峰重合在M点，因此M点是波群的振幅最大点；在继后的一个时刻 $t = t_2$，由于两单色光波传播速度不同，所以原来重合的两单色光波的波峰将不再重合，而原来不重合的两个波峰在N点重合，N点变成了 $t = t_2$ 时刻的合成波的振幅最大点。由此可见，在色散介质中，合成波振幅的传播速度（群速度）将不等于两单色光波的相速度，也不等于它本身的相速度。合成波的群速度可以由振幅不变条件（$\omega_m t - k_m z =$ 常数）求出：

$$v_g = \frac{\omega_m}{k_m} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

当 $\Delta\omega$ 很小时，可以写成

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \tag{2-46}$$

由此式不难找到群速度 v_g 和相速度 v 之间的关系：

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(kv)}{dk} = v + k\frac{dv}{dk} \tag{2-47}$$

或因 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$，$dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2}d\lambda$，得到

$$v_g = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda} \tag{2-48}$$

此式表示，$\frac{dv}{d\lambda}$越大，即光波的传播速度随波长的变化越大时，群速度 v_g 和相速度 v 两者相差也越大。若$\frac{dv}{d\lambda} > 0$，即波长较长的单色光波比波长较短的单色光波传播速度大时（正常色散），群速度小于相速度；若$\frac{dv}{d\lambda} < 0$（反常色散），群速度大于相速度。对于无色散介质，$\frac{dv}{d\lambda} = 0$，因而群速度等于相速度。

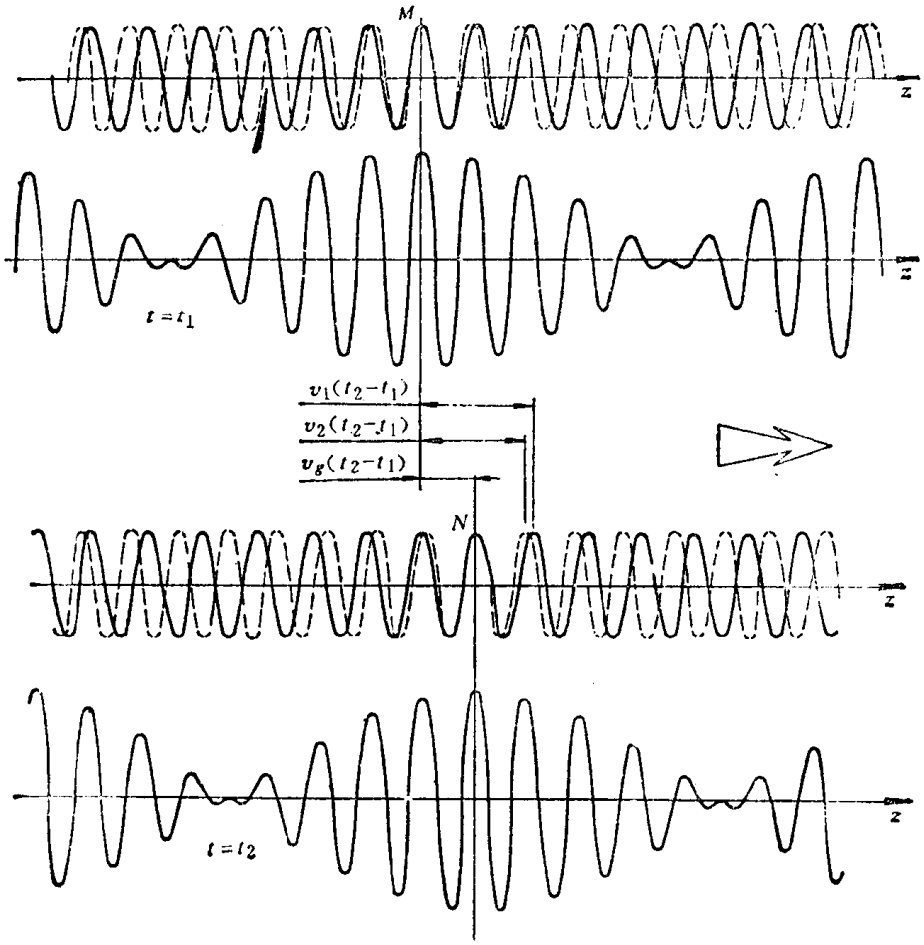


图2-13　群速度和相速度

§2-5 光波的分析

从§2-1的讨论可以知道，把无论多少个同频率而任意振幅和位相的单色光波迭加时，所得到的合成波仍然是单色光波。但是，若把两个频率不同的单色光波迭加起来，其结果就不再是单色波，而是一种复杂波，波形曲线不再是正弦或余弦曲线，而具有比较复杂的形状。图2-14 c 所示的便是一种复杂波，它由波数或空间角频率为 k 和 $2k$ 的两个单色光波（图 b、a）迭加而成。对于某一个时刻来说，这两个单色光波的迭加可以写成

$$E = a_1\cos(kz+\beta_1) + a_2\cos(2kz+\beta_2)$$

式中 β_1 和 β_2 是对应于时间的常数。如果把三个或三个以上的不同频率的单色光波迭加时，将得到更为复杂的波动。既然两个或多个单色波迭加以后，形成比较复杂的波，很自然我们会联想到这样的问题：任意一个复杂波能否用若干个单色波的组合表示出来，或者说分析为一组单色波。事实上，这是完全可以做到的，下面，我们来讨论一种分析方法——傅里叶分析，分别对周期性波和非周期性波两种情况加以讨论。

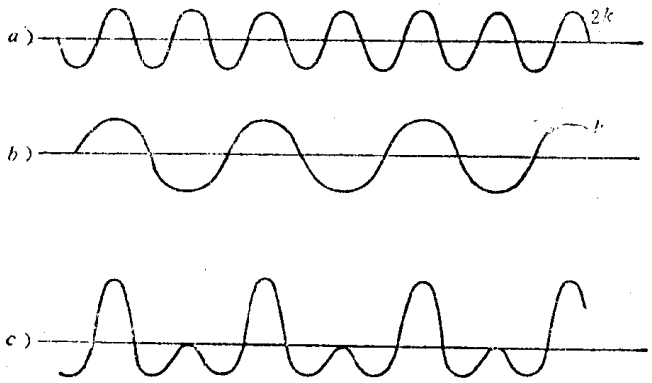


图2-14 不同频率的两单色波的迭加

一、周期性波的分析

所谓周期性波，就是在接连着的相等的时间和空间内运动完全重复一次的波，图2-14 c 所示的复杂波就是一种周期性波，它虽不具有简谐性，但明显地具有周期性：运动在一个空间周期内重复一次。这类波的分析可以应用数学上的傅里叶级数定理：具有空间周期 λ 的函数 $f(z)$ 可以表示成为一些空间周期为 λ 的整分数倍（即 λ、$\lambda/2$、$\lambda/3$ 等）的简谐函数之和，其数学形式为

$$f(z) = a_0 + a_1\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}z+\beta_1\right) + a_2\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda/2}z+\beta_2\right) + \cdots \tag{2-49}$$

或者写为

$$f(z) = a_0 + a_1\cos(kz+\beta_1) + a_2\cos(2kz+\beta_2) + \cdots \tag{2-50}$$

式中 a_0、a_1、a_2 为常数，$k=\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)$ 为空间角频率。傅里叶定理还可以表示成更为简便的形式：由三角等式

$$a_n\cos(nkz+\beta_n) = A_n\cos nkz + B_n\sin nkz$$

式中 $A_n = a_n\cos\beta_n$，$B_n = -a_n\sin\beta_n$，得到

$$f(z) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nkz + B_n\sin nkz) \tag{2-51}$$

式中第一项写成 $A_0/2$，纯粹为了下面结果的形式统一。式（2-50）和（2-51）通常称为傅里叶级数，A_0、A_n、B_n 称为 $f(z)$ 的傅里叶系数，它们分别为

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(z)dz \\ A_n &= \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(z)\cos nkzdz \\ B_n &= \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(z)\sin nkzdz \end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}52)$$

如果 $f(z)$ 是代表一个以空间角频率 k 沿 z 方向传播的周期性复杂波，则显然上面两式的意义是：这个复杂波可以分析为数目足够多的振幅不同的单色波，它们的空间角频率分别为 k、$2k$、$3k$……。因此，如果给定某一个复杂波的函数形式，对它进行傅里叶分析，这实际上就是一个决定它的傅里叶系数（各分波的振幅）的过程。下面举一个周期性矩形波的分析为例（图 2-15），矩形波的空间周期为 λ，它可用函数

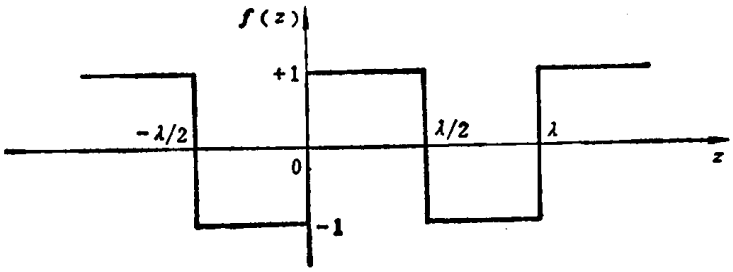


图2-15　矩形波

$$f(z)=\begin{cases} +1 & \text{当 } 0<z<\lambda/2 \\ -1 & \text{当 } \lambda/2<z<\lambda \end{cases}$$

表示。因为 $f(z)$ 为一奇函数，即 $f(z)=-f(-z)$，易见 $A_0=0$，$A_n=0$，而

$$B_n=\frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda/2}(+1)\sin nkzdz+\frac{2}{\lambda}\int_{\lambda/2}^{\lambda}(-1)\sin nkzdz$$

$$=\frac{1}{n\pi}[-\cos nkz]_0^{\lambda/2}+\frac{1}{n\pi}[\cos nkz]_{\lambda/2}^{\lambda}=\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

得到

$$B_1=\frac{4}{\pi},\ B_2=0,\ B_3=\frac{4}{3\pi},\ B_4=0,\ B_5=\frac{4}{5\pi}\cdots$$

因此，这种矩形波的傅里叶级数，或者说这种矩形波分析成的傅里叶简谐分波为

$$f(z)=\frac{4}{\pi}\left(\sin kz+\frac{1}{3}\sin 3kz+\frac{1}{5}\sin 5kz+\cdots\right) \quad (2\text{-}53)$$

通常用一种空间频谱图解方法来表示傅里叶分析的结果：以横座标表示空间角频率，纵座标表示振幅，在对应于振幅不为零的频率位置引垂直线，使其长度等于相应频率的振幅值（以一定的标度为单位）。上述矩形波的分析，以图解表示，就是一些离散的线，如图 2-16 所示。所以，周期性复杂波的频谱是离散频谱。光谱仪器可以看作是一种傅里叶分析器，把入射光做一个傅里叶分析，入射光所包含的不同频率的分波显示为光谱线。

傅里叶级数也可以表示为复数形式〔见附录式（Ⅱ-5）〕

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{ink^2} \quad (2\text{-}54)$$

其中系数

$$C_n=\frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(z)e^{-in k z}\mathrm{d}z \quad (n=0,\ \pm1,\ \pm2\cdots) \tag{2-55}$$

式（2-54）的每一项，显然也可以看成是表示一个单色分波。

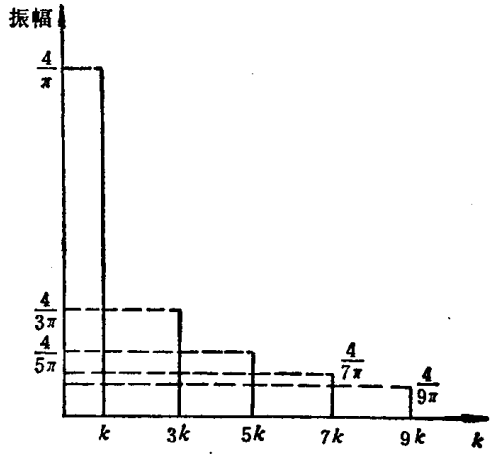


图2-16　第2-15图中的矩形波的频谱图解

二、波群的分析

下面讨论非周期性波的分析，这类波不是无限次地重复它的波形，而是只存在于一定的有限范围之内，在这范围之外，则振动为零，因而呈现出波群的形式。图 2-17 a、b、c 所示就是三种不同形式的波群。这类波群的分析，不能利用傅里叶级数，而必须利用傅里叶积分。分析的结果，这类波包含无限多个振幅不同的简谐分波，两个“相邻”分波的频率相差无穷小，因此以频谱图解表示，将是一条振幅——空间角频率的连续曲线（连续频谱），图2-17 d、e、f 之曲线就是与 a、b、c 三波群相应的频谱曲线。

傅里叶积分定理可表述为：一个非周期函数 $f(z)$（可看成空间周期 λ 趋于∞）可以用积分

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} A(k)e^{ikz}\mathrm{d}k \tag{2-56}$$

来表示，式中

$$A(k)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{-ikz}\mathrm{d}z \tag{2-57}$$

称为函数 $f(z)$ 的傅里叶变换。如果非周期函数 $f(z)$ 表征一个波群，那末傅里叶积分式（2-56）就可以理解为：波群可分析成无限多个振幅随空间频率分布（频谱）有

$$A(k)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{-ikz}\mathrm{d}z$$

形式的简谐分波。显然，反过来也可以说，波群能够由这些单色波合成。

如果把图 2-17 中 a、b、c 三个波群的函数形式写出来，就可以按照式（2-57）计算它们的频谱。可以证明，它们将有图 d、e、f 的形式。现在举第二个波群（图 2-17 b）为例，设这个波的长度为 $2L$，在 $2L$ 范围内波的振幅 A_0=常数，空间角频率 k_0=常数。这种波不是单色波，因为单色波是无限延伸的，这种波常称为波列。在§1-5 里我们曾经指出，这种波列可以视为发光原子一次辐射发出的波动的近似模型。根据波列的特征，如选择波列的中点为座标原点，可以将它表示为

$$f(z)=\begin{cases} A_0e^{ik_0z} & \text{当}-L\leqslant z\leqslant L \\ 0 & \text{当}|z|>L \end{cases}$$

由式（2-57），振幅函数

$$A(k)=A_0\int_{-L}^{L} e^{-i(k-k_0)z}\mathrm{d}z=2A_0L\,\frac{\sin(k-k_0)L}{(k-k_0)L} \tag{2-58}$$

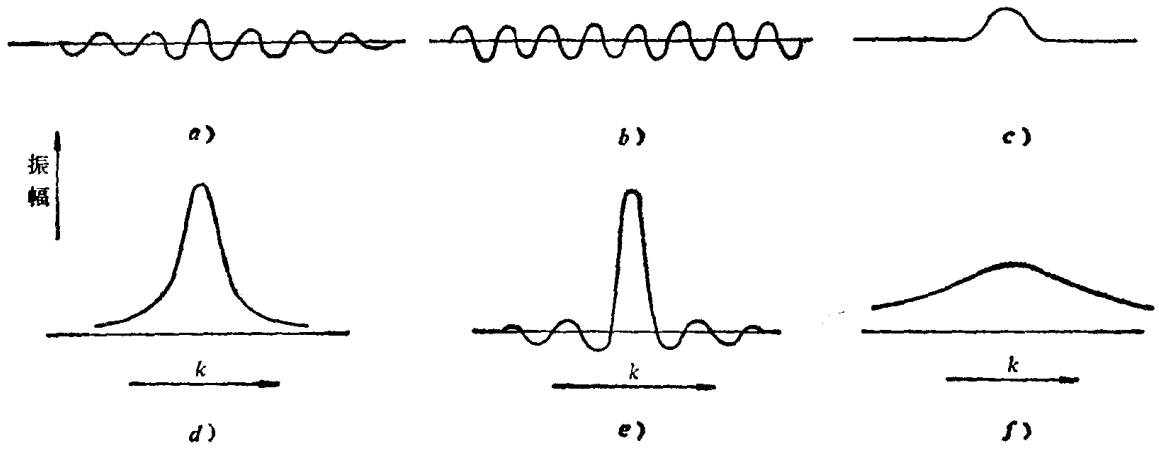


图2-17 三种不同形式的波群及其振幅一空间频率曲线

作空间频谱图解，将得到图 2-17 e 的曲线。振幅函数的平方是强度函数

$$I(k)=\left[\frac{\sin(k-k_0)L}{(k-k_0)L}\right]^2 \tag{2-59}$$

(略去了常数因子)，它决定波列的傅里叶分波的强度分布，其曲线如图 2-18 所示。强度的第一个零值（发生在正弦项的变量等于 π 时）对应于 $\Delta k=k-k_0=\pm\frac{\pi}{L}$。实际上，只有在空间频率 $k_0-\Delta k/2\leqslant k\leqslant k_0+\Delta k/2$ 范围内（也即 k_0 两边第一个零值对应频宽的一半），强度才有较显著的数值。所以，可以取范围

$$\Delta k=\frac{\pi}{L} \tag{2-60}$$

作为有效空间频率范围。同时由于 $k=\frac{2\pi}{\lambda}$，所以上式也可以用空间周期（波长）表示为

$$\Delta\lambda=\frac{\lambda^2}{2L} \tag{2-61}$$

式子表明，波列长度 $2L$ 和它所包含的单色分波的波长范围成反比关系，波列长度愈短，波列所包含的单色分波的波长范围就愈宽；而波列长度愈长，波列所包含的单色分波的波长范围就愈窄。当 $2L$ 等于无穷大时，$\Delta\lambda$ 等于零，这就是单色光波的情形。

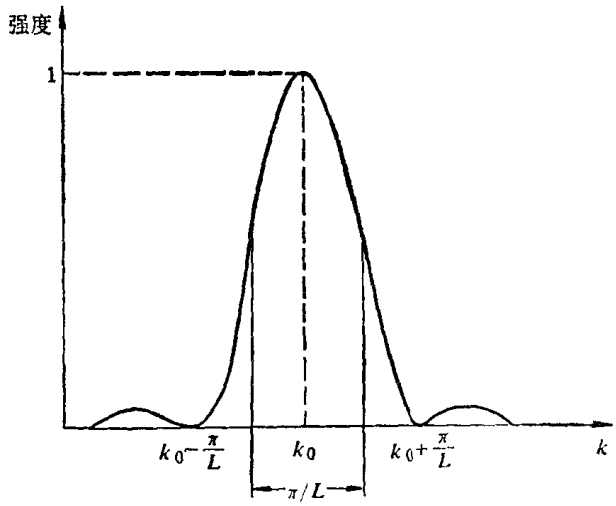


图2-18 强度函数$\left[\frac{\sin(k-k_0)L}{(k-k_0)L}\right]^2$

从以上讨论可见，由于原子发光是以一段段有限长的波列发射的，所以实际光源发出的光波不是理想单色的，而包含有一定的波长范围。在光学实验中，常常把发光原子发出的某一条谱线的光作为单色光，例如钠原子发出的 D 谱线或镉原子发出的镉红线。由于这些谱线都有一定的宽度，因而这种单色光

在理论上只能说是“准单色光”，即谱线的波长宽度与波长本身之比 $\Delta\lambda/\lambda \ll 1$。谱线的波长宽度以它的“半宽度”（见图 2-18）来量度，与之对应的波列长度由式（2-61）表示。谱线宽度表示光波单色性的好坏，同样光波的波列长度也是光波单色性好坏的量度，两种描述是完全等价的。

以上我们的讨论，是对某一时刻空间存在的波列而言的。如果在空间某一固定点考察在一定时间内通过该点的波列，在“时间域”内对波列进行傅里叶分析，显然我们也会得到类似的结果。设波列的持续时间为 Δt，那末波列所包含的单色分波的时间频率范围，可以证明为

$$\Delta\nu = 1/\Delta t \tag{2-62}$$

因为 Δt 的大小与波列的长短对应，$\Delta\nu$ 的宽窄与 $\Delta\lambda$ 的宽窄对应，所以式（2-62）和（2-61）有相同的意义。这是光波的时间周期性和空间周期性紧密相关的结果。

习　题

2.1　两个振动方向相同的单色波在某一点产生的振动分别表示为 $E_1 = a_1\cos(\omega t + \alpha_1)$ 和 $E_2 = a_2\cos(\omega t + \alpha_2)$。若 $\omega = 120\pi$，$a_1 = 6$，$a_2 = 8$，$\alpha_1 = 0$ 和 $\alpha_2 = \pi/2$，求该点的合振动表示式。

2.2　两个振动方向相同，沿 x 方向传播的波可表示为

$$E_1 = a\sin[\omega t - k(x + \Delta x)]$$

$$E_2 = a\sin(\omega t - kx)$$

试证明合成波的表示式为 $E = 2a\cos\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)\sin\left[\omega t - k\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right]$。

2.3　利用复数表示式求两个波 $E_1 = a\cos(kx + \omega t)$ 和 $E_2 = -a\cos(kx - \omega t)$ 的合成。

2.4　已知光驻波的电场为 $E(x、t) = 2a\sin kx\cos\omega t$，利用关系式 $\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}$ 导出磁场 $B(x、t)$ 的表示式。绘出光驻波的示意图。

2.5　一个右旋圆偏振光在 50° 角下入射到空气-玻璃界面，试决定反射波和透射波的偏振状态。

2.6　已知色散关系 $\omega = ak^2$，求相速度和群速度。

2.7　证明群速度可以表示为 $v_g = \frac{C}{n + \omega(dn/d\omega)}$。

2.8　设原子每次辐射的持续时间是 10^{-8} 秒，试求原子发光的波长宽度（光波波长 $\lambda = 5000$ 埃）。

2.9　某一种激光的频宽 $\Delta\nu = 5.4\times10^4$ 赫，问这一种激光的波列长度为多少？

2.10　维纳的光驻波实验中，如果照明乳胶膜上暗带的间距为 7×10^{-3} 厘米，求照相乳胶膜和反射镜所成的角度。

第三章　光的干涉和干涉仪

从上一章的讨论我们知道，两列振动方向相同，频率相同的单色光波迭加后，光的强度在迭加区域不是均匀分布的，而是在一些地方有极大值，一些地方有极小值，这种在迭加区域出现的强度稳定的强弱分布现象称为光的干涉现象。

尽管实际光源发出的光波不能认为是理想的单色光波，但只要两列光波满足一定条件，也能够实现光的干涉。由于使两列光波满足干涉条件的方法有多种，因而产生出多种干涉装置。1802年，杨氏（Thomas Young）首先用实验方法研究了光的干涉现象，并且用光的波动性解释了现象，这对于确定光的波动性在历史上起过重要作用。

杨氏实验等一类干涉，可以认为是点光源的干涉，即只容许使用比较小的光源；而另一类干涉，即平行平板和楔形平板的干涉，可使用扩展光源，这一类干涉在实际应用中最为重要，几乎所有实用的干涉仪器都是利用这一类干涉。现在，干涉方法越来越广泛地应用到科学技术的许多部门，特别是在光谱学和基本量度学中有着重要的实际应用。例如利用干涉方法研究光谱线的超精细结构；精密计量长度；在光学仪器制造工业中，检验光学零件的各种偏差，在光学元件表面镀膜以增加或减少反射光能，制造干涉滤光片等。为了适应各种量度的需要而设计制造的各种干涉仪器，是光学仪器的一个重要组成部分。

§3-1　产生干涉的条件

我们都有这样的经验：将两支蜡烛或两只电灯放在一起，同时照在墙壁上，无论如何也不会发现在墙壁上有光强度明暗变化的干涉现象。即使是两个并排的小孔，如果各用一个光源来照明（图3-1），那末从这两个小孔散出的光，相遇在一起也不会产生干涉现象。但是如果两个小孔是受同一个很小的光源或离得很远的宽光源照明，则从两个小孔散出的光可以在小孔后面的一个屏幕上产生干涉现象。这两个事实说明：两个完全独立的没有关联的光波无论如何不会产生干涉，而只有当两个光波有着紧密关联或者说当两个光波是由同一个光波分离出来时，这两个光波才会发生干涉。

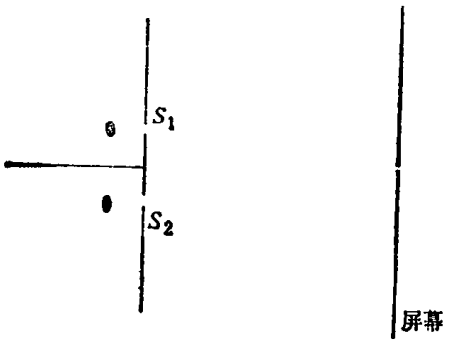


图3-1　小孔 S_1 和 S_2 各受一个光源照明，屏幕上没有干涉图样

两个没有关联的光波不能产生干涉的原因，不难从光源本身的发光特性去理解。在第一章里曾经指出，光源中单个原子的发光是间歇的，每一次发光的持续时间约为 10^{-8} 秒，在这段时间内原子发射了一列光波，停顿若干时间之后（停顿时间与持续时间有相同的数量级），再行发出另一列光波。原子前后发出的两列光波是完全独立的，它们的初位相没有固定的关系。不同原子发出的波列也是独立的，没有固定的位相关系。这样，两个发光原子同时发出的波列形成的干涉图样只能在极短的时间（$\sim 10^{-8}$秒）内存在，而另一个时刻将代之以对应于另一个位相差的干涉图样，在一定的观察和测量时间内干涉图样的更迭几乎无穷多次，任何一种接收器都不可能反

应得这样快来察觉这种图样的更迭。接收器记录到的只是强度 I 的某一时间平均值，如象眼睛不能觉察到交流电所供给的白炽灯的亮度变化，而只能看到某一不变的平均亮度一样。为了求出强度 I 的时间平均值，我们来考察两光波迭加区域内的某一点 P 的强度。在两波列通过的极短时间内，P 点的合强度为〔见式(2-5)〕。

$$I = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos\delta$$

式中 a_1 和 a_2 为两光波的振幅，δ 为两光波的位相差。在观测时间 τ 内，P 点的平均强度为

$$\overline{I} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau I\,d\tau = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau (a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos\delta)\,d\tau = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \cos\delta\,d\tau$$

如果在观测时间 τ 内，各个时刻到达的两光波的位相差 δ 迅速且无规则地变化，多次经历 0 和 2π 之间的一切数值，则有

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \cos\delta\,d\tau = 0$$

因而

$$\overline{I} = a_1^2 + a_2^2 = I_1 + I_2$$

即 P 点的平均光强度恒等于两迭加光波的强度之和，我们不可能发现干涉现象。两个独立光源发出的光波的迭加，便是这种情况。但是，如果在任意点 P 迭加的两光波是相互紧密相关的，以致在观测时间 τ 内，它们的位相差固定不变，那末将有

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \cos\delta\,d\tau = \cos\delta$$

因而

$$\overline{I} = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos\delta$$

或写成

$$\overline{I} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}\cos\delta \tag{3-1}$$

可见 P 点的平均光强度不等于两光波强度之和，这是两光波产生干涉的情况。因此，可以得出结论：两迭加光波的位相差固定不变，是产生干涉的必要条件。

应该注意到，得出式 (3-1)是假设了两迭加光波光矢量的振动方向相同和频率相同的。从上一章的讨论可知，如果两迭加光波的光矢量振动方向不同或频率不同，在迭加区域内就不会得到稳定的光强度强弱分布的干涉现象。所以，两光波迭加产生干涉的必要条件也必须包括这两个条件。

以上三个条件通常称为相干条件。满足这三个条件的光波称为相干光波，相应的光源称为相干光源。显然，只有相干光波才可能产生光的干涉现象。

前面已经分析过，两个独立的光源或两个独立的发光原子发出的光波是不可能产生干涉的，原因就是它们不可能满足相干条件。在具体的干涉装置中，为了使迭加的两光波满足相干条件从而发生干涉，必须利用同一发光原子（或一般说发光“点”）的辐射来得到两个相干光波，为同前面所说的利用一个很小的光源来照明两个小孔，从小孔散出的两光波就可以发生干涉。在这种情况下，由于两光波是由同一发光原子发出的光波分离出来的，当原子每次辐射的初位相改变时，两光波的初位相也相应改变，所以两光波在相遇点的位相差在原子重复辐射时仍保持不变，相干条件因而得到满足。

应该指出，在具体的干涉装置中，为了产生光波的干涉，单是利用同一原子辐射的光波分离为两个光波，条件还不够充分，我们还必须使两迭加光波的光程差不要太大。因为原子只能辐射一段段有限长的波列，而进入干涉装置的每个波列都分成同样长的两个波列，当光程差太大时，由同一波列分成的两个波列就不能相遇。这时相遇的是对应于原子前一时刻发生的一列波和后一时刻发出的另一列波，各对波列的位相差无规则地且极频繁地变化，结果仍旧不会出现干涉现象。所以，为了使干涉现象发生，必须利用原子发出的同一波列，这样，迭加的两列光波的光程差就不能太大。显而易见，两迭加光波能发生干涉的最大光程差等于光波的波列长度。各种光源发出的光波，其波列长度不同，在激光出现以前，最好的单色光源是氪同位素 Kr^{86} 放电管发出的红光（6057.8 埃），其波列长度约为 700 毫米，因而利用这种单色光可使干涉装置在 700 毫米的光程差以内产生干涉。激光的波列长度比普通单色光要长得多，例如氦氖激光器的相干长度可达几十公里，这样利用激光作为光源，就可以在很大的光程差下产生干涉。

上面讨论了产生光的干涉现象的三个基本条件和一个补充条件（光程差小于波列长度），这个补充条件实际上也是为了三个基本条件得以实现。此外还有一些其他条件，例如对光源大小的限制等，我们将在以后讨论。

§3-2 杨氏干涉实验

将一个原子发出的光波分离成两个（或多个）相干光波，一般有两种方法，我们可以根据这两种方法对产生干涉的装置进行分类。一种方法是让光波通过并排的两个小孔或利用反射和折射方法把光波的波阵面分割成两个部分，这种方法称为波阵面分割法。另一种方法是利用两个部分反射的表面产生两个反射光波和两个透射光波，这种方法称为振幅分割法。

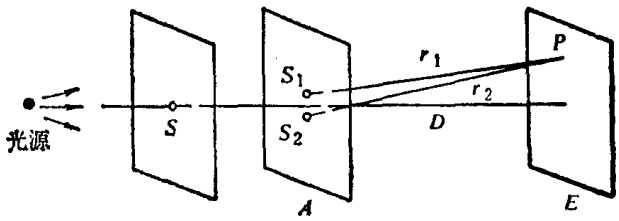


图3-2 杨氏干涉实验

波阵面分割法产生干涉的最著名例子可推杨氏干涉实验。实验装置如图 3-2 所示，S 是一个受光源照明的小孔，从 S 散出的光波落在光屏 A 的两个小孔 S_1 和 S_2 上，S_1 和 S_2 彼此相距很近，且到 S 等距；从 S_1 和 S_2 再次散出的光波因为是同一个光波分割出来的，所以是相干光波，它们在距离光屏为 D 的屏幕 E 上迭加，形成干涉图样。

为了使干涉图样的计算简化，把 S 以及 S_1 和 S_2 均视为单色点光源，并且因为 S_1 和 S_2 到 S 等距，S_1 和 S_2 又是同相的。现在考察屏幕上某一点 P，S_1 和 S_2 发出的光波在该点迭加产生的光强度，根据式（3-1）有

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta$$

式中 I_1 和 I_2 分别为两光波的光强度，δ 为位相差。若实验中两小孔大小相等，则有 $I_1 = I_2 = I_0$。因为 S_1 和 S_2 同相，所以位相差 δ 只依赖于 S_1 和 S_2 到 P 点的光程差，设 S_1 和 S_2 到 P 点的距离分别为 r_1 和 r_2，那末 P 点的光程差 $\Delta = n(r_2 - r_1)$，因而位相差

$$\delta = 2\pi\frac{n(r_2 - r_1)}{\lambda}$$

式中 n 为介质的折射率，λ 为光波在真空中的波长。在空气介质中 $n \approx 1$，所以上式化为

$$\delta = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$$

因而 P 点的光强度

$$I = 2I_0 + 2I_0 \cos\left[2\pi \frac{(r_2 - r_1)}{\lambda}\right] = 4I_0 \cos^2\left[\frac{\pi(r_2 - r_1)}{\lambda}\right] \tag{3-2}$$

可见，P 点的光强度决定于两光波到 P 点的光程差。当屏幕上某些点满足条件

$$\Delta = r_2 - r_1 = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots) \tag{3-3}$$

时，这些点的光强度有极大值 $I = 4I$。另一些点满足条件

$$\Delta = r_2 - r_1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots) \tag{3-4}$$

时，这些点的光强度有极小值 $I = 0$。其余的点，光强度在 0 和 $4I_0$ 之间。

为了确定屏幕上极大强度和极小强度点的位置，选取直角座标系 $o-xyz$，座标系的原点位于 S_1 和 S_2 连线的中点，x 轴的方向为 S_1S_2 连线的方向，如图 3-3 所示。这样屏幕上任意点 P 的座标为（x、y、D），而 S_1 和 S_2 到 P 点的距离 r_1 和 r_2 可分别写成

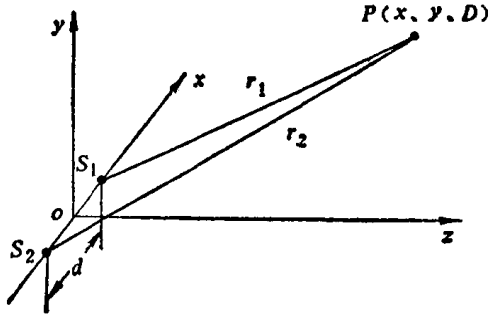


图3-3　杨氏干涉的几何关系

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= S_1P = \sqrt{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} \\ r_2 &= S_2P = \sqrt{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} \end{aligned}\right\} \tag{3-5}$$

式中 d 为两相干光源 S_1 和 S_2 的距离。由上面两式得到

$$r_2^2 - r_1^2 = 2xd$$

因此光程差

$$\Delta = r_2 - r_1 = \frac{2xd}{r_1 + r_2} \tag{3-6}$$

在实际的干涉实验中，$d \ll D$，这时，如果 x 和 y 也比 D 小得多（即只在 z 轴附近观察），则可用 $2D$ 代替 $r_1 + r_2$，其误差不会太大。例如，在典型情况下，$d = 0.02$ 厘米，$D = 50$ 厘米，$x = 0.5$ 厘米，$y = 0.5$ 厘米，有

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= [(0.49)^2 + (0.5)^2 + (50)^2]^{1/2} + [(0.51)^2 + (0.5)^2 + (50)^2]^{1/2} \\ &\approx 100.005 \text{ 厘米} \end{aligned}$$

可见以 $2D$ 代替 $r_1 + r_2$，误差在 0.005% 以内。在这一近似下，式（3-6）变为

$$\Delta = r_2 - r_1 = \frac{xd}{D} \tag{3-7}$$

所以由式（3-4），屏幕上极大强度点的位置决定于条件

$$x = \frac{mD\lambda}{d} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots) \tag{3-8}$$

极小强度点决定于条件

$$x=\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{D\lambda}{d}\quad(m=0,\pm1,\pm2\cdots)\tag{3-9}$$

因此，屏幕上 z 轴附近的干涉图样是由一系列平行等距的亮带和暗带组成，这些亮带和暗带称为干涉条纹(图 3-4 a)，条纹的走向与两光源 S_1 和 S_2 的连线（x 轴）相垂直。

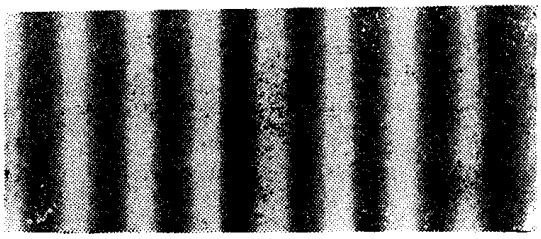
干涉条纹中，在极大值与极小值之间，强度是逐渐变化的。由式（3-3)和(3-7)，立即得到条纹的强度分布公式

$$I=4I_0\cos^2\left[\frac{\pi xd}{\lambda D}\right]\tag{3-10}$$

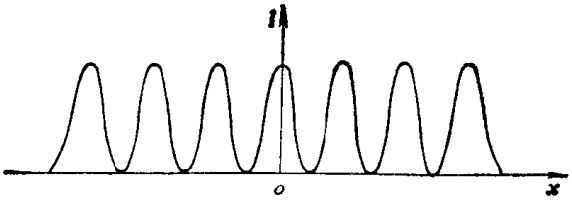
式子表明，条纹中各点的光强度沿 x 方向变化，变化的曲线为图 3-4 b 所示。

干涉条纹可以用条纹的干涉级 m 表征，其值等于 Δ/λ。条纹中最亮点的干涉级为整数，因而实际上常常用最亮点的干涉级代表一个条纹的干涉级。

相邻两个亮条纹或两个暗条纹之间的距离称为条纹间距。由式（3-8)，可得到条纹间距



a)



b)

图3-4 杨氏干涉条纹

a) 照片 b) 强度分布曲线

$$e=\frac{mD\lambda}{d}-\frac{(m-1)D\lambda}{d}=\frac{D\lambda}{d}\tag{3-11}$$

从图 3-3 可以看出，当 $d\ll D$ 时，$\frac{d}{D}=W$，W 称为相干光束的会聚角，因此上式又可写为

$$e=\frac{\lambda}{W}\tag{3-12}$$

式（3-11）和（3-12）表明，条纹间距与光波波长有关。波长较短的单色光，条纹较密，波长较长的单色光，条纹较稀。这样，如用白光做实验时，屏幕上只有中央条纹(对应 $m=0$）是白色的，在中央白色条纹的两边各有一黑色暗纹，暗纹外侧就是彩色条纹。

杨氏实验是属于测定光波波长的最早的一些方法之一。根据式（3-11)，如果在实验中测出 D、d 和 e，便可以计算出波长 λ。

最后，应该指出，在屏幕上得到直线的等距干涉条纹是有条件的，条件就是 $d\ll D$，且在 z 轴附近的小范围内观察。但是，由于在 S_1 和 S_2 发出的两相干光波的整个交迭区域内，均发生干涉现象，所以屏幕的位置实际上是可以任意安置的。这样，在屏幕任意放置的情况下，一般就得不到直线等距条纹。此时要决定条纹的形状，必须首先求出两点光源干涉的那些等光程差点的轨迹，因为干涉条纹是由光程差相同的各点联接而成。可以证明，等光程差点在空间的轨迹是一个回转双曲面。这一点只要我们写出等光程差的条件便可以看出。由图（3-3)，设任意点 P 的座标为（x、y、z），则有

$$r_1=\sqrt{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2+y^2+z^2}$$

$$r_2=\sqrt{\left(x+\frac{d}{2}\right)^2+y^2+z^2}$$

因此光程差公式

$$\Delta=r_2-r_1=\sqrt{\left(x+\frac{d}{2}\right)^2+y^2+z^2}-\sqrt{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2+y^2+z^2}$$

消去根号，化简便得到等光程差面的方程式

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2}-\frac{y^2+z^2}{\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2}=1 \tag{3-13}$$

将 $\Delta=m\lambda$ 代入，得到

$$\frac{x^2}{\left(\frac{m\lambda}{2}\right)^2}-\frac{y^2+z^2}{\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{m\lambda}{2}\right)^2}=1 \tag{3-14}$$

此式表示等光程差面是一组以 m 为参数的回转双曲面族，x 轴为回转轴。图 3-5 绘出了 m 0，±1，±2，±3 的等光程差面，$m=0$ 的等光程差面就是 $x=0$ 平面。

容易理解，在观察屏幕上所见到的干涉条纹就是等光程差面与观察屏幕的交线。当屏幕设置在 z 方向上，且与 xoy 平面平行，由方程（3-14），可见交线是一组双曲线。若只考察紧靠 z 轴附近的条纹，近似为直线（图 3-6 a），这正是前面讨论的情况。当屏幕安置在和 S_1 S_2 连线有某一交角的方向上，条纹如图 3-6 b 所示，它们略为弯曲且宽度不等。如果屏幕安置在 S_1 S_2 连线的方向上，条纹为一组同心圆环（图 3-6 c）。

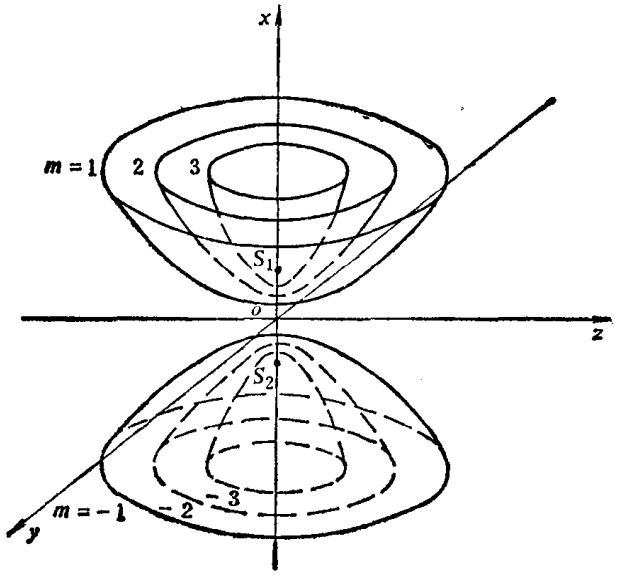


图3-5　等光程差面示意图

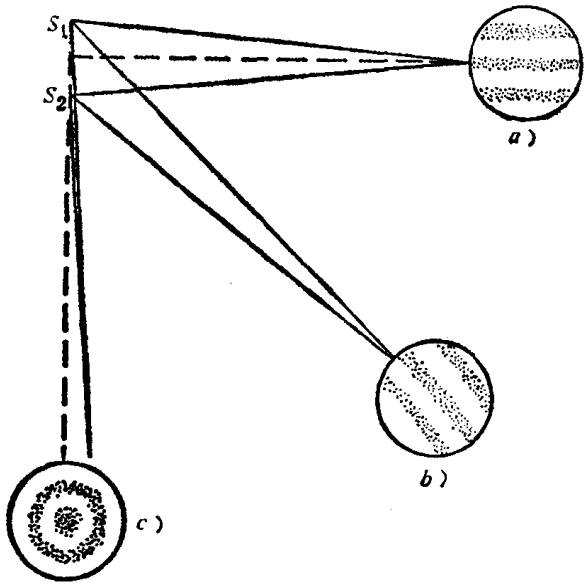


图3-6　条纹形状随观察屏幕位置的变化

在实际的杨氏干涉实验中，从小孔 S_1 和 S_2 散出的光波发散角不大，两光波的交迭区域只限于 z 轴附近，所以实际上只能在图 3-6 a 位置观察到干涉条纹，条纹是一些平行等距的直线。

在相干光波交迭的区域内观察干涉条纹，除了用屏幕外，还可以用目镜放大或用照相物镜照相。在干涉仪理论中，常常把观察屏幕、目镜焦平面或照相底板所在的平面称为干涉场。以后为方便起见，我们也使用干涉场这个名称。

§3-3 波阵面分割的其它干涉实验

一、菲涅耳双面镜实验

菲涅耳双面镜由两块彼此夹角很小的反射镜 M_1 和 M_2 组成，如图 3-7 所示。由点光源 S 发出的光波，受光屏 K 的阻挡，不能直接到达屏幕 E 上，而是经双面镜 M_1 和 M_2 反射被分割为两束相干光波，再投射在屏幕 E 上形成干涉条纹。从双面镜反射的两束相干光，也可以看作是从 S 在双面镜中形成的虚像 S_1 和 S_2 发出的，因而 S_1 和 S_2 相当于一对相干光源。S_1 和 S_2 的位置可按反射定律确定。设双面镜交线在图面上的投影为 O 点，$SO=l$，则 $S_1O=S_2O=l$，所以 S_1、S_2 的垂直平分线也通过 O 点。因此，S_1 和 S_2 之间的距离

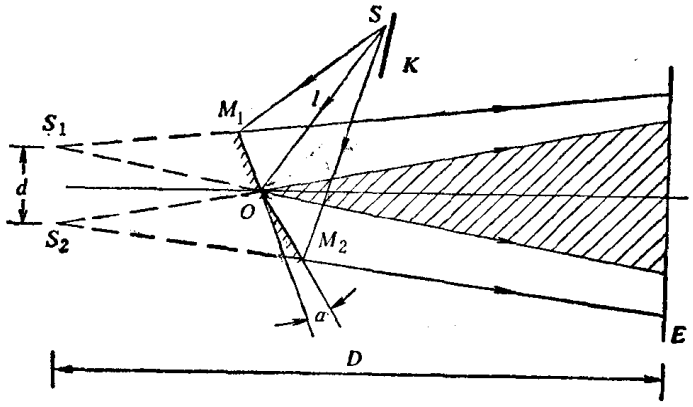


图3-7 菲涅耳双面镜干涉实验

$$d=2l\sin\alpha \tag{3-15}$$

式中 α 是双面镜 M_1 和 M_2 的夹角。在确定了相干光源 S_1 和 S_2 的位置之后，就可以利用上节的公式计算屏幕上的干涉条纹。由于双面镜的夹角 α 很小，所以 d 也很小，这样在屏幕上将得到间距较大的条纹。

二、洛埃镜实验

洛埃（Lloyd）镜实验装置比菲涅耳双面镜更加简单，仅应用一块平面镜的反射来获得干涉现象。实验装置如图 3-8 所示，点光源 S_1 放在离平面镜 M 相当远并且接近镜平面的地方，S_1 发出的光波，一部分直接射到屏幕 E 上，另一部分以很大的入射角（接近于 90°）投射到平面镜 M 上，再经平面镜反射到达屏幕 E。两部分光波由同一光波分割出来，因而是相干光波，相应的相干光源是 S_1 和它在平面镜中的虚像 S_2。屏幕上的干涉条纹也可用上节的公式进行计算。

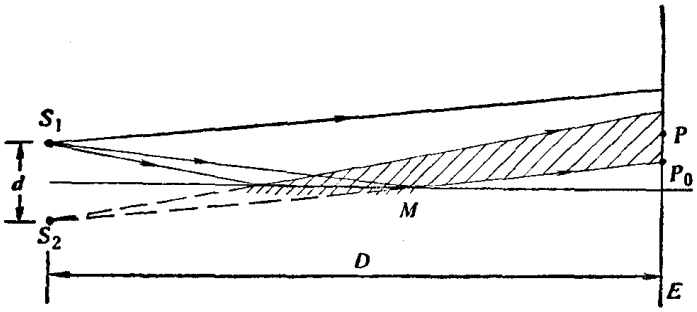


图3-8 洛埃镜干涉实验

但是，应该注意，两相干光波之一经平面镜的反射，有了 π 的位相变化。在§1-7 里我们已经指出，这种效应称为“半波损失”。这样，在计算屏幕上某一点 P 对应的两束相干光的光程差时，必须加上这一附加程差 $\lambda/2$。设 $S_1S_2=d$，$P_0P=x$（P_0 点为镜平面与屏幕的

交线在图面上的投影)，S_1S_2 到屏幕的距离为 D，则根据式(3-7)，并考虑到附加程差 $\lambda/2$，P 点的光程差为⊖

$$\Delta = S_2P - S_1P = \frac{d}{D}x + \frac{\lambda}{2} \tag{3-16}$$

如果把屏幕移到平面镜的一端，则 P_0 点的光程差等于 $\lambda/2$，因而 P_0 点是一暗点，实验很好的证明了这一点。这一事实也是光在光疏—光密介质分界面上反射时产生 π 的位相突变的最早的实验证明。

三、菲涅耳双棱镜实验

如图 3-9 所示，菲涅耳双棱镜由两个相同的棱镜组成，棱镜的折射角 α 很小，一般约为 30′。从点光源 S 来的一束光，经双棱镜折射后分成为两束，相互交迭产生干涉。两折射光波如同从棱镜形成的两个虚象 S_1 和 S_2 发出的一样，因而 S_1 和 S_2 可视为相干光源。设棱镜材料的折射率为 n，则棱镜所产生的角偏转近似为 $(n-1)\alpha$，因此 S_1 和 S_2 之间的距离为

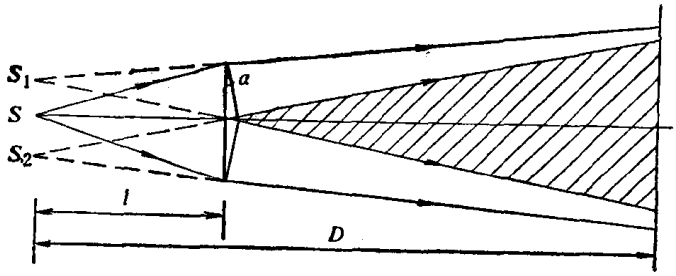


图3-9　菲涅耳双棱镜干涉实验

$$d = S_1S_2 = 2l(n-1)\alpha \tag{3-17}$$

式中 l 为 S 到双棱镜的距离。因为棱镜的折射角 α 很小，所以 d 也很小。例如 $n=1.5$，$\alpha = 30' \approx 8.7\times10^{-3}$ 弧度，$l=2$ 厘米，得到 $d=0.017$ 厘米。根据式（3-11）进行计算，若 $D=50$ 厘米，$\lambda = 6\times10^{-5}$ 厘米，屏幕上条纹的间距 $e \approx 0.3$ 厘米。

四、比累对切透镜实验

比累（Billet）对切透镜是把一块凸透镜沿着直径方向剖开成两半做成，两半块透镜垂直于光轴拉开一点距离，其间的空隙以光屏 K 挡住，如图 3-10 所示。点光源 S 由对切透镜形成两个实象 S_1 和 S_2，通过 S_1 和 S_2 射出的两光束在屏幕 E 上形成干涉条纹。实象 S_1 和 S_2 因而可以看作为一对相干光源。S_1、S_2 到对切透镜的距离 l' 可按成象公式

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = \frac{1}{f}$$

求出，式中 l 为光源 S 到透镜的距离，f 为透镜的焦距。若已知两半透镜分开的距离 a，便可求出 S_1 和 S_2 之间的距离

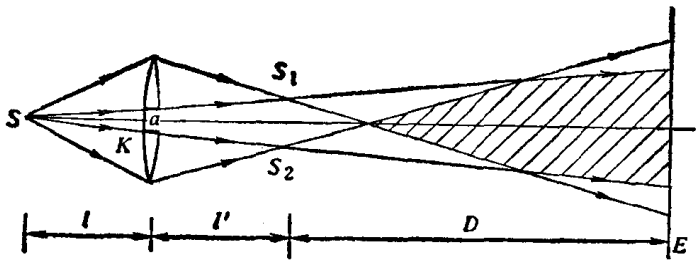


图3-10　比累对切透镜干涉实验

$$d = a\frac{l+l'}{l} \tag{3-18}$$

以上四个实验中，屏幕均安置成与两相干光源 S_1 和 S_2 的垂直平分线正交，因此在屏幕

⊖ 附加程差可取正号，也可取负号，因为我们不可能确定反射时位相变化是超前或是延后。以后凡遇到这种情况时，我们均取正号。

上靠近垂直平分线附近的条纹近似是直线等距条纹。但是，在第4个实验中，如果把比累对切透镜的安置稍加改变一下，可以观察到半圆形条纹。如图3-11 a，把比累对切透镜的两半沿光轴拉开一个距离，这样两半透镜所成的光源象 S_1 和 S_2 位于光轴上分开一定距离的两点，而两相干光束的交迭区域限制在 S_1 和 S_2 之间。在交迭区域内，若观察平面 E 与 S_1S_2 垂直，便可得到半圆形的条纹（图3-11 b）。这个实验称为梅斯林（G. Meslin）实验。

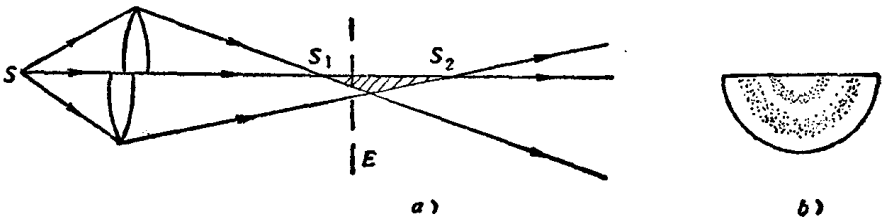


图3-11 梅斯林实验

还可以指出，上述的几个实验中，除梅斯林实验外，条纹的走向都垂直于图面，因此如果点光源沿垂直于图面方向延伸，也就是说用一个足够窄的狭缝光源代替点光源，并不影响条纹沿 S_1S_2 连线方向的强度分布，公式（3-10）仍然适用。但是，如果点光源或狭缝光源在 S_1S_2 的连线方向扩展，条纹的强度分布将要发生变化，条纹变得越来越不清楚。当光源大到一定程度时，条纹甚至可能完全看不见，条纹的清晰度可见与光源大小有关。此外，产生干涉的两光束强度上的差别、光源的单色性都对条纹的清晰度有影响。

§3-4 条纹的可见度

干涉场中某一点 P 附近条纹的清晰度用条纹的可见度（或称对比度）K 来量度，K 定义为

$$K=\frac{I_M-I_m}{I_M+I_m} \tag{3-19}$$

式中 I_M 和 I_m 分别为 P 点附近的强度极大值和极小值。由式（3-19）可见，当 $I_m=0$ 时，$K=1$，可见度有最大值，两个强度相同的理想单色点光源所产生的条纹就是这种情况。当 $I_M=I_m$ 时，可见度降为零，条纹消失。在实际的干涉实验中，不可能得到 $K=1$ 的干涉条纹。

条纹的可见度与两相干光波的相对强度、光源大小和光源的单色性有关，下面分别对每一个因素的影响加以讨论。当论及某一因素的影响时，把另外两个因素看成是理想的。

一、两相干光波强度不等的影响

当两光束强度不等时，根据公式（3-1），干涉条纹强度极大值和极小值分别为 $(\sqrt{I_1}+\sqrt{I_2})^2$ 和 $(\sqrt{I_1}-\sqrt{I_2})^2$，代入式（3-19），得到

$$K=\frac{2\sqrt{I_1}\sqrt{I_2}}{I_1+I_2} \tag{3-20}$$

易见，当 $I_1=I_2$ 时，$K=1$；而 I_1 与 I_2 相差愈甚，K 值越小。这是容易理解的，因为若两相干光波的强度相差很大，则两相干光波所造成的强度实际上与较大强度光波单独产生的强度没有差别，也即是干涉场几乎一片均匀亮度，观察不出干涉条纹。

二、光源大小的影响

前面讲过，一个单色点光源通过干涉装置所形成的两个相干单色点光源产生的干涉条纹

的强度分布如图 3-4 b 所示，条纹的可见度最好。但是，实际上光源不可能是理想的点光源，而总有一定的大小，它包含着众多的点光源。每一个点光源，在干涉装置中都形成一对相干点光源，各对相干点光源在干涉场产生各自的一组条纹，并且由于各点光源有不同的位置，所以各组条纹相互之间将产生一定的位移。这样，整个干涉场的强度分布（各组条纹的强度总和）不可能有图 3-4 b 所示的理想形状，暗条纹的强度不再为零，因此条纹的可见度下降。当光源大到一定程度时，可见度甚至可以下降到零，完全观察不到干涉条纹。下面分开几个方面讨论光源大小对条纹可见度的影响。

（1）光源的临界宽度

首先以杨氏实验为例，求出可见度下降到零时光源的临界宽度。假设光源只包含两个强度相等的发光点 S 和 S'（图 3-12），S 和 S' 在屏幕 E 上各自产生一组条纹，两组条纹间距相等，但彼此有位移。S 所产生的一组条纹，在 P_0 点是亮点（P_0 和 S 在 S_1 和 S_2 的垂直平分线上），而 S' 所产生的一组条纹，在 P_0 点的强度决定于光程差 $S'S_2-S'S_1$。若

$$S'S_2-S'S_1=\frac{1}{2}\lambda \quad (3\text{-}21)$$

则 S' 在 P_0 点产生极小强度，表明 S' 和 S 两点光源产生的条纹彼此位移了半个条纹，如图 3-12 右面的曲线所示。图中实线表示 S 产生的条纹，虚线表示 S' 产生的条纹。这两组条纹相加，使屏幕上处处强度相等，因此不可能观察到干涉条纹。

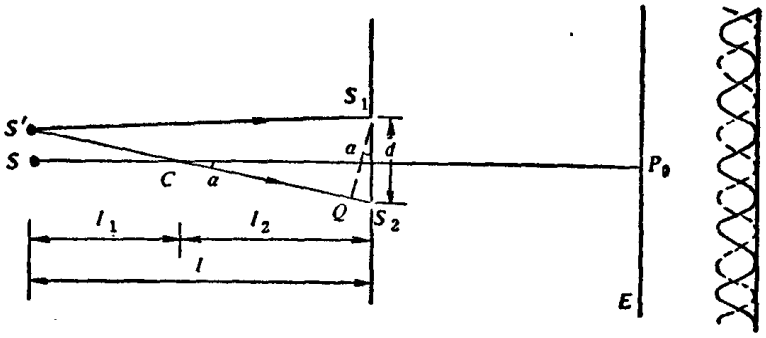


图3-12　两个点光源的杨氏实验

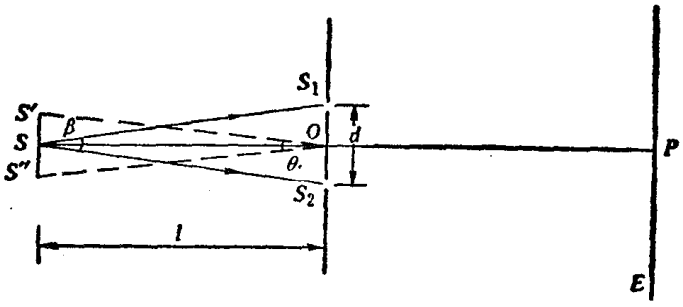


图3-13　扩展光源的杨氏实验

现在，假定光源是以 S 为中心的扩展光源 $S'S''$（图 3-13），则扩展光源所包含的每一个发光点都在屏幕上产生自己的一组条纹，整个扩展光源产生的条纹就是每一个点光源产生的条纹相加的结果。但是，当扩展光源的边缘点 S' 到 S_1 和 S_2 的光程差等于 $\lambda/2$ 时式（3-21），S' 和 S 产生的条纹是相互抵消的。设扩展光源的宽度 $S'S''=b$，我们把扩展光源分成许多相距为 $b/2$ 的点对，显然每一点对产生的条纹都相互抵消，因此整个扩展光源在屏幕上不产生条纹。这时光源的宽度即为临界宽度。由图 3-12 的几何关系，容易求出临界宽度的大小

$$S'S_2-S'S_1\approx S_2Q\approx\alpha d$$

式中 Q 是 S_1 到 $S'S_2$ 的垂足，α 是 S_1Q 与 S_1S_2 的夹角，它近似有

$$\alpha\approx\frac{d/2}{l_2}=\frac{b/2}{l_1}$$

l_2 是 $S'S_2$ 与 S_1S_2 的垂直平分线的交点 C 到 S_1S_2 所在平面的距离，l_1 是 SC 的距离。因此

$$l = l_1 + l_2 \approx \left(\frac{b}{2} + \frac{d}{2}\right)\frac{1}{\alpha}$$

或

$$\alpha = \frac{b + d}{2l}$$

所以

$$S'S_2 - S'S_1 \approx \alpha d \approx \left(\frac{b + d}{2l}\right) d \approx \frac{bd}{2l} \tag{3-22}$$

式中略去了平方项 $d^2/2l$。这样，得到扩展光源不产生条纹的条件为

$$\frac{bd}{2l} = \lambda / 2$$

由此得出

$$b = \frac{\lambda l}{d} \tag{3-23}$$

或

$$b = \frac{\lambda}{\beta} \tag{3-24}$$

式中 $\beta = \frac{d}{l}$（图 3-13），称为干涉孔径，它是到达干涉场某一点的两支相干光从发光点 S 发出时的夹角。式（3-24）与式（3-12）同样简单，在干涉仪理论中有很大的意义。

关系式（3-24），虽然是从杨氏干涉装置导出的，但可以证明它也适用于前述的各种干涉装置，所以它是表示光源临界宽度和干涉孔径关系的一个普遍式子。

（2）条纹可见度随光源大小的变化

光源大小在临界宽度范围内，干涉场上条纹的可见度随光源大小的变化关系，可通过求扩展光源所产生的条纹的强度分布得到。前面已经指出，扩展光源在干涉场产生的强度，是它所包含的各个发光点在干涉场产生的强度之和。如果把光源分成许多无穷小的元光源，则整个扩展光源产生的强度便是这些无穷小元光源产生的强度的积分。设每一个元光源的宽度为 dx，易见位于光源中点 S 的元光源在干涉场某一点 P 产生的光强度为

$$dI_s = 2I_0 dx\left(1 + \cos\frac{2\pi}{\lambda}\Delta\right)$$

式中 $I_0 dx$ 为宽度 dx 的元光源的强度，Δ 为元光源发出的两束相干光到达 P 点的光程差。同样对于距离 S 点为 x 的元光源，在 P 点产生的光强度为

$$dI = 2I_0 dx\left[1 + \cos\frac{2\pi}{\lambda}\Delta'\right]$$

式中 Δ' 为该元光源发出的两支相干光到达 P 点的光程差。显然 $\Delta' = \Delta + \frac{xd}{l} = \Delta + x\beta$，所以上式又可写为

$$dI = 2I_0 dx\left[1 + \cos\frac{2\pi}{\lambda}(\Delta + x\beta)\right]$$

因此，扩展光源在 P 点产生的光强度为

$$I=\int_{-b/2}^{b/2}2I_0\left[1+\cos\frac{2\pi}{\lambda}(\Delta+x\beta)\right]dx$$

$$=2I_0b+2I_0\frac{\lambda}{\pi\beta}\sin\frac{\pi b\beta}{\lambda}\cos\frac{2\pi}{\lambda}\Delta \tag{3-25}$$

式中第一项与P点的位置无关，表示干涉场的背景强度；第二项表示干涉场的光强度周期性地随Δ变化。由于第一项表示的背景强度随着光源宽度的增大而不断增强，而第二项不超过$2I_0\frac{\lambda}{\pi\beta}$，所以随着光源宽度增大，条纹的可见度下降。

由式（3-25），可得出干涉场的极大强度

$$I_M=2I_0b+\frac{2I_0\lambda}{\pi\beta}\sin\frac{\pi b\beta}{\lambda}$$

和极小强度

$$I_m=2I_0b-\frac{2I_0\lambda}{\pi\beta}\sin\frac{\pi b\beta}{\lambda}$$

因此可得到条纹的可见度

$$k=\frac{\lambda}{\pi b\beta}\sin\frac{\pi b\beta}{\lambda} \tag{3-26}$$

式子表明，随着光源宽度b的增大，可见度通过一系列极大值与极小值而趋于零(图3-14)。第一个极小值（零值）对应于$b\beta=\lambda$，这时的光源宽度即为临界宽度，$b=\frac{\lambda}{\beta}$。这一结果与前面得到的结果相同。

一般认为，光源宽度不超过临界宽度的1/4时，条纹的可见度仍是很好的，这时$K\approx0.9$。我们把这时的光源宽度称为许可宽度，它有

$$b_p=\frac{\lambda}{4\beta} \tag{3-27}$$

这个式子可用在干涉仪中计算光源大小的容许值。

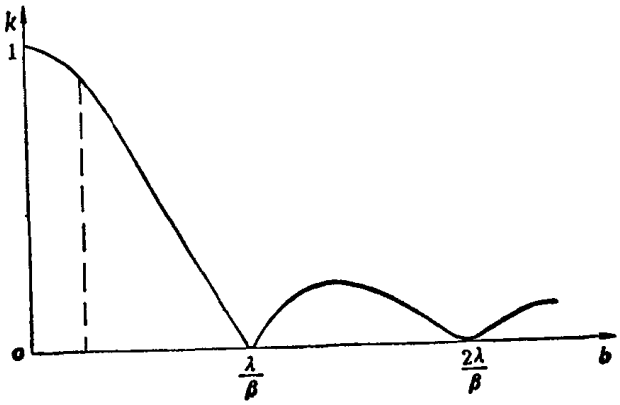


图3-14　条纹可见度随光源宽度的变化

（3）空间相干性

如图3-13所示，以S为中心的扩展光源$S'S''$照射与之相距为l且与传播方向垂直的面上相距为d的两点S_1，S_2，若通过S_1，S_2两点的光在空间再度会合时能够发生干涉，则称通过空间这两点的光具有空间相干性。显然，光的空间相干性与光源的大小紧密相关。从前面的讨论可知，当光源宽度

$$b=\frac{\lambda l}{d}\text{或}b=\frac{\lambda}{\beta}$$

时，通过S_1和S_2两点的光不发生干涉，也就是通过这两点的光没有空间相干性。我们把这时S_1和S_2之间的距离称为横向相干宽度，以d_t表示，易见

$$d_t = \frac{\lambda l}{b} \tag{3-28}$$

或以扩展光源对O点（S_1S_2连线的中点）的张角θ表示（图3-13）

$$d_t = \frac{\lambda}{\theta} \tag{3-29}$$

理论证明，若光源是圆形的，上式还必须乘上一个因子1.22，即

$$d_t = \frac{1.22\lambda}{\theta} \tag{3-30}$$

例如直径为1毫米的圆孔光源，若$\lambda = 6\times10^{-4}$毫米，在距离光源1米的地方，由上式算出的横向相干宽度约为0.7毫米。这样，小孔S_1和S_2的距离必须小于0.7毫米，S_1和S_2才能产生干涉条纹。

三、光源单色性的影响

前面已经指出，干涉实验中实际使用的所谓单色光源，并不是绝对单色的，它包含有一定的波长宽度$\Delta\lambda$。这种情况将会影响条纹的清晰度，理由很简单，因为$\Delta\lambda$范围内每一种波长的光都生成各自的一组干涉条纹，且各组条纹除零级外，相互间均有位移，所以与光源宽度的影响相仿，各组条纹重迭的结果，使条纹可见度下降。

图3-15表示了波长范围从λ到$\lambda+\Delta\lambda$的各种波长条纹的重迭情况，假定各个波长的强度相等。图下部实线表示波长$\lambda+\Delta\lambda$的条纹，虚线表示波长λ的条纹，两组条纹的相对移动量随光程差Δ的增大而增大。λ到$\lambda+\Delta\lambda$内各种波长条纹的强度总和如图中上部曲线所示，容易看出，条纹的可见度随光程差增大而下降，以致最后看不清条纹。因此，由于光源有一定的波长宽度$\Delta\lambda$，就限制了能产生清晰条纹的光程差。

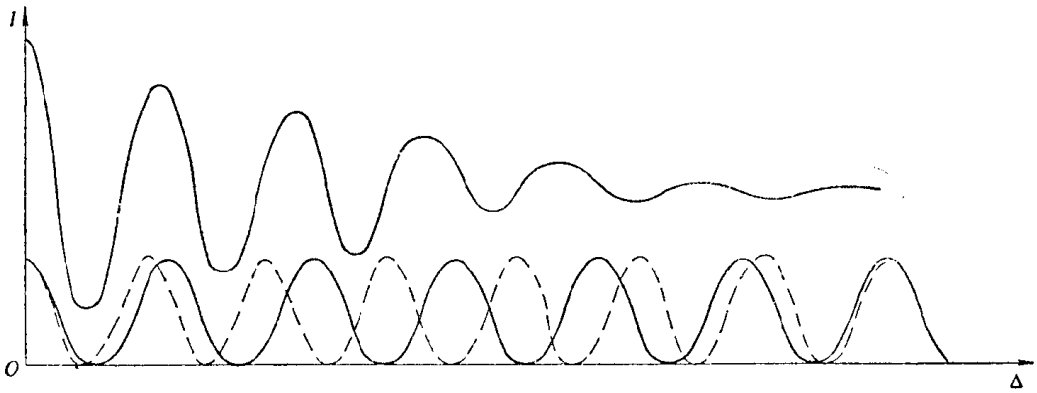


图3-15　各种波长光波生成的条纹的重迭

（1）相干长度

波长宽度为$\Delta\lambda$的光源，能够产生干涉条纹的最大光程差，称为相干长度。通过上述讨论，相干长度与$\Delta\lambda$的关系不难求出。假定在某一光程差下，波长为$\lambda+\Delta\lambda$的m级条纹和波长为λ的$m+1$级条纹重合，即两种波长条纹的相对移动量达到一个条纹，那末相邻两极大值之间便充满$\Delta\lambda$范围内其它波长的极大值，因而该处每点强度相等，条纹的可见度为零，无法再看清条纹㊀。但光程差比较小的m级以下的条纹尚能看见，因为不同波长条纹的极大值还

㊀ 这里所讨论的是$\Delta\lambda$比较小的情况，若$\Delta\lambda>100$埃，眼睛可分辨不同颜色的条纹。

没有重合。我们把此情形作为尚能观察到干涉条纹的条件，即

$$(m+1)\lambda = m(\lambda+\Delta\lambda)$$

由此得到条纹的最大干涉级

$$m = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \tag{3-31}$$

则最大光程差或相干长度

$$2L = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \tag{3-32}$$

式子表明，能够发生干涉的最大光程差或相干长度与光源的波长宽度成反比。光源的波长宽度越小，就能够在更大的光程差下观察到条纹。例如，用白光作光源时，人眼不能分辨波长相差小于100埃的两种光波的颜色，因而相干长度为0.025毫米（把白光的平均波长算作5000埃），相应的干涉级不超过$m=50$。当使用一些波长宽度很小的光谱线作光源时，如波长$\lambda=6438$埃的红镉线，$\Delta\lambda\approx0.01$埃，相干长度可达约300毫米；$\Delta\lambda\approx0.0047$埃的氪同位素86的红线（6057埃），相干长度可达700毫米。而氦氖激光器发出的激光（$\lambda=6328$埃）$\Delta\lambda<10^{-7}$埃，相干长度可达几十公里。

在§3-1里，曾经利用波列长度的概念来讨论尚能观察到干涉现象的最大光程差，得到最大光程差等于波列长度的结论。这里利用波长宽度进行讨论得到相干长度的表示式（3-32），显然它与式（2-61）表示的波列长度相同。由此可见，利用波列长度和波长宽度的概念来讨论问题是完全等效的。

（2）时间相干性

光波在一定光程差下能够发生干涉的事实表现了光波的时间相干性。如果把光通过相干长度所需时间称为相干时间Δt，那末由同一光源在相干时间Δt内不同时刻发出的光，经过不同的路程到达干涉场将能产生干涉。光的这种相干性的好坏决定于光波包含的波长宽度或频率宽度的大小，由式（3-32），得到

$$C\cdot\Delta t = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \tag{3-33}$$

式中C为光速。因为波长宽度$\Delta\lambda$和频率宽度$\Delta\nu$有如下关系：

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\nu}{\nu}$$

所以把上式代入式（3-33）得到

$$\Delta t\cdot\Delta\nu = 1 \tag{3-34}$$

式子表示$\Delta\nu$愈小，Δt愈大，光的时间相干性愈好。对比上式与式（2-62），可见相干时间等于波列的持续时间。

§3-5 平行平板产生的干涉

以上讨论的是以波阵面分割法产生的干涉，这类干涉现象由于干涉孔径有一定的大小而限制了所用光源的宽度。为了获得清晰的干涉条纹，必须采用宽度很小的光源，但这在实际

应用中往往不能满足对条纹亮度的要求㊀。实际上，在应用干涉方法进行测量时，为了增加条纹的亮度，需要采用宽度较大的光源——扩展光源。以下讨论的平板的振幅分割产生的干涉（所谓振幅分割干涉，就是利用平板的两个表面对入射光的反射，使入射光的振幅分解为两个部分，这两部分光波相遇产生的干涉），既可以应用扩展光源，又可以获得清晰的条纹。因此，这类干涉可解决前面讨论的各种波阵面分割干涉装置所发生的亮度（光源大小）和可见度的矛盾问题。由于这样的原因，这类干涉广泛应用于干涉计量技术中，很多重要的干涉仪，尽管它们的具体装置大有不同，但大都是以此类干涉为基础。

平板可理解为受两个表面限制而成的一层透明物质，最简单的情形就是玻璃平板和夹于两块玻璃板间的空气薄层。许多干涉仪还使用所谓“虚平板”(见§3-9)。平板的两个表面是平面且相互平行时，称平行平面板或平行平板。两个平面相互成一楔角时，称楔形平板。这一节先讨论前一种平板产生的干涉。

假设由点光源S发出的光照射在平行平板上（图3-16），我们来考察与S同一侧的某一点P的干涉。显然，不管P的空间位置如何，总有从S出发的两支光到达：一支光在平板的上表面反射到P，另一支光经上表面折射，下表面反射，再由上表面折射到P。这两支光是相干的，因为它们同是来自点光源S。由于P点是任意的，所以实际上把观察屏幕(干涉场)放在任何位置都会得到清晰的干涉条纹。这种条纹，与前面讨论过的干涉装置所得到的条纹一样，称为非定域条纹。但是，如果光源以S为中心扩展时，由扩展光源上各点出发的到达P点的两支相干光的光程差不同，或者说，光源上各点在P点附近产生的条纹之间有位移，所以P点附近条纹的可见度将要降低。当扩展光源的大小超过临界宽度（$b=\lambda/\beta$）时，条纹消失。不过，在平行平板的情况，却可以找到某个平面，在这个平面上的条纹，即使应用扩展光源其可见度也不降低，这个平面称为定域面，所观察到的条纹称为定域条纹。

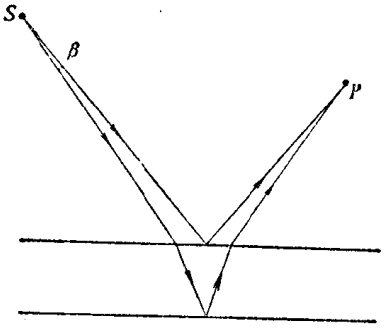


图3-16　点光源照明的平行平板

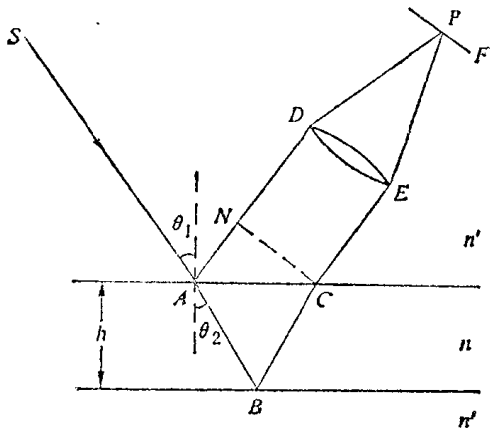


图3-17　定域在无穷远或透镜焦平面的条纹形成图示

定域面可根据关系式$b=\lambda/\beta$，令$\beta=0$来确定，因为$\beta=0$所确定的区域，光源的临界宽度为无穷大，实际扩展光源在$\beta=0$所确定的区域自然可产生清晰的干涉条纹。由图3-17可见，对于平行平板，由$\beta=0$的作图法所确定的定域面离平板无穷远（AD和CE两支光相交在无穷远），或以望远镜观察干涉条纹时，望远镜物镜的焦平面F就是定域面。AD和CE代表的两个出射光波是入射光波以振幅分割法分解出来的，所以，对于平行平板在无穷远处或在观察望远镜焦平面上产生的干涉是一种振幅分割的干涉。这类干涉比之前面讨论过的波阵面分割干涉显而易见的优点是，这类干涉使我们可以获得亮度大而又非常清晰的干涉条纹，从而为干涉计量工作提供了最为有利的条件。

㊀ 激光有亮度大、相干性好的特点，是一种例外。

下面讨论用望远镜观察时，在望远镜焦平面上形成的干涉条纹。

一、强度分布公式

从光源 S 出发的到达望远镜物镜焦平面上任一点 P 的两支光 $SADP$ 和 $SABCEP$（图 3-17），是由同一入射光 SA 分出的，并且离开平行平板时互相平行，它们的光程差是

$$\Delta = n(AB+BC) - n'AN$$

式中 n 和 n' 分别为平板折射率和周围介质的折射率，N 是从 C 点向 AD 所引的垂线的垂足。自 N 点和自 C 点到透镜焦点的光程相等。

设平行平板的厚度为 h，入射光在平板上表面的入射角和折射角分别为 θ_1 和 θ_2，由图可见

$$AB = BC = \frac{h}{\cos\theta_2}$$

$$AN = AC\sin\theta_1 = 2h\tan\theta_2\sin\theta_1$$

$$n\sin\theta_2 = n'\sin\theta_1$$

因此

$$\Delta = 2nh\cos\theta_2 \quad 或 \quad \Delta = 2h\sqrt{n^2 - n'^2\sin^2\theta_1} \tag{3-35}$$

此式还不完整，因为两支光都在平板表面反射，而平板的折射率与周围介质的折射率有别，所以必须考虑光在平板表面反射时的“半波损失”所产生的附加程差。显然当平板两边介质的折射率小于或大于平板的折射率时，从平板两表面反射的两支光中有一支光发生“半波损失”，此时需要加上附加程差 $\frac{\lambda}{2}$，因而

$$\Delta = 2nh\cos\theta_2 + \frac{\lambda}{2} \tag{3-36}$$

当平板折射率介于两边介质的折射率之间时，没有附加程差，因为这时两相干光都发生或没有发生“半波损失”。

在知道了两相干光的强度和光程差以后，就可以写出焦平面上的强度分布公式

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\frac{2\pi\Delta}{\lambda} \tag{3-37}$$

式中 I_1 和 I_2 分别为两相干光的强度。

显然，亮暗干涉条纹取决于下列条件：

$$\left.\begin{array}{l}\Delta = m\lambda \text{ 时为亮条纹} \\ \Delta = (2m+1)\dfrac{\lambda}{2} \text{ 时为暗条纹}\end{array}\right\} m = 1、2、3\cdots \tag{3-38}$$

如果设想平板是绝对均匀的，折射率 n 和厚度 h 均为常数，则光程差只决定于入射光在平板上的入射角 θ_1（或折射角 θ_2）。因此，在平板上，具有相同入射角的光经平板两表面反射形成的反射光在其相遇点有相同的光程差，也就是说，凡入射角相同的光就形成同一干涉条纹，由于这样的原因，通常把这种干涉条纹称为等倾条纹。

因为等倾条纹与光源 S 的位置无关，而只与光的入射角有关，所以在采用扩展光源照明时，条纹的可见度不会降低，条纹如同点光源所获得的条纹一样的清晰，而且亮度很大。这一结论只在特定的观察平面——望远镜物镜的焦平面上是正确的，所以条纹是定域的，定域

在无穷远。

二、等倾圆环条纹的角半径和间距

等倾条纹的形状与观察望远镜的方位有关，当望远镜物镜的轴与平板垂直时，条纹是一组同心圆环，其中心对应 $\theta_1=\theta_2=0$ 的光线。观察等倾圆环条纹的一个简便方法如图 3-18 所示，图中M是玻璃片，它把来自扩展光源的光反射向平板G，并让从平板反射回来的一部分光透过，再射到望远镜物镜L上，物镜L把光束会聚于它的焦平面F。在焦平面上，可看到一组等倾圆环条纹，每一圆环与光源各点发出的相同入射角（在不同入射面）的光相对应。

由图 3-18 容易看出，光源大小对等倾条纹的可见度没有影响。事实上，光源上每一点，如S_1，S_2，S_3，都给出自己一组等倾圆环，并且彼此准确重合，没有位移。例如，光源上S_1、S_2、S_3各点发出的平行光 1、2、3 经玻璃片M反射后垂直地投射到平板G上，反射后通过玻璃片M和物镜L会聚于物镜焦平面上的P_0点，P_0因而是焦平面上形成的等倾圆环条纹的中心。平行光 1′，2′和2″，3″通过系统后分别会聚于焦平面上的P'和P''。由此可见，等倾条纹的位置只与形成条纹的光束入射角有关，而与光源的位置无关。因而光源的扩大，只会增加干涉条纹的强度，而并不会影响条纹的可见度。

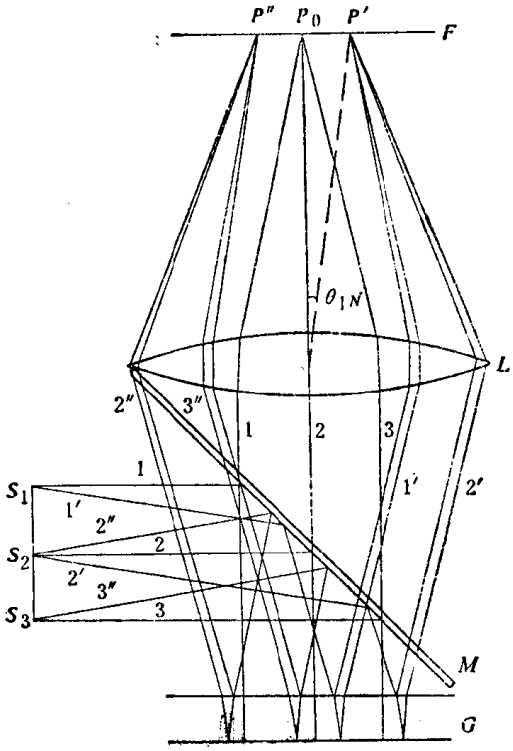


图3-18 观察等倾圆环的方法

从式（3-36）可见，愈接近等倾条纹中心，角θ_2愈小，但光程差愈大，干涉级也愈高。设中心点的干涉级数为m_0，由式（3-36）得到

$$2nh\pm\frac{\lambda}{2}=m_0\lambda \tag{3-39}$$

m_0不一定是整数（即中心未必是最亮点），可以写成

$$m_0=m_1+f \tag{3-40}$$

式中m_1是最靠近中心的亮条纹整数级数，而f是小于 1 的分数。由中心向外计算，第N个亮环的干涉级数显然是$[m_1-(N-1)]$，该亮环的角半径θ_{1N}（对透镜中心的张角乘以焦距即为亮环的半径，见图 3-18）可由下式求出

$$2h\sqrt{n^2-n'^2\sin^2\theta_{1N}}\pm\frac{\lambda}{2}=[m_1-(N-1)]\lambda \tag{3-41}$$

或由式

$$2nh\cos\theta_{2N}\pm\frac{\lambda}{2}=[m_1-(N-1)]\lambda \tag{3-42}$$

求出，θ_{2N}是与θ_{1N}相应的折射角，它和θ_{1N}由折射定律$n'\sin\theta_{1N}=n\sin\theta_{2N}$联系。

将式（3-39）减式（3-42），有

$$2nh(1-\cos\theta_{2N})=(N-1+f)\lambda$$

一般情况下，θ_{1N} 和 θ_{2N} 都很小，$n\approx n'\theta_{1N}/\theta_{2N}$，而 $1-\cos\theta_{2N}\approx\theta_{2N}^2/2\approx n'^2\theta_{1N}^2/2n^2$，因而由上式得到

$$\theta_{1N}\approx\frac{1}{n'}\sqrt{\frac{n\lambda}{h}}\sqrt{N-1+f} \tag{3-43}$$

式子表明，条纹的半径与$\sqrt{\frac{1}{h}}$成比例，在较厚的平板上产生的圆环比在较薄的平板上产生的圆环，半径要小一些（同是第N个圆环比较）。根据这个关系，可利用等倾圆环条纹来检验平板的质量。检验时，可直接用眼睛观察，眼睛调节在无穷远。检验装置仍如图3-18所示，物镜L相当于眼睛的透明水晶体。由于眼睛水晶体的线度很小（3～5毫米），因此只能看到平板一小部分所产生的干涉圆环。当平板移动时（或眼睛移动时），平板的另一部分发生作用，如果平板是理想的平行平板，则各处的厚度相同，因而在平板移动时各环的大小保持不变。如果平板不是理想的平行平板，则当平板移往较薄的部分时，干涉圆环变大，移往较厚的部分时，干涉圆环变小，这即达到检验平板光学厚度均匀性的目的。若采用单色性很好的光源，我们可以研究厚度很大的平板。

根据光程差公式（3-36），也可求出等倾条纹的角间距 $\Delta\theta_1$（相邻两条纹对透镜中心的张角），将式（3-36）左边对 θ_2，右边对m求微分得到

$$-2nh\sin\theta_2 d\theta_2=\lambda dm$$

取 $dm=1$，$d\theta_2=\Delta\theta_2$，有

$$\Delta\theta_2=-\frac{\lambda}{2nh\sin\theta_2} \tag{3-44}$$

这里负号仅表示随 θ 角增大，$\Delta\theta$ 单调减少，故可以仅考虑其绝对值。根据折射定律 $n'\sin\theta_1=n\sin\theta_2$，取微分 $n'\cos\theta_1\Delta\theta_1=n\cos\theta_2\Delta\theta_2$，当 θ_1 和 θ_2 很小时，$\cos\theta_1\approx\cos\theta_2\approx1$，$\Delta\theta_2\approx n'\Delta\theta_1/n$。因此，得到条纹的角间距

$$\Delta\theta_1\approx\frac{n\lambda}{2n'^2\theta_1 h} \tag{3-45}$$

$\Delta\theta_1$ 与 θ_1 成反比，可见靠近中心的条纹较疏，离中心愈远条纹愈密。此外，平板愈厚条纹也愈密。

三、透射光的等倾条纹

上述讨论只考虑了反射光的干涉，但是同样的讨论也可以应用到透射光的情况。这时由光源S到达望远镜焦平面P点的两支光，一支是直接从平板两表面透过的光，另一支是经过两次内反射后透过的光（图3-19），这两支光的光程差易见是

$$\Delta=2nh\cos\theta_2 \tag{3-46}$$

这里没有反射时位相变化而引起的附加程差，因为在平板两表面的内反射是在相同的条件下发生的。对于透射光干涉的情况，如采用扩展光源照明，同样会得到定域在望远镜焦平面上的等倾条纹。比较公式（3-46）和（3-36），可以知道，对于同一入射角的光来说，

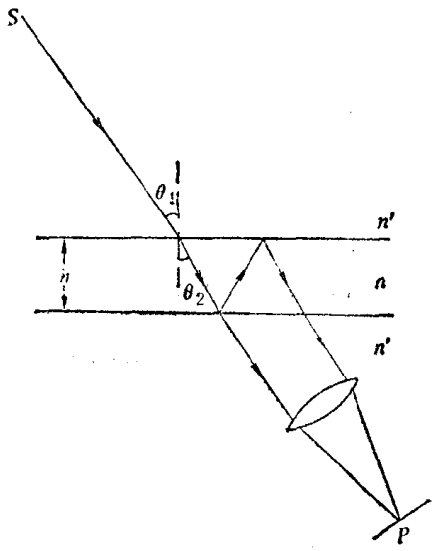


图3-19 透射光等倾条纹的形成

两支透射光的光程差和两支反射光的光程差恰好相差 $\lambda/2$，因此当对应某一入射角的透射光条纹是亮纹时，反射光条纹便是暗纹，反之亦然。所以，透射光的等倾条纹和反射光的等倾条纹是互补的。但是，如果平板表面的反射率很低时，例如对于空气-玻璃分界面，接近正入射时的反射率约为 0.04，这时产生干涉的两支透射光的强度相差很大（图 3-20 c），因而透射光等倾条纹的可见度很差。条纹的强度分布如图 3-20 d 所示。为了便于比较起见，以图 3-20 a，b 分别表示两支反射光的强度差和所生条纹的强度分布。由于两支反射光的强度相差较小，所以反射光条纹的可见度比透射光条纹好得多。因此，在平板表面反射率很低的情况下，常常利用的是平板的反射光条纹，而不是透射光条纹。

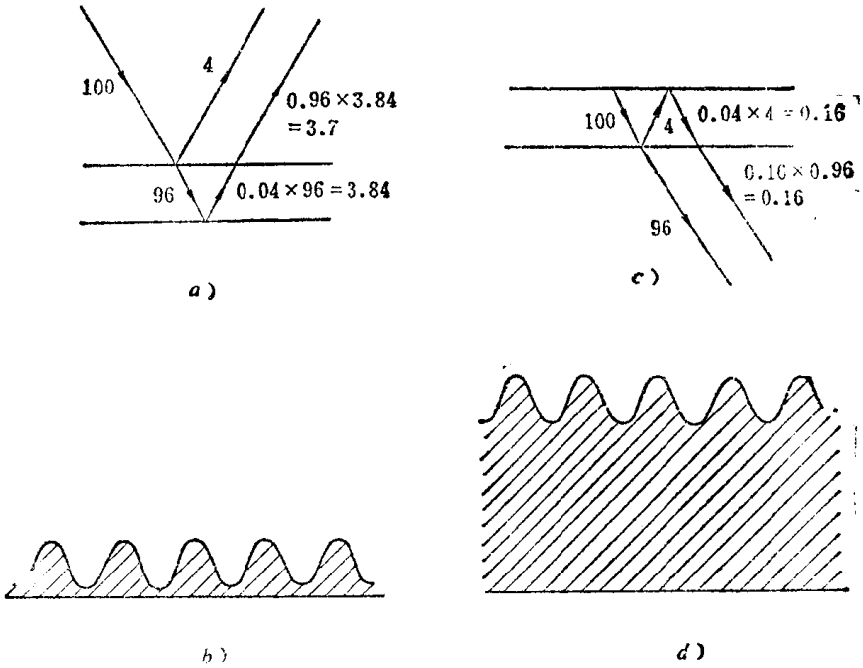


图3-20　平板干涉的反射光条纹和透射光条纹比较

§3-6　楔形平板产生的干涉

设有一楔形平板，由一个点光源 S 来照明（图 3-21）。这时，对于平板外的任一点 P 都有两支发自光源 S 并经平板两表面反射的相干光到达，所以空间任何平面上都可形成干涉条纹，它们是光程差为常数的各点的轨迹，这种条纹是非定域的。

但是，如果光源是一个以 S 为中心的扩展光源时，由于光源上每一点都产生自己的一组非定域条纹，并且各组条纹相互间有位移，所以干涉条纹不再能够在任何平面上看到，而只能在定域面及其附近看到。这就是说采用扩展光源后，条纹是定域的。

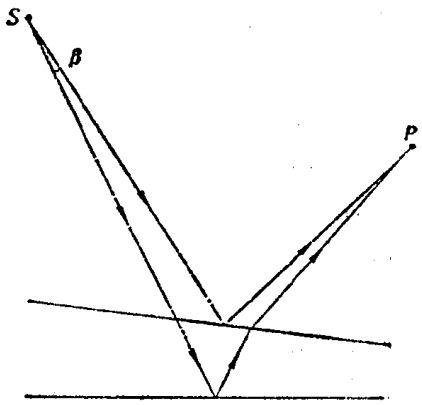


图3-21　点光源照明的楔形平板

一、定域面的位置及定域深度

楔形平板干涉定域面的位置，同样可以根据关系式 $b=\lambda/\beta$ 由 $\beta=0$ 的作图法确定。如图 3-22 a 所

示，入射光 SA_1 和 SA_2 由平板两表面反射形成的两对反射光分别相交于 P_1 和 P_2 点，利用同样的作图法，还可以得到对应于不同入射光的交点 P_3，P_4，P_5……等（图中未画出），这些点的轨迹一般来说是一个空间曲面，这就是所讨论的平板的干涉定域面。由图可见，当光源与楔形平板的棱边各在一方时，定域面在楔形平板的上方；而当光源与楔形平板在同一方时，定域面在楔形平板的下方（图 3-22 b）。楔形平板两表面的楔角愈小，定域面离平板愈远，平板成为平行平板时，定域面过渡到无穷远。在楔形平板两表面的楔角不是太小或在厚度不规则变化的薄膜的情况下，如果厚度足够小，定域面实际上很接近楔形平板和薄膜的表面。因此，观察薄板产生的定域干涉条纹，通常把眼睛、放大镜或显微镜调节在薄板的表面。如用照相机拍摄条纹时，要将物镜对薄板表面调焦，使之成象于底片平面。日常生活中，我们注视水面上的油膜或肥皂泡等薄膜的表面时，看到薄膜在日光照射下显现出五彩缤纷的色彩，就是多色光在薄膜表面形成的彩色条纹。

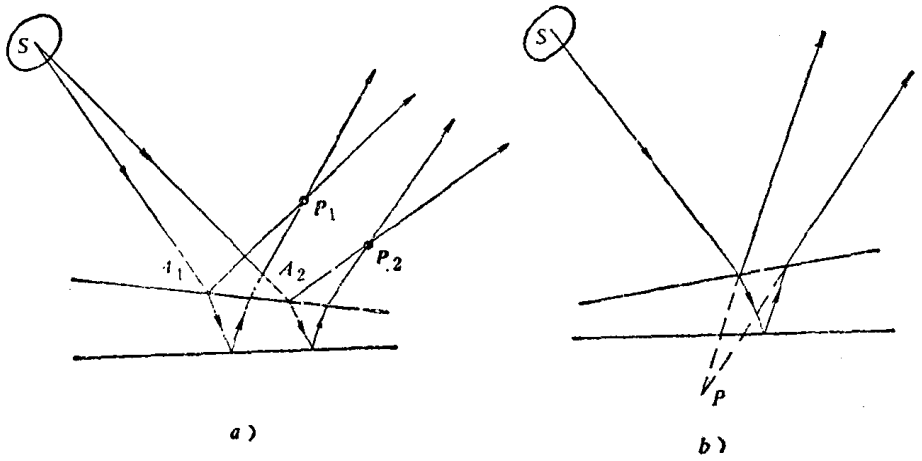


图3-22　采用扩展光源时楔形平板所生条纹的定域

应该指出，实际应用中采用的扩展光源，只要有相当的宽度（一般的为几厘米）便可满足对所生条纹的亮度要求。当光源宽度为几厘米时，根据关系式 $b=\lambda/\beta$，$\beta\leqslant 1''$ 所确定的区域还是可以看到条纹的（设单色光波长 $\lambda=5\times10^{-5}$ 厘米），因此，干涉条纹不是仅发生在 $\beta=0$ 所确定的定域面上，在定域面附近的区域内也能看到条纹，只是条纹的可见度有所下降。所以我们说干涉定域具有一定的深度。显然，光源愈大、干涉定域的深度愈小；反之，光源愈小，干涉定域的深度愈大，光源为点光源时，干涉变为非定域的。另一方面，干涉孔径 β 也影响定域的深度，对于非常薄的平板，β 实际上很小，因而干涉定域的深度很大，干涉定域的深度延伸到薄板的表面，所以当我们把眼睛和观察仪器调节在薄板表面时，能够看到清晰的干涉条纹。

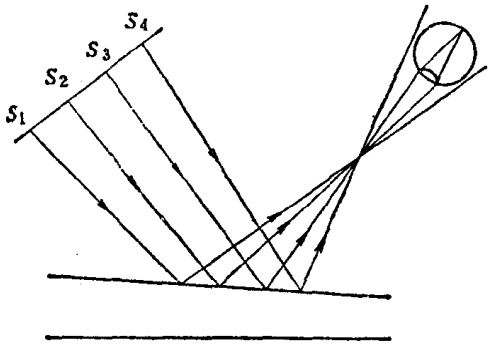


图3-23　眼睛瞳孔对光束的限制

通常用眼睛直接观察比通过物镜成象进行观察，将更容易找到干涉条纹。这一方面是由于人眼能自动调节，使最清晰的干涉条纹成象在网膜

上；另一方面，是因为眼的瞳孔比透镜的孔径小许多，它限制了进入瞳孔的光束。如图3-23所示(图中只画出在平板上表面的反射光束)，扩展光源 S_1S_4 只有其中一部分 S_2S_3 发出的光经平板表面反射进入瞳孔，也就是说用眼睛直接观察时，扩展光源的实际宽度要小一些，结果是干涉定域的深度增大，所以用眼睛直接观察就更便于找到干涉条纹。

二、楔形平板所生的等厚干涉条纹

现在讨论扩展光源照射楔形平板时在定域面上产生的干涉。设光源中心点 S_0 发出的一支入射光经平板两表面反射后分离出的两支光相交于定域面上某一点 P（图3-24），两支光在 P 点的干涉效应由两支光的光程差

$$\Delta = n(AB+BC) - n'(AP-CP)$$

决定。式中 n 是楔形平板的折射率，n' 是周围介质的折射率。光程差 Δ 的精确值一般是很难计算的，但在实用的干涉系统中，板的厚度一般都很小，并且楔角不大，因此可以近似地以平行平板的计算公式来代替，即

$$\Delta = 2nh\cos\theta_2 \qquad (3\text{-}47)$$

式中 h 是楔形平板在 B 点的厚度，θ_2 是入射光在 A 点的折射角。考虑到光束在上表面或下表面反射时半波损失所生的附加程差，上式改写为

$$\Delta = 2nh\cos\theta_2 + \frac{\lambda}{2} \qquad (3\text{-}48)$$

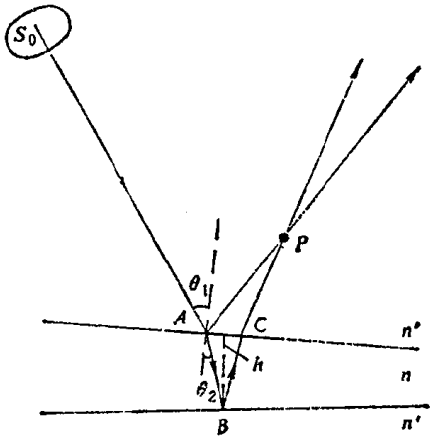


图3-24　楔形平板在定域面某一点 P 产生的干涉

如果所研究的楔形平板的折射率是均匀的，且光束的入射角为常数，譬如光源距平板较远或观察干涉条纹用的仪器（眼睛或显微镜）的孔径很小，以致在整个视场内光束的入射角可视为常数，则由式（3-48）可知，两支反射光在相遇点的光程差只依赖于反射光反射处平板的厚度 h，因此干涉条纹是平板上厚度相同点的轨迹，这种条纹称为等厚条纹㊀。

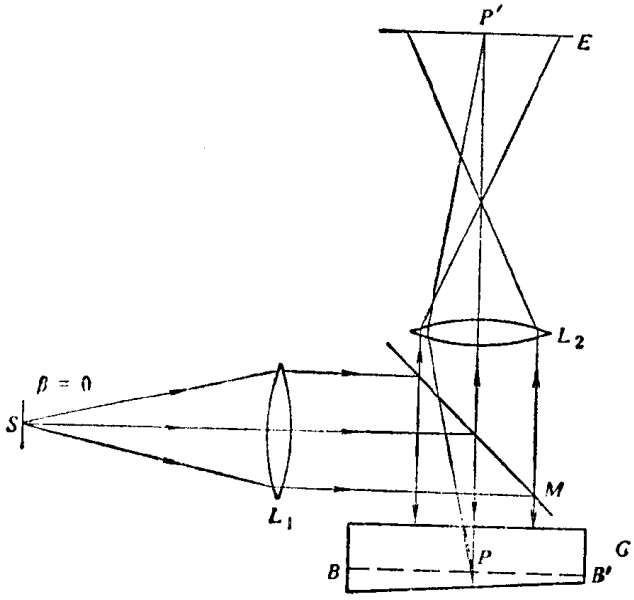


图3-25　观察楔形板等厚条纹的一种实用系统

利用图3-25所示的系统，可以研究厚度较大的楔形平板所生的等厚条纹。图中 S 是扩展面光源，它位于准直透镜 L_1 的前焦面上，S 发出的光束经透镜 L_1 准直后射向玻璃片 M，再从玻璃片反射垂直投射到楔形平板 G 上㊁（为确定起见，设垂直于上表面）。

入射光束在楔形平板上表面的反射光由原路回头，在楔形平板下表面的反射光如图中所示，两束反射光通过玻璃

㊀ 若平板的折射率不均匀，等厚条纹是平板上光学厚度 nh 相同点的轨迹。

㊁ 实际上只有在光轴上的光源中心点发出的光束垂直投射到平板 P 上，光源上其它点发出的光束是斜入射。

片后射向观察显微镜 L_2。根据确定定域面的作图法，显然这时定位面在楔形平板内部（BB'）。当平板不是太厚，且平板两表面的楔角不是太大时，定位面非常接近平板的下表面，这样如调节显微镜 L_2 对准平板的下表面，即在显微镜象平面 E 上观察到楔形平板所生的等厚干涉条纹。

考察定域面上某一点 P，因为 P 点由 $\beta=0$ 的作图法决定，且当 $\beta=0$ 时，光源的临界宽度 b 为无穷，所以从扩展光源上各点发出而在 P 点相交的两支光的光程差之差是微不足道的㊀，可以认为是等光程差的。因此，扩展光源在 P 点产生的干涉效应，可由光源中心点在 P 点的光程差

$$\Delta=2nh+\frac{\lambda}{2} \tag{3-49}$$

决定。当光程差 Δ 满足条件

$$\Delta=2nh+\frac{\lambda}{2}=m\lambda \quad m=0、1、2、\cdots \tag{3-50}$$

时，P 点是强度极大点（其共轭点 P' 也如此），而当光程差 Δ 满足条件

$$\Delta=2nh+\frac{\lambda}{2}=(2m+1)\frac{\lambda}{2} \quad m=0、1、2\cdots \tag{3-51}$$

时，P 点是强度极小点。对于楔形平板，厚度相同点的轨迹是一些平行于楔棱的等距直线，所以，楔形平板所生的等厚条纹就是一些平行于楔棱的等距条纹，如图 3-26 a 所示。亮暗条纹的条件分别为式（3-50）和（3-51）。

利用图 3-25 所示的系统，不仅可以研究楔形平板的等厚条纹，也可以研究其它形状平板的等厚条纹。易见，在有柱形表面的平板上（图 3-26 b），可得到平行于柱线的直线条纹；在有球形表面的平板上（图 3-26 c），可得到同心圆环条纹。对于具有任意形表面的平板（图 3-26 d），得到和地图上的等高线相似的干涉图样。不管是哪一种情况，相邻两亮条纹或两暗条纹对应的光程差相差 λ，所以从一个条纹过渡到另一条纹，平板的厚度改变 $\frac{\lambda}{2n}$。

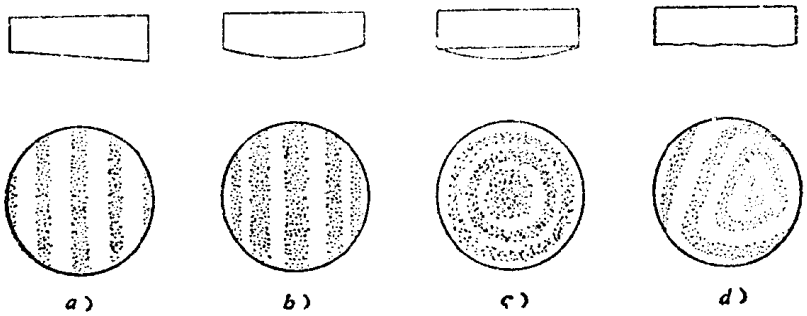


图3-26　各种形状平板的等厚条纹

参看图 3-27，容易得到楔形平板的相邻两亮条纹或暗条纹之间的距离，即条纹间距

$$e=\frac{\lambda}{2n\alpha} \tag{3-52}$$

㊀ 精确计算表明（参考M. 玻恩，E. 沃耳夫光学原理，上册，第389页），对于光源上不同的点，在 P 点产生的光程差还是有微小变化的。因此，为了在定域面上得到清晰的干涉条纹，必须对光源的大小加以限制。光源的许可角半径 $\varepsilon\approx\frac{1}{2n'}\sqrt{\frac{n\lambda}{h}}$。

式中 α 为楔形平板两表面间的楔角，这里假设 α 很小。对于两玻璃平板夹成的空气楔层，$n=1$，故

$$e=\frac{\lambda}{2\alpha} \tag{3-53}$$

式子表明，条纹的间距与楔角 α 成反比。这一结论也适用于其他形状表面的平板的等厚条纹。如上述的柱形和球形表面的平板，其条纹由中心向外逐渐变密，这是因为柱形和球形表面的平板由中心向外倾角 α 增大的缘故。

由式（3-53）可以看出，条纹的间距与入射光波长有关，波长较长的光所成的条纹其间距较大，波长短的光所生的条纹间距小。因此，使用白光光源时，除光程差等于零的零级条纹为白色外，零级附近的条纹将带有颜色，颜色的变化次序如表 3-1 所示。当空气层厚度更大些时，由于各种波长条纹重迭严重，最后又成为白色。根据白光条纹的两个特点：第一，在零程差处为白色；第二，条纹的颜色标志着一定程差的大小，可以利用这种条纹来确定零程差的位置，或者按颜色来估计程差的大小。

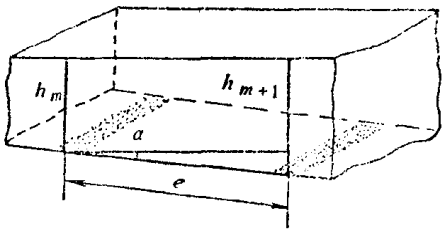


图3-27　计算楔形平板条纹间距用图

表3-1　白光垂直入射时空气层的干涉色

空气层厚度(毫米)	颜色	
0.000114	淡黄	第一级
0.000148	草黄	
0.000168	棕黄	
0.000245	红	
0.000257	绛	第二级
0.000276	紫	
0.000360	天蓝	
0.000432	黄	
0.000492	红	
0.000520	紫	第三级
0.000552	绛紫	
0.000602	蓝绿	
0.000666	绿	
0.000712	浑黄	
0.000828	白紫	第四级
0.000994	灰紫	

注：整个颜色系统是这样划分等级的：由一级过渡到另一级，空气层厚度改变约0.25微米，即光程差约改变0.5微米。

三、等厚条纹的应用

因为等厚条纹能够反映两个表面所夹成的薄层的厚度变化情况，所以在精密测量和光学元件加工中，常利用等厚条纹的条纹形状、条纹数目、条纹移动以及条纹间距等特征，检验元件的表面质量，局部误差（表面光洁度），测量微小的角度、长度及其变化等。这里，仅举测量薄片的厚度为例，其他应用在后面几节里介绍。如图 3-28 所示，两块平行平板 G_1 和 G_2 之间，一端完全贴合，另一端垫以厚度为 h 的薄片 F，因而在两块平行平板之间形成一楔形空气薄层，薄层一端的厚度为零，另一端的厚度为 h。将这一装置置于图 3-25 所示的系统中代替平板 G，调节观察显微镜对准平行平板之间的楔形空气层，将可看到空气层所生的直线等距条纹。若已知单色光波长为 λ，测量出楔形空气层的长度为 D，所生条纹的间距为 e，则空气层的最大厚度，也即薄片厚度 h 可由下式计算

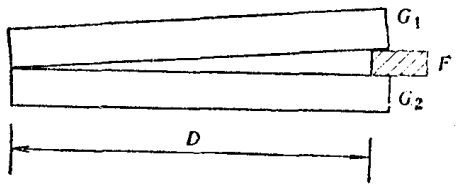


图3-28　两平行平板之间一端垫以薄片形成的楔形空气层

$$h=\frac{D}{e}\cdot\frac{\lambda}{2} \tag{3-54}$$

上述这种简便的测量方法，在一些机械工厂里用来检验作为长度标准的端规。端规是一个上下两面经过抛光的平行平面钢块，它的长度由此两面确定。如图 3-29 所示，D_1 是待检规，D_2 是同一标定长度的标准规，检验时将两规紧贴在一钢质平台上，并将一块透明玻璃板 G 放在两规之上。一般在玻璃板与各规之间形成楔形空气层，在单色光垂直照明下产生条纹。两规长度之差可以根据它们的距离和条纹间距由式（3-54）算出㊀。

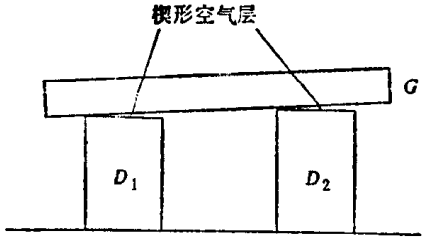


图3-29 端规的干涉量度比较

§3-7 用牛顿环测量透镜的曲率半径

另一个应用等厚条纹进行测量的例子，是利用牛顿环条纹测量透镜的曲率半径。在一块平面玻璃上，放置一曲率半径 R 很大的平凸透镜（图 3-30），在透镜的凸表面和玻璃板的平面之间便形成一厚度由零逐渐增大的空气薄层。当以单色光垂直照明时，在空气层上形成一组以接触点 O 为中心的中央疏边缘密的圆环条纹，称为牛顿环。用读数显微镜测量出牛顿环的半径，便可以计算透镜的曲率半径。这种方法比常用的机械方法——利用球径仪测量要优越。

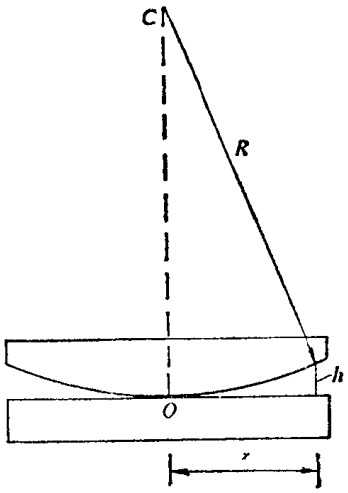


图3-30 牛顿环的形成

下面导出牛顿环半径与平凸透镜曲率半径之间的关系。设测量出由中心向外计算第 m 个暗环的半径为 r，由图 3-30 可见

$$r^2 = R^2 - (R - h)^2 = 2Rh - h^2$$

式中 R 是透镜凸表面的曲率半径 CO，h 是该暗环对应的空气层厚度。由于 R 较 h 大得多，上式中可略去 h^2 项，因此

$$h = \frac{r^2}{2R} \tag{3-55}$$

将此式代入第 m 个暗环满足的光程差公式

$$2h + \frac{\lambda}{2} = (2m + 1)\frac{\lambda}{2} \tag{3-56 a}$$

或

$$h = m\frac{\lambda}{2} \tag{3-56 b}$$

得到

$$R = \frac{r^2}{m\lambda} \tag{3-57}$$

因此，若以读数显微镜准确测量出第 m 个暗环的半径 r，已知所用单色光波长 λ，即可由上式计算出透镜的曲率半径 R。

㊀ 在§1-9里已指出，光在金属表面上的反射相变不为 π，但这并不影响条纹间距。

牛顿环的中心，即在透镜凸表面和玻璃板的接触点上，因为 $h=0$，两反射光的光程差 $\Delta=\frac{\lambda}{2}$，所以牛顿环中心是一暗点。显然在透射光方向也可以看到一组定域在空气层上的圆环干涉条纹，这些条纹的明暗情形与反射光的明暗条纹恰好相反，透射光圆环条纹的中心是一个亮点。

上述测量中，实际上忽略了平凸透镜置于玻璃上引起的接触点附近的变形，如考虑到这种影响时，接触点附近圆环的半径与式（3-57）不符。这时，可通过测量离中心较远的两个圆环的半径，来计算透镜的曲率半径。设第 m_1 个暗环的半径为 r_1，第 m_2 个暗环的半径为 r_2，则根据式（3-57）

$$r_1^2=m_1R\lambda$$

$$r_2^2=m_2R\lambda$$

$$r_2^2-r_1^2=(m_2-m_1)R\lambda$$

得到

$$R=\frac{r_2^2-r_1^2}{(m_2-m_1)\lambda} \tag{3-58}$$

式中圆环的序数 m_1 和 m_2 可不知道，只需知道其差值即可求得透镜的曲率半径 R。

在光学车间里，通常是利用球径仪测出透镜的矢高 h，再按关系式（3-55）计算透镜的曲率半径，这时 r 是透镜口径之半。在球径仪上测量透镜的误差约为±1微米，这样的误差在大多数场合都是允许的，但当透镜的焦距很大，例如10米左右时，曲率半径 R 很大而矢高 h 很小，这时测量曲率半径的相对误差 $\frac{\Delta R}{R}=\frac{\Delta h}{h}$ 就非常大了。利用牛顿环的方法测量透镜曲率半径的误差取决于以读数显微镜对准干涉条纹的对准误差，一般对准误差约为条纹间距的 $\frac{1}{10}$，即 $\Delta m=0.1$，由式（3-56 b）可知，与此对应的矢高误差为（设单色光波长 $\lambda=0.6$ 微米）

$$\Delta h=\frac{\lambda}{2}\Delta m=0.3\times0.1=0.03\text{ 微米}$$

可见，当透镜曲率半径很大时，牛顿环方法比球径仪方法测得的曲率半径要准确得多。

当透镜的曲率半径很大时，透镜凸表面和玻璃板平面之间空气层的厚度很小，因而采用白光光源时可以看到彩色的牛顿环条纹。在圆环中心处，对所有波长来说，光程差都等于 $\lambda/2$，所以在白光下中央斑点是黑的。从中心向外，一般能看到三、四个彩色圆环，它们的颜色次序一定，如表3-1所示，再往外，随着空气层厚度的增大，彩色条纹消失，看到的是均匀的白色照明。

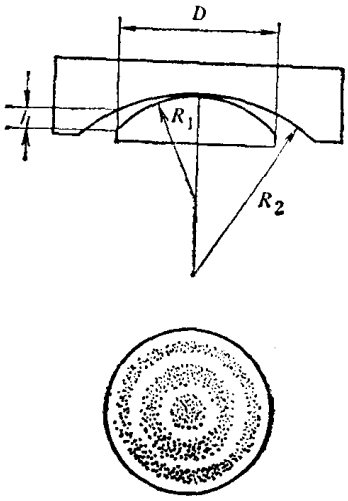


图3-31 曲率差与光圈数的关系

牛顿环条纹除了被用来测量透镜的曲率半径外，在光学车间里，还广泛的利用来检验光学元件的表面质量。常用的玻璃样板检验光学元件表面质量的方法，就是利用与牛顿环相类似的干涉条纹，这种条纹形成在样板表面和待检元件表面之间的空气层上，通常称为“光圈”。根据光圈的形状、数目以及用手加压后条纹的移动，就可检验出元件的偏差。例如当被检元件表

面与样板有完全相同的形状时，两表面准确地贴合，因而条纹消失，在白光下整个表面呈均匀照明。如果条纹是一些完整的同心圆环（图 3-31），则表示元件没有局部误差；光圈数的多少，表征样板和元件表面曲率半径的偏差大小。设元件表面的曲率半径为 R_1，样板的曲率半径为 R_2，两者曲率之差为$\Delta c=\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}$。根据图 3-31 的几何关系有

$$h=\frac{D^2}{8}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{D^2}{8}\Delta c$$

式中 h 为两表面所夹空气层的最大厚度，D为元件的直径。如直径D内包含N个光圈，根据式（3-56 b）

$$h=N\frac{\lambda}{2}$$

所以

$$N=\frac{D^2}{4\lambda}\Delta c \tag{3-59}$$

在光学设计中，就是根据此式换算光圈数与曲率差之间的关系。

§3-8 平面干涉仪

平面干涉仪是利用两个平面（一个标准平面和一个被检平面）之间的楔形空气层产生的等厚干涉条纹检验平面元件的仪器。如图 3-32 所示，单色光源 S（实际上是一个被光源照亮的小孔光阑）位于准直透镜 L 的焦点上，光源发出的光束透过玻璃片M被透镜 L 准直，垂直投射到标准平板 G_1 和被测平板 G_2 上。标准平板通常做成有很小的楔角，目的是使上表面和下表面的反射光束分开一定角度，使上表面的反射光束移出视场之外。从标准平板下表面和被测平板上表面反射的光（图上仅画出从上表面反射的光）经透镜 L 和玻璃片M反射后会聚于透镜 L 焦面的O处，反射光形成的干涉条纹定域于标准平板和被测平板之间的空气层表面，将眼睛或照相机置于O处，而且调节到空气层表面，就可以看到或拍摄到整个表面上的干涉条纹。被测平板和标准平板之间的楔角大小与方向，可以通过它所在的调节盘进行调节，因而条纹的间距和方向可以随之变化。

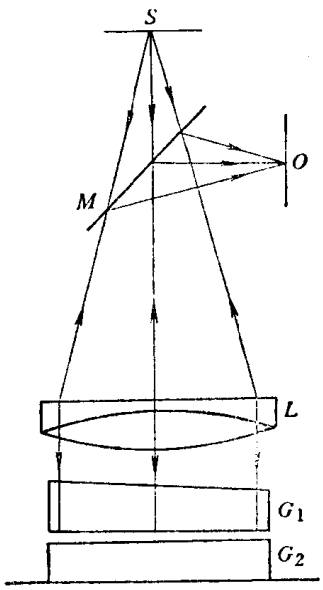


图3-32 平面干涉仪

平面干涉仪现在普遍采用激光作为单色光源，使干涉条纹亮度大，清晰度好，从而提高测量精确度和增大测量范围。

下面介绍平面干涉仪的几种主要用途。

一、测定平板表面的平面度及局部误差

如果被测平板表面是理想平面，那末标准平板和被测平板之间的楔形空气层形成的等厚干涉条纹是一组互相平行的等距直线。条纹的弯曲表明被测平板表面不平，弯曲程度越大，表面的平面度偏差越大。设在整个表面上观察到的条纹如图 3-33 a 所示，条纹弯曲的矢高为H，条纹间距为 e，则被测平板的平面度N以H与 e 之比表示：

$$N = \frac{H}{e} \tag{3-60}$$

对应的平面偏差，即凹陷或凸起的厚度⊖

$$h = \frac{H}{e} \cdot \frac{\lambda}{2} \tag{3-61}$$

在有局部缺陷的情况（图 3-33 b），局部误差 ΔN 以下式计算：

$$\Delta N = \frac{H}{e} \tag{3-62}$$

通常估测条纹弯曲程度所能达到的精确度约为1/10条纹，所以平面干涉仪测定平面缺陷的精确度为1/20波长，约0.03微米。一般光学平面要求平面偏差≤λ/4，即条纹弯曲不超过条纹间距的1/2（$N \leqslant 1/2$），这类平面极为容易由平面干涉仪作简单的目视检定。比较高级的光学平面，如上述的“标准平面”和后面将要叙述的迈克耳孙干涉仪及法布里-珀罗干涉仪上用的平面镜，其平面偏差不超过1/20波长。对于这一类平面，可以利用平面干涉仪作出精确的定量测定。

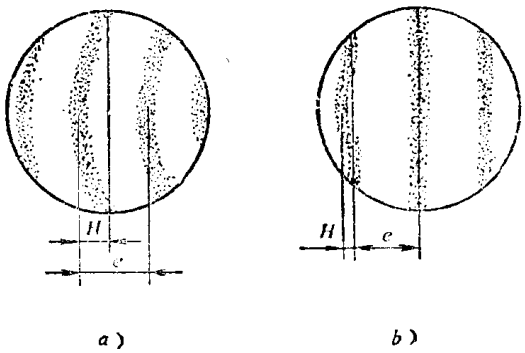


图3-33 平面偏差及局部缺陷引起的条纹弯曲

二、测量平行平板的平行度及小角度光楔的楔角

平面干涉仪还可以测量平行平板的平行度，为此，应调节仪器使标准平面上的反射光移出视场之外，同时在视场中观察到平行平板上下两表面产生的等厚干涉条纹。条纹的形状和间距与三个因素有关：1）平板上下表面的加工质量；2）两表面的几何平行度；3）玻璃的光学均匀性。严格说来，所测量的平行度是光学平行度。在平板不太厚时，玻璃的不均匀性影响很小，所以测出的平行度可看作是几何平行度。

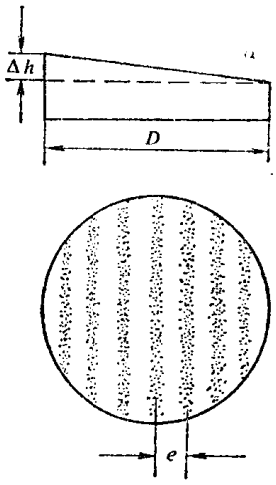


图3-34 平行平板的平行性误差及所生条纹

平行平板的平行度用最大厚度差Δh表示(图 3-34)，如在直径为D的平行平板上观察到条纹的数目为N，则最大厚度差为

$$\Delta h = \frac{N\lambda}{2n}$$

式中 n 是平板的折射率。因为$N = D/e$，所以

$$\Delta h = \frac{\lambda}{2n} \frac{D}{e} \tag{3-63}$$

因此，只要测出干涉条纹的间距 e，即可由上式算出在直径D内的最大厚度差。平板上下两表面的楔角 α，易见有

$$\alpha = \frac{\Delta h}{D} = \frac{\lambda}{2ne} \tag{3-64}$$

⊖ 平面偏差是凹陷或凸起，要根据标准平面和被测平面的相对取向及条纹弯曲的方向判断，若条纹向两平面间厚度小一侧弯曲，被测平面凹陷，反之凸起。

测量小角度光楔的楔角时，可用上式计算。

三、测量透镜的曲率半径

当透镜具有很大的曲率半径，如几十米时，很难利用球径仪进行测量，这时可采用平面干涉仪目测或拍摄照片放大后进行测量，其原理类似于牛顿环测量，这里不再重复。

§3-9 迈克耳逊干涉仪

迈克耳逊干涉仪是1881年迈克耳逊为了研究“以太”是否存在而设计的。仪器的结构简图如图3-35所示，G_1和G_2是两块折射率和厚度都相同的平行平面玻璃板，分别称为分光板和补偿板。它们彼此互相平行，G_1的背面有镀银或镀铝的半反射面A。M_1和M_2是两块平面反射镜，与G_1和G_2约成45°角。从扩展光源S来的光，在G_1的半反射面A上反射和透射分为强度相等的两束光（1）和（2）。光束（1）射向M_1，在M_1反射后折回再透过A进入观察系统L（人眼或其他观察仪器）；光束（2）通过G_2并经M_2反射折回到A，在A反射后也进入观察系统L。两束光由于分自同一束光，因而是相干光束，可以产生干涉。

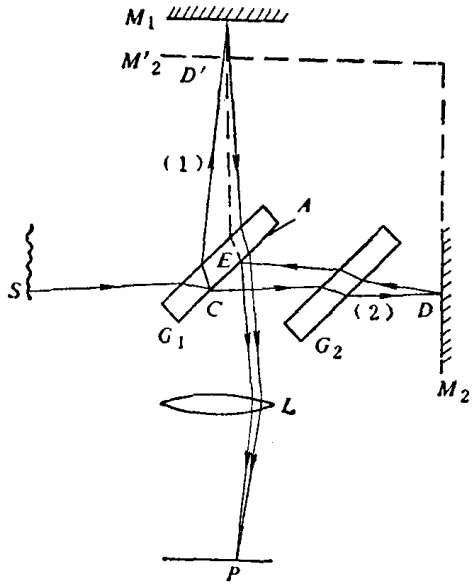


图3-35 迈克耳逊干涉仪

研究这种仪器所形成的干涉图样的性质时，为了容易了解起见，可以作出虚平面M'_2，它是平面镜M_2在半反射面A中的虚象，位置在M_1附近。当在L处观察时，将看到镜面M_1和M_2的虚像M'_2，此两表面构成一虚平板——假想空气层。容易证明，从S沿$SCDEP$路线到达P点的光程等于沿$SCD'EP$路线到达P点的光程，因此可以认为，观察系统所观察到的干涉图样是由实反射面M_1和虚反射面M'_2构成的虚平板产生的。虚平板的一定的厚度和楔角可以通过调节M_1和M_2反射镜实现，在M_1和M_2的背后各有三个调节螺钉用来调节它们的相对位置。M_2安置在一滑座上，滑座可以借测微螺杆沿精密导轨平移，以改变虚平板的厚度。这样，利用迈克耳逊干涉仪可以产生厚的或薄的，平行平板和楔形平板的干涉现象。

如果调节M_2，使它的反射象M'_2与M_1平行，所观察到的干涉图样就与§3-5讨论的一样，是一组定域在无穷远的等倾圆环条纹。当M_1移向M'_2时（虚平板厚度减小），条纹向中心收缩，并在中心一一消失。显然，M_1平移$\lambda/2$的距离，在中心消失一个条纹。但是，这时根据式（3-45），条纹的角宽度增大，所以条纹疏松起来。当M_1与M'_2完全重合时，视场是均匀的，因为这时对于各个方向的入射光程差均相等。如继续移动M_1，使M_1逐渐离开M'_2，则条纹不断由中心冒出，并且随虚平板厚度的增大，条纹越来越密集起来。

当M_1与M'_2，相当接近且相互倾斜成一角度很小的楔时，所观察到的干涉图样则与§3-6讨论的楔形平板的干涉图样一样，条纹定域在楔表面上或楔表面附近。迈克耳逊干涉仪产生的这种条纹一般不属于等厚条纹，只是当楔形平板很薄，且观察面积很小时，可以近似地看成是等厚条纹，它们是一些平行于楔棱的等距直线。在扩展光源照明下，如果M_1与M'_2的距离增

加，则条纹与等厚线的偏离程度增大，这时条纹将发生弯曲，弯曲的方向是凸向楔棱一边，同时条纹的可见度下降。同样地，反射镜 M_1 每移动 $\lambda/2$，就有一个条纹从观察仪器的叉丝越过。

干涉仪中的补偿板 G_2 是为了消除分光板分出的两束光（1）和（2）的不对称性而设置的。不加 G_2 时，光束（1）经过玻璃板 G_1 三次，而光束（2）则经过一次，加入 G_2 后光束（2）也经过玻璃板三次，因而得到补偿。这种补偿在单色光照明时并非必要，光束（1）经过玻璃板所增加的光程可以用空气中的行程补偿。但是用白光作光源时，因为玻璃有色散，不同波长的光有不同的折射率，因而，对于不同的波长，通过玻璃板时所增加的光程不同，这是无法用空气中的行程来补偿的。这时必须加入 G_2 才能同时补偿各种波长的程差，因而在观察白光条纹时补偿板不可缺少。

白光条纹只在楔形虚平板极薄（M_1 和 M_2' 非常接近，距离仅几个波长）时才能观察到，这时条纹是带彩色的。如果 M_1 和 M_2' 相交错，交线上的条纹对应于虚平板的厚度 $h=0$。当分光板 G_1 不镀半反射膜时，该条纹是黑的，因为在 G_1 中起内反射的光线（1）和起外反射的光线（2）之间有一附加程差 $\lambda/2$；镀上半反射膜后，附加程差与所镀金属及厚度有关，不等于零或 $\lambda/2$，但通常接近于零，所以交线上的条纹一般是白色的。交线条纹的两侧是彩色条纹，其色序也与表 3-1 所列的一般平板的干涉色序不完全一致。

白光条纹在迈克耳逊干涉仪中极为有用，它可以使我们能够准确地确定反射镜 M_1 和 M_2 至半反射面 A 的等光程位置，对于干涉仪的一些应用来说，这是很必要的。例如，迈克耳逊在将标准米尺与镉红线的波长作比较时，需要测量图 3-36 所示的特制标准具的长度 d 中所包含的波长数目。测量的方法是将标准具放在迈克耳逊干涉仪上平面镜 M_2 的一旁，而且通过观察系统同时能看到标准具的前后两个镜面 B 和 B'；使标准具的前面一块镜子 B 和 M_2 约在同一平面上，而 M_2 调节成与 M_1 在半反射面 A 中的虚象 M_1' 平行，因此在 M_2 一侧可以看到 M_1 和 M_2 反射的镉红光形成的等倾圆环条纹。移动 M_1，使 M_1' 先与标准具的前面一块镜子 B 相交，再与后面一块镜子 B' 相交，同时数出在两次相交之间从 M_2 一边看到的圆环条纹中从中心冒出来的条纹数，便可以决定标准具的长度 d 中所含有的波长数目。在判断 M_1' 和 B 或 B' 相交时，就需要利用白光条纹。

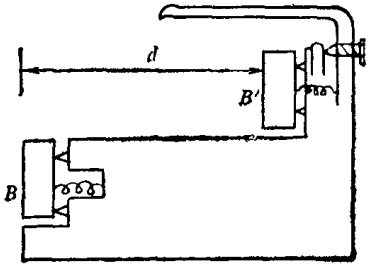


图3-36 迈克耳逊所用的特制标准具

迈克耳逊干涉仪的主要优点是两束相干光完全分开，并且它们的光程差可由一个镜子的平移来改变，因此可以很方便的在光路中安置被测量的样品。利用上述优点，迈克耳逊干涉仪在历史上有过很大的功用，例如直接将波长与标准米尺进行比较以及研究谱线的精细结构等。今天，它仍有着重要的应用，许多重要的干涉仪都是以它为基础。

§3-10 泰曼干涉仪和科斯特干涉仪

一、泰曼干涉仪

泰曼（Twyman）干涉仪是迈克耳逊干涉仪的一种变型，在光学仪器制造工业中，常用这种仪器产生的等厚干涉条纹对光学元件或光学系统作综合质量检验。

干涉仪如图 3-37 所示，它与原始的迈克耳逊干涉仪的区别是，光源是单色点光源，置于一个校正象差的透镜 L_1 的前焦点上，而从干涉仪射出的光用另一个校正象差的透镜 L_2 会聚，人眼则处在透镜 L_2 的焦面位置观察。由于干涉仪只使用单色光源，所以迈克耳逊干涉仪中的补偿板在这里也取消了。

如果作出平面反射镜 M_1 在半反射面 A 中的虚象 M_1'，干涉仪的出射光就相当于 M_2 和 M_1' 所构成的空气楔的反射，因而泰曼干涉仪实际上等效于图 3-32 所示的平面干涉仪，只是在这里两束光的光路被完全分开。这样，泰曼干涉仪产生等厚干涉的原理就不难了解。值得注意的是，当光源是点光源时，条纹是非定域的，在两相干光束重迭区域内的任何平面上，条纹的清晰度都一样。但实际上为了获得足够强度的干涉条纹，光源的扩展不能忽略，这时如同平面干涉仪的情况一样，条纹虚定域于 M_2 和 M_1' 构成的空气楔附近。

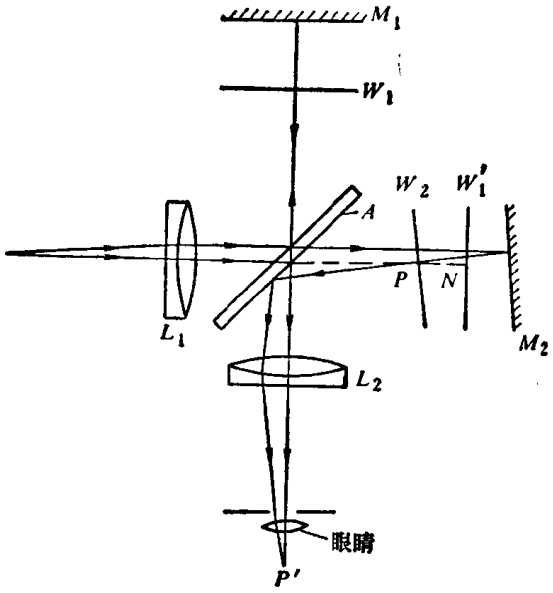


图3-37 泰曼干涉仪

下面为讨论方便起见，从另一种观点来解释干涉条纹的产生。如图 3-37 所示，设入射平面波经 M_1 反射后的波阵面是 W_1，经 M_2 反射后相应的波阵面是 W_2，W_1 和 W_2 位相相同。引入虚波阵面 W_1'，它是 W_1 在半反射面 A 中的虚象。图中画出了虚相交于波阵面 W_2 上 P 点的两支光的光路，这两支光在 P 点的光程差为

$$\Delta = PN = h \tag{3-65}$$

即等于 W_1' 到 P 点的法线距离，因为 W_1' 和 W_2 之间介质（空气）的折射率设为 1。显然，当

$$h = m\lambda \quad m = 0、\pm 1、\pm 2\cdots \tag{3-66 a}$$

时，P 为亮点⊖；而当

$$h = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$$

$$m = 0、\pm 1、\pm 2\cdots \tag{3-66 b}$$

时，P 为暗点。如果平面镜 M_1 和 M_2 是理想平面，那末反射回来的波阵面 W_1（或 W_1'）和 W_2 也是平面，这样当眼睛聚焦于 W_2 上时，在 W_1' 和 W_2 之间有一楔角的情况下，将看到一组平行等距的直线条纹（若 W_1' 和 W_2 相互平行，视场是均匀照明的，没有条纹），

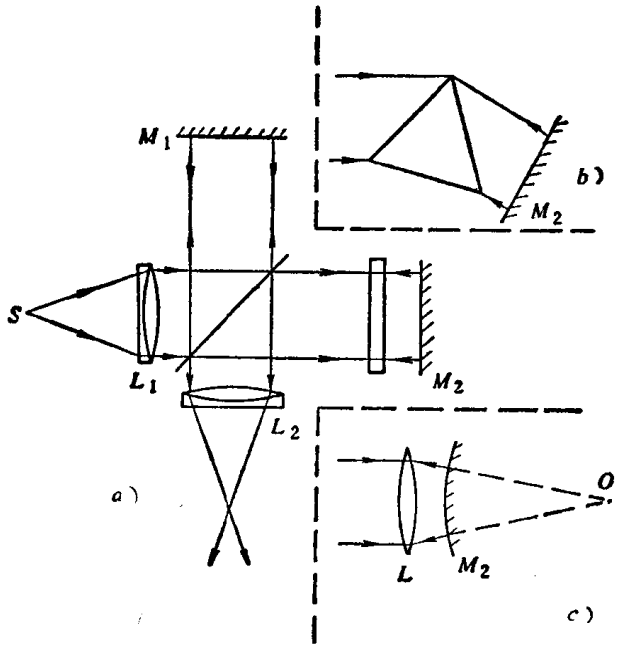


图3-38 泰曼干涉仪检验平板，棱镜和透镜的装置

⊖ 这里略去了在 A 两边反射时的位相变化。

它们与W_1'和W_2所构成的空气楔的楔棱平行。从一个亮条纹（或暗条纹）过渡到相邻的亮条纹（或暗条纹），W_2和W_1'之间的距离改变λ。如果在M_2的前面插入有缺陷的光学元件（图3-38），则从M_2反射回来的波阵面W_2将发生变形，这时干涉条纹不再是平行等距的直线，一般有如图3-39所示的形状。显然，我们可以把W_2上的各亮条纹（或暗条纹）看作是以W_1'为基准的W_2的等高线，高度间隔为λ，而从等高线的形状、间隔就可以判断光学元件的缺陷。例如图3-39所示的等高线——干涉条纹图，实际上是表示Q处有一个高峰或低谷，也就是说元件表面相应的地方“高”或“低”了（综合反映元件质量，包括表面质量和折射率的均匀性，不一定指元件表面有高低）。至于这些地方究竟是“高”还是“低”，可从M_1远离分光板时条纹的运动方向来判定。应当注意，由于光束两次通过元件，使元件缺陷加倍出现，故应以干涉条纹的数目和变形之半来衡量元件的实际质量。同时，根据缺陷的部位，可以对元件进行精修。

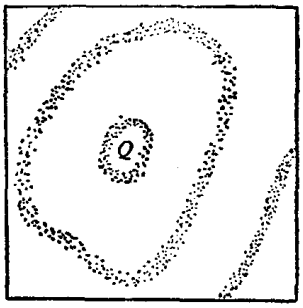


图3-39　干涉条纹图

图3-38 *a*、*b*和*c*是利用泰曼干涉仪分别检验平板，棱镜和透镜的装置，被检元件插入M_2前面的光路中。在最小偏向位置检验棱镜的情况（图*b*），干涉仪的反射镜M_2要设计成可移动和转动。当检验透镜的波象差时（图*c*），平面反射镜M_2要换成球面反射镜，球面反射镜的球心O应与被检透镜L的焦点重合。

二、科斯特（Kösters）干涉仪

科斯特（Kösters）干涉仪是应用泰曼干涉仪的原理来测量端规长度的仪器，它的各个元件通常是垂直配置的，如图3-40所示。干涉仪也由三个部分组成：照明系统，干涉系统和观察系统。后两个部分与泰曼干涉仪完全相同，照明系统使用透镜L_1来产生平行光，并用定偏向棱镜F来选出所需要的单色光。一般测量中要采用四种已知波长的光，通过转动定偏向棱镜F，可以很方便的把这四种波长从一个适当的光源依次选出。

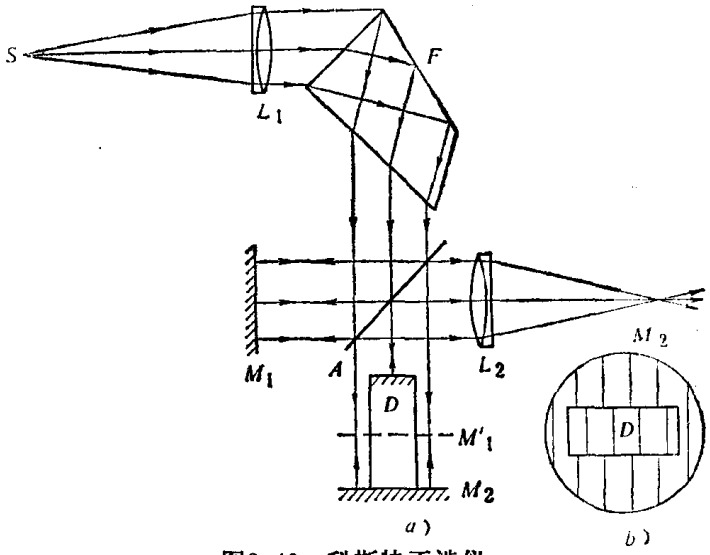


图3-40　科斯特干涉仪

a）装置　*b*）视场

测量时，把被测端规D贴紧在反射镜M_2的表面（M_2是一块抛光的钢板），再调节反射镜M_1使它在半反射面A中的虚象M_1'大致位于M_2和D的上表面中间，并与它们倾斜成很小一个角度。这样，在M_1'和D之间，在M_1'和M_2之间各形成一楔形空气层，在单色光照明下，可各产生一组等厚条纹。一组条纹在端规D的表面上，另一组条纹在反射镜M_2不为端规所遮的空余面上（图3-40 *b*）。如果端规上下两表面是平行的，那么两组条纹是平行等距的，彼此之间也互相平行，并且有相同的间距。通过调

节 M_1 的倾斜，可使两组条纹的走向与端规一边垂直。如果在这边上某一点处，端规上下表面与 M_1' 所成空气层的厚度分别为 h_1 和 h_2，相应的干涉级为 m_1 和 m_2，则端规的长度

$$d = h_1 + h_2 = (m_1 + m_2)\frac{\lambda}{2} \tag{3-67}$$

m_1 和 m_2 不一定是整数，因而上式可写成

$$d = (m + f)\frac{\lambda}{2} \tag{3-68}$$

式中 m 是一个未知整数，而 f 是一个小于 1 的小数，显然也等于两组条纹的干涉级位移小数（位移量与间距之比），它可由直接测量决定。m 值则需用间接的方法，也称为“小数部分重合法”㊀来决定，这种方法利用四种已知波长的光来测量位移小数，并用测微计近似测量 d 作为参考数据，使算出的小数都与实测的小数重合，从而得到精确的端规长度 d。

§3-11 马赫-泽德干涉仪

马赫-泽德（Mach-Zehnder）干涉仪是一种大型的光学仪器，适用于研究气体密度迅速变化的状态，如在风洞中试验飞机模型时产生的空气涡流和爆炸过程的冲击波，由于气体折射率的变化与其密度的变化成正比，而折射率的变化将使通过气体的光线有不同的光程，如果将平面波叠加在通过气体的波阵面上来获得等厚条纹，这些条纹便能反映出气体折射率，亦即密度的分布情况。

马赫-泽德干涉仪如图 3-41 所示，G_1、G_2 是两块分别具有半反射面 A_1、A_2 的平行平面玻璃板，M_1、M_2，是两块平面反射镜，四个反射面通常安排成近乎平行，其中心分别位于一个平行四边形的四个角上，平行四边形长边的典型尺寸是1～2米。光源 S 置于透镜 L_1 的焦平面上，S 发出的光束经 L_1 准直后在 A_1 上分为两束，它们分别由 M_1、A_2 反射和 M_2 反射、A_2 透射，进入透镜 L_2。两束光的干涉图样可用置于 L_2 焦平面位置的照相机拍摄下来，如果采用短时间曝光技术，即可得到条纹的瞬时照相。

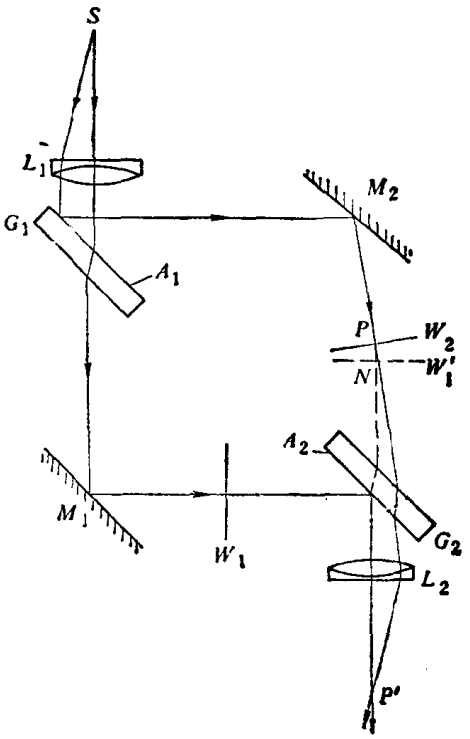


图3-41 马赫-泽德干涉仪

为了解仪器所产生的干涉条纹的性质，假设光源 S 是一个单色点光源，因而入射到半反射面 A_1 的是单色平面波。设透过 A_1 并经 M_1 反射的平面波的一个波阵面为 W_1，而经 A_1 和 M_2 反射的平面波的相应的波阵面为 W_2；引入虚波阵面 W_1'，它是 W_1 在半反射面 A_2 中的虚象。一般情况下，W_1' 和 W_2 是相互倾斜的，形成一空气楔，因此，在 W_2 上将形成平行等距的直线条纹（图中画出了两支出射光线在 W_2 上 P 点虚相交），条纹的走向与 W_2 和 W_1' 所成空气楔的楔棱平行。

㊀ 详见A. H. 查哈里也夫斯基：干涉仪，谢勤等译，科学出版社，第204页。

如果使 W_2 通过被研究的气流，W_2 将发生变形，因而干涉图样不再是平行等距的直线，从干涉图样的变化就可以测量出所研究区域的折射率或密度的变化。

因为通常气流密度是迅变的，用照相机记录气流密度的变化情况，必须采用短时间的曝光，这样就要求干涉条纹有很大的亮度，所以，通常在实用上都利用扩展光源。这时条纹是定域的，定域面可根据干涉孔径 $\beta = 0$ 的作图法求出。易见，当四个反射面严格平行时，条纹定域在无穷远处，即在 L_2 的焦平面上；而当 M_2 和 G_2 同时绕自身垂直轴转动时，条纹虚定域于 M_2 和 G_2 之间（见图 3-42）。干涉仪定域位置可任意调节的这一特点，使得这种干涉仪能够用来研究尺寸较大的风洞中任一平面附近的空气涡流。工作时将风洞置于 M_2 和 G_2 之间，并在 M_1 和 G_1 之间的另一支光路上放置补偿室，把定域面调节到风洞中任一选定平面上，通过透镜 L_2 和照相机可以把这平面上的干涉图样拍摄下来。只要比较有气流时和无气流时的条纹图样，就可以决定气流所引起的空气密度的变化情况。迈克耳逊类型的干涉仪由于定域面和镜子重合，所以尽管两路相干光束也分得很开，还是不适合于作为上述目的的应用。

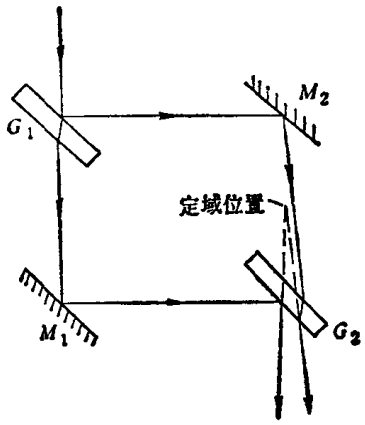


图3-42 马赫-泽德干涉仪中条纹的定域

近年来，国外有些实验室应用马赫-泽德干涉仪来研究可控热核反应中等离子区的密度分布。图 3-43 是所拍摄到的反映等离子区密度分布的条纹图样照片。

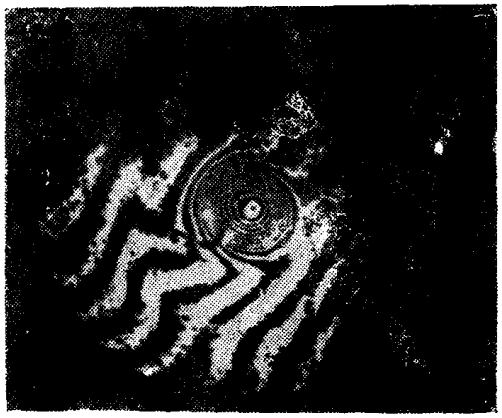


图3-43 可控热核反应中等离子区的密度轮廓照片

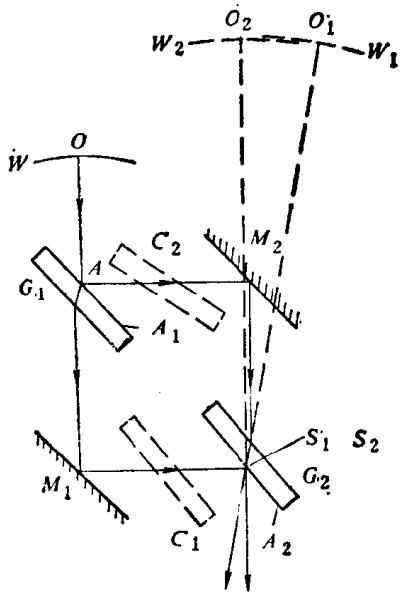


图3-44 马赫-泽德干涉仪-检验会聚波阵面

马赫-泽德干涉仪的另一种重要应用是用来测量光学元件或光学系统的象差，这种测量是通过波阵面剪切干涉来实现的，而不需要一个基本上没有误差的参考波阵面。考虑到制造大孔径标准元件的困难程度，因而上述应用对于检验大孔径光学元件和光学系统特别有意义。图 3-44 是贝茨（Bates）利用马赫-泽德干涉仪作波阵面剪切干涉来检验会聚波阵面的装置，假设从被检验光学系统射出的会聚光束的主光轴 OA 在水平面内，它的一个波阵面为 W。会聚光束入射到干涉仪的 G_1 上时，分割成两束，分别在 S_1 和 S_2 会聚成点。若干涉仪

的四个反射面处在垂直位置并且相互平行，则两束光的会聚点 S_1 和 S_2 重合；适当调节被检验光学系统和干涉仪的相对位置，可使会聚点位于 G_2 的半反射面 A_2 上。这时，与 W 对应的两支出射光束的虚波阵面 W_1 和 W_2 完全重合，置于 G_2 之后的人眼将看到亮度均匀的视场。现在把 G_1 和 M_1 同时绕平行于 OA 的一个轴转动，使 O_1S_1 和 O_2S_2 在垂直方向上分开一个很小的距离，对于波阵面来说，这相当于 W_2 绕一水平轴转成对 W_1 倾斜，因而在视场内可看到水平的等距干涉条纹，且被检光束为白光时，也可以看到条纹。

如果这时把 G_2 绕通过 S_1 和 S_2 的垂直轴转动，则 O_1S_1 绕 S_1 点在水平面内旋转，因而波阵面 W_1 相对于 W_2 错开，我们把这种运动称为剪切。当 W_1 和 W_2 为理想球面，即被检光学系统没有象差时，剪切后在两球面交叠区域内产生的干涉图样与剪切前相同。而当被检光学系统有象差，即波阵面不是理想球面时，剪切后两波阵面重叠区域内的条纹将发生位移，通过位移大小的测量，就可以决定波阵面的非球面偏差（波象差），从而推知光学系统的象差。

§3-12 平行平板产生的多光束干涉

在§3-5中讨论了平行平板产生的两光束干涉，但是，这只是近似的情形。事实上由于光束在平板内不断的反射和透射（图3-45），必须考虑多光束参与干涉。不过，当平板两表面的反射率很低时，只考虑两光束干涉，这种近似已经很好。例如，光束接近正入射从空气射入玻璃平板内，反射率约为0.04，光束1（见图）的强度将为入射光强度的4%，光束2的强度为3.7%，而光束3的强度不到0.01%，所以第三支光束和继后各光束实际上都可以忽略。但是，当光束掠入射或当平板表面镀有金属膜层或电介质膜层使得反射率很高时，就不能仅考虑头两束光的作用。例如，反射率 $R=0.9$，且假设平板没有吸收时，各反射光束的强度依次为（入射光强度设为1）：

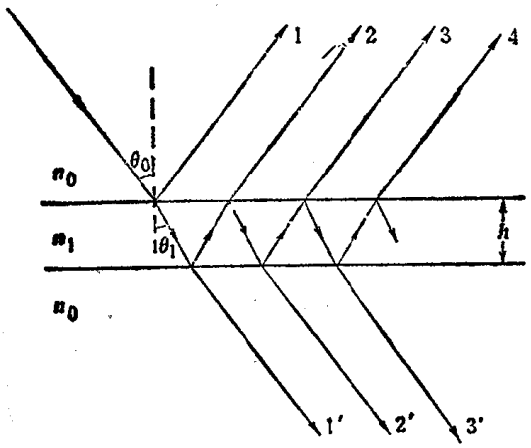


图3-45 光束在平行平板内的多次反射和透射

0.9，0.009，0.0073，0.00577，0.00467，0.00318，0.00306，……

各透射光强度依次为：

0.01，0.0081，0.00656，0.00529，0.00431，0.00349，0.00284，……

可见，在反射光中，除光束1外其他各光束的强度相差不多，在透射光中，各光束的强度减弱很慢。因此，必须考虑多光束的干涉效应，要按照多光束的迭加精确计算干涉场的强度分布。下面分几个方面讨论多光束干涉的特点。

一、干涉场的强度公式

以扩展光源照明平板产生的多光束干涉，如同两光束干涉一样，干涉场定域在无穷远处。若以透镜 L 和 L' 分别将反射光和透射光会聚起来，干涉场定域在透镜 L 和 L' 的焦平面上（图3-46）。

现在计算干涉场上任一点 P（在透射光方向相应点为 P'）的光强度，与 P 点（和 P'

点）对应的多光束的出射角为θ_0，在平板内的入射角为θ，因而相继两束光的光程差为

$$\Delta = 2nh\cos\theta$$

而位相差为

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda} nh\cos\theta \tag{3-69}$$

式中nh是平板的光学厚度，λ是真空中波长。假设光束从周围介质射入平板内时，反射系数（反射光与入射光振幅之比）为r，透射系数（透射光与入射光振幅之比）为t，从平板射出时相应的系数为r'，t'，并设入射光的振幅为$A^{(i)}$，则从平板反射回来的各光束的振幅依次为

$$rA^{(i)},\ tt'r'A^{(i)},\ tt'r'^3A^{(i)},$$
$$tt'r'^5A^{(i)}\cdots\cdots$$

从平板透射出来的各光束的振幅依次为

$$tt'A^{(i)},\ tt'r'^2A^{(i)},\ tt'r'^4A^{(i)},$$
$$tt'r'^6A^{(i)}\cdots\cdots$$

因此，可以把诸反射光束在P点的光矢量大小写为

$$\left.\begin{aligned}
E_1^{(r)} &= rA^{(i)}e^{i(\delta_0-\omega t)}\\
E_2^{(r)} &= tt'r'A^{(i)}e^{i(\delta_0+\delta-\omega t)}\\
E_3^{(r)} &= tt'r'^3A^{(i)}e^{i(\delta_0+2\delta-\omega t)}\\
E_4^{(r)} &= tt'r'^5A^{(i)}e^{i(\delta_0+3\delta-\omega t)}
\end{aligned}\right\} \tag{3-70}$$

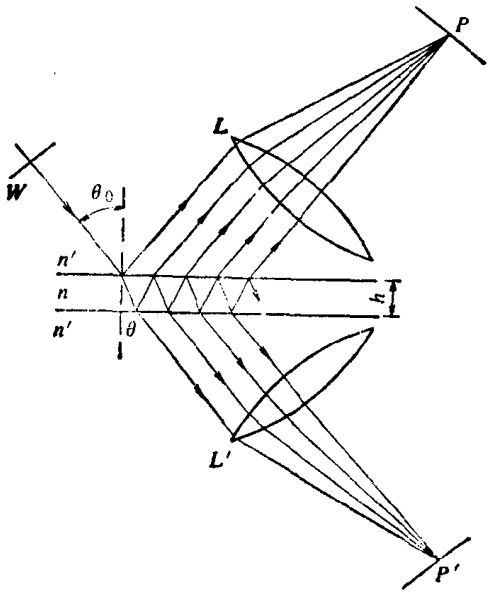


图3-46 在望远镜焦平面上产生的多光束干涉

式中ω是光波的角频率，δ_0是位相常数。当略去共同的因子$e^{i(\delta_0-\omega t)}$后，合成光矢量的振幅应为

$$\begin{aligned}
A^{(r)} &= (r + tt'r'e^{i\delta} + tt'r'^3e^{i2\delta} + tt'r'^5e^{i3\delta} + \cdots)A^{(i)}\\
&= [r + tt'r'e^{i\delta}(1 + r'^2e^{i\delta} + r'^4e^{i2\delta} + \cdots)]A^{(i)}
\end{aligned}$$

上式圆括号内是一个递降等比级数，如果平板足够长，反射光束的数目则很大，在光束数目趋于无穷大的极限情况下，得到

$$A^{(r)} = \left(r + \frac{tt'r'e^{i\delta}}{1 - r'^2e^{i\delta}}\right)A^{(i)} \tag{3-71}$$

利用菲涅耳公式容易证明（见习题1.11），r，r'，t，t'各量之间的关系为

$$\left.\begin{aligned}
r &= -r'\\
tt' &= 1 - r^2
\end{aligned}\right\} \tag{3-72}$$

因此，式（3-71）化为

$$A^{(r)} = -\frac{r'[1 - (r'^2 + tt')e^{i\delta}]}{1 - r'^2e^{i\delta}}A^{(i)} \tag{3-73}$$

而根据式（1-92）和（1-97），r，r'，t，t'各量与平板表面反射率R和透射率T之间的关系为

$$\left.\begin{aligned}
r^2 &= r'^2 = R\\
tt' &= 1 - R = T
\end{aligned}\right\} \tag{3-74}$$

因此，若用反射率R表示，式（3-73）可简化为

$$A^{(r)}=\frac{(1-e^{i\delta})\sqrt{R}}{1-Re^{i\delta}}A^{(i)} \tag{3-75}$$

由此可得到反射光在P点的光强度$I_r=A^{(r)}\cdot A^{(r)*}$为

$$I^{(r)}=\frac{(2-2\cos\delta)R}{1+R^2-2R\cos\delta}I^{(i)}=\frac{4R\sin^2\frac{\delta}{2}}{(1-R)^2+4R\sin^2\frac{\delta}{2}}I^{(i)} \tag{3-76}$$

式中$I^{(i)}=A^{(i)}\cdot A^{(i)*}$是入射光的强度。

用同样的方法可以得到透射光在P'点的振幅

$$A^{(t)}=tt'(1+r'^2e^{i\delta}+r'^4e^{i2\delta}+\cdots)A^{(i)}$$

在透射光束的数目趋于无穷大的极限情况下有

$$A^{(t)}=\frac{tt'}{1-r'^2e^{i\delta}}A^{(i)} \tag{3-77}$$

利用式（3-74），得到

$$A^{(t)}=\frac{T}{1-Re^{i\delta}}A^{(i)} \tag{3-78}$$

因而透射光在P'点的强度$I^{(t)}=A^{(t)}\cdot A^{(t)*}$为

$$I^{(t)}=\frac{T^2}{1+R^2-2R\cos\delta}I^{(i)}=\frac{T^2}{(1-R)^2+4R\sin^2\frac{\delta}{2}}I^{(i)} \tag{3-79}$$

式（3-76）和（3-79）即为所求的反射光干涉场和透射光干涉场的强度分布公式，通常也称为爱里（Airy）公式。

二、干涉图样的特点

为讨论方便，引入参数

$$F=\frac{4R}{(1-R)^2} \tag{3-80}$$

这样，式（3-76）和（3-79）简化为

$$\frac{I^{(r)}}{I^{(i)}}=\frac{F\sin^2\frac{\delta}{2}}{1+F\sin^2\frac{\delta}{2}} \tag{3-81}$$

和

$$\frac{I^{(t)}}{I^{(i)}}=\frac{1}{1+F\sin^2\frac{\delta}{2}} \tag{3-82}$$

当忽略平板的吸收作用时，有

$$\frac{I^{(r)}}{I^{(i)}}+\frac{I^{(t)}}{I^{(i)}}=1 \tag{3-83}$$

式子表明反射光和透射光的干涉图样互补，也就是说，对于某一个方向反射光干涉为亮纹时，透射光必为暗纹，反之亦然。两者强度之和等于入射光强度。

式（3-81）和（3-82）还表明，干涉场的强度随R和δ而变，在特定R的情况下，则仅随δ而变。因为$\delta=\frac{4\pi}{\lambda}nh\cos\theta$，所以光强度只与光束倾角有关。倾角$\theta$相同的光束形成同一个条纹，这是等倾条纹的特征，因此，平行平板在透镜焦平面上产生的多光束干涉条纹，如同两光束干涉条纹一样，是等倾条纹。当透镜的光轴垂直于平板时，等倾条纹是一组同心圆环。

形成亮条纹和暗条纹的条件和强度大小可由公式（3-81）和（3-82）求出。在反射光方向，当

$$\delta=(2m+1)\pi \qquad m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{3-84}$$

时，形成亮条纹，其强度为

$$I_M^{(r)}=\frac{F}{1+F}I^{(i)} \tag{3-85}$$

而当

$$\delta=2m\pi \qquad m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{3-86}$$

时，形成暗条纹，其强度为

$$I_m^{(r)}=0 \tag{3-87}$$

对于透射光，形成亮条纹和暗条纹的条件分别为

$$\delta=2m\pi \quad 和 \quad \delta=(2m+1)\pi \qquad m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{3-88}$$

而强度分别为

$$I_M^{(t)}=I^{(i)} 和 I_m^{(t)}=\frac{1}{1+F}I^{(i)} \tag{3-89}$$

可见，不论是在反射光方向或透射光方向，形成亮条纹和暗条纹的条件都与§3-5中只考虑头两束光干涉时在相应方向形成亮暗条纹的条件相同，因此条纹的位置也相同。

现在讨论条纹的强度分布随反射率R的变化。当反射率R很小时，由式（3-80）可见，F远小于1，因此可将公式（3-81）和（3-82）展开，只保留F的一次项

$$\frac{I^{(r)}}{I^{(i)}}\approx F\sin^2\frac{\delta}{2}=\frac{F}{2}(1-\cos\delta) \tag{3-90}$$

$$\frac{I^{(t)}}{I^{(i)}}\approx 1-F\sin^2\frac{\delta}{2}=1-\frac{F}{2}(1-\cos\delta) \tag{3-91}$$

与公式（3-1）比较可知，这正是两光束干涉条纹的强度分布，表明当反射率R很小时可以只考虑头两束光的干涉。但是，当反射率R增大时，情况就有很大的不同，图3-47绘出了在不同反射率下透射光条纹的强度分布曲线，按照式（3-83），图中曲线与水平线$y=\frac{I^{(t)}}{I^{(i)}}=1$之间的纵座标则代表反射光条纹的强度随$\delta$的变化。由图可见，$R$很小时（$R=0.046$），

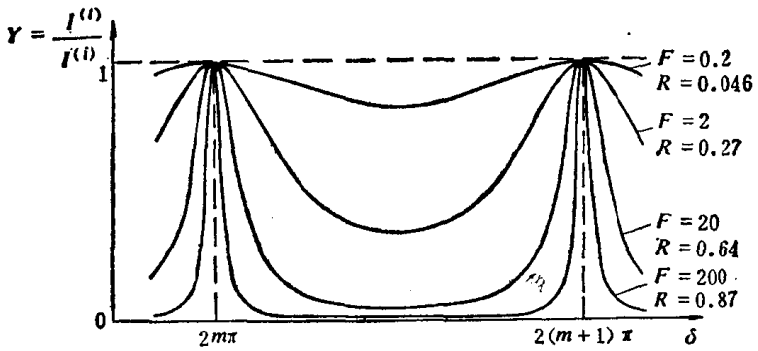


图3-47　不同反射率下透射光条纹的强度分布曲线

条纹的强度分布与§3-5讨论的情况相同：极大到极小的变化缓慢，透射光条纹的可见度很差。但是，随着反射率R的增大，透射光暗条纹的强度降低，亮条纹的宽度变窄，因而条纹的锐度和可见度增大。当$R\to 1$时，透射光干涉图样是由在几乎全黑的背景上的一组很细的亮条纹所组成。至于反射光干涉图样，则和透射光干涉图样互补，是由在均匀明亮背景上的很细的暗条纹组成，这些暗条纹不如透射光图样中暗背景上的亮条纹看起来清楚，所以在实际应用中都采用透射光的干涉条纹。

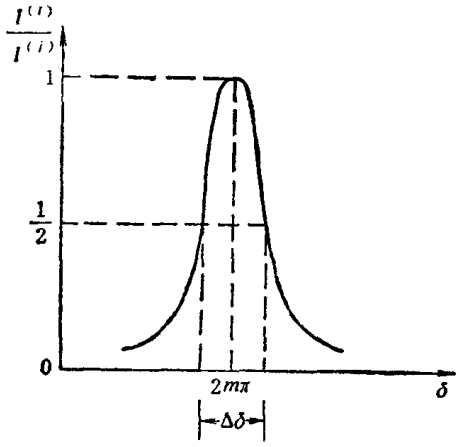


图3-48　条纹的半宽度图示

三、干涉条纹的锐度

透射光干涉条纹的锐度可以用它们的半宽度来表示，所谓半宽度是指亮条纹中强度等于峰值强度一半的两点间的距离，记为$\Delta\delta$，如图3-48所示。对于第m级条纹，两半强度点对应的位相差为

$$\delta = 2m\pi \pm \frac{\Delta\delta}{2} \tag{3-92}$$

代入公式（3-82），得到

$$\frac{1}{1 + F\sin^2\dfrac{\Delta\delta}{4}} = \frac{1}{2} \tag{3-93}$$

因为$\Delta\delta$很小，所以$\sin\dfrac{\Delta\delta}{4}\approx\dfrac{\Delta\delta}{4}$，将上式化简后求得条纹半宽度为

$$\Delta\delta = \frac{4}{\sqrt{F}} = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}} \tag{3-94}$$

通常也用相邻两条纹间的距离（2π）和条纹半宽度（$\Delta\delta$）之比来表示条纹的锐度，称为条纹的精细度

$$S = \frac{2\pi}{\Delta\delta} = \frac{\pi\sqrt{F}}{2} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R} \tag{3-95}$$

由式（3-94）和（3-95）可见，当反射率$R\to 1$时，条纹变得愈来愈细，条纹的锐度愈好。这对于测量工作是非常有利的，一般情况下，两光束干涉条纹的读数精确度为条纹间距的1/10，但对于多光束干涉条纹，不难达到条纹间距的1/100，以至1/1000。因此，常利用多光束干涉装置来进行比较精密的测量，如在光谱技术中测量光谱线的精细结构，在精密光学加工中检验高质量玻璃平板等等。

§3-13　法布里-珀罗干涉仪和陆末-盖尔克板

下面介绍两种典型的多光束干涉装置——法布里（Fabry）-珀罗（Perot）干涉仪和陆末（Lummer）-盖尔克（Gehrcke）板，两种装置分别采用两种不同的方法来提高平板表面的反射率。一种方法是，在平板的表面镀一层金属膜或多层电介质反射膜；另一种方法是，适当选

择入射光束，使光束在板内的入射角略小于临界角。在这两种情况下，平板表面的反射率都可达90%以上，因而可以获得多光束的干涉。

一、法布里-珀罗干涉仪

法布里-珀罗干涉仪由两块互相平行的平面玻璃板或石英板G_1、G_2组成（图3-49），两板的内表面镀一层银或铝膜，或多层介质膜㊀，以提高表面的反射率。为了获得尖锐的条纹，对两涂镀表面的平面度要求很高，一般要达到1/20到1/100波长，同时两表面应严格保持平行。这两个具有很高反射率的表面之间的空气层就是籍以产生多光束干涉的平行平板。干涉仪的两块玻璃板（或石英板）通常做成有一小楔角（～1到10弧分），以避免没有涂镀表面反射光的干扰。两块板中的一块固定不动，另一块可以平行移动，以改变两板之间的距离h。显然，这种结构很难保证两板之间严格保持平行，所以常常采用另一种结构形式，即在两板间放一间隔圈——一种铟钢（膨胀系数很小的镍铁合金钢）制成的空心圆柱形间隔器，使两板间的距离固定不变，这种间隔固定的法布里-珀罗干涉仪通常称为法布里-珀罗标准具。

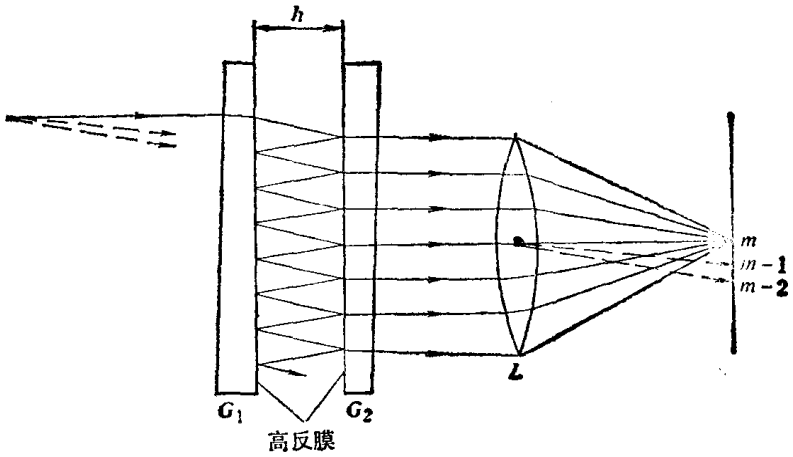
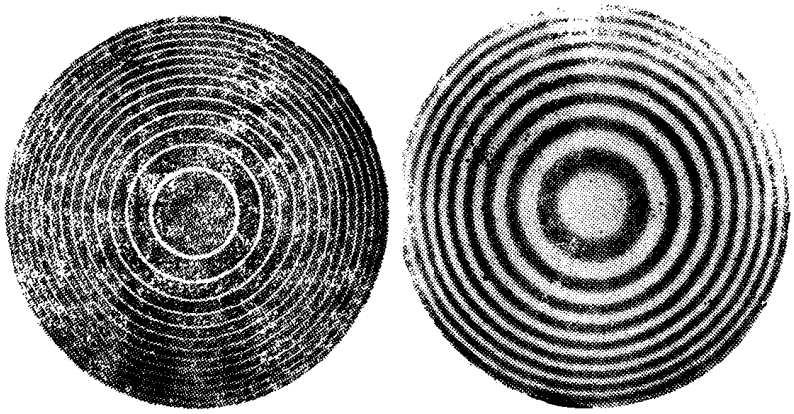


图3-49 法布里-珀罗干涉仪简图



a) b)

图3-50 法布里-珀罗干涉仪产生的多光束干涉条纹（a）和迈克耳逊干涉仪产生的两光束等倾干涉条纹（b）的比较

干涉仪用扩展光源发出的发散光束照明，其中一支光的光路如图3-49所示，在透镜L的焦平面上将形成一系列很窄的等倾亮条纹。若透镜L的光轴和干涉仪的板面垂直，则在L的焦平面上形成的亮条纹是一组同心圆，图3-50 a即为这种同心圆条纹的照片。与迈克耳逊干涉仪产生的两光束等倾干涉条纹（图3-50 b）比较，可见法布里-珀罗干涉仪产生的条纹要精细得多。但是，两种条纹的角半径和角间距同样都可用式(3-43)和(3-45)计算。条纹的干涉级决定于空气平板的厚度h。通常法布里-珀罗干涉仪的使用范围是1毫米到200毫米，只在一些特殊的装置中，h大到1米。以$h=5$毫米计算，中央条纹的干涉级约20000左右，可见条纹的

㊀ 对于金属膜来说，在可见区使用时，镀银最为适宜。镀银表面对红光反射率约为97%，对兰光反射约为90%，兰光以下反射率迅速降低。在4000埃以下使用时，通常镀铝。多层介质膜对光的吸收少，在这一点上比金属膜优越，但若光波包含的波长范围较广时，介质膜就不合适。

干涉级是很高的，因而这种仪器只适用于单色性很好的光源。

应该指出，干涉仪两板的内表面镀金属膜时，光在它表面反射的情况是比较复杂的。但是，只要两个膜层是相同的，公式（3-79）仍然成立。不过，这时R应理解为在金属膜内表面的反射率，而相继两光束的位相差

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda} h \cos\theta + 2\phi \tag{3-96}$$

式中ϕ是在金属膜内表面反射时的位相变化。另外，光通过金属膜时将会发生强烈的吸收，使得整个干涉图样的强度降低。设金属膜的吸收率为A（吸收光强度与入射光强度之比），应有

$$R + T + A = 1 \tag{3-97}$$

因此，由式（3-79）可得到透射光干涉图样的强度公式为

$$\frac{I^{(t)}}{I^{(i)}} = \left(1 - \frac{A}{1-R}\right)^2 \frac{1}{1 + F\sin^2\frac{\delta}{2}} \tag{3-98}$$

与式（3-82）比较可以看出，金属膜的吸收使透射光图样的峰值强度下降了，严重时峰值强度只有入射光强度的几十分之一。例如，厚度为50毫微米的金属膜，R约为0.94，而T和A分别为0.01和0.05，这时亮条纹峰值强度只有入射光强度的1/36。

间隔固定的法布里-珀罗干涉仪（标准具）常用来测量波长相差非常小的两条光谱线的波长差，即光谱学中所谓超精细结构。用一般的光学仪器，如棱镜和光栅光谱仪是不容易把这种结构分开的。设含有两种波长λ_1和λ_2的光波投射到干涉仪上，由于同级条纹的角半径稍有差别，因而将得到如图3-51所示的双重条纹。为清楚起见，λ_1的亮条纹用实线表示，λ_2的亮条纹用虚线表示。对于靠近条纹中心的某一点，根据式（3-96）两组条纹的干涉级差值显然是

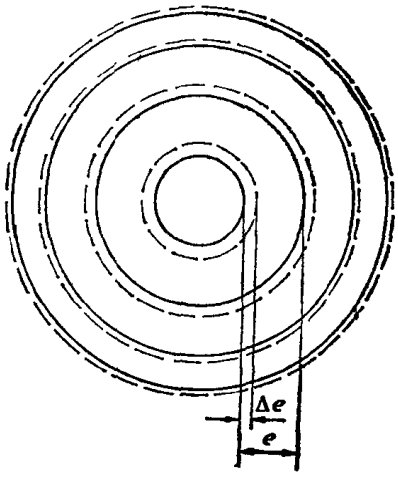


图3-51 在法布里-珀罗标准具上显示出来的精细结构

$$\Delta m = m_1 - m_2 = \left(\frac{2h}{\lambda_1} + \frac{\phi}{\pi}\right) - \left(\frac{2h}{\lambda_2} + \frac{\phi}{\pi}\right) = \frac{2h(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1\lambda_2} \tag{3-99}$$

另一方面，参看图3-51，应该有

$$\Delta m = \frac{\Delta e}{e} \tag{3-100}$$

式中Δe是同级条纹的相对位移，e是条纹间距。由式（3-99）和（3-100）得到波长差为

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{\Delta e}{2he}\bar{\lambda}^2 \tag{3-101}$$

式中$\bar{\lambda}$是平均波长，其值可由分辨本领较低的仪器预先测出，h是标准具间隔，这样，测出e和Δe之后就可以计算出波长差$\Delta\lambda$。

应用上述方法测量时，一般不应使两组条纹的相对位移Δe大于条纹的间距e，否则会发

生不同级条纹的重叠现象。我们把 Δe 恰好等于 e 时相应的波长差称为标准具常数或标准具的光谱范围，由式（3-101）得到标准具的光谱范围为

$$(\Delta\lambda)_{S.R}=\frac{\bar{\lambda}^2}{2h} \tag{3-102}$$

标准具的光谱范围是它所能测量的最大波长差。对于标准具间隔 $h=5$ 毫米，光波平均波长 $\bar{\lambda}=5000$ 埃的情况，$(\Delta\lambda)_{S.R}=0.25$ 埃。

表征标准具的特性还有另一个重要参数，即它能够分辨的最小波长差 $(\Delta\lambda)_m$，也就是说，当波长差小于这个值时，两组条纹就不能被分开。这个 $(\Delta\lambda)_m$ 值称为标准具的分辨极限，而 $\frac{\bar{\lambda}}{(\Delta\lambda)_m}$ 称为分辨本领。在光谱仪器中，一般采用瑞利判据来判断两条等强度谱线是否被分开。关于瑞利判据，在§4-12里再作介绍，这里采用稍为不同的形式来表述这个判据，即两个波长的亮条纹只有当合强度曲线中央的极小值低于两边极大值的81%时，才算被分开(图3-52)。现在按照这个判据来计算标准具的分辨本领。

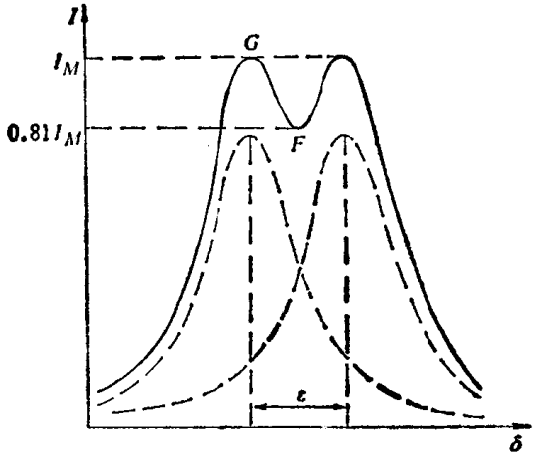


图3-52 两波长的亮条纹刚好被分辨开时的强度分布

略去标准具的吸收时，由公式（3-98），两波长条纹的合强度为

$$I_{合}=\frac{I^{(i)}}{1+F\sin^2\frac{\delta_1}{2}}+\frac{I^{(i)}}{1+F\sin^2\frac{\delta_2}{2}} \tag{3-103}$$

式中 δ_1 和 δ_2 是在干涉场上同一点两波长条纹对应的 δ 值。设 $\delta_1-\delta_2=\varepsilon$，那末，在合强度极小值处（图3-52 F 点），$\delta_1=2m\pi+\frac{\varepsilon}{2}$，$\delta_2=2m\pi-\frac{\varepsilon}{2}$，因此极小值强度为

$$I_m=\frac{I^{(i)}}{1+F\sin^2\left(m\pi+\frac{\varepsilon}{4}\right)}+\frac{I^{(i)}}{1+F\sin^2\left(m\pi-\frac{\varepsilon}{4}\right)}=\frac{2I^{(i)}}{1+F\sin^2\frac{\varepsilon}{4}} \tag{3-104}$$

在合强度极大值处（图3-52 G 点），$\delta_1=2m\pi$，$\delta_2=2m\pi-\varepsilon$，故极大值强度为

$$I_M=I^{(i)}+\frac{I^{(i)}}{1+F\sin^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} \tag{3-105}$$

按照瑞利判据，两波长条纹恰可分辨的条件是

$$I_m=0.81I_M \tag{3-106}$$

因此

$$\frac{2I^{(i)}}{1+F\sin^2\frac{\varepsilon}{4}}=0.81\left[I^{(i)}+\frac{I^{(i)}}{1+F\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}\right]$$

因为 ε 很小，可用 $\frac{\varepsilon}{2}$ 代替 $\sin\frac{\varepsilon}{2}$，于是上式化为

$$[F(\varepsilon)^2]^2-15.5[F(\varepsilon)^2]-30=0$$

这个方程的解给出

$$\varepsilon=\frac{4.15}{\sqrt{F}}=\frac{2.07\pi}{S} \tag{3-107}$$

其中利用了关系式（3-95）。再根据式（3-96），有

$$\Delta\delta=\frac{4\pi h\cos\theta}{\lambda^2}\Delta\lambda\approx 2m\pi\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \tag{3-108}$$

在两波长刚好被分辨开的情况下，$\Delta\delta=\varepsilon=\frac{2.07\pi}{S}$，所以标准具的分辨本领

$$A=\frac{\lambda}{(\Delta\lambda)_m}=2m\pi\frac{S}{2.07\pi}=0.97mS \tag{3-109}$$

可见，分辨本领与条纹的干涉级数和精细度成正比。上式中因子$0.97S$有时称为标准具的有效光束数，记为N，因而上式又可写为

$$A=mN \tag{3-110}$$

在§4-14里将可看到，光栅光谱仪的分辨本领也有同样的表示式。对于光栅光谱仪，N表示光栅的缝数，即干涉光束的数目。

为了对标准具的高分辨本领有一个数值概念，设标准具$h=5$毫米，$S=30(R\approx0.9)$，$\lambda=5000$埃，则接近正入射时的分辨本领为

$$A=\frac{\lambda}{(\Delta\lambda)_m}\approx 0.97\frac{2h}{\lambda}S\approx 6\times10^5$$

即是在$\lambda=5000$埃时标准具能分辨的最小波差$(\Delta\lambda)_m$可达0.0083埃。这样高的分辨本领是一般的光栅光谱仪和棱镜光谱仪所不能达到的。例如，缝数为25000条的光栅的分辨本领约为0.1埃，而底边长5厘米的重火石玻璃棱镜的分辨本领只有1埃。

最后应该指出，为便于讨论，这里把两种波长很接近的谱线看作是单色的，但实际上谱线本身都有一定的宽度，因此标准具实际上不会达到这样高的分辨本领。

二、陆末-盖尔克板

陆末-盖尔克板是一块均匀的精确度要求很高的平行平面玻璃（或石英）板，它之所以能够产生强度相近的多光束，不是采用在平板的两表面涂反射膜层的方法，而是采用前述的第二种方法，即适当选择入射光束，使光束在板内玻璃一空气界面的入射角略小于临界角，这样每次反射只有小部分光从板面透出，而大部分光保留在板内（图3-53）。若玻璃板相当长时（10～30）厘米，相继从板面射出的光束可达15～20条，且各光束强度相差很小，用透镜把这些光束会聚起来，在焦平面上就获得多光束的干涉。陆末-盖尔克板有一端常被切去一部分，或装置反射棱镜（图3-53），其原因是为了使光线接近垂直地射入板内，以减少光能损失。如果入射到玻璃板的是扩展光源发出的发散光束，透镜的焦平面上将有与不同入射角对应的一组条纹，它们是一些平行板面的直线（图3-53b），其强度分布和法布里-珀罗干涉条纹的强度分布相同。

陆末-盖尔克板条纹的干涉级数同样是很大的，当板的厚度是3～10毫米，板内入射角$\theta_2\approx45^\circ$时，干涉级数m是一个以万计的数目。显然，靠近板面条纹的干涉级数较小，离开板面条纹的干涉级数较大。

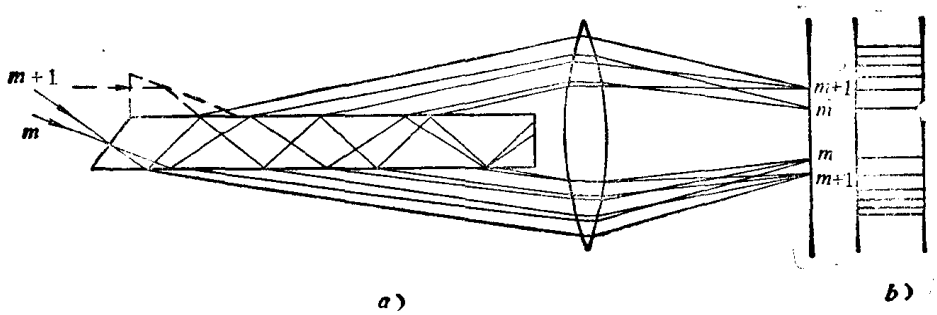


图3-53 陆末-盖尔克板产生的多光束干涉

§3-14 多光束干涉原理在薄膜理论中的应用

这里所称的薄膜，是指用物理或化学方法涂镀在玻璃或金属光滑表面上的透明介质膜。这种薄膜在近代科学技术，如人造卫星，宇宙航行，激光等尖端科学技术中有着广泛的应用，有关它的理论和研制技术已构成现代光学的一个新的领域——薄膜光学。这里不准备讨论薄膜光学的一般理论问题，而只是介绍一下多光束干涉原理在薄膜理论中的应用。以多光束干涉原理为基础的理论，特别便于我们理解薄膜的光学性质。

薄膜的最普遍的应用之一是减少光能在光学元件表面上的反射损失。在§1-7里我们曾经指出，光能在比较复杂的光学系统中的反射损失是严重的，对于一个六个透镜组成的光学系统，光能的反射损失约占一半左右。现代的一些复杂的光学系统，如变焦距物镜包括十几个透镜，光能的反射损失就更为严重。此外，光在透镜表面上的反射还造成杂散光，严重地影响光学系统的成象质量。所以，必须设法消除和减少反射光，在光学元件表面上涂镀适当厚度的透明介质膜（称增透膜或减反射膜）就是消除和减少反射光的有效办法。

除了镀增透膜之外，还可以镀制各种性能的多层高反射膜、彩色分光膜、冷光膜以及干涉滤光片等。下面我们应用多光束干涉原理分别对这些薄膜系统（简称膜系）的光学性质作一简要的讨论。

一、单层膜

在一玻璃片（薄膜光学中称为基片）的光滑表面上涂镀一层折射率和厚度都均匀的透明介质薄膜，则当光束入射到薄膜上时，将在薄膜内产生多次反射，并且从薄膜的两表面有一系列的互相平行的光束射出（图3-54），计算这些光束的干涉便可以了解薄膜对光的反射和透射性质。这种计算与前述的平行平板的多光束干涉的计算完全相同，只是需要注意的是，在这里薄膜的二界面与不同的介质相邻。

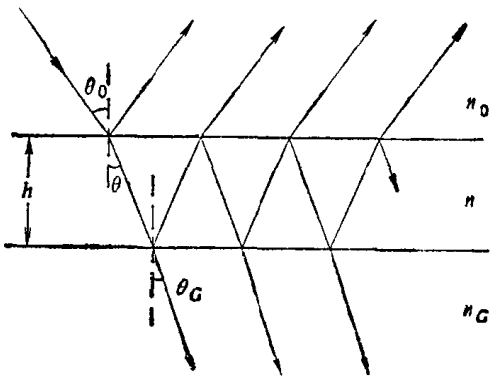


图3-54 单层介质膜的反射与透射

如图3-54所示，设薄膜的厚度为h，折射率为n，薄膜两边的空气和基片的折射率分别为n_0和n_G。并设光从空气进入薄膜时在界面上的反射系数和透射系数分别为r_1和t_1，而相反方向进行时反射系数和透射系数分别为r_1'和t_1'，光从薄膜进入基片时在界面上的反射系数和透射系数分别为r_2和t_2。注意到$r_1'=-r_1$和

$t_1t_1' = 1 - r_1^2$，则按照§3-12所述的计算平板两边射出的光束的合振幅的方法，容易算得在薄膜上反射光的合振幅为

$$A^{(r)} = \frac{r_1 + r_2 e^{i\delta}}{1 + r_1 r_2 e^{i\delta}} A^{(i)} \tag{3-111}$$

透射光的合振幅为

$$A^{(t)} = \frac{t_1 t_2}{1 + r_1 r_2 e^{i\delta}} A^{(i)} \tag{3-112}$$

式中$A^{(i)}$是入射光的振幅，δ是相继两光束由光程差所引起的位相差，其表示式为

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda} nh\cos\theta \tag{3-113}$$

式中θ是光束在薄膜中的入射角，因此，由式（3-111）和（3-112），薄膜的反射系数为

$$r = \frac{r_1 + r_2 e^{i\delta}}{1 + r_1 r_2 e^{i\delta}} \tag{3-114}$$

透射系数为

$$t = \frac{t_1 t_2}{1 + r_1 r_2 e^{i\delta}} \tag{3-115}$$

根据式（1-91）和（1-92），得到薄膜的反射率为

$$R = \frac{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos\delta}{1 + r_1^2 r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos\delta} \tag{3-116}$$

薄膜的透射率为

$$T = \frac{n_G \cos\theta_G}{n_0 \cos\theta_0} \times \frac{t_1^2 + t_2^2}{1 + r_1^2 r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos\delta} \tag{3-117}$$

式中θ_0是光束在薄膜上的入射角，θ_G是光束在基片中的折射角。从上面两式容易得到

$$R + T = 1 \tag{3-118}$$

这是没有考虑薄膜吸收时得到的结果。因此，在略去薄膜吸收的前提下，讨论薄膜的反射和透射特性时只需讨论其中之一，下面我们仅讨论前者。

当光束正入射到薄膜时，两分界面的反射系数分别为

$$r_1 = \frac{n_0 - n}{n_0 + n} \tag{3-119}$$

和

$$r_2 = \frac{n - n_G}{n + n_G} \tag{3-120}$$

把r_1和r_2的数值代入式（3-116），得到以折射率和两相继光束位相差δ表示的薄膜反射率公式

$$R = \frac{(n_0 - n_G)^2 \cos^2\frac{\delta}{2} + \left(\frac{n_0 n_G}{n} - n\right)^2 \sin^2\frac{\delta}{2}}{(n_0 + n_G)^2 \cos^2\frac{\delta}{2} + \left(\frac{n_0 n_G}{n} + n\right)^2 \sin^2\frac{\delta}{2}} \tag{3-121}$$

对于一定的基片和介质膜，n_0、n_G都是常数，所以由上式可见，介质膜的反射率将随δ而

变，因而也将随膜的光学厚度 nh 而变。图 3-55 便是对于 $n_0=1$，$n_G=1.5$ 的情况，对给定波长 λ_0 和不同折射率的介质膜，按照式（3-121）计算出的膜的反射率随光学厚度变化的曲线。根据式（3-121）和图 3-55 可以进一步讨论单层膜的光学性质。

1. 单层增透膜

由图 3-55，立即可以看出在基片上涂镀单层增透膜的可能性。事实上，只要膜的折射率小于基片的折射率，镀膜后膜系的反射率总小于未镀膜的基片的反射率，因而镀膜后有增透作用。当 $nh=\lambda_0/4$，即 $\delta=\pi$ 时，增透效果最好。在光束正入射的情况下，把 $nh=\lambda_0/4$ 或 $\delta=\pi$ 的条件代入式（3-121），可得到膜系对波长 λ_0 的反射率为

$$R_{\lambda_0}=\frac{\left(\frac{n_0n_G}{n}-n\right)^2}{\left(\frac{n_0n_G}{n}+n\right)^2}=\left(\frac{n_0-\frac{n^2}{n_G}}{n_0+\frac{n^2}{n_G}}\right)^2 \tag{3-122}$$

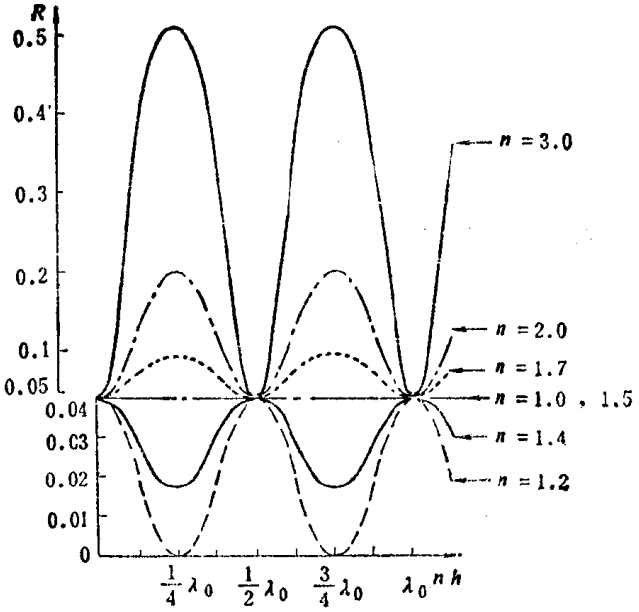


图3-55 介质膜反射率随其光学厚度的变化
($\theta_0=0$，$n_0=1$，$n_G=1.5$)

可见，当介质膜的折射率

$$n=\sqrt{n_0n_G} \tag{3-123}$$

时，膜系的反射率为零，也就是该波长的光全部透射。对于 $n_0=1$，$n_G=1.5$ 的典型情况，由式（3-123）算出 $n\approx1.22$。但是目前还找不到折射率这样低的适于镀膜的材料，通常镀制增透膜使用的材料是折射率为 1.38 的氟化镁（MgF_2），不过由于它的折射率比理想值大一些，因而反射率不为零。这时反射率约为 0.013，即仍有 1.3% 的反射。

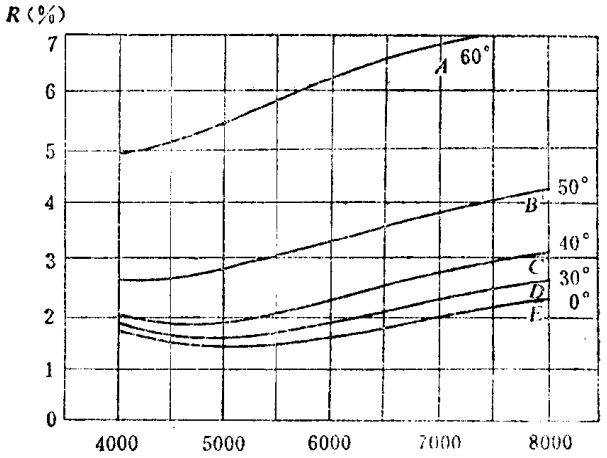


图3-56 不同入射角下单层氟化镁膜的反射率随波长的变化

应该指出，式（3-122）表示的反射率是在光束正入射情况下对给定波长 λ_0 而言的，对于光束包含的其他波长，反射率不能用该式计算，原因是介质膜的光学厚度并不等于这些波长的 1/4 倍，因而 δ 不等于 π。这时，只能按式（3-121）计算这些波长的反射率，显然，其反射率比波长 λ_0 的反射率要高一些。图 3-56 的曲线 E 便是表示在 $n_G=1.5$ 的玻璃片上涂镀光学厚度为 $\lambda_0/4$（$\lambda_0=5500$ 埃）的氟化镁膜时，膜系的反射率随波长的变化特性。从该曲线可以看出，离开 5500 埃较远的红光和兰光的反射率较大，这一特性就是通常这种膜的表面呈紫红色的原因。

还可以指出，虽然式（3-121）是在光束正入射的情况下推导出来的，但是如果我们赋于 n_0、n 和 n_G 以稍为不同的意义，式（3-121）也可以适用于光束斜入射的情况。根据菲涅耳

公式，在折射率为 n_1 和 n_2 的两介质分界面上，入射光束电矢量的 s 分量和 p 分量的反射系数分别为

$$r_s = -\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\sin(\theta_1+\theta_2)}$$

和

$$r_p = \frac{\tan(\theta_1-\theta_2)}{\tan(\theta_1+\theta_2)}$$

以上两式又可以分别写成

$$r_s = -\frac{n_2\cos\theta_2 - n_1\cos\theta_1}{n_2\cos\theta_2 + n_1\cos\theta_1} \tag{3-124}$$

和

$$r_p = \frac{\dfrac{n_2}{\cos\theta_2} - \dfrac{n_1}{\cos\theta_1}}{\dfrac{n_2}{\cos\theta_2} + \dfrac{n_1}{\cos\theta_1}} \tag{3-125}$$

易见，若对于 s 分量以 $\bar{n}$ 代替 $n\cos\theta$，对于 p 分量以 $\bar{n}$ 代替 $n/\cos\theta$，上面两式与式（3-120）形式相同，$\bar{n}$ 称为有效折射率。因此，在式（3-121）中若用相应的有效折射率代替实际折射率 n_0、n 和 n_G，就可以分别算出光束斜入射时 s 分量和 p 分量的反射率，取其平均值即为入射自然光的反射率。对于上述的在 $n_G=1.52$ 的玻璃片上涂镀光学厚度为 $\lambda_0/4$（$\lambda_0=5500$ 埃）的氟化镁增透膜的典型情况，几种入射角下计算出来的反射率随波长的变化，如图 3-56 的曲线所示。由图可见，当入射角增大时，反射率上升，同时反射率极小值的位置向短波方向移动。

2. 单层增反膜

由图 3-55 可以看出，如果单层膜的折射率 n 大于基片的折射率 n_G，则膜系的反射率比未镀膜时基片的反射率要大，单层膜起到增强反射的作用，特别当单层膜的光学厚度 $nh=\lambda_0/4$ 时，膜系对波长 λ_0 的反射率最大。在光束正入射情况下，把 $nh=\lambda_0/4$ 的条件代入式(3-121)，得到膜系对波长 λ_0 的反射率为

$$R_{\lambda_0} = \left(\frac{n_0 - \dfrac{n^2}{n_G}}{n_0 + \dfrac{n^2}{n_G}}\right)^2 \tag{3-126}$$

此式与式（3-122）形式上完全一样，但它们的含义却不相同，式（3-122）是膜系反射率在 $n_0 < n < n_G$ 情况下的极小值，而式（3-126）是膜系反射率在 $n_0 < n > n_G$ 情况下的极大值。此外，式（3-126）还表明，所选用的单层膜的折射率越高，膜系的反射率越高。对于常用的高反射率镀膜材料硫化锌 ZnS（$n=2.38$）单层膜，其最大反射率约为 33%，这种膜系可作为很好的光束分离器。但是，若实际应用中要求得到尽可能高的反射率的话，单层增反膜就不能满足要求，这时必需采用多层高反膜。

3. 半波长膜

单层膜的光学厚度为 $\lambda_0/2$ 时，由图 3-55 可见，不论单层膜的折射率是大于或小于基片的折射率，膜系对波长 λ_0 的反射率都与未镀膜时基片的反射率相同。因此，膜的光学厚度每

增加或减少 $\lambda_0/2$，对波长 λ_0 的反射率没有影响。

二、双层膜和多层膜

图 3-57 表示在玻璃基片上涂镀的双层膜，与空气相邻膜层的折射率和厚度分别设为 n_1 和 h_1，与基片相邻的膜层的折射率和厚度为 n_2 和 h_2。首先考察与基片相邻的第二层膜，它与基片组成的膜系的反射系数 $\tilde{r}$，根据式（3-114）有

$$\tilde{r}=\frac{r_2+r_3e^{i\delta_2}}{1+r_2r_3e^{i\delta_2}} \tag{3-127}$$

式中 r_2 和 r_3 分别为 n_1-n_2 分界面和 n_2-n_G 分界面的反射系数，在光束正入射时有下列值：

$$r_2=\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2},\quad r_3=\frac{n_2-n_G}{n_2+n_G}$$

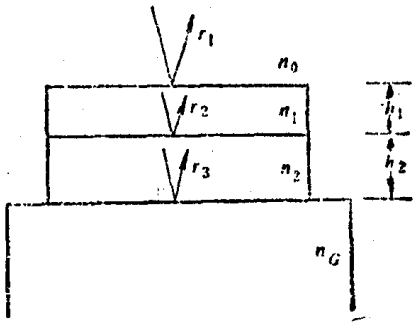


图3-57 双层膜

在光束斜入射时，式中的实际折射率代之以相应的有效折射率 $\bar{n}$。δ_2 的值为

$$\delta_2=\frac{4\pi}{\lambda}n_2h_2\cos\theta_2 \tag{3-128}$$

式中 θ_2 是光束在第二膜层中的折射角。式（3-127）表明，第二膜层的两个分界面可用一个等效分界面来表示，等效分界面的反射系数 $\tilde{r}$ 由式（3-127）给出。对这个面与空气之间夹着的第一膜层再一次应用式（3-114），即可得到光束在双层膜上的反射系数

$$r_{双}=\frac{r_1+\tilde{r}e^{i\delta_1}}{1+r_1\tilde{r}e^{i\delta_1}} \tag{3-129}$$

式中 r_1 是 n_0-n_1 分界面的反射系数，而 $\delta_1=\frac{4\pi}{\lambda}n_1h_1\cos\theta_1$，$\theta_1$ 是光束在第一膜层中的折射角。将式（3-127）表示的 $\tilde{r}$ 值代入上式，并求 $r_{双}$ 与其共轭复数的乘积，便可得到该膜系的反射率

$$R=\frac{c^2+d^2}{a^2+b^2} \tag{3-130}$$

式中

$$a=(1+r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)\cos\frac{\delta_1}{2}\cos\frac{\delta_2}{2}$$
$$-(1-r_1r_2+r_2r_3-r_3r_1)\sin\frac{\delta_1}{2}\sin\frac{\delta_2}{2} \tag{3-131 a}$$

$$b=(1-r_1r_2-r_2r_3+r_3r_1)\sin\frac{\delta_1}{2}\cos\frac{\delta_2}{2}$$
$$+(1+r_1r_2-r_2r_3-r_3r_1)\cos\frac{\delta_1}{2}\sin\frac{\delta_2}{2} \tag{3-131 b}$$

$$c=(r_1+r_2+r_3+r_1r_2r_3)\cos\frac{\delta_1}{2}\cos\frac{\delta_2}{2}$$
$$-(r_1-r_2+r_3-r_1r_2r_3)\sin\frac{\delta_1}{2}\sin\frac{\delta_2}{2} \tag{3-131 c}$$

$$d = (r_1 - r_2 - r_3 + r_1 r_2 r_3)\sin\frac{\delta_1}{2}\cos\frac{\delta_2}{2}$$

$$+ (r_1 + r_2 - r_3 - r_1 r_2 r_3)\cos\frac{\delta_1}{2}\sin\frac{\delta_2}{2} \qquad (3\text{-}131\,d)$$

对于两层以上的薄膜系统，计算更为复杂，但是利用上述等效分界面的概念，原则上可以计算任意多层膜系的反射率。如图 3-58 所示，有一个K层的膜系，各膜层的折射率为 n_1、$n_2 \cdots\cdots n_K$，厚度为 h_1，$h_2 \cdots\cdots h_K$，分界面的反射系数为 r_1、$r_2 \cdots\cdots r_{K+1}$。采用与处理双层膜相同的办法，从与基片相邻的第K层开始，用一个等效分界面来代替它，其反射系数为

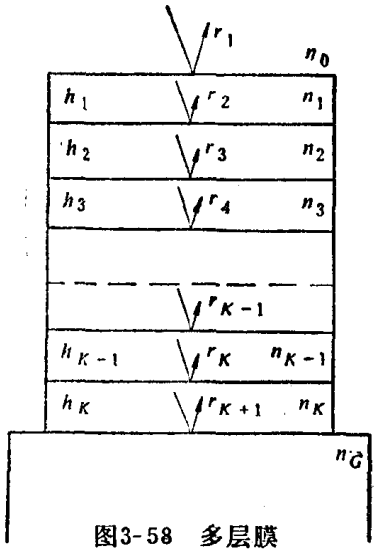


图3-58 多层膜

$$\tilde{r}_K = \frac{r_K + r_{K+1}e^{i\delta_K}}{1 + r_K r_{K+1} e^{i\delta_K}} \qquad (3\text{-}132)$$

式中

$$\delta_K = \frac{4\pi}{\lambda} n_K h_K \cos\theta_K \qquad (3\text{-}133)$$

再把第$K-1$层膜加进去，求出反射系数

$$r_{K-1} = \frac{r_{K-1} + \tilde{r}_K e^{i\delta_{K-1}}}{1 + r_{K-1}\tilde{r}_K e^{i\delta_{K-1}}} \qquad (3\text{-}134)$$

式中

$$\delta_{K-1} = \frac{4\pi}{\lambda} n_{K-1} h_{K-1} \cos\theta_{K-1} \qquad (3\text{-}135)$$

将此计算过程一直重复到与空气相邻的第一层，最终求得整个膜系的反射系数和反射率。显然，如果多层膜的层数较大时（目前有的多层膜的层数多达几十层），反射率R的表示式将非常复杂，在实际计算中都不必写出，而只需把上述递推公式排成程序，由电子计算机来进行计算。

下面简要讨论几种常用的薄膜系统。

1. 双层增透膜

根据双层膜反射率的表示式（3-130），为了使反射损失降低到零，必须令 $c = 0$ 和 $d = 0$，在光束正入射下可解得

$$\tan^2\frac{\delta_1}{2} = -\frac{n_1^2(n_G - n_0)(n_2^2 - n_0 n_G)}{(n_1^2 n_G - n_0 n_2^2)(n_0 n_G - n_1^2)} \qquad (3\text{-}136)$$

$$\tan^2\frac{\delta_2}{2} = \frac{n_2^2(n_G - n_0)(n_0 n_G - n_1)}{(n_1^2 n_G - n_0 n_2^2)(n_2^2 - n_0 n_G)} \qquad (3\text{-}137)$$

在实际应用中，常用光学厚度均为 $\lambda_0/4$，且第一层为低折射率介质（如氟化镁），第二层为高折射率介质（如硫化锌）的双层膜来达到对波长 λ_0 全增透的目的。这时若

$$n_2 = \sqrt{\frac{n_G}{n_0}}\, n_1 \qquad (3\text{-}138)$$

则可满足条件（3-136）和（3-137），使 $R_{\lambda_0} = 0$。但是，对其他波长则不然，它们的反射损

失比单层膜时更大一些。图 3-59 绘出了这种双层膜在正入射下的反射率随波长的变化曲线，可见在控制波长 λ_0 处 $R=0$，而在 λ_0 的两侧，曲线上升很快，形状如V形，所以也称为V形增透膜。这种膜一般只有当使用波段很窄时才采用。

满足条件（3-136）和（3-137）的途径很多，不限于上述情况。例如，通常也采用 $n_1h_1=\lambda_0/4$ 及 $n_2h_2=\lambda_0/2$ 的双层膜，这种膜对于波长 λ_0 来说，其反射率与仅镀光学厚度为 $\lambda_0/4$ 的第一层膜没有区别，但是对于其它波长的反射率却起了变化。图 3-60 表示了光束正入射时，与几种不同的 n_2 值对应的 $\lambda_0/4\sim\lambda_0/2$ 双层膜的反射率随波长变化关系，可见膜系在较宽的波段上有良好的增透效果。同时当 $n_2=1.85$ 时，在波长 $\lambda_1=4300$ 埃和 $\lambda_2=6300$ 埃处，反射率 $R=0$。图中诸曲线均呈W形，故也称为W形增透膜。通常拍摄彩色电视，彩色电影所用的镜头可涂镀这种双层膜。

也有三层以至多层的增透膜，它们可以在更宽的波段内获得更好增透效果。目前已有在整个可见区反射率不超过0.5%的增透膜。

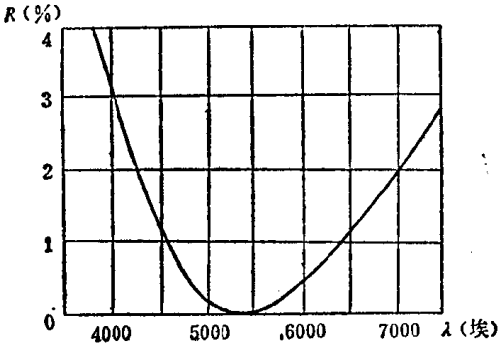


图3-59　V形双层增透膜的反射率随波长变化关系（$n_1=1.38$，$n_2=1.746$，$n_G=1.6$）

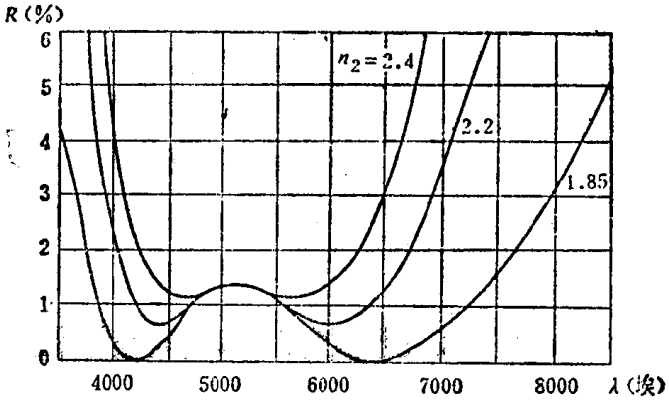


图3-60　W形双层增透膜的反射率随波长变化关系

2. 多层高反射膜

常用的多层高反射膜是一种由光学厚度均为 $\lambda_0/4$ 的高折射率层（硫化锌）和低折射率层（氟化镁）交替叠成的膜系，如图 3-61 所示。这种膜系称为 $\lambda_0/4$ 膜系，通常用下列符号表示：

$$GHLHLH\cdots LHA=G(HL)^PHA$$

$$P=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

其中 G 和 A 分别代表玻璃基片和空气，H 和 L 分别代表高折射率层和低折射率层，$2P+1$ 是膜层数。

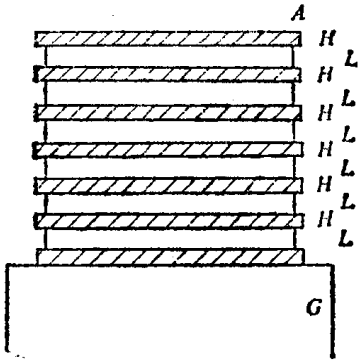


图3-61　$\lambda_0/4$ 膜系的多层高反膜示意图

这种结构的膜系之所以能够获得高反射率，从多光束干涉原理来看是很明显的。根据§3-12的讨论(式 3-84)，当平行平板两侧介质的折射率大于或小于平板的折射率时，若平板的诸反射光束中相继两光束的位相差等于 π，则该波长的反射光获得最强烈的反射。这种结构的膜系正是使它包含的每一膜层满足上述条件，所以入射光在每一膜层上都获得强烈的反射，经过若干层的反射之后，入射光就几乎全部反射回去。

一般情况下，这种膜系反射率的计算可以利用递推公式（3-134）由电子计算机来完成。对于正入射和仅考察波长 λ_0 的情况，反射率表示式有较简单的形式，由递推法不难求出这种情况下反射率的表示式为

$$R_{\lambda_0}=\left[\frac{n_0-\left(\frac{n_H}{n_L}\right)^{2P}\frac{n_H^2}{n_G}}{n_0+\left(\frac{n_H}{n_L}\right)^{2P}\frac{n_H^2}{n_G}}\right]^2 \tag{3-139}$$

式中 n_H 和 n_L 分别为高折射率层和低折射率层的折射率。易见，n_H 和 n_L 相差愈大，膜层数 $2P+1$ 愈多，膜系的反射率就愈高。例如，氦氖激光器谐振腔的全反射镜涂镀 15～19 层的硫化锌—氟化镁 $\lambda_0/4$ 膜系，λ_0 选为 6328 埃，便可使该波长的反射率高达 99.6%。

图 3-62 表示的是几种不同层数的硫化锌—氟化镁 $\lambda_0/4$（$\lambda_0=4600$ 埃）膜系的反射率特性曲线，纵座标为反射率 R，横座标以 $g=\lambda_0/\lambda$ 和 λ 标出。由图可见，随着膜层数的增加，高反射率区域趋于一个极限，其对应的波段称为该反射膜系的反射带宽。对于图示的情况，带宽约为 2000 埃。在实际工作中若要求更阔的带宽，就得对膜系的结构加以改进。例如冷光膜就是一种宽带的高反射膜。

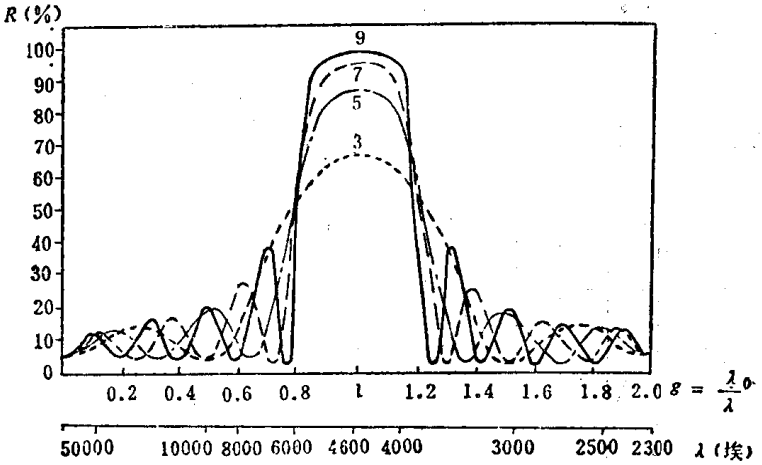


图3-62 几种不同层数的 $\lambda_0/4$ 膜系的反射率特性曲线

3. 冷光膜和彩色分光膜

冷光膜是一种既高效能地反射可见光又高效能地透射红外光的多层 $\lambda_0/4$ 膜系，它的反射带宽在 3000 埃左右。这种膜系通常涂镀在电影放映机的反光镜上，以减小电影胶片的受热和增强银幕的照度。

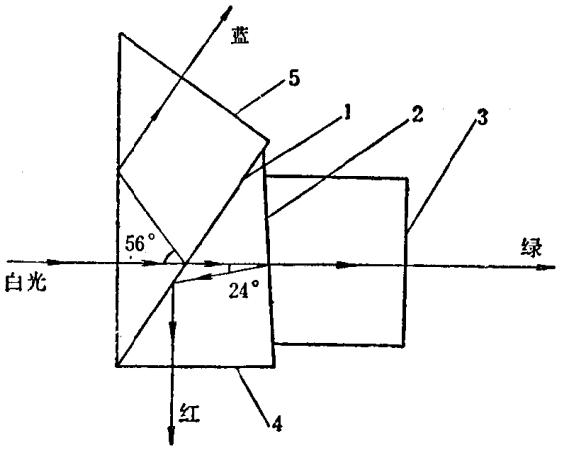


图3-63 彩色分光系统

1—反蓝透红绿彩色分光膜 2—反红透蓝绿彩色分光膜 3—绿色滤光片 4—红色滤光片 5—蓝色滤光片

理论和实践表明采用两个高反射膜堆中间加一个过渡层的膜系可以成为很好的冷光膜，例如可采用这样的结构：$G(HL)_1^4H_1L_2(HL)_3^4H_3A$，符号中的脚标 1，2，3 表示 λ_1，λ_2，λ_3 三个控制波长，而且 $\lambda_2=\frac{\lambda_1+\lambda_3}{2}$。高折射率层用硫化锌，低折射率层用氟化镁，三个控制波长为 $\lambda_1=6500$ 埃，$\lambda_2=5600$ 埃，$\lambda_3=4800$ 埃。

我们还可以镀制在可见区内有选择反射性能的彩色分光膜，例如采用膜系 $G0.5HL(HL)^6 0.5HA$（$0.5H$ 表示 $\lambda_0/8$ 硫化锌膜层，$\lambda_0=4200$ 埃）和 $G0.5L(HL)^5H0.5LA$（$0.5L$ 表示 $\lambda_0/8$ 氟化镁膜层，$\lambda_0=7000$ 埃）分别

达到反兰透红绿和反红透兰绿的效果。

彩色分光膜广泛地应用在彩色电视中，图 3-63 画出了我国生产的一种彩色电视机中所用的彩色分光系统。

三、干涉滤光片

干涉滤光片是利用多光束干涉原理制成的一种从白光中过滤出波段范围很窄的单色光的多层膜系。常用的干涉滤光片有两种，一种称为全介质干涉滤光片，其结构如图 3-64 所示。在平板玻璃 G 上镀上两组膜系 $(HL)^p$ 和 $(LH)^p$，再加上保护玻璃 G'（G 实际上也起保护膜系作用）。另一种是金属反射膜的干涉滤光片，其结构如图 3-65 所示。在平板玻璃 G 上镀一层高反射率的银膜 S，银膜之上再镀一层介质薄膜 F，然后再镀一层高反射率的银膜，最后加保护玻璃 G'。全介质滤光片的两组膜系事实上可以看成为两组高反射膜 $H(LH)^{p-1}$ 和 $(HL)^{p-1}H$ 中间夹着一个间隔层 LL，因此上述两种滤光片的原理是相同的。对比上节讨论的法布里-珀罗标准具，可以知道，干涉滤光片实际上是一种间隔很薄的法布里-珀罗标准具，所以根据平板的多光束干涉原理，很容易讨论滤光片的光学性能。

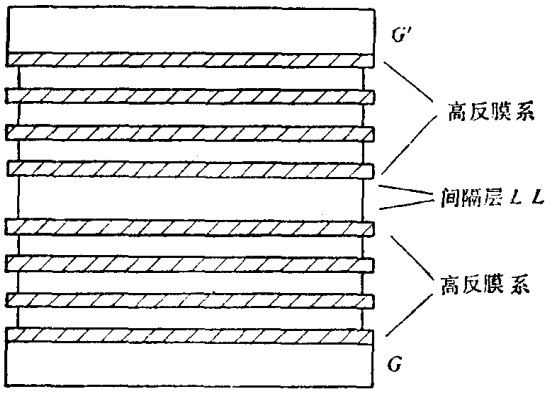


图3-64　全介质干涉滤光片（斜线薄层代表高折射率介质层，空白薄层代表低折射率介质层）

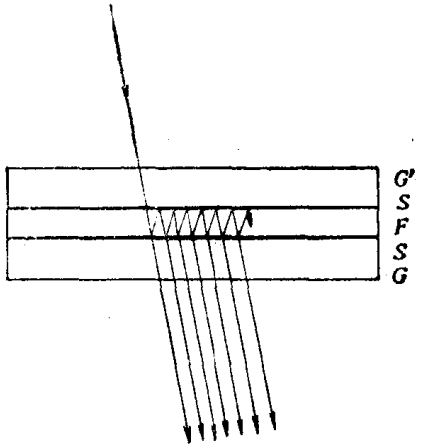


图3-65　金属反射膜干涉滤光片

干涉滤光片的光学性能主要由三个参数表征：1. 滤光片的中心波长，即透射率最大的波长，用 λ_0 表示；2. 透射带的波长半宽度 $\Delta\lambda$；3. 峰值透射率 τ。下面分别予以讨论。

1. 滤光片的中心波长，平板多光束干涉透射光产生强度极大的条件，在正入射情况下由下式给出〔参考式（3-88）〕⊖

$$2nh = m\lambda_0 \qquad m = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots \tag{3-140}$$

式中 n 和 h 分别为间隔层的折射率和厚度，m 为干涉级数，由上式可得中心波长

$$\lambda_0 = \frac{2nh}{m} \tag{3-141}$$

表明 λ_0 决定于间隔层的光学厚度 nh 和干涉级 m。对于一定光学厚度的滤光片，易见可有对应于不同 m 值的中心波长 λ_0。例如，间隔层 $n=1.5$，$h=6\times10^{-5}$ 厘米（$nh=9\times10^{-5}$ 厘米）的滤光片，在可见区有 $\lambda_0=6000$ 埃（$m=3$）和 $\lambda_0=4500$ 埃（$m=4$）两个中心波长。间隔层的厚度增大时，中心波长的数目就更多些。为了把不需要的中心波长滤去，可以附加普通

⊖ 对于金属反射膜滤光片，根据式(3-96)，产生极大的条件应为 $2nh=(m-\phi/\pi)\lambda$。

的有色玻璃滤光片⊖，因此常采用有色玻璃作为干滤光片的保护玻璃G和G'。

2. 透射带的波长半宽度。在§3-15中，已经求得透射光亮条纹（透射带）的位相半宽度〔见式（3-39）〕

$$\Delta\delta = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}$$

因为相邻两级间的波长宽度为$(\Delta\lambda)_{s.R}$（即标准具的光谱范围），对应的位相宽度为2π，所以得到透射带的波长半宽度为

$$\Delta\lambda = \frac{(\Delta\lambda)_{s.R}}{2\pi}\Delta\delta \tag{3-142}$$

把$(\Delta\lambda)_{s.R}$的表示式（3-102）和$\Delta\delta$的表示式代入上式，得到

$$\Delta\lambda = \frac{(1-R)\lambda_0^2}{\pi\sqrt{R}\cdot 2(nh)} \tag{3-143}$$

或

$$\Delta\lambda = \frac{2\lambda_0}{m\pi\sqrt{F}} \tag{3-144}$$

式中$F = \frac{4R}{(1-R)^2}$。式子表明，透射带的波长半宽度$\Delta\lambda$与干涉级m和高反射膜的反射率R成反比，m和R愈大，$\Delta\lambda$愈小，滤光片的单色性愈好。

3. 峰值透射率。峰值透射率就是对应于透射率最大的中心波长的透射光强度与入射光强度之比，即

$$\tau = \left(\frac{I^{(t)}}{I^{(i)}}\right)_{max} \tag{3-145}$$

若不考虑滤光片的吸收和散射损失时，由式（3-82），$I^{(t)}$的极大值等于$I^{(i)}$，即峰值透射率$\tau = 1$。但实际上由于高反射膜的吸收和散射造成光能损失，峰值透射率不可能等于1。特别是金属反射膜滤光片，吸收严重，峰值透射率一般在30%以下。表3-2中列出了几种滤光片的三个主要参数，可供选择滤光片时参考。

表3-2 几种干滤光片的特性

类型	中心波长（埃）	峰值透射率	波长半宽度（埃）
M-2L-M	5310	0.30	130
M-4L-M	5350	0.26	70
MLH-2L-HLM	5470	0.43	48
$M(LH)^2$-2L-$(HL)^2M$	6050	0.38	20
HLH-2L-HLH	5185	0.90	380
$(HL)^3H$-2L-$H(LH)^3$	5200	0.70	40
$(HL)^5$-2H-$(LH)^5$	6600	0.50	20

M代表金属膜；L代表光学厚度为$\lambda_0/4$的低折射率膜层，前四种，L介质是氟化镁，后三种是冰晶石；H代表光学厚度为$\lambda_0/4$的高折射率膜层，均为硫化锌。

⊖ 普通有色玻璃滤光片的优点是透射率大，缺点是透过的波长半宽度也大。还有一种用精胶加有机染料制成的精胶滤光片，可以得到很窄的波长半宽度，但透过率很小（1～10%）。干涉滤光片则兼有两者的优点。

习　题

3.1　在杨氏干涉实验中，若两小孔距离为0.4毫米，观察屏幕至小孔距离为100厘米，在观察屏幕上测得干涉条纹间距为1.5毫米，试求所用光波的波长。

3.2　波长为5893埃的钠光照在一双缝上，在距双缝100厘米的观察屏幕上测量20个条纹共宽2.4厘米，试计算双缝之间的距离。

3.3　设双缝间距为1毫米，双缝离观察屏幕为1米，用钠光灯作光源（$\lambda_1=5890$埃，$\lambda_2=5896$埃）。问两单色光干涉级为10的亮纹之间的距离多少？

3.4　在杨氏实验中，两小孔距离为0.1厘米，观察屏幕离小孔距离为50厘米，若一小孔贴上一折射率为1.58的云母薄片，发现屏幕上条纹系统移动了0.2厘米，试决定云母薄片的厚度。

3.5　杨氏实验中，两小孔距离和观察屏幕位置仍如上题，若光源是钠光灯（$\lambda=5893$埃），一小孔贴上云母片后使它的条纹系统移动了15条，试求这云母的厚度。

3.6　菲涅耳双面镜干涉实验中，单色光波长$\lambda=5000$埃，光源和观察屏幕到双面镜交线的距离分别为0.5米和1.5米，双面镜的夹角为10^{-3}弧度。（1）求观察屏幕上条纹间距；（2）屏幕上最多可以看到多少条亮条纹？

3.7　菲涅耳双面镜的夹角为1′，双面镜交线到光源和屏幕的距离分别为10厘米和1米。问光源的临界宽度为多少（所用单色光为绿光）？

3.8　菲涅耳双棱镜实验中，光源和观察屏幕到双棱镜的距离分别为10厘米和0.9米，屏幕上条纹间距为2毫米，单色光波长为5896埃，问双棱镜的折射角为多少？

3.9　若光波的波长宽度为$\Delta\lambda$，频率宽度为$\Delta\nu$，试证明$\left|\frac{\Delta\nu}{\nu}\right|=\left|\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right|$。若光波波长为6328埃，波长宽度$\Delta\lambda=2\times10^{-7}$埃，试计算它的频率宽度等于多少？它的相干长度等于多少？

3.10　有一透明薄片，两端的厚薄不等，成楔形，其折射率$n=1.5$，当波长$\lambda=6000$埃的单色光垂直照射时，从反射光中见到薄片上共有10条亮条纹，求薄片两端的厚度差。

3.11　用等厚条纹测一玻璃光楔的楔角时，在长达5厘米的范围内共有15个亮条纹。玻璃折射率$n=1.52$，所用单色光波为$\lambda=6000$埃，问此光楔的楔角有多大？

3.12　利用牛顿环测透镜的曲率半径时，测量出第10个暗环的直径为1.5厘米，若所用单色光波长为5000埃，试求透镜曲率半径。

3.13　牛顿环实验中，若透镜材料是冕牌玻璃（$n=1.5$），玻璃板由两半组成，一半仍是冕牌玻璃，另一半是火石玻璃（$n=1.75$），如图（3-66）所示，在透镜和玻璃板之间的空隙中充满苯胺（$n=1.58$），问这时牛顿环有何特征？

3.14　如图3-67所示，A、B是两块玻璃平板，D为金属细丝，O为A、B的交线，试设计一测量金属细丝直径的方案。

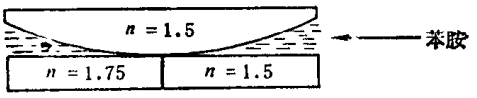


图　3-66

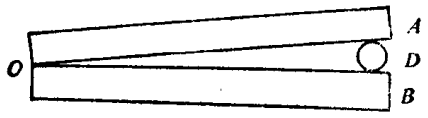


图　3-67

3.15　上题中，若B平板内表面上划了一根道子，道子方向与A、B交线垂直，问在单色光垂直照射下，看到条纹的形状如何？如何计算道子的深度？

3.16　迈克耳逊干涉仪可用来测量单色光的波长，若空气层厚度变化了0.322毫米，记录到条纹变化为1024个，求所用光波的波长。

3.17　在观察迈克耳逊干涉仪产生的等倾条纹时，若所用单色光波$\lambda=5893$埃，观察透镜的焦距为

50 厘米，求出空气层厚度为 0.5 毫米时，由中心向外计算第 5 个和第 10 个亮条纹的半径和干涉级。

3.18 一未知波长稍小于 6000 埃，与一个 6000 埃的标准波长在法布里-珀罗干涉仪上进行比较。当法布里-珀罗干涉仪的两镜面之间距离改变 1.5 毫米时，两波长条纹就重合一次，试求未知波长。

3.19 有一法布里-珀罗标准具的距离为2.5毫米，试问对 $\lambda = 5000$ 埃的光，中心条纹的级数是多少？如果在中央第一环外 1/100 条纹间距处发现另一波长的条纹，试问这波长是多少（设这波长与 5000 埃相差很小）？

3.20 已知法布里-珀罗标准具反射面的反射系数为 $r = 0.8944$，求（1）条纹半宽度，（2）条纹精细度。

3.21 在玻璃（$n = 1.5$）上镀折射率为 2.0 的单层膜，入射光波长 $\lambda = 5000$ 埃，求在正入射时给出最大反射率和最小反射率的膜厚。

3.22 在玻璃（$n = 1.6$）上镀单层增透膜，膜层材料是氟化镁，控制膜厚使得在正入射下对于波长 $\lambda = 5000$ 埃的光给出最小反射率。试求这个单层膜在下列条件下的反射率：

（1）5000 埃，$\theta_0 = 0°$ （2）6000 埃，$\theta_0 = 0°$

（3）5000 埃，$\theta_0 = 30°$ （4）6000 埃，$\theta_0 = 30°$

（5）4000 埃，$\theta_0 = 30°$

3.23 比较下面两个 7 层 1/4 λ 膜系的反射率：（1）$n_G = 1.50$，$n_H = 2.40$，$n_L = 1.38$；（2）$n_G = 1.50$，$n_H = 2.20$，$n_L = 1.38$。说明膜系折射率对膜系反射率的影响。

第四章　光的衍射

衍射是波动在传播途中遇到障碍物后所发生的偏离“直线传播”的现象。“光的衍射”也可以叫做“光的绕射”，就是光可以“绕过”障碍物而在某种程度上传播到障碍物的几何阴影区。对于声波和无线电波来说，由于它们的波长较长，在日常生活中可以很明显地觉察到它们的衍射现象；而光的衍射现象，由于光的波长较短，只有当光通过很小的孔或狭缝时才能明显地观察到。

如图 4-1 所示，让一个足够亮的点光源 S 发出的光透过一个圆孔 Σ 照射到一个屏幕 K 上，并且逐渐改变圆孔的大小，就会发现，当圆孔足够大时，在屏幕上看到一个均匀照明的光斑，光斑的大小就是圆孔的几何投影（图 a）。随着圆孔逐渐变小，起初光斑也相应地变小，而后光斑开始模糊，并在圆斑外面产生出若干围绕圆斑的同心圆环（图 b）。当使用单色点光源时，这是一组明暗相间的同心环带，当使用白光点光源时，这是一组色彩相间的彩色环带。此后再使圆孔变小，光斑及圆环不但不跟着变小，反而会增大起来。这就是光的衍射现象。杨氏干涉实验中，从针孔 S_1 和 S_2 散出的光就是针孔的衍射光。

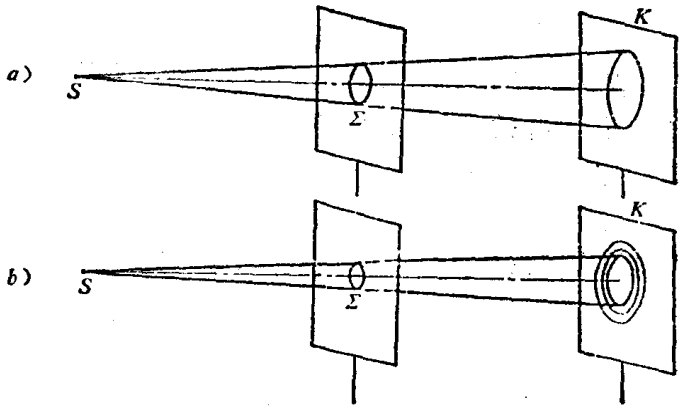


图4-1　光的衍射现象

光的衍射现象，按光源、衍射开孔（或屏障）和观察衍射的幕（可以叫做衍射场）三者之间距离的大小，通常分为两种类型：一种叫菲涅耳（Fresnel）衍射，这是光源和衍射场或者二者之一到衍射开孔（或屏障）的距离都比较小的情况；另一种叫夫琅和费（Fraunhofer）衍射，这是光源与衍射场都在离衍射物无限远处的情况。

光的衍射现象是光的波动性的有力证明，在生产和技术方面有许多重要的应用。

§4-1　惠更斯-菲涅耳原理

最早成功地用波动理论解释衍射现象的是菲涅耳，他把惠更斯（Huggens）原理用干涉的理论加以补充。

惠更斯原理是描述波的传播过程的一个原理。如图 4-2，设波源 S 在某一时刻的波阵面为 Σ，Σ 面上每一点都是一个次波源，发出球面次波。次波在随后的某一时刻的包迹面形成一个新的波阵面 Σ'。波面的法线方向就是波的传播方向。这就是惠更斯原理。

菲涅耳在研究了光的干涉现象以后，考虑到次波来自同一光源，应该相干，因而波阵面 Σ' 上每一点的光振动应该是在光源和该点间任意一个波面上发出的次波迭加的结果。这样用干涉理论补充的惠更斯原理叫作惠更斯-菲涅耳原理。

我们现在来考察一个单色点光源 S 对于任意一点 P 的光作用，如图 4-3。

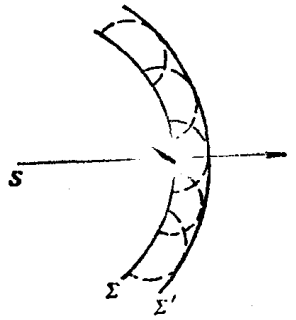


图4-2　惠更斯原理

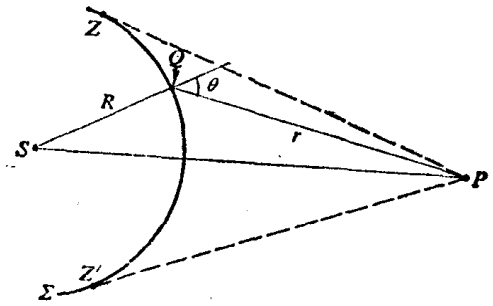


图4-3　单色点光源对 P 点的光作用

根据惠更斯-菲涅耳原理，光源 S 对 P 点的光作用可以看成 S 与 P 之间的任一个波面上各点所发出的次波在 P 点迭加的结果。如果我们不考虑时间因子 $e^{i\omega t}$，单色点光源 S 在波面 Σ 上任一点 Q 产生的光振动（复振幅 $\widetilde{E}_Q$）可以表示为 Ae^{ikR}/R，其中 A 是离点光源 S 单位距离处的光振动的振幅，而 R 是波面 Σ 的半径。在 Q 点处取元波面 $d\sigma$，则 $d\sigma$ 面的次波源发出的次波在 P 点产生的光振动（复振幅）可表示为

$$d\widetilde{E}(P) = CK(\theta)\frac{Ae^{ikR}}{R}\cdot\frac{e^{ikr}}{r}d\sigma$$

式中 $r = QP$，C 为一常数，$K(\theta)$ 为倾斜因子，表示次波的振幅随元波面法线和 QP 的夹角 θ 而变（θ 称为衍射角）。按照菲涅耳的假设，当 $\theta = 0$ 时，K 有最大值；随着 θ 的增大，K 迅速减小，当 $\theta \geqslant \frac{\pi}{2}$ 时，$K = 0$。例如波面上的 Z 和 Z' 两点，这两点处的波面法线和这两点到 P 的连线垂直，即 $\theta = \frac{\pi}{2}$，因此这两点处的次波源发出的次波对 P 点的光振动没有贡献，而只有 ZZ' 范围内的波面 Σ 上的次波源发出的次波对 P 点产生作用。显然，它们在 P 点产生的光振动的复振幅为

$$\widetilde{E}(P) = \frac{CAe^{ikR}}{R}\iint_{\Sigma}\frac{e^{ikr}}{r}K(\theta)d\sigma \tag{4-1}$$

这就是惠更斯——菲涅耳原理的数学表达式。利用这一表示式原则上可以计算任意形状开孔或屏障的衍射问题。例如，在单色点光源和观察点 P 之间放置一任意形状的开孔，则到达该开孔边缘的波面只有在开孔范围内的部分 Σ（图 4-4）对 P 点产生作用，而其余部分受到不透明屏的阻挡对 P 点不发生影响。因此，只要对开孔范围内露出的波面 Σ 完成积分（4-1），便可以求得 P 点的复振幅。但这一积分在一般情况下计算起来是很复杂的，只有在某些简单的情况下才能精确地求解。

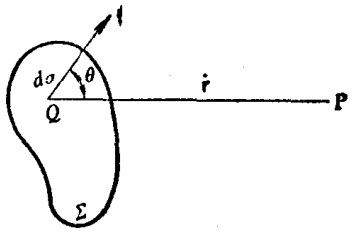


图4-4　波面 Σ 在 P 点产生的光振动

改用波面上任一点 Q 的复振幅 $\widetilde{E}_Q$ 来表示式(4-1) 中的 Ae^{ikR}/R，式（4-1）又可以写为

$$\widetilde{E}(P) = C\widetilde{E}_Q\iint_{\Sigma}\frac{e^{ikr}}{r}K(\theta)d\sigma \tag{4-2}$$

其实，式（4-2）的积分面可以选取波面，也可以选取其他曲面，只是在这样情况下，该

曲面上各点的振幅和位相是不同的。设所选取曲面或平面Σ上各点的复振幅分布为$\widetilde{E}(Q)$，则这一曲面或平面上的次波源发出的次波在P点产生的光振动的复振幅可以写为

$$\widetilde{E}(P)=C\iint_{\Sigma}\widetilde{E}(Q)\frac{e^{ikr}}{r}K(\theta)\mathrm{d}\sigma \tag{4-3}$$

§4-2 基尔霍夫衍射公式

利用公式（4-2）或（4-3）对一些简单形状的开孔的衍射现象进行计算，虽然计算出的衍射光强分布与实际的结果符合得很好，但是菲涅耳理论本身是不严格的。例如，它勉强地引入倾斜因子$K(\theta)$，缺乏理论根据。菲涅耳原理的缺点，可由基尔霍夫（Kirchhoff）的衍射理论来弥补。基尔霍夫从波动方程出发，用场论的数学工具导出了比较严格的公式（见附录Ⅳ）

$$\widetilde{E}(P)=\frac{1}{\mathrm{i}\lambda}\iint_{\Sigma}\frac{Ae^{ikl}}{l}\left[\frac{\cos(n,l)-\cos(n,r)}{2}\right]\frac{e^{ikr}}{r}\mathrm{d}\sigma \tag{4-4}$$

此式称为基尔霍夫衍射公式，它表示单色点光源发出的球面波照射到开孔平面Σ，在Σ之后任一点P处产生的光振动的复振幅（图4-5）。式中，l是点光源S到开孔平面上任一点Q的距离，r是Q点到P点的距离，(n,l)和(n,r)分别是开孔平面的法线与l和r方向的夹角。

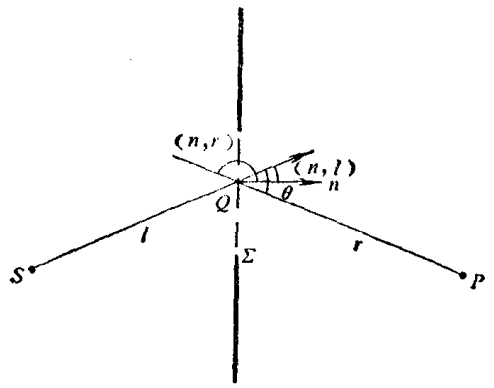


图4-5 点光源S对开孔Σ后P点的光作用

如果我们把式（4-4）写成

$$\widetilde{E}(P)=C\iint_{\Sigma}\widetilde{E}(Q)K(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}\mathrm{d}\sigma \tag{4-5}$$

其中

$$C=\frac{1}{\mathrm{i}\lambda} \tag{4-5 a}$$

$$\widetilde{E}(Q)=\frac{Ae^{ikl}}{l} \tag{4-5 b}$$

$$K(\theta)=\frac{\cos(n,l)-\cos(n,r)}{2} \tag{4-5 c}$$

可以看到，它与惠更斯-菲涅耳原理的表示式（4-3）一致。这就是说，由波动方程出发所得到的式（4-4）可以做如下的解释：P点的场是由开孔平面的无穷多个虚设的次波源产生的，而次波源的复振幅与入射波在该点的复振幅$\widetilde{E}(Q)\left(=\frac{Ae^{ikl}}{l}\right)$成正比，与λ成反比，并且，因子$\frac{1}{\mathrm{i}}(=e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}})$表明，次波源的振动位相超前于入射波90°。此外，还可以得到倾斜因子的定量表示式为$\frac{1}{2}[\cos(n,l)-\cos(n,r)]$，这表示次波的振幅在各个方向上

是不同的，其值在0与1之间。如果点光源离开孔足够远，使入射光可以看成是垂直入射到开孔的平面波，那么对于开孔平面上各点都有 $\cos(n, l)=1$，$\cos(n\cdot r)=-\cos\theta$，因而 $K(\theta)=\frac{1+\cos\theta}{2}$。当 $\theta=0$ 时，$K(\theta)=1$，表示在波面法线方向上次波的振幅最大；当 $\theta=\pi$ 时，$K(\theta)=0$，这一结论说明菲涅耳关于次波的假设〔$K\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$〕是不正确的。

在常见的衍射问题中，开孔大小比起光源 S 和观察点 P 到开孔的距离都小得多，这时若平面波垂直入射，式（4-4）可以化为较简单的形式。事实上当开孔很小时，在开孔 Σ 的范围内 θ 变化很小，因而倾斜因子可视为常量提出积分号外。在开孔 Σ 的范围内 r 的变化也不大，初看起来似乎被积函数中的分母 r 和复指数中的 r 均可以近似地视为常数，其实不然，实际上它们处于不同的地位；对于分母 r，它影响的是开孔范围内各次波源发出的次波在 P 点的振幅，显然这种影响是微小的，故 $\frac{1}{r}$ 可视为常量；但对于复指数中的 r，它影响的是次波的位相，它每变化光波波长的一半即 $\lambda/2$，就相当于位相变化 π，因而对于 P 点的次波干涉影响显著，切不可把这里的 r 看作常量。这样，在上述条件下，式（4-4）化为

$$\widetilde{E}(P)=\frac{1}{i\lambda r}\,\frac{1+\cos\theta}{2}\iint_{\Sigma}\widetilde{E}(Q)e^{ikr}d\sigma \tag{4-6}$$

下面讨论如何利用这一公式计算菲涅耳和夫琅和费衍射问题。在讨论之前，先来分析一下这两种衍射现象的特点。

§4-3 菲涅耳衍射与夫琅和费衍射

光的衍射现象可以分为两种类型——菲涅耳衍射与夫琅和费衍射，又分别称为近场衍射与远场衍射。

下面具体考察一下单色光经过衍射小孔后的衍射现象。图4-6表示一个单色平面波垂直照射到圆孔 Σ 上（圆孔直径大于波长）的情形。若在离 Σ 很近的 K_1 处观察透过的光，将看到边缘比较锐利的光斑，其形状、大小和圆孔基本相同，可看作是圆孔的投影。这时光的传播大约可看作是直线进行的。若距离再远些，例如，在 K_2 面上观察时，将看到一个边缘模糊的略大的圆光斑，光斑内有一圈圈的亮暗环，这时光斑已不能看作是圆孔的投影了。随着观察平面距离的增大，光斑范围将不断扩大，但光斑中圆环数目则逐渐减少（如 K_3 面的情况），而且环纹的中心也表现出从亮而暗，又从暗而亮的变化，当观察平面距离很远时，如在 K_4 面，将看到一个较大的中间亮边缘暗且在边缘外有较弱的亮暗圆环的光斑。此后，观察距离再增大时，只是光斑扩大，但光斑形状不变。

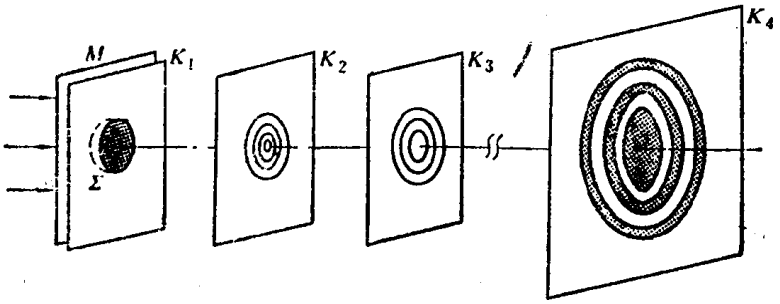


图4-6 菲涅耳衍射与夫琅和费衍射

从这一例子可以看出，在衍射孔后不同距离的地方，衍射图样是不同的。观察位置在 K_2、

K_3 及其前后的范围内的衍射现象称为菲涅耳衍射或近场衍射，而在很远处（如 K_4 面上）的衍射现象称为夫琅和费衍射或远场衍射。当然，对一定波长的光来说，远与近的距离是和衍射孔径有关的，孔径越大，相应的近场与远场的距离也愈远。此外，如果入射光波不是平面波而是发散的球面波，近场图样将移到更远的距离上，而远场图样可能不再出现。

用基尔霍夫衍射公式计算近场和远场衍射时，可以按照离衍射孔的距离把衍射公式进行化简。下面我们求出这两种衍射的近似计算公式。

考虑单色平面波垂直投射到一个开孔 Σ 上的衍射。如图 4-7 所示，设开孔平面为 x_1y_1 平面，观察平面为在距离 z 处的 xy 平面。x，y 轴分别平行于 x_1，y_1。如果 Q 点和 P 点的座标分别为（x_1，y_1）和（x，y），那么这两点之间的距离 r 可以写为

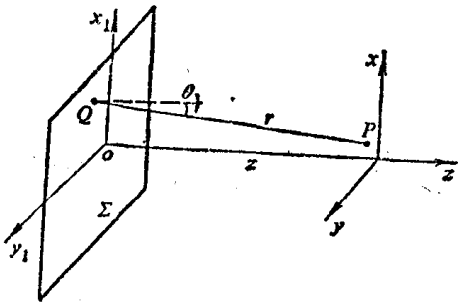


图4-7 开孔平面和观察平面的座标选取

$$r=\sqrt{z^2+(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} \tag{4-7}$$

如果观察平面与孔的距离远大于孔的线度，而且在观察平面上只考虑一个对衍射孔上各点张角不大的范围（傍轴近似）。这时，可以近似地认为式（4-6）中的 $\cos\theta\approx 1$（θ 不超过 18°时，误差不超过 5%），并可把式（4-6）分母中的 r 换成 z。在复指数中的 r 不能用 z 代替，而需要作更精确些的近似。为此，把 r 写成

$$r=\sqrt{z^2+(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=z\left[1+\left(\frac{x-x_1}{z}\right)^2+\left(\frac{y-y_1}{z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

式中 $\left(\frac{x-x_1}{z}\right)^2+\left(\frac{y-y_1}{z}\right)^2\ll 1$，对上式中的根式作二项式展开得到

$$r=z\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_1}{z}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{y-y_1}{z}\right)^2-\frac{1}{8}\left[\left(\frac{x-x_1}{z}\right)^2+\left(\frac{y-y_1}{z}\right)^2\right]^2+\cdots\right\} \tag{4-8}$$

根据 z 值的大小可以区分近场与远场衍射两种情况。

1. 近场。当 z 的大小使得在 r 的展开式（4-8）中可以略去二次方以上的项时，观察平面上的衍射是近场衍射。这时

$$r\approx z\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_1}{z}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{y-y_1}{z}\right)^2\right] \tag{4-9}$$

而

$$e^{ikr}=e^{ikz\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_1}{z}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{y-y_1}{z}\right)^2\right]}=e^{ikz}\cdot e^{\frac{ik}{2z}[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2]}$$

因此，由式（4-6）

$$\widetilde{E}(x,y)=\frac{e^{ikz}}{i\lambda z}\iint_{\Sigma}\widetilde{E}(x_1,y_1)e^{\frac{ik}{2z}[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2]}\,dx_1dy_1 \tag{4-10}$$

式中已把 $d\sigma$ 写作 dx_1dy_1。上式积分域是孔径 Σ，由于孔径 Σ 之外，复振幅 $\widetilde{E}(x_1,y_1)=0$，所以上式亦可写成对整个 x_1，y_1 平面的积分

$$\widetilde{E}(x,\ y)=\frac{e^{ikz}}{i\lambda z}\iint_{-\infty}^{\infty}\widetilde{E}(x_1,y_1)e^{\frac{ik}{2z}[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2]}\,dx_1dy_1 \qquad (4\text{-}11)$$

式（4-10）和（4-11）称为菲涅耳衍射公式。

2. 远场。把式（4-9）改写为

$$r=z-\left(\frac{x}{z}x_1+\frac{y}{z}y_1\right)+\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{z}+\frac{1}{2}\frac{x_1^2+y_1^2}{z}$$

若 z 足够大，可以略去上式中的 $\frac{1}{2}\frac{x_1^2+y_1^2}{z}$ 项⊖。

这时

$$r\approx z-\left(\frac{x}{z}x_1+\frac{y}{z}y_1\right)+\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{z}$$

$$e^{ikr}=e^{ikz}\cdot e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)}\cdot e^{-\frac{ik}{z}(xx_1+yy_1)}$$

因而式（4-6）可写成

$$\widetilde{E}(x,\ y)=\frac{e^{ikz}}{i\lambda z}e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)}\iint_{-\infty}^{\infty}\widetilde{E}(x_1,y_1)e^{-\frac{ik}{z}(xx_1+yy_1)}\,dx_1dy_1 \qquad (4\text{-}12)$$

$$\widetilde{E}(x,\ y)=\frac{e^{ikz}}{i\lambda z}e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)}\iint_{-\infty}^{\infty}\widetilde{E}(x_1,y_1)e^{-i2\pi\left(\frac{x}{\lambda z}x_1+\frac{y}{\lambda z}y_1\right)}dx_1dy_1 \qquad (4\text{-}13)$$

式（4-12）和（4-13）就是夫朗和费衍射的计算公式，在实际计算中它要比菲涅耳衍射公式简单。

§4-4 菲涅耳波带法

直接应用菲涅耳衍射公式（4-10）或（4-11）对衍射问题进行定量计算，是很复杂的。我们常常利用代数加法（菲涅耳波带法）或图解法（振幅矢量加法）代替积分运算。这些方法对于定性分析或半定量分析菲涅耳衍射现象是很方便的。这一节我们介绍菲涅耳波带法。

如图 4-8 所示，S 为一单色点光源，P 为光场中任一点，且 S 与 P 之间没有任何障碍。现在利用菲涅耳波带法求 S 对 P 点产生的光作用。

设由 S 发出的球面波在某一时刻的波面为 Σ。Σ 与 SP 连线的交点为 M，且 $MP=r_0$。以 P 为圆心，以 $r_0+\frac{\lambda}{2}$，$r_0+\lambda$，…… $r_0+\frac{j\lambda}{2}$ 为半径，在波面上作圆分波面为许多环带。在这些环带中，自相邻带的相应边缘（或两相邻带的相应点）到 P 点的光程差为半波长。

⊖ 这里只说忽略 $\frac{1}{2}(x_1^2+y_1^2)/z$，而不说忽略 $\frac{1}{2}(x^2+y^2)/z$，这是因为随着距离的增大，衍射光束的范围扩大，于是即使我们所考虑的观察点 P 到开孔中心 O 的连线与 z 轴的夹角不大，但随着 z 的增大，x，y 也增大，故不能略去这一项。

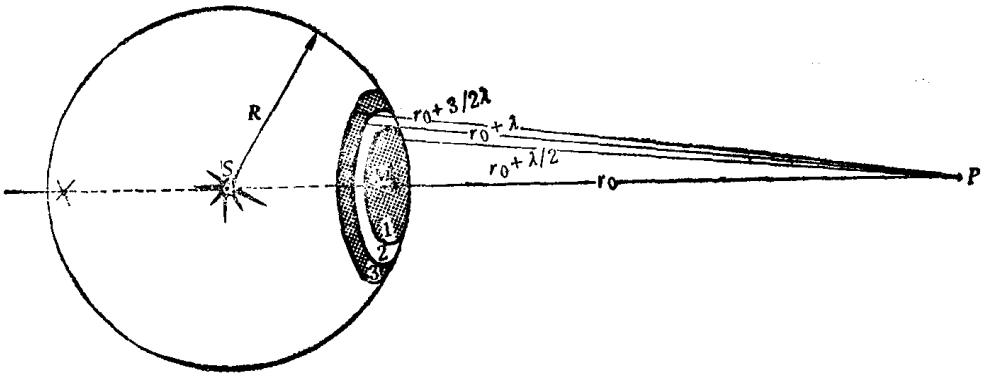


图4-8 菲涅耳波带

这些环带叫做半波带（或波带）。

显然S在P点产生的光振动，就是波面上所有波带发出的次波在P点的光振动的迭加。下面先计算每一个波带在P点产生的光振动。由惠更斯——菲涅耳原理得知，各波带在P点产生的光振动的振幅大小，取决于各带的面积，各带到P点的距离以及各带对P点的倾角（倾斜因子）。容易证明，各波带的面积相等。为此，把每一波带分成宽度为无穷小的许多环形波带元，如图4-9，波带元的面积$d\sigma$可表示为

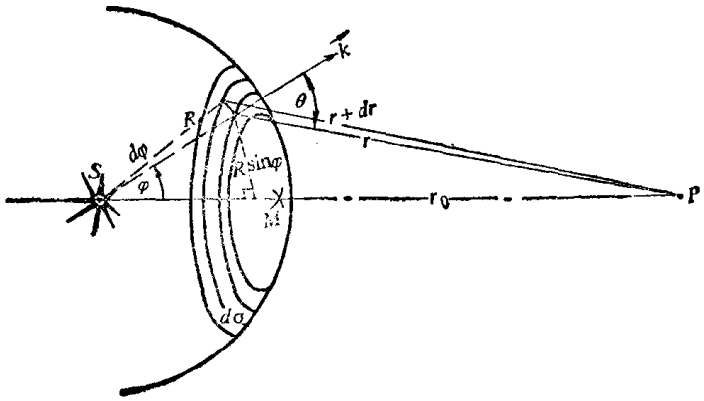


图4-9 求波带的面积用图

$$d\sigma = R d\varphi 2\pi (R\sin\varphi)$$

根据余弦定理有

$$r^2 = R^2 + (R + r_0)^2 - 2R(R + r_0)\cos\varphi$$

左边对r，右边对φ微分，则得

$$2r dr = 2R(R + r_0)\sin\varphi d\varphi$$

整理后得到

$$d\sigma = 2\pi \frac{R}{(R + r_0)} r dr$$

因此，第一个波带的面积

$$\Delta S_1 = 2\pi \frac{R}{R + r_0}\int_{r_0}^{r_0+\frac{\lambda}{2}} r\, dr = \frac{2\pi R}{R + r_0}\left(r_0\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{8}\right)$$

因为波长λ相对于R和r_0很小，λ^2项可以略去，于是有

$$\Delta S_1 = \frac{\pi R r_0 \lambda}{R + r_0} \tag{4-14}$$

同样可算出第二，第三……波带的面积也是

$$\frac{\pi R r_0 \lambda}{R + r_0}$$

物理光学八 郑

表明各波带的面积相等。当R，r_0及λ给定时，波带的面积为一常数。

这样一来，各波带在P点所产生振动的振幅，就只与各波带到P点的距离和倾角有关了。波带的序数j愈大，距离r_j和倾角θ_j亦愈大，因而各波带在P点所产生的振动的振幅将随j的增大而单调减小。设a_1，a_2，a_3……a_j分别为第一波带，第二波带……第j波带在P点所生振动的振幅，则有

$$a_1 > a_2 > a_3 \cdots > a_j$$

同时注意到，自相邻波带的相应边缘（或两相邻波带的相应点）到P点的光程差为半波长，它们发出的次波到P点的位相差为π。因此，相邻波带在P点所生振动，方向相反。若把一个波带在P点所产生的振动看作为正的，则相邻一个波带在P点所生振动为负。这样，各波带在P点所产生的振动的振幅应为

$$A_j = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{j+1} a_j \tag{4-15}$$

这是一单调下降的序列，近似有：

$$a_2 = \frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{2}, \qquad a_4 = \frac{a_3}{2} + \frac{a_5}{2} \cdots, \quad a_j = \frac{a_{j-1}}{2} + \frac{a_{j+1}}{2} \tag{4-16}$$

于是当j为奇数时，式（4-15）可写成

$$A_j = \frac{a_1}{2} + \left(\frac{a_1}{2} - a_2 + \frac{a_3}{2}\right) + \left(\frac{a_3}{2} - a_4 + \frac{a_5}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{a_{j-2}}{2} - a_{j-1} + \frac{a_j}{2}\right) + \frac{a_j}{2} \tag{4-17}$$

当j为偶数时，写成

$$A_j = \frac{a_1}{2} + \left(\frac{a_1}{2} - a_2 + \frac{a_3}{2}\right) + \left(\frac{a_3}{2} - a_4 + \frac{a_5}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{a_{j-3}}{2} - a_{j-2} + \frac{a_{j-1}}{2}\right) + \frac{a_{j-1}}{2} - a_j \tag{4-18}$$

利用式（4-16），易见有

$$A_j = \begin{cases} \dfrac{a_1}{2} + \dfrac{a_j}{2} \quad (j\text{ 为奇数时}) & (4\text{-}19) \\ \dfrac{a_1}{2} + \dfrac{a_{j-1}}{2} - a_j \quad (j\text{ 为偶数}) & (4\text{-}20) \end{cases}$$

如果j值足够大，a_{j-1}和a_j相差很少，那么有

$$\frac{a_{j-1}}{2} - a_j = -\frac{a_j}{2}$$

因此，式（4-19）和（4-20）可归并为

$$A_j = \frac{a_1}{2} \pm \frac{a_j}{2} \tag{4-21}$$

当j为奇数时取正，j为偶数时取负。

当S与P之间的波面没有受到遮蔽时，a_j实际上趋于零，因此式（4-21）变为

$$A_j = \frac{a_1}{2} \tag{4-22}$$

此式表明，没有遮蔽的整个波面对 P 点的作用等于第一个波带在该点的作用的一半。因为波带的面积是非常小的，例如对于波长 $\lambda=5000$ 埃的绿光，当 R，r_0 均为 1 米时，一个波带的面积仅为 $\frac{3}{4}$ 平方毫米，所以光能量的传播可以看作是沿着 SP 直线进行，这也是一般把光的传播看作是直线传播的道理。

当 S 与 P 之间置有衍射物时，利用上述波带法可以在一定程度上说明它的衍射现象。下面我们举圆孔衍射为例。

§4-5 菲涅耳圆孔衍射

如图 4-10 所示，在 S 与 P 之间有一带圆孔的光屏 M，圆孔中心在 SP 连线上。这时，S 对 P 的作用就只是圆孔范围内露出的一部分波面 Σ 上的那些次波源在 P 点所产生的光振动的迭加。按照波带法，分别以 P 为中心，$r_0+\frac{\lambda}{2}$，$r_0+\lambda$……为半径将露出的波面分成若干个波带。

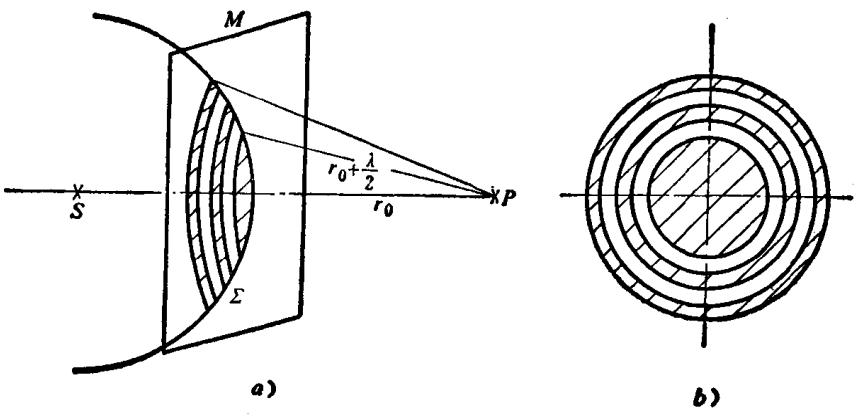


图4-10 圆孔范围内露出的波带

由式（4-21）可见，只要知道露出波面上对于 P 点所做出的波带数目就能够确定该点的振幅，从而得知该点的光强度。当在露出的波面上作出的波带为奇数个时，$A_j=\frac{a_1}{2}+\frac{a_j}{2}$，$P$ 点有最大的光强度，而为偶数个波带时，$A_j=\frac{a_1}{2}-\frac{a_j}{2}$，$P$ 点有最小的光强度。圆孔愈小，则圆孔包含的波带数愈少。a_j 与 a_1 相差也小。在此情形下，当 j 为奇数时，有

$$A_j=\frac{a_1}{2}+\frac{a_j}{2}\approx a_1$$

当 j 为偶数时，有

$$A_j=\frac{a_1}{2}-\frac{a_j}{2}\approx 0$$

这表明，当圆孔露出奇数个波带时，P 点的光强度是约等于 a_1^2 的亮点，而当圆孔露出偶数个波带时，P 点是光强度接近于零的暗点。

例如，设圆孔露出的波面对 P 点正好可划分为 5 个波带，如图 4-10 b 所示。它们在 P

点所产生振动的振幅为 $A=\frac{a_1}{2}+\frac{a_5}{2}\approx a_1$。$P$ 点是亮点。

如果在 P 处垂直于 SP 放置一观察屏 K（图 4-11 a），在屏上的其他点的光强分布也可用同样的方法求得。例如我们来考察 P_1 点。这时应以 P_1 为圆心，分别以 $r_1+\frac{\lambda}{2}$，$r_1+\lambda$ ……为半径，（r_1 为圆孔内的波面与 SP_1 连线的交点 M_1 到 P 的距离）将露出波面划分成波带。由于连线 SP_1 对圆孔已不对称，故波带变成图 4-11 b 的样子，这些波带在 P_1 点所生振动的振幅就不仅取决于它们的数目，而且也取决于每个波带露出部分的多少。精确地计算 P_1 点的合成振幅是不容易的，但可以预料，由 P 点逐渐往外，有些地方的光强较大，另一些地方的

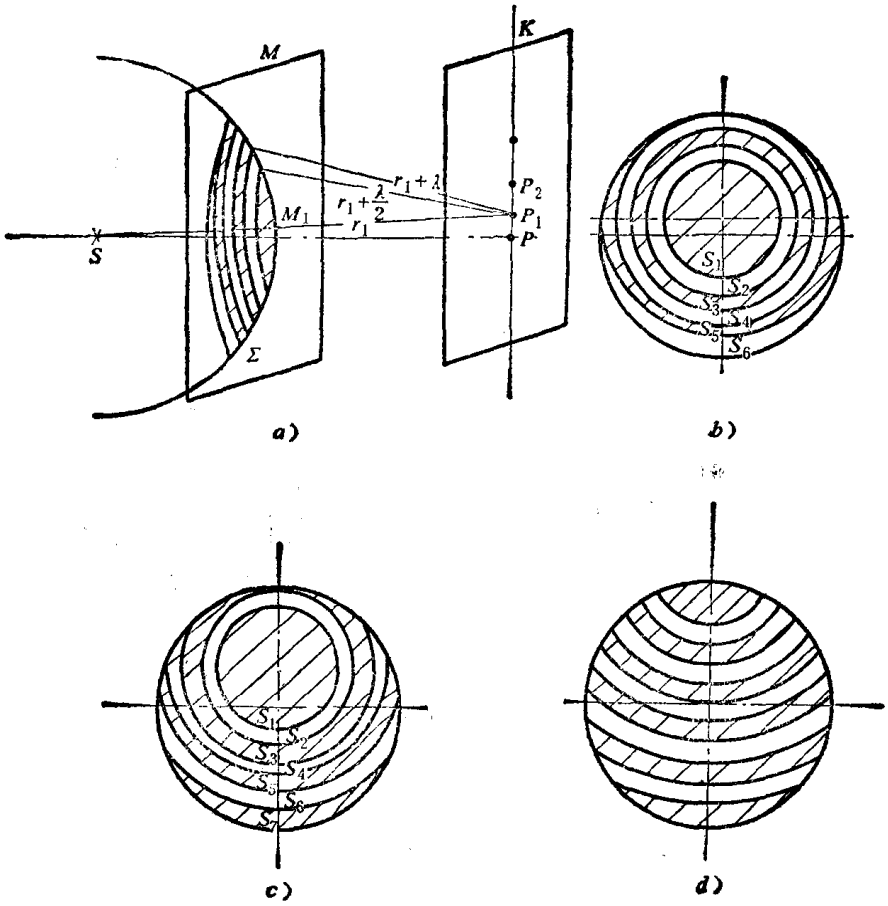


图4-11　开孔 Σ 对于 P_1 点的波带

光强较小。例如对于图 4-11 b 所示的情况，露出的波带共有 6 个，分别用 S_1，S_2，……S_6 表示它们的面积。其中 S_1 与 S_2、S_3 与 S_4 基本相等而相互抵消。S_5 由于孔径上方的切割面积减小。同时，在孔径的下方又多露出了一块 S_6。S_6 与 S_5 基本相消，故可知 P_1 的强度很小，是暗点。

如果再往外考察 P_2 点。这时波带如图 4-11 c 所示。S_1 与 S_2 相等，$S_3>S_4$，$S_5>S_6$，并又多露出一块 S_7。故 $S_1+S_3+S_5+S_7>S_2+S_4+S_6$。即还有一部分波带的作用未被抵消，因此，$P_2$ 反而比 P_1 稍亮一点。当被考察点移到更远时，露出波带将如图 4-11 d 所示，奇数带与偶数带较均匀排列，彼此相消，因此离 P 较远的地方都是暗的。

由于整个图形具有回转对称性，所以在 P 点周围呈现出亮暗交替的圆形条纹，如图 4-12

所示。中心点是亮点。

如果将观察屏沿轴向（SP 连线）移动，中心点将产生亮暗交替变化。图 4-13 表示的是中心点为暗的情形。若固定光源和观察屏的位置，当改变圆孔的大小时，在中心点上也会发生亮暗交替变化。

这些结论与几何光学所得的结论完全不同。按照几何光学的观点，在所述 SP 连线上各点都不为零并与圆孔的大小无关。但这并非说明波动光学在一切情况下都排斥几何光学。例如，当光源和所观察的 P 点到圆孔的距离为有限大而圆孔相当大时，波面所露出的波带 j 趋于无限大的数目，因此，第 j 个波带在给定点 P 上所产生的作用实际上可以忽略，结果这无限多个波带在该点的振动的振幅为

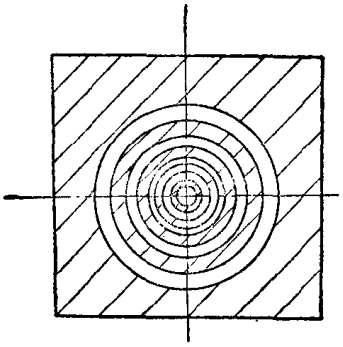


图4-12　菲涅耳圆孔衍射图样（中心亮）

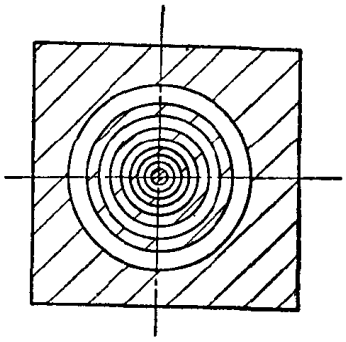


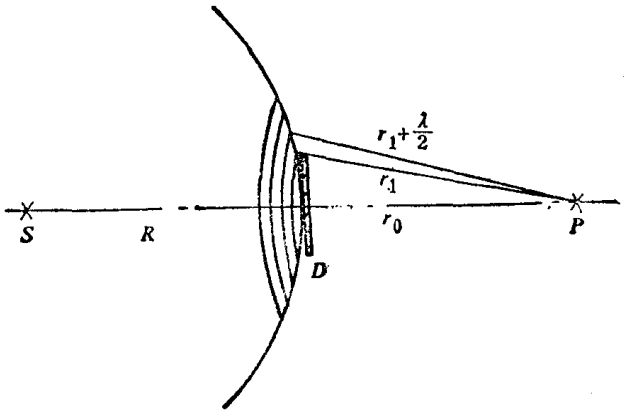
图4-13　菲涅耳圆孔衍射图样（中心暗）

$$A_\infty = \frac{a_1}{2} \pm \frac{a_j}{2} = \frac{a_1}{2}$$

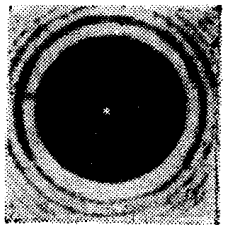
所以，所考察的直线上各点有相同的光强度。这个结论与几何学光学的结论一致。故我们可以说，几何光学是波动光学在波面对所考察的点作出的波带数目 j 趋于无限大时的极限。

§4-6　菲涅耳圆屏衍射

现在用圆屏代替圆孔。如图 4-14 所示，在点光源 S 与观察点 P 之间放置一个不透明的圆屏 D，我们来考察器屏中心和光源连线上的任一点 P 的光强度。为此，以 P 为圆心，分别以 $r_1+\frac{\lambda}{2}$，$r_1+\lambda$，……为半径（r_1 为圆屏边缘到 P 点的距离）将到达圆屏的波面划分成波带。



a)



b)

图4-14　菲涅耳圆屏衍射

这些波带对P点的作用，按照式（4-22），应是第一个波带对P点作用的一半，即

$$A=\frac{a_1}{2}$$

要注意，这里所说的第一个波带是从圆屏边缘开始计算的第一个波带。由此可知，当圆屏直径较小，第一波带的作用还相当显著时，P点是亮点，其光强度正比于$\frac{1}{4}a_1^2$。图 4-14 b 就是圆屏衍射的图样，中心是亮点，周围有一些强度较小亮暗环。对于半径很大的圆屏，它将遮住数目众多的波带，而使露出的第一个波带在P点上产生的振动的振幅a_1接近于零。于是，P点实际上是暗点。

§4-7 波 带 片

从前面的讨论可知，相对于P点划分的波带中，奇数序波带（或偶数序波带）发出的次波在P点是同位相的，而奇数序波带和偶数序波带发出的次波在P点位相相反。

因此，如果设想做成一个特殊的光栏，使得奇数序的波带畅通无阻，而偶数序的波带完全被遮去，或者使奇数序的波带被遮去而偶数序的波带能通过，那么观察点P处的振幅是同位相的诸次波的迭加。这样就会得到最大的迭加振幅，即

$$A=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2j-1}$$

或者

$$A=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2j}$$

在这种情况下，P点的光强度要比没有任何障碍而直接照射下的光强度反而增大数百倍。实际上是把波面上的等位相波带汇集在一起了，如同一个透镜作用一样。这种将奇数波带或偶数波带遮去的特殊光栏称为波带片。因为它具有透镜的作用，所以又称为菲涅耳透镜。

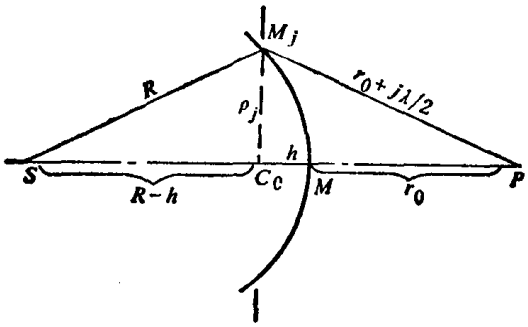


图4-15 菲涅耳透镜成象公式的推导

关于波带片具有透镜的作用，还可以从下面的分析中看出。如图 4-15 所示，圆孔中心C_0到波面中点M的距离$C_0M=h$，由$\triangle SM_jC_0$（M_j表示圆孔边缘点）可知

$$h=R-\sqrt{R^2-\rho_j^2}=R-R\left(1-\frac{\rho_j}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}\approx\frac{\rho_j^2}{2R}$$

式中R是波面的半径，而$\rho_j=M_jC_0$，j是圆孔包含的波带的数目。再由$\triangle PM_jC_0$，近似有

$$\left(r_0+\frac{j\lambda}{2}\right)^2=\rho_j^2+\left(r_0+\frac{\rho_j^2}{2R}\right)^2$$

展开后得到

$$r_0^2+r_0j\lambda+j^2\frac{\lambda^2}{4}=\rho_j^2+r_0^2+\frac{r_0\rho_j^2}{R}+\frac{\rho_j^4}{4R^2}$$

由于λ及$\frac{\rho_j^2}{R}$都是微小的量，它们的平方项与其它项相比可以忽略不计，所以有

$$r_0j\lambda=\rho_j^2+\frac{r_0\rho_j^2}{R}=\rho_j^2\left(1+\frac{r_0}{R}\right)$$

即
$$\frac{j\lambda}{\rho_j^2}=\frac{R+r_0}{Rr_0}$$

或
$$\frac{1}{\frac{\rho_j^2}{j\lambda}}=\frac{1}{r_0}+\frac{1}{R} \tag{4-23}$$

上式与透镜成象公式完全相似，式中 R 是光源点到波面的距离，相当于透镜的物距，r_0 是波面到观察点 p 的距离，相当于透镜的象距，而波带片或菲涅耳透镜的焦距 f 应为

$$f=\frac{\rho_j^2}{j\lambda} \tag{4-24}$$

若我们已经选定波长和菲涅耳透镜的焦距，则可根据式（4-24）决定每个环带的半径 ρ_j 的大小。

即

$$\rho_j=\sqrt{j\lambda f} \tag{4-25}$$

实际制造波带片时，就根据所计算的 ρ_j 画出同心圆并把偶数带或奇数带涂黑，如图 4-16 *a* 所示。但由于 ρ_j 的数值很小，常采用照相复制法来制备波带片。先在一张白纸上画出一个放大的波带片，再用照相方法缩小并复制在一个均匀性好的光学平面玻璃感光板上。通常的波带片至少有十几个环带，多可达几十个环带。环带愈多，成象的光点愈强，光点也愈小。不过用波带片使点光源成象，在象点的周围还会形成一些亮暗相间的同心圆环。

当点光源 S 比较远，波面接近于平面时，除了用上述方法作成同心环带的波带片外，还可以做成长条形的波带片（图 4-16 *b*）。带宽度也决定于相邻两条波带到达观察点 P 的程差为 $\lambda/2$。这种波带片的特点是在垂直轴平面上会聚成一条明亮的直线，直线的方向与波带片的直线条平行。如果我们把波带片做成两个正交的长条形波带片的组合，也就是形成十字形（方形）的波带片，如图 4-16 *c* 所示。这种菲涅耳透镜所成的象是一个明亮而细的十字线，它的方向与方形波带片的线条平行。

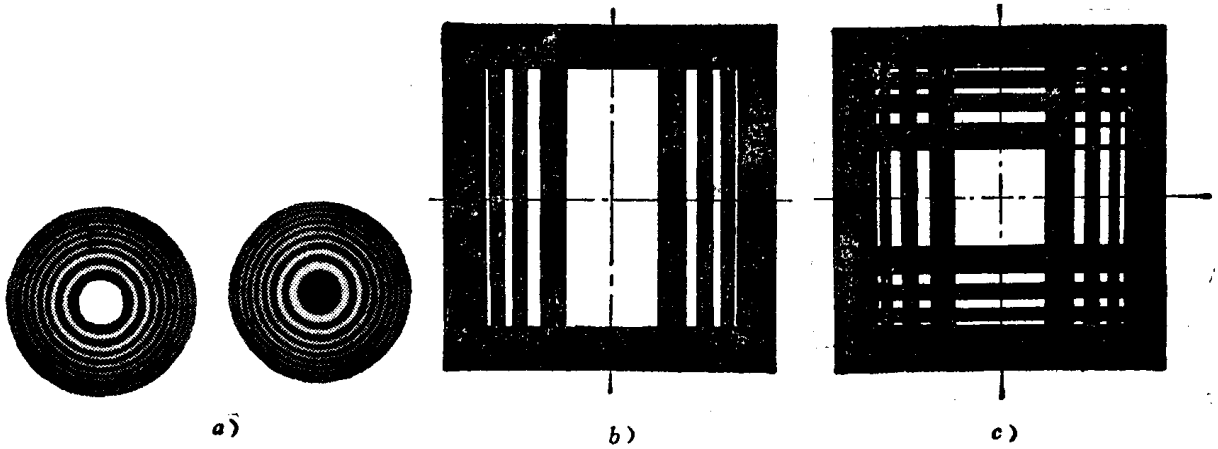


图4-16　波带片

波带片的原理虽然早已为人们所了解，但实际的应用还是在激光问世之后。下面举一个波带片用在激光准直仪中的例子。激光准直仪是一种以激光束进行定向的仪器。由于激光束仍有一定的发散角，虽采用望远系统来改善其发散度，使得光束在数百米之内的光斑大小只有数毫米左右，提高了定位精度（约 10^{-4} 左右），但这样的精度只适用于一般的筑路、采

矿、架桥等工程。对于某些大型精密设备的安装，往往提出更高的精度要求，其对准精度在数米范围内应小于0.01毫米。为了提高准直仪的对准精度，可把波带片和激光准直仪结合起来，其基本结构如图4-17所示。激光管出射的激光束射到一具可调焦的望远镜中，使出射的光束再经过焦距为f的波带片，波带片的中心调节到望远系统的光轴上，这样在某一位置上会出现一个明亮的十字线，改变R就可以在不同的r_0上获得明晰的十字亮线，这些十字亮线的中心均落在光轴上。

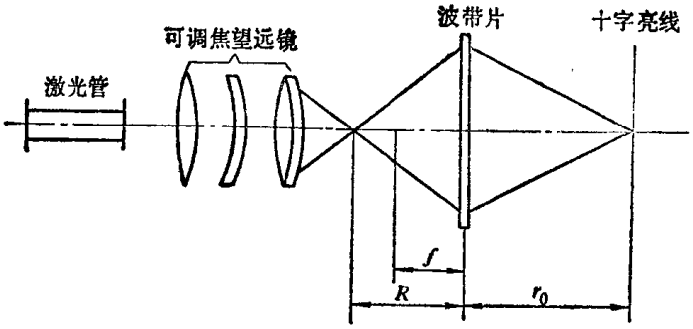


图4-17 激光准直仪

此外，波带片还在全息照相和现代综合孔径成象等方面获得了重要应用。

§4-8 菲涅耳直边衍射

现在来研究一束发散光通过一个不透明的直边（如刀片的边缘）后所产生的菲涅耳衍射现象。如图4-18所示，S代表一个垂直于图面的相干线光源，由此光源发出的光波，其波面是以光源为中心的柱面。D代表垂直于图面放置的、有一直边的不透明屏，直边平行于线光源。

在此情形，观察屏K上在与光源平行的方向上各点具有相同的振幅。为简单起见，下面采用图解法（振幅矢量加法）来计算露出波面上各次波在任一点P所产生的振动的振幅。

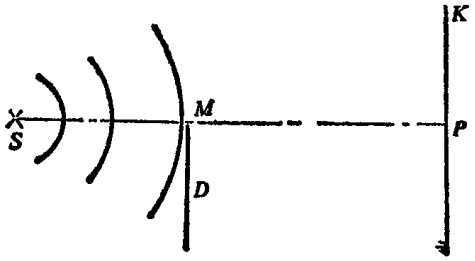


图4-18 菲涅耳直边衍射

假设直边屏D不存在时，我们来看一看如何用图解法讨论S在P点所产生的振动的振幅。这时应将柱形波面分成若干个直条状波带，如图4-19所示。并求出各波带在P点所产生振幅的迭加结果。

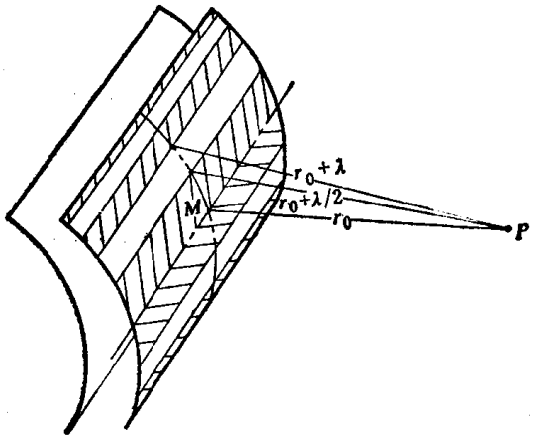


图4-19 菲涅耳直条状波带

在§4-4中已证明，在球面波面上，划分的同心环状波带的面积可近似看成相等。而在图4-19中所示的这种直条状波带的面积却是随波带序数j的增大而很快地减小的。这样一来，当波带序数j增大时，将同时因为波带面积的减小，以及到P点距离的增大和倾角θ的加大而使在P点产生的振幅迅速下降。这种下降的程度显然较环形波带为甚。因此不能直接利用在环形波带中所导出的式（4-21）来进行讨论。

现在将每一直条状波带再分成N个更窄的直条状波带元，相邻两个波带元的位相差为$\frac{\pi}{N}$。

例如自M点向上把第一个波带分成10条波带元，各带元在P点产生的振动的振幅分别为Δa_1，Δa_2，Δa_3，……Δa_{10}，用矢量加法（见§2-1）作出一条折线，则第一个波带在P点的振幅矢量如图4-20 a的$\boldsymbol{A}_1$所示。若所分带元数目N趋于无穷大，折线变为光滑的曲线。同样可得第二个直条波带在P点的振幅矢量$\boldsymbol{A}_2$。此两波带在P点的合振幅由图中的$\boldsymbol{A}$表示。这一结果与前面的环形波带的情形不同，在那里合振幅接近于零，而这里$\boldsymbol{A}$却有较大的数值。如果我们继续重复上述做法，把M以上的各波带都分成无限多个直条带元，并进行矢量作图，那么将会得到如图4-20 b所示的光滑的曲线，此曲线趋近于Z。矢量$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{OZ}$表示上半个波面上所有波带在$P$点所生振动的振幅。显然，分析下半个波面对$P$点的作用，也可以在$oxy$座标的第三象限画出一条对应的曲线。因此，上下两部分波面对P点的作用就画成图4-21所示的曲线，称为科纽（Cornu）蜷线。蜷线中两终点的连线$\overline{ZZ'}$则表示整个波面在P点所生振幅的大小。

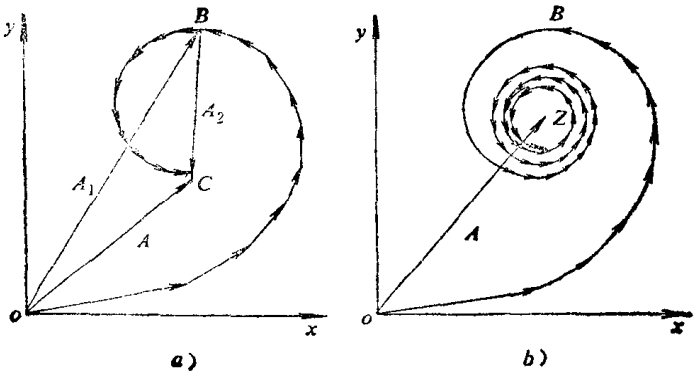


图4-20 振幅矢量加法

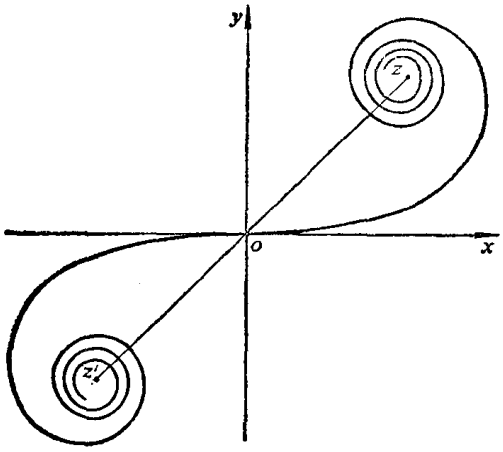


图4-21 科纽蜷线

现在回到直边衍射的问题。利用上述作图法及科纽蜷线来讨论这个问题就很方便了。

如图4-22所示，对于几何影界上的P点，直边屏D把下半部的波面全部遮拦，而只有上半部波面对P点发生作用。所以P点的振幅为不遮拦时的一半。而光强度为不遮拦时的1/4。

对于P点之上的P'点，它与光源S的连线和波面交于M'。现在将波面以SP'为对称轴分为若干个波带，自M'起为第一带，整个波面分为上下两部分。上半部波面不受遮蔽，因而它在P点所生振幅，在科纽蜷线中（图4-23）由$\boldsymbol{OZ}$表示。而下半部分波面有一部分被直边屏遮拦，仅有小部分露出的波面对P'产生作用，在图4-23中，这小部分波面的作用以$\boldsymbol{M_1'O}$表示。全部露出波面在P'点产生的振动的振幅则为$\boldsymbol{OZ}$与$\boldsymbol{M_1'O}$的矢量和，即$M_1'Z$。在图中M_1'的位置决定于P'点到P的距离。P'离P愈远，M_1'点沿蜷线愈趋近于Z'。也就是说，随着P'点位置的改变，P'的振幅或光强度是改变的。从蜷线图上显而易见，与M_2'，M_4'，……相应的点有最大的光强度，而与M_3'，M_5'，……相应的点有最小的光强度。因此，在几何影界的上方靠近P处光强度分布不均匀，有亮暗相间的衍射条纹，而在离P足够远的那些地方，光强度正比于$\overline{ZZ'}^2$，为一常数，具有均匀的光强度分布。

对于P点以下的P''点，它与光源S的连线交于波面M''点。自M''点将波面分为上下两部分。下半部波面全部被直边屏所遮，对P''点不起作用。而上半部也有一部分被屏遮

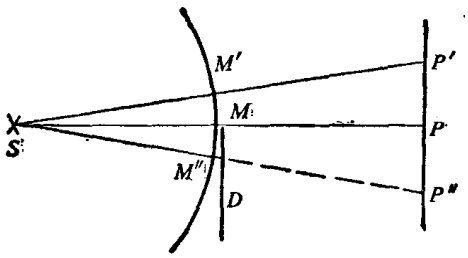


图4-22 菲涅耳直边衍射

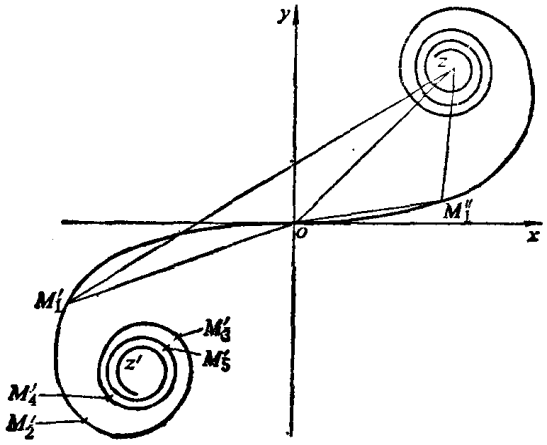


图4-23 用科纽蜷线讨论直边衍射

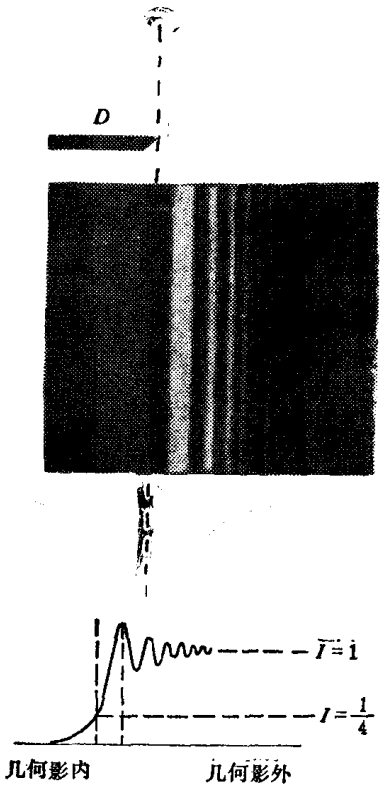


图4-24 菲涅耳直边衍射图样 a）及光强分布 b）

拦，P'' 离 P 愈远，被屏遮拦的部分愈多。在图（4-23）上 M''_1 的位置决定于 P'' 到 P 点的距离。上半部波面在 P'' 点产生的振动的振幅应是 OZ 与 OM''_1 之差，即 M''_1Z。因此，P'' 点的光强度正比于 $\overline{M''_1Z}^2$。

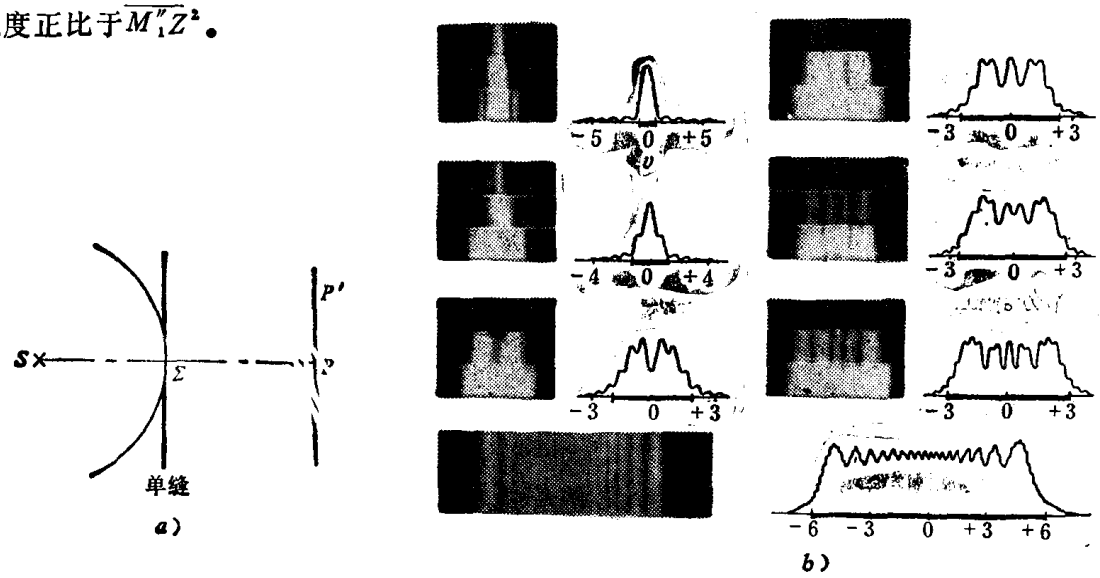


图4-25 菲涅耳单缝衍射

当 P'' 到 P 点的距离逐渐增大时，P'' 的光强度将单调减小。P'' 足够远时，光强度趋于零。根据以上的讨论，得到直边衍射有如图 4-24 所示的衍射图样及光强度分布曲线。

用科纽蜷线讨论单缝衍射也很方便。如图4-25a所示，单缝每一边就如一个直边，遮去了大部分波面 Σ，而单缝露出的波面对观察点的作用，可以在科纽蜷线上找出相应的线段来表示Θ。

在单缝衍射中，条纹强度的分布与缝的宽度有关，图 4-25 b 所示的是一些宽度不等的单缝的菲涅耳衍射图样的照片。每一组的三张照片是由三种不同曝光时间得出的。在它们旁边画出了是相应的强度曲线（横轴上的粗实线代表缝宽）。

§4-9 夫琅和费矩孔和单缝衍射

夫琅和费衍射是光学仪器中最常见的衍射现象，它的计算比菲涅耳衍射简单得多。下面利用§4-3中推导出的夫琅和费衍射公式（4-12）或（4-13）来讨论矩孔、单缝等简单开孔的衍射现象。我们将只考虑单色平行光垂直入射到开孔平面上的情况。

在计算前，先说明如何在近处观察远场衍射。如图4-26 a 所示，设 xy 平面是远离开孔平面的观察平面。按照惠更斯——菲涅耳原理，xy 平面上任一点 P 的光振动可看作是开孔处入射波面 Σ 上各点的次波波源发出的球面次波在 P 点振动的迭加。由于 P 点很远，从波面上各点到 P 点的光线是近似平行的，所以在远处 P 点的光振动也就是由 Σ 面上各点向 θ 方向传播的振动的迭加。如果在孔面后（紧靠孔面）放置一个焦距为 f 的透镜 L（图 4-26 b），则由透镜的性质，在它的焦面上的一点 P' 就是与光轴夹角为 θ 的入射平行光线的会聚点，因此，图 4-26 b 中的 P' 与图 4-26 a 中的远处的 P 点对应。所以，当利用透镜时，在它的焦面上得到的就是不用透镜时的远场衍射现象，只是空间范围缩小了，光能集中了。

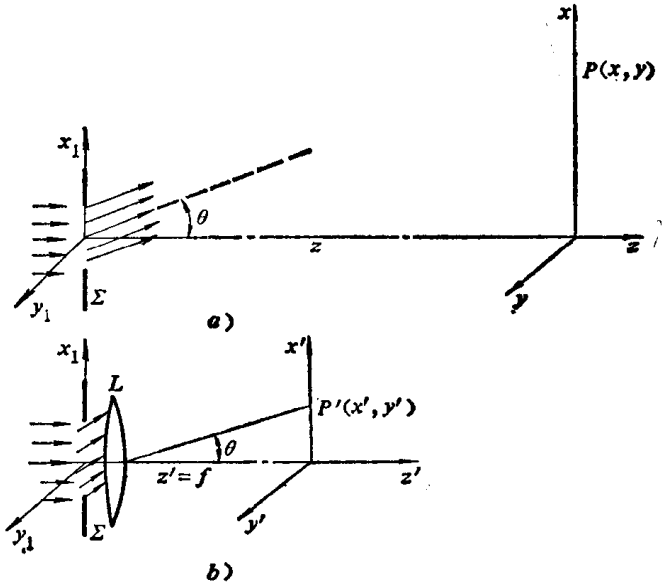


图4-26 远场与透镜后焦面对应

以后，我们讨论夫琅和费衍射问题都是在透镜的焦面上来讨论。

观察夫琅和费衍射的实验装置如图4-27所示。

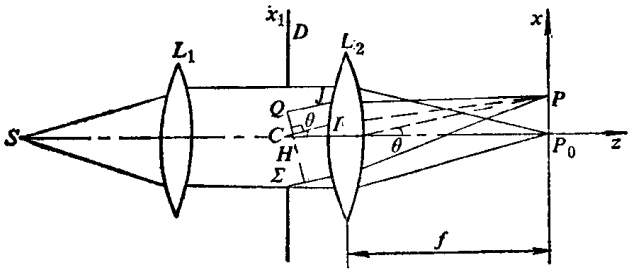


图4-27 夫琅和费衍射装置

单色点光源 S 放置在透镜 L_1 的前焦面上，平行光垂直入射到开孔 D 上，由于开孔的衍射，在透镜 L_2 的后焦面上可观察到开孔 D 的夫琅和费衍射图样。后焦面上各点的复振幅由式（4-12）或（4-13）给出，即

$$\widetilde{E}(x,\ y)=\frac{e^{ikz}}{i\lambda z}e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)}\iint_{\Sigma}\widetilde{E}(x_1,y_1)e^{-\frac{ik}{z}(xx_1+yy_1)}dx_1dy_1$$

㊀ 可参考F. A Jenkins and H. E. White：《物理光学基础》清华大学物理系译，P. 210。

或

$$\widetilde{E}(x,\ y)=\frac{e^{ikz}}{i\lambda z}e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)}\iint_{\Sigma}\widetilde{E}(x_1,y_1)e^{-i2\pi\left(\frac{x}{\lambda z}x_1+\frac{y}{\lambda z}y_1\right)}dx_1dy_1$$

在图 4-27 中，衍射孔和观察平面的座标系分别为 x_1Cy_1 和 xP_0y，光轴方向为 z。$\widetilde{E}(x,y_1)$ 表示开孔平面上的复振幅分布，显然开孔面上有均匀的光场分布，可令 $\widetilde{E}(x_1,\ y_1)=A=$ 常数。并有 $Z=f$。因此上式可写成

$$\widetilde{E}(x,\ y)=C\iint_{\Sigma}e^{-i2\pi\left(\frac{x}{\lambda f}x_1+\frac{y}{\lambda f}y_1\right)}dx_1dy_1 \tag{4-26}$$

其中令

$$u=\frac{x}{\lambda f},\qquad v=\frac{y}{\lambda f}$$

上式化为

$$\widetilde{E}(x,\ y)=C\iint_{\Sigma}e^{-i2\pi(ux_1+vy_1)}dx_1dy_1 \tag{4-27}$$

$$C=\frac{Ae^{ikz}}{i\lambda f}e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)}$$

为了更便于了解上式的具体含义，我们将图4-27画成透视图 4-28 以作进一步的分析。

对于光轴上的 P_0点，$x=y=0$，式（4-27）变成

$$\widetilde{E}_0=C\iint_{\Sigma}dx_1dy_1=C\sigma$$

σ 是开孔的面积。因此有

$$C=\frac{\widetilde{E}_0}{\sigma}$$

可见，C 表示单位波面发出的次波在 P_0 点的复振幅。㊀

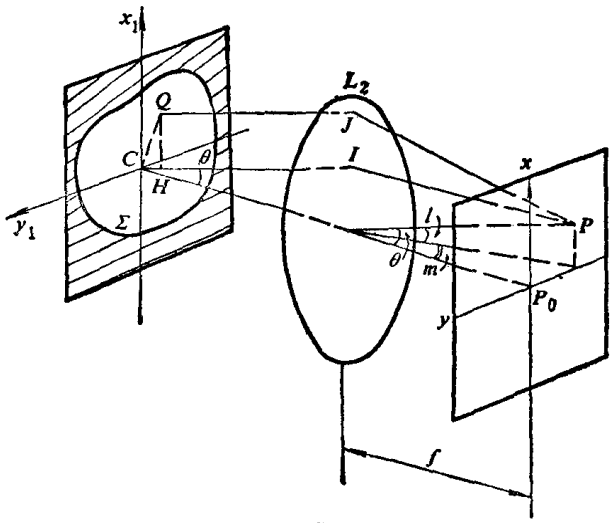


图4-28 夫琅和费衍射装置透视图

再来看观察平面上任一点 P 的复振幅，显然它是所有沿 θ 方向传播的次波在 P 点产生的复振幅的迭加。迭加结果取决于各次波到达 P 点的光程差。在孔面 Σ 上任取 Q 点，过 Q 作 $QH\perp CI$ 则由 Q 和 C 到 P 点的光程差为

$$\Delta=CH=(CP)-(QP)$$

(CP) 和 (QP) 分别表示 C、Q 到 P 点的光程。当 P 靠近 P_0 时，CI 的方向余弦表示为

$$l=\frac{x}{f},\qquad m=\frac{y}{f}$$

设 $\boldsymbol{q}$ 为 CI 方向上的单位矢量，因此光程差

㊀ 在考虑光强分布时，可直接代入这一 C 值，因为 C 随 (x,y) 的位相变化并不影响光强。

$$\Delta = CH = \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{CQ} = lx_1 + my_1 = \frac{x}{f}x_1 + \frac{y}{f}y_1$$

利用这一关系，式（4-26）可写成

$$\widetilde{E}(x,\ y) = C\iint_{\Sigma} e^{-i2\pi\left(\frac{l}{\lambda}x_1+\frac{m}{\lambda}y_1\right)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1 \tag{4-28}$$

因而，只要知道P点方向的方向余弦就可以根据式（4-28）求出P点的复振幅。

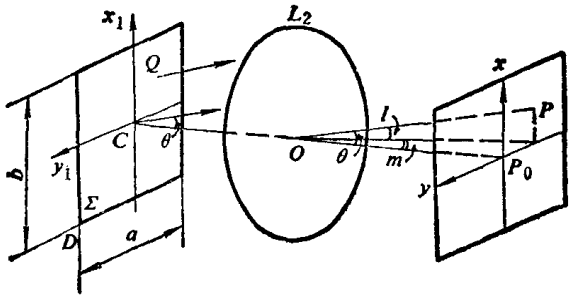


图4-29　夫琅和费矩孔衍射

一、矩孔衍射

设矩孔的长和宽分别为b和a，取座标原点位在矩孔中央。(图4-29)。现在用式（4-28）求观察平面上任一P点的振幅

$$\widetilde{E} = C\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-ik(lx_1+my_1)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1 = C\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-iklx_1}\mathrm{d}x_1\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-ikmy_1}\mathrm{d}y_1$$

$$= C\left[-\frac{1}{ikl}\left(e^{-\frac{iklb}{2}} - e^{\frac{iklb}{2}}\right)\right]\cdot\left[-\frac{1}{ikm}\left(e^{-\frac{ikma}{2}} - e^{\frac{ikma}{2}}\right)\right]$$

$$= C\frac{\sin\frac{klb}{2}}{\frac{klb}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{kma}{2}}{\frac{kma}{2}}\cdot ab = \widetilde{E}_0\frac{\sin\frac{klb}{2}}{\frac{klb}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{kma}{2}}{\frac{kma}{2}} \tag{4-29}$$

式中$\widetilde{E}_0$是矩孔在P_0点产生的复振幅

令
$$\alpha = \frac{klb}{2} \qquad \beta = \frac{kma}{2}$$

则有
$$\widetilde{E} = \widetilde{E}_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\beta} \tag{4-29a}$$

P点的光强度有

$$I = I_0\left(\frac{\sin\frac{klb}{2}}{\frac{klb}{2}}\right)^2\left(\frac{\sin\frac{kma}{2}}{\frac{kma}{2}}\right)^2 \tag{4-30}$$

和
$$I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \tag{4-31}$$

I_0为光轴上P_0点的光强度。

式中包含两个因子的乘积，一个因子依赖于座标x或方向余弦l，另一个因子依赖于座标y或方向余弦m。

现在讨论沿y轴的光强度分布。此时因为$l=0$，所以，式(4-29a)和式(4-31)分别变为

$$\widetilde{E} = \widetilde{E}_0 \frac{\sin\beta}{\beta} \tag{4-32}$$

$$I = I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \tag{4-32a}$$

易见，当 $\beta = 0$ 时，

$$I = I_0$$

所以 P_0 点有极大强度。而当 $\beta = \pm\pi$，$\pm 2\pi\cdots$ 时，

$$I = 0$$

与这些 β 值对应的点是暗点。

因为 $\beta = \frac{kma}{2}$ 而 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$，$m = \sin\theta$，所以产生强度极小（暗点）的条件为

$$a\sin\theta = n\lambda,\quad n = \pm 1,\ \pm 2\cdots \tag{4-33}$$

在两强度极小之间有一个强度次极大，这些次极大的位置可由下式求出

$$\frac{d}{d\beta}\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 = 0$$

即

$$\mathrm{tg}\,\beta = \beta \tag{4-34}$$

解此方程可利用作图法。如图4-30所示，在同一座标系中作出 $y = \mathrm{tg}\,\beta$ 的曲线和 $y = \beta$ 的直线，它们的交点即为上式的解。按它们的交点位置在图的下端画出了由光强度公式（4-32）求出的矩孔沿 y 轴的光强度分布。各级次极大值的相应数值见表（4-1）。

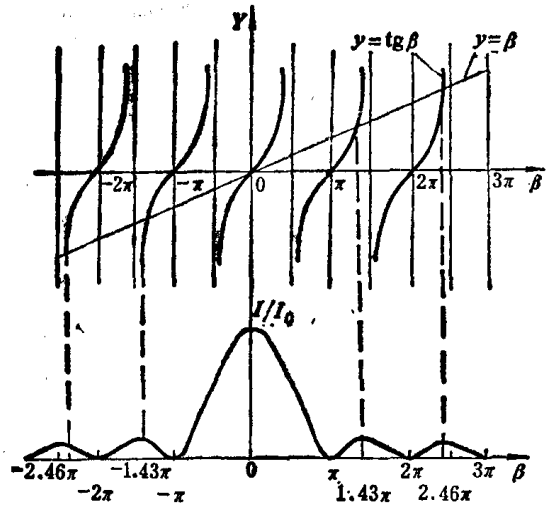


图4-30　用作图法求衍射次极大

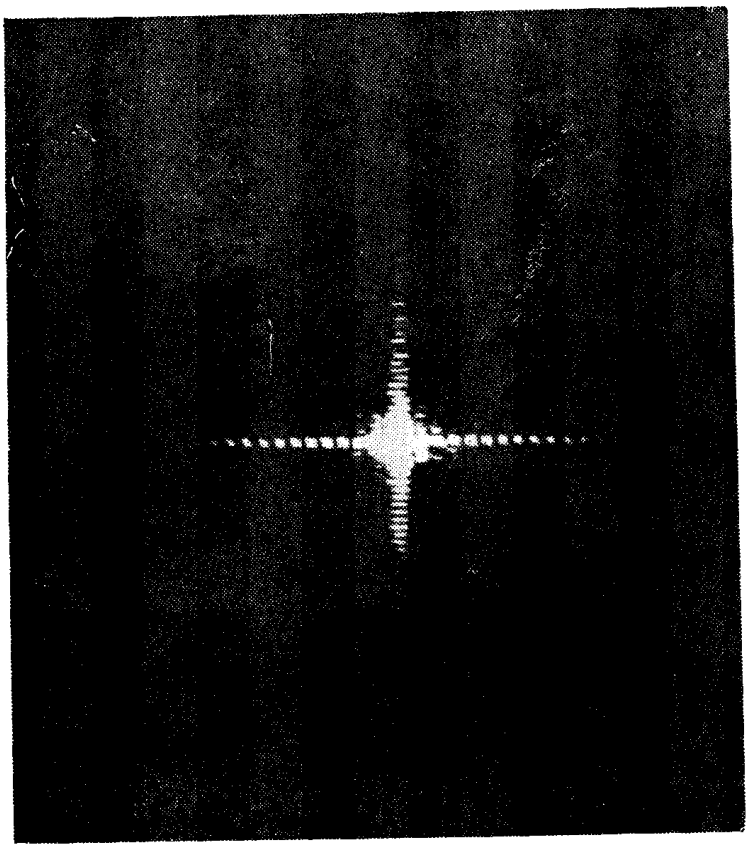
表4-1　矩孔沿 y 轴的光强度分布

β	$\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2$	
0	1	主极大
π	0	极小
$1.430\pi = 4.493$	0.04718	次极大
2π	0	极小
$2.459\pi = 7.725$	0.01694	次极大
3π	0	极小
$3.470\pi = 10.90$	0.00834	次极大
4π	0	极小
$4.479\pi = 14.07$	0.00503	次极大
5π	0	极小

沿 x 轴的光强分布由 $I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$ 决定，可利用同样的方法来讨论。如果矩孔的 a 与 b 不等，那么沿 x 轴和 y 轴相邻暗点的间距不同。若 $b > a$，则沿 x 轴较沿 y 轴的暗点间距为密，如图 4-31 的照片所示。在 x 轴和 y 轴外各点的光强要按式（4-31）计算，图 4-32 表示了一些特征点的光强度。

由上可知，除中央主极大外其它次极大值都很小，所以主要光能集中在中央。中央亮区可看作衍射弥散的主要范围，它的边缘(中央主极大两旁的第一个极小)在 x、y 轴上分别由条件

$$lb = \pm\lambda \text{ 和 } ma = \pm\lambda$$



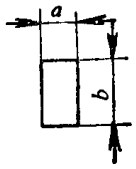


图4-31　夫琅和费矩孔衍射图样的照片

决定。在透镜后焦面上的座标位置为

$$x_0 = \pm\frac{\lambda}{b}f \qquad y_0 = \pm\frac{\lambda}{a}f$$

可见，a、b 愈小，弥散范围愈大。

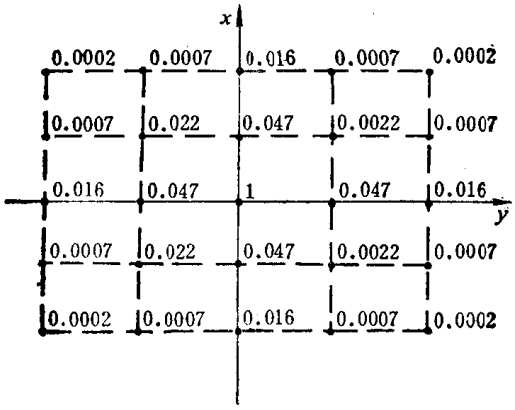


图4-32　夫琅和费矩孔衍射图样中一些特征点的强度

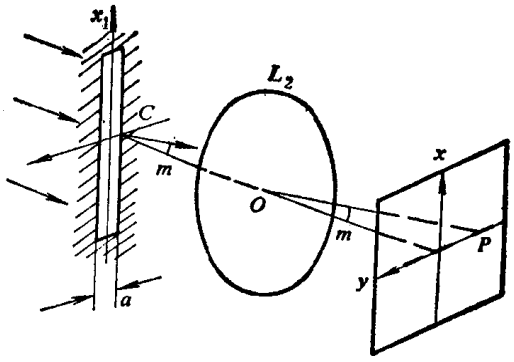


图4-33　夫琅和费单缝衍射

二、单缝衍射

如果矩孔一个方向的尺寸比另一个方向大很多，如 $b \gg a$。矩孔的衍射就变成一个单缝(狭缝)的衍射（图 4-33)。这时，沿 x 方向的衍射效应可以忽略不计，只在 y 方向有亮暗变化的衍射图样，其复振幅分布及光强度分布分别为

$$\widetilde{E} = \widetilde{E}_0 \frac{\sin\beta}{\beta} \tag{4-35}$$

$$I = I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \tag{4-35 a}$$

这一分布我们前面已经讨论过（见图 4-30）。易见，中央亮斑在

$$y_0 = \pm\frac{\lambda}{a} f$$

的范围内，或者说衍射光的能量主要在衍射角

$$\theta \approx \left|\frac{y_0}{f}\right| \leqslant \frac{\lambda}{a} \tag{4-36}$$

的范围之内。

如果将照明点光源换成一与单狭缝平行的线光源（图 4-34 a），那么在观察平面上，将形成一些与狭缝平行的亮暗条纹。图 4-34 b 就是这种条纹的照片，其中 A 为弱曝光照片，而 B 为强曝光照片。

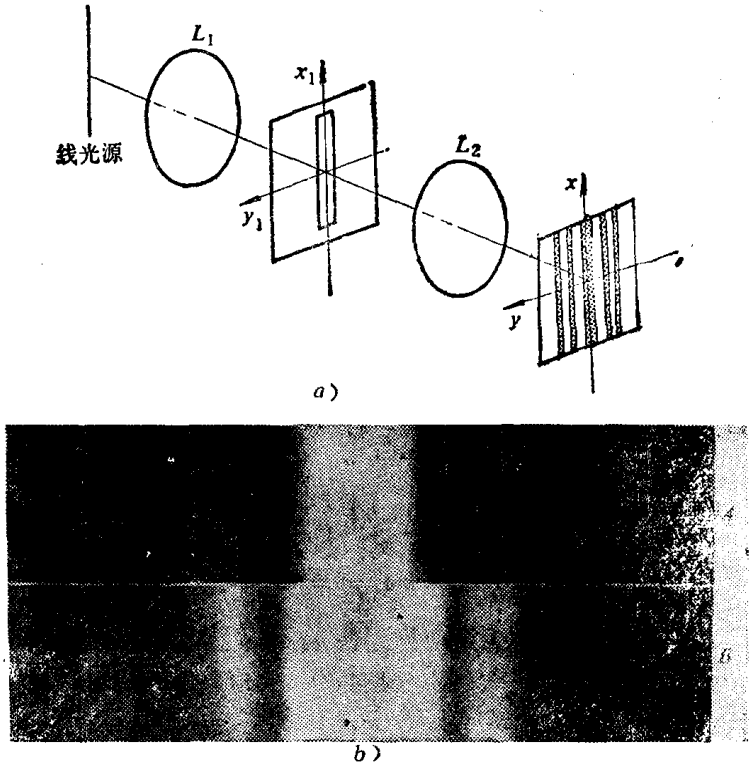


图4-34 线光源照明的夫琅和费单缝衍射

§4-10 夫琅和费圆孔衍射

光学仪器的光瞳通常都是圆形的，所以圆孔衍射对于分析光学仪器的衍射现象有着重要意义。

圆孔衍射的实验装置如图 4-35 所示，单色平行光垂直照射不透明屏上的圆孔 Σ，圆孔半径为 a。我们可以用研究矩孔衍射的类似方法来研究圆孔衍射。不过由于圆孔的回转对称性，计算时采用极座标更为方便。直角座标和极座标间有如下关系：

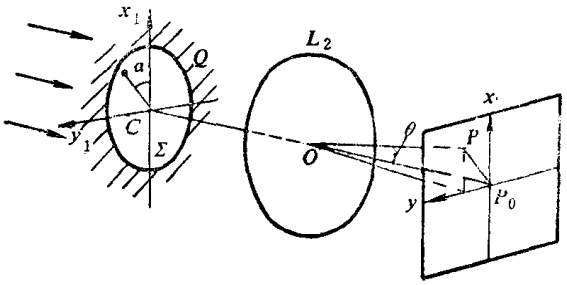


图4-35 夫琅和费圆孔衍射

$$\begin{cases} x_1 = \rho_1 \cos\alpha_1 \\ y_1 = \rho_1 \sin\alpha_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \rho\cos\alpha \\ y = \rho\sin\alpha \end{cases}$$

利用极座标，波面元

$$d\sigma = \rho_1 d\rho_1 d\alpha_1$$

$$\frac{x}{f} = \frac{\rho\cos\alpha}{f} = \theta\cos\alpha$$

$$\frac{y}{f}=\frac{\rho\sin\alpha}{f}=\theta\sin\alpha$$

代入式（4-26），得到观察平面上某一点P〔极座标（ρ、α）〕的复振幅

$$\widetilde{E}(\rho、\alpha)=c\int_0^a\int_0^{2\pi}e^{-ik(\rho_1\theta\cos\alpha_1\cos\alpha+\rho_1\theta\sin\alpha_1\sin\alpha)}\rho_1 d\rho_1 d\alpha_1$$

$$=c\int_0^a\int_0^{2\pi}e^{-ik\rho_1\theta\cos(\alpha_1-\alpha)}\rho_1 d\rho_1 d\alpha_1 \tag{4-37}$$

因为这里是轴对称的，积分结果与方位角α无关。令$\alpha=0$，即可用$\cos\alpha_1$代替$\cos(\alpha_1-\alpha)$。则式（4-37）可写成

$$\widetilde{E}(\rho、\alpha)=c\int_0^a\int_0^{2\pi}e^{-ik\rho_1\theta\cos\alpha_1}\rho_1 d\rho_1 d\alpha_1 \tag{4-38}$$

其中

$$\int_0^{2\pi}e^{-ik\rho_1\theta\cos\alpha_1}d\alpha_1=2\pi J_0(k\rho_1\theta) \tag{4-39}$$

$J_0(k\rho_1\theta)$称为零阶第一类贝塞尔（Bessel）函数。（见附录V）将它代入式（4-38）中

$$\widetilde{E}(\rho、\alpha)=2\pi c\int_0^a J_0(k\rho_1\theta)\rho_1 d\rho_1 \tag{4-40}$$

设$J_1(ka\theta)$为一阶第一类贝塞尔函数。根据贝塞尔函数的性质有

$$\int_0^{ka\theta}J_0(k\rho_1\theta)k\rho_1\theta d(k\rho_1\theta)=ka\theta J_1(ka\theta) \tag{4-41}$$

将式（4-40）改写为

$$\widetilde{E}(\rho、\alpha)=\frac{2\pi c}{k^2\theta^2}\int_0^{ka\theta}J_0(k\rho_1\theta)k\rho_1\theta d(k\rho_1\theta)$$

故得

$$\widetilde{E}(\rho、\alpha)=\pi a^2 c\frac{2J_1(ka\theta)}{ka\theta} \tag{4-42}$$

因此，P点的光强度

$$I=(\pi ac)\left[\frac{2J_1(ka\theta)}{ka\theta}\right]^2=I_0\left[\frac{2J_1(ka\theta)}{ka\theta}\right]^2 \tag{4-43}$$

令

$$ka\theta=Z$$

上式简化为

$$I=I_0\left[\frac{2J_1(Z)}{Z}\right]^2 \tag{4-44}$$

式中贝塞尔函数是一个随Z作振荡式变化的函数。可用级数表示为

$$J_1(Z)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{m!(1+m)!}\left(\frac{Z}{2}\right)^{2m+1}=\frac{Z}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{Z}{2}\right)^3+\frac{1}{2!3!}\left(\frac{Z}{2}\right)^5+\cdots$$

当$Z=0$，$\lim\limits_{Z\to 0}\frac{J_1(Z)}{Z}=\frac{1}{2}$

因此，光轴上 P_0 点的强度 $I = I_0$ 为一极大强度点。

当 $Z \neq 0$，而 $J_1(Z) = 0$ 时，$I = 0$

所以暗点位置可由 $J_1(Z) = 0$ 决定。次极大的条件是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\left[\frac{J_1(Z)}{Z}\right] = -\frac{J_2(Z)}{Z} = 0$$

式中 $J_2(Z)$ 是二阶贝塞尔函数。所以 $J_2(Z) = 0$ 则是得到亮点的条件。由于圆孔衍射的轴对称性，容易了解衍射图样是一组围绕着中央亮斑的亮暗圆环。

自函数表中分别查出 $J_1(Z) = 0$ 和 $J_2(Z) = 0$ 所对应的 Z 值，代入式（4-44）中即可求出圆孔衍射的光强度分布。表（4-2）中列出中央几个亮环和暗环的条件及光强度的大小，而图（4-36）则表示衍射图样光强度分布曲线。图（4-37）是衍射图样的照片。

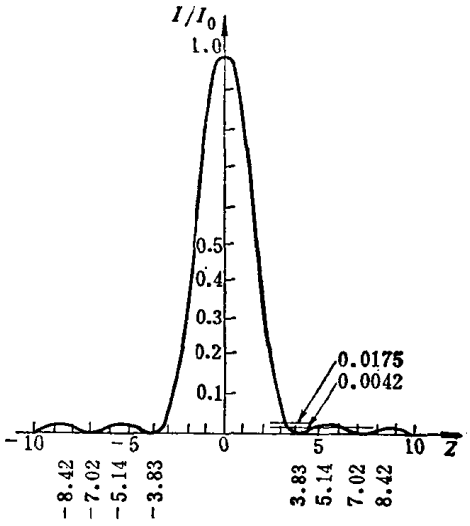


图4-36　夫琅和费圆孔衍射光强度分布

从衍射图样的强度分布可见，中央主极大的强度与周围次极大的强度相差很大，因此，在圆孔衍射中，光能也是主要集中在中央亮斑中，这一亮斑称为爱里斑，它的半径由第一个光强极小值决定，即

$$Z = ka\rho_0/f = 1.22\pi$$

$$\rho_0 = 1.22 f \frac{\lambda}{2a} \tag{4-45}$$

通常也用角半径

$$\theta_0 \approx \frac{\rho_0}{f} = 1.22\frac{\lambda}{2a} = \frac{0.61\lambda}{a} \tag{4-46}$$

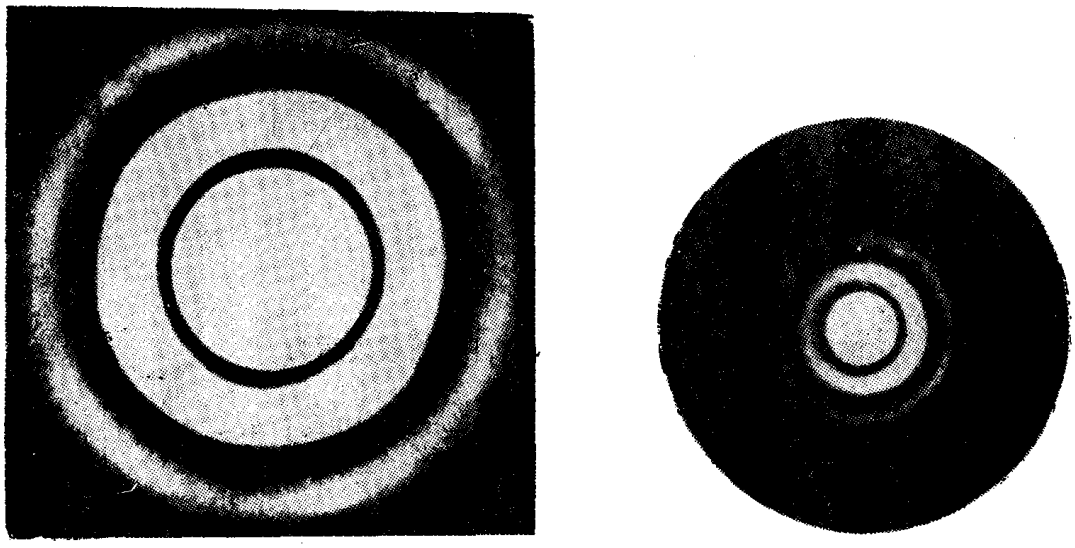


图4-37　夫琅和费圆孔衍射图样的照片

表4-2 圆孔衍射光强度分布

条纹序数	Z	$\left(\frac{2J_1(Z)}{Z}\right)^2$	光能分布
中央亮纹	0	1	83.78%
第一暗纹	$1.220\pi=3.832$	0	0
第一亮纹	$1.635\pi=5.136$	0.0175	7.22%
第二暗纹	$2.233\pi=7.016$	0	0
第二亮纹	$2.679\pi=8.417$	0.00415	2.77%
第三暗纹	$3.238\pi=10.174$	0	0
第三亮纹	$3.699\pi=11.620$	0.0016	1.46%

§4-11 光源大小对衍射条纹的影响

在任何实际的实验中，光源都有一定的大小，因此，和干涉问题的讨论一样，光源的宽度会降低条纹的可见度。图4-38表示一个用线宽度为$2l$（角宽度为2α）的光源S照明的单缝衍射系统。

光源S可以看作许多不相干的点光源总和，这些点光源发出不同方向的光波照射到单缝Σ面上。它们各在观察面上出现一组衍射图样，但彼此有相对位移。观察面上的图样乃是这些图样之和，因而造成条纹可见度的下降。

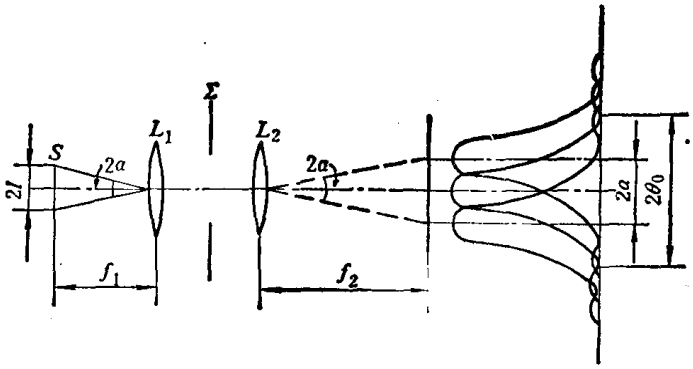


图4-38 光源有一定宽[illegible]

为简单起见，设光源上各点有相同的亮度。并以α表示光源的角半径，而$\theta_0=\frac{\lambda}{a}$则表示中央亮纹的角半径（图4-38）。

当光源较宽，且衍射孔较大时（$\theta_0<\alpha$），这时中央亮纹的扩散范围相对于光源的几何象是很小的，如图4-39a所示，因此光源的衍射象和几何象相似，在象的边缘上很难看到衍射条纹。随着光源宽度$2l$的减小，若$\alpha\approx\theta_0$，衍射效应愈来愈明显，光源的象将变得模糊，且衍射条纹也可以看见，如图4-39b所示。如果继续减小光源宽度$2l$，使$\theta_0>\alpha$，那么衍射的增宽远大于光源几何象的宽度，因此被观察到的图样和一个点光源所给出的图样就没有什么差别，我们将观察到可见度较好的衍射条纹如图4-39c所示。所以$\theta_0>\alpha$这一条件可以看作是为了产生清晰衍射条纹对光源宽度的限制条件。

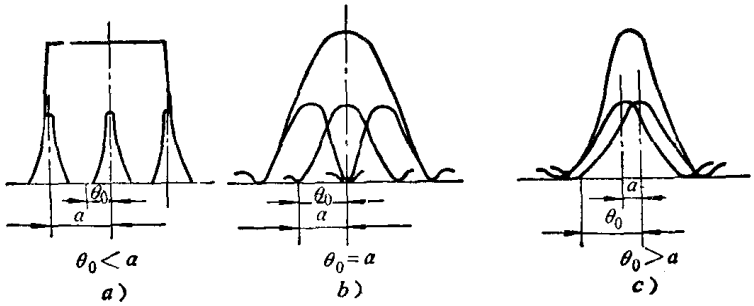


图4-39 光源宽度对衍射条纹的影响

§4-12 光学系统的分辨本领

一、理想光学系统的衍射现象

在几何光学中，认为一个理想光学系统使点物成点象。但实际上由于光的衍射，一个点物形成一个衍射象斑。这个衍射象斑就是光学系统的孔径（例如限制光束的透镜的外框或专门加进去的光栏）的夫琅和费衍射图样。这个问题可以这样理解：如图4-40 a 所示，S' 是点物 S 被透镜 L 所成的象，D 是孔径光栏。根据惠更斯-菲涅耳原理，由 S 发出的球面波受到 D 的限制，将在 S' 处产生一定分布的衍射图样。究竟是一个怎样分布的衍射图样呢？图4-40 a 所示的系统可以用图4-40 b 的系统来代替，即用两个透镜 L_1，L_2 代替透镜 L，这样 S' 与 S 仍然是共轭的物象关系，也就是这两个系统的成象作用是完全等效的。

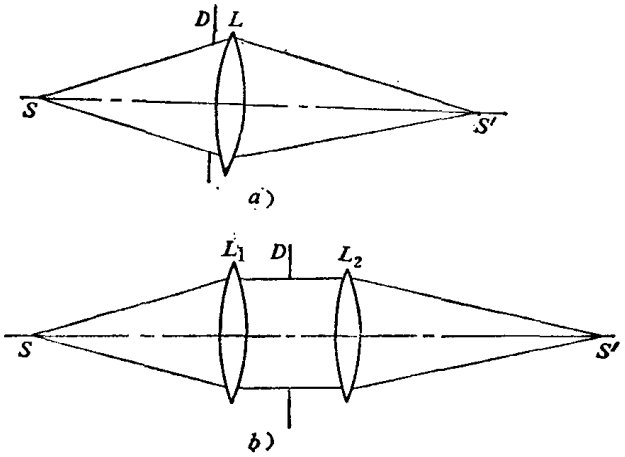


图4-40 理想光学系统的衍射

从图 4-40 b 可见，相当于一个来自无穷远的平面波受到光栏 D 的限制，因而在远场，即 L_2 的后焦面上产生孔径 D 的夫琅和费衍射。

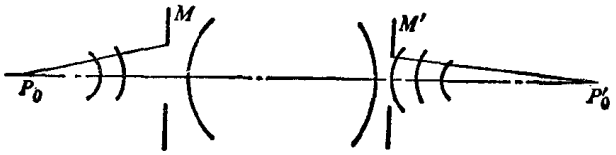


图4-41 共轭光学成象系统的衍射

下面进一步应用衍射公式来讨论一个共轴光学系统对于一个点物成象的衍射问题，通过这个讨论可以看到在光学成象仪器中考虑衍射现象的方法。

图 4-41 所示的是一共轴成象系统，轴上物点为 P_0，理想象点为 P'_0。设系统的入射光瞳与出射光瞳分别为 M 和 M'，自 P_0 点发出的球面光波经过系统后可以看作是从出瞳出来而会聚于象点 P'_0，如果系统无象差，则向 P'_0 点会聚的光波也应是球面波。但由于系统中孔径光栏的限制，从出瞳出来的波面是受到限制的波面。根据出瞳的性质，我们可以把这种限制等效地看作是出瞳限制了出射光波的波面，因而把问题归结为在象空间研究从出瞳射出的光波的衍射。这就是说，把出瞳平面等效地看作衍射屏，入射到孔上的波就是向 P'_0 点会聚的球面波。我们在图 4-42 中只画出象空间的情形，这里出瞳面就是 Σ 面，座标为 x_1，y_1，象平面就是观察平面，座标为 x，y。设出瞳中心 o 与理想象点 P'_0 的距离为 R，则通过出瞳中心 o 的波面为以 P'_0 为中心，半径为 R 的球面，这样的球面波在 Σ 平面上任一点 Q 的复振幅 $\widetilde{E}(Q)$ 可如下求出：令距离 $QP'_0=r_0$，根据球面波复振幅的表示式，并注意到这里的球面波是向 P'_0 会

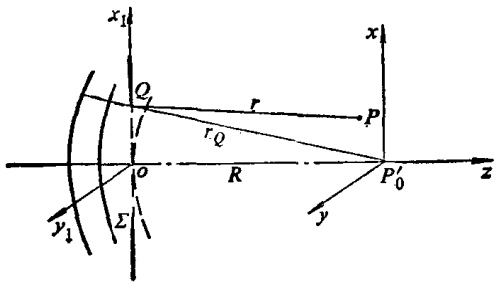


图4-42 出瞳面和象平面的座标选取

聚的，有

$$\widetilde{E}(Q)=\frac{A'e^{-ikr_Q}}{r_Q}$$

因为Σ面上各点 r_Q 不同，所以Σ面上各点有不同的复振幅。象面上在 P'_0 附近任一点 P 的复振幅可根据衍射公式

$$\widetilde{E}(P)=\frac{1}{i\lambda}\iint_{\Sigma}\widetilde{E}(Q)\frac{e^{ikr}}{r}\cdot\frac{1+\cos\theta}{2}d\sigma$$

求得。在一般的光学仪器中，从出瞳到象面的衍射不能看作夫琅和费衍射，但可以认为 R 相对于出瞳口径是足够大的。因此，可以应用菲涅耳衍射的近似公式（4-10）

$$\widetilde{E}(x,\ y)=\frac{e^{ikR}}{i\lambda R}\iint_{\Sigma}\widetilde{E}(x_1,y_1)e^{\frac{ik}{2R}[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2]}dx_1dy_1 \tag{4-47}$$

式中 $\widetilde{E}(x_1,\ y_1)$ 不是常量，现在把 r_Q 用同样近似程度表示出来：

$$r_Q=\sqrt{R^2+x_1^2+y_1^2}\approx R\left(1+\frac{x_1^2+y_1^2}{2R^2}\right)$$

因此有

$$\widetilde{E}(x_1,\ y_1)=\frac{A'}{R}e^{-ikR}e^{-\frac{ik}{2R}(x_1^2+y_1^2)}=Ae^{-ikR}e^{-\frac{ik}{2R}(x_1^2+y_1^2)}$$

式中分母上的 r_Q 近似用 R，并令 $\frac{A'}{R}=A$ 表示入射波在出瞳面上的振幅。把上式代入式（4-47）得

$$\widetilde{E}(x,\ y)=\frac{1}{i\lambda R}\iint_{\Sigma}Ae^{-\frac{ik}{2R}(x_1^2+y_1^2)}e^{\frac{ik}{2R}[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2]}dx_1dy_1$$

$$=\frac{1}{i\lambda R}e^{\frac{ik}{2R}(x^2+y^2)}\iint_{\Sigma}Ae^{-ik\left(\frac{x}{R}x_1+\frac{y}{R}y_1\right)}dx_1dy_1 \tag{4-48}$$

积分域Σ是出瞳面。把（4-48）与夫琅和费衍射公式（4-12）或与透镜后焦面场的衍射公式（4-26）相比，可以看出两者是相同的⊖，只是用 R 代替了 Z 或 f。这说明一个无象差的光学系统，对于物点所成的象也不是一个点而是一个衍射光斑。这个衍射光斑中光强的相对分布与系统孔径的夫琅和费衍射图样完全相同。在§4-9中曾经说明利用透镜可以在近处——透镜的后焦面上观察到夫琅和费衍射。现在又说明，利用透镜系统成象时，在近处——成象面上也可以产生衍射孔的夫琅和费衍射。即物点的象斑就是一个夫琅和费衍射图样。一个物体的象就是由每一个物点所对应的衍射象斑所组成的。光学系统成象的衍射现象是下面讨论光学仪器的分辨本领的理论根据。

在实验室中可以利用图4-43所示的装置来观察细小物点的成象。图中 P_0 是一个针孔（百分之几毫米的数量级），由单色光源（如水银灯）通过聚光镜照明。针孔 P_0 被透镜 L_1 与 L_2 成象于 P'。设 L_2 的口径小于 L_1 的口径，即 $D_2<D_1$，那么，P' 将是由孔径光栏 D_2 产生

⊖ （4-48）式与用 R 代入后的（4-12）式还相差一个常量位相因子 e^{ikR}。这是因为在式（4-12）中是取入射波在Σ面上（比如中心点O）振动的初位相为零〔$E(x_1,\ y_1)=A$〕，而在式（4-48）中，是取 P'_0 处的振动初位相为零（我们所用的球面波表示式是以原点振动的初位相为零的）。在本节讨论中如果是以Σ面上O点初位相为零，则球面波表示式应为 $U(Q)=Ae^{-ikr_Q}e^{ikR}$，这样将得到与式（4-12）完全相同的结果。

的夫琅和费衍射象斑。不过，这一衍射象斑只有在一定的条件下才能观察到。

首先，对针孔的大小必须加以限制，可按§4-11中所指出的$\theta_0 > \alpha$来选择针孔的直径。例如设$f_1=500$毫米，$f_2=120$毫米，$D_2=30$毫米，照明光波波长$\lambda=0.5461$微米，则有

$$\theta_0=\frac{0.61\lambda}{D_2/2}=\frac{0.61\times0.5461\times10^{-6}}{15}\approx2\times10^{-5}\text{弧度}$$

因此，针孔的角半径应有

$$\alpha<2\times10^{-5}\text{弧度}$$

针孔的直径

$$d=2f_1\alpha<2\times500\times2\times10^{-5}=0.02\text{毫米}$$

其次，一般光学系统的口径都较大，因而，衍射光斑很小，所以需要用显微镜放大，人眼才能观察到衍射象。在上例中，中央亮斑的宽度

$$d'=2f_2\theta_0=2\times120\times2\times10^{-5}\approx0.005\text{毫米}$$

肉眼直接去观察这个衍射象，细节就不能看出来。但如果用足够倍数的显微镜观察，则可发现在中央亮斑的周围的衍射圆环。

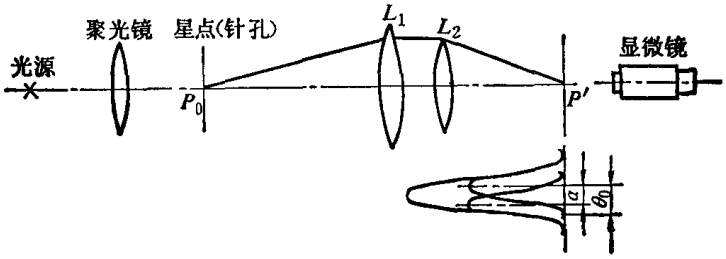


图4-43 望远物镜的星点检验装置

一个实际的光学系统总是或多或少地存在着象差。这时，小孔象的衍射图样与理想光学系统有所差别，衍射条纹的形状、强度分布要发生变化。在光学工厂中常常通过比较不同镜头或光学系统产生的小孔（常常称为星点）衍射图样来检验它们的成象质量的优劣，这种方法称为星点检验。图4-43也是一个检验望远物镜L_2的装置。

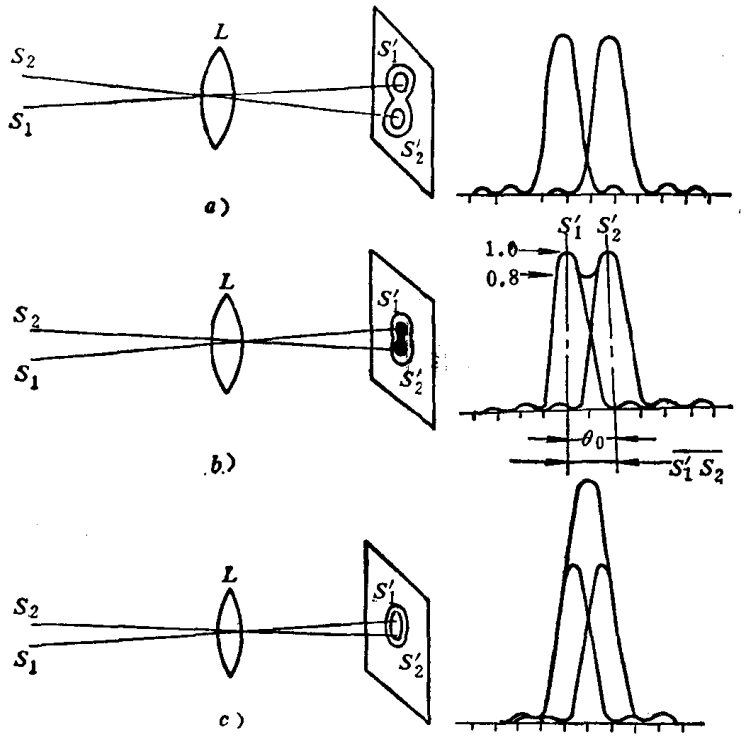


图4-44 光学系统的分辨本领

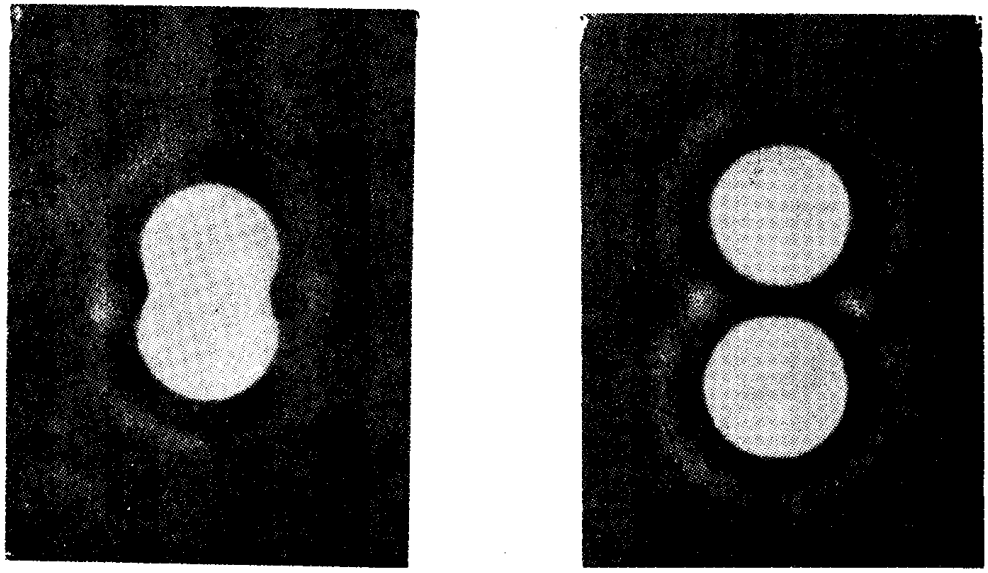
二、光学系统的分辨本领

分辨本领就是光学系统分辨细微结构的能力。从几何光学观点来看，一个无象差的理想光学系统的分辨本领是无限的。但实际上，由于衍射的存在，既使是理想光学系统，它的分辨本领也是有限的。我们通过图4-44来说明衍射现象对光学系统分辨本领的影响。

在图4-44中，S_1和S_2为发光强度相同的两个独立的发光点，L代表所研究的光学系统。自S_1和S_2发出的光通过

L，在其象面上形成衍射图样 S_1' 和 S_2'。若 S_1 与 S_2 相距不很近，则有图 a 所示的情况：两衍射图样相距较远，人们可以毫不怀疑地判断这是两个物点所成的象。图 a 的右边画出了相应的光强度分布曲线。当 S_1 与 S_2 逐渐接近时，在象面上的两衍射图样亦逐渐接近并开始有重迭的部分。当 S_1 与 S_2 接近到一定程度时，象面上的衍射图样将达到图 b 所示的情形：衍射图样 S_1' 的中央极大与衍射图样 S_2' 的第一极小重合，或衍射图样 S_2' 的中央极大与衍射图样 S_1' 的第一极小重合。在这种情况下，两衍射图样迭加的结果，得到的是中心光强度约为两边极大强度的百分之八十的一个图样，多数人的视觉能够毫不困难地觉察到这种强度的差别，因而可判断出迭加图样是由两个发光点产生的，也就是说，光学系统可以分辨出两个物点。瑞利即以上述条件作为两个物点刚好可以分辨的条件，称为瑞利条件或瑞利判据。当两物点 S_1 与 S_2 更接近时，它们的两衍射图样的重迭部分增多，当达图4-44 c 所示的情形时，则从迭加的图样中将无法辨出有两个物点存在。

图4-45a是两个点光源刚可分辨时其衍射斑的照片，图b是明显分辨的两个衍射斑的照片。



a）　　b）

图4-45　两点光源的衍射斑的照片

a）刚可分辨　b）明显分辨

下面我们以瑞利判据来讨论几种典型光学系统的分辨本领。假定这些系统是无象差的理想光学系统。

三、望远镜、显微镜及照象物镜的分辨本领

（一）望远镜的分辨本领

望远镜总是用于观察远处的物体，它的分辨本领用所能分辨的最小角度表示。如图4-46所示，设望远物镜的通光口径为 D，无穷远两物点分别产生两个衍射象斑 S_1' 与 S_2'。根据瑞利判据，两物点刚为可分的条件是 S_1' 的中央极大与 S_2' 的第一极小重合，即

$$\alpha = \theta_0 = \frac{1.22\lambda}{D} \qquad (4\text{-}49)$$

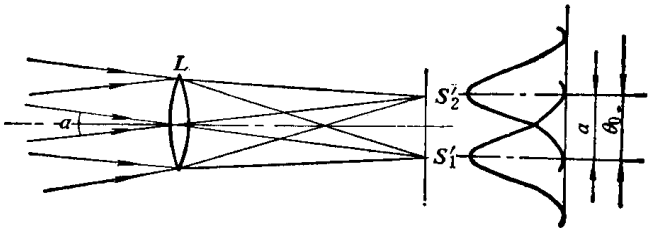


图4-46　望远镜的分辨本领

由此条件决定的两物点之间的角距离，称为望远镜的最小分辨角。此条件表明，所用波长 λ 愈短或通光口径 D 愈大，最小分辨角就愈小，即分辨本领愈大。天文望远镜物镜的直径做的很大（世界上已有直径为 5～6 米的物镜），原因之一就是为了提高望远镜的分辨本领。

（二）显微镜的分辨本领

显微镜是观察有限距离物体的，它的分辨本领通常以它所能分辨的最小间距来表示。图 4-47 表示一个显微物镜的成象，被观察的是位于物镜前焦点外的两个靠近的发光点 S_1，S_2。位于物镜后焦点附近的直径为 D 的光栏为孔径光栏，亦即物镜的出瞳。在目镜前焦面上的放大的实象 S_1'、S_2' 乃是由光孔 D 产生的衍射图样，其爱里斑的角半径为

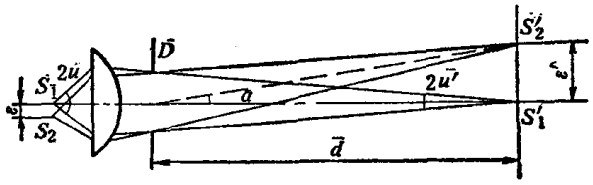


图4-47　显微镜的分辨本领

$$\theta_0 = \frac{1.22\lambda}{D}$$

若 S_1' 和 S_2' 与出瞳中心的夹角 α 正好等于 θ_0，则 S_1' 和 S_2' 之间的距离 ε' 即为可分辨的最小象点间距。这个最小间距所对应的物方间距就是显微镜的最小分辨距。由图 4-47 可知

$$\alpha = \frac{\varepsilon'}{d}$$

$$D = 2d\,\mathrm{tg}\,u' \approx 2d\sin u'$$

因此

$$\varepsilon' = \alpha d = \frac{1.22\lambda}{D} \times \frac{D}{2\sin u'} = \frac{0.61\lambda}{\sin u'}$$

设显微物镜的横向放大率为 β，那么

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{\beta} = \frac{0.61\lambda}{\beta\sin u'} \tag{4-50}$$

因为显微物镜满足阿贝正弦条件

$$\varepsilon n\sin u = \varepsilon' n'\sin u'$$

n，n' 分别为物镜的物空间和象空间的折射率，而 $n' = 1$，所以

$$\beta\sin u' = n\sin u$$

代入式（4-50）得到

$$\varepsilon = \frac{0.61\lambda}{n\sin u} \tag{4-51}$$

其中 $n\sin u$ 称为物镜的数值孔径（NA），上式表明物镜的数值孔径愈大或所使用的波长愈短，显微物镜的分辨本领就愈大。通常可以通过加大孔径角 u 或采用高折射率的物方介质（油浸法，即在物镜和物体之间放折射率 n 较高的液体，如 $n = 1.515$ 的杉木油）来增大数值孔径。如果被观察的物体不是自身发光的，也可以使用较短波长的光波来照明，以提高分辨本领，例如紫外显微镜，用 2000 到 2500 埃的紫外光照明，它的分辨本领较可见光的分辨本领高一倍左右。电子显微镜则以波长更小（$\lambda = 1$ 埃）的电子波束代替光束，因而它的分辨

本领比普通光学显微镜提高千倍以上。

（三）照相物镜的分辨本领

照相物镜一般都是对较远的物体拍照，例如常用照相物镜的焦距不过 50～100 毫米，而被拍照的物体常在 2 米以外。因此与望远系统相似，也可以按式（4-49）计算照相物镜的最小分辨角。

与图 4-46 相同，设 α 表示照相物镜 L 的最小分辨角，因此两个象斑 S_1'，S_2' 的迭加图样的中点光强度下降到两边极大值的百分之八十，这个差别正好被人眼所分辨。但现在不是人眼直接观察，而是乳剂感光。如果乳剂也有人眼一样的反差灵敏度，同时乳剂的颗粒直径足够小，以至乳剂面上的感光元的大小和相邻两感光元之间的距离都小于物镜所产生的衍射爱里斑的直径，那么由照相物镜和感光片组成的系统的分辨本领就由物镜的最小分辨角所决定。否则它的分辨本领还将受到感光材料的影响。因此可以说，照相系统的分辨本领取决于照相物镜的最小分辨角和感光材料。当感光材料满足上述条件时，分辨本领由物镜的最小分辨角 α 决定，并有

$$\varepsilon' = f\alpha = \frac{1.22\lambda f}{D}$$

式中 ε' 是在感光片上所能分辨的两象点的最小间距。通常用 $R = 1/\varepsilon'$ 来表示照相物镜的分辨本领。设 ε' 的单位为毫米，则 $1/\varepsilon'$ 表示 1 毫米内所能分辨的最小线对。即

$$R = \frac{1}{1.22\lambda} \cdot \frac{D}{f} \ (\text{线对/毫米}) \tag{4-52}$$

若取 $\lambda = 0.55$ 微米，则上式写为

$$R \approx 1490\frac{D}{f} \ (\text{线对/毫米}) \tag{4-53}$$

式中 $\frac{D}{f}$ 是物镜的相对孔径。可见，物镜的分辨本领随相对孔径的增大而增大。

以上讨论的是指理想光学系统的理论分辨本领。由于剩余象差的存在，尤其在一般的照相物镜中剩余象差是相当大的，实际分辨本领都低于理论分辨本领。

§4-13 双缝衍射，瑞利干涉仪

一、双缝衍射

在夫琅和费衍射的实验装置（图 4-27）中，将衍射屏 D 换为具有两个平行狭缝的屏，就变成一个研究夫琅和费双缝衍射的实验装置。如图（4-48）所示，设两个缝的宽度同为 a，两缝中心距离为 d。当用极细的平行于双缝的线狭缝 S 作光源时，可看到在透镜 L_2 后焦面上的光强度分布，如图(4-49 b)所示，与缝宽为 a 的单缝衍射图样（图 4-49 a）作一比较，可见在单缝衍射图样的中央亮纹及 1 级亮纹中又产生了一些等间距的细条纹。我们将会知道双缝衍射图样是单缝衍射和双缝干涉的结果。

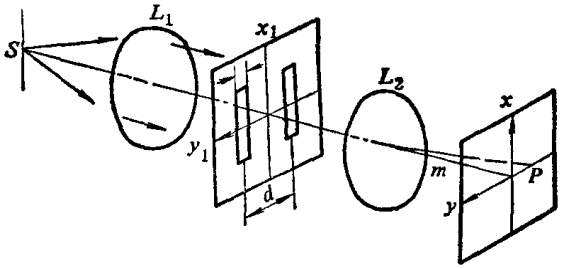


图4-48 夫琅和费双缝衍射实验装置

如同研究单缝衍射时一样，仍用夫琅和费衍射公式来导出双缝衍射的光强度分布公式，并解释上述现象。

根据式（4-28），透镜后焦面上任一点P的复振幅还可写作

$$\widetilde{E}(P)=C\iint_{\Sigma}e^{-ik(lx_1+my_1)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1$$

在这里，与单缝衍射不同的是对于P点的光振动有贡献的不仅是一个单缝内发出的次波，而是两个单缝发出的次波的迭加。因此，上式中的积分域应该包括两个缝的两部分波面。对于$b\gg a$的双缝情形，沿x_1方向的衍射效应可以忽略不计。因此，对上述积分只要作如下的一维积分

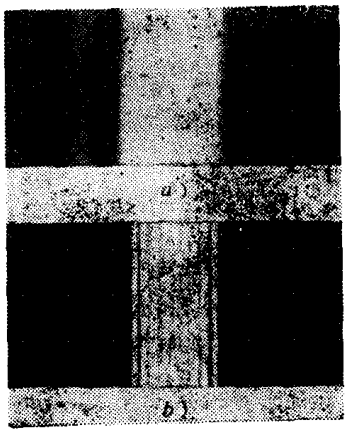


图4-49 夫琅和费双缝和单缝衍射图样的照片

$$\widetilde{E}=C'\int_{-\left(\frac{d}{2}+\frac{a}{2}\right)}^{-\left(\frac{d}{2}-\frac{a}{2}\right)}e^{-ikmy_1}\mathrm{d}y_1+C'\int_{\frac{d}{2}-\frac{a}{2}}^{\frac{d}{2}+\frac{a}{2}}e^{-ikmy_1}\mathrm{d}y_1\ominus$$

其中

$$\int_{-\left(\frac{d}{2}+\frac{a}{2}\right)}^{-\left(\frac{d}{2}-\frac{a}{2}\right)}e^{-ikmy_1}\mathrm{d}y_1=-\frac{1}{ikm}\left\{e^{-ikm\left[-\left(\frac{d}{2}-\frac{a}{2}\right)\right]}-e^{-ikm\left[-\left(\frac{d}{2}+\frac{a}{2}\right)\right]}\right\}$$

$$=e^{ikm\frac{d}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{kma}{2}}{\frac{km}{2}}$$

$$\int_{\frac{d}{2}-\frac{a}{2}}^{\frac{d}{2}+\frac{a}{2}}e^{-ikmy_1}\mathrm{d}y_1=-\frac{1}{ikm}\left[e^{-ikm\left(\frac{d}{2}+\frac{a}{2}\right)}-e^{-ikm\left(\frac{d}{2}-\frac{a}{2}\right)}\right]=e^{-ikm\frac{d}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{kma}{2}}{\frac{km}{2}}$$

最后得到

$$\widetilde{E}=C'a\frac{\sin\frac{kma}{2}}{\frac{kma}{2}}\cdot\left(e^{ikm\frac{d}{2}}+e^{-ikm\frac{d}{2}}\right)=2C'a\frac{\sin\frac{kma}{2}}{\frac{kma}{2}}\cdot\cos km\frac{d}{2}\qquad(4\text{-}54)$$

所以，P点的光强度

$$I=4C'^2a^2\left(\frac{\sin\frac{kma}{2}}{\frac{kma}{2}}\right)^2\cdot\cos^2 km\frac{d}{2}=4I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2\cdot\cos^2\frac{\delta}{2}\qquad(4\text{-}55)$$

其中$I_0=C'^2a^2$是单缝衍射在x轴上各点的光强度，$\delta=kmd=\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta$是双缝对应点

⊖ 根据式（4-29），上式中的C'应是$C\cdot\frac{\sin\frac{klb}{2}}{\frac{klb}{2}}$在$b\to\infty$时的极限实际上是个$\delta$函数（见附录Ⅵ）。

到P点的位相差（见图4-50）而$\beta=\frac{kma}{2}$。

式（4-55）表明，双缝衍射图样的光强度分布由两个因子决定：其一是$\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2$它表示宽度为$a$的单缝的夫琅和费衍射图样的光强度分布；其二是$4I_0\cos^2\frac{\delta}{2}$，它表示光强度同为$I_0$而位相相差为$\delta$的两束光所产生的干涉图样的光强度分布。因此，我们可以这样理解：双缝的夫琅和费衍射图样乃是单缝衍射图样和双缝干涉图样的组合，是衍射和干涉这两个因素联合作用的结果。从图4-51不难看出狭窄的干涉条纹由因子$\cos^2\frac{\delta}{2}$决定，而$\sin^2\beta/\beta^2$所表示的衍射因子则可以看作是对干涉条纹的强度起调制作用。

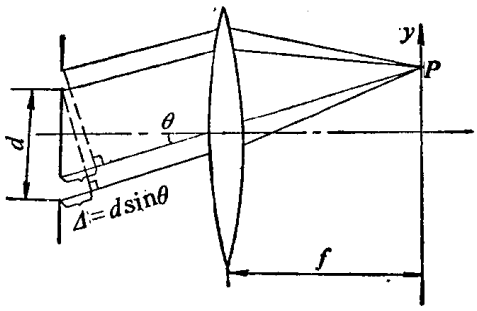


图4-50 双缝衍射

分析式（4-55）可知，出现单缝衍射光强度极小值的条件为

$$\beta=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}=\pm n\pi$$

即

$$a\sin\theta=\pm n\lambda \qquad n=1,\ 2,\ 3\cdots \tag{4-56}$$

出现双缝干涉光强度极小值的条件为

$$\delta=\frac{2\pi d\sin\theta}{\lambda}=\pm 2\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi$$

即

$$d\sin\theta=\pm\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda \qquad m=0,\ 1,\ 2,\ 3\cdots \tag{4-57}$$

出现双缝干涉光强度极大值的条件为

$$\delta=\frac{2\pi d\sin\theta}{\lambda}=\pm 2m\pi$$

即

$$d\sin\theta=\pm m\lambda, \qquad m=0,\ 1,\ 2,\ 3\cdots \tag{4-58}$$

如果由$d\sin\theta=\pm m\lambda$确定的干涉极大的方向正好与由$a\sin\theta=\pm n\lambda$确定的衍射极小的方向重合，那末第m级干涉极大将不会出现。某一极干涉极大因与衍射极小重合而不出现的现象称为缺级现象。即当

$$\frac{d}{a}=\frac{m}{n} \tag{4-59}$$

时发生缺级。例如$d/a=2$，则缺少2，4，6……各级；$d/a=3$，则缺少3，6，9……各级，后一例如图4-51c所示。

图4-52所示的照片表示当单缝的宽度a不变，而双缝间隔d逐渐变大时，衍射图样及光强度分布的变化情形。可见单缝衍射的图样不变，但干涉条纹的数目增多，并且变窄。

图4-53所示的照片表示双缝的间隔d不变，而单缝的宽度a逐渐增大时衍射图样的变化情形。此时干涉条纹的宽窄不变，但单缝衍射图样随缝宽增大而收缩。

二、瑞利干涉仪

瑞利干涉仪是利用双缝衍射原理制成的仪器。它用于测量气体或液体的折射率，测量精度可达2×10^{-6}到2×10^{-8}。仪器构造简单，其原理如图4-54所示。在透镜L_1的焦面上通

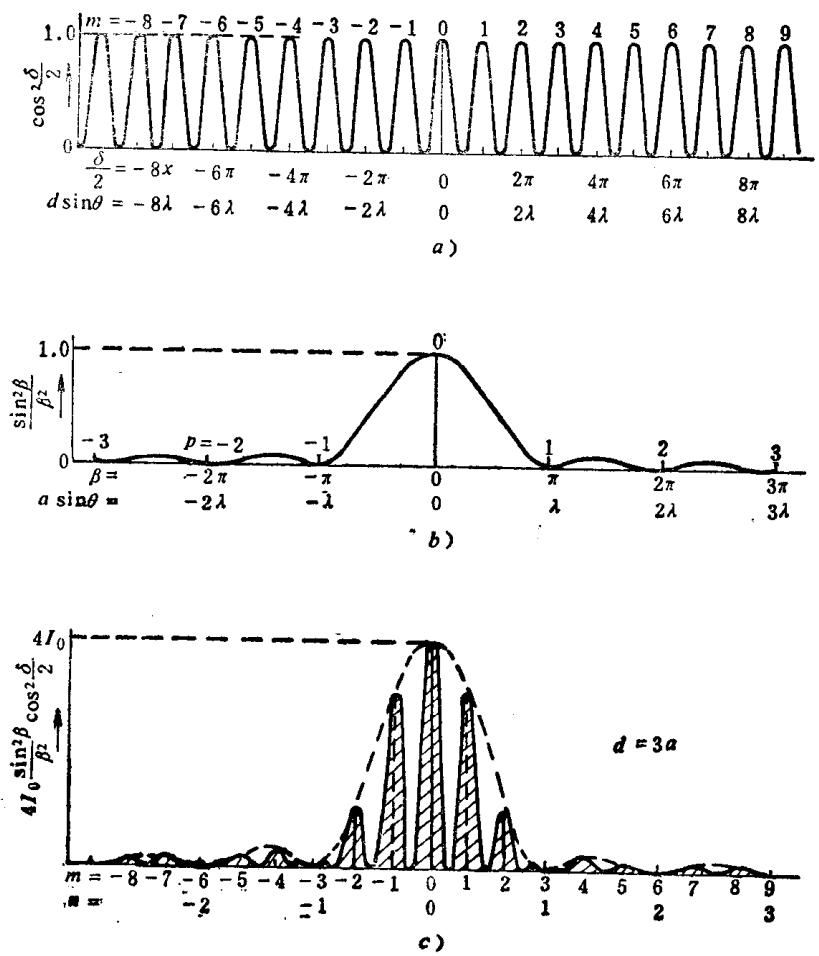


图4-51 夫琅和费双缝衍射光强度分布

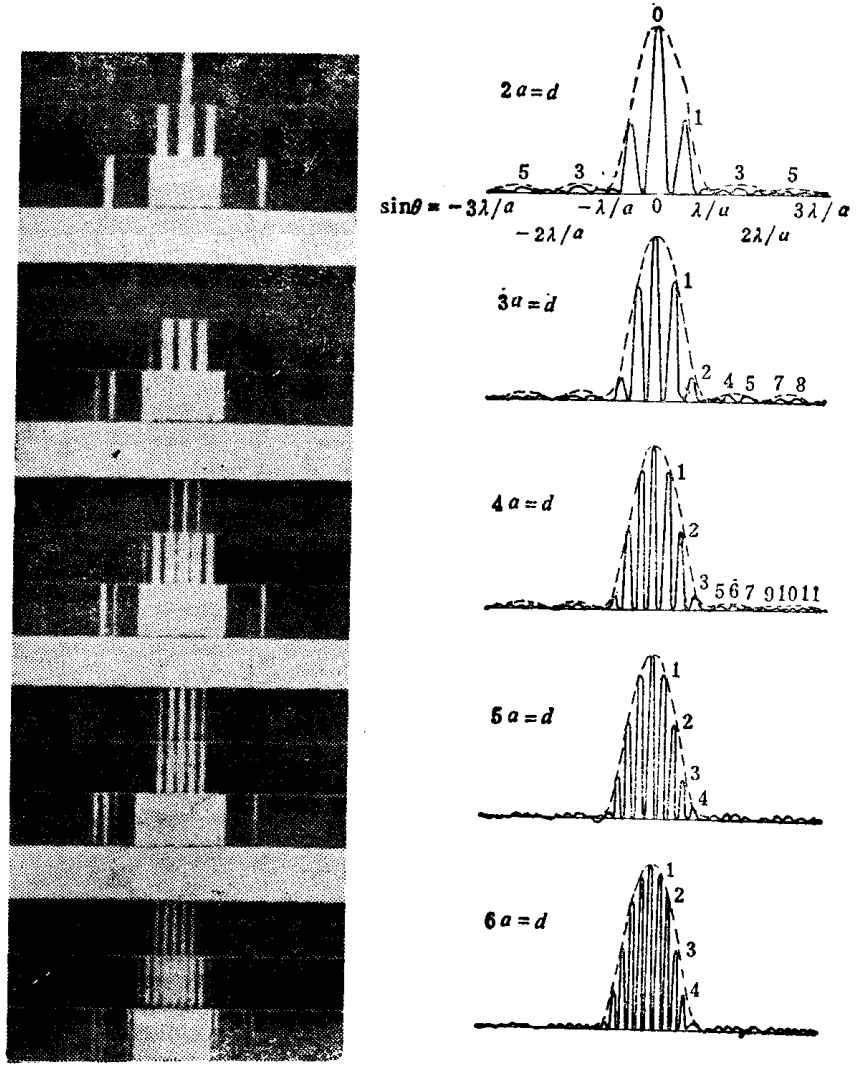


图4-52 不同间距的夫琅和费双缝衍射图样

过焦点置一平行于狭缝的线光源 S，平行光经过双缝 D 衍射后，在透镜 L_2 的焦面上出现双缝衍射条纹，零级条纹位于光轴上（图4-54 a）。两根长度相同的管子 B_1 和 B_2 放置在两透镜之间，并只占据透镜的下半个空间(图4-54 b)一管中装入已知折射率的物质，另一管中装入待测物质，二者折射率相差很小。这样两光路中的光程是不一样的。因此在下半个视场中的衍射条纹相对于上半个视场将发生移动(图4-54 c)。若 B_2 中物质的折射率大于 B_1 管中物质的折射率，则零级条纹移向 B_2 一边。设管长为 l，两管中物质的折射率分别为 n_1 和 n_2（n_1 为已知）则两光路的附加光程差为

$$\Delta = (n_2 - n_1)\, l = q\lambda$$

条纹移动的距离为 qe，e 为条纹间距，如果测出条纹移动的距离和条纹间距 e，则可以知道 q 值，代入上式即可算出折射率的差值：

$$\Delta n = n_2 - n_1 = \frac{q\lambda}{l}$$

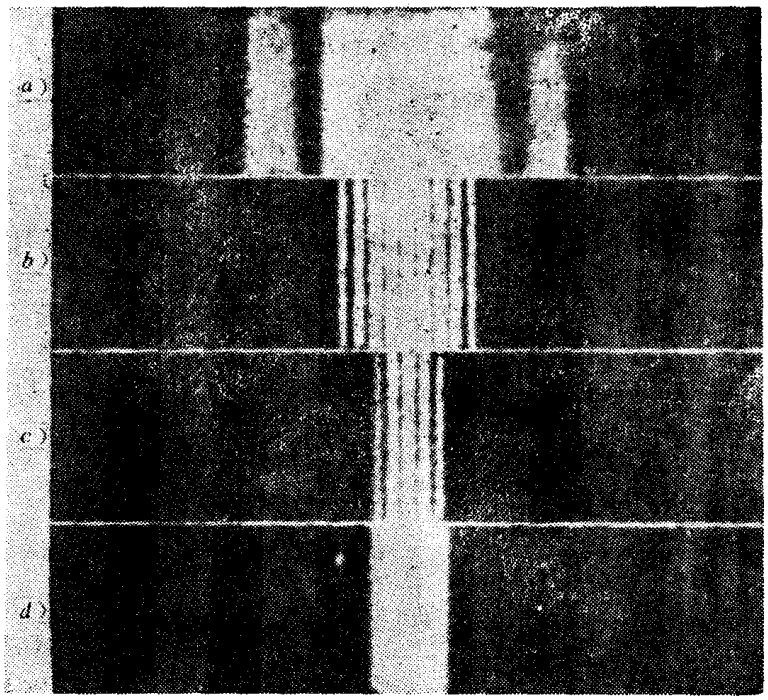


图4-53　不同缝宽的夫琅和费双缝衍射图样

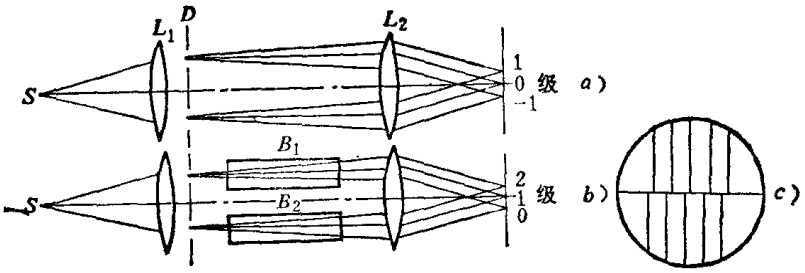


图4-54　瑞利干涉仪

在这个仪器中，为了放置两个管子 B_1 和 B_2 双缝之间的距离比较大，因此得到的衍射条纹很密。为了观察这些条纹，需要放大并备有精确测量条纹移动的装置。

§4-14　衍射光栅

由许多平行等距的相同的单缝构成的光学元件叫衍射光栅。实用的衍射光栅一般每毫米内有几十条乃至上千条缝。下面讨论衍射光栅的原理、应用及各种常用光栅的特点。

一、衍射图样

观察光栅衍射的装置如图 4-55 所示。设光栅 G 包含有 N 条宽度为 a 的狭缝，相邻狭缝之间的距离为 d，d 也称为光栅常数。现在求单色平面波通过光栅后在透镜焦面上任一点 P 所产生的光振动。与双缝衍射一样也可以应用夫琅和费公式计算，只不过现在要完成的是 N 个缝上露出波面的积分。为了计算简便起见，采用下述的多光束干涉计算方法。根据式(4-35)，宽度为 a 的单缝衍射在 P 点所产生的振动的复振幅为

$$\widetilde{E}=\widetilde{E}_0\frac{\sin\beta}{\beta}\qquad\left(\beta=\frac{kma}{2}\right)$$

式中$\widetilde{E}_0$表示轴上点P_0的复振幅。相邻两缝对P点产生的作用则为两个单缝衍射光在P点干涉的结果。合成复振幅取决于两缝到P点的光程差$\Delta=d\sin\theta$或位相差$\delta=\frac{2\pi d\sin\theta}{\lambda}$。因此两个缝衍射的合成复振幅可表示为

$$\widetilde{E}=\widetilde{E}_0\frac{\sin\beta}{\beta}+\widetilde{E}_0\frac{\sin\beta}{\beta}e^{i\delta}$$

那末对N个缝来说,P点的振幅就可以看成是N个单缝的衍射光干涉的结果,其合成复振幅

$$\begin{aligned}\widetilde{E}&=\widetilde{E}_0\frac{\sin\beta}{\beta}+\widetilde{E}_0\frac{\sin\beta}{\beta}e^{i\delta}+\widetilde{E}_0\frac{\sin\beta}{\beta}e^{i2\delta}+\cdots+\widetilde{E}_0\frac{\sin\beta}{\beta}e^{i(N-1)\delta}\\&=\widetilde{E}_0\frac{\sin\beta}{\beta}(1+e^{i\delta}+e^{i2\delta}+\cdots+e^{i(N-1)\delta})=\widetilde{E}_0\frac{\sin\beta}{\beta}\cdot\frac{(1-e^{iN\delta})}{(1-e^{i\delta})}\\&=\widetilde{E}_0\frac{\sin\beta}{\beta}\cdot\frac{e^{iN\frac{\delta}{2}}(e^{-iN\frac{\delta}{2}}-e^{iN\frac{\delta}{2}})}{e^{i\frac{\delta}{2}}(e^{-i\frac{\delta}{2}}-e^{i\frac{\delta}{2}})}\\&=\widetilde{E}_0\frac{\sin\beta}{\beta}\cdot\frac{\sin N\cdot\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}\cdot e^{i(N-1)\frac{\delta}{2}}\end{aligned}$$

因此P点的光强度

$$I=\widetilde{E}\,\widetilde{E}^*=I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2\left(\frac{\sin N\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}\right)^2\tag{4-60}$$

其中$I_0=E_0^2$。由上式可见，与双缝衍射的情形一样，光强度由两个因子决定。$\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2$为单缝衍射因子，$\left(\frac{\sin N\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}\right)^2$是干涉因子，表示多缝干涉的结果。因此，光栅衍射图样乃是单缝衍射图样与N个单缝多光束干涉图样的组合。图4-56表示一个包含4个缝的光栅（$N=4$，$d=3a$）的光强度分布曲线。与图4-51所示的双缝衍射图样相比，可以看出，当缝的数目N增加后，衍射图样最显著的改变是亮条纹变细。

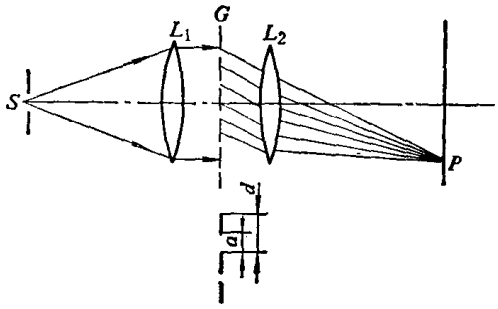


图4-55 光栅衍射

此外当N增大时，在相邻主极大之间出现次极大，次极大的数目随N的增多而增加，但次极大的强度比主极大小的多。图4-57表示了缝数目增加时，亮条纹变细的情形。在图c，d，e中还可隐约看到主亮纹之间的一些次极大，但在图f中，这些次极大已连成一片成为图样的背景。实际使用的光栅N是相当大的。例如一块宽为60毫米的平面光栅,若在每毫米内有1200条缝，则该光栅的总缝数$N=$

宗

72,000。这样，亮条纹就非常明锐，成为一些在暗背景上的亮线。衍射光栅条纹的这些特点可以通过对式（4-60）的讨论得出。

从干涉因子得知，当

$$\delta = \frac{2\pi d \sin\theta}{\lambda} = \pm 2m\pi$$

即

$$d\sin\theta = \pm m\lambda \qquad (4\text{-}61)$$

式中 $m = 1, 2, \cdots\cdots$ 时，在衍射角为 θ 的方向上产生主极大，并且有

$$\frac{\sin^2 N\frac{\delta}{2}}{\sin^2\frac{\delta}{2}} = N^2$$

用因子 $\frac{\sin^2\beta}{\beta^2}$ 来乘这些主极大强度，可以看作是对主极大起调制作用。因此，各极大之间的强度比与双缝衍射一样。对主极大而言，若光栅常数 d 一定，它们的相对强度和位置是不随缝数的增加而改变的，不管是 N 缝还是双缝都是一样的。

在式（4-60）的两个因子中，任一个为零，都会使合成光强度为零。易见衍射因子为零的方向由下式确定：

$$a\sin\theta = n\lambda$$

式中 $n = 1, 2, 3\cdots$

而干涉因子为零的方向由下式确定：

$$\frac{\sin^2 N\frac{\delta}{2}}{\sin^2\frac{\delta}{2}} = 0$$

由此得到

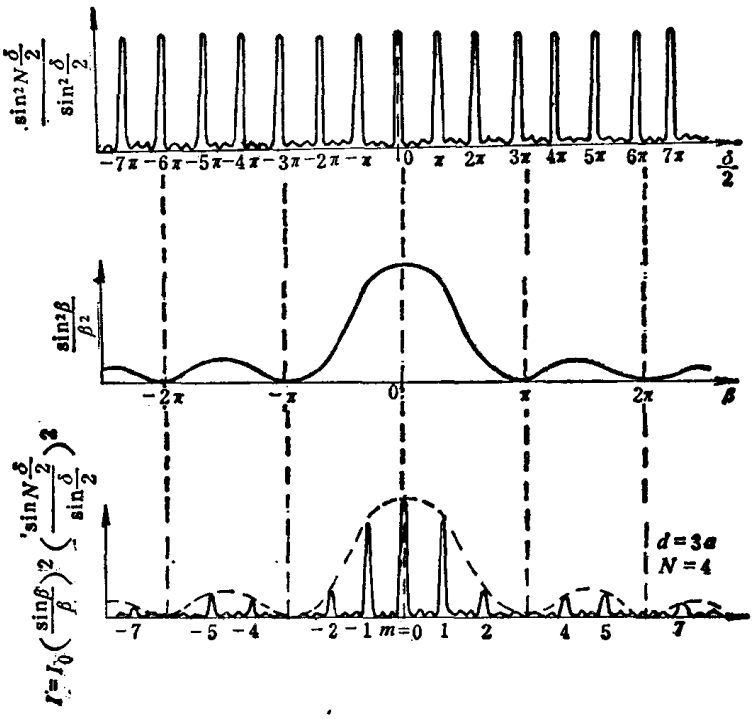


图4-56 光栅衍射的光强分布

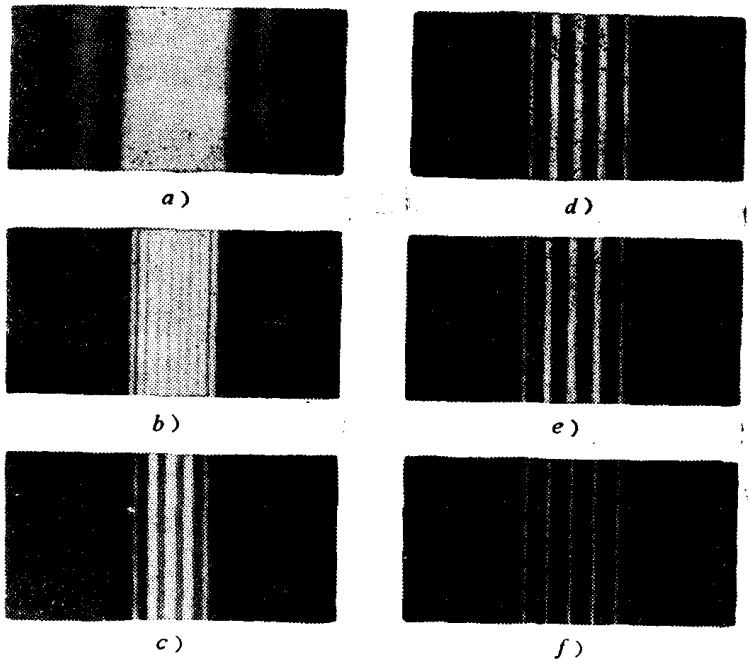


图4-57 单缝，双缝和光栅的衍射图样

a）单缝 b）双缝 c）3缝 d）5缝 e）6缝 f）20缝

$$d\sin\theta = \frac{\lambda}{N}, \frac{2\lambda}{N}, \frac{3\lambda}{N}\cdots, \frac{(N-1)\lambda}{N}, \frac{(N+1)\lambda}{N}, \frac{(N+2)\lambda}{N}\cdots \qquad (4\text{-}62)$$

在两相邻主极大之间有 $N-1$ 个零值，而两零值之间有一个次极大，因此两相邻主极大

之间有 $N-2$ 个次极大，如图4-56所示。在衍射光栅中也有缺级现象，其规律与双缝衍射相同。

二、光栅方程，光栅的色散与分辨本领

（一）光栅方程

决定光栅衍射主极大方向的公式

$$d\sin\theta = m\lambda \qquad m = 0,\ 1,\ 2\cdots$$

称作光栅方程。它是使用光栅的基本方程式。实际使用的光栅除了透射光栅外，还有反射光栅，而且入射平行光也不一定垂直于光栅平面。因此需要推导出更为普遍的光栅方程。

在图4-58 a 中，入射光与衍射光分居光栅法线的两侧。光束达到光栅时，光束 R_1 比 R_2 超前 $d\sin i$，在离开光栅时，R_2 又比 R_1 超前 $d\sin\theta$，所以这相邻两束光的光程差应为

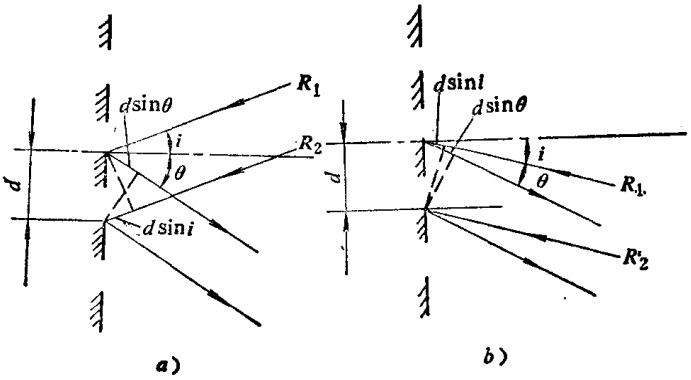


图4-58 反射光栅

$$\Delta = d\sin i - d\sin\theta$$

而在图4-58 b 中，入射光与衍射光处于法线同侧，光束 R_2 总比 R_1 超前，故光程差为

$$\Delta = d\sin i + d\sin\theta$$

因此，光栅方程的普遍形式可写成

$$d(\sin i \pm \sin\theta) = m\lambda \tag{4-63}$$

式中，（+）号表示衍射光和入射光在光栅法线的同一侧，（-）号表示它们各在法线一侧。

可以证明，在透射光栅中，光栅方程与光栅材料的折射率无关，普遍式（4-63）也同样适用。

（二）光栅光谱与色散

由光栅方程（4-63）可知，主极大的衍射角 θ 与波长 λ 有关。对于给定常数 d 的光栅，当用多色光照明时，不同波长的同一级主极大，除零级外，均不重合，即发生“色散”现象。因此，在透镜的后焦面上将得到该多色光所有波长的各级亮线，这些亮线称为光栅光谱线。图4-59表示了波长 $\lambda_1=4000$ 埃和 $\lambda_2=5000$ 埃的两种光波的光谱线，可见两种波长的零级谱线重合，而其它级次的谱线彼此分开，分开的程度随级次增高而增大。

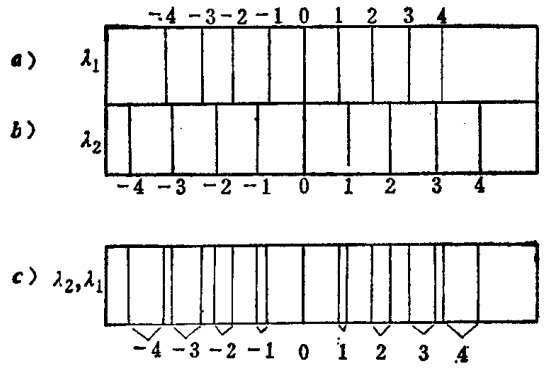


图4-59 光栅光谱

通常用角色散或线色散表示不同波长谱线分开的程度。波长相差1埃的两条谱线之间的角距离，称为角色散，可由光栅方程对波长的微分求得

$$\frac{d\theta}{d\lambda}=\frac{m}{d\cos\theta} \tag{4-64}$$

线色散是焦平面上波长相差1埃的两条谱线之间的距离，它可以表示为

$$\frac{dl}{d\lambda}=f\frac{d\theta}{d\lambda}=f\frac{m}{d\cos\theta} \tag{4-65}$$

式中　f——透镜的焦距。

色散是光谱仪的一个重要指标，光谱仪的色散愈大，就愈容易将两条靠近的谱线分开。由于实用光栅的常数 d 都很小，所以光栅具有很大的色散能力。这一特性，使光栅成为一种优良的光谱仪器。

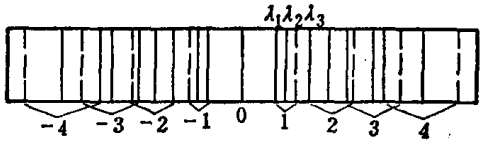


图4-60　光栅光谱的重级现象

如果我们在 θ 角不大的地方观察光栅光谱，$\cos\theta$ 几乎不随 θ 而变，所以色散差不多是一个常数，色散为常数的光谱称为匀排光谱。测定这种光谱的波长时，可用线性内插法，这也是光栅光谱相对于棱镜光谱的优点之一。

图4-60表示了 $\lambda_1=4000$ 埃，$\lambda_2=5000$ 埃和 $\lambda_3=6000$ 埃的三种波长的谱线，可见第2级光谱与第3级光谱部分重迭。由光栅方程可知，λ 的第 $m+1$ 级与 $\lambda+\Delta\lambda$ 的第 m 级重迭在某一位置时，有

$$(m+1)\lambda=m(\lambda+\Delta\lambda)$$

因此

$$\Delta\lambda=\frac{\lambda}{m} \tag{4-66}$$

在满足式（4-66）的 $\Delta\lambda$ 的光谱范围内，可以观察到互相分开（即不发生重迭）的谱线，$\Delta\lambda$ 称为自由光谱区。

（三）光栅的分辨本领

分辨本领是光谱仪器的另一个重要指标，它与光栅的色散有直接的关系。

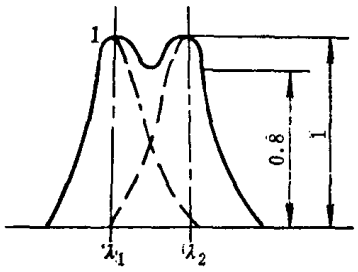


图4-61　光栅分辨极限

在光谱仪中，分辨本领乃是指分辨两个很靠近的谱线的能力，又称为色分辨本领。光栅有了很大的色散，还不能保证有可能分辨两条靠近的光谱线 λ_1 与 λ_2。色散决定了 λ_1 与 λ_2 这两种波长的谱线之间的角距离或线距离，但光谱线并不是一条几何线，而是从极大到极小或快或慢逐渐过渡的干涉条纹。随着光栅缝数 N 的增加，从极大到极小的过渡愈徒，即谱线愈细锐。图4-61表示了两条谱线的外形，当它们靠近到一定程度，观察到的光强度将是 λ_1 与 λ_2 所产生的光强度之和。根据瑞利判据，如果一条谱线强度极大值与另一谱线的第一个极小值重合时，两条谱线刚好分辨。谱线的锐度愈大，光栅的分辨本领也愈大。

由式（4-61）可知，第 m 级主极大满足

$$d\sin\theta_m=+m\lambda$$

或

$$\sin\theta_m=+\frac{m\lambda}{d} \tag{4-67}$$

而与它靠近的第一个极小值应满足〔见式（4-62）〕

$$d\sin\theta_1 = m\lambda + \frac{\lambda}{N}$$

令 $\theta_1 = \theta_m + \Delta\theta$，$\Delta\theta$ 表示主亮纹的角宽度之半。于是上式变为

$$\sin(\theta_m + \Delta\theta) = \frac{(mN+1)\lambda}{Nd} \tag{4-68}$$

(4-67) 与 (4-68) 两式相减，并设 $\cos\Delta\theta = 1$ 和 $\sin\Delta\theta = \Delta\theta$，则得

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta_m} \tag{4-69}$$

按照瑞利判据，此角度所对应的波长差 $\delta\lambda$，就是光栅能够分辨的最小波长差。

从光栅的角色散公式 (4-64) 可知，角度差为 1 单位的两谱线的波长差为

$$\frac{d\lambda}{d\theta} = \frac{d\cos\theta}{m}$$

因此，

$$\delta\lambda = \left(\frac{d\lambda}{d\theta}\right)\cdot\Delta\theta$$

将式 (4-69) 代入得

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{mN}$$

通常把波长 λ 与在该波长附近能被分辨的最小波长差 $\delta\lambda$ 的比值作为分辨本领的量度，因此光栅分辨本领可表示为

$$A = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN \tag{4-70}$$

可见，光栅的分辨本领等于光谱的级数 m 与光栅缝数 N 的乘积。

一般光栅中，使用的光谱级数为 1 到 3 级，而光栅缝数 N 是一个很大的数值，所以光栅可得到很高的分辨本领。例如，每毫米有 1200 条缝的光栅，若宽度为 60 毫米，则在由它产生的第一级光谱中，分辨本领为

$$A = mN = 1\times60\times1200 = 72000$$

即对于 $\lambda = 6000$ 埃的红光，所能分辨的最靠近的两谱线的波长差

$$\delta\lambda = \frac{6000}{72000} \approx 0.08 \text{ 埃}$$

这样高的分辨本领对于棱镜来说是达不到的。所以，在分辨本领方面，光栅也是优于棱镜的。

衍射光栅与法布里-珀罗干涉仪同属于高分辨本领的光谱仪器。它们的区别是：在法布里-珀罗干涉仪中，有效光束数目 N 并不大，它的高分辨本领是由于干涉级 m 极高所致。

现在由于光栅的刻制和复制技术的不断发展，使以光栅作为色散元件的光谱仪得到更为广泛的应用。

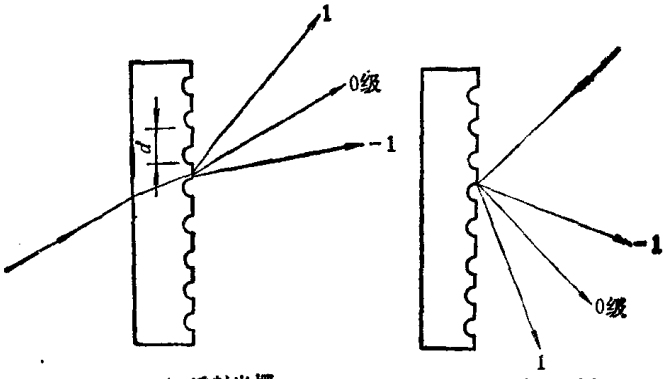
§4-15 平面定向光栅和光栅光谱仪

一、平面定向光栅

从上面的讨论可知，光谱的级次愈高，分辨本领和色散也愈大。但是，光强度的分布却

是级次愈低，光强度愈高。特别是没有色散的中央零级占了大部分的光能量，这对于光栅的应用是很不利的。我们可以利用定向光栅来改变光强度的这种分布，使光强度集中到有用的那一光谱级上去。

我们前述的透射光栅是用金刚石刀在一块平面玻璃上刻出细槽制成的，刻槽的部分因散射而不透光，未刻划的部分则能象缝一样地透光，如图 4-62 a 所示。反射光栅是在一个磨光的金属表面上刻槽制成，刻槽部分发生漫反射，而未刻划的部分作规则的反射，如图4-62 b 所示。这两种光栅的刻线只对入射光波的振幅或光强进行调制，即改变了入射光波的振幅（或光强）透过率或反射率分布，所以常常称这类光栅为振幅光栅。由光栅方程得知，在 $\theta = i$ 的方向即为光强最大的中央零级。这个方向正是满足几何光学的折射定律（对透射光栅）或反射定律（对反射光栅）的方向。



a）透射光栅　　b）反射光栅

图4-62　透射光栅和反射光栅

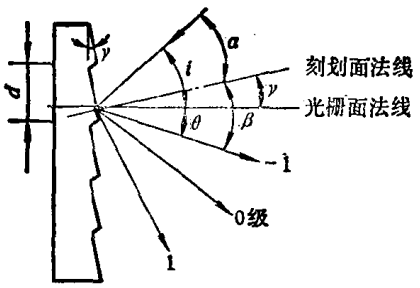


图4-63　反射定向光栅

定向光栅是通过改变刻槽的形状来改变各级光谱的相对光强分布，使光强主要集中到所要求的光谱级上。图 4-63 表示一块定向反射光栅。将金刚石刀磨成特定形状，使光栅表面的刻槽变成锯齿形或三角形。整个光栅面都有同样的反射率，因此可以忽略对振幅的调制，但由于光程的规则变化却对于位相产生了调制。这种光栅称为位相光栅。在此光栅中大的刻划面为反射光的工作面。设每个刻槽的周期为 d，这时，按光栅方程，在 $\theta = i$ 的方向仍为零级，其他各极主极大的方向也并不受到刻槽形状的影响。但是光强度的相对分布改变了。现在最大光强度并不在零级方向，而是从零级移到了刻划面的满足反射定律的反射光方向，即 $\alpha = \beta$ 的方向，这里 α 和 β 分别为入射光和反射光与刻划面法线的夹角。通过控制刻划面与光栅平面的夹角 γ，就可以使我们所要求的光谱级次正好在这个最大光强的方向（闪耀方向）。定向光栅又称为闪耀光栅，而 γ 角称为闪耀角。

例如在图 4-63 中有

$$i = \alpha + \gamma = \beta + \gamma = \theta + \gamma + \gamma = \theta + 2\gamma$$

代入光栅方程中

$$d[\sin(\theta + 2\gamma) - \sin\theta] = m\lambda$$

因此

$$2d\sin\gamma\cos(i - \gamma) = m\lambda$$

式中 λ、m 即为所要求的具有最大光强的波长（闪耀波长）及其光谱级次。根据给定的 d 和 i，由该式即可求得刻划面的闪耀角 γ。

在图 4-64 中，令入射光垂直于刻划面，这时在 $\theta = i = \gamma$、$\alpha = \beta = 0$ 的方向上，亦即沿入射光的反方向上具有最大的光强。这种系统在光谱仪器中称为李特洛（Littrow）自准系统。把上述关系代入光栅方程 $d(\sin i + \sin\theta) = m\lambda$，

得
$$2d\sin\gamma = m\lambda \tag{4-71}$$

可见，在波长 λ 的一级光谱（$m = 1$）闪耀的光栅也对 $\lambda/2$，$\lambda/3$……的二级，三级光谱闪耀。在闪耀波长附近的其它波长的光谱也得到一定程度的闪耀，实际上是在一定的波段范围内得到闪耀。这个波段范围的大小是与光栅的刻划质量有关的。

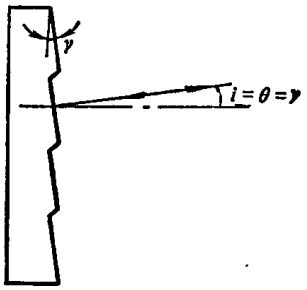


图4-64 反射定向光栅（自准状态下使用）

二、平面光栅光谱仪

用衍射光栅作色散元件的单色仪、分光计与摄谱仪统称为光栅光谱仪，分透射式和反射式两种。透射式光谱仪多用于教学实验中，其原理如图 4-65 所示。在光栅 G 的后面用普通的望远镜 T 观察光谱，望远镜 T 可绕垂直于图面并且通过光栅的轴线 o 而旋转，以便观察不同方向上的各级光谱。

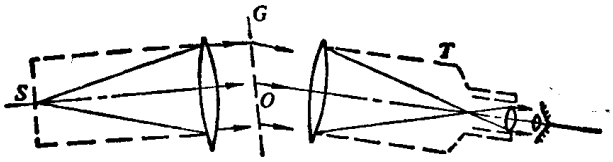


图4-65 透射光栅光谱仪

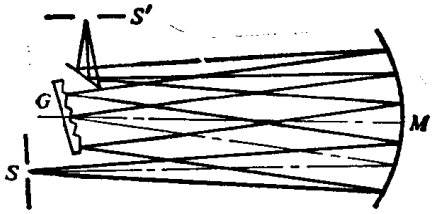


图4-66 艾伯特光栅单色仪

实际上用得最多的是反射光栅光谱仪。这种光谱仪普遍地用于从真空紫外直到红外的宽广波段，它的结构形式有多种，这里仅介绍其中两种。

1）艾伯特（Ebert）装置（图 4-66）。M 为凹球面反射镜，起准直和聚焦作用，S 为入射狭缝，S' 为从整个光谱中分离出的单色光的出射狭缝，S 和 S' 共轭，并且对平面定向反射光栅 G 的刻划平面的法线（即凹面反射镜的光轴 MG）对称，这样的仪器称为艾伯特光栅单色仪。由于它占空间较小并且能给出消慧差的谱线（仍有球差和象散），所以大多数近代光栅单色仪都是这种类型的。若需要摄谱，拿掉出射狭缝 S'，代之以照相底板即可。

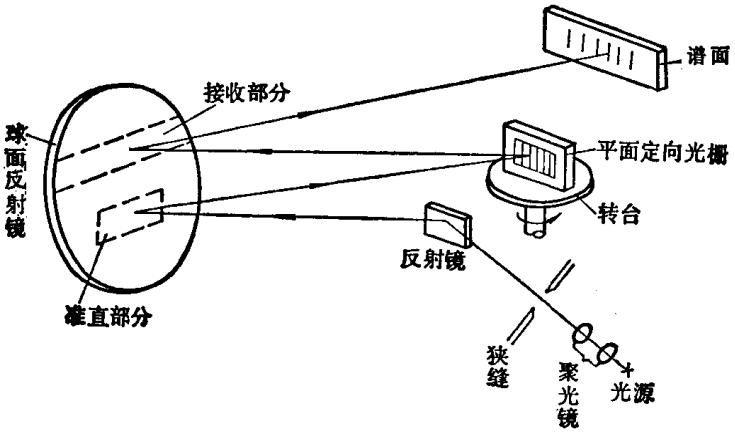


图4-67 李特洛自准式光谱仪

2）李特洛（Littrow）自准式装置（图 4-67）。这也是一种常用的光栅装置，现代的红外及紫外光栅分光光度计多采用这种装置。这是一种垂直对称的结构，即入射狭缝和谱面位于同一个垂直焦平面内，并对称于光轴的上下两侧，也具有象质好、结构紧凑的优点。

§4-16 凹面光栅

如果光栅不刻在平面镜上，而刻在金属的凹球面反射镜上，这样的光栅就称为凹面反射光栅。凹面光栅同时起到色散和聚焦的作用，不用附加任何光学系统就可以得到光栅光谱，这是凹面光栅的一个优点。图4-68是常用的凹面光栅光谱仪的一种结构形式，称为帕邢（Paschen）装置。光源狭缝S，凹面光栅G和照相底板三者同处在一个圆周上，理论证明，如果光栅的曲率半径为R，则可作一直径为R的圆，并与光栅中点相切，只要光源狭缝是放在这个圆周上，则由该光栅所产生的光谱也将会聚在这个圆周上。这个圆称为罗兰圆。在帕邢装置中，狭缝及光栅固定在罗兰圆上，需要研究的光谱，可按光栅方程计算它的位置，再把有同样曲率的照相底板放到相应的那一段圆周上来进行记录。所以狭缝、光栅和照相底板三者都有一定的位置。改变波段时，只要移动照相底板。

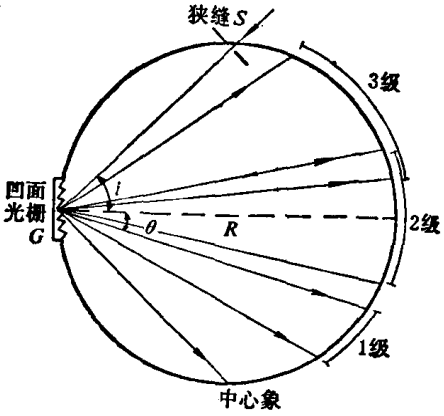


图4-68 帕邢凹面光栅光谱仪

凹面光栅的刻制比平面光栅困难得多，而且象质也不够理想。

§4-17 计量光栅（莫尔光栅）

将两块光栅常数差不多的透射光栅重迭在一起并使它们的刻痕间有一定的夹角，这样在光的照射下，便形成一种等间隔的条纹，如图4-69所示。这种条纹称为莫尔（Moire)条纹。当两块光栅相对移动时，莫尔条纹产生亮暗交替变化。利用莫尔条纹的亮暗变化的光信号，转换为电脉冲信号，并获得数字显示，从而测量两块光栅的相对移动，这是近20多年来发展起来的一门新兴的计量技术。称为计量光栅技术或莫尔条纹技术。这种技术已在长度计量、座标测量、角度计量、齿轮检验、速度和加速度测量、振动测量等方面得到了广泛的应用，为计量过程自动化开辟了新的途径。

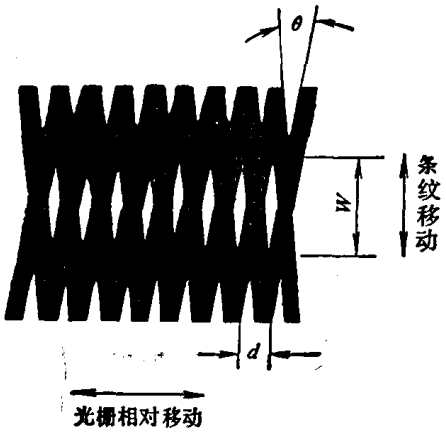


图4-69 莫尔光栅

一、莫尔条纹的产生与测量原理

在计量技术中采用的光栅大多为振幅光栅。它们每毫米的刻线数目一般都在100条之下，也就是说光栅常数d较光谱仪所用的光栅大的多。在这种“粗”光栅中可不考虑光的衍射效应，只需用几何光学来讨论。如图4-69所示，两块光栅重迭在一起。当一块光栅的不透明部分与另一块光栅的透明部分重迭时，仍是不透明的，许多不透明区域连在一起，就形成暗纹。当透明部分与另一透明部分重迭时，仍是透明的，许多透明区域连在一起就形成亮纹。

因而有亮暗的莫尔条纹产生。当两块光栅的常数 d 相同时，这些亮暗相间的莫尔条纹垂直于两光栅刻线夹角 θ 的等分角线，如 θ 角很小，也可以看成垂直于光栅刻线的方向。设莫尔条纹的宽度或周期为 W。由图 4-69 易见

$$W=\frac{d}{2\sin\frac{\theta}{2}}\approx\frac{d}{\theta} \tag{4-72}$$

由此可见，莫尔条纹的宽度 W 由光栅常数与两光栅的夹角 θ 决定。对于给定光栅常数 d 的两光栅，夹角 θ 愈小，条纹宽度愈大，即条纹愈稀。所以通过调整夹角 θ，可以使条纹宽度具有任何所需的值。

当一块光栅在其本身平面内沿着垂直于刻线方向相对于另一光栅移动时，莫尔条纹沿着垂直于光栅运动的方向产生相应的移动。光栅移动一个周期 d，莫尔条纹也移动一个周期 W，也就是产生一次条纹亮暗交替的变化。只要测出任一固定点上的条纹亮暗变化的次数，即可知道光栅相对于另一光栅移动了几个光栅常数 d 的长度。这就是莫尔条纹计量技术的基本原理。图 4-70 表示一种常用的莫尔条纹测量长度的装置（光栅读数头）。点光源 S 经透镜 L 以平行光垂直照射光栅，标尺光栅 G_1 固定在被测物体上（如精密机床的移动工作台），和被测物体一起移动，指示光栅 G_2 固定不动。G_1 与 G_2 之间留有少许间隙（几微米至几十微米，光栅越粗，其值越大），并使两光栅的刻线有一个小的夹角。在 G_2 之后放置光电元件 E（如硅光电池或光电管）接受莫尔条纹光信号，并转换为电压或电流信号，经前置放大后输出到计数装置。通常要沿着莫尔莫纹的移动方向放置四个光电元件，这是为了判别标尺光栅移动方向和消除电流信号的直流漂移。

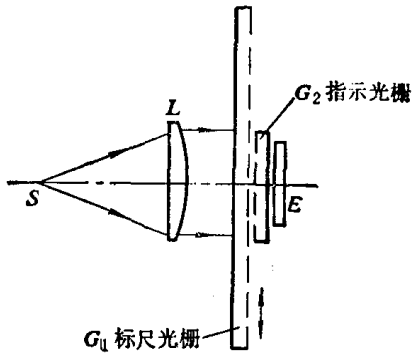


图4-70　光栅读数头

每当标尺光栅移动一个周期 d，莫尔条纹在光电元件 E 上有一次最大光电信号输出，并记数一次。设计数器计数 N 次，则标尺光栅（即被测物体）移动的距离为

$$L=N\cdot d \tag{4-73}$$

二、莫尔条纹技术的特点

1. 由式（4-72）可知，虽然光栅常数 d 很小，但只要调整夹角 θ，就可以得到很大的莫尔条纹的宽度 W。这就等于起了放大作用。例如，$d=0.02$ 毫米，若使 $\theta=0.01$ 弧度 $=0.57^\circ$，则有 $W=2$ 毫米。相当于放大了 100 倍。这样，就把一个微小移动量的测量转换成一个较大移动量的测量。既方便又提高了精度。

2. 莫尔条纹的光强度变化近似正弦周期变化，因此，便于数字化，进行自动计数，并且便于将电信号作进一步细分，即采用“倍频技术”，将计数单位变成比一个周期 d 更小，例如变成 $d/4$ 或 $d/10$ 记一次数。这样又可以提高测量精度或可以采用较粗的光栅。

3. 由图 4-70 可知，光电元件接收的并不只是固定一点的条纹，而是在一定长度范围内所有刻线产生的条纹。这样，对于光栅刻线的误差起了一个平均作用，也就是说刻线的局部误差和周期误差对于测量精度没有直接的影响。因此就有可能得到比光栅本身的刻线精度高

的测量精度。这是用光栅测量与普通的标尺测量的很大差别。

4. 莫尔条纹技术除了用上述长度光栅进行位移测量外，还可以用径向光栅进行角度测量。所谓径向光栅就是在一圆盘面上刻有由圆心向四周幅射的等角间距的幅射线，如图4-71所示。当两块径向光栅重迭在一起时，如果使指示光栅刻线的幅射中心 C_2 略为偏离标尺光栅(度盘光栅)的中心C_1，便形成莫尔条纹，条纹垂直于两中心连线的垂直平分线。当标尺光栅相对于指示光栅转动时，条纹即沿径向移动，利用图 4-70 所示的装置，就可以测出条纹的移动数目，并得到标尺光栅相对于指示光栅转动的角度。(以刻线的角间距为单位来表示)。目前径向光栅的刻线角间距范围多为 20 分～20 秒（相当于一圆周内刻有 1080 至 64800 条线)。

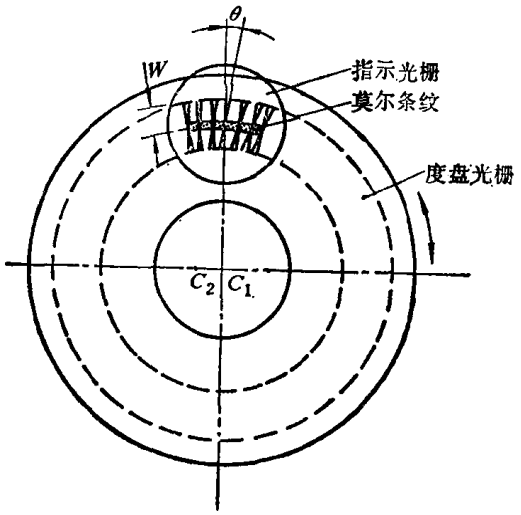


图4-71　径向光栅

习　题

4.1　设图 4-72 中的圆孔M的大小和单色点光源S的位置是固定的，连续增大P点到圆孔的距离L，试画一条曲线表示P点的光强度随L的变化。

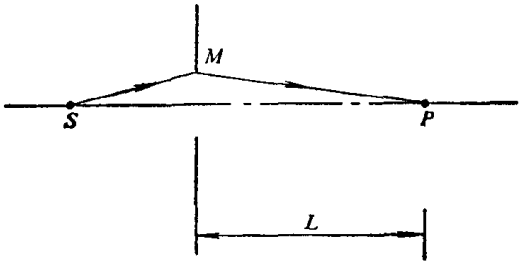


图　4-72

4.2　当一个小孔的直径逐渐增加时，一光源通过小孔投射到光屏的光能量也随着增加。但在光屏上一点P的光强度却可能下降，甚至降为零。这两个事实怎样解释才不致发生矛盾？

4.3　一个波带片的第 8 个半波带的直径为 5 毫米，试求此波带片的焦距。设照明波长为 $\lambda = 5000$埃。

4.4　单色平行光垂直照射到直径 $d = 30$ 厘米的圆孔上，在离圆孔 $L = 3.6$ 公里处的平面上产生菲涅耳衍射图样。现在如果要在离孔 $L = 4$ 米处的屏上观察一个相似的衍射图样，圆孔的直径应改为多少？

4.5　如图4-73所示一单色点光源离开一圆孔的垂直距离为 d，圆孔半径为 r，设点光源到圆孔周边的距离为 $d + l$。试说明当 $\lambda d \gg r^2/2$ 时将在很远的屏上产生夫琅和费衍射。设孔的半径 $r = 1$ 毫米，$l < \lambda/10$，$\lambda = 500$ 毫微米，试求 d 应满足的最小数值

4.6　在图 4-74 中所示的光学系统中，S是单色点光源，发出光波的波长为 λ，L_0是直径为 d 的小

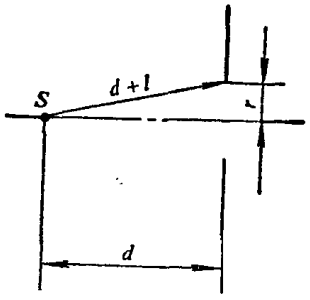


图　4-73

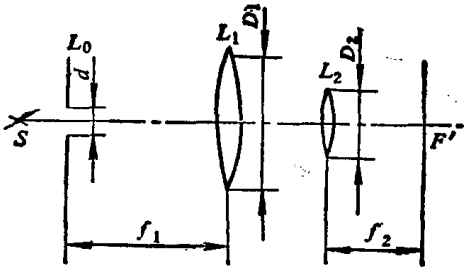


图　4-74

圆孔，透镜 L_1 的焦距为 f_1，直径为 D_1，透镜 L_2 的焦距为 f_2，直径为 D_2，且 $D_2<D_1$。

（1）当 d 足够小时，在焦面 F' 上出现的圆形衍射条纹，是由哪个孔径的衍射产生的？

（2）写出衍射条纹中央亮斑的直径表达式。

（3）如果加大 d，衍射条纹有什么变化？为什么？

4.7 观察强度为 I_0 的平行光照射一个矩形孔（其宽为 a 长为 b）所产生夫琅和费衍射图样。求沿着图样对角线方向上的第一级和第二级极大的光强度。

4.8 有一缝光源离单缝距离为 30 厘米，并与单缝平行。单缝缝宽为 0.40 毫米。在离单缝 2 米远处的屏上观察衍射条纹。求允许的最大光源宽度。设 $\lambda=5.0\times10^{-5}$厘米。

4.9 业余摄影师常常通过减小光圈（即减小相对孔径 D/f）的方法来减小象差及调焦误差的影响，从而提高象的分辨本领。试说明当相对孔径大于 $\frac{1}{g}$ 时，在象上的衍射现象即可忽略。g 是以微米为单位的感光乳胶的直径。设乳胶的灵敏波长为0.42微米。

4.10 根据人眼的最小分辨角为 1 分和人眼在明视距离 250 毫米处进行观察的条件，试说明显微镜的最大理论放大率是在 10^3 数量级。

4.11 双缝的缝宽为 0.140 毫米，中心间隔为 0.840 毫米，用波长为 5000 埃的平行光垂直照明，并在焦距为 50 厘米的透镜焦面上观察到衍射条纹。

（1）画出衍射条纹的强度分布曲线（至第 6 级）。

（2）哪些级次的条纹消失了？

（3）零级和第 6 级亮纹的强度之比是多少？

4.12 缝宽为 0.650 毫米的双缝，中心间隔为 2.340 厘米，用水银灯绿谱线 $\lambda=5461$ 埃照明，在双缝后 100 厘米处观察夫琅和费衍射条纹。

（1）设眼睛的分辨本领是 1 分，为要分辨出条纹，需要将条纹放大多少倍？

（2）中央极大内有多少条纹？

（3）第一级极大内有多少条纹？

4.13 一个缝宽为 0.150 毫米，间距为 0.950 毫米的双缝放在两透镜之间，如图 4-75 所示。

透镜的焦距 f 为 70 厘米，在 S 处用一可调狭缝作为光源，用水银灯绿光（$\lambda=5461$）埃照明。为了使衍射条纹强度最大而清晰度没有明显的下降，光源的极限宽度应为多少？

4.14 如果一个双缝的间隔与缝宽有 $d=5b$ 的关系。试确定夫琅和费衍射的第三级极大的光强由于衍射包络线的调制而改变多少？

4.15 试证明光栅方程

$$d(\sin i\pm\sin\varphi)=m\lambda$$

也同样适用于透射光栅而与光栅材料的折射率无关。

4.16 试用图 4-76 所示的矢量迭加图证明多缝衍射的干涉因子为

$$E=E_0\frac{\sin N\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

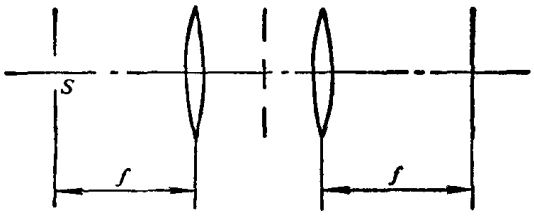


图 4-75

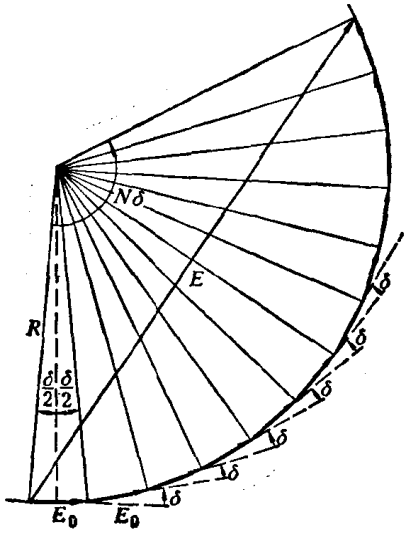


图 4-76

式中 E_0 表示每个缝单独在 P 点产生的振幅，N 表示缝数，δ 表示相邻缝到 P 点的位相差。

4.17 已知 $\lambda_1 = 5600$ 埃和 $\lambda_2 = 5650$ 埃两种波长的平面光波垂直入射在平面透射光栅上，光栅每厘米有 2500 条刻线，在焦距为 120 厘米的透镜后焦面上形成光栅的夫琅和费衍射图样，求两种波长的光波所形成的一级谱线之间的距离及二级谱线之间的距离。

4.18 为了分辨第三级的钠双线（$\lambda_1 = 5896$ 埃，$\lambda_2 = 5890$ 埃）试求光栅应有的刻线数。

4.19 有一光栅每毫米有 100 条刻线，试计算其二级光谱的角色散和线色散。设衍射角 θ 很小，$\cos\theta \approx 1$，透镜的焦距 $f = 500$ 毫米。

4.20 在一平面反射光栅（600 条/毫米）上，平行单色光（$\lambda = 5461$ 埃）以入射角 $i = 30°$ 入射。分别求法线同侧与法线异侧能得到的谱线的最高级次。

4.21 试说明一块 $d = 2a$ 的透射光栅

（1）只出现奇次项亮纹；

（2）第一级亮纹的光强约是中央亮纹的 40%。

4.22 设想通过一块方格光栅观察一个在 20 米远的点光源。若看到一个围绕点光源的亮斑方阵，如图 4-77 示。

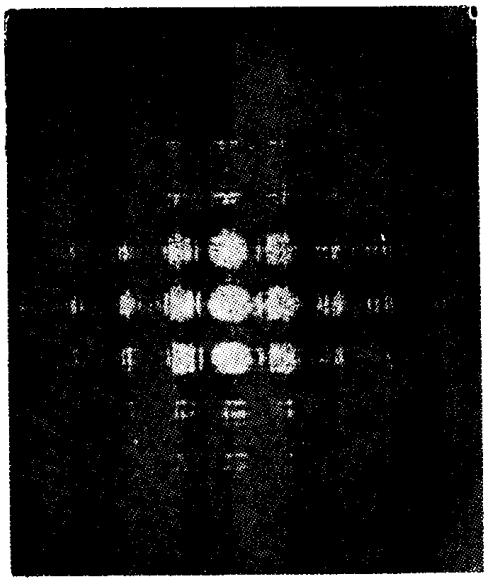


图 4-77

两相邻亮斑之间的距离为 12 厘米，试求方格光栅的栅距。设光波波长 $\lambda = 6000$埃。

4.23 一透射光栅如图 4-78 所示，在透明介质薄板上做成栅距为 d 的刻槽，刻槽的宽度与凸纹宽度相等且都是同样透明的。设刻槽深度为 t，介质折射率为 n，平行光垂直入射。试写出光栅方程。它的光强分布和一般的透射光栅有哪些不同？

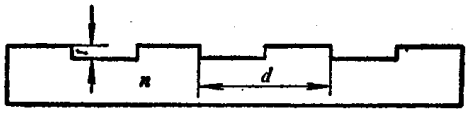


图 4-78

4.24 在用两块光栅产生莫尔条纹的装置中，假定两块光栅的光栅常数相同，问当两光栅之间的夹角 θ 为多少度时方能得到莫尔条纹的间距为光栅常数的 10 倍？与照明光的波长有无关系？

第五章　傅里叶光学

傅里叶光学是把通讯理论，特别是其中的傅里叶分析（频谱分析）方法引入光学所形成的一个分支。

众所周知，通讯系统是用来收集或传递信息的。这种信息一般是时间性的，例如一个被调制的电压或电流的波形。我们所熟悉的光学系统通常是用来成象的，从物平面上的复振幅分布或光强分布得到象平面上的复振幅分布或光强分布。从通讯理论的观点来看，可以把物平面上复振幅分布或光强分布看作是输入信息，把物平面叫做输入平面；把象平面上的复振幅分布看作输出信息，把象平面叫做输出平面。光学系统的作用在于把输入信息转变为输出信息，只不过光学系统所传递和处理的信息是随空间变化的函数，而通讯系统中传递与处理的信息是随时间变化的函数。从数学的角度来看，这一差别不是实质性的。

以后将会谈到，光学系统和通讯系统的相似，不仅在于两者都是用来传递和变换信息，而且在于这两种系统都具有一些相同的基本性质(如线性变换性、不变性)，因此都可以用傅里叶分析(频谱分析)的方法来描述。对于通讯系统，这种频谱分析方法用得很普遍，例如在电子学中，一个放大器的性能总是用它的频率响应曲线来描述的。如何把这种方法引入光学系统，正是本章讨论的重点。

在物理内容上，傅里叶光学所讨论的仍然是有关光波的传播、迭加（干涉、衍射）和成象等现象的规律，但由于傅里叶分析（变换）方法的引入使我们对于这些现象的内在规律获得了更深入的理解。在激光技术发展的推动下，傅里叶光学在应用方面开辟了崭新的领域，例如光学传递函数、光学信息处理及全息照相等。这些方面已成为近十几年来特别引人注目的课题，今后无疑会有更为丰硕的成果。

§5-1　空间频率及其物理意义

空间频率是傅里叶光学中的一个基本的物理量，透彻地理解这个概念及其物理意义是很重要的。

频率本来是时间域里的一个概念，指的是随时间作正弦变化的信号在单位时间内重复的次数，或者用复数来表示，指的是一个形如 $e^{i2\pi\nu t}$ 的函数的周期的倒数。与此类似，可以把一个在空间呈正弦分布的物理量在某个方向上单位长度内重复的次数称作在该方向上的空间频率。

例如，在第一章中已经指出，一个波矢量为 $\boldsymbol{k}$ 的单色平面波在空间的复振幅分布可以表示为

$$\widetilde{E}(x, y, z) = A_0 e^{ik(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)} = A_0 e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)} \tag{5-1}$$

式中 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 是 $\boldsymbol{k}$ 的方向余弦。我们来考察复振幅沿着传播方向的变化。不妨碍一般性，可以考察沿 z 方向传播的平面波。对于这一平面波，$\cos\alpha = \cos\beta = 0$，$\cos\gamma = 1$，于是它沿 z 轴的复振幅分布为

$$\widetilde{E}(z) = A_0 e^{i\frac{2\pi}{\lambda}z} \tag{5-2}$$

可见，它沿 z 轴（传播方向）是周期分布，周期就等于波长 λ，因此可以把 $\frac{1}{\lambda}$ 称作沿传播方向的空间频率。这正是第一章中已经引入的概念。如果两个单色波沿着传播方向有着不同的空间频率，就意味着它们有不同的波长，因而有不同的时间频率。

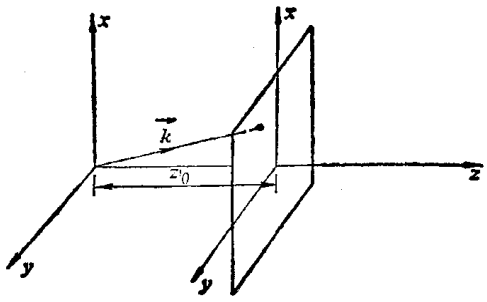


图5-1 求平面波在 xy 平面上的复振幅分布

在光学系统中，我们处理的往往是在一个平面（例如入瞳平面或物平面）上的复振幅分布或光强分布。下面讨论一下如何把空间频率的概念推广到这种情形。

设我们所考虑的平面是 $z = z_0$ 的平面（图5-1），将 $z = z_0$ 代入式（5-1）就得到沿 $\boldsymbol{k}$ 方向传播的单色平面波在该平面上的复振幅分布为

$$\widetilde{E}(x, y) = Ae^{i\frac{2\pi}{\lambda}z_0\cos\gamma} \cdot e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(x\cos\alpha + y\cos\beta)}$$

对于沿一定方向传播的平面波来说，$\cos\gamma$ 是常数，对于 $Z = Z_0$ 平面上的点来说，Z_0 也是常数，因此，可以把该平面上的复振幅分布表示为

$$\widetilde{E}(x, y) = Ae^{i\frac{2\pi}{\lambda}(x\cos\alpha + y\cos\beta)} \tag{5-3}$$

式中 $A = A_0 e^{i\frac{2\pi}{\lambda}z_0\cos\gamma}$ 是一个复常数。从上式可见，平面上各点复振幅的差别就在于不同的 (x, y) 处有不同的位相。在这个平面上的位相分布可以这样来寻找：在图5-2中，画出沿 $\boldsymbol{k}$ 方向传播的平面波的波面。对于 $z = z_0$ 平面与任一波面的交线上各点的位相都是等于波面的位相值，这就是 $z = z_0$ 平面上的等位相线，其方程为

$$x\cos\alpha + y\cos\beta = 常量$$

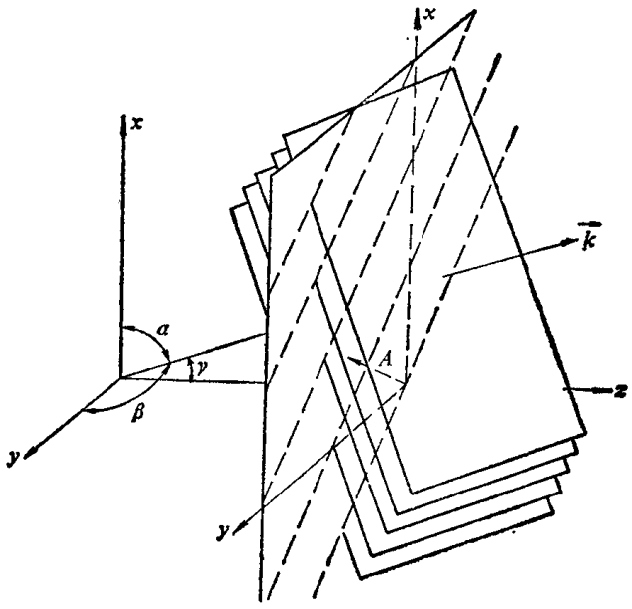


图5-2 平面波在 xy 平面上的等位相线

因此，这个平面上的复振幅分布的特点就表现在等位相线为平行斜线（图中的虚线）。位相沿着图中箭头 A 的方向增加。由于位相相差 2π 的光振动实际相同，所以这个平面上的复振幅分布是一种周期分布。这也可以从复指数 $e^{i\alpha}$ 是以 2π 为周期的周期函数（$e^{i(\alpha+2\pi)} = e^{i\alpha}$）得知。

如果单色平面波是在 xz 平面内传播的，则方向余弦 $\cos\beta = 0$，等位相线方程简化为

$$x\cos\alpha = 常量$$

这时 xy 平面上等位相线为垂直于 x 轴的平行线。在图5-3 a 中画出了位相依次相差 2π 的几个波面与 xz 平面的交线。在图5-3 b 中画出在 xy 平面上的几个位相值依次相差 2π 的等位相

线。这时这些等位相线为垂直于 x 轴的等间距的平行线。这些等位相线上的光振动是相同的，因此，复振幅在 xy 平面上变化的空间周期可以用位相相差 2π 的两相邻的等位相线间的距离表示。在图 5-3 b 中标出沿 x 方向的空间周期为 d_x。由于等位相线是 $\varphi = kx\cos\alpha =$ 常量的直线，位相相差 $\Delta\varphi$ 的两线间沿 x 方向的距离为

$$\Delta x = \frac{\Delta\varphi}{k\cos\alpha}$$

所以

$$d_x = \frac{2\pi}{k\cos\alpha} = \frac{\lambda}{\cos\alpha} \quad (5\text{-}4)$$

用空间周期的倒数 $u = \frac{1}{d_x}$ 表示在 x 方向上单位长度内的变化周期数，则

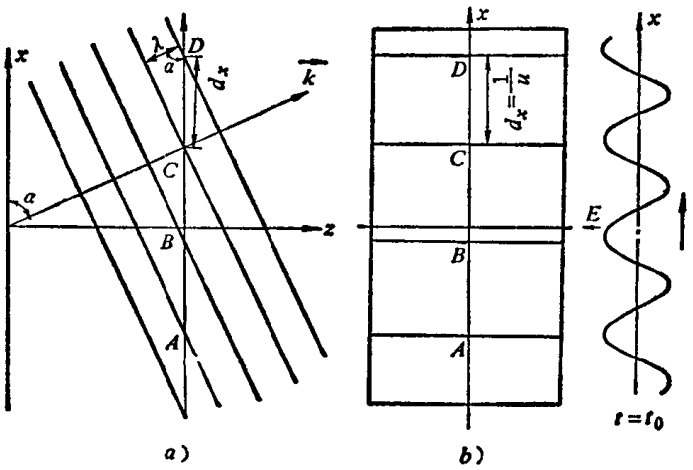


图5-3 平面波在特定平面上的空间频率

$$u = \frac{1}{d_x} = \frac{\cos\alpha}{\lambda}$$

称为复振幅在 x 方向上的空间频率。常用的空间频率单位为周/毫米。

在 y 方向上，等位相线是平行于 y 轴的平行线，复振幅沿 y 方向不变，可以认为沿 y 方向的空间变化周期 $d_y = \infty$，而沿 y 方向的空间频率为

$$v = \frac{1}{d_y} = 0$$

因此，传播方向余弦为（$\cos\alpha$，0）的平面波在 xy 平面上复振幅的周期分布可以用一组空间频率$\left(u = \frac{\cos\alpha}{\lambda},\ 0\right)$来表示。

把 $u = \frac{\cos\alpha}{\lambda}$，$v = 0$ 代入式（5-3）可得

$$\widetilde{E} = Ae^{i2\pi ux} \quad (5\text{-}5)$$

这就是直接用空间频率（u，0）表示 xy 平面上的复振幅分布。这样的复振幅表示式就代表一个在 xy 平面上沿 x 方向以空间频率 u 作周期变化的周期函数。它也代表一个传播方向余弦为（$\cos\alpha = \lambda u$，$\cos\beta = 0$）的平面波。

在图 5-3 的情形，α 为锐角，$\cos\alpha > 0$，空间频率 $u = \frac{\cos\alpha}{\lambda}$ 为正值，这时 xy 平面上位相 φ 沿 x 正向增加。如果平面波传播方向与 x 轴成钝角，如图 5-4 所示，$\cos\alpha < 0$，空间频率 $u = \frac{\cos\alpha}{\lambda}$ 为负值，这时 xy 平面上位相 φ 沿 x 正向减小。

在传播方向余弦为（$\cos\alpha$，$\cos\beta$）的一般情形，xy 平面上的复振幅为

$$\widetilde{E} = Ae^{ik(x\cos\alpha + y\cos\beta)}$$

由图 5-2 可知，xy 平面上的等位相线是斜线。图 5-5 表示位相值依次相差 2π 的几条等位相线。这时，在平面上沿 x 方向与沿 y 方向的复振幅都是周期变化的，其空间周期 d_x、d_y 各为

$$d_x = \frac{\lambda}{\cos\alpha}, \qquad d_y = \frac{\lambda}{\cos\beta} \quad (5\text{-}6)$$

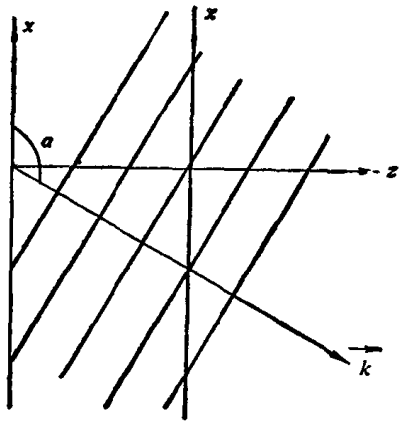


图5-4 空间频率为负值的情形

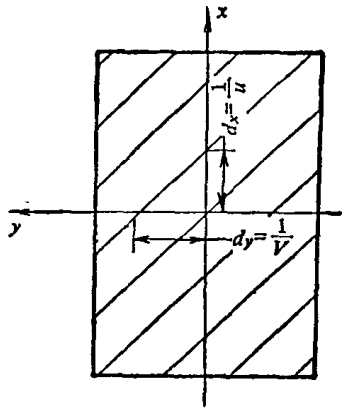


图5-5 沿任一方向传播的平面波在 xy 平面上的空间频率

而两个方向的空间频率分别为

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{d_x} = \frac{\cos\alpha}{\lambda} \\ v &= \frac{1}{d_y} = \frac{\cos\beta}{\lambda} \end{aligned}\right\} \tag{5-7}$$

因此，这时 xy 平面上的复振幅的周期分布可以用一组空间频率$\left(u=\frac{\cos\alpha}{\lambda},\ v=\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$表示为

$$\widetilde{E} = Ae^{i2\pi(ux+vy)} \tag{5-8}$$

这一表示正好是一个在 xy 平面上沿 x、y 方向分别以空间频率 u，v 作周期变化的周期函数分布，它也代表一个传播方向为（$\cos\alpha=u\lambda$，$\cos\beta=v\lambda$）的平面波。

有时也引入

$$k_x = 2\pi u,\quad k_y = 2\pi v \tag{5-9}$$

把式（5-8）表示为

$$\widetilde{E} = Ae^{i(k_x x+k_y y)} \tag{5-8 a}$$

式中 k_x，k_y 分别称为 x 方向和 y 方向的空间角频率。

为了使用中的方便，也可以换用 α，β 的余角表达空间频率。图 5-6 画出了传播方向 $\boldsymbol{k}$ 与 x、y 轴的夹角 α、β，以及它们的余角

$$\theta_x = \frac{\pi}{2} - \alpha,\qquad \theta_y = \frac{\pi}{2} - \beta$$

利用 θ_x，θ_y，则有

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\cos\alpha}{\lambda} = \frac{\sin\theta_x}{\lambda} \\ v &= \frac{\cos\beta}{\lambda} = \frac{\sin\theta_y}{\lambda} \end{aligned}\right\} \tag{5-10}$$

当传播方向在 xz 平面内时，θ_x 就是传播方向与 z 轴的夹角。当分析光波在共轴球面光学系统中的传播时，时常把 z 轴取为系统的光轴。对于在子午面内传播的平面波，其传播方向用它和光轴的夹角 θ 来表示是很方便的，这时有

$$u=\frac{\sin\theta}{\lambda},\quad v=0 \tag{5-11}$$

上面通过考虑单色光波场中任一平面上的复振幅分布介绍了空间频率概念。可以看出，空间频率 u、v 是用来描述光场中一平面上复振幅的一种基本的周期分布的两个特征量，这一基本周期分布的数学表达式是 $e^{i2\pi(ux+vy)}$。每一组（u，v）值对应一个空间频率成分，也对应着一个沿一定方向传播的平面波。根据光波的迭加性质，如果光场中一平面上的复振幅可以分解为许多种这样的基本周期分布，每一种基本的周期分布由一组空间频率值来表征，则可以说这平面上的复振幅含有许多种空间频率成分，并表示有许多沿不同方向传播的平面波通过这一平面。

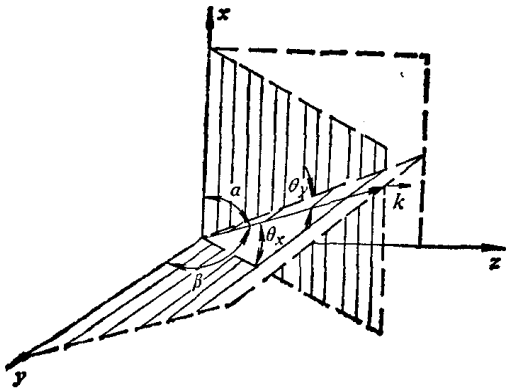


图5-6　用 θ_x，θ_y 表示空间频率

前面指出，当研究平面光波（非单色光）沿着传播方向的复振幅分布时，每一个空间频率对应于一束一定波长的单色光波。当研究一个平面上单色光波的复振幅分布时，每一组空间频率（u，v）对应于一束沿一定方向传播的单色平面波。空间频率的概念还可以推广到其它物理量的周期分布。例如我们在考虑非相干光成像问题时，要研究光强 $I(x,y)$ 的空间分布问题。按照傅里叶分析方法，一个平面上的光强 $I(x,y)$ 也可以分解为许多用二维函数 $e^{i2\pi(ux+vy)}$ 表示的光强周期分布。这时 u、v 代表不同的光强分布的空间频率，而并不代表向某一个方向传播的单色平面波。

§5-2　单色光波复振幅的分解

一、二维傅里叶变换式

利用傅里叶分析方法可以把一个满足一定条件的一维函数（如时间函数或空间函数）展开为无数个基元函数的线性组合：

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\nu)e^{i2\pi\nu x}d\nu \tag{5-12}$$

其中

$$F(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i2\pi\nu x}dx \tag{5-13}$$

$F(\nu)$ 称为函数 $f(x)$ 的傅里叶变换，记作

$$F(\nu)=F\{f(x)\}$$

$f(x)$ 称为 $F(\nu)$ 的傅里叶逆变换，记作

$$f(x)=F^{-1}\{F(\nu)\}$$

$f(x)$ 和 $F(\nu)$ 称为傅里叶变换对。关系式（5-12）看作是把函数 $f(x)$ 分解成许多基元函数的线性组合（即积分），每个基元函数的形式为 $e^{i2\pi\nu x}$，函数 $F(\nu)$ 代表空间频率为 ν 的成分所占相对比例（权重）的大小。傅里叶变换 $F(\nu)$ 也称为 $f(x)$ 的空间频率谱，简称空间频谱或频谱。

在光学问题中，一般处理的是二维信息，对于满足一定条件的二维函数 $f(x,y)$ 同样

可以分解为形式如 $e^{i2\pi(ux+vy)}$ 的基元函数的线性组合㊀。

$$f(x, y)=\iint_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{i2\pi(ux+vy)} \mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{5-14}$$

其中

$$F(u, v)=\iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5-15}$$

式中 $F(u, v)$ 称为函数 $f(x, y)$ 的二维傅里叶变换，它代表空间频率为 (u, v) 的成分所占相对比例的大小，u、v 分别代表各基元函数沿 xy 方向的空间频率。

二、单色光波复振幅的分解

现在我们把二维傅里叶变换式具体应用于单色光波场中任一个 xy 平面上的复振幅分布 $\widetilde{E}(x, y)$。按照公式(5-14)和(5-15)，对于复振幅 $\widetilde{E}(x, y)$ 这一个二维空间座标函数可以分解成无数个形式为 $e^{i2\pi(ux+vy)}$ 的基元函数的线性组合

$$\widetilde{E}(x, y)=\iint_{-\infty}^{\infty} \widetilde{E}(u, v) e^{i2\pi(ux+vy)} \mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{5-14a}$$ ㊁

式中

$$\widetilde{E}(u, v)=\iint_{-\infty}^{\infty} \widetilde{E}(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5-15a}$$

从前面的讨论可知，式(5-14a)中每一个空间频率为 (u, v) 的基元函数 $e^{i2\pi(ux+vy)}$ 代表一个传播方向余弦为 $\cos\alpha=u\lambda$，$\cos\beta=v\lambda$ 的平面波，这个空间频率成分 (u, v) 所占的比例大小由 $\widetilde{E}(u, v)$ 决定。

以前在讨论光波的传播、衍射、迭加及成像等现象时，就是研究在这些现象的物理条件下，光场中各处的复振幅或光强是空间座标的什么样的函数，这种表达与分析的方法称为在空间域中的分析。这是以前讨论光的波动现象时常用的方法。我们在第四章中讨论衍射问题也正是采用这种方法，现在引入复振幅的傅里叶分析可以把通过一个平面的一般单色光波分解成向空间不同方向传播的单色平面波，每一平面波成分与一组空间频率值 (u, v) 对应。经过这样的分解，我们对于光波的各种现象的分析可转向考虑光波的平面波成分的组成，也就是考虑空间频谱 $\widetilde{E}(u, v)$，研究它在各种过程中的变化，从而研究光波在传播、衍射及成像中的各种规律。这就是傅里叶光学的基本含义。

§5-3 衍射理论中的傅里叶分析方法

一、夫琅和费近似下焦面场与孔径场的变换关系

在第四章中，根据惠更斯—菲涅耳原理及基尔霍夫衍射公式得出了夫琅和费衍射的近似公式(4-12)，并讨论了在透镜后焦面上所得到的各种夫琅和费衍射图样，在那里，我们是按照惠更斯原理，把衍射孔面上各点看作是发出球面次波的波源，然后求出各球面次波在透镜后焦面上的迭加结果，从而到焦面场上的复振幅分布。现在，我们采用傅里叶分析方法，也就是通过频率域中的分析来讨论衍射问题。

㊀ 见附录Ⅲ。

㊁ 式(5-14a)中，$\widetilde{E}(x, y)$，$\widetilde{E}(u, V)$ 用了同一个字母 E。但它们有不同的物理意义，函数形式也是不同的。后文中也有类似的情况，在阅读本书时务必注意。

我们所关心的是后焦面场上衍射图样的相对光强分布，对于式（4-12）中积分前的系数可不予考虑，因此可以把后焦面上的复振幅分布写成

$$\widetilde{E}(x,\ y)=\iint_{\Sigma}\widetilde{E}(x_1,\ y_1)\,e^{-\frac{ik}{f}(xx_1+yy_1)}\,dx_1dy_1$$

或

$$\widetilde{E}(x,\ y)=\iint_{\Sigma}\widetilde{E}(x_1,\ y_1)\,e^{-i2\pi\left(\frac{x}{\lambda f}x_1+\frac{y}{\lambda f}y_1\right)}dx_1dy_1$$

式中$E(x_1,\ y_1)$表示衍射孔面上的光场分布，Σ代表衍射孔径。我们限定，在衍射孔径外$\widetilde{E}(x_1,\ y_1)$处处为零，则上式的积分域可以扩大到整个x_1y_1平面（衍射孔径所在平面）即

$$\widetilde{E}(x,\ y)=\iint_{-\infty}^{\infty}\widetilde{E}(x_1,\ y_1)\,e^{-i2\pi\left(\frac{x}{\lambda f}x_1+\frac{y}{\lambda f}y_1\right)}dx_1dy_1$$

令

$$u=\frac{x}{\lambda f},\qquad v=\frac{y}{\lambda f}$$

则有

$$\widetilde{E}(x,\ y)=\iint_{-\infty}^{\infty}\widetilde{E}(x_1,\ y_1)e^{-i2\pi(ux_1+vy_1)}dx_1dy_1 \tag{5-16}$$

这说明在后焦面上（x，y）点的复振幅可以从衍射孔径上的复振幅分布$\widetilde{E}$（x_1，y_1）的傅里叶变换求出。但是这时变换必须在空间频率$\left(u=\frac{x}{\lambda f},\ v=\frac{y}{\lambda f}\right)$处取值。我们往往就说后焦面上的复振幅分布是孔面上复振幅分布的傅里叶变换或空间频谱。

从上一节讨论的单色光波的复振幅分解的观点来看，焦面场和孔径场之间的这种傅里叶变换关系是很容易理解的。因为衍射孔面上的复振幅可以分解为

$$\widetilde{E}(x_1,\ y_1)=\iint_{-\infty}^{\infty}\widetilde{E}(u,\ v)e^{i2\pi(ux_1+vy_1)}dudv \tag{5-17}$$

式中$\widetilde{E}(u,\ v)$代表$E(x_1,\ y_1)$的傅里叶变换或空间频谱。这表示可以把衍射波看作沿不同方向传播的平面波的迭加。基元平面波$e^{i2\pi(ux_1+vy_1)}$的方向余弦为$(\lambda u,\ \lambda v)$，它经过透镜后会聚于焦面上座标为（$x=u\lambda f$，$y=v\lambda f$）的一点，该点的复振幅正比于$\widetilde{E}(u,\ v)$。这就说明后焦面上的复振幅分布是孔径上复振幅分布的傅里叶变换或空间频谱。

下面用这种新的观点重新研究一下第四章中论述过的夫琅和费衍射现象。

二、矩孔衍射与单缝衍射

设一束单色平行光垂直入射到矩孔上，那么矩孔平面上的复振幅分布为

$$\widetilde{E}(x_1,\ y_1)=\begin{cases}A & \text{当}\quad |x_1|\leqslant\frac{b}{2}\quad |y_1|\leqslant\frac{a}{2}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求此两维函数的傅里叶变换，即得矩孔衍射的复振幅分布

$$\widetilde{E}(u,\ v)=F\{\widetilde{E}(x_1,\ y_1)\}=A\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}e^{-i2\pi(ux_1+vy_1)}dx_1dy_1$$

略去常数因子，积分得到

$$\widetilde{E}(u,\ v)=\frac{\sin\pi ub}{\pi ub}\cdot\frac{\sin\pi va}{\pi va} \tag{5-18}$$

或

$$\widetilde{E}(u,\ v)=\mathrm{sinc}(ub)\,\mathrm{sinc}(va) \tag{5-18a}$$

光强度

$$I=|\widetilde{E}(u,\ v)|^2=\left(\frac{\sin\pi ub}{\pi ub}\right)^2\left(\frac{\sin\pi va}{\pi va}\right)^2 \tag{5-19}$$

或

$$I=\mathrm{sinc}^2(ub)\,\mathrm{sinc}^2(va) \tag{5-19a}$$

如果 $b\gg a$，则矩孔变成平行于 x 轴的狭缝（见图4-33），式(5-18）的因子 $\frac{\sin\pi ub}{\pi ub}$ 在 y 轴之外实际上为零，衍射光只沿 y 轴方向，即沿垂直于缝的方向扩展。因此，对于单缝有

$$\widetilde{E}(v)=\frac{\sin\pi va}{\pi va}=\mathrm{sinc}(va) \tag{5-20}$$

及

$$I=\frac{\sin^2\pi va}{(\pi va)^2}=\mathrm{sinc}^2(va) \tag{5-21}$$

这与第四章中得到的结果是完全一致的。

当孔径大小（a，b）变化时，衍射图样也将发生变化。根据式（5-16）衍射图样上的复振幅分布为

$$\widetilde{E}(u,\ v)=\iint_{-\infty}^{\infty}\widetilde{E}(x_1,\ y_1)e^{-i2\pi(ux_1+vy_1)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1 \tag{5-22}$$

若在 x_1，y_1 方向上将孔的尺寸分别缩小到原来的 $\frac{1}{m}$ 和 $\frac{1}{n}$，则新衍射图样的复振幅分布为

$$\widetilde{E}_{m,n}(u,\ v)=\iint_{-\infty}^{\infty}\widetilde{E}(mx_1,ny_1)e^{-i2\pi(ux_1+vy_1)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1$$

取　$x_1'=mx_1$，$y_1'=ny_1$，代入上式则得

$$\widetilde{E}_{m,n}(u,\ v)=\frac{1}{mn}\iint_{-\infty}^{\infty}\widetilde{E}(x_1',\ y_1')e^{-i2\pi[u(x_1'/m)+v(y_1'/n)]}\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}y_1' \tag{5-23}$$

比较式（5-22）和（5-23），得到

$$F\{\widetilde{E}(mx_1,\ ny_1)\}=\widetilde{E}_{m,n}(u,\ v)=\frac{1}{mn}\widetilde{E}\left(\frac{u}{m},\ \frac{v}{n}\right) \tag{5-24}$$

表明，空间域的缩小（mx_1，ny_1）对应着频率域的放大$\left(\frac{u}{m},\ \frac{v}{n}\right)$，这就是傅里叶变换的缩放定理。它告诉我们，当衍射孔径缩小(或放大）时，伴随着衍射图样的放大(或缩小)，即空间频率谱的放大（或缩小)。

三、多孔或多缝衍射

双缝及光栅的衍射，其实就是两个和多个具有相同形状和方位的单缝的衍射。应用傅里叶变换的相移定理很容易在单孔（缝）衍射的基础上求得它们的衍射图样。

在图 5-7 中，设衍射孔径从 C_1 移到 C_1' 处，C_1 在透镜 L 的光轴上，过 C_1' 取一座标系 $x_1'C_1'y_1'$，并与 $x_1C_1y_1$ 平行。设 α_1，β_1 为 C_1' 相对于 $x_1C_1y_1$ 座标系的座标，x_1'，y_1' 为孔径上任一点 M 相对于 $x_1'C_1'y_1'$ 座标系的座标。因此，M 相对于 $x_1C_1y_1$ 座标系的座标为

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1' + \alpha_1 \\ y_1 &= y_1' + \beta_1 \end{aligned} \tag{5-25}$$

当 C_1' 是在 C_1 处时，在透镜后焦面 xy 平面上任一点 P 的复振幅为

$$\widetilde{E}(u,\ v) = \iint_{-\infty}^{\infty} \widetilde{E}(x_1,\ y_1) e^{-i2\pi(ux_1+vy_1)} dx_1 dy_1 \tag{5-26}$$

现在孔径是在移动了一个 C_1C_1' 的距离的位置上。这时，P 点的复振幅应为

$$\begin{aligned} \widetilde{E}'(u,\ v) &= \iint_{-\infty}^{\infty} \widetilde{E}(x_1', y_1') e^{-i2\pi[u(x_1'+\alpha_1)+v(y_1'+\beta_1)]} dx_1' dy_1' \\ &= e^{-i2\pi(u\alpha_1+v\beta_1)} \iint_{-\infty}^{\infty} \widetilde{E}(x_1',\ y_1') e^{-i2\pi(ux_1'+vy_1')} dx_1' dy_1' \end{aligned} \tag{5-27}$$

令 $\delta_1' = u\alpha_1 + v\beta_1$，并比较式（5-26）与（5-27），则得

$$\widetilde{E}'(u,\ v) = e^{-i2\pi\delta_1'} \widetilde{E}(u,\ v) \tag{5-28}$$

光强度有

$$|\widetilde{E}'(u,\ v)|^2 = |\widetilde{E}(u,\ v)|^2 \tag{5-29}$$

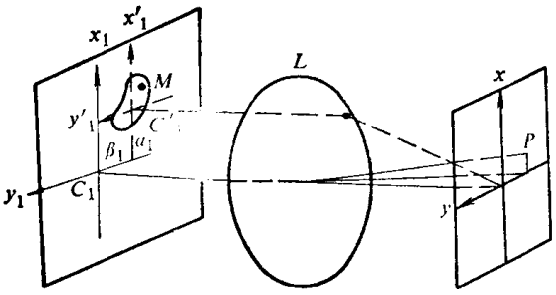


图5-7　多孔衍射的傅里叶分析

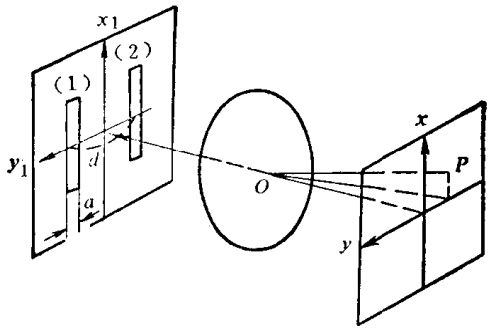


图5-8　双缝衍射产生的傅里叶分析

式（5-28）与（5-29）表明，当衍射孔径在孔面内移动一个距离后，不改变衍射图样的光强分布，只是由于存在因子 $e^{-i2\pi\delta_1'}$，位相有了变化，这就是傅里叶变换相移定理。

利用上述结论可以方便地求得双缝及光栅的衍射图样的分布。

例如，双缝衍射，如图(5-8)所示，设两缝（1），（2）对称于光轴，缝宽为 a，两缝中心距离为 d，按照式(5-28)，在透镜焦面上任一 P 点产生的复振幅为

$$\widetilde{E}'(u,v) = e^{-i2\pi\delta_1'} \widetilde{E}(u,\ v) + e^{-i2\pi\delta_2'} \widetilde{E}(u,\ v)$$

$\widetilde{E}(u,\ v)$ 乃是处在光轴上的单缝在 P 点所产生的复振幅，由式（5-20）有

$$\widetilde{E}(u,\ v) = \widetilde{E}(v) = \frac{\sin\pi va}{\pi va}$$

由于

$$\delta_1' = u\alpha_1 + v\beta_1 = v\frac{d}{2}$$

$$\delta_2' = -v\frac{d}{2}$$

所以P点的复振幅为

$$\widetilde{E}'(v)=(e^{-i\pi vd}+e^{i\pi vd})\frac{\sin\pi va}{\pi va} \tag{5-30}$$

光强度为

$$I=\left(\frac{\sin\pi va}{\pi va}\right)^2\cos^2\pi vd \tag{5-31}$$

若衍射孔径为图 5-9 所示的三缝，按照同样的方法求得P点的复振幅为

$$\widetilde{E}'(v)=(1+e^{-i2\pi vd}+e^{i2\pi vd})\frac{\sin\pi va}{\pi va}=(1+2\cos2\pi vd)\frac{\sin\pi va}{\pi va} \tag{5-32}$$

因为

$$1+2\cos2\pi vd=1+2(1-2\sin^2\pi vd)=3-4\sin^2\pi vd$$

$$=\frac{3\sin\pi vd-4\sin^3\pi vd}{\sin\pi vd}=\frac{\sin 3\pi vd}{\sin\pi vd}$$

所以P点的光强度为

$$I=\left(\frac{\sin\pi va}{\pi va}\right)^2\left(\frac{\sin 3\pi vd}{\sin\pi vd}\right)^2 \tag{5-33}$$

同理，对于N个缝，P点的复振幅为

$$\widetilde{E}'(v)=(1+e^{-i2\pi vd}+e^{i2\pi vd}+e^{-i4\pi vd}+e^{i4\pi vd}+\cdots)\frac{\sin\pi va}{\pi va} \tag{5-34}$$

P点的光强度为

$$I=\left(\frac{\sin\pi va}{\pi va}\right)^2\left(\frac{\sin N\pi vd}{\sin\pi vd}\right)^2 \tag{5-35}$$

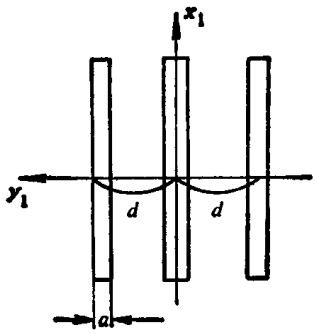


图5-9 三缝衍射的傅里叶分析

以上这些结果的意义不仅在于使我们得到了研究衍射问题的另一种方法，更重要的是使我们认识到衍射现象提供了一种进行傅里叶变换的光学方法。这在光学信息处理中有着特别重要的作用，在后面的讨论中我们将看到这一点。

§5-4 透镜的傅里叶变换性质

众所周知，透镜具有成像的本领，因而是光学成像系统中最重要的元件。不但如此，透镜还具有进行二维傅里叶变换的本领，因此，透镜也是光学信息处理系统中的重要元件。通常傅里叶变换运算要用庞大、复杂而且价格昂贵的电子频谱分析仪器才能进行，然而这种复杂的运算在光学上却可以由透镜组成的相干光学系统用模拟的方法极其简单地完成。

在上一节关于衍射问题的傅里叶分析中，我们已经初步看到了透镜的这一作用，衍射孔径的复振幅分布的空间频谱正是通过透镜的变换在其后焦面上得到的。这个事实就表明，透镜具有进行二维傅里叶变换的本领。

实际上式（5-16）已经得出了这一结论。但是应该指出，在式（5-16）中，我们忽略了积分号前的系数。如果考虑这一系数，根据式（4-13），后焦面场上的复振幅分布应为

$$\widetilde{E}(x,\ y)=C\iint_{-\infty}^{\infty}\widetilde{E}(x_1,y_1)e^{-i2\pi\left(\frac{x}{\lambda f}x_1+\frac{y}{\lambda f}y_1\right)}dx_1dy_1$$

$$=C\iint_{-\infty}^{\infty}\widetilde{E}(x_1,y_1)e^{-i2\pi(ux_1+vy_1)}dx_1dy_1 \tag{5-36}$$

其中

$$C=\frac{e^{ikf}}{i\lambda f}e^{\frac{ik}{2f}(x^2+y^2)}$$

在系数C中，因子$e^{\frac{ik}{2f}(x^2+y^2)}$是一个二次位相因子，它表明衍射孔面上的复振幅与后焦面场上的复振幅之间的傅里叶变换关系是不准确的，也就是说，焦面上的位相分布并不同于衍射孔面复振幅的频谱的位相分布。但二者之间的差别只是一个位相弯曲，在大多数情形下有实际意义的是焦面上的光强分布，在光强测量中位相分布是不起作用的。

可以证明㊀，二次位相因子的影响与衍射孔径离开透镜的距离d_0有关，式(5-36)是当$d_0=0$的情形。当衍射孔径Σ(物面)㊁正好在透镜的前焦面上时，如图5-10，则二次位相因子消失，得到准确的傅里叶变换关系，在相干光学处理系统中常常利用透镜的这一性质。

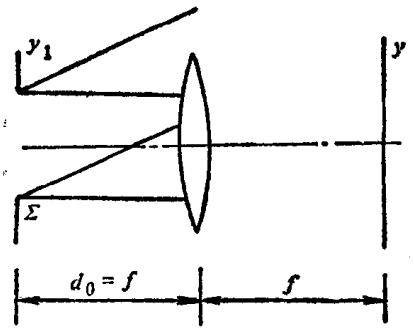


图5-10 渐晕现象

由于透镜的口径总是有限的，它将限制物面的某些空间频率的传播，如图5-10所示，这个现象称为渐晕效应。物面愈靠近透镜或透镜口径较物面大的愈多，渐晕效应愈小。渐晕效应的存在将会影响傅里叶变换的精度。

§5-5 阿贝成象理论及阿贝-波尔特实验

一、阿贝成象理论

阿贝(Abbe)于1873年在关于显微镜成象理论的论述中首次引出了频谱的概念和二次衍射成象的概念。波尔特(Porter)又于1906年用实验证实了阿贝成象理论，这些工作可以说是应用傅里叶光学的开端。在激光出现后的今天，又比较容易地重复了这些实验，使我们更看到了这一理论对于现代傅里叶光学的广泛应用的重要作用。

图5-11表示显微物镜的成象系统，用平行于光轴的相干光照明，I和I'分别是物平面和象平面，在物镜L的后焦面上放置孔径光栏（出瞳）。

㊀ 参看J. W. 顾德门著詹达三等译《傅里叶光学导论》，第五章。

㊁ 这里的物面就是指具有一定复振幅分布的衍射物，例如一块透光图片。

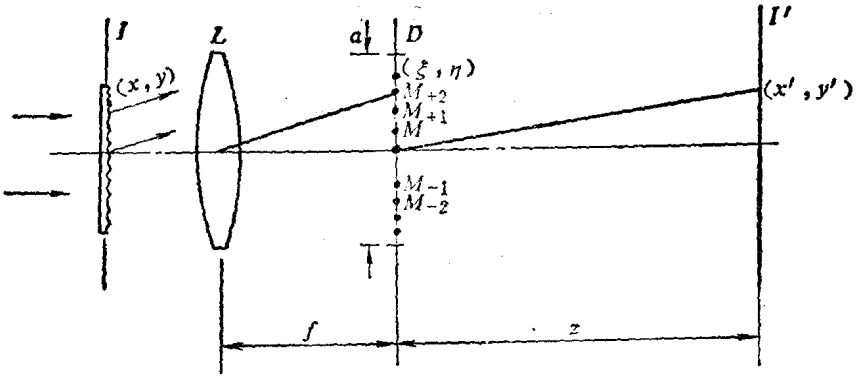


图5-11 阿贝成象理论

按照阿贝成象理论，物面如同一个衍射光栅，入射平行光通过它时，受到衍射而形成向各个方向传播的平面波。设物镜的孔径足够大，以致可以接受由物面衍射的所有光，这些衍射光在后焦面上形成夫琅和费衍射图样。这个衍射图样的各个极大分别用 M_{-2}，M_{-1}，M_0，M_1，M_2，……表示，焦平面上的每一点又可以看成是相干的次波源，它们的光强正比于各点的振幅平方，由这些次波源发出的光波在I'面上迭加而形成物面的象。这个成象过程经过了两次衍射，第一次是物平面的衍射，第二次则是由于孔径光栏的限制而产生的衍射，这两次衍射的过程也就是两次傅里叶变换的过程。为了得到一个与物面完全相似的象，则要求物平面的所有频谱都参予成象，但这实际上是不可能的，因为物镜的孔径总是有限的。但只要物镜孔径足够大，以致频谱中被“丢失”的那些成分所具有的能量可以忽略不计，则象面上的光场分布基本上相似于物面分布，即象和物基本一致。

这个两次衍射，即两次傅里叶变换的成象过程可作如下的推导。设物面上的复振幅分布亦即物面的振幅透过率函数为$\widetilde{E}(x, y)$，按照式（5-16）与（5-17）在后焦面上的复振幅分布即$\widetilde{E}(x, y)$的傅里叶变换为

$$\widetilde{E}(\xi, \eta)=\iint_{-\infty}^{\infty}\widetilde{E}(x, y)e^{-i2\pi(ux+vy)}dxdy \tag{5-37}$$

式中

$$\widetilde{E}(x, y)=\iint_{-\infty}^{\infty}\widetilde{E}(\xi, \eta)e^{i2\pi(ux+vy)}dxdV \tag{5-38}$$

其中

$$u=\frac{\xi}{f\lambda}, \qquad v=\frac{\eta}{f\lambda}$$

其次，我们考虑从焦面到象面I'的变换，设孔径光栏直径为a，焦面到象面的距离为z，因为在显微镜中$a/z\ll 1$，所以由孔径光栏D到象面产生的衍射也可以近似看成夫琅和费衍射㊀，因此，在象面I'上的复振幅分布为

$$\widetilde{E}(x', y')=\iint_{-\infty}^{\infty}\widetilde{E}(\xi, \eta)e^{-i2\pi(u'\xi+v\eta)}d\xi d\eta \tag{5-39}$$

因为

$$u'=\frac{x'}{z\lambda}, \qquad v'=\frac{y'}{z\lambda}$$

㊀ 这里是为了简化计算作了这一近似，但按菲涅尔衍射处理也将得到同样的结论。

$$\xi = uf\lambda \qquad \eta = vf\lambda$$

代入式(5-39)，得

$$\widetilde{E}(x', y') = (f\lambda)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{E}(\xi, \eta) e^{\frac{-i2\pi f}{z}(ux'+vy')} du dv.$$

又因为

$$x' = \frac{-z}{f}x, \quad y' = \frac{-z}{f}y$$

所以

$$\widetilde{E}(x', y') = (f\lambda)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} \widetilde{E}(\xi, \eta) e^{i2\pi(ux+vy)} du dv \tag{5-40}$$

比较（5-38）与（5-40）可以看出，物面与象面的复振幅之比是个常数，也就是说，象面上的实振幅和位相分布规律完全与物面相同，即物与象几何相似。实际上由于物镜口径的限制致使高频部分“丢失”，因而丢失了象面分布的细节，使系统的分辨本领下降，这就是阿贝成像理论对分辨本领的物理解释。

阿贝成像理论最后就归结为式（5-37）与（5-40）两个基本表达式。式（5-37）表示第一次衍射就是物面复振幅$\widetilde{E}(x, y)$的分解，在后焦面上得到空间频谱$\widetilde{E}(\xi, \eta)$。式(5-40)表示第二次衍射并成像乃是空间频谱$\widetilde{E}(\xi, \eta)$的综合。如果物面的所有频谱都能够参与综合成像，则像面的复振幅分布与物面完全相同，即得到一个与原物几何相似的放大了的象。而当频谱有所损失或改变时，象也就不完全相似于物。正是因为成像过程中这种对频谱的分解又综合的作用，而使傅里叶光学在光学信息处理中享有重要的地位。

二、阿贝-波尔特实验

波尔特实验有力地证实了阿贝成像理论，也对傅里叶分析的最基本的原理提供了有力的证明。实验装置如图 5-12 所示，用相干光源照明一细丝网格或交叉光栅 I，在透镜 L 的后焦面上出现周期性网格的空间频谱，最后这些频谱综合而在象平面 I' 上复现网格的象。如果在频谱面上，放上各种拦截物，例如狭缝、小圆孔或小圆屏等，就能够以各种方式直接改变频谱，从而使象又发生相应的变化。这些拦截物或与它们有相同性能的光学元件统称为空间滤波器。

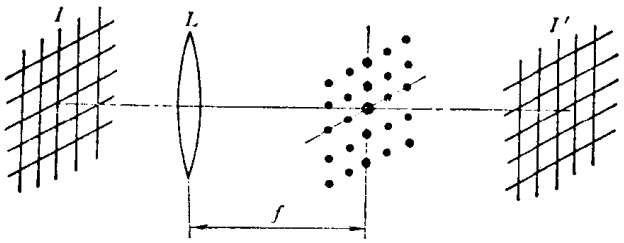


图5-12　阿贝-波尔特实验

图 5-13 *a* 表示网格的未经改变的频谱照片，图 *b* 是相应的象。物的周期性结构在焦平面上产生出一系列分立的频谱分量。由于网格所在的圆形孔径的有限大小，使得每个频谱分量都有一定扩展。焦平面上沿水平轴的亮点对应于物的水平指向的空间频率分量，沿垂直轴的亮点则对应于垂直指向的空间频率分量，不在轴上的亮点对应于在物平面上相应角度指向的分量。

在焦面上插入一个狭缝，使得只通过单独一行频谱分量，就可以清楚地看到空间滤波器的作用。图 5-14 *a* 表示当使用一条水平狭缝时所透过的频谱，对应的象如图 *b*，它只包含网格的垂直结构，而完全没有水平结构。这说明，对象的垂直结构有贡献的正是沿水平指向的

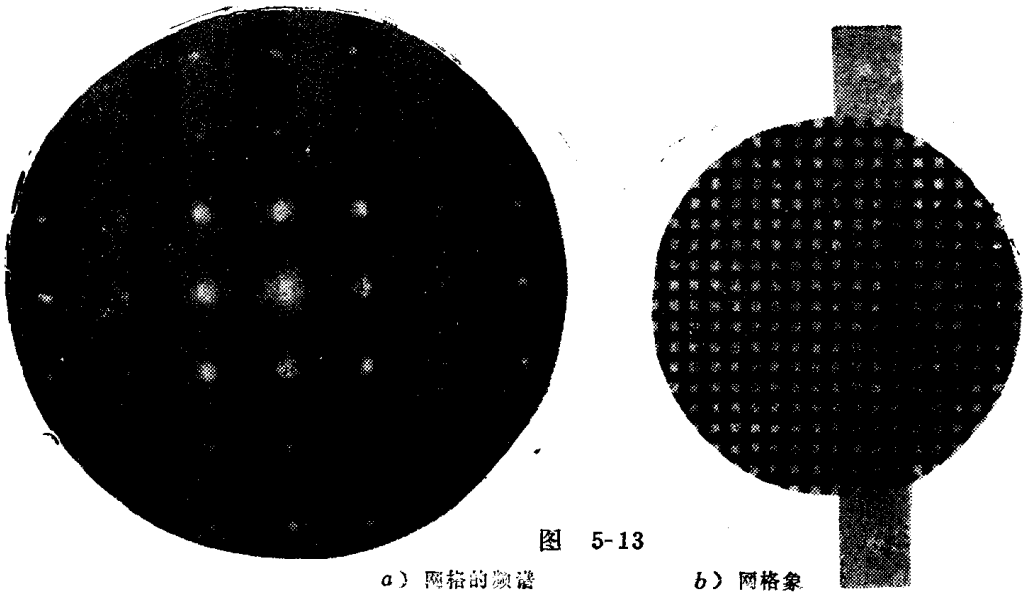


图 5-13

a）网格的频谱　　b）网格象

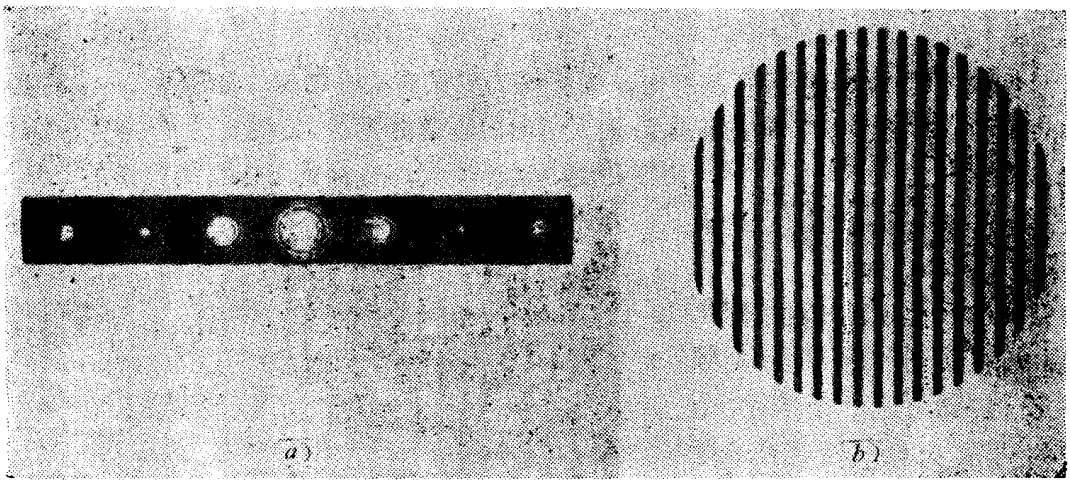


图 5-14

a）通过太平狭缝的频谱　b）网格垂直结构象

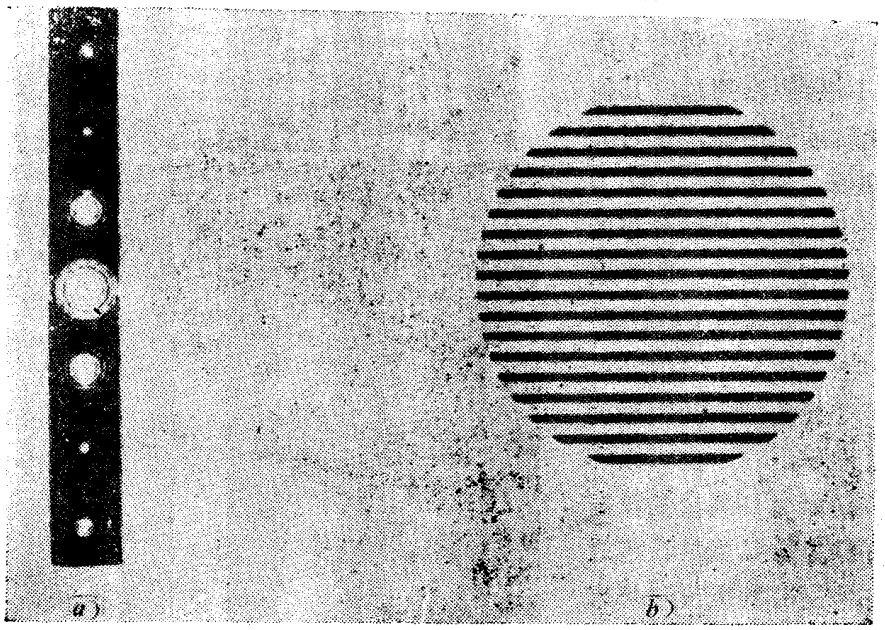


图 5-15

a）通过垂直狭缝的频谱　b）网格水平结构象

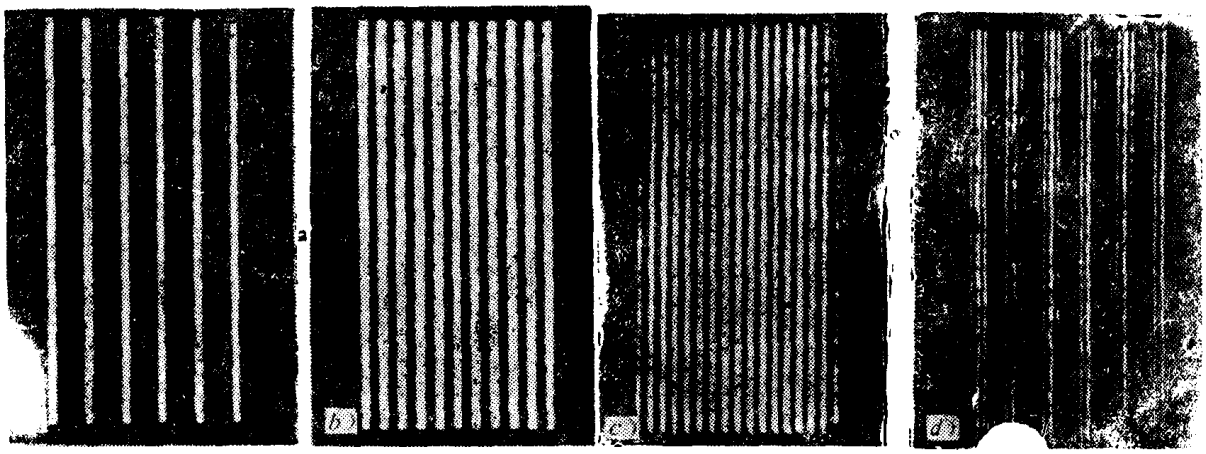


图5-16　一维光栅经过不同滤波后的成象

频谱分量。

若把狭缝旋转90°成为垂直狭缝时，则所得的象只有水平结构，如图5-15*a*、*b*所示。这说明，对象的水平结构有贡献的正是沿垂直指向的频谱分量。

若在焦面上放一个可变光栏，使圆孔由小逐渐变大，这样就可以看到网格的象是怎样由各频谱分量一步一步的综合出来的。

若在狭缝板上分别开出不同位置的孔，就可以分别看到各级频谱的作用。例如考虑一个由六个缝组成的一维光栅（缝宽0.5毫米，缝间距2毫米，缝长20毫米），图5-16*a*表示所有频谱都通过时的光栅象，图*b*表示只允许两个1级（+1级，-1级）频谱通过，其他各级均被遮拦时的光栅象，这时光栅缝数变成11条，光栅周期减为原光栅象的一半而光栅光强分布的空间频率变为原来的两倍。图*c*表示只让在光轴一边的1级（+1级）和光轴另一边的2级（-2级）通过时的情形，其光栅象的空间频率为原来的3倍。图*d*是将中央零级和两个1级遮栏，而允许其余的较高级通过时的光栅象，又如只让零级通过而遮掉其他所有的级次，那末象面变成均匀一片，不出现光栅网格。如果用一个小圆屏只遮去零级

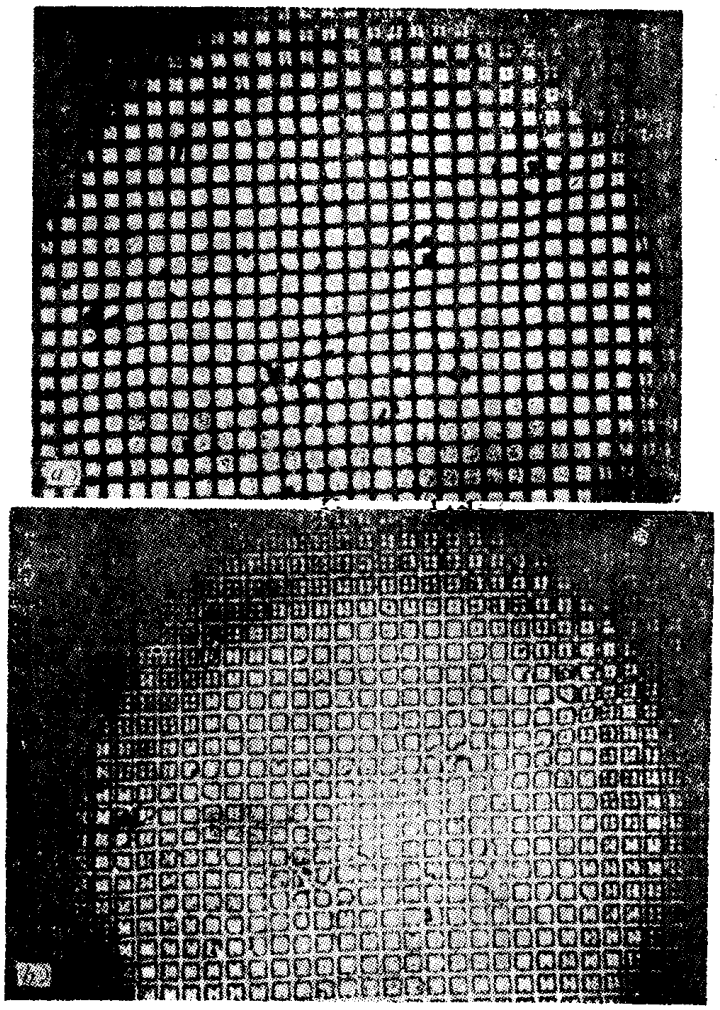


图5-17　对比反转现象

而允许其它所有级次通过，则会看到一个与原光栅象具有相同周期的但是发生了对比反转的光栅象。图 5-17a 表示一个网格的象，图 b 则表示发生了对比反转的网格象。以上这些有趣的现象，不难利用傅里叶分析方法加以论证和解释。

波尔特实验不仅使我们对于阿贝成象理论和傅里叶分析方法得到了具体而形象的理解，而且还使我们初步看到了空间滤波在光学处理中的作用。正是这一点孕育了今天的光学信息处理。

§5-6 相干光学处理系统-双透镜相干成象系统

在波尔特实验中，我们看到利用各种空间滤波器可以改变物函数的频谱，从而改变象函数。这个过程也就是一个简单的光学信息处理的过程，即对于输入的物函数（光学信息）进行了处理。利用相干光照明的这个系统（如图5-12）就是一个相干光学处理系统（或光学空间滤波系统）。但在现代光学中常采用的相干光学处理系统乃是双透镜的相干成象系统，如图 5-18 所示。一束平行的相干光（如激光）照明透射物体 I（记录有待处理的图象或信号的透光片）。I 置于变换透镜 L_1 的前焦面上，L_1 的作用是在其后焦面上产生物函数 $\widetilde{E}(x, y)$ 的准确的（无二次位相因子的）傅里叶变换

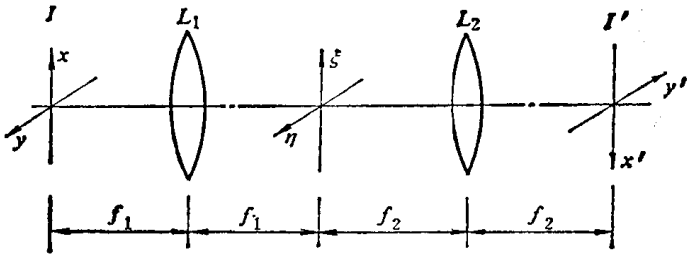


图5-18 相干光学处理系统-双透镜系统

$$\widetilde{E}(\xi, \eta)=\iint_{-\infty}^{\infty}\widetilde{E}(x, y)e^{-i2\pi(ux+vy)}dxdy \tag{5-41}$$

此频谱面又处于变换透镜 L_2 的前焦面上，L_2 的作用是在其后焦面上产生频谱函数 $\widetilde{E}(\xi, \eta)$ 的傅里叶变换

$$\widetilde{E}'(x', y')=\iint_{-\infty}^{\infty}\widetilde{E}(\xi, \eta)e^{-i2\pi(u'\xi+v'\eta)}d\xi d\eta$$

令 $f_1=f_2=f$，并将 $u=\dfrac{\xi}{f\lambda}$，$v=\dfrac{\eta}{f\lambda}$，$u'=\dfrac{x'}{f\lambda}$，$v'=\dfrac{y'}{f\lambda}$

代入上式得到

$$\widetilde{E}'(x', y')=\iint_{-\infty}^{\infty}\widetilde{E}(\xi, \eta)e^{-i2\pi(ux'+vy')}d\xi d\eta$$

如果设 $x'=-x$，$y'=-y$，上式变成

$$\widetilde{E}'(x', y')=\widetilde{E}'(-x, -y)=\iint_{-\infty}^{\infty}\widetilde{E}(\xi, \eta)e^{i2\pi(ux+vy)}d\xi d\eta \tag{5-42}$$

将式（5-41）作一次逆变换，并与式（5-42）比较，即可得

$$\widetilde{E}'(x', y')=\widetilde{E}'(-x, -y)=\widetilde{E}(x, y)$$

因此，通过两次傅里叶变换得到了原函数，只是变成了一个倒象。光学系统的这一功能犹如一台计算机，$\widetilde{E}(x, y)$ 与 $\widetilde{E}'(x', y')$ 分别为计算机的输入和输出数据。如果在频谱面上插入

空间滤波器就可以改变频谱函数$\widetilde{E}(\xi,\eta)$（改变振幅或位相，或二者同时改变），从而使输入数据得到处理，如同在波尔特实验中所看到的那样。因此，图 5-18 所示的这种系统，常称为相干光学处理系统或光学空间滤波系统，也可以称为“光学计算机”。

光学信息处理，在用相干光照明的情况下，就是应用图 5-18 所示的系统或相类似的其他系统对给定的物函数$\widetilde{E}(x,y)$，研究其频谱$\widetilde{E}(\xi,\eta)$和象函数以及两者之间关系的光学课题。光学信息处理的内容十分广泛，且正在发展之中，下面仅举几个较简单的例子，作为对空间滤波技术及光学信息处理的具体应用的初步了解。

§5-7 简单空间滤波器的应用举例

在波尔特实验中，应用了狭缝、光拦等空间滤波器。这些滤波器的作用是把不需要的频谱挡去，只让所需要的频谱通过。它们的制造和使用都比较简单，统称为简单滤波器。下面介绍简单滤波器的两个应用实例。

一、激光输出的处理

例如一台氦-氖(He-Ne)激光器的输出光束，往往由于灰尘或光学镜面的缺陷，使激光发生衍射，结果使激光光斑上出现一些不规则的衍射图样，如图 5-19*a* 所示，当这样的激光束用于全息技术或全息照相是有害的。可以用简单滤波器将这些不规则的衍射图样消除掉。图 *a* 所示的光束可以想像成由两部分组成——呈高斯分布的光斑(见§8-4）和其他不规则的衍射图样。高斯分布的傅里叶变换仍然是高斯分布。因此，它在图 5-19*c* 中的扩束透镜 L_1 的后焦面上的频谱分布主要是位于靠近中心的低频分，而不规则的衍射图样却主要具有远离中心的较高频成分。因此，若在谱面中心放置一个很小的孔作为滤波器(针孔滤波器)，那末就只有低频成分通过，而高频成分被拦截。再经过具有较长焦距的第二个透镜 L_2 准直，即得到扩展了的均匀的激光束，如图 *b* 示。

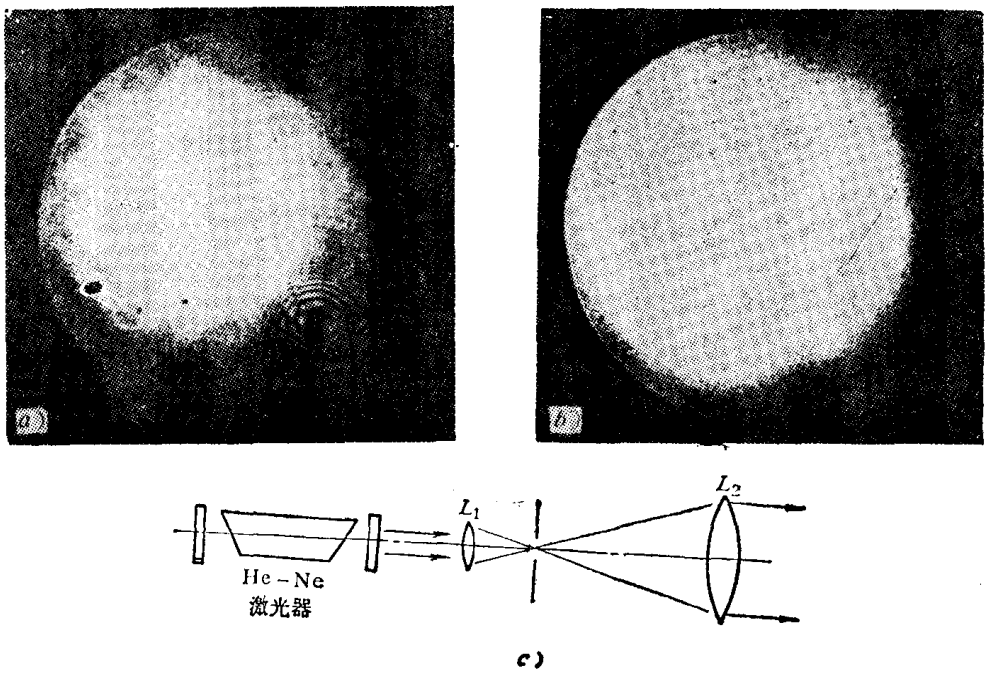


图5-19 激光输出的处理

二、大规模集成电路（掩模板）疵病检查

图 5-20a 是一张有斑点缺陷的集成电路的放大照片。为了检查掩模板上是否有斑点缺陷，可以先将没有缺陷的标准掩模板放在图 d 的双透镜相干系统的物平面 I 上，并在频谱面 K 上拍下它的频谱照片(负片)，图 b 是它的放大照片。以此负片作为空间滤波器，再插到频谱面 K 上。然后将待检查的掩模板放在系统的物平面 I 上。如果这块掩模板没有任何斑点缺陷，它的频谱就和标准掩模板的频谱完全一样，因此，被空间滤波器完全滤掉，在象面 I' 上没有任何信息。如果有斑点缺陷，则这些斑点缺陷的频谱将不会受到滤波器的阻拦而在象面 I' 上成象，这样就可以一目了然地看出掩模板上的斑点缺陷，如图 c 所示。

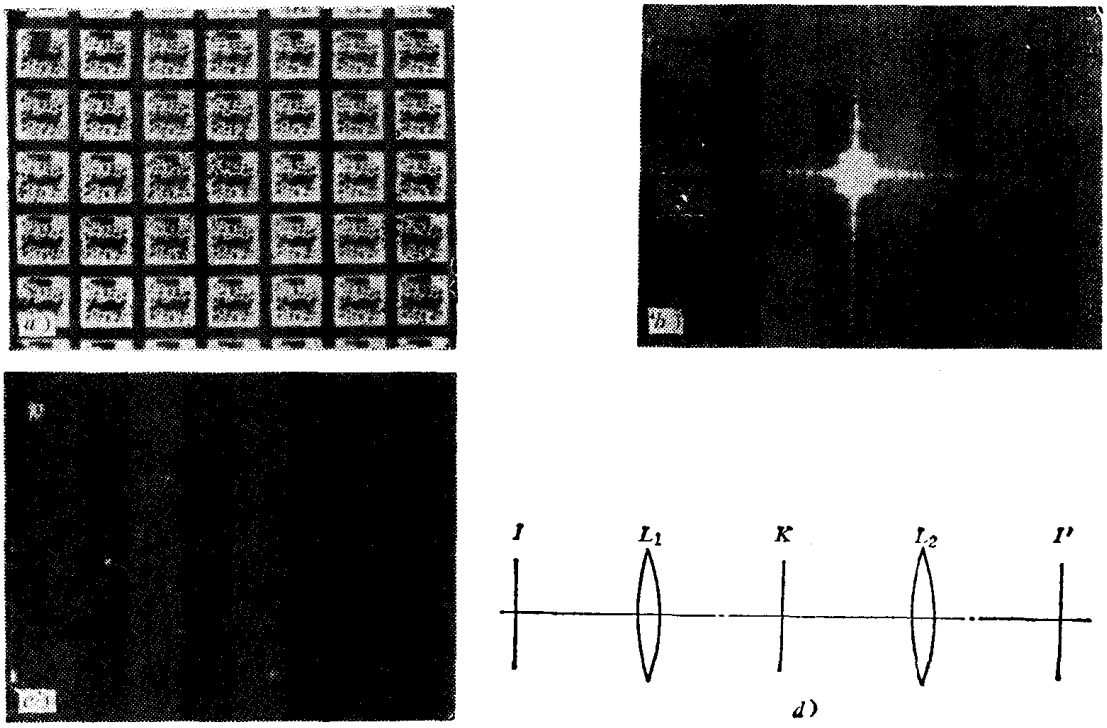


图5-20　掩模板疵病的检查

§5-8　位相滤波器，暗场法和泽尼克相衬法

人眼能够感受和辨别物体光强度的差别，但不能感受和辨别物体位相的差别。因此，当一个物体透射或反射的光强度（振幅）不同于周围介质时，人们可以发现这个物体的存在。但也还有一类物体，如生物切片、油膜、位相光栅等，它们不改变入射光的振幅，只改变入射光波的位相，这种物体称为“位相物体”。这些物体的结构，人眼是无法直接观察到的。但常常正是这些位相分布反映着物体的某些特性，为此需要将这些位相分布转换为振幅分布。下面介绍常用于观察位相物体的暗场法或纹影法、泽尼克(Zernike)相衬法及位相滤波器等内容。

一、暗场法或纹影法

在一个双透镜的相干光学处理系统中来考察一个纯位相物体，如图 5-21 所示。设位相物体的复振幅分布为

$$\widetilde{E}(x,y)=e^{i\varphi(x,y)}=1+i\varphi(x,y)-\frac{1}{2}\varphi^2(x,y)-\frac{i}{6}\varphi^3(x,y)+\cdots \quad (5\text{-}43)$$

当$\varphi(x,y)$很小时，式(5-43)可近似为

$$\widetilde{E}(x,y)\approx 1+i\varphi(x,y)$$

在透镜 L_1 的后焦面上得到$\widetilde{E}(x,y)$的傅里叶频谱为

$$\widetilde{E}(u,v)=\iint_{-\infty}^{\infty}(1+i\varphi(x,y))e^{-i2\pi(ux+vy)}dxdy=\delta(u,v)+i\Phi(u,v) \quad (5\text{-}44)$$

频谱函数$\widetilde{E}(u,v)$由两部分组成，$\delta(u,v)$对应于零级谱($u=0$，$v=0$)，它表示与位相函数$\varphi(x,y)$无关的直流分量，即由未经衍射的直射光形成的像点。而$i\Phi(u,v)$则表示被位相物体衍射的各种空间频率(u，v)的频谱。

若在频谱面上光轴处放置一个小圆屏作为空间滤波器，滤掉零级谱$\delta(u,v)$，则透过的频谱只有

$$\widetilde{E}'(u,v)=i\Phi(u,v) \quad (5\text{-}45)$$

再经第二个透镜 L_2 进行一次逆变换，在象平面(x'，y')上得到复振幅分布为

$$\widetilde{E}(x',y')=\iint_{-\infty}^{\infty}i\Phi(u,v)e^{i2\pi(ux+vy)}dudv=i\varphi(x,y) \quad (5\text{-}46)$$

光强度分布

$$I(x',y')=|\varphi(x,y)|^2 \quad (5\text{-}47)$$

因此，在象面上得到了正比于物体位相分布的平方的光强度，实现了将位相分布转换为振幅(光强)分布的目的，从而使人们可以通过观察到的光强度分布来分析物体的位相分布情况。

上述方法称为暗场法或纹影法。因为它是用一个简单的圆屏滤波器完全挡掉了零级频谱$\delta(u,v)$，因此，在象面上观察到的是在一个暗背景上出现的反映物体位相分布的纹影。当物体没有位相变化时，象平面上将是一片暗视场。空间滤波器也可以用一个刀口光栏（如图 5-21 所示）在频谱面上逐渐切入，直到挡住下面和中央零级频谱，由剩下的上半部较高级频谱在象面上产生一定的光强分布。

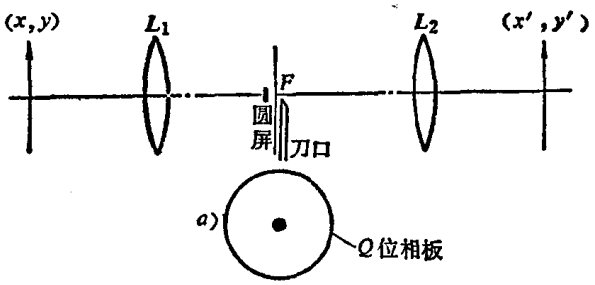


图5-21 暗场法与纹影法

暗场法广泛应用在如检查光学零件的加工质量、在弹道学及空气动力学中研究冲击波等各方面。

这个方法的不足是最后得到的光强度分布不是位相分布的线性函数，给分析带来不便。

二、泽尼克相衬法(位相-对比度法)及相衬显微镜

泽尼克相衬法与暗场法一样，也是通过空间滤波器，将物体的位相分布转换为相应的振幅分布。但在相衬法中使用的空间滤波器不是简单地滤掉零级频谱，而是让零级频谱的振幅适当衰减，同时又使高级频谱产生一个$\pi/2$的位相移动，从而使象面上的光强度分布正比于物体的位相分布。相衬显微镜正是基于这一原理。

现在，在图 5-21 的谱面上放置一个空间滤波器Q，例如一块平玻璃板，在与零级频谱相

应的中心部分镀以一定厚度的膜层，如图5-21a所示，这样使零级频谱的振幅透射率减为t（$0<t<1$），而位相比其他频谱迟后或超前$\pi/2$，其他频谱的振幅透射率仍为1。这样的空间滤波器称为位相滤波器或位相板。因此，空间滤波器的透射率函数或滤波函数可表示为

$$H(u,\ v)=\begin{cases}\pm it & \text{在}\ \delta(u,\ v)\text{范围内}\\ 1 & \text{其他频谱}\end{cases}\tag{5-48}$$

加入位相板之后，透过的频谱函数$\widetilde{E}'(u,\ v)$将为$\widetilde{E}(u,\ v)$与$H(u,\ v)$的乘积，即

$$\widetilde{E}'(u,\ v)=\widetilde{E}(u,\ v)H(u,\ v)=\pm it\delta(u,\ v)+i\Phi(u,\ v)\tag{5-49}$$

象面复振幅分布为

$$\begin{aligned}\widetilde{E}(x',\ y')&=\iint_{-\infty}^{\infty}\widetilde{E}'(u,\ v)e^{i2\pi(ux+vy)}dudv\\&=\iint_{-\infty}^{\infty}[\pm it\delta(u,\ v)+i\Phi(u,\ v)]e^{i2\pi(ux+vy)}dudv\\&=\pm it+i\varphi(x,\ y)\end{aligned}\tag{5-50}$$

光强度分布

$$I(x',\ y')=|\widetilde{E}(x',\ y')|^2=t^2\pm2t\varphi(x,\ y)+\varphi^2(x,\ y)\tag{5-51}$$

当$\varphi(x,\ y)$很小时可忽略$\varphi^2(x,\ y)$，得

$$I(x',\ y')\approx t^2\pm2t\varphi(x,\ y)\tag{5-52}$$

这样，由相衬法得到的象面光强度分布就与物体的位相分布成线性关系，克服了暗场法的不足。

用相衬法所能观测的物体的最小位相变化，与位相板的透过率t有直接关系。设物体上没有位相变化（即$\varphi(x,y)=0$）的部分所对应的象面光强度为I_0，即$I_0=t^2$，则象面上光强度对比为

$$M=\frac{I_0-I(x',y')}{I_0}=\frac{t^2-[t^2\pm2t\varphi(x,y)]}{t^2}=\mp\frac{2\varphi(x,y)}{t}\tag{5-53}$$

因此，光强度分布的对比度M随位相板的透过率t的减小而增加。所以，位相板通常并不只是产生位相移动$\pi/2$，而是镀以一定厚度的金属膜层，吸收一部分直射的零级光强，提高象面的光强度对比，以便观察到更小的位相变化。

例如，若人眼可分辨的最小对比度M为0.02，由式（5-53），当$t=1$时，可观察到的最小位相变化为

$$\varphi=\frac{Mt}{2}=\frac{0.02}{2}=0.01\ (\text{弧度})$$

设光波波长$\lambda=6000$埃，这相当于光程差

$$\Delta=\frac{\lambda\varphi}{2\pi}=\frac{6000\times0.01}{2\times3.14}\approx10\ (\text{埃})$$

当$t=0.01$时，可观察到的最小位相变化为

$$\varphi=\frac{0.01\times0.02}{2}=0.0001\ (\text{弧度})$$

这相当于光程差

$$\Delta\approx0.1(\text{埃})$$

当然，位相板的透射率 t 也不可太小。当 $t\to 0$，二次项 φ^2 将不可忽略，由式(5-51)，$I(x',y')\approx\varphi^2(x,y)$。这时，实际上相衬法就变为暗场法了。

如果位相板通过零频的中心部分镀以 $\lambda/4$ 厚度的膜层，使零频产生 $\pi/2$ 的位相迟后，式(5-48)与(5-52)中取正号，这意味着物体的位相厚度较大的地区，看起来比平均照度亮，这种情况称为亮相衬，如果位相板通过零频的中心部分镀以 $\frac{3}{4}\lambda$ 厚度的膜层，则使零频产生 $\frac{3}{2}\pi$ 的位相迟后，即相当于位相超前 $\pi/2$，式(5-48)与式(5-52)中取负号，这意味着物体的位相厚度较大的区域，看起来较暗，这种情况称为暗相衬。

以上用两次傅里叶变换及空间滤波的概念阐述了暗场法及相衬法原理，我们看到了把一个位相变化的光学信息变成光强度变化的光学信息的具体处理过程。在许多书籍中是用一般的衍射及干涉原理来论述这个问题的。无疑，这两种方法在本质上是统一的。

利用相衬法制成的相衬显微镜适用于生物学、结晶学等方面研究位相物体。图5-22是一种常见的相衬显微镜的光路图。在一个普通显微镜中附加了两个光栏，一个是位在聚光镜 L^2 前焦面上的环形光栏 D_1，另一个是在物镜 L_3 后焦面上的环形位相板 D_2。光源 S 经聚光镜 L_1 成象于光拦 D_1 上，透过环形孔的光束经过聚光镜 L_2 变成倾斜的平行光束照明位相物体 I（这样的倾斜照明较正入射照明有更高的分辨本领）⊖。在透明位相板 D_2 的环形部分镀以一定厚度的金属膜，以产生一定的振幅透射率 t 和 $\pi/2$ 的位相迟后或超前。D_2 的环形部分正好是直射光会聚之处，亦即零级频谱所在之处。对于不同放大倍数的物镜匹配以不同直径的环形光栏 D_1 和位相板 D_2，以使来自环形孔的直射光通过 D_2 的环形部分（即使 D_1 环形孔的象与 D_2 环形镀膜部分重合），而经过位相物体衍射的光，即其他高级次频谱则从位相板上未镀膜的地方透过。这样，在象平面 I' 上则得到与物体位相分布成线性关系的光强分布。

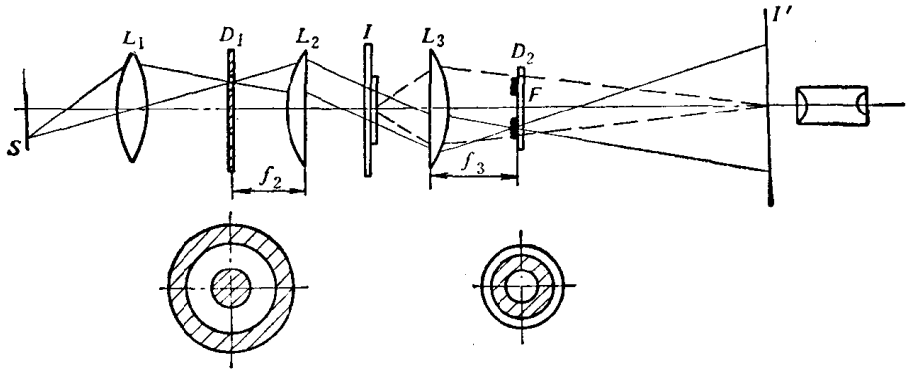


图5-22 相衬显微镜的一种结构

§5-9 切趾术(变迹术)

"切趾术"(Apodization)是一种通过改变光学仪器的衍射孔面上的复振幅分布，从而改变象斑的衍射图样的光强分布，以提高光学仪器的分辨本领的方法。

第四章§4-12曾经指出，光学仪器的理论分辨本领是由衍射效应决定的，其值可由瑞利判据求出。在瑞利判据中主要考虑了衍射象的中央亮斑的影响，因为中央亮斑占有绝大部分

⊖ 见M. 玻恩，E. 沃耳夫《光学原理》，杨葭荪等译，§8.6.2。

（约80%）的光能量，而忽略了其他次极大的影响。

这样的判据对于两个等强度的物点来说是合适的。但往往有这样的情形，被观察的两个物点中，一个比另一个强得多。例如，观察天狼星的很弱的伴星，在光谱学中观察很弱的附属线或稀罕的同位素线，或者在显微镜中观察高对比度的细节等等。在这些情况下高强度的物点的衍射图样中的次级大相对于很弱的另一个物点的中央亮斑来说则是不可忽略的，这时实际分辨本领常常达不到由瑞利判据得出的结果。因为高强度物点的中央亮斑之外的那些还具有20%光强的次极大，不仅造成能量的损失，而且它们产生的杂散光弥散在象面上，对于象点的观察是很有害的，尤其影响上述几种情况下对物体细节的分辨。因此，为了提高分辨本领，应该尽可能地减小这些次极大衍射环，为此，可以采取“切趾术”。

我们仅举一个例子来说明“切趾术”的原理与方法，图 5-23 a 表示一个望远物镜 L，孔径光拦为 D。被观察的远方物体在其后焦面 F 上产生的象乃是孔径函数的夫琅和费衍射图样，强度分布如图 5-23b 中的曲线 1 所示。为了既不增加孔径 D，又使中央亮斑之外的次极大被“切掉”，可以在孔径 D 上放入一块玻璃制成的很薄的平面平行板 Q，在 Q 上镀以非均匀的吸收膜层，使它的振幅透射率从中心到边缘越来越小，呈高斯分布曲线变化，边缘的振幅透射率小到可以忽略不计。这样，孔面上的光场分布就由原来的均匀分布变成了高斯分布，所以在后焦面上的衍射斑也就是高斯函数的傅里叶变换了。它仍然是一个高斯分布，如图5-23b中的曲线 2 所示。中央亮斑的宽度虽然略变宽，但它边缘的次极大被“切掉”了。图 5-23b，通过切趾术由曲线 1 变成曲线 2 的这种情形，适宜于观察两个强度相差很大的靠近物点（如天狼星及其伴星），这样可以提高对比度从而提高分辨本领，此外，还可以用“变迹术”以次极大略有提高为代价，使衍射图样的中央亮斑变窄，如图 5-23c 所示（曲线 1 变为曲线 2）。这种情况适用于观察两个同等亮度的高对比的细小物体，从而提高分辨本领，以至可得到超分辨本领，即得到超过理论值的分辨本领。

总之根据被观察对象性质的不同，可通过改变孔径形状或改变孔面上的振幅透过率等方式以达到“切趾”或“变迹”的目的。

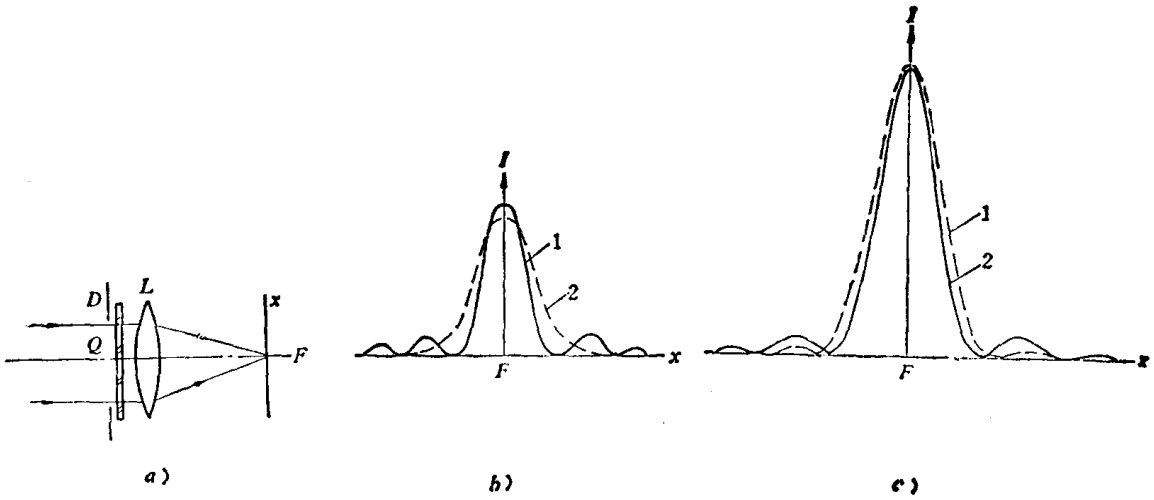


图5-23　切趾术

§5-10 相干光成象系统的频谱分析，相干传递函数

一、概述

在近代光学中用傅里叶变换和线性系统理论来研究光学系统已取得了很大的成功，光学传递函数是其中一个很突出的例子。现在，光学传递函数的概念和理论已较普遍地应用于光学设计结果的评价、控制光学元件的自动设计过程、光学镜头质量的检验、光学系统总体设计的考虑及光学信息处理等方面。特别是光学传递函数为光学仪器的设计、制造和使用提供了共同的统一的评价标准，成为一个更全面更客观的质量评价方法。

本节着重介绍光学传递函数的基本原理，关于它的具体应用等问题，将在应用光学中阐述。

从衍射理论已知，即使一个没有象差的完善透镜或光学系统，也得不到理想的几何象，而是一个由孔径所决定的衍射斑，衍射斑的存在影响光学系统分辨物体细节的能力。对于一个有象差存在的实际光学系统，还因为象差的存在而影响衍射斑中的光能分布，从而降低光学系统的质量。在常用的评价成象质量的方法中，如星点法是通过研究一个点物的衍射图形来判断象差的大小；分辨率法是用一个一定空间分布的鉴别率板作为物体来判断成象的好坏。这些方法都存在一定的局限性。实际物体是有复杂的光强分布或振幅分布的，可以看作一个包含有各种不同空间频率的复杂光栅。按照阿贝成象理论，一个只受衍射限制而无象差存在的理想光学系统，因为物体的频谱中的高频部分受到孔径的限制而不能参与成象，致使成象面的复振幅分布不同于物面，即表示细节的高频部分丢失，而使分辨率本领下降。对于一个有象差存在的实际光学系统来说，不仅高频部分丢失，使其他较低频率成分的光波的传递也受到影响：使某些频率成分的振幅降低，或位相改变，从而使成象质量下降。为了全面评价一个光学系统的成象质量的优劣，必须全面考察物面上各种频率成分经过光学系统的传播情况，用来表示这个传播状况的函数称为传递函数。

二、光学成象系统的线性性质点扩散函数

傅里叶分析方法乃是对于各种频率成分进行线性迭加或分解的一种数学方法。其所以能同时应用于通讯系统及光学系统，也正是因为它们都具有某些相同的基本性质，例如线性性。这种具有线性性的“线性系统”，其基本特点是：把一个系统的作用看作是对输入信号进行某种运算，变换为输出信号。如果系统对输入信号的变换作用有线性迭加的性质，即是说，如果单独输入 $f_1(x)$ 时，输出为 $g_1(x)$，单独输入 $f_2(x)$ 时，输出为 $g_2(x)$，则当输入为 $af_1(x)+bf_2(x)$ 的组合时，输出为 $ag_1(x)+bg_2(x)$。那么，这样的系统称为线性系统。由于线性迭加的性质，在线性系统的研究中，通常把输入信号分解为基元信号的迭加，研究了系统对基元信号的变换作用就可以用迭加方法得到在任意输入信号时的输出。

对于光学成象系统通常遇到的问题，都可看作或者是非相干光照明的（普通的发光体）或者是用相干光照明的物的成象问题。分析表明，在相干光照明的情况下，光学系统对于物光的复振幅具有线性迭加的性质，而在非相干光照明的情形下，光学系统对于物光的光强具有线性迭加的性质。后面将分别讨论这两种情况。

对于一个衍射受限的成象系统，无论它由多少个光学元件组成，总可以用图 5-24 所示的系统来表示它的一般模型。其中，入瞳和出瞳反映了系统实际孔径对光束的限制，因此，一

个系统的衍射受限就相当于受到入瞳或出瞳的限制。

（一）点物成象与点扩散函数

设$O(x, y)$，$i(x', y')$分别代表物平面与象平面上各点的复振幅或光强分布（或统称为光场分布）。由于系统的线性，可以把输入$O(x, y)$分解为各点的光场的迭加，光学系统对每一点(x, y)的光场都加以运算，给出相应的输出，而总的输出$i(x', y')$就是各点输出的迭加。这样，研究光学系统的成象性质，就可以从研究它对物面上各点光场的成象结果中得出，把问题转化为研究一个点物的成象问题。

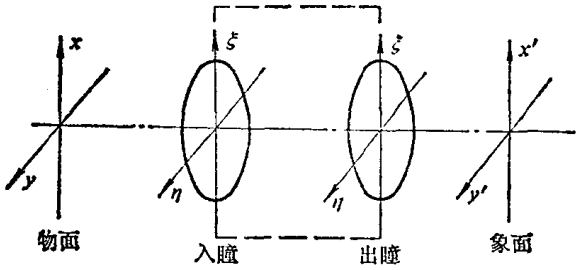


图5-24　成象系统的一般模型

任一点物的光场可以用一个δ函数表示，经过光瞳的衍射，一点物在象面上将得到一个扩散的夫琅和费衍射斑。我们把具有单位光强或单位复振幅㊀的物点所成的象斑的光场分布$h(x, y; x', y')$称为点扩散函数（或脉冲响应）。例如图5-25 a中的“山包”就形象地表示出一个单位光强物点的点扩散函数的分布。对于一个衍射受限的系统，这个函数反映着系统的衍射效果。若系统还存在象差，那么它同时反映系统的衍射、象差及一切造成光能扩散的因素的后果。

对于物面上的任一条与y轴平行的线光源来说，在象面的光场分布，如图5-25 b所示，对它的截面写出的函数$h(x, x')$，称为线扩散函数。线扩散函数是由直线上的无数个点扩散函数迭加而成的。

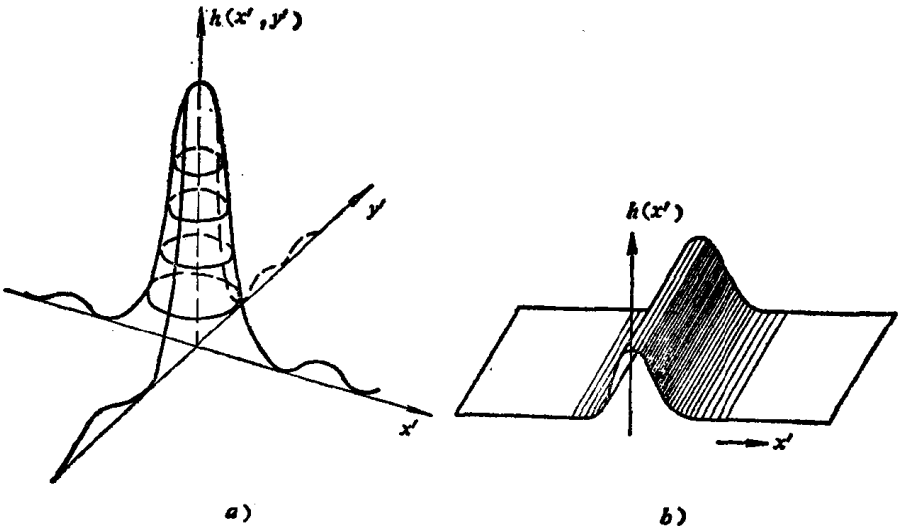


图5-25　点扩散函数与线扩散函数

（二）扩展物体的成象，卷积

为了数学上的简便，先讨论一维扩展物体。设物方输入的物函数是与y无关的$O(x)$，输出象函数为$i(x')$，见图5-26。现在研究$O(x)$、$i(x')$及线扩散函数$h(x, x')$三者的关系。不妨碍一般性，设光学系统的横向放大率为1，这样，在几何光学意义下的理想象点在象面上的座标值就等于物点在物面上的座标值，即在x处的物点成象在$x' = x$处。在这样的

㊀ 也可以笼统地称作单位光场。

假定下，我们研究物与衍射象的光场之间的关系。此外，我们考虑的是一个理想成象系统或象差校正到满足等晕条件的系统。在这样的系统中，当物点在物面上平移时，象斑在象面上只改变位置而象斑的光场分布不变。即点（线）扩散函数的形式不变。也就是说，点（线）扩散函数 h 不是由 x，x' 两个座标单独决定，而只是 $x'-x$ 的函数，即

$$h(x, x') = h(x'-x)$$

具有这样性质的光学系统称为空间不变系统。这种“不变性”是通讯系统和光学系统具有的另一个共同的基本性质。

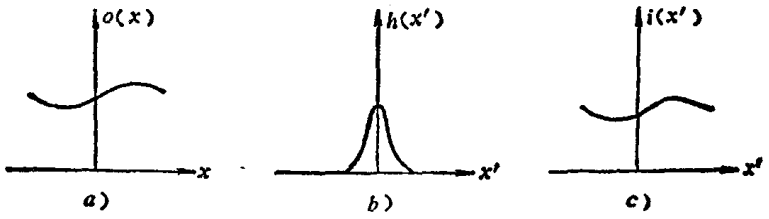


图5-26 物函数，线扩散函数与象函数

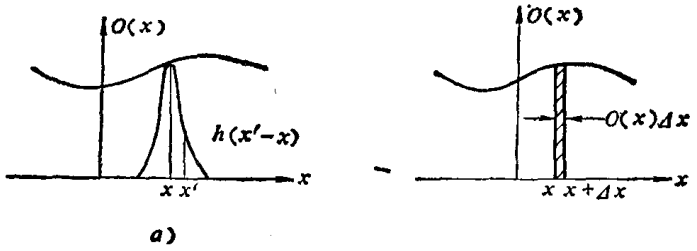


图5-27 扩展物体成象的线性迭加

现在来考察象面上某一点 x' 处的光场。x' 处的光场并不只是由物面上 $x=x'$ 的共轭物点的光场所决定。因为衍射现象的存在，在 x 点附近的其他物点都因扩散而影响 x' 点的光场，任一 x 点在考察点 x' 处产生的光场应为 $h(x'-x)$ 如图 5-27 a 所示。把物面沿 x 方向分成无穷多个小段，每一个小段 $(x, x+\Delta x)$ 上，物的光场是 $O(x)\Delta x$，见图5-27 b，因此，每一小段对被考察点 x' 所产生的光场是 $O(x)\Delta x$ 与 $h(x'-x)$ 的乘积，即

$$O(x)\,h(x'-x)\Delta x$$

所有这些小段的贡献的总和 $\Sigma O(x)\,h(x'-x)\Delta x$，就是被考察点 x' 实际的光场，取极限得

$$i(x') = \int_{-\infty}^{\infty} O(x)\,h(x'-x)\,\mathrm{d}x \tag{5-54}$$

这一表达式在数学上称作 $i(x')$ 等于函数 $h(x'-x)$ 与函数 $O(x)$ 的卷积㊀ (Converlution)，也就是，扩展物体的象是（线）扩散函数与物函数（亦即几何光学意义下的理想象函数）的卷积，记作

$$i(x') = h(x') * O(x') \tag{5-55}$$

$*$ 表示卷积。

图 5-28 和图5-29即表示一扩展物体的卷积成象过程。

设物函数 $O(x)$ 为一余弦分布，如图 5-28 a 所示。线扩散函数 $h(x'-x)$ 如图 5-28 b 所示。图5-28 d 即表示象面上的迭加积分(卷积）结果它是象面上每一点的光场都是由对该点有贡献的所有 $O(x)\,h(x'-x)$ 的迭加（图5-28 c）而得的，图 5-29 表示的是具有不对称形状的线扩散函数的情形，象面光场分布相对于物面光场分布有相移。

这一成象过程反映了光学成象系统的线性变换过程。线性系统的性质完全由它对单位光场物点的（线）扩散函数所表征。也就是为了确定一个光学系统的成象情况，只要知道系统

㊀ 见附录Ⅱ。

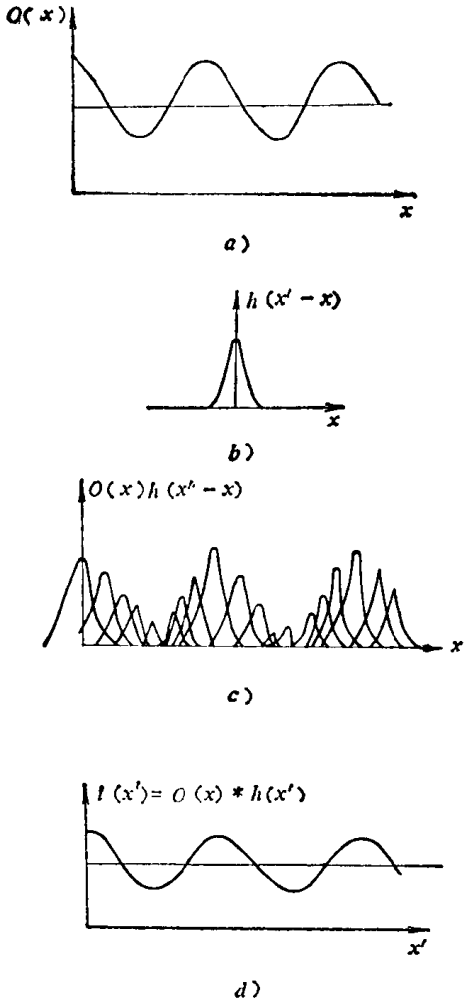


图5-28 卷积成象

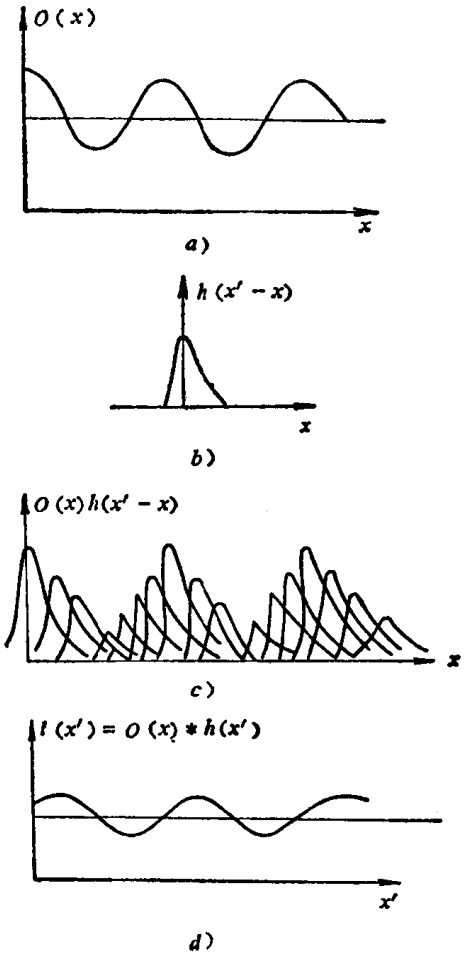


图5-29 卷积成象

对于物面上所有各点的（线）扩散函数。下面可以看到，正是根据这个性质，使我们较方便地运用傅里叶频谱分析方法引出传递函数的概念来研究光学系统的成象问题。

上面是以一维物函数为例说明了光学成象系统的线性性质。对于二维物函数同样具有这一性质。这时有

$$i(x', y') = \iint_{-\infty}^{\infty} O(x, y)\, h(x' - x, y' - y)\, dx\, dy \tag{5-56}$$

或

$$i(x', y') = h(x', y') * O(x', y') \tag{5-57}$$

三、衍射受限的相干成象系统的频率响应　相干传递函数（CTF）

相干成象系统是复振幅的线性系统。因此式（5-56）应该理解成是复振幅的迭加积分，则按式（5-57）有复振幅的卷积式

$$i(x', y') = h(x', y') * O(x', y') \tag{5-58}$$

分别求 i，h，O三个函数的傅里叶变换，并记作

$$\left.\begin{aligned} G_i(u, v) &= F\{i(x', y')\} \\ G_o(u, v) &= F\{O(x', y')\} \\ H_c(u, v) &= F\{h(x', y')\} \end{aligned}\right\} \tag{5-59}$$

根据傅里叶变换的卷积定理，由式（5-58）和（5-59）得

$$G_i(u, v) = H_c(u, v) \cdot G_o(u, v)$$

$$H_c(u, v) = \frac{G_i(u, v)}{G_o(u, v)} \tag{5-60}$$

$H_c(u, v)$ 称为相干成象系统的传递函数（CTF）。$G_i(u, v)$ 与 $G_o(u, v)$ 分别表示物面和象面的复振幅分布的傅里叶变换频谱，可分别称为理想象的频谱和实际象的频谱。式（5-60）的意义是把输入物面复振幅分布 $O(x, y)$ 分解成具有不同空间频率（u，v）的基元频谱函数（即对应着不同方向余弦的平面波）。只要对每个基元频谱函数 $G_o(u, v)$ 乘以一个传递函数 $H_c(u, v)$，即得到每个基元频谱函数的输出 $G_i(u, v)$。因此，相干传递函数 $H_c(u, v)$ 就表示了一个相干成象系统在“频域”中的成象特性。而点扩散函数 $h(x', y')$ 乃是表示在“空间域”中的成象特性。所以，从式（5-56）或（5-57）的迭加积分到式（5-60）的传递函数表达式，只是用傅里叶变换方法作了一个从“空间域”座标到“频率域”座标的转换，从而得到了一个极为简便的关系。这样一来，就可以把一个光学成象系统看成一个滤波器。成象过程就是一个对各种空间频率的输入进行滤波的过程，相干传递函数就是滤波函数。

由式（5-59）已知，相干传递函数 $H_c(u, v)$ 是点扩散函数 $h(x', y')$ 的傅里叶变换，而点扩散函数 $h(x', y')$ 又是由系统的孔径函数或光瞳函数所决定的。在第四章中已经论证，一个点物的象斑（即点扩散函数）就是光学系统的孔径（光瞳）的夫琅和费衍射图样。设出瞳处的孔径函数用 $P(\xi, \eta)$ 表示。ξ、η 表示出瞳的空间座标，作变数代换

$$u = \frac{\xi}{\lambda d_i} \qquad v = \frac{\eta}{\lambda d_i}$$

u，v 代表象面空间频率，d_i 代表出瞳面到象平面之间的距离。则孔径函数可写为 $P(\lambda d_i u, \lambda d_i v)$。而点扩散函数 $h(x', y')$ 就是孔径函数 $P(\lambda d_i u, \lambda d_i v)$ 的傅里叶变换，即

$$h(x', y') = F\{P(\lambda d_i u, \lambda d_i v)\}$$

而 $$H_c(u, v) = F\{h(x', y')\} = F\{F[P(\lambda d_i u, \lambda d_i v)]\} = P(-\lambda d_i u, -\lambda d_i v) \tag{5-61}$$

式中负号，表明 $H_c(u, v)$ 等于反转 180° 的孔径函数。为了消除这种不方便，可以将出瞳处的座标取用逆向的，但通常情形，光瞳有对称性，可以省去负号，即有 $P(-\lambda d_i u, -\lambda d_i v) = P(\lambda d_i u, \lambda d_i v)$。

式（5-61）十分清楚地表明一个衍射受限的相干成象系统的传递函数的特点。由于光瞳函数 P 之值在一定范围内等于 1，此外等于零，那末相干传递函数之值也是如此。这就意味着，物（理想象）的频谱中属于高频部分将被全部滤掉，而低频部分全部保留，即在频域中存在一个有限的通频带。在这个通频带的边界上，频率响应突然下降到零，这个边界上的频率称为截止频率。

例如，设一个相干成象系统的出瞳是边长为 l 的正方形（图 5-30 a），通常用符号

$$\mathrm{rect}(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leqslant \frac{1}{2} \\ 0 & \text{其 他} \end{cases}$$

表示一维矩形函数。因此，对于边长为 l 的正方形孔径的光瞳函数可表示为

$$P(\xi,\ \eta)=\mathrm{rect}\left(\frac{\xi}{l}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{\eta}{l}\right)$$

根据式（5-61），则有

$$H_c(u,\ v)=\mathrm{rect}\left(\frac{\lambda d_i u}{l}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{\lambda d_i v}{l}\right)=\mathrm{rect}\left(\frac{u}{l/\lambda d_i}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{v}{l/\lambda d_i}\right) \tag{5-62}$$

由此式计算的 $H_c(u,\ v)$，如图 5-30 b 所示。

当 $|u|>\frac{l}{2\lambda d_i}$ $|v|>\frac{l}{2\lambda d_i}$时，$H_c=0$；

当 $|u|<\frac{l}{2\lambda d_i}$ $|v|<\frac{l}{2\lambda d_i}$时，$H_c=1$

可见沿 u 轴与 v 轴方向的截止频率为

$$f_0=\frac{l}{2\lambda d_i} \tag{5-63}$$

沿其他方向的截止频率要高一些。

又如，设出瞳是圆形，直径为 l（图 5-31 a）的圆域函数通常用符号

$$\mathrm{circ}(\sqrt{x^2+y^2})=\begin{cases}1 & \sqrt{x^2+y^2}\leqslant 1\\ 0 & \text{其 他}\end{cases}$$

表示。因此，直径为 l 的圆形光瞳函数可表示为

$$P(\xi,\ \eta)=\mathrm{circ}\left(\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{l/2}\right)$$

$$H_c(u,\ v)=\mathrm{circ}\left(\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{l/2\lambda d_i}\right) \tag{5-64}$$

$H_c(u,\ v)$ 分布如图 5-31 b 所示。

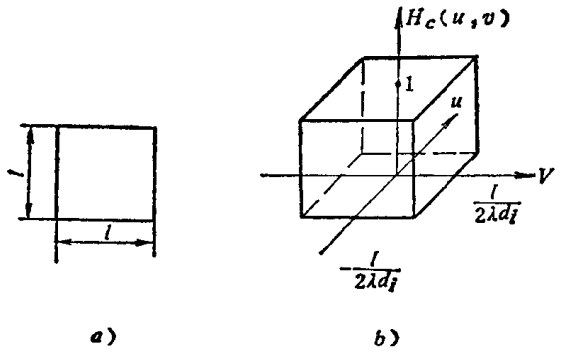


图5-30 方孔出瞳的 CTF

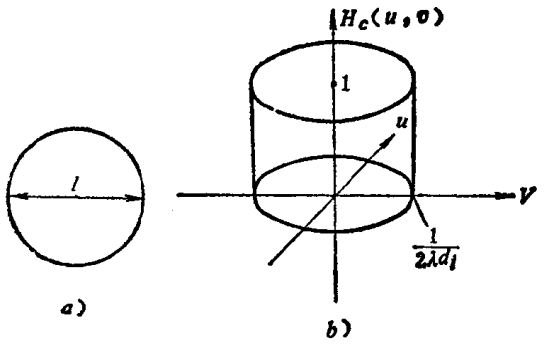


图5-31 圆孔光瞳的 CTF

当 $\sqrt{u^2+v^2}\leqslant\frac{l}{2\lambda d_i}$时，$H_c=1$。因此，截止频率 f_0 也为

$$f_0=\frac{l}{2\lambda d_i} \tag{5-63 a}$$

但是，在圆形光瞳中，f_0 对频率平面（u，v）上一切方向都是相同的。

下面举一个实例说明相干传递函数的计算及其意义。

一个单透镜成象系统，如图 5-32 示，设透镜口径 $l=24$ 毫米，焦距 $f=50$ 毫米，并已校正好象差。物体放置在两倍焦距处(即以 -1 倍放大率成象)。照明光的波长 $\lambda=0.6\times10^{-3}$ 毫米。

这是一个衍射受限的相干成象系统，可以用相干传递函数来描述这一系统的成象性能。传递函数由圆形光瞳——透镜口径所决定。根据式（5-63 a），截止频率为

$$f_0=\frac{l}{2\lambda d_i}=\frac{24}{2\times0.6\times10^{-3}\times100}$$

$$=200\ \text{周/毫米}$$

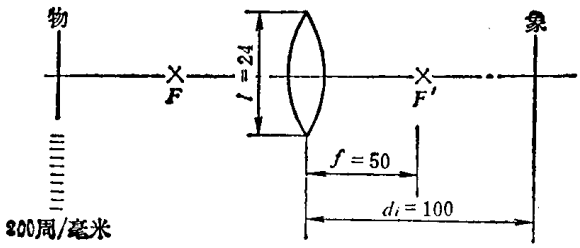


图5-32 单透镜成象系统的 CTF 计算

这就是说，对于等于或高于 $f_0=200$ 周/毫米的空间频率成分，传递函数 H_c 都等于零，即这些频率成分不能传递到象面。若物体是一个每毫米刻有 200 条线对的光栅，那末，在象面上将不会出现光栅刻线的象。亦就是说，该系统不能分辨这样的细节。直接从分辨本领公式也可以得到这一结果。

图 5-33 表示分别用二维 a）及一维 b）上述系统的传递函数曲线。

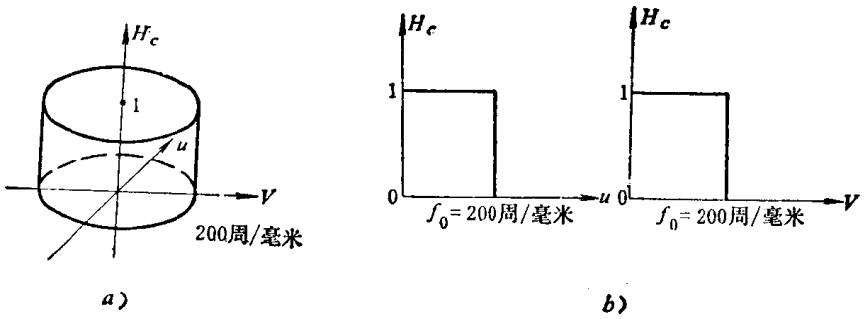


图5-33 圆孔的 CTF 曲线

§5-11 非相干成象系统的频率响应，光学传递函数

一、衍射受限的非相干成象系统的频率响应，光学传递函数（OTF）

上一节我们看到了相干传递函数与光瞳函数之间有非常直接而简单的关系。当用非相干光照明时，我们将会看到，这时的传递函数仍由光瞳函数确定，但二者之间的关系较为间接而复杂一些。非相干照明在成象系统中用的比较多。这一节将在相干传递函数的基础上，首先找出非相干成象系统的光学传递函数与相干传递函数之间的关系，然后分析光学传递函数的特点。

（一）非相干成象系统的线性性质

非相干成象系统与相干成象系统不同，它是光强度的线性系统，而不是复振幅的线性系统。因此，式（5-56）应该理解成光强度的积分。为了有别于相干系统，分别用 $I_i(x',y')$、$I_0(x',y')$ 表示象面和物面（理想象）的光强度函数，用 $h_i(x',y')$ 表示光强度的点扩散函数，即单位光强度的物点的衍射象斑。这样根据式（5-56）有

$$I_i(x', y') = \iint_{-\infty}^{\infty} I_0(x, y) h_I(x' - x, y' - y)\, dx dy \tag{5-65}$$

$$I_i(x', y') = h_I(x', y') * I_0(x', y') \tag{5-66}$$

（二）光学传递函数（CTF）

分别求 I_i，I_0 及 h_I 的傅里叶变换

$$G_{Ii}(u, v) = F\{I_i(x', y')\}$$

$$G_{I0}(u, v) = F\{I_0(x', y')\}$$

$$H_I(u, v) = F\{h_I(x', y')\}$$

则有

$$G_{Ii} = H_I(u, v) \cdot G_{I0}(u, v)$$

或

$$H_I(u, v) = \frac{G_{Ii}(u, v)}{G_{I0}(u, v)} \tag{5-67}$$

象的光强频谱 $G_{Ii}(u, v)$ 等于物面（理想象）光强的频谱 $G_{I0}(u, v)$ 与传递函数 $H_I(u, v)$ 的乘积。式（5-67）与相干传递函数的式（5-60）有相同的形式。但这里的传递函数 $H_I(u, v)$ 表示的是光学系统对于光强频谱而不是对复振幅频谱的传递情况。在§5-1中曾经指出，空间频率的概念不仅用于表示不同方向余弦的平面波，而且可以推广到任何空间周期分布问题，例如物面或象面上的光强度分布。按照傅里叶方法，一个平面上的光强度分布也可以分解为许多形式如 $e^{i2\pi(ux+vy)}$ 的基元周期分布，每一个这样的分布所占比例大小由 $G_{I0}(u, v)$ 决定。由此得

$$I_0(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} G_{I0}(u, v) e^{i2\pi(ux+vy)} du dv \tag{5-68}$$

式中

$$G_{I0}(u, v) = \iint_{-\infty}^{\infty} I_0(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy \tag{5-69}$$

可以证明，由于光强分布总是空间座标的实函数，当分解为各种空间频率成分时，总可以把任一组正值空间频率成分（u，v）与一组同值反号的空间频率成分（$-u$，$-v$）组合起来考虑，这种组合将给出一个光强的余弦函数分布（这种分布是与平面上的一组亮暗条纹相对应的）。每一组基元余弦函数分布的幅度和位相，可以由光强分布的傅里叶频谱得到。

一个最简单的例子是如图 5-34 a 所示的光强分布，这个分布可表示为

$$I(x) = a + b\cos 2\pi f_0 x$$

即在直流分量（零频）为 a 的均匀背景上迭加一个空间频率为 f_0 或空间周期为 $1/f_0$、幅度为 b 的余弦分布。图 5-34 b 是在频率域中表示它的频谱函数。

由此可知，任一光强分布决定于各种空间频率成分（余弦分布）及直流分量的幅度与位

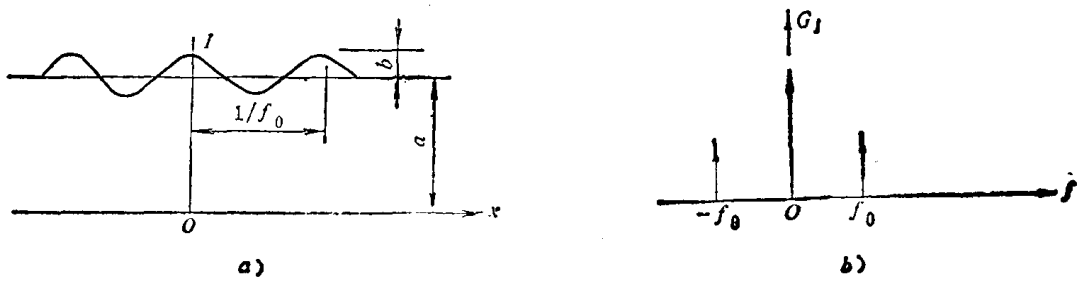


图5-34　余弦光强分布及频谱分布

相情况，这就是光强频谱的含义及作用。

式（5-67）表示的光学传递函数 $H_i(u, v)$ 虽然反映了光强频谱的传递情况，但是它并不能完全反映人们所观察到的各种频谱成分的成象清晰情况。因为每一频谱成分在观察时是否清晰，不只由它自己的幅度决定。例如，图 5-35 所示的两种情况，同一幅度 b 的余弦光强分布，在图5-35 a 的情形，亮暗就不很分明，而图5-35 b 的情形就比较分明。这种清晰程度可以用对比度（或称调制度）表示。对比度等于

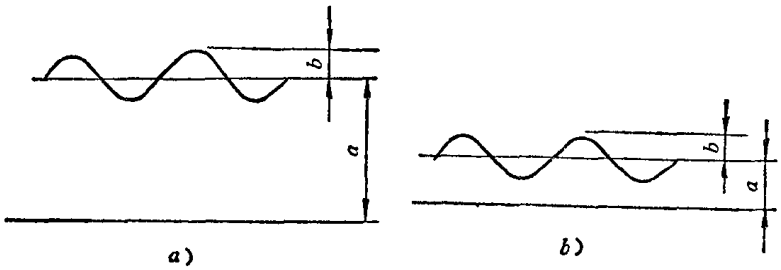


图5-35 对比度比较

$$M=\frac{I_M-I_m}{I_M+I_m}=\frac{(a+b)-(a-b)}{(a+b)+(a-b)}=\frac{b}{a} \tag{5-70}$$

因此，从观察的效果上看，一个图象（光强分布）中每一频率成分的作用，应由它的对比度或调制度来描述，而光学成象系统的成象质量也应由它是否忠实地反映了物本身各空间频率的对比度来判断。所以考虑一个规范化（归一化）的频谱可以更确切地表明所讨论的图象的特征，即讨论物（理想象）面光强的频谱时用

$$G_0(u, v)=\frac{G_{i0}(u, v)}{G_{i0}(0, 0)}=\frac{\iint_{-\infty}^{\infty} I_0(x', y')\, e^{-i2\pi(ux'+vy')}dx'dy'}{\iint_{-\infty}^{\infty} I_0(x', y')dx'dy'} \tag{5-71 a}$$

而讨论象光强频谱用

$$G_i(u, v)=\frac{G_{ii}(u, v)}{G_{ii}(0, 0)}=\frac{\iint_{-\infty}^{\infty} I_i(x', y')e^{-i2\pi(ux'+vy')}dx'dy'}{\iint_{-\infty}^{\infty} I_i(x', y')dx'dy'} \tag{5-71 b}$$

将上式与式（5-70）对比不难看出归一化频谱 $G_0(u, v)$ 及 $G_i(u, v)$ 可分别代表物（理想象）和象的各空间频率的对比度，对应地若把 $H_i(u, v)$ 也归一化，

$$H(u, v)=\frac{H_i(u, v)}{H_i(0, 0)}=\frac{\iint_{-\infty}^{\infty} h_i(x', y')e^{-i2\pi(ux'+vy')}dx'dy'}{\iint_{-\infty}^{\infty} h_i(x', y')dx'dy'} \tag{5-72}$$

则由

$$G_{ii}(u, v)=H_i(u, v)G_{i0}(u, v)$$
$$G_{ii}(0, 0)=H_i(0, 0)G_{i0}(0, 0)$$

可得

$$G_i(u, v)=H(u, v)G_0(u, v) \tag{5-73}$$

$H(u, v)$ 称为非相干成象系统的光学传递函数（OTF）。

一般说来，一个成象系统的光学传递函数是一个复函数，可写成

$$H(u,\ v)=M(u,\ v)e^{i\varphi(u,v)}$$

式中 $M(u,\ v)=|H(u,\ v)|$ 表示每一空间频率成分的对比度的改变，称为对比(调制)传递函数(MTF)；$\varphi(u,\ v)$表示每一空间频率成分的位相改变，称为位相传递函数(PTF)。

（三）光学传递函数（OTF）与相干传递函数（CTF）的关系

CTF与OTF是有一定关系的，因为CTF与复振幅的点扩散函数 $h(x',\ y')$有关，而OTF与光强度的点扩散函数$h_I(x',\ y')$有关。不难看出，除了一个常数因子外，

$$h_I(x',\ y')=h(x',\ y')\cdot h^*(x',\ y')$$

因此

$$H_I(u,\ v)=F\{h_I(x',\ y')\}=F\{h(x',\ y')\cdot h^*(x',\ y')\} \tag{5-74}$$

而

$$H_c(u,\ v)=F\{h(x',\ y')\} \tag{5-75}$$

根据自相关定理㊀，式（5-74）可写成

$$H_I(u,\ v)=\iint_{-\infty}^{\infty}H_c^*(\xi,\ \eta)H_c(\xi+u,\ \eta+v)\,d\xi\,d\eta$$

为得到对称的表达式，作简单的变量变换

令

$$\xi'=\xi+\frac{u}{2},\qquad \eta'=\eta+\frac{v}{2}$$

则

$$H_c(u,\ v)=\iint_{-\infty}^{\infty}H_c^*\left(\xi'-\frac{u}{2},\ \eta'-\frac{v}{2}\right)H_c\left(\xi'+\frac{u}{2},\ \eta'+\frac{v}{2}\right)d\xi'\,d\eta'$$

$$H(u,\ v)=\frac{\iint_{-\infty}^{\infty}H_c^*\left(\xi-\frac{u}{2},\ \eta-\frac{v}{2}\right)H_c\left(\xi+\frac{u}{2},\ \eta+\frac{v}{2}\right)d\xi\,d\eta}{\iint_{-\infty}^{\infty}|H_c(\xi,\ \eta)|^2\,d\xi\,d\eta} \tag{5-76}$$

在式（5-76）中用ξ，η代替ξ'，η'当然是没有影响的。该式即表示了相干系统的传递函数与非相干系统的光学传递函数之间的联系。在以上的讨论中，都是从点扩散函数$h_I(x',\ y')$出发的。因此，不管系统是否有象差，式（5-76）都是成立的。

（四）衍射受限系统（无象差系统）的OTF

对于衍射受限系统的相干传递函数(CTF)，有关系式$H_c(u,v)=P(\lambda d_i u,\lambda d_i v)$。因此，对于非相干系统的光学传递函数（$OTF$）也应与光瞳函数有关。从式（5-76）作简单的变量变换可得

$$H(u,\ v)=\frac{\iint_{-\infty}^{\infty}P\left(\xi-\frac{\lambda d_i u}{2},\ \eta-\frac{\lambda d_i v}{2}\right)P\left(\xi+\frac{\lambda d_i u}{2},\ \eta+\frac{\lambda d_i v}{2}\right)d\xi\,d\eta}{\iint_{-\infty}^{\infty}P^2(\xi,\ \eta)\,d\xi\,d\eta}$$

由于$P(\xi,\ \eta)$或者是零或者是1，所以$P^2=P$。上式可以改写为

$$H(u,\ v)=\frac{\iint_{-\infty}^{\infty}P\left(\xi-\frac{\lambda d_i u}{2},\ \eta-\frac{\lambda d_i v}{2}\right)P\left(\xi+\frac{\lambda d_i u}{2},\ \eta+\frac{\lambda d_i v}{2}\right)d\xi\,d\eta}{\iint_{-\infty}^{\infty}P(\xi,\ \eta)\,d\xi\,d\eta} \tag{5-77}$$

㊀ 见附录Ⅲ。

式（5-77）直接把OTF与光瞳函数P连系起来，提供了由光瞳函数直接计算OTF的方法。该式给出OTF的一个极为重要的几何解释。图5-36a表示任一光瞳函数P。式(5-77）中的分母积分就是光瞳的面积。分子积分表示两个错开的光瞳函数相互重迭的面积，如图5-36b中的阴影部分。其中一个的中心在（$\lambda d_i u/2$，$\lambda d_i v/2$），而另一个的中心则位于径向相对的点（$-\lambda d_i u/2$，$-\lambda d_i v/2$），因此

$$H(u,\ v)=\frac{\text{光瞳重迭面积}}{\text{光瞳总面积}}$$

这样，OTF的计算变成对于光瞳的几何图形的运算。对于很复杂的光瞳，用画图方法可以求出任意（u，v）值的重迭面积与光瞳总面积之比，再列表表示出函数$H(u,\ v)$。计算工作量相当大，一般需用面积仪或电子计算机算出OTF在一系列分立频率上的值。

由以上讨论可以看出，衍射受限系统OTF的一般性质，OTF为正实数，即

$$H(u,\ v)=H^*(u,\ v) \qquad H(u,\ v)\geqslant 0$$

还可以看出，当u，v足够大时，两光瞳完全错开这时$H(u,v)=0$，即也存在截止频率。下面举两个简单光瞳的例子。

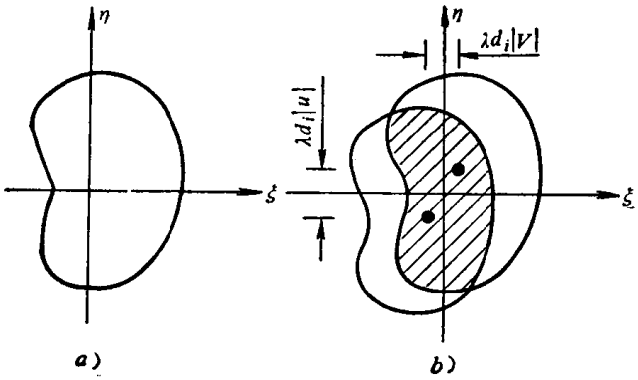


图5-36　光学传递函数OTF推导

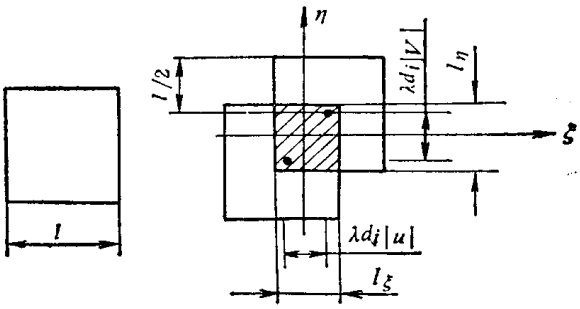


图5-37　方形光瞳的$O.T.F.$推导

（五）方形出瞳和圆形出瞳的OTF的计算

1．方形出瞳的OTF

见图5-37，设出瞳边长为l，光瞳函数为

$$P(\xi,\ \eta)=\mathrm{rect}(\xi/l)\mathrm{rect}(\eta/l)$$

总面积为l^2，两光瞳的重迭部分（阴影部分）的边长为

$$l_\xi=l-\lambda d_i|u| \qquad 当|u|<\frac{l}{\lambda d_i}$$

$$l_\eta=l-\lambda d_i|v| \qquad 当|v|<\frac{l}{\lambda d_i}$$

$$\text{重迭面积}=\begin{cases}(l-\lambda d_i|u|)(l-\lambda d_i|v|) & |u|\leqslant l/\lambda d_i \\ & |v|\leqslant l/\lambda d_i \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

故

$$H(u,\ v)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{\lambda d_i|u|}{l}\right)\left(1-\dfrac{\lambda d_i|v|}{l}\right) & |u|\leqslant l/\lambda d_i \\ & |v|\leqslant l/\lambda d_i \\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{5-78}$$

这是一个二维三角形函数。利用三角形函数的常用符号

$$\Lambda(x)=\begin{cases}1-|x| & |x|\leqslant 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

式（5-78）可写作

$$H(u,\ v)=\Lambda\left(\frac{u}{l/\lambda d_i}\right)\Lambda\left(\frac{v}{l/\lambda d_i}\right) \tag{5-79}$$

其结果如图 5-38 所示，在四面体边界上沿 u 、v 方向分别有截止频率

$$f_0'=\frac{l}{\lambda d_i} \tag{5-80}$$

与式（5-63）比较可知，同一系统在非相干光照明时的截止频率等于相干光情形的两倍，式（5-79）也可写作

$$H(u,\ v)=\Lambda\left(\frac{u}{2f_0}\right)\Lambda\left(\frac{v}{2f_0}\right) \tag{5-81}$$

式中 f_0 为相干光照明时的截止频率。

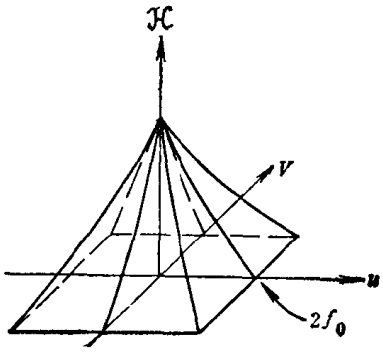


图5-38　方形光瞳的OTF

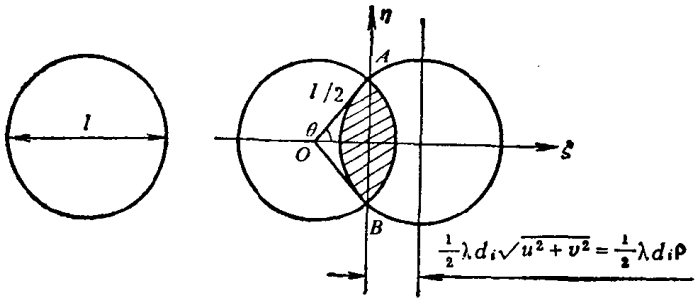


图5-39　圆形光瞳的 $O.\ T.\ F$ 推导

2. 圆形光瞳的OTF

见图 5-39 设圆形出瞳的直径为 l，光瞳函数为

$$P(\xi,\ \eta)=\mathrm{cire}\left(\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{l/2}\right)$$

令 $\rho=\sqrt{u^2+v^2}=\sqrt{\xi^2+\eta^2}/\lambda d_i$ 由于圆对称函数的空间频率谱也是圆对称的，故 ρ 可以代表任一方向的空间频率。

两光瞳的重迭面积，即图 5-39 中的阴影部分的面积

$$\begin{aligned}S&=2\,(\text{扇形 }OAB\text{ 面积}-\text{三角形 }OAB\text{ 面积})\\&=2\left[\frac{2\theta}{2\pi}\cdot\pi\left(\frac{l}{2}\right)^2-\frac{l}{2}\sin\theta\ \frac{l}{2}\cos\theta\right]\\&=\pi\left(\frac{l}{2}\right)^2\left[\frac{2\theta}{\pi}-\frac{2}{\pi}\sin\theta\cos\theta\right]\end{aligned}$$

由图 5-39 可知，对于 $\rho=\sqrt{u^2+v^2}$ 有

$$\cos\theta=\frac{\frac{1}{2}\lambda d_i\rho}{l/2}=\frac{\lambda d_i\rho}{l}$$

当 $\lambda d_i \rho = l$ 时，$\cos\theta = 1$，$\theta = 0$，即两圆刚好完全错开，$S = 0$。故重迭面积有

$$S = \begin{cases} \pi \dfrac{l^2}{4} \cdot \dfrac{2}{\pi}\left[\cos^{-1}\dfrac{\rho}{l/\lambda d_i} - \dfrac{\rho}{l/\lambda d_i}\sqrt{1-\dfrac{\rho^2}{(l/\lambda d_i)^2}}\right] & \text{当 } \rho \leqslant \dfrac{l}{\lambda d_i} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

光瞳总面积 $= \pi \dfrac{l^2}{4}$

令 $\rho_0 = \dfrac{l}{2\lambda d_i}$ 为相干系统的截止频率，则圆形光瞳的传递函数为

$$H(\rho) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\left[\cos^{-1}\left(\dfrac{\rho}{2\rho_0}\right) - \dfrac{\rho}{2\rho_0}\sqrt{1-\left(\dfrac{\rho}{2\rho_0}\right)^2}\right] & \text{当 } \rho \leqslant 2\rho_0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{5-82}$$

在这里也看到，非相干光情形的截止频率 $\rho = \dfrac{l}{\lambda d_i}$ 等于相干光截止频率 $\rho_0 = \dfrac{l}{2\lambda d_i}$ 的两倍。

图 5-40 表示 $H(\rho)$ 的图形。虽然，非相干系统的截止频率是相干系统的两倍，但它的传递函数是随空间频率升高而逐渐下降的。而相干系统在截止频率之内却有相同的传递函数，图 5-41 表示两者的比较。因此还不能单根据这一点来判断非相干系统的成象质量比相干系统好。实际上两种截止频率是对两种不同状况而言的，相干截止频率说的是复振幅的空间频率，而非相干的截止频率说的是光强的空间频率。那一种成象质量好，还与物的状况有关，需要具体情况具体分析㊀。

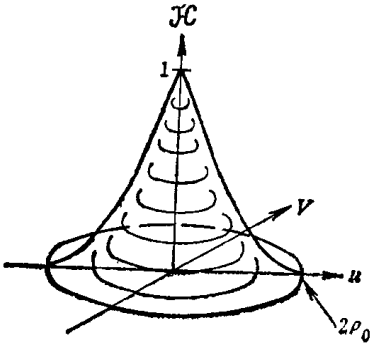


图5-40 圆形光瞳的 OTF

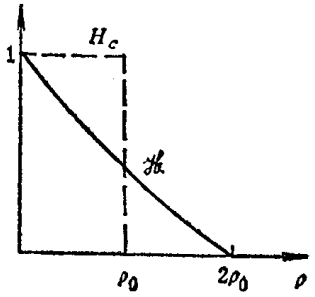


图5-41 CTF 与 OTF 的比较

在衍射受限系统中，相干与非相干传递函数都为正实数，即在 $H(u, v) = M(u, v)e^{i\varphi(u,v)}$ 中，$\varphi(u, v) = 0$，这意味着，这种系统在成象时只改变空间频率成分的对比度，而不产生位相移动。而在下面将要讨论的有象差的成象系统中，一般地表现为同时有对比度和位相的改变。

二、象差及其对传递函数的影响

1. 象差的影响、广义光瞳函数

在讨论成象系统的一般模型时，曾假设，点光源物体将在出瞳上产生一个理想球面波，这个球面波向理想点会聚，这样的系统称为衍射受限的。现在我们考虑各种象差的影响，所谓象差即是出瞳上的波前对理想球面的各种偏离。象差可以由各种原因引起，这里不打算研究各种象差如何具体影响传递函数，只说明一下怎样去理解和分析象差的影响。

当成象系统是衍射受限时，点扩散函数是出瞳的夫琅和费衍射图样，其中心在理想象点上。而当系统存在象差时，出瞳上的波面是变了形的非球面波面。因为传递函数与光瞳函数有着直接的关系。所以，如果能把由于象差的存在所产生的影响换算成相应的光瞳函数的改

㊀ 可参见J. W. 顾德门著《傅里叶光学导论》一书的第六章 §6-5。

变，则有象差存在时的传递函数也就自然得出。这个问题的具体考虑方法是这样的：如图5-42，设Σ_0是以理想象点P为中心，通过光瞳中心的球面，称为参考球面。而Σ乃是由于象差的存在而偏离了球面的实际波面。对于实际象来说，参考球面就不再是一个同位相面了。如果还认为光波是从参考球面传向象点的，那末，在参考球面上的各点应该有一个由于象差影响而出现的位相分布。因此，考虑象差的影响，也就是认为现在向象面传播的光波仍然是一个从参考球面上出发的波，但现在参考球面上有一定位相分布，而不是同位相面了。求出由于象差影响而在参考球面上产生的位相分布，并把这个位相分布加到原来的衍射受限的完善球面波上去，即可完全按以前的方法得到有象差时的点扩散函数及传递函数。

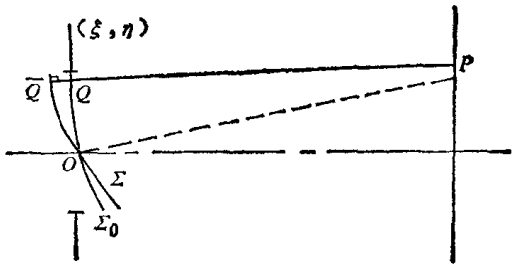


图5-42 象差的影响

由于在实际波面Σ上的$\overline{Q}$处的位相与O处相同，在参考球面上Q点与O点之间的位相差就等于Q点与$\overline{Q}$点之间的位相差：

$$\Phi(\xi,\ \eta)=k\cdot W(\xi,\ \eta)$$

式中k是波数，$W(\xi,\ \eta)$是$\overline{Q}$、Q之间的光程差，它定量地反映了实际波面与理想波面之间的偏离，称为波象差。上式就代表了参考球面上以O点作为参考点的位相分布。因而可以通过引入一个广义光瞳函数（复函数）把象差影响包括进去，即

$$\widetilde{P}(\xi,\ \eta)=P(\xi,\ \eta)e^{ikW(\xi,\eta)} \tag{5-83}$$

其中$P(\xi,\ \eta)$代表孔径的限制，$e^{ikW(\xi,\eta)}$代表象差影响。因此，有象差存在的系统的传递函数的计算就和衍射受限系统类似，只是用广义光瞳函数$\widetilde{P}(\xi,\ \eta)$代替$P(\xi,\ \eta)$。而$\widetilde{P}(\xi,\ \eta)$的计算又主要归结为波象差$W(\xi,\ \eta)$的计算，这是一个关于象差研究的专门问题，这里不再讨论。

2. 象差对相干传递函数的影响

在相干系统中，象差影响的讨论是很简单的。因为相干传递函数正比于光瞳函数$P(\xi,\ \eta)$，当存在象差时，则正比于广义光瞳函数$\widetilde{P}(\xi,\ \eta)$，根据式（5-61）可得

$$\begin{aligned}H_c(u,\ v)&=\widetilde{P}(\lambda d_i u,\ \lambda d_i v)\\&=P(\lambda d_i u,\ \lambda d_i v)e^{ikW(\lambda d_i u,\lambda d_i v)}\end{aligned} \tag{5-84}$$

这一结果表明，象差并不影响截止频率f_0。在通带内相干传递函数的模仍为1，但是由于系统存在象差，在$H_c(u,\ v)$中出现了一个位相因子，表明象差使各空间频率成分的位相发生了变化，产生了位相畸变，使系统所成的象失真，结果会影响象的分辨率。

3. 象差对非相干系统的OTF的影响

在求出象差对相干传递函数（CTF）的影响之后，借助于式（5-76），即可求得象差对OTF的影响

$$H(u,\ v)=\frac{\iint_{-\infty}^{\infty}H_c^*\left(\xi-\frac{u}{2},\ \eta-\frac{v}{2}\right)H_c\left(\xi+\frac{u}{2},\ \eta+\frac{v}{2}\right)d\xi\,d\eta}{\iint_{-\infty}^{\infty}|H_c(\xi,\ \eta)|^2\,d\xi\,d\eta}$$

将式（5-84）代入上式，并作变量变换，可得

$$H(u,\ v)=\frac{\iint_{-\infty}^{\infty}P\left(\xi-\frac{t_1}{2},\ \eta-\frac{t_2}{2}\right)e^{-ikW\left(\xi-\frac{t_1}{2},\ \eta-\frac{t_2}{2}\right)}\times P\left(\xi+\frac{t_1}{2},\ \eta+\frac{t_2}{2}\right)e^{ikW\left(\xi+\frac{t_1}{2},\ \eta+\frac{t_2}{2}\right)}\,d\xi\,d\eta}{\iint_{-\infty}^{\infty}P(\xi,\ \eta)\times d\xi\,d\eta} \tag{5-85}$$

式中 $t_1=\lambda d_i u$，$t_2=\lambda d_i v$

一般说来，$H(u,\ v)$是个复函数，可表示为

$$H(u,\ v)=|H(u,\ v)|e^{i\varphi(u,v)}$$

详细讨论可以证明，象差会使各空间频率成分的对比度进一步降低。截止频率虽不变，但在有严重象差的情形下，由于通带内高频成分的对比度下降到接近于零，实际上是使有效截止频率有所下降。此外，象差还使各频率成分有位相移动，甚至可能使某些频率的位相改变π或使H出现负值，这时会使这些频率成分出现对比度反转。

图5-43，表示了一个有聚焦误差的，光瞳为正方形的系统的OTF的截面图。当波象差$W=0$，得到衍射受限的OTF。当波象差W大于$\lambda/2$时，OTF的符号发生反转。若用图5-44a中“幅条”靶作为物，很容易观察到这种对比度的反转。

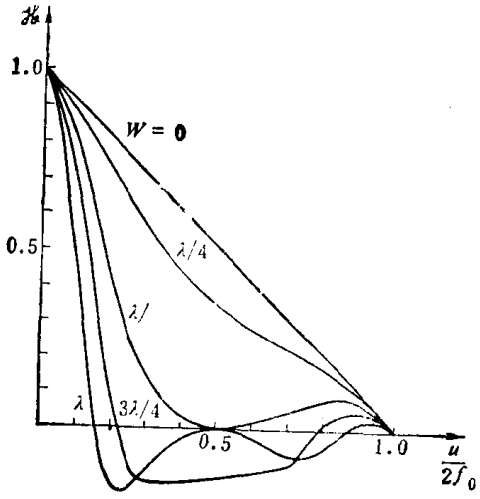


图5-43 有不同聚焦误差下的OTF

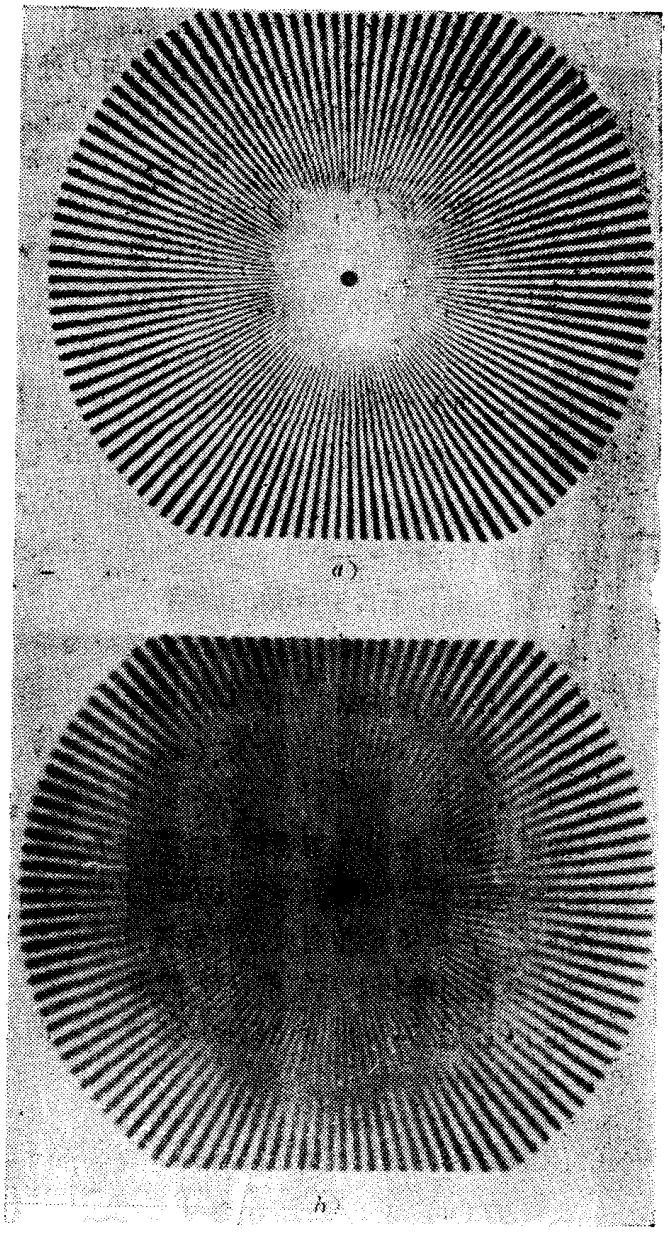


图5-44 “幅条”象的对比反转

当系统的聚焦失调时，随着空间频率的增高（亦即半径的减小），对比度逐渐减弱，并且观察到一系列对比度反转。如图5-44 *b* 所示。

§5-12 全息照相的一般原理

一、概述

普通照相是把从物体表面反射或散射的光或物体本身发出的光，通过照相镜头成象在感光胶片上。在感光胶片上记录的只是物体的光强度变化，所以，得到的是物体的平面象。

所谓全息照相乃是采用了一种新的“无透镜”的两步成象法，它能在感光胶片上同时记录下物体的全部信息，即物光的振幅和位相，因而具有获得立体象等许多特点。

全息照相分为两步，第一步利用干涉法拍摄全息图（全息照片），如图 5-45 *a* 所示。相干光源发出的光，一部分照明物体，从物体上反射或散射的物光照射到感光胶片上。另一部分直接照射到感光胶片上，这束光称为参考光。物光与参考光在胶片上迭加干涉，产生的干涉图样即记录了物体振幅和位相分布的全部信息。这张具有干涉图样的胶片经过适当曝光与冲洗处理后，就是一张全息图（全息照片）。这一拍摄过程就是一个记录或储存信息（或波前）的过程。

第二步利用衍射原理进行物体的再现（重现）。当用一相干参考光照明全息图时，如图 5-45 *b* 所示，这张具有干涉图样的全息图宛如一块复杂的光栅将发生衍射，在这些衍射光波中包含着原来的物光波，观察者迎着物光波方向即可观察到物体的再现象。这是一个物光波前再现亦即成象的过程。

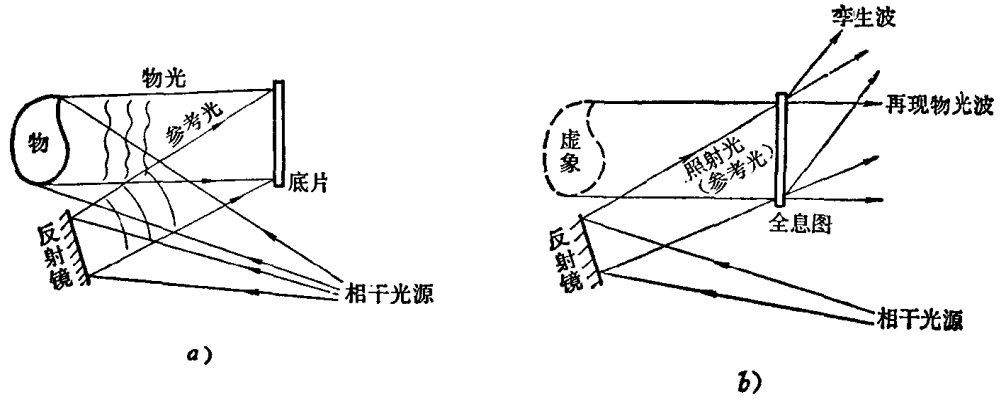


图5-45 全息照相的拍摄与再现

全息图的拍摄或制备通常有以下两种方法。

1. 盖伯（Gabor）全息图（同轴全息图）

如图 5-46 *a*，物体是一透明板上的图样（如图中的 S）。经过扩束和准直的激光束垂直照射到物体面上，经物体面后透射的光包括两部分，一是直接透过的光，即参考光；另一部分是物的不透明部分造成的较弱的散射光，即物光。参考光与物光互相干涉，在感光胶片上产生干涉图样。这是最早出现的一种全息装置。这种装置具有某些明显的弱点，因而限制了它的应用范围。首先，它只适用于透明背景上的不透明字母这样的物体，而不适用于不透明板

上的透明物，因为在后面这种情况下，将无法获得很强的与散射光相干的参考光。另外，在盖伯全息图进行波前再现时，产生一个虚象和一个实象（孪生象），二者都处在光学系统的光轴上，如图 5-46 *b* 所示，因此，当观察虚象时，将不可避免地看到了孪生象的光斑，而当对实象进行接收时，又总伴随着一个虚象的光斑，成象的质量总是不能很好。

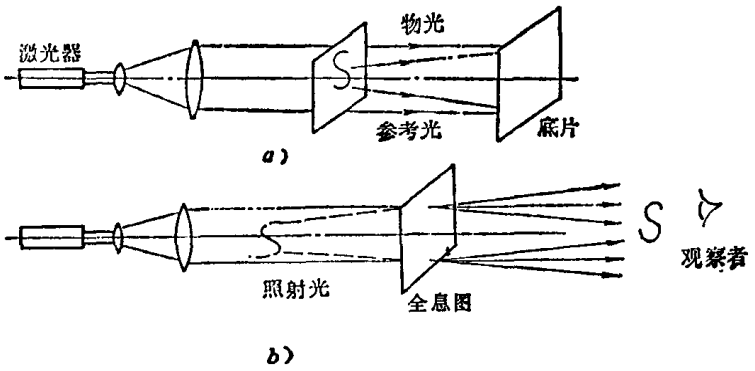


图5-46 盖伯全息图

2. 利思-乌帕特尼克斯（Leith-Upatnieks）全息图（离轴全息图）。

这是现在用得较多的一种全息装置。它与盖伯全息装置的主要差别是不用物体面上直接透过的光作参考光，而是单独在与物光的平均方向形成一个夹角 θ 的方向上引入一个参考光。这样，它不仅适用于透明物体，如图 5-47 *a*；也适用于非透明物体，如图 5-47 *b*。而且再现时可以分离实象和虚象，提高了成象质量。

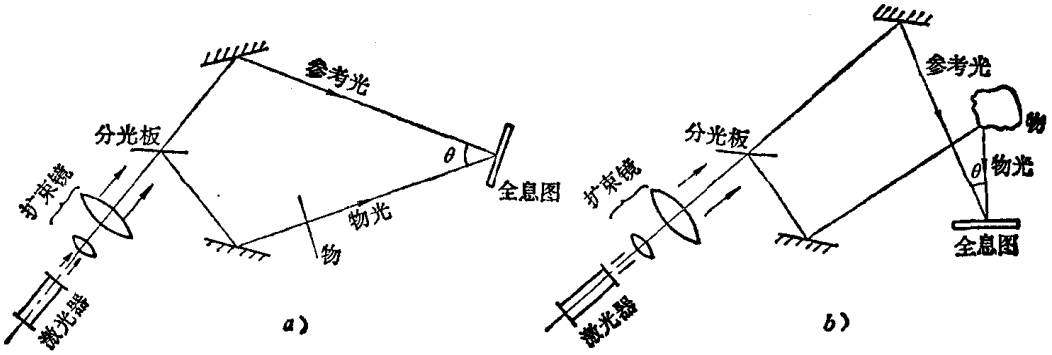


图5-47 离轴全息图

以上各种摄制全息图的方法，就其物光与参考光的方向的相对关系，以及记录介质的厚薄，可以用下面的图5-48来概括。

设参考光为一平面波，物光为一物点 *S* 发出的球面波，参考光与物光在空间的干涉情形可用图 5-48 上的一些等位相差线表示。若记录介质在 1、4 处，就是同轴全息图。放在 2、3 处就是离轴全息图。还可以看出，物光与参考光方向间的夹角 θ 越大，干涉条纹越密。因此，当记录介质的厚度 *b* 与条纹间距相比甚小时，如图中之 2 处的情形，其全息图称为平面全息图。而当记录介质的厚度相对于条纹间距不算很小时，如图中之 3、4 处的情形，形成的则是体积全息图。因为，当再现光照射全息图时，在它穿过记录介质过程中将与许多的干涉条纹面相遇，这时全息图具有体积光栅（空间光栅）的性质。全息照相能获得多方面的应用也是与体积全息照相的特点分不开的。例如同一张底片照许多全息图（多重全息图）、彩色全息图以及大容量信息存储等就是利用体积全息图的特点。

在这里，我们不可能去详细研究各种全息图及其特点，主要通过平面全息图的讨论，初步了解全息照相的基本原理及特点。

二、全息照相的一般原理

我们从理论上具体分析一下，全息照相的两步过程中究竟是怎样记录和再现物体光波的信息的。

（一）全息图的记录（振幅与位相的记录）

在图 5-49 中，设 xy 平面为感光胶片平面，$A(x, y)$、$\psi(x, y)$ 分别表示参考光在 xy 平面上的振幅和位相分布，因此，参考光在 xy 平面上的复振幅为

$$\widetilde{A}(x, y) = A(x, y)e^{-i\psi(x,y)} \quad (5\text{-}86)$$

设由物体平面发出的物光波，在 xy 平面上的振幅和位相分布为 $a(x, y)$，$\phi(x, y)$，则复振幅为

$$\tilde{a}(x, y) = a(x, y)e^{-i\phi(x,y)} \quad (5\text{-}87)$$

参考光与物光在 xy 平面相干，合成复振幅为

$$\widetilde{U}(x, y) = \widetilde{A}(x, y) + \tilde{a}(x, y) \quad (5\text{-}88)$$

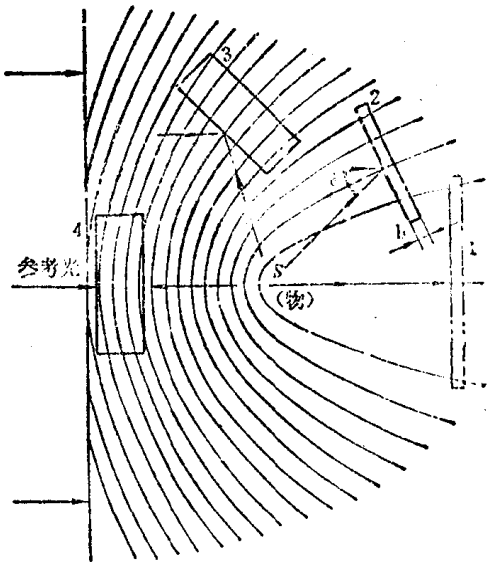


图5-48 拍摄全息图的各种方法

合成光强度

$$\begin{aligned} I(x, y) &= [\widetilde{A}(x, y) + \tilde{a}(x, y)][\widetilde{A}(x, y) + \tilde{a}(x, y)]^* \\ &= |\widetilde{A}(x, y)|^2 + |\tilde{a}(x, y)|^2 + \widetilde{A}(x, y)\tilde{a}^*(x, y) \\ &\quad + \widetilde{A}^*(x, y)\tilde{a}(x, y) \end{aligned} \quad (5\text{-}89)$$

或

$$\begin{aligned} I(x, y) &= |\widetilde{A}(x, y)|^2 + |\tilde{a}(x, y)|^2 + 2\widetilde{A}(x, y)\tilde{a}(x, y) \\ &\quad \cdot\cos[\psi(x, y) - \phi(x, y)] \end{aligned} \quad (5\text{-}90)$$

在式（5-90）右方的三项中，第一项取决于参考光的强度，它构成底片面上的均匀背景（一般 $A(x, y)$ 是均匀分布的），第二项取决于物光的强度，它在底片上随不同位置而异。但是，在大多数情况下，它比第一项弱得多。第三项包含有两相干光的振幅和相对位相关系。结果，物光波的振幅和位相二者的信息均已被记录，这样一个被记录下来的两个波前之间的干涉图样就是一个全息图。

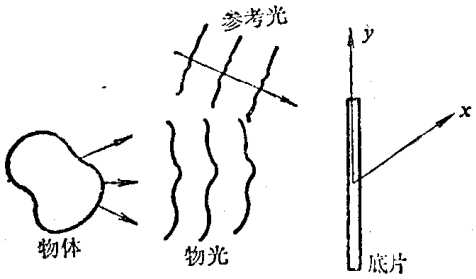


图5-49 全息图拍摄的一般原理

（二）记录介质的作用与要求

记录介质目前多用银盐感光胶片。为了重现物光波前，应控制胶片的曝光量和显影过程，使冲洗后的全息底片的振幅透过率与入射光强度成线性关系。设 $t(x, y)$ 为全息底片的振幅透射率，则

$$t(x, y) = t_0 + \beta' I(x, y)$$

式中 t_0 是底片的灰雾度，β' 为一常量。直接拍出的负片 $\beta' < 0$，转印成正片 $\beta' > 0$。将式(5-89)各项代入上式得

$$\begin{aligned} t(x, y) &= t_0 + \beta'|\widetilde{A}(x, y)|^2 + \beta'|\tilde{a}(x, y)|^2 \\ &\quad + \beta'\widetilde{A}^*(x, y)\tilde{a}(x, y) + \beta'\widetilde{A}(x, y)\tilde{a}^*(x, y) \end{aligned} \quad (5\text{-}91)$$

当 $|\widetilde{A}(x, y)|^2$ 为均匀分布时，令 $t_b = t_0 + \beta'|\widetilde{A}(x, y)|^2$

式（5-91）可改写成

$$t(x, y)=t_b+\beta'|\tilde{a}(x, y)|^2+\beta'\tilde{A}^*(x, y)\tilde{a}(x, y)+\beta'\tilde{A}(x, y)\tilde{a}^*(x, y) \tag{5-92}$$

（三）波前再现

冲洗后的全息图再用一束相干光照射，设照射到全息图上的光波复振幅为$\tilde{B}(x, y)$，则透过全息图的复振幅为

$$\begin{aligned}\tilde{W}(x, y)&=\tilde{B}(x, y)t(x, y)\\&=t_b\tilde{B}(x, y)+\beta'\tilde{a}(x, y)\tilde{a}^*(x, y)\tilde{B}(x, y)\\&\quad+\beta'\tilde{A}^*(x, y)\tilde{B}(x, y)\tilde{a}(x, y)\\&\quad+\beta'\tilde{A}(x, y)\tilde{B}(x, y)\tilde{a}^*(x, y)\\&=\tilde{U}_1(x, y)+\tilde{U}_2(x, y)+\tilde{U}_3(x, y)+\tilde{U}_4(x, y)\end{aligned} \tag{5-93}$$

若再现光仍与原参考光相同，如图5-50所示，即$B(x, y)=\tilde{A}(x, y)$则

$$\tilde{U}_3(x, y)=\beta'A^*A\tilde{a}(x, y)=\beta'|A|^2\tilde{a}(x, y)$$

由式(5-93)可见，在全息图后面出现了四个光波，其中一个$U_3(x, y)\propto\tilde{a}(x, y)$，即除了振幅大小有所改变外，原来的物体光波再现出来了，在全息图后面迎着这个光波观察时，将看到物体在原位置的虚象。因此，原始波的再现本身就是一种成象过程，但它是一种无透镜的成象系统。

式中的第四项$\tilde{U}_4(x, y)=\beta'\tilde{A}\tilde{A}\tilde{a}^*(x, y)$，即与物光的共轭光波$\tilde{a}^*$有关。通常情形它将形成物的一个实象。此外还有$\tilde{U}_1$、$\tilde{U}_2$两项是只与照射光与物光光强有关的光波。这四个光波的出现乃是照射光经过全息图衍射的结果。

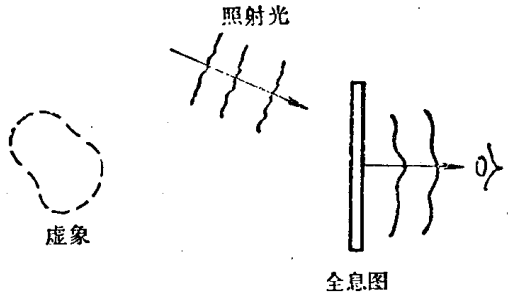


图5-50 波前再现的一般原理

要对全息照相的基本特点作进一步的探讨，必须对摄制全息图时照射到底片上的$\tilde{a}(x, y)$与$\tilde{A}(x, y)$以及再现时的复振幅分布$\tilde{W}(x, y)$作一些具体的讨论。有两种方法研究这个问题。一种方法把物光$\tilde{a}(x, y)$看作是物上各点发出的相干光（漫反射或经透射而衍射的相干光源的光）的总和，同时把参考光源也看作一个点光源，这样就可以先只研究物光源和参考光源都是一点光源的情形，即先研究点源的全息图，把它作为分析实际物体的全息图的基础。这种方法可以阐明全息照相学的许多基本特点，例如关于虚象与实象、象的放大及象差等问题。但是计算比较复杂，且难以对于复杂的物光波做出比较全面的结论。全息照相的许多具体面貌以及许多应用问题则需要知道一复杂的复振幅分布在经过全息图衍射之后的传播及变化情况。因此，常常采用另一种方法，即付里叶变换法，把复杂的复振幅分布$\tilde{a}(x, y)$、$\tilde{A}(x, y)$及$\tilde{W}(x, y)$等看成是许多平面波的迭加，并由此转为研究与这些平面波相对应的空间频率谱。

下面我们基于第二种方法，利用上述一般原理对于利思-乌帕特尼克斯的离轴型全息照相进行一些具体分析，从而进一步理解式（5-93）中各项再现光波的物理内容。

§5-13 利思-乌帕特尼克斯离轴全息

一、利思-乌帕特尼克斯离轴全息图

图 5-51 是离轴全息装置的一种可能光路，点光源 S 被透镜 L 准直，所得平面波的一部分投射到物体上（透光片），另一部分经棱镜并偏向下部，形成与物光（即胶片轴）成 θ 角的参考光投射到胶片上。

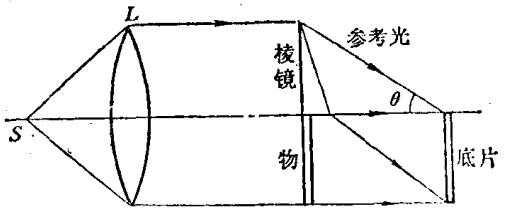


图5-51 离轴全息的一种装置

对于这束平面波参考光，在胶片上的复振幅可表示为

$$\widetilde{A}(x,\ y)=Ae^{-i2\pi vy} \tag{5-94}$$

其中 v 为参考平面波在胶片面上的空间频率值

$$v=\frac{\sin\theta}{\lambda} \tag{5-95}$$

设物光传播到胶片面上的复振幅为 $\tilde{a}(x,\ y)$ 则胶片面上的合成复振幅为

$$\widetilde{U}(x,\ y)=\widetilde{A}(x,\ y)+\tilde{a}(x,\ y)=Ae^{-i2\pi vy}+\tilde{a}(x,\ y)$$

光强度为

$$I(x,\ y)=A^2+|\tilde{a}(x,\ y)|^2+Ae^{i2\pi vy}\tilde{a}(x,\ y)+Ae^{-i2\pi vy}\tilde{a}^*(x,\ y) \tag{5-96}$$

经过适当曝光与冲洗后的底片成为全息图，其振幅透过率为

$$\begin{aligned}t&=t_0+\beta' I(x,\ y)\\&=t_b+\beta'|\tilde{a}(x,\ y)|^2+\beta' Ae^{i2\pi vy}\tilde{a}(x,\ y)+\beta' Ae^{-i2\pi vy}\tilde{a}^*(x,\ y)\end{aligned}$$

如果用原参考光再照射，则由前面的分析可得原来物光的再现。现在，为了考虑全息图在更一般的照明情形下的结果，设再现时由一束垂直入射，振幅为 B 的均匀平面波照明，如图 5-52 所示，则透过全息图的光场有四个不同的分量，即

$$\begin{aligned}\widetilde{U}'(x,y)=Bt&=Bt_b+\beta' B|\tilde{a}(x,\ y)|^2+\beta' BAe^{i2\pi vy}\tilde{a}(x,\ y)\\&+\beta' BAe^{-i2\pi vy}\tilde{a}^*(x,\ y)=\widetilde{U}_1+\widetilde{U}_2+\widetilde{U}_3+\widetilde{U}_4\end{aligned} \tag{5-97}$$

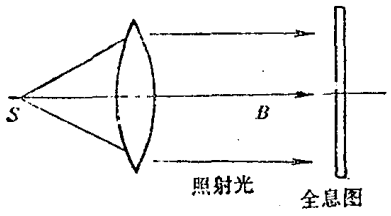


图 5-52

这四个不同光波的产生，可以设想为垂直入射光 B 经过一个孔径为全息片边框、透射率为 t 的光孔（全息图）衍射后传播的光波。

$\widetilde{U}_1=Bt_b$ 只不过是经过衰减的照射光波，如图5-53 a 所示。

$\widetilde{U}_2=\beta' B|\tilde{a}(x,\ y)|^2$，$\widetilde{U}_2$ 是随底片面上各点变化的。因此，$\widetilde{U}_2$ 相当于具有振幅为 $\beta' B$ 的照射光经过透射率为 $|\tilde{a}(x,\ y)|^2$ 的衍射孔的传播。它将是沿着与光轴成各种角度的方向传播的许多平面波分量的迭加，如图 5-53 b 所示。这一“锥”形波散开的角度范围取决于 $\widetilde{U}_2$（即 $|a(x,\ y)|^2$）的空间频率谱。频谱中包含的空间频率越高，散开的角度范围越大。一般这个范围总是很有限的。

$\widetilde{U}_3=\beta' BAe^{i2\pi vy}\tilde{a}(x,\ y)$，这一衍射波的传播情况可以作这样的等效分析：如图 5-53

c 所示。把衍射孔内的孔径函数（透射率）看作 $\tilde{a}(x, y)$，把照射光看作 $\beta' BAe^{i2\pi vy}$，因子 $e^{i2\pi vy}$ 代表一个向 $\theta = \sin^{-1}(v\lambda)$ 方向传播的平面波。因此，$\widetilde{U}_3$ 相当于沿 θ 方向的照射光被孔径函数为 $\tilde{a}(x, y)$ 的光孔所衍射的光波。因此，$\widetilde{U}_3$ 这一项就代表在 θ 方向传播的物光。当观察者在后面迎着这一光束观察时，将看到好象从位于全息图后面 z_0 处的一个虚象发出来的光束，这个虚象就是原物的再现象。

$\widetilde{U}_4 = \beta' BAe^{-i2\pi vy}\tilde{a}^*(x, y)$ 这一项，可以用同样的方法讨论。但是现在，$\widetilde{U}_4$ 是正比于物光的共轭波前 $\tilde{a}^*(x, y)$。$\tilde{a}^*(x, y)$ 是一个与 $\tilde{a}(x, y)$ 振幅相同，而位相异号的波，即一个与 $\tilde{a}(x, y)$ 完全反向的波。此外，现在的照射波相当于在 $\theta = \sin^{-1}(-v\lambda)$ 方向入射，如图 5-53 d 所示。因此，$\widetilde{U}_4$ 光波的传播使在与虚象相反的一侧离全息片 z_0 处形成一实象（孪生象）。

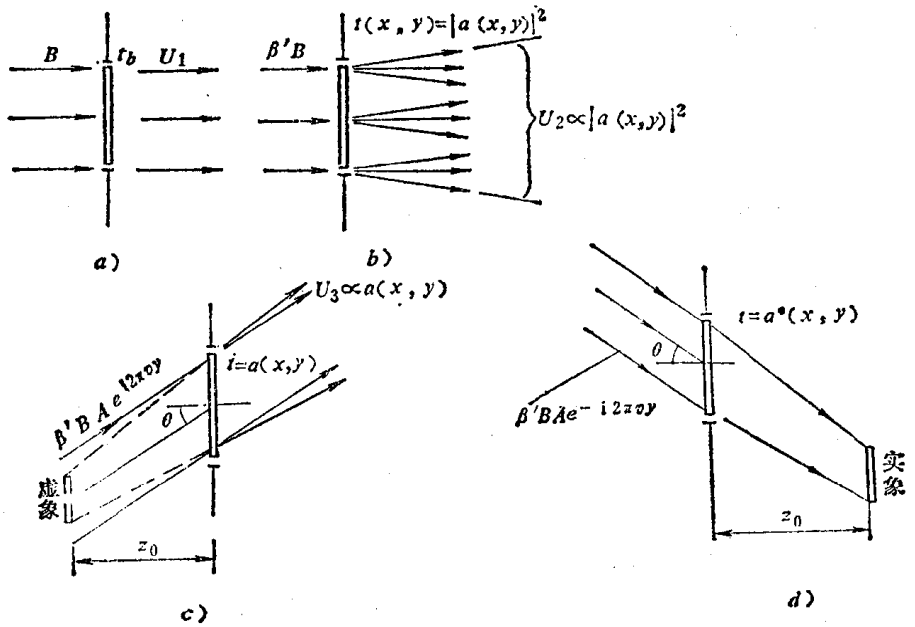


图5-53　再现光波的分析

由上可知，在参考光与照射光都是平行光的情形下，离轴全息片再现后的四个分量，分别在三个方向上出现，分别形成一个带晕轮（由衍射而生的扩散光）的光斑（在屏上接收时），一个虚象和一个实象，位置如图 5-54 所示。

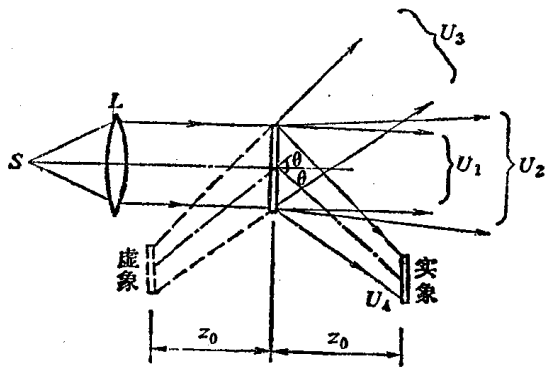


图5-54　四个再现波

若用其他方向的照射光，再现时也可以用同样的方法分析，例如，用原参考光照明，将有图 5-55 a 的结果。若用另一侧的平面参考光照明，又有如图5-55 b 的结果。

通过以上的讨论，可以得出下面几点结论。

（一）在离轴全息中，虽然再现过程中仍同时形成实象和虚象，但它们在方向上相互分离，并且与 $\widetilde{U}_1$、$\widetilde{U}_2$ 也是分开的。分离的多少，由参考光与物光（平均方向）的夹角 θ 决定，θ 越大，分离越远；

（二）由于两个象可以独立观察，而与背景光强无关，这样全息片用正片（$\beta'>0$）或负片（$\beta'<0$）都可以，都能得到与原物看来相同的象。一般都直接采用负片，以避免制作正片的麻烦；

（三）当参考光与照射光都是平面波时，选用任何方向的平面波作照射光，都可以同时得到一个实象和一个虚象。这说明，对于照射光的要求是不严格的。但在某些情况下是有要求的，如在体积全息中，必须用与参考光完全相同的照射光才能再现虚象，或者用参考光的共轭波作照射光才能得到实象。

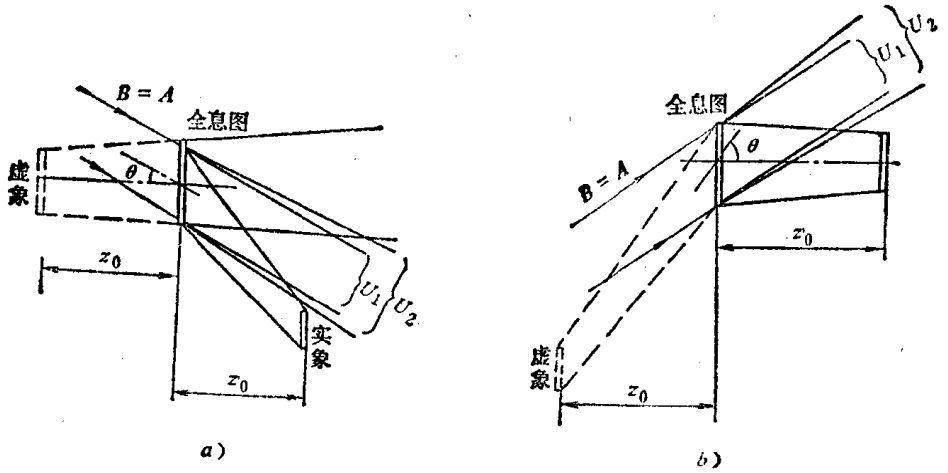


图5-55　用不同方向的照射光进行再现

二、全息图上的干涉条纹与对记录介质分辨本领的要求

（一）全息图上的干涉条纹

以上从全息图面上光场的整体分布的分析，讨论了全息图的记录与再现原理及离轴全息图的一些具体特点。这些分析还是比较概括的。对于全息图上形成的干涉条纹还没有具体考虑。为了得出记录全息图时对记录介质的分辨本领应提出的要求，在此，对于干涉条纹作一些分析。

为了使分析简单些，设参考光为平面波，如图 5-56 所示，设在记录介质（xy）平面上参考光与物光的复振幅各为$\widetilde{A}(x, y)$，$\tilde{a}(x, y)$则在全息图上记录的应是

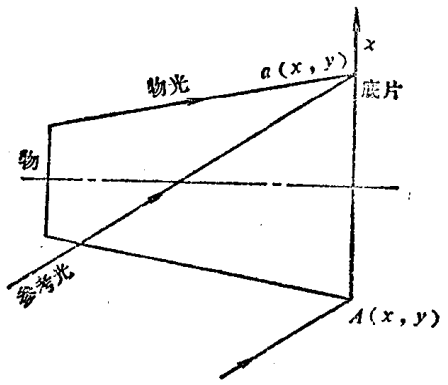


图5-56　全息图上的干涉条纹分布

$$
\begin{aligned}
I(x, y) &= |\widetilde{A}(x, y)+\tilde{a}(x, y)|^2 \\
&= |\widetilde{A}(x, y)|^2+|\tilde{a}(x, y)|^2+a(x, y)A^*(x, y) \\
&\quad +\tilde{a}^*(x, y)A(x, y)
\end{aligned}
\tag{5-98}
$$

其中决定干涉条纹的是后两项。

复杂的物光分布$\tilde{a}(x, y)$可以分解成许多不同方向的平面波，因此，干涉条纹也可以看成不同空间频率的平面波与参考波形成的干涉条纹的迭加。每一空间频率的平面波与参考波所形成的干涉条纹称为基元干涉条纹（或称为基元全息图）。

一个空间频率为 $u_1=\frac{\sin\theta_1}{\lambda}$、$v=0$ 的平面波，如图 5-57 a 所示，在 (xy) 平面上的复振幅可表示为

$$\tilde{a}(x,\ y)=a(x,\ y)e^{-i2\pi u_1 x} \tag{5-99}$$

其传播方向与 z 轴成角 θ_1，$\sin\theta_1=\lambda u$。设参考光也是一个平面波（均匀分布），传播方向与 z 轴成角 θ_r，对应的空间频率 $u_r=\frac{\sin\theta_r}{\lambda}$，$v_r=0$ 则参考光在 xy 平面上的复振幅为

$$\tilde{A}(x,\ y)=Ae^{-i2\pi u_r x} \tag{5-100}$$

将式（5-99）与式（5-100）代入式（5-98）得

$$\begin{aligned}I(x,\ y)&=A^2+|a(x,\ y)|^2+Aa(x,\ y)\{e^{-i2\pi(u_1-u_r)x}+e^{i2\pi(u_1-u_r)x}\}\\&=A^2+|a(x,\ y)|^2+2Aa(x,\ y)\cos[2\pi(u_1-u_r)x]\end{aligned} \tag{5-101}$$

由此式可见，任一空间频率（u_1，o）的平面波与参考波（u_r，o）所产生的基元干涉条纹，乃是一个空间频率（每毫米条纹数）为（u_1-u_r）的平行亮暗条纹的周期分布，如图 5-57 b 所示。胶片感光后也就形成一个透过率按余弦函数变化的光栅。整个全息图上的干涉条纹可以看作这许多基元条纹的迭加。并形成一个复杂的光栅。

在图 5-57 的情形有

$$u_1=-\frac{\sin|\theta_1|}{\lambda}$$

$$u_r=+\frac{\sin|\theta_r|}{\lambda}$$

因而条纹频率

$$\nu=u_r-u_1=\frac{\sin|\theta_r|+\sin|\theta_1|}{\lambda} \tag{5-102}$$

在傍轴近似下，$\sin\theta_1\approx\theta_1$，$\sin\theta_r\approx\theta_r$

$$\nu=\frac{|\theta_r|+|\theta_1|}{\lambda} \tag{5-103}$$

令 $\theta=|\theta_r|+|\theta_1|$，即两平面波之间的夹角

则

$$\nu=\frac{\theta}{\lambda} \tag{5-104}$$

若干涉条纹间距为 d，则有

$$d=\frac{\lambda}{\theta} \tag{5-105}$$

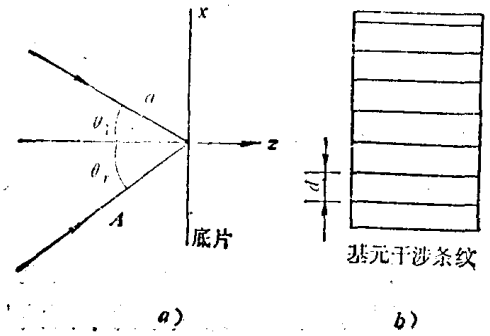


图5-57　基元干涉条纹

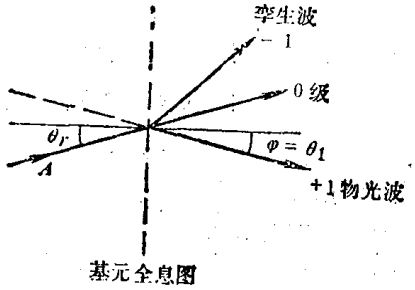


图5-58　基元全息图的衍射

可见，条纹频率或间距（d）由物光和参考光的夹角 θ 决定。θ 越大，条纹频率越高，即条纹间距越小。

这个按余弦函数变化的光栅再现时的衍射现象，如图 5-58 所示，设照射光为原参考光 A，在满足光栅方程

$$d(\sin i - \sin\theta_r) = m\lambda$$

的各级方向上将产生衍射光波。但因为是余弦光栅，所以只产生一个 0 级与两个±1 级衍射波，

$m = 0$　　$i = \theta_r$　　零级衍射波，即衰减直射波；

$m = 1$　　$i = \theta_1$　　1 级衍射波，即再现物光波；

$m = -1$　　$i = \theta_1'$　　-1 级衍射波，即物光的孪生波。

（二）对记录介质的分辨本领的要求

根据上面的讨论，即可讨论对记录介质分辨本领的要求。

由

$$\nu = u_r - u_1$$

可以看出，底片分辨本领，即底片能记录的最高频率 ν_m 应满足

$$\nu_m \geqslant |u_r - u_1|_{最大值} \approx \frac{|\theta_r| + |\theta_1|}{\lambda} = \frac{\theta}{\lambda} \tag{5-106}$$

普通照相干板的分辨本领为 200 条/毫米左右，而在全息记录中，记录的常常是非常密的干涉条纹（有时为每毫米几千条），一般要求全息干板的分辨本领为 800～4000 条/毫米。

三、傅里叶变换全息图

前面介绍的全息图属于所谓菲涅耳全息图的类型。拍摄时，底片与物的距离不大，在底片上的物光是照射光经物而产生的菲涅耳衍射（与菲涅耳全息图相区别，还有夫琅和费全息图，这种情形，底片上的物光是物所衍射的光在远处的夫琅和费衍射，这里不讨论）。下面，再介绍一种傅里叶变换全息图，这种全息图是使照射到底片上物光的复振幅分布恰恰是物图样的傅里叶变换。傅里叶变换全息图在全息照相的应用中占有一定的重要地位，特别是在光学空间滤波方面，利用平面傅里叶全息图作滤波器可以取得很好的效果。

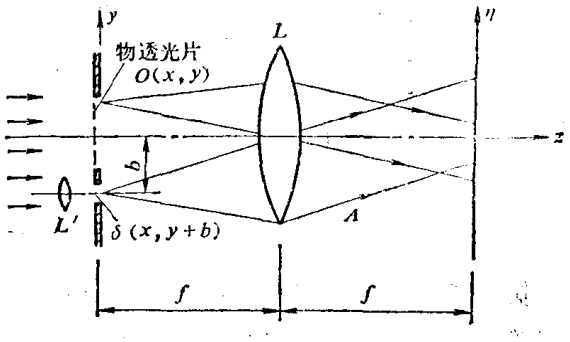


图5-59　傅里叶变换全息图

图 5-59 是利用透镜的傅里叶变换性质来拍摄傅里叶变换全息图的一种装置。在透镜 L 的前焦面上放置物透光片与一个参考光点光源（用另一透镜 L' 把照明光聚焦在一个小孔上，照明光是从激光光源来的平行光，同时照在物透光片和透镜 L' 上），在透镜 L 的后焦面上放底片。

设物透光片的复振幅透射率为 $\widetilde{O}(x, y)$，参考点光源在 $y = -b$ 处，其复振幅可用 δ 函数 $\delta(x, y+b)$ 表示。它们在底片面上的傅里叶变换可表示为

$$F\{\widetilde{O}(x, y)\} = \widetilde{O}(u, v) = \widetilde{O}\left(\frac{\xi}{\lambda f}, \frac{\eta}{\lambda f}\right) \tag{5-107}$$

$$F\{\delta(x, y+b)\} = Ae^{i2\pi vb} = Ae^{i2\pi b\frac{\eta}{\lambda f}} \tag{5-108}$$

因此，在全息底片上的光场为

$$\widetilde{O}(u,\ v)+Ae^{i2\pi vb}$$

光强度为

$$\begin{aligned}I&=[\widetilde{O}(u,\ v)+Ae^{i2\pi vb}][O^*(u,\ v)+Ae^{-i2\pi vb}]\\&=A^2+|\widetilde{O}(u,\ v)|^2+A\widetilde{O}(u,\ v)e^{-i2\pi vb}\\&\quad+A\widetilde{O}^*(u,\ v)e^{i2\pi vb}\end{aligned}\tag{5-109}$$

经过适当曝光与冲洗后底片的振幅透过率 t 与光强 I 的关系为

$$\begin{aligned}t&=t_0+\beta' I=t_b+\beta'[|\widetilde{O}(u,\ v)|^2+A\widetilde{O}(u,\ v)e^{-i2\pi vb}\\&\quad+A\widetilde{O}^*(u,\ v)e^{i2\pi vb}]\end{aligned}\tag{5-110}$$

式中 $$t_b=t_0+\beta' A^2$$

可见，在傅里叶变换全息图上，记录了物光（物透光片的复振幅透过率）的傅里叶变换 $\widetilde{O}(u,\ v)$ 及其共轭 $O^*(u,\ v)$。

现在，把这张傅里叶变换全息图，用沿 z 轴的振幅为 B 的平行光照射，并利用与拍摄时相同的透镜作出再现光波的傅里叶变换。如图 5-60 所示，把全息图放在透镜的前焦面上，则透过全息图的再现光波复振幅

$$\begin{aligned}\widetilde{W}&=Bt=Bt_b+\beta' B|\widetilde{O}(u,\ v)|^2+\beta' BA\widetilde{O}(u,\ v)e^{-i2\pi vb}\\&\quad+\beta' BA\widetilde{O}^*(u,\ v)e^{i2\pi bv}\end{aligned}\tag{5-111}$$

然后，在透镜的后焦面上得到的复振幅分布将是式（5-111）右方各项的傅里叶变换（在图 5-60 中令后焦面上 x、y 座标轴与全息图上 ξ、η 座标方向相反，则为逆傅里叶变换）。

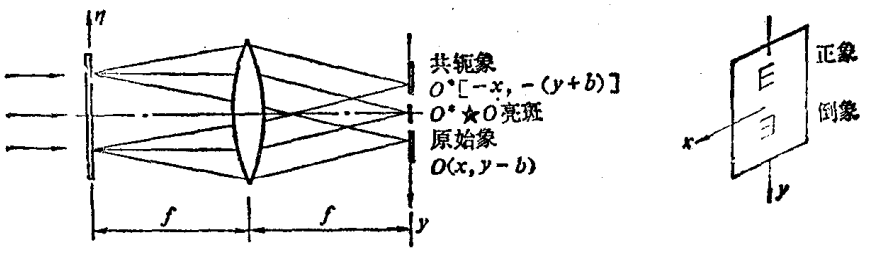


图5-60 付里叶全息图的再现

$$\left.\begin{aligned}&\text{第一项}\quad F^{-1}\{Bt_b\}=Bt_b\delta(x,\ y)\\&\text{第二项}\quad F^{-1}\{\beta' B|\widetilde{O}(u,\ v)|^2\}=\beta' B\widetilde{O}^*(x,\ y)\star\widetilde{O}(x,\ y)\\&\text{第三项}\quad F^{-1}\{\beta' BAO(u,\ v)e^{-i2\pi bv}\}=\beta' BAO(x,\ y-b)\\&\text{第四项}\quad F^{-1}\{\beta' BAO^*(u,\ v)e^{i2\pi bv}\}=\beta' BAO[-x,\ -(y+b)]\end{aligned}\right\}\tag{5-112}$$

第一、第二项为零级衍射波，在象面中心产生一个亮斑。第三、四项表示原来物透光片的两个实象，一个是正立的原始象，沿 x 的正向平移距离 b，另一个则是倒立的共轭象，沿 x 轴的负方向平移距离 b。

傅里叶变换全息图还可以利用其它装置得到，如将物透光片靠近透镜（或置于透镜之后），如图 5-61 所示，称为准傅里叶变换全息图。也可以不用透镜，如图 5-62，称为无透镜傅里叶变换全息图。无论哪种装置，都必须使参考光源与物透光片位在同一平面上，使物的任一点在全息图面上的光场与参考光场形成的干涉条纹为等间距的平行条纹。

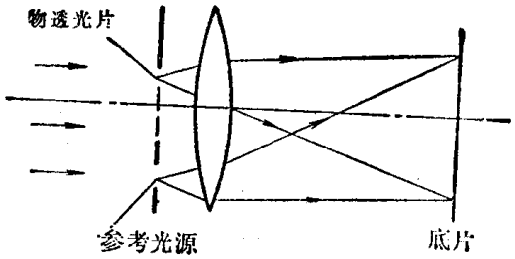


图5-61 准付里叶变换全息图

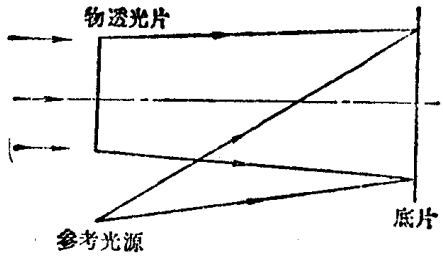


图5-62 无透镜付里叶变换全息图

四、全息照相应用举例

（一）用全息图校正透镜的象差

校正透镜的象差有各种不同的方法，全息图也可用来补偿透镜的象差。如图5-63 a 所示，在拍摄全息图时，将点光源置于透镜的前焦点，用点光源发出的光波通过待校正透镜后的波前作为物光波。由于有象差，波前 Σ_0 不为平面。参考光用平面光波，在全息图平面上物光和参考光的复振幅分别为

物光 $$\tilde{a}(x)=e^{-i\varphi_0(x)} \tag{5-113}$$

参考光 $$\tilde{A}(x)=e^{-i2\pi ux}=e^{-ikx\sin\theta} \tag{5-114}$$

这里为简单起见令振幅为1。全息图的振幅透过率

$$t=|\tilde{a}+\tilde{A}|^2=2+e^{-i[\varphi_0(x)-kx\sin\theta]}+e^{i[\varphi_0(x)-kx\sin\theta]} \tag{5-115}$$

再现时用与参考光共轭的光波照明，即

$$B=\tilde{A}^*=e^{ikx\sin\theta}$$

如图 5-63 b 所示，则再现出来的光波为

$$\tilde{U}=Bt=2e^{ikx\sin\theta}+e^{-i[\varphi_0(x)-2kx\sin\theta]}+e^{i\varphi_0(x)} \tag{5-116}$$

如果使 $e^{i\varphi_0(x)}$ 一项代表的光波 Σ_0^* 通过透镜，则与透镜所产生的有象差的波面 Σ_0 形状相同，只是方向相反，再经过透镜以后可变为平面波。因此，在焦平面上形成一理想光学系统的衍射光斑。

实验证明，采用全息图校正板以后，在有限视场情况下，可以改善成象质量。但还存在一些缺点。例如，由于全息图有色散效应，必须采用单色光；另外，全息图校正板本身也会引入新的象差。

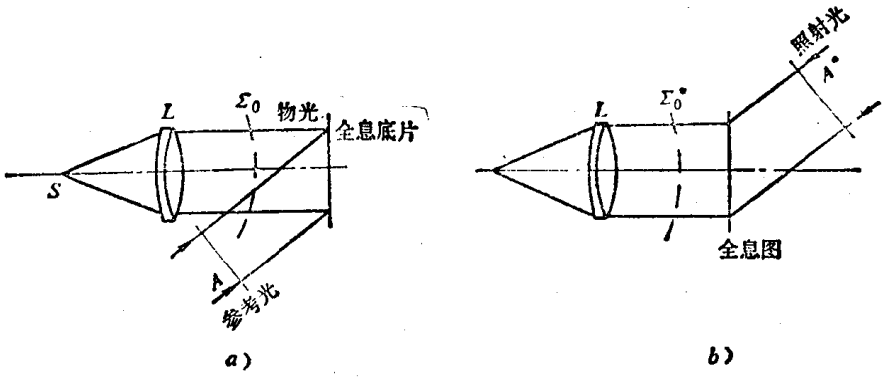


图5-63 用全息图校正透镜的象差

（二）全息光栅

最简单的全息图是两平面光波产生的一组平行等间距的直条纹，这样的全息片与刻划光栅有相同的作用，称为全息光栅。随着全息照相技术的发展，全息光栅也发展起来。

平面全息光栅的制作采用分波前干涉系统，如图 5-64 所示，光源用氩离子激光器，波长是 4579 埃，L 为扩束透镜，M 为抛物镜，M_1、M_2 为平面反射镜，H 为涂有光致抗蚀剂的玻璃基片。条纹的疏密与 θ 有关。每毫米的线条数 $\nu \approx \theta/\lambda$，所以最多到 4000 条/毫米。提高线条密度的方法是缩短波长，已用过的方法如图 5-65 所示。将光栅基片（已涂感光层）用折射液贴置在一直角棱镜的弦面上，设玻璃的折射率为 $n=1.5$，则光在玻璃中的波长 $\lambda_n=\lambda/n=3000$ 埃，线条密度可以达到 6500 条/毫米。

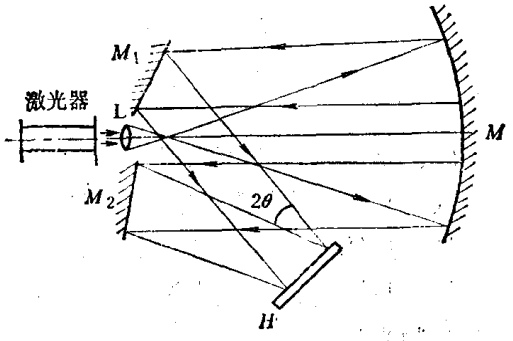


图5-64　全息光栅

全息光栅比起刻制光栅和复制光栅来，它的优点是没有周期性误差，杂射光少，对环境条件，如防震、温度及湿度控制的要求比刻划光栅低。对凹面光栅来说，刻划光栅有象差，全息光栅则可以校正大部分象差。

（三）全息干涉计量

全息干涉计量是全息照相应用的一个重要方面，它具有普通干涉计量所不能比拟的优点。例如它可以用于各种材料的无损检验，非抛光表面和形状复杂的表面检查，研究物体的微小变形、微小振动、高速运动等。在光学测量方面不要求工件表面高度抛光，对光学测量仪器的光学元件的质量要求可以降低，仪器结构可以简化。全息干涉技术，可采用单次曝光（实时法），二次曝光以及多次曝光等多种方法。

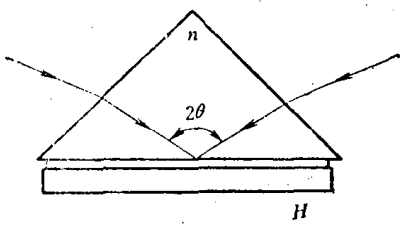


图5-65　提高全息光栅线条/毫米的一种方法

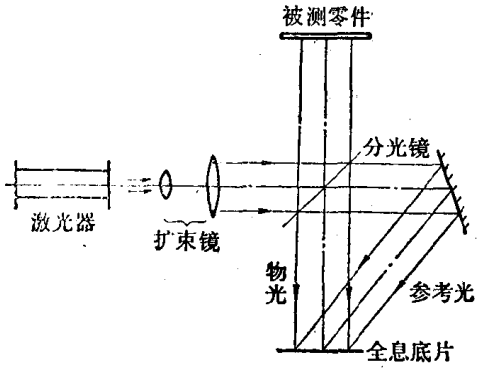


图5-66　全息干涉计量装置

例如，用图 5-66 所示的系统及单次曝光来检验零件的变形。首先拍摄一标准（未变形）零件的全息图，将处理好的全息图放到原来记录的位置。这时如保持全息干涉系统的光学零件不变，用参考光再照射这张全息图，就会在原来物体所在处出现一个再现虚象。这时如用激光照射物体，并且物体保持原来的状态，则再现象与物体完全重合，不出现干涉条纹。如物体由于外界原因，例如加载、加热等使之产生微小的位移或变形，那么再现物光波与变化后的物光波之间便产生干涉条纹。略微改变作用于物体的外界条件，条纹的位置和疏密将随着有所改变。这样就可以根据条纹的情况来研究物体的状态，这就是单次曝光全息干涉的原理。在这个方法中，唯一的严格要求是将处理后的全息图精确地放置在原拍摄的位置。解决的办法，一是就在原处进行全息图的冲洗，二是采用微调机构精确地调整全息图，使恢复到原位置，这样对微调机构的要求是很高的。

采用二次曝光法，则可克服单次曝光法的上述缺点。在二次曝光法中，首先拍摄一张未变形物体的全息图，这是第一次曝光，这时不要移动感光胶片的位置，也不进行冲洗。然后在物体上进行加压或加热等，使物体变形，再进行第二次曝光，即拍摄变形以后的物体的全息图。这样经两次曝光的全息图记录在同一张胶片上，经过冲洗后的这张全息图就能再现两个物光波前，由于它们的位相有少许的不同，因而呈现干涉条纹。这个方法的缺点是不能在外界条件变化的同时观察物体状态改变的情况。

五、全息照相实验技术与装置

（一）全息照相要求相干性很高的光源，因而采用各种激光器，例如目前常用的有氦氖激光器（波长 6328 埃）、氩离子激光器（波长为 4880 埃和 5145 埃）和红宝石脉冲激光器（波长为 6943 埃）等。拍摄全息图用的激光器应该有较大的功率。虽然采用了激光器作光源，也要尽可能使物光和参考光的光程相等。

（二）要求有较高分辨本领的记录介质，一般要求分辨本领在 500～4000 条/毫米。目前最常用的记录介质是溴化银照相乳胶，其他的记录介质还有重铬酸明胶、光电导体——热塑料等。

（三）全息照相的光学系统的布局应根据再现时的要求和照明方式来选择。因为系统中任一部分发生变化都会引起条纹的漂移，所以光学元件愈少愈好，各光学元件的支架、调节部分都应当稳定。

分光镜（分束器）是全息照相系统中的一个重要元件。参考光和物光的分束比一般在 2：1 到 10:1 之间。分光镜一般用有楔角的玻璃板，非析光面镀增透膜，析光面镀阶梯反射膜（便于改变分束比），楔角的作用是使非析光面反射的光不进入系统中。

因为激光输出的光束很细，需要加一个扩束元件。通常用 20 倍或 40 倍的显微物镜或焦距很短的负透镜。

（四）对稳定性的要求。全息图是参考光和物光干涉条纹的记录。如果在曝光期间光程差有变化，就要影响条纹对比度。通常要求光程差的变化小于十分之一波长，这样对实验装置和实验台的稳定性就提出很高的要求。影响稳定性的因素有振动、空气流动和热变化等。振动影响主要来自地基的振动，一般全息照相都用减震台。减震台要求工作台面牢固、重量大，用气垫、微孔塑料或沙箱等支撑起来。此外，仪器各部件之间要保持相对稳定。

习　题

5.1　将图 5-67 所示的矩形波展开为傅里叶级数。

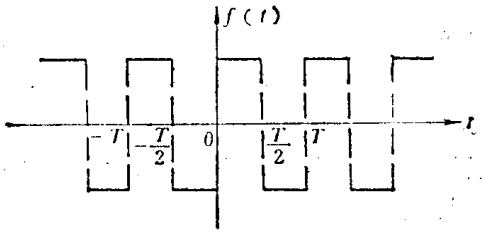


图5-67　矩形波

矩形波在$\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$上的函数表示为

$$f(t)=\begin{cases}1 & 0\leqslant t\leqslant\frac{T}{2}\\ -1 & -\frac{T}{2}\leqslant t\leqslant 0\end{cases}$$

5.2 求函数

$$E(x)=\begin{cases}E_0\sin k_0x & |x|\leqslant L\\ 0 & |x|>L\end{cases}$$

的傅里叶变换$F\{E(x)\}$，并画出$F\{E(x)\}$的草图。

5.3 平行单色光垂直照射矩形孔、双缝，用傅里叶变换的方法分别求出这些光瞳函数（孔径函数）在透镜焦平面上的频谱函数。

其中矩形孔函数表示为

$$f(x,\ y)=\begin{cases}1 & -a<x<a,\ -b<y<b\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

双缝函数表示为

$$f(x)=\begin{cases}1 & -\frac{d}{2}-\frac{a}{2}<x<-\frac{d}{2}+\frac{a}{2},\ \frac{d}{2}-\frac{a}{2}<x<\frac{d}{2}+\frac{a}{2}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

5.4 试证明：对于垂直入射的平面波，如果衍射孔有一个对称中心，即如果孔径函数是偶函数，则夫琅和费衍射图样也有一个对称中心。

5.5 在夫琅和费双缝衍射的装置中，设线光源与狭缝平行，光源宽度为b，位于透镜的前焦面上，若双缝间隔为d，缝宽为a，试用傅里叶变换方法求出其透镜后焦面上的衍射条纹的分布，并分别讨论在①光源宽度b缩小 ②缝宽a缩小，间隔d不变 ③间隔d缩小，缝宽a不变 ④透镜焦距f_2增大 ⑤双缝平面沿平行于双缝宽的方向平移 ⑥光源平面沿平行于缝宽方向平移 ⑦双缝平面绕光轴旋转 ⑧光源平面绕光轴旋转等情况下，衍射条纹有何变化？

5.6 用相干光照明一余弦光栅$f(x)=\cos 2\pi fx$，在透镜的后焦面上得到它的夫琅和费衍射条纹为二条亮线，如果在其中一条亮线处放置一块$\lambda/4$位相板，试问光栅象面分布将有何变化？

5.7 在阿贝—波尔特实验装置中，若物面为图5-68a所示的图形，经过空间滤波之后，象面图形变成5-68b，试描述空间滤波器的形状，并解释它是怎样产生这个滤波图象的。

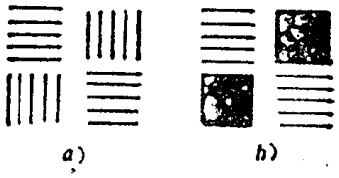


图 5-68

5.8 用相衬法来检测一块玻璃的不平度，用$\lambda=0.5$微米的光照明，试求在用：1）完全透明的位相板 2）有一定吸收而使光强透过率减小到1/25的位相板的情形下，所能检测的玻璃的最小不平度。假设所能观测的最小对比度为0.03。

5.9 求一个方形孔的光学传递函数OTF，若方形孔的边长$l=2r$，r是方形孔内切圆的半径，该方形孔与圆形孔有同样截止频率吗？

5.10 若全息底片的分辨率为400条/毫米，试求参考光与物光之间的最大夹角。设照明光波长为6000埃。

第六章　光的偏振与晶体光学基础

光的干涉现象和衍射现象充分显示了光的波动特性，但这里不涉及光是横波还是纵波的问题，因为这两种波都同样能产生干涉和衍射现象。光的偏振现象从实验上证实了光波是横波⊖，而麦克斯韦电磁理论也从理论上指出了这一点。

光的偏振现象与晶体有着密切的联系，许多重要的偏振器件是由晶体制成的，反过来，利用光的偏振现象又可以有效地研究晶体的光学性质。

如同光的干涉和衍射一样，光的偏振现象在科学技术特别是激光技术中有着重要的应用。

§6-1　偏振光和自然光

一、偏振光和自然光的特点

第一章中已经指出，光波是一种横波，它的光矢量是与传播方向垂直的。如果光波的光矢量的方向始终不变，只是它的大小随位相改变，这样的光叫线偏振光。光矢量（电矢量）与光的传播方向组成的面称为线偏振光的振动面。如果光矢量的大小保持不变，而它的方向绕传播方向均匀地转动，光矢量末端的轨迹是一个圆，这样的光叫圆偏振光。如果光矢量的大小和方向都在有规律地变化，光矢量末端沿着一个椭圆转动，这样的光叫椭圆偏振光。

正如§1-5所说的，从普通光源发出的光不是偏振光，而是自然光，即具有一切可能的振动方向的许多光波的总和。这些振动是同时存在或迅速而无规则地互相替代的，它的特点是振动方向的无规则性，但就统计规律来说，对于光的传播方向是对称的，在与传播方向垂直的平面上，无论哪一个方向的振动都不比其他方向更占优势（图6-1）。在任何实验中，如果用两个光矢量互相垂直，位相没有关联的线偏振光来代替自然光，而且让这两个线偏振光的强度都等于自然光总强度的一半，可以得到完全相同的结果。因此，自然光可以用相互垂直的两个光矢量表示，这两个光矢量的振幅相同，但位相关系是不确定的，是瞬息万变的，绝不能把这两个光矢量再进一步合成为一个稳定的线偏振光或椭圆偏振光。

自然光在传播过程中，由于外界的作用，造成各个振动方向上的强度不等，使某一方向

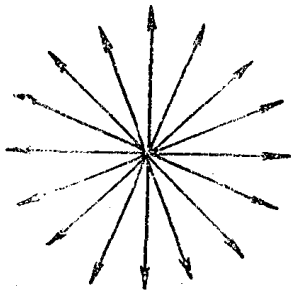


图6-1　自然光

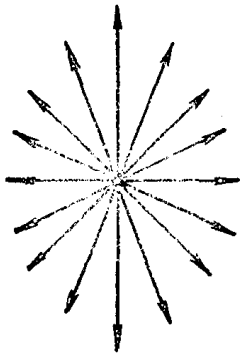


图6-2　部分偏振光

⊖ 这是针对均匀波而言的。在非均匀波中，例如在第一章讨论过的全反射时在光疏介质里产生的倏逝波中，情况并非这样。

的振动比其他方向占优势，这种光叫部分偏振光。图 6-2 示意地画出了部分偏振光的强度随光矢量方向的变化。图中光矢量沿垂直方向的振动比其他方向占优势，其强度用 I_{max} 表示；光矢量沿水平方向的振动较之其他方向处于劣势，其强度用 I_{min} 表示。部分偏振光也可以看作是由一个完全偏振光和一个自然光混合组成的，其中完全偏振光的强度 $I_P = I_{max} - I_{min}$。在部分偏振光的总强度（$I_{max} + I_{min}$）中，完全偏振光所占的比率 P，叫做偏振度。

$$P = \frac{I}{I_{总}} = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \tag{6-1}$$

对于自然光，各方向的强度相等，$I_{max} = I_{min}$，$P = 0$。对于完全偏振光，$I_P = I_{总}$，$P = 1$。其他情形下的 P 值都比 1 小。偏振度的数值愈接近 1，光束的偏振化程度就愈高。

二、获得偏振光的方法

从普通光源发出的非偏振光获得线偏振光的方法主要有以下三种：

（1）由反射与折射产生偏振光；

（2）由二向色性产生偏振光；

（3）由双折射产生偏振光。

下面先讨论前二种方法，第三种方法在下一节再讨论。

1. 由反射和折射产生偏振光

由 § 1-7 知道，自然光在介质的分界面上反射和折射时，可以把它分解为两部分，一个部分的光矢量在入射面内，叫平行分量；另一部分的光矢量垂直于入射面，叫垂直分量。由于平行分量和垂直分量的反射系数不同，因而反射光和折射光就成为部分偏振光。而且当以布儒斯特角入射时，反射光成为完全的线偏振光。

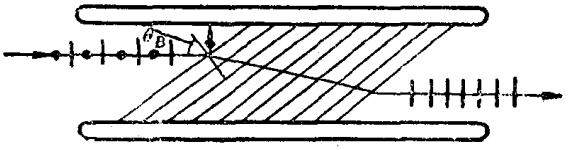


图6-3　用玻璃片堆获得偏振光

根据上述原理，可以利用玻璃片来获得偏振光。不过，如果只用一片玻璃，缺点是很明显的：在以布儒斯特角入射时，反射光虽是线偏振光，但强度太小；透射光的强度虽大，但偏振度太小。为了解决这个矛盾，让光通过由多片玻璃叠合而成的倾斜的片堆（图 6-3），并且使入射角等于布儒斯特角。这样，经过多次的反射和折射，既能获得较高的偏振度，光的强度也比较大。

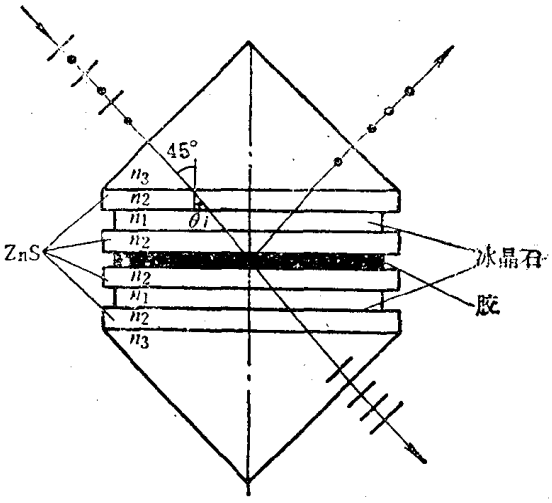


图6-4　偏振分光镜

根据由反射和折射产生偏振光的原理，还可以制成一种叫做偏振分光镜的器件。如图 6-4 所示，偏振分光镜是把一块立方棱镜沿着对角面切开，并在两个切面上交替地镀上高折射率的膜层（ZnS）和低折射率的膜层（冰晶石），再胶合成立方棱镜。这种器件的原理可以从玻璃片堆得到启发。高折射率膜层就相当于图 6-3 中的玻璃片，低折射率膜层则相当于玻璃片之间的空气层。为了获得最大的偏振度，应适当地选择膜层的折射率，使光线在相邻膜层界面上的入射角等于布儒斯特

角。从图 6-4 容易看出：

$$n_3 \sin 45^\circ = n_2 \sin \theta_i$$

$$\tan \theta_i = \frac{n_1}{n_2}$$

式中n_3是玻璃的折射率，n_1、n_2分别是冰晶石和硫化锌的折射率，θ_i是光线在硫化锌膜层中的折射角，亦即在硫化锌和冰晶石界面上的入射角。

从以上二式得到：

$$n_3^2 = \frac{2n_1^2 \cdot n_2^2}{n_1^2 + n_2^2} \tag{6-2}$$

这是玻璃的折射率 n_3 与两种介质膜的折射率 n_1、n_2 之间应当满足的关系式。我们知道，玻璃和介质膜的折射率是随光的波长改变的。在白光照射时，为了使各种波长的光都获得最大的偏振度，就应当让各种波长的折射率都满足关系式（6-2），这就要求玻璃的色散必须与介质膜的色散适当地配合。在可见光范围内，冰晶石的色散极小，可以把 n_1 看作不随波长改变的常数。对式（6-2）两边求微分得到：

$$\delta n_3 = \frac{\sqrt{2}\, n_1^3}{(n_1^2 + n_2^2)^{3/2}} \delta n_2 \tag{6-3}$$

这是玻璃的色散与硫化锌的色散之间应当满足的关系式。玻璃和介质膜的色散常常用色散系数（阿贝常数）ν 来描述，ν 的定义是：

$$\nu = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$$

式中 n_D 是该物质对钠 D 线（5893 埃）的折射率，n_F、n_C 是对氢的 F 线（4861 埃）和 C 线（6563 埃）的折射率。由于 $n_F - n_C$ 很小，可以用微分来代替，这样，玻璃的色散系数 ν_3 和硫化锌的色散系数 ν_2 分别为：

$$\nu_3 = \frac{n_3 - 1}{\delta n_3}, \qquad \nu_2 = \frac{n_2 - 1}{\delta n_2}$$

代入式（6-3）并整理后得到：

$$\nu_3 = \frac{n_2(n_1^2 + n_2^2)(n_3 - 1)}{n_1^2 \cdot n_3(n_2 - 1)} \nu_2 \tag{6-3a}$$

将 $n_1 = 1.25$（相当于在真空度为 10^{-3} 毛时蒸镀冰晶石所得到的折射率）、$n_2 = 2.3$、$\nu_2 = 17$代入式（6-2）和（6-3a）得到：

$$n_3 = 1.55, \quad \nu_3 = 46.8$$

这是选用玻璃材料的基本参数。

由偏振分光镜产生的反射光和透射光都是偏振度很高的部分偏振光。显然，镀膜的层数愈多，偏振度愈高。

2. 由二向色性产生偏振光

就原来的意义来说，二向色性是指有些各向异性的晶体对于光的吸收本领除了随波长改变外，还随光矢量相对于晶体的方位而改变。这意味着当透过这些晶体去看一束线偏振的白光时，随着晶体绕光传播方向的转动，光矢量相对于晶体的方向在改变，晶体就显示出不同的颜色。现在知道，有些本来各向同性的介质在受到外界作用时会产生各向异性，它对光的吸收本领也随着光矢量的方向而改变。我们把介质的这种性质也叫做二向色性。

现在广泛使用的获得偏振光的器件，是一种人造的偏振片，叫做H偏振片，它就是利用二向色性获得偏振光的。它是把聚乙烯醇薄膜在碘溶液里浸泡后，在较高的温度下拉伸3～4倍，再烘干而制成的。经过拉伸后，碘-聚乙烯醇分子沿着拉伸方向规则地排列起来，形成一条条导电的长链。碘中具有导电能力的电子能够沿着长链方向运动。入射光波的电场的沿着长链方向的分量推动电子，对电子作功，并被强烈地吸收；而垂直于长链方向的分量不对电子作功，能够透过。这样，透射光就成为线偏振光。偏振片（或其他偏振器件）允许透过的电矢量的方向称为它的透光轴。显然，偏振片的透光轴垂直于拉伸方向。

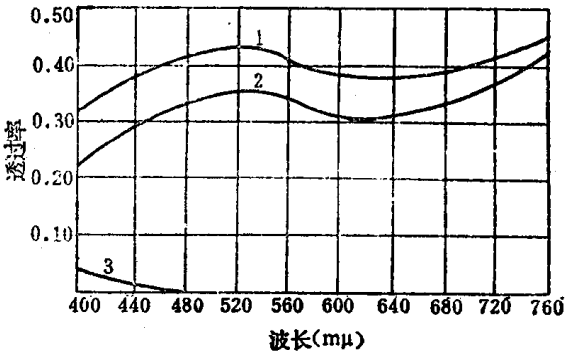


图6-5　偏振片的透射率

图6-5画出了H偏振片的透射率与波长的关系。曲线1表示单片偏振片的透射率；曲线2表示两片偏振片当透光轴互相平行时的总透射率；曲线3表示两片偏振片当透光轴互相垂直时的总透射率。从图可见，当波长为5000埃的自然光通过两片叠在一起的H偏振片时，如果它们的透光轴互相平行，透射率可达36%；如果它们的透光轴互相垂直，透射率不到1%。

除了H偏振片外，还有一种K偏振片也用得很广。它是把聚乙烯醇薄膜放在高温炉中，通以氯化氢作催化剂，除掉聚乙烯醇分子中的若干个H_2O分子，形成聚合乙烯的细长分子，再单方向拉伸而制成的。这种偏振片的最大特点是性能稳定，能耐高温。

人造偏振片的面积可以做得很大，厚度很薄，通光孔径几乎是180°，而且造价低廉，因此尽管透射率较低且随波长改变，还是获得了广泛的应用。

三、马吕定律和消光比

上面介绍了一些产生偏振光的器件。如何来检验这些器件的质量呢？或者说，当自然光通过这些器件后是否产生完全的线偏振光呢？我们可以再取一个同样的器件，让光相继通过它们。例如，在图6-6所示的实验装置中，P_1和P_2就是两片相同的偏振片，前者用来产生偏振光，后者用来检验偏振光。当它们相对转动时，透射光强就随着两偏振片的透光轴的夹角θ而变化。如果偏振片是理想的，当它们的透光轴互相垂直时，透射光强应该为零。当夹角θ为其他值时，透射光强由下式决定：

$$I = I_0 \cos^2\theta \qquad (6\text{-}4)$$

式中I_0是两透光轴平行（$\theta = 0$）时的透射光强。式(6-4)称为马吕(Malus)定律。式(6-4)的证明很简单，读者可自行证明(习题6-1)。

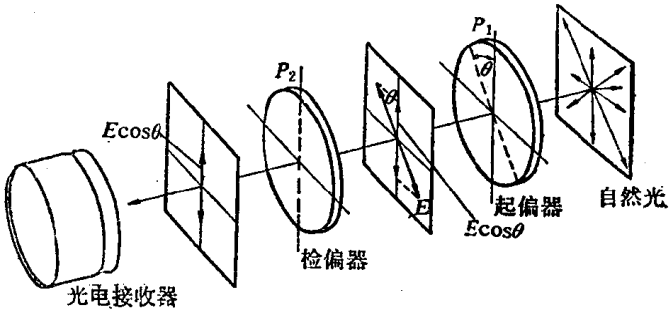


图6-6　验证马吕定律或测定消光比的实验装置

实际的偏振器件总不是理想的。自然光透过后得到的不是完全的线偏振光，而是部分偏振光。即使两个偏振器的透光轴互相垂直，透射光强也不是零。当它们相对转动时，最小透射光强与最大透射光强之比，称为消光比。这是衡量偏振器件质量的重要参数。消光比愈小，偏振器件的质量就愈高。人造偏振片的消光比约为10^{-3}。

从图 6-6 这个简单的例子也可以看到，用来产生偏振光的器件同样可以用来检验偏振光。通常把产生偏振光这一步叫做“起偏”，产生偏振光的器件（如图 6-6 中的第一片偏振片 P_1）叫做起偏器；同样地，把检验偏振光叫做“检偏”，检验偏振光的器件（如图 6-6 中的第二片偏振片 P_2）叫做检偏器。

§6-2 双 折 射

一、双折射现象

当一束单色光在各向同性介质（例如空气和玻璃）的界面折射时，折射光线只有一束，而且遵守折射定律，这是大家所熟知的。但是当一束单色光在晶体的界面折射时，一般可以产生两束折射光线，这种现象叫双折射。下面以方解石为例讨论晶体的双折射现象。

方解石也叫冰洲石，化学成分是碳酸钙（$CaCO_3$）。天然方解石晶体的外形为平行六面体（图 6-7），每个表面都是锐角为 78°8′、钝角为 101°52′的平行四边形。六面体共有八个顶角，其中两个由三面钝角组成，称为钝隅。其余六个顶角都由一个钝角和两个锐角组成。方解石很容易解理成小块，开料时必须留意，防止碎裂。因为方解石能产生双折射，所以如果透过它去看纸上的一行字，每个字都变成了互相错开的两个字。

1. 寻常光线和非常光线

对方解石的双折射现象的进一步研究表明，两束折射光线中，有一束总是遵守折射定律，即不论入射光束的方位如何，这束折射光线总是在入射面内，并且折射角的正弦与入射角的正弦之比等于常数。我们把这束折射光称为寻常光，用符号 o 表示；另一束折射光则不然，一般情形下，即使入射角为零，折射角也不等于零，而且这束折射光往往不在入射面内。换言之，它不遵守折射定律。因此称它为非常光，用符号 e 表示。

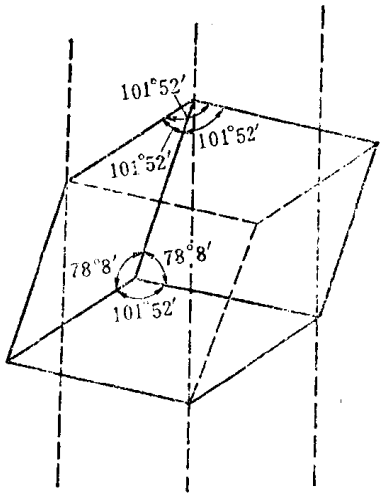


图6-7 方解石晶体
图中虚线表示光轴方向

2. 光轴

方解石晶体的一个重要特性，就是存在一个（而且只有一个）特殊的方向，当光在晶体中沿着这个方向传播时不发生双折射。晶体内这个特殊的方向称为晶体的光轴。

实验证明，方解石晶体的光轴方向就是从它的一个钝隅所作的等分角线方向，即与钝隅的三条棱成相等角度的那个方向。当方解石晶体的各棱都等长时，钝隅的等分角线刚好就是相对的那两个钝隅的连线（见图 6-7）。必须着重指出，光轴并不是经过晶体的某一条特定的直线，而是一个方向。在晶体内的每一点，都可以作出一条光轴来。

方解石、石英这类晶体只有一个光轴方向，称为单轴晶体。自然界的大多数晶体（如云母等）有两个光轴方向，称为双轴晶体。另外，像 NaCl 这类属于立方晶系的晶体，是各向同性的，不产生双折射。

3. 主平面和主截面

在单轴晶体内，由 o 光线和光轴组成的面称为 o 主平面；由 e 光线和光轴组成的面称为 e 主平面。一般情形下，o 主平面与 e 主平面是不重合的。但是，实验和理论都指出，若光线

在由光轴和晶体表面法线组成的平面内入射，则 o 光和 e 光都在这个平面内，这个面也就是 o 光和 e 光的共同的主平面。这个由光轴和晶体表面法线组成的面称为晶体的主截面。在实用上，都有意选择入射面与主截面重合，以使所研究的双折射现象大为简化。对于方解石天然晶体来说，如果它的各棱都等长，通过组成钝隅的任一条棱（如图 6-8 中的 AB 或 AC 或 AD）的对角面就是它的主截面。自然，与这些面平行的平面也是它的主截面。方解石天然晶体的主截面总是与晶面交成一个角度为 $70^\circ 53'$ 及 $109^\circ 7'$ 的平行四边形。

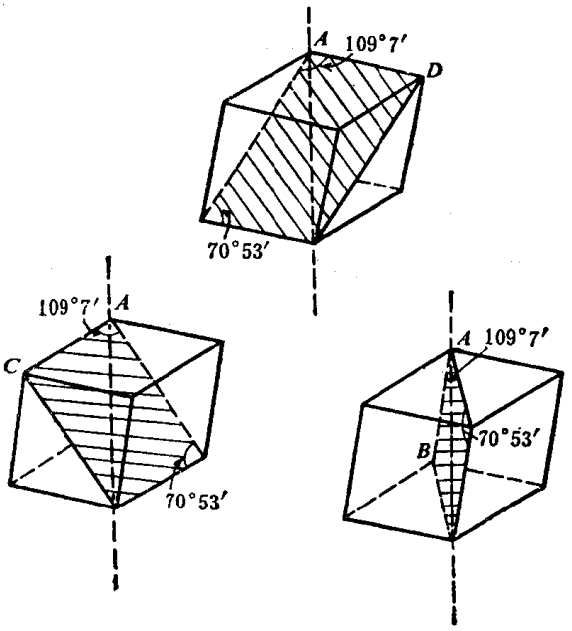


图6-8　方解石晶体的主截面

如果用检偏器来检验 o 光和 e 光的偏振状态，就会发现 o 光和 e 光都是线偏振光。o 光的光矢量与 o 主平面垂直，因而总是与光轴垂直的；e 光的光矢量在 e 主平面内，因而与光轴的夹角就随着传播方向的不同而改变。

二、双折射的电磁理论

上面讨论了光在单轴晶体中传播时的双折射现象，这里简单介绍一下双折射的电磁理论。

§1-1 中给出的麦克斯韦方程组是描述电磁场的普遍方程。但是当把它应用于晶体时，其中的物质方程式 $D=\varepsilon E$ 必须加以修改。由于晶体内部原子的规则排列，除了象 NaCl 这类属于立方晶系的晶体外，晶体一般在电学上表现出各向异性。因此电感应矢量 $\boldsymbol{D}$ 与电场强度 $\boldsymbol{E}$ 一般不同向。关于这一点可以用图 6-9 所示的各向异性的偶极子模型来说明。这个图中，带负电的球壳表示电子云，它被三对刚度不同的弹簧连结到质量很大的正电中心上。当受到电场作用时，由于电子云相对于正电中心移动，产生极化。将电场强度 $\boldsymbol{E}$ 按三对弹簧方向（亦即 x、y、z 轴）分解为三个分量，相应地得到极化强度 $\boldsymbol{P}$ 的三个分量为：

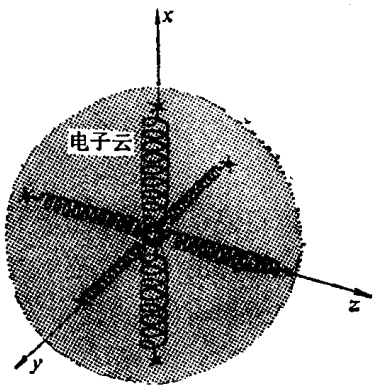


图6-9　各向异性的偶极子模型

$$\left.\begin{aligned} P_x &= \varepsilon_0 \chi_{11} E_x \\ P_y &= \varepsilon_0 \chi_{22} E_y \\ P_z &= \varepsilon_0 \chi_{33} E_z \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}5)$$

式中 ε_0 为真空电容率，χ_{11}、χ_{22}、χ_{33} 分别为三个方向上的极化率。上式可以写成：

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \chi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \qquad (6\text{-}6)$$

或

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \chi \boldsymbol{E} \qquad (6\text{-}6a)$$

式中 χ 称为极化张量：

$$\chi=\begin{bmatrix}\chi_{11} & 0 & 0\\ 0 & \chi_{22} & 0\\ 0 & 0 & \chi_{33}\end{bmatrix} \tag{6-7}$$

根据 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$，不难写出

$$\left.\begin{aligned}D_x&=\varepsilon_0(1+\chi_{11})E_x=\varepsilon_{11}E_x\\ D_y&=\varepsilon_0(1+\chi_{22})E_y=\varepsilon_{22}E_y\\ D_z&=\varepsilon_0(1+\chi_{33})E_z=\varepsilon_{33}E_z\end{aligned}\right\} \tag{6-8}$$

式中$\varepsilon_{11}=1+\chi_{11}$，$\varepsilon_{22}=1+\chi_{22}$，$\varepsilon_{33}=1+\chi_{33}$分别是三个方向上的介电系数。同样可以把式（6-8）写成张量形式

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E} \tag{6-9}$$

式中 ε 是介电张量

$$\varepsilon=\begin{bmatrix}\varepsilon_{11} & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_{22} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}\end{bmatrix} \tag{6-10}$$

如果三对弹簧的刚度相同，式（6-7）中的三个极化率相等

$$\chi_{11}=\chi_{22}=\chi_{33}$$

$\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 就同向，$\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 也同向，晶体表现出各向同性的光学性质，光在其中的传播就与在普通介质中传播一样。如果三对弹簧的刚度都不相同：

$$\chi_{11}\neq\chi_{22}\neq\chi_{33}$$

晶体将表现出双轴晶体的光学性质。双轴晶体的光学性质比较复杂，我们不拟讨论。如果三对弹簧中有两对刚度相同

$$\chi_{11}=\chi_{22}\neq\chi_{33}$$

则

$$\varepsilon_{11}=\varepsilon_{22}\neq\varepsilon_{33}$$

物质方程（6-9）可以写为

$$\begin{bmatrix}D_x\\ D_y\\ D_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{11} & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_{11} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_x\\ E_y\\ E_z\end{bmatrix} \tag{6-11}$$

这时晶体将表现出单轴晶体的光学性质。从式（6-11）可知，在单轴晶体中，$\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 一般不同向，只有当 $\boldsymbol{E}$ 平行或垂直于 z 轴时，$\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 才同向。

用单轴晶体的物质方程(6-11)代替各向同性介质的物质方程 $D=\varepsilon E$，求解麦克斯韦方程组，可以得到如下结论：

1．在单轴晶体中，光线方向与波面传播方向（法线方向）一般不重合。

设晶体中有一单色平面波，其波矢量为 $\boldsymbol{k}$。这束平面波的 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 将与因子 $\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)]$ 成正比，把它们代入麦克斯韦方程组（1-15）的第 3 式和第 4 式，可以得到：

$$\frac{1}{\omega}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}=\mu_0\boldsymbol{H}^{\ominus} \tag{6-12}$$

$$\frac{1}{\omega}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{D} \tag{6-13}$$

⊖ 这里假定介质是非磁的，即 $\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$，$\mu_0$是真空磁导率。

另外，代表能量传播方向即光线方向的波印亭矢量由式（1-64）决定

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$$

由以上三式所决定的 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 之间的关系如图 6-10 所示。$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 都与 $\boldsymbol{H}$ 垂直，因此是共面的。在这个面内，$\boldsymbol{k}$ 垂直于 $\boldsymbol{D}$，而 $\boldsymbol{S}$ 垂直于 $\boldsymbol{E}$。由于一般情形下 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 不同向，所以 $\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 也不同向。如图6-10的下半部所示的那样，当光线沿着 $\boldsymbol{S}$ 方向传播时，它们的波面是倾斜于这个方向的。设波矢量 $\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 之间的夹角为 α，则波面速度 v 与光线速度 u 之间有以下关系：

$$u=\frac{v}{\cos\alpha} \tag{6-14}$$

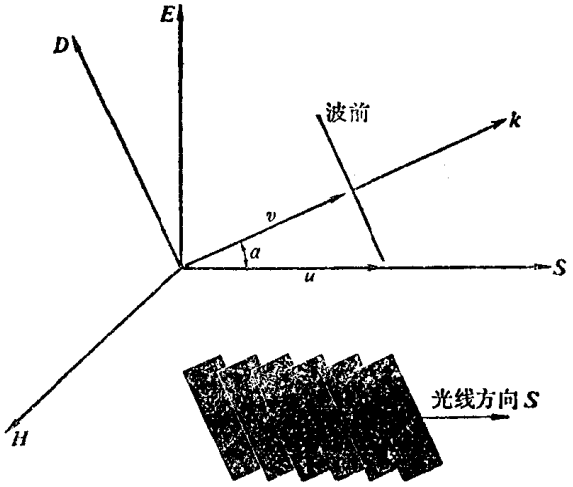


图6-10　$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{S}$和$\boldsymbol{H}$之间的关系

只有当 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$ 平行或垂直于 z 轴方向时，它们才同向。也只有在这两种情形下，光线速度才与波面速度方向相同，数值相等。

2. 当光沿着 z 轴传播时，不管电矢量（$\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{D}$）的方向如何，光的传播速度不变。这个速度等于

$$v_0=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{11}}} \tag{6-15}$$

因此 z 轴就是晶体的光轴，$\sqrt{\varepsilon_{11}}$ 就等于晶体的 o 折射率

$$n_0=\sqrt{\varepsilon_{11}} \tag{6-16}$$

3. 对于晶体内的其他方向，允许两支电矢量（$\boldsymbol{E}$）互相垂直的线偏振光以不同的光线速度传播。根据电磁理论，这两个光线速度的数值以及它们所对应的电矢量 $\boldsymbol{E}$ 的方向，可以形象地用光线椭球来解决。光线椭球的方程为：

$$\varepsilon_{11}x^2+\varepsilon_{22}y^2+\varepsilon_{33}z^2=c^2 \tag{6-17}$$

图 6-11 a 画出了这个光线椭球。在单轴晶体中，由于 $\varepsilon_{11}=\varepsilon_{22}$，这个光线椭球具有旋转对称性。不妨碍一般性，可以设光线 OS 是在 yz 平面内。设 OS 与 z 轴的夹角为 θ。通过椭球中心 O 作垂直于 OS 的平面，与椭球的截痕为一个椭圆（图6-11 b）。则该椭圆的两个主轴 OA 和 OB 的方向就是晶体内以 OS 为光线方向的两支线偏振光的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的方向，而 OA 和 OB 的长度等于这两支线偏振光的光线速度值。显然，不管 θ 角的大小如何，OB 的方向始终与 z 轴（光轴）垂直，OB 的长度恒为 $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{11}}}=\frac{c}{n_0}$。这说明这支光线的速度不随传播方向改变，这支光就是通常所说的 o 光。不难明白，o 光的波面应该是一个球面。再来分析 OA。OA 始终与 z 轴及 OS 共面，它的长度随 θ 而改变。这说明这支光的电矢量 $\boldsymbol{E}$ 始终在由光线和光轴所组成的平面内，光线速度随传

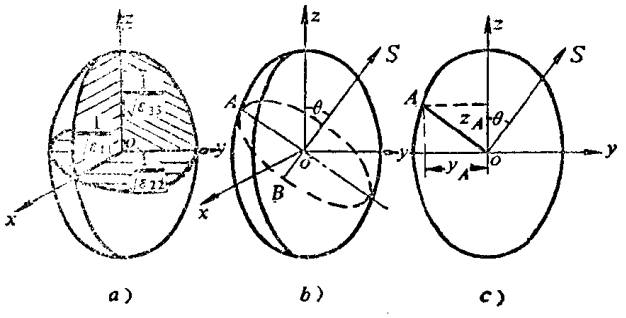


图6-11　光线椭球

播方向改变。这支光就是通常所说的 e 光。为了求出 e 光的光线速度值，亦即为了求出 OA 的长度，画出椭球和 yz 平面的截面，其截线也是椭圆（图6-11 c），方程为

$$\varepsilon_{11}y^2+\varepsilon_{33}z^2=c^2 \tag{6-18}$$

设 OA 在 y 轴和 z 轴上的投影分别为 y_A 和 z_A，则有

$$\frac{z_A}{OA}=\frac{z_A}{v_e}=\sin\theta \qquad \frac{y_A}{OA}=\frac{y_A}{v_e}=\cos\theta$$

代入式（6-18）得到

$$\frac{c^2}{v_e^2}=\varepsilon_{11}\cos^2\theta+\varepsilon_{33}\sin^2\theta$$

所以

$$v_e=\frac{c}{(\varepsilon_{11}\cos^2\theta+\varepsilon_{33}\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}} \tag{6-19}$$

当 e 光沿着垂直于光轴的方向传播时，光线速度与法线速度一致，其数值为

$$v_e(90^\circ)=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{33}}}$$

e 光沿着这个方向传播时的折射率叫做晶体的 e 折射率，用 n_e 表示。所以

$$n_e \quad \frac{c}{v_e(90^\circ)}=\sqrt{\varepsilon_{33}} \tag{6-20}$$

利用式（6-16）和式（6-20），把式（6-19）改写为

$$v_e=\frac{c}{(n_o^2\cos^2\theta+n_e^2\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}} \tag{6-19a}$$

把 v_e 和 θ 的关系画成图，将得到一个椭圆，也就是图 6-11 c 中的那个椭圆。由于旋转对称性，在空间将形成一个椭球，也就是图 6-11 a 中的那个椭球。这个椭球代表从晶体内一点发出的 e 光向各个方向传播时在同一时刻所到达的位置，也就是 e 光的波面。所以晶体内 e 光的波面是以光轴为对称轴的旋转椭球，而 o 光的波面是球面。

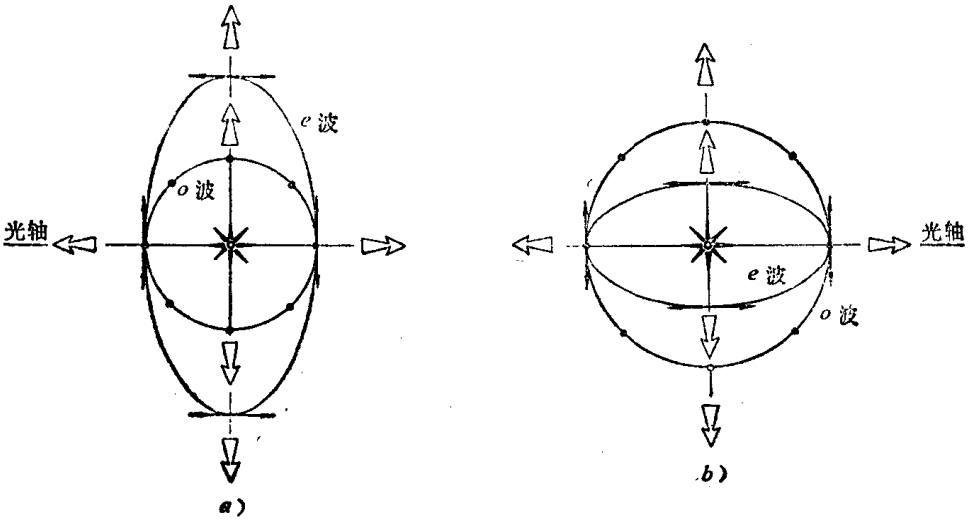


图6-12 晶体中的波面

a）负晶体 b）正晶体

依照 n_o 和 n_e 的相对大小，单轴晶体分为两类。一类晶体（如石英）的 $n_e>n_o$，因而 $v_e<v_o$，e 光的波面（椭球）在 o 光的波面（球面）之内，这类晶体叫正晶体；另一类晶体（如方解石）的 $n_e<n_o$，因而 $v_e>v_o$，e 光的波面在 o 光的波面之外，这类晶体叫负晶体。表 6-1 列出了几种正晶体和负晶体的 n_o 和 n_e。图 6-12 画出了正负晶体中的波面及电矢量E的方向。不管是正晶体还是负晶体，在光轴方向，v_o 与 v_e 都是相等的，所以椭球与球面在光轴方向相切。

从 o 光和 e 光的波面也不难看出，在晶体中 o 光的光线速度与波面（法线）速度相同；e 光的光线速度与波面（法线）速度一般不同，只有当 e 光沿着平行或垂直于光轴的方向传播时，二者才相同。这与前述第一点结论是一致的。

表6-1　几种单轴晶体的折射率

石英(正晶体)			KDP（负晶体）			方解石(负晶体)		
波　长（微米）	n_o	n_e	波　长（微米）	n_o	n_e	波　长（微米）	n_o	n_e
1.946	1.52184	1.53004	1.5	1.482	1.458	0.6563	1.6544	1.4846
0.5893	1.54424	1.55335	1.0	1.498	1.463	0.5893	1.6584	1.4864
0.340	1.56747	1.57737	0.5461	1.512	1.470	0.4047	1.6864	1.4969
0.185	1.65751	1.68988	0.3653	1.529	1.484			

三、用波面的概念说明双折射现象

知道了晶体中波面的形状以后，就可以利用惠更斯原理直观地说明双折射现象。举例来说，有一束平行光垂直入射到单轴晶体（如方解石）的表面上（图 6-13）。晶体的光轴在图面内，并与晶体构成某一角度，图中用点划线表示。根据惠更斯原理，波面上的任何一点都成为次波源。我们就在波到达晶体时选取 A、B 两点作为例子。过了一小段时间，从这些点射进晶体的次波的形状成了图中的样子。其中的圆代表 o 光的次波波面（球面）与图面的截线，椭圆代表 e 光的次波波面（椭球）与图面的截线。因此，o 光的新波面就是这些球面次波的公切面OO'，e 光的新波面就是这些椭球次波的公切面 EE'。这两个新波面互相平行，并且平行于原入射波面。次波源与切点的连线代表晶体中折射光的方向。在图中，AA'、BB'代表寻常光的方向，它和入射光方向相同；AA''、BB''代表非常光的方向，它与寻常光的方向不一致。这就是双折射现象。

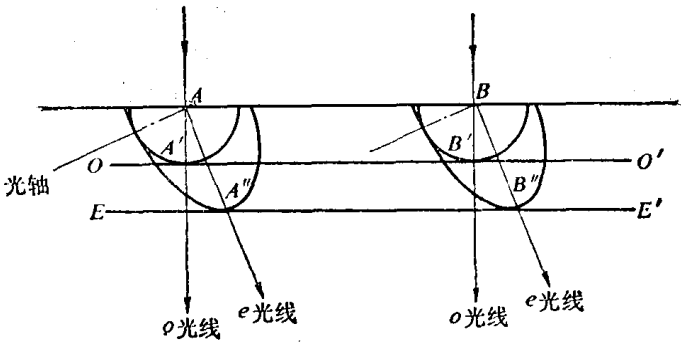


图6-13　光线垂直入射时的双折射现象

对于垂直入射的平行光，有两种很有实际意义的特殊情形。这两种情形如图 6-14 所示：图 a 表示晶体表面是切制得垂直于光轴的，光线沿光轴方向传播，不发生双折射现象；图 b 和 c 表示晶体表面是切制得平行于光轴的，折射光线也只有一束，但 e 光与 o 光的速度不同，透过晶片后，它们之间有一个固定的位相差。这种晶片的用处以后再讨论。

如果平行光是倾斜入射的，同样可以利用惠更斯原理找出它的两束折射光。如图 6-15 所

示，设光轴在入射面内，从晶面上光波最先到达的 A 点画出 o 波面（在图面内用圆表示），取它的半径 $AD=\frac{CB}{n_o}$，再画出 e 波面（在图面内用椭圆表示），使它和 o 波面在光轴方向相切。再从公共点 B 向圆和椭圆分别作切线，定出切点 D、F 及新波面 DB 和 FB 的位置，那么 AD 就是 o 光线的方向，AF 就是 e 光线的方向。

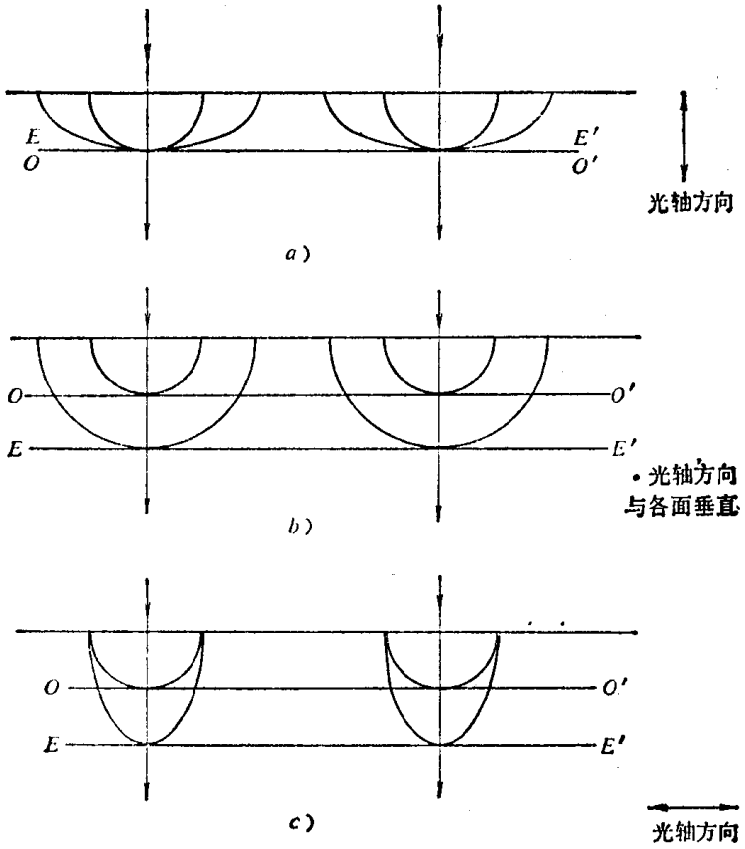


图6-14 正入射时晶体中的折射（晶体光轴与表面垂直或平行）

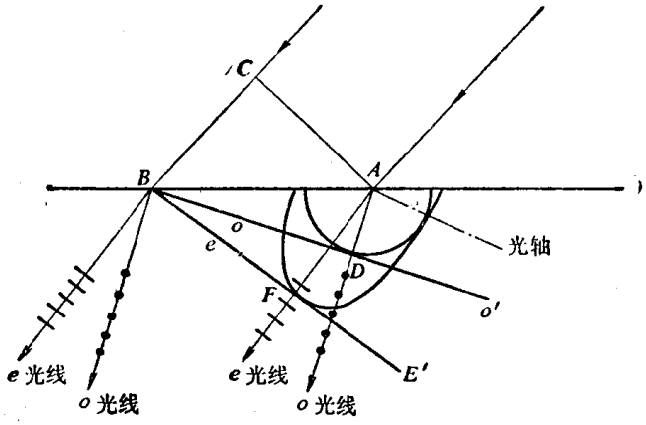


图6-15 光线在晶体主截面内倾斜入射时的双折射现象

§6-3 偏振棱镜和波片

一、偏振棱镜

利用晶体的双折射现象，可以制成各种偏振棱镜。这里只介绍比较重要的尼科耳(Nicol)棱镜、格兰（Glan）棱镜和渥拉斯登（Wollaston）棱镜。

1. 尼科耳棱镜

尼科耳棱镜的制法大致如图 6-16 所示。取一块长度约为宽度三倍的优质方解石晶体，将两端磨去约 3°，使其主截面的角度由 70°53′变为 68°，然后将晶体沿着垂直于主截面及两端面的平面$ABCD$切开，把切开的面磨成光学平面，再用加拿大树胶胶合起来，并将周围涂黑，就成了尼科耳棱镜。

加拿大树胶是一种各向同性的物质，它的折射率n_B比寻常光的折射率小，但比非常光的折射率要大。例如对于$\lambda=5893$埃的钠黄光来说，$n_o=1.6584$，$n_B=1.55$，$n_e'=1.5159$（n_e'是e光沿图 6-16 b 中的纵长方向传播时的折射率）。因此，o光和e光在胶合层反射的情况是不同的。对于o光来说，它是由光密介质（方解石）射到光疏介质（胶层），在这个条件下有可能发生全反射。发生全反射的临界角为

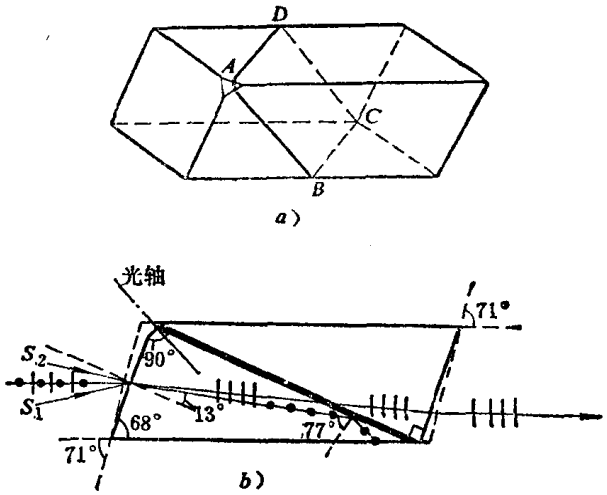


图6-16 尼科耳棱镜

图 b）中的虚线表示未磨之前的端面位置

$$i_c=\sin^{-1}\frac{n_B}{n_o}=\sin^{-1}\frac{1.55}{1.6584}\approx 69^\circ$$

当自然光沿棱镜的纵长方向入射时，入射角$i=22^\circ$，o光的折射角$\gamma\approx 13^\circ$，因此在胶层的入射角约为 77°，比临界角大，就发生全反射，被棱镜壁吸收。至于e光，由于$n_e'<n_B$，不发生全反射，可以透过胶层从棱镜的另一端射出。显然，所透出的偏振光的光矢量与入射面平行。

尼科耳棱镜的孔径角约为±14°。如图 6-16 b 所示，当入射光在S_1一侧超过 14°时，o光在胶层上的入射角就小于临界角，不发生全反射；当入射光在S_2一侧超过 14°时，由于e光的折射率增大而与o光同时发生全反射，结果没有光从棱镜射出。因此尼科耳棱镜不适用于高度会聚或发散的光束。再说，晶莹纯粹的方解石天然晶体都比较小，制成的尼科耳棱镜的有效使用截面都很小，而价格却十分昂贵。但是，由于它对可见光的透明度很高，并且能产生完善的线偏振光，所以尽管有上述缺点，对于可见的平行光束（特别是激光）来说，尼科耳棱镜仍然是一种比较优良的偏振器。

2. 格兰棱镜

尼科耳棱镜的出射光束与入射光束不在一条直线上，这在仪器中会带来不便。例如，当尼科耳棱镜作为检偏器绕光的传播方向旋转时，出射光束也在打圈子。格兰棱镜是为改进尼

科耳棱镜的这个缺点而设计的。图 6-17 是它的截面图。它也用方解石制成，不同之处是端面与底面垂直，光轴既平行于端面也平行于斜面，亦即与图面垂直。当光垂直于端面入射时，o 光和 e 光均不发生偏折，它们在斜面上的入射角就等于棱镜斜面与直角面的夹角 θ。选择 θ 角使得对于 o 光来说入射角大于临界角，发生全反射而被棱镜壁的涂层吸收；对于 e 光来说入射角小于临界角能够透过，从而射出一束线偏振光。

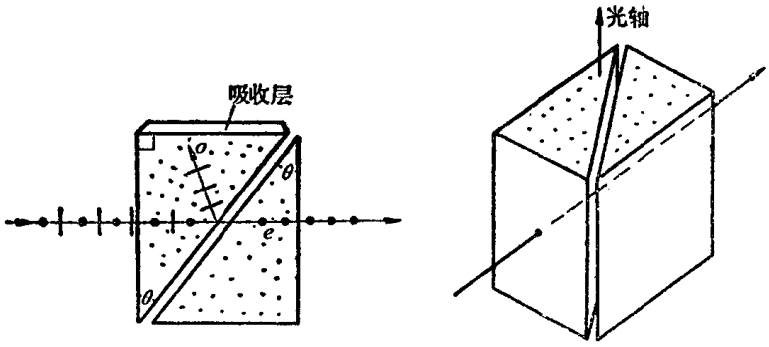


图6-17　格兰棱镜

组成格兰棱镜的两块直角棱镜之间可以用加拿大树胶胶合，这时 θ 角约为76°30′，孔径角约为±13°。用加拿大树胶胶合有两个缺点，一是加拿大胶对紫外光吸收很厉害，二是胶合层易被大功率的激光束所破坏。在这两种情形下往往用空气层来代替胶合层。这时 θ 角约为 38.5°，孔径角约为± 7.5°。这种棱镜能够透过波长短到 2100 埃的紫外光。

3. 渥拉斯登棱镜

渥拉斯登棱镜能产生两束互相分开的光矢量互相垂直的线偏振光。如图 6-18 所示，它是由两块直角方解石棱镜胶合成的。这两个直角棱镜的光轴互相垂直，又都平行于各自的表面。

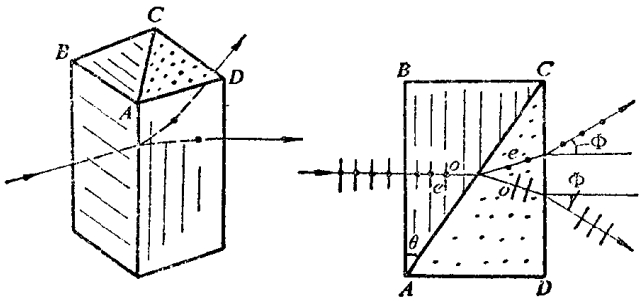


图6-18　渥拉斯登棱镜

当一束很细的自然光垂直地入射到 AB 面上时，由第一块棱镜产生的 o 光和 e 光不分开，但以不同的速度前进。由于第二块棱镜的光轴相对于第一块棱镜转过了 90°，因此在界面 AC 处，o 光与 e 光发生了转化。先看光矢量垂直于图面的这支偏振光。这支光在第一块棱镜里是 o 光，在第二块棱镜里却成了 e 光。由于方解石的 $n_o > n_e$，这支光在通过界面时是从光密介质进入光疏介质，因此将远离界面法线传播；再看光矢量平行于图面的这支光。它在第一块棱镜里是 e 光，在第二块棱镜里却成了 o 光。因此在通过界面时是从光疏介质进入光密介质，将靠近法线传播。这样，从渥拉斯登棱镜射出来的是两束夹有一定角度的光矢量互相垂直的线偏振光。不难证明，当棱镜顶角 θ 不很大时，这两支光差不多对称地分开，它们与出射面的法线的夹角 ϕ 为

$$\phi = \sin^{-1}[(n_o - n_e)\tan\theta] \tag{6-21}$$

制造渥拉斯登棱镜的材料也可以用水晶。水晶比方解石容易加工成完善的光学平面，但分出的两束光的夹角要小得多。

二、波片

如图 6-19 所示，由起偏器获得的线偏振光垂直入射到由单轴晶体制成的平面平行薄片上，晶片的光轴与其表面平行，设为 y 轴方向。正如上一节已经指出过的，这时入射的线偏

振光分解为 o 光和 e 光，它们的光矢量分别沿 x 轴和 y 轴。习惯上把两轴中的一个称为快轴，另一个称为慢轴，意即光矢量沿着快轴的那束光传播得快，光矢量沿着慢轴的那束光传播得慢。由于这两束光在晶片中的传播速度不同，经过晶片后两者之间产生了一定的位相差。设晶片厚度为 d，在晶片中 o 光的光程是 $n_o d$，e 光的光程是 $n_e d$，两者的光程差是

$$\Delta = |n_o - n_e| d \tag{6-22}$$

位相差是

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} |n_o - n_e| d \tag{6-23}$$

这种能使光矢量互相垂直的两支线偏振光产生相移的晶片叫作波片或移相片。根据§2-3的讨论知道，这样两束光矢量互相垂直且有一定位相差的线偏振光，叠加结果一般为椭圆偏振光，椭圆的形状、方位、旋向随位相差 δ 改变。下面介绍几种特殊的波片。

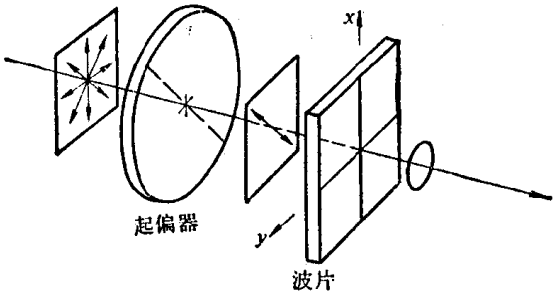


图6-19 波片

1. $\frac{1}{4}$波片

如果波片产生的光程差

$$\Delta = |n_o - n_e| d = \left(m + \frac{1}{4}\right)\lambda \tag{6-24}$$

式中 m 为整数，这样的波片叫作$\frac{1}{4}$波片。当入射的线偏振光的光矢量与波片的快慢轴成±45°角时，通过$\frac{1}{4}$波片后得到圆偏振光。

2. 半波片

如果波片产生的光程差

$$\Delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \tag{6-25}$$

式中 m 为整数，这样的波片叫半波片或$\frac{1}{2}$波片。圆偏振光通过半波片后仍为圆偏振光，但旋向改变（习题6.19）。线偏振光通过半波片后仍然是线偏振光，但光矢量的方向改变。设入射的线偏振光的光矢量与波片的快轴（或慢轴）的夹角为 α，通过晶片后光矢量向着快轴的方向转过了 2α 角（图6-20）。

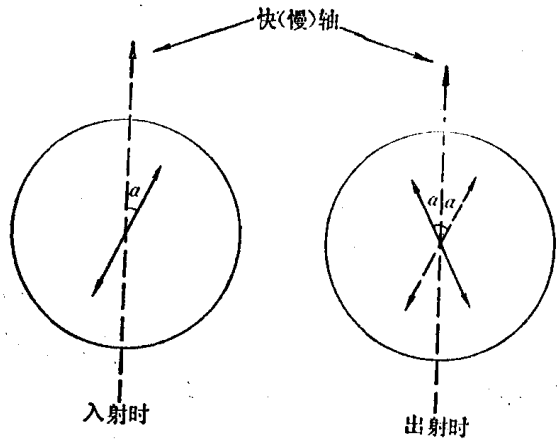


图6-20 线偏振光通过半波片后光矢量的转动

3. 全波片

如果波片产生的光程差

$$\Delta = m\lambda \tag{6-26}$$

式中 m 为整数，则称为全波片。

值得注意的是，所谓$\frac{1}{4}$波片、半波片或全波片都是针对某一特定的波长而言的。这是因为一个波片所产生的光程差 $|n_o-n_e|d$ 基本上是不随波长改变的，因此式（6-23）、（6-24）和（6-25）都只对某一特定的波长才成立。例如，若波片产生的光程差 $\Delta=5600$埃，那么对波长 5600 埃的光来说，它是全波片。这种波长的线偏振光通过以后仍为线偏振光。但对其他波长来说，它不是全波片，其他波长的线偏振光通过以后一般得到椭圆偏振光。

目前制造波片的材料多为云母。云母是双轴晶体，当光垂直入射时，也分解成光矢量互相垂直的两个分量。由于两个分量的折射率不同，产生一定的光程差。云母容易解理成很薄的薄片，而且厚度容易控制，所以用来制造波片是很适宜的。另外，经过拉伸的聚乙烯醇薄膜也可以用来制造波片。

三、补偿器

波片只能产生固定的位相差，补偿器可以产生连续改变的位相差。这里只讨论比较重要的巴比涅(Babinet) 补偿器。如图 6-21所示，它由两块方解石或石英制成的光楔组成。这两块光楔的光轴互相垂直，图中用若干线条和点子表示光轴。对照图 6-18 可见，巴比涅补偿器与渥拉斯登棱镜很相似。当光垂直入射时，分成光矢量互相垂直的两个分量。不过巴比涅补偿器的楔角很小（约 2°～3°），厚度也不大，所以这两个分量的传播方向基本上一致。设光在第一块光楔中通过的厚度为 d_1，在第二块光楔中通过的厚度为 d_2。光矢量沿第一块光楔的光轴方向的那个分量在第一块光楔中属于 e 光，在第二块光楔中却属于 o 光。它在补偿器中的总光程为$(n_ed_1+n_od_2)$；用同样方法可以得出，光矢量沿第二块光楔的光轴方向的那个分量在补偿器中的总光程为 $(n_od_1+n_ed_2)$。两个分量之间的位相差为

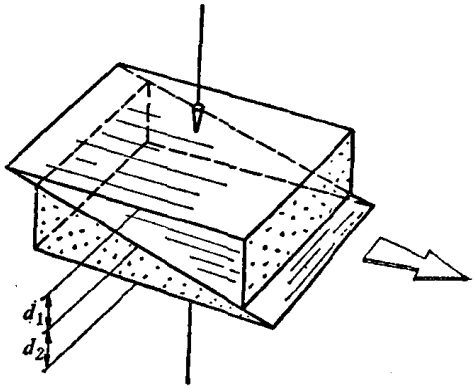


图6-21 巴比涅补偿器

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}[(n_ed_1+n_od_2)-(n_od_1+n_ed_2)]=\frac{2\pi}{\lambda}(n_e-n_o)(d_1-d_2) \tag{6-27}$$

当用测微丝杆推动第二块光楔沿箭头方向移动时，(d_1-d_2) 的值变小，δ 也随之改变。根据光楔移动的数值可以知道所产生的 δ 值。利用补偿器可以精确地测定波片产生的光程差。（习题 6.16）

§6-4 偏振的矩阵表示

一、偏振光的矩阵表示

在与光线垂直的平面上选定直角座标系 xoy，那么任一偏振光，不管是线偏振光、圆偏振光还是椭圆偏振光，都可以用光矢量在两个座标轴上的投影来表示

$$\left.\begin{aligned}E_x&=a_1\exp[\,i\,(\omega t+\alpha_1)]\\E_y&=a_2\exp[\,i\,(\omega t+\alpha_2)]\end{aligned}\right\} \tag{6-28}$$

或者省去共同的因子 $\exp(i\omega t)$，用复振幅表示为

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{E}_x&=a_1\exp(i\alpha_1)\\\widetilde{E}_y&=a_2\exp(i\alpha_2)\end{aligned}\right\} \tag{6-29}$$

这样一来，任一偏振光可以用由它的光矢量的两个分量构成的一列矩阵来表示，正像普通二维矢量可以用由它的两个直角分量构成的一列矩阵表示一样。这个一列矩阵称为琼斯(Jones)矢量，记作

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}\widetilde{E}_x\\ \widetilde{E}_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1e^{i\alpha_1}\\ a_2e^{i\alpha_2}\end{bmatrix} \tag{6-30}$$

这束偏振光的强度为

$$I=|\widetilde{E}_x|^2+|\widetilde{E}_y|^2=a_1^2+a_2^2$$

因为我们研究的往往是强度的相对变化，所以可以把表示偏振光的一列矩阵归一化，即用$\sqrt{a_1^2+a_2^2}$除式（6-30）中的每个分量，得到

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\begin{bmatrix}a_1e^{i\alpha_1}\\ a_2e^{i\alpha_2}\end{bmatrix} \tag{6-31}$$

有时我们关心的是两个分量的位相差和振幅比，因此也可以把式（6-30）中的两个分量的共同因子提到括号之外

$$\boldsymbol{E}=a_1e^{i\alpha_1}\begin{bmatrix}1\\ \dfrac{a_2}{a_1}\cdot e^{i(\alpha_2-\alpha_1)}\end{bmatrix}=a_1e^{i\alpha_1}\begin{bmatrix}1\\ \alpha e^{i\delta}\end{bmatrix} \tag{6-32}$$

式中 $\alpha=a_2/a_1$，$\delta=\alpha_2-\alpha_1$。

下面举几个琼斯矢量的例子。

1. 光矢量沿 x 轴振幅为 a 的线偏振光

$$\widetilde{E}_x=a \qquad \widetilde{E}_y=0$$

归一化的琼斯矢量为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{a}\begin{bmatrix}a\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

2. 光矢量与 x 轴成 θ 角振幅为 a 的线偏振光

$$\widetilde{E}_x=a\cos\theta \qquad \widetilde{E}_y=a\sin\theta$$

$$|\widetilde{E}_x|^2+|\widetilde{E}_y|^2=a^2$$

归一化的琼斯矢量为

$$\boldsymbol{E}_\theta=\frac{1}{a}\begin{bmatrix}a\cos\theta\\ a\sin\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}$$

3. 右旋圆偏振光

$$\widetilde{E}_x=a \qquad \widetilde{E}_y=ae^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$|\widetilde{E}_x|^2+|\widetilde{E}_y|^2=2a^2$$

归一化的琼斯矢量为

$$\boldsymbol{E}_r=\frac{1}{\sqrt{2}\,a}\begin{bmatrix}a\\ ae^{-i\frac{\pi}{2}}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -i\end{bmatrix}$$

用同样方法可以求出表示其他偏振态的琼斯矢量，结果列于表 6-2。

表6-2 一些偏振态的琼斯矢量

偏振态		琼斯矢量
线偏振光	光矢量沿 x 轴	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$
	光矢量沿 y 轴	$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
	光矢量与 x 轴成 $\pm 45°$ 角	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\\pm 1\end{bmatrix}$
	光矢量与 x 轴成 $\pm\theta$ 角	$\begin{bmatrix}\cos\theta\\\pm\sin\theta\end{bmatrix}$
圆偏振光	右旋	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}$
	左旋	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$

二、正交偏振

如果两线偏振光的光矢量互相垂直，就称它们是正交偏振的。设两个正交的线偏振光的琼斯矢量分别为

$$\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}A_1\\B_1\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}A_2\\B_2\end{bmatrix}$$

不难证明它们必定满足下列关系（习题 6.17）

$$\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2^*=0 \tag{6-33}$$

即

$$A_1A_2^*+B_1B_2^*=0 \tag{6-33 a}$$

式中星号“*”表示复共轭。如果 A_1、A_2、B_1、B_2 是实数，上式变成

$$A_1A_2+B_1B_2=0$$

这与互相垂直的普通二维矢量应当满足的条件是相同的。现在把正交偏振的意义推广到一般的偏振态。任何两个偏振态，只要它们的琼斯矢量满足式（6-33）或（6-33 a），就称它们是正交偏振的。例如左旋圆偏振光$\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$与右旋圆偏振光$\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}$是正交的；左旋椭圆偏振光$\begin{bmatrix}2\\i\end{bmatrix}$与右旋椭圆偏振光$\begin{bmatrix}1\\-2i\end{bmatrix}$也是正交偏振光（图 6-22）。

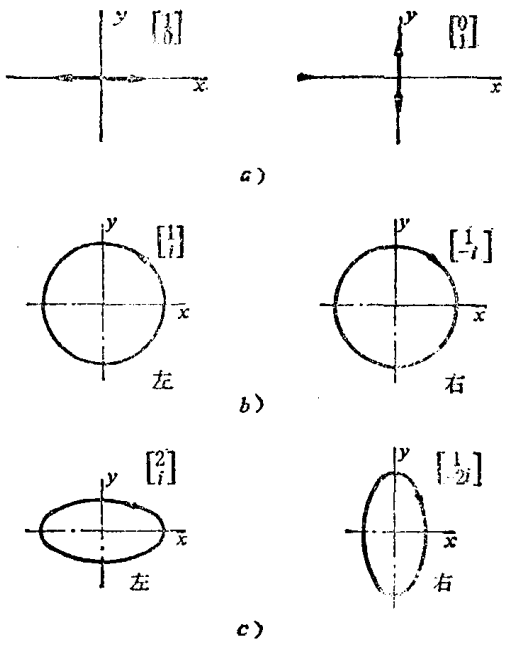


图6-22 几对正交偏振态

不难证明，任何偏振光可以分解为两个正交的偏振光。例如，可以分解为两个正交的线偏振光：

$$\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+B\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

也可以分解为两个正交的圆偏振光（即左旋圆偏振光和右旋圆偏振光）

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(A + \mathrm{i}B)\begin{bmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(A - \mathrm{i}B)\begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix}$$

三、偏振器件的矩阵表示

偏振光通过偏振器件后，它的偏振态会发生变化。如图 6-23 所示，入射光的偏振态用 $\boldsymbol{E}_{入} = \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}$ 表示，出射光的偏振态用 $\boldsymbol{E}_{出} = \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix}$ 表示。偏振器件 $\boldsymbol{G}$ 起着 $\boldsymbol{E}_{入}$ 与 $\boldsymbol{E}_{出}$ 之间的变换作用。不过，这种变换是线性的，也就是说出射光的两个分量 A_2、B_2 是入射光的两个分量 A_1 和 B_1 的线性组合

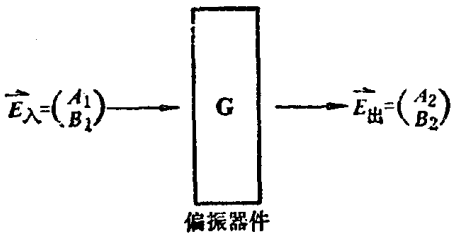


图6-23 偏振器件对偏振态的变换

$$\left.\begin{aligned} A_2 &= g_{11}A_1 + g_{12}B_1 \\ B_2 &= g_{21}A_1 + g_{22}B_1 \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}34)$$

这里 g_{11}、g_{12}、g_{21}、g_{22} 是复常数。式（6-34）可以写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} \qquad (6\text{-}35)$$

或写成

$$\boldsymbol{E}_{出} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{E}_{入} \qquad (6\text{-}35\,a)$$

式中 $\boldsymbol{G}$ 代表

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \qquad (6\text{-}36)$$

因此一个偏振器件的特性可以用矩阵 $\boldsymbol{G}$ 来描述。矩阵 $\boldsymbol{G}$ 叫作该器件的琼斯矩阵。下面举一个例子。

设 $\frac{1}{4}$ 波片的快慢轴分别沿 x 轴和 y 轴方向，它对任何偏振光的作用是使 y 轴分量相对于 x 轴分量产生 $\frac{\pi}{2}$ 的位相滞后。设入射光的琼斯矢量为 $\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}$，出射光的琼斯矢量为 $\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix}$，则

$$A_2 = A_1$$

$$B_2 = B_1 e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}B_1$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}$$

因此快慢轴分别沿 x、y 轴的 $\frac{1}{4}$ 波片的特性用下列矩阵表示

$$\boldsymbol{G}_{\frac{\lambda}{4}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{bmatrix}$$

如果入射光是光矢量沿 $+45^\circ$ 方向的线偏振光

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix}$$

所以出射光是左旋圆偏振光。这与上一节的结果一致。

用类似方法可以求出其他偏振器件的琼斯矩阵。一些重要器件的琼斯矩阵列于表 6-3。

如图 6-24 所示如果偏振光相继通过N个偏振器件，它们的琼斯矩阵为G_1、G_2、……G_N，则出射光的琼斯矢量为

$$E_{出} = G_N \cdots\cdots G_2 G_1 E_{入} \tag{6-37}$$

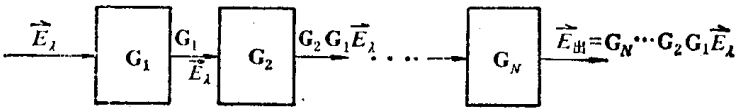


图6-24　偏振光相继通过N个偏振器件

表6-3　一些重要器件的琼斯矩阵

器件		琼斯矩阵
线偏振器	透光轴在x方向	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
	透光轴在y方向	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
	透光轴与x轴成$\pm 45°$角	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & 1 \end{bmatrix}$
	透光轴与x轴成θ角	$\begin{bmatrix} \cos^2\theta & \frac{1}{2}\sin 2\theta \\ \frac{1}{2}\sin 2\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$
$\frac{1}{4}$波片	快轴在x方向	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$
	快轴在y方向	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$
	快轴与x轴成$\pm 45°$角	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & \mp i \\ \mp i & 1 \end{bmatrix}$
一般波片（产生位相差为δ）	快轴在x方向	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\delta} \end{bmatrix}$
	快轴在y方向	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\delta} \end{bmatrix}$
	快轴与x轴成$\pm 45°$角	$\cos\frac{\delta}{2}\begin{bmatrix} 1 & \mp i\tan\frac{\delta}{2} \\ \mp i\tan\frac{\delta}{2} & 1 \end{bmatrix}$
半波片	快轴在x或y方向	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
	快轴与x轴成$\pm 45°$角	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
各向同性移相器（产生相移ϕ）		$\begin{bmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{bmatrix}$
圆偏振器①	左旋	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$
	右旋	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$

① 圆偏振器指能从自然光得到圆偏振光的器件。

四、琼斯矩阵的本征矢量

设某偏振器件的琼斯矩阵为 G，它的本征矢量 $E=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$ 是指满足下列条件的特殊矢量

$$GE=\eta E \tag{6-38}$$

或

$$\begin{bmatrix}g_{11} & g_{12}\\g_{21} & g_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=\eta\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix} \tag{6-38 a}$$

式中 η 是一个复数常数，称为本征值。

一个给定的琼斯矩阵的本征矢量在物理上代表一种特殊的偏振态，这种偏振态在通过该器件时保持偏振态不变。把本征值 η 写成

$$\eta=|\eta|e^{i\phi}$$

它表示本征矢量在通过该器件后振幅变成原来的 $|\eta|$ 倍，位相改变了 ϕ。

为求解本征矢量和相应的本征值，把方程（6-38 a）改写成

$$\begin{bmatrix}g_{11}-\eta & g_{12}\\g_{21} & g_{22}-\eta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=0 \tag{6-39}$$

从矩阵理论知道，要使 $\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$ 有非零解，必须有

$$\begin{vmatrix}g_{11}-\eta & g_{12}\\g_{21} & g_{22}-\eta\end{vmatrix}=0 \tag{6-40}$$

或

$$(g_{11}-\eta)(g_{22}-\eta)-g_{12}g_{21}=0 \tag{6-40 a}$$

这个方程叫特征方程。由它可以解出本征值 η，把解出的本征值 η 代入方程（6-38 a）可以求出相应的本征矢量。

例如，从表 6-3 查出快轴在 y 方向的 $\frac{1}{4}$ 波片的琼斯矩阵为

$$G=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -i\end{bmatrix}$$

根据式（6-38 a），它的本征矢量应满足

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=\eta\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix} \tag{6-41}$$

它的特征方程为

$$(1-\eta)(-i-\eta)=0$$

解出

$$\eta_1=1,\quad \eta_2=-i$$

把 η_1 代入方程（6-41）得到

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$$

即

$$A=A,\quad iB=B$$

所以必须有 $B=0$，$A\neq 0$，即与 $\eta_1=1$ 相应的本征矢量为 $\begin{bmatrix}A\\0\end{bmatrix}$。同样可以求出与 $\eta_2=-i$ 相应的本征矢量为 $\begin{bmatrix}0\\B\end{bmatrix}$。这些结果表明，光矢量与快、慢轴平行的线偏振光通过 $\frac{1}{4}$ 波片后仍然保持偏振态不变。

§6-5 偏振光的干涉

与普通光的干涉现象一样，偏振光的干涉现象也有着重要的应用。学好这一节对于理解许多偏振仪器的原理是很重要的。

偏振光的干涉现象可以分为两类：平行偏振光的干涉和会聚偏振光的干涉。下面分别加以讨论。

一、平行偏振光的干涉

如图 6-25 所示，让平行偏振光垂直通过放在两偏振片之间的平面平行晶片。设晶片的快慢轴分别沿 x 轴和 y 轴方向，起偏器的透光轴 P_1 与 X 轴的夹角为 α，检偏器的透光轴 P_2 与 x 轴的夹角 β。透过起偏器的线偏振光的振幅为 a，它在快慢轴上的投影分别为 $a\cos\alpha$ 和 $a\sin\alpha$，这两个分量通过晶片后的位相差为

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}|n_o - n_e|\, d$$

因此它们可以表示为

$$\widetilde{E}_x = a\cos\alpha$$
$$\widetilde{E}_y = a\sin\alpha \cdot e^{i\delta}$$

这样两束光合成的结果一般为椭圆偏振光。椭圆的形状、方位和旋向随位相差 δ 改变。但是几乎所有的接收器都是“偏振盲”，只对光的强度有反应，对光的偏振态的改变是探测不出来的。现在在晶片后面再加一个检偏器，情况就不同了。检偏器只让电矢量平行于透光轴 P_2 的分量透出来。$\widetilde{E}_x$和$\widetilde{E}_y$沿透光轴 P_2 的分量可以表示为

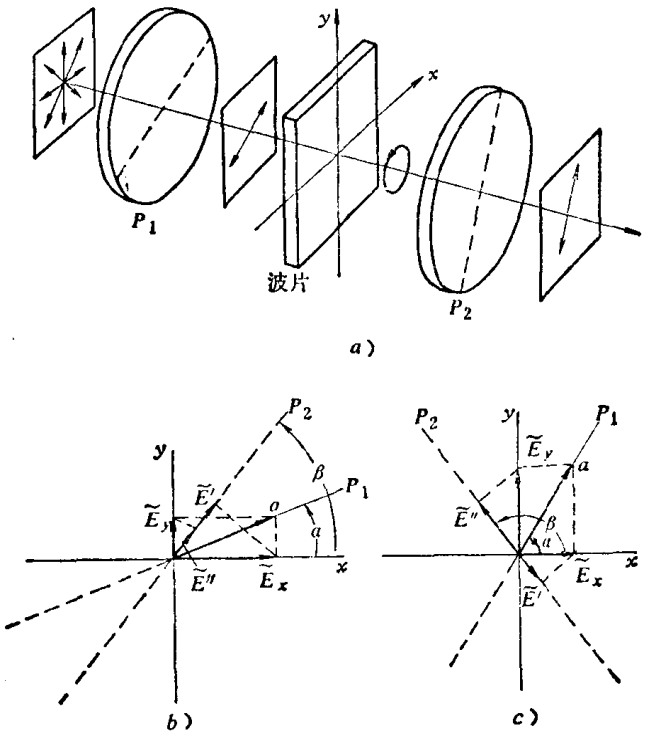


图6-25 平行偏振光的干涉

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{E}' &= \widetilde{E}_x\cos\beta = a\cos\alpha\cos\beta\\ \widetilde{E}'' &= \widetilde{E}_y\sin\beta = a\sin\alpha\sin\beta e^{i\delta}\end{aligned}\right\} \tag{6-42}$$

透出来的这两个分量的振动方向相同，位相差一定，因而发生干涉。根据式（2-19），干涉后的强度可用下式表示

$$I = a^2\cos^2\alpha\cos^2\beta + a^2\sin^2\alpha\sin^2\beta + 2a^2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta\cos\delta$$

将 $\cos\delta = 1 - 2\sin^2\frac{\delta}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\pi|n_o - n_e|\,d}{\lambda_0}$ 代入上式并化简后得到

$$I = a^2\cos^2(\alpha-\beta) - a^2\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin^2\frac{\pi|n_o - n_e|\,d}{\lambda_0} \tag{6-43}$$

现在来分析得到的结果。

1. 上式中的第一项与晶片的参数无关。它是在不存在晶片的条件下由马吕定律所决定的背景光。上式中的第二项代表了由于晶片各向异性（$n_o \neq n_e$）所引起的干涉效应。这一项与波长及晶片的厚度有关。当用单色光照明时，如果晶片的厚度不均匀，一般会出现明暗条纹。当用白光照明时，由于不同波长的光的透过率不同，透射光呈现彩色。

2. 当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$、$\beta=\frac{3\pi}{4}$，即两偏振器的透光轴正交、而且与晶片的快慢轴的夹角都是45°时，第一项等于零，第二项有极大值。这说明背景光消失了，条纹的对比度最好，或者当用白光照明时，这种情况下所得到的彩色是最鲜明的。在研究晶片时，一般总是使它与两偏振器的相对方位处于这种状态。这时透射光的强度为

$$I_{\perp}=a^2\sin^2\frac{\pi|n_o-n_e|d}{\lambda} \tag{6-44}$$

从这个公式可见，当用白光照明时，所观察到的颜色（干涉色）是由光程差 $|n_o-n_e|d$ 决定的，正象在牛顿环中所呈现的颜色是由空气膜的光学厚度决定的一样。反过来，从干涉色也可以决定光程差 $|n_o-n_e|d$。因此，对于任何单轴晶体，只要测出它的厚度 d 和双折射率 $|n_o-n_e|$ 中的任一个值，再将它夹在正交的两偏振器之间，观察它的干涉色，利用233页上的干涉色与光程差的对应表，便很容易求得另一个值。这个方法十分简便与灵敏，在地质工作中应用很广。

3. 如果将起偏器 P_1 固定在 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 处，让检偏器 P_2 从 $\beta=\frac{3}{4}\pi$ 的位置开始旋转，则第一项越来越大，第二项越来越小。这说明用白光照明时透射光的色彩越来越不鲜明。当转到与晶片的慢轴重合时（$\beta=\frac{\pi}{2}$），第二项变成零，只剩下与波长无关的第一项，透射光成为"白光"。在这种情形下，晶片内的两束线偏振光中，只有一束能够透过检偏器，不产生干涉效应。继续旋转，透射光呈现出跟以前互补的颜色。从图6-25的 b）、c）两图不难理解这个结果。当 P_2 在慢轴（y 轴）右侧时（图6-25 b），E_x 与 E_y 在 P_2 上的投影是同向的；当 P_2 在慢轴的左侧时（图6-25 c），E_x 与 E_y 在 P_2 上的投影是反向的。这相当于位相突然改变 π，因而干涉色也变成了它的互补色，就象在透射光中观察到的牛顿环与反射光中观察到的是互补的一样。当 P_2 转到与 P_1 平行时，色彩又变得很鲜明。从式（6-43）得到 P_1、P_2 平行时（$\alpha=\beta=\frac{\pi}{4}$）的强度为

$$I_{\parallel}=a^2-a^2\sin^2\frac{\pi|n_o-n_e|d}{\lambda}=a^2\cos^2\frac{\pi|n_o-n_e|d}{\lambda} \tag{6-45}$$

从式（6-44）和（6-45）容易得到

$$I_{\perp}+I_{\parallel}=a^2=I_0 \tag{6-46}$$

式中 I_0 为透过起偏器的光强。这个式子也说明了两种情形下的干涉色是互补的。

二、晶片在会聚光中的干涉条纹

前面都假定入射光与晶片是垂直的。如果让入射光逐渐倾斜，由于光程差的变化，干涉色也会变化，因而可以获得关于晶片的更丰富的资料。但是，最好是用会聚的偏振光来照射晶片，这样就能同时看到在所有入射角下的干涉现象。

观察晶片在会聚光下的干涉条纹的装置如图6-26所示。从光源 S 发出的白光被透镜 L_1

大致地变成平行光，通过起偏器 N_1 后被短焦距的透镜 L_2 高度会聚，经过晶片 C 后又有一个类似的透镜 L_3 使光束再变成平行，在检偏器 N_2 后用另一个透镜 L_4 使从晶片透出的平行光线会聚在毛玻璃 M 上（M 与透镜 L_3 的后焦面共轭）。

所观察到的干涉条纹显然与晶片的光轴方向有关，也与两偏振器的透光轴之间的夹角有关。我们只讨论最简单的情形，即单轴晶片的光轴与表面垂直而且两偏振器的透光轴正交的情形。

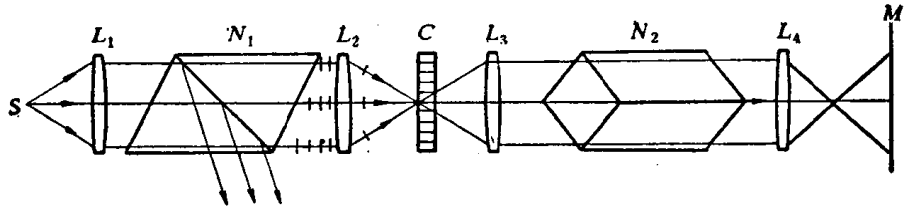


图6-26　研究晶片在会聚光下的干涉现象的装置

图 6-27 a 表示会聚光经过晶片时的详细情形。沿着光轴前进的那一条居中光线，不发生双折射。至于其他光线，因为与光轴夹一个角度，会发生双折射。从同一条入射光线分出的 o 光和 e 光在射出晶片后仍然是平行的，因此在透过检偏振器 N_2 后就会聚在屏 M 上的同一点。由于 o 光和 e 光在晶片中速度不同，在射出晶片后就有一定的位相差，而且由于都经检偏器 N_2 射出，在屏上会聚时振动方向也相同，所以发生干涉。从对称性的考虑容易知道，沿着以光轴为轴线的圆锥面入射的所有光线，例如图 6-27 b 中以 D 为顶点、顶角为 i 的圆锥面上的所有光线，在晶体中经过的距离相同，所分出的 o 光和 e 光的折射率差也相同，光程差都是相等的。干涉色是由光程差决定的，因此所有这些光线形成同一干涉色的条纹，它们在屏上的轨迹是一个圆，在图6-27 c 中用圆环 $BG'B'G$ 表示。随着光线倾角（入射角）的增大，在晶片中经过的距离增加，而且 o 光与 e 光的折射率差也增加，所以光程差随倾角非线性地上升，从中心向外干涉环将变得越来越密。这些干涉环称为等色线。另一方面还要注意到，参与干涉的这两支光的振幅是随着入射面相对于正交的两偏振器的透光轴的

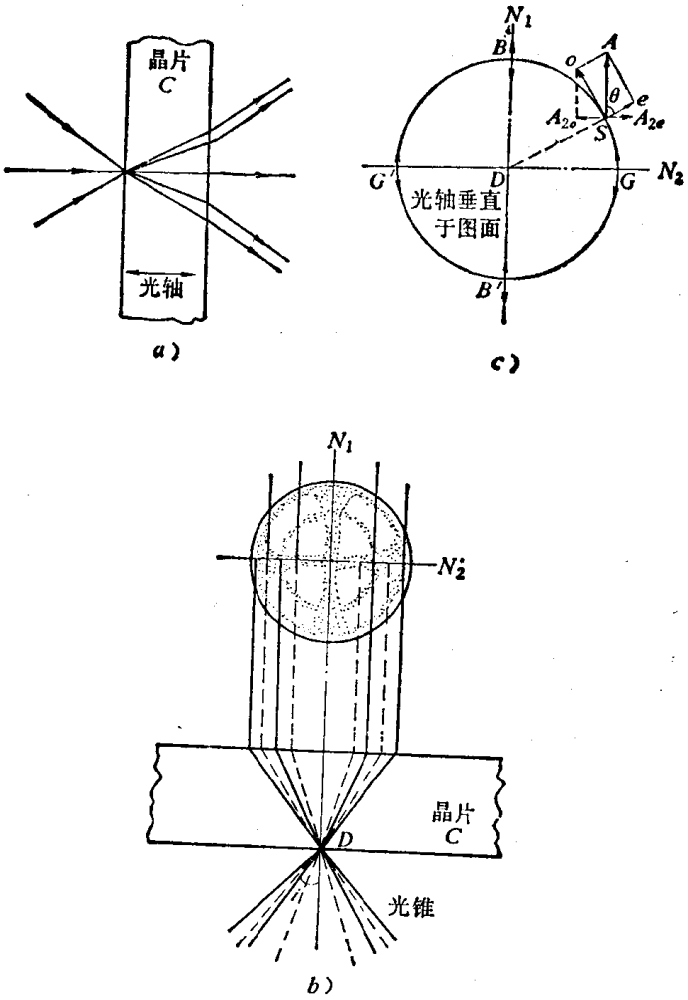


图6-27　会聚偏振光通过晶片的示意图

方位而改变的。这是由于在同一圆周上，由光线与光轴所构成的主平面的方向是逐点改变的。在图6-27 c 中，光轴与图面垂直，到达某一点的光线与光轴所构成的主平面就是通过该点沿半径方向并垂直于图面的平面。例如，在 S 点，DS 平面就是主平面；在 B 点，DB 平面就是主平面等等。参与干涉的 o 光和 e 光的振幅就随着主平面的方位而改变。我们来分析在 S 点的 o 光和 e 光的振幅。到达 S 点的光在透过起偏器 N_1 时，它的光矢量是沿着 N_1 的透光轴方向即 SA 方向的。在晶片中它分解为在主平面 DS 上的分量（e 光）和垂直于主平面的分量（o 光），然后经过检偏器 N_2 时再投影到 N_2 的透光轴上来。它们的大小为

$$A_{2e} = A_{2o} = A\sin\theta\cos\theta$$

式中 θ 为 DS 与起偏器 N_1 的透光轴之间的夹角。当入射面趋近于起偏器或检偏器的透光轴时，即 S 点趋近于 B 或 G、B'、G' 时，$\theta \to 0$ 或 $90°$，A_{2e} 和 A_{2o} 这两部分都趋于零。因此在干涉图样中会出现暗的十字形，如图 6-28 所示。通常把这十字形叫作十字刷。

正象平行偏振光的干涉那样，如果把检偏器的透光轴转到与起偏器平行，则干涉图样中的每一方面正好与上面所述的情形互补，即暗十字刷变成了亮十字刷，各圆环的颜色也变成了它的互补色。

如果晶片的光轴与表面不垂直，当晶片旋转时，十字刷的中心会打圈。如果把晶片切制得使它的表面与光轴平行，则干涉条纹是双曲线形的。另外，由于这种情形下的光程差比较大，应当用单色光照明。如果用白光照明则看不到干涉条纹。

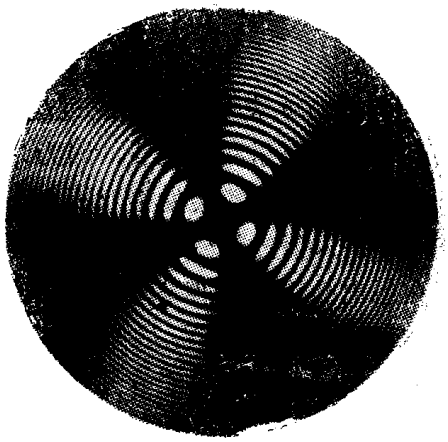


图6-28 会聚偏振光的干涉条纹

利用会聚光的干涉现象可以测定单轴晶体的正负，也可以测定晶体光轴的方位。

§6-6 旋光现象

当一束线偏振光通过某些物质时，光矢量的方向会随着传播的距离而逐渐转动。这种现象叫做旋光（图 6-29）。旋光现象最早是在 1811 年由阿喇果（Arago）在石英晶片中观察到的。稍后，比奥（Biot）在一些蒸汽和液态物质中也观察到同样的现象。

一、旋光现象的规律

实验表明，一定波长的线偏振光通过旋光物质时，光矢量转过的角度 θ 与在该物质中通过的距离 l 成正比

$$\theta = \alpha l \qquad (6\text{-}47)$$

比例系数 α 称为该物质的旋光本领，它等于在该物质中通过单位长度时光矢量所转过的角度。旋光本领会随波长改变，这种现象叫旋光色散。图 6-30 a 表示，由于旋光色散，紫光的光矢量转过的角度比红光大；图6-30 b 定量地画出了石英的旋光本领随波长的变化。

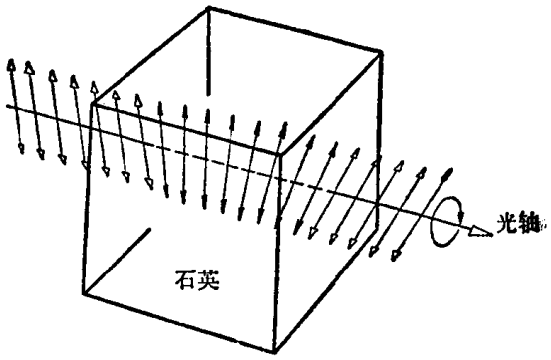


图6-29 旋光现象

对于旋光的溶液，光矢量转过的角度还与溶液的浓度成正比。因此，可以根据光矢量转过的角度来测定溶液的浓度。量糖计正是根据这个原理来测定糖溶液的浓度的。

实验还发现，具有旋光本领的物质有左旋与右旋之分。当对着光线观察时，使光矢量顺时针旋转的物质叫右旋光物质，逆时针旋转的物质叫左旋光物质。自然界存在的石英晶体既有右旋的，也有左旋的。它们的旋光本领在数值上相等，但方向相反。右旋石英与左旋石英的分子组成相同，都是 SiO_2，但分子的排列结构是镜象对称的。反映在晶体的外形上也是镜象对称的（图 6-31）。

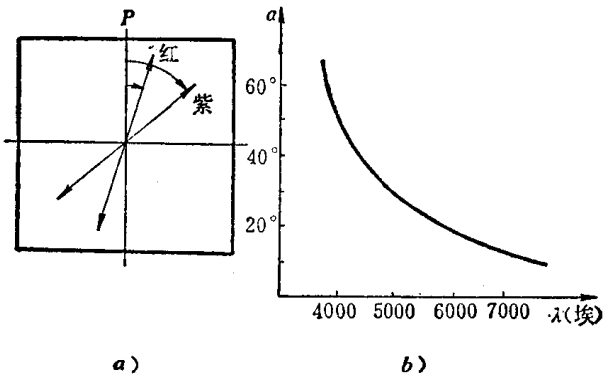


图6-30 石英的旋光本领随波长的变化

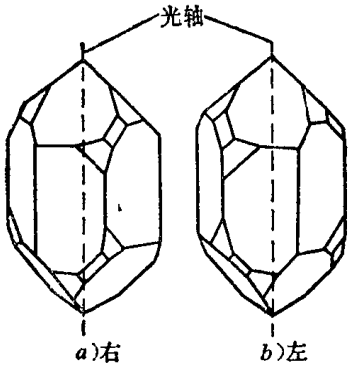


图6-31 右旋石英与左旋石英

由于旋光的存在，观察置于正交的两偏振片之间的石英晶片（光轴与表面垂直）在会聚光下的干涉图样时，图样的中心不是暗的，而几乎总是亮的。

二、旋光现象的解释

1825 年，菲涅耳对旋光现象提出了一种唯象的解释。根据他的假设，可以把进入晶片的线偏振光看作左旋圆偏振光和右旋圆偏振光的组合。设线偏振光刚入射到旋光物质上时光矢量是沿着水平方向的，利用 § 6-4 的矩阵方法可以把菲涅耳的假设表示为

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

菲涅耳进一步假定，左旋和右旋圆偏振光在旋光物质中的传播速度不同，因而折射率也不同。它们的波数分别为

$$\left.\begin{aligned} k_{左} &= \frac{n_{左}\cdot 2\pi}{\lambda} \\ k_{右} &= \frac{n_{右}\cdot 2\pi}{\lambda} \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}48)$$

式中 λ 为光在真空中的波长，$n_{左}$、$n_{右}$ 分别为左旋与右旋圆偏振光的折射率。两圆偏振光在晶体中沿着 z 轴传播时的电矢量可以表示为

$$\boldsymbol{E}_{左} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{i(k_{左}z-\omega t)}$$

$$\boldsymbol{E}_{右} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{i(k_{右}z-\omega t)}$$

在旋光物质中经过距离 d 后合成的复振幅为

$$E_{合}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}e^{ik_{右}d}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}e^{ik_{左}d}$$

$$=\frac{1}{2}e^{i(k_{右}+k_{左})d/2}\left\{\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}e^{i1/2(k_{右}-k_{左})d}+\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}e^{-i1/2(k_{右}-k_{左})d}\right\}$$

引入

$$\left.\begin{aligned}\psi&=\frac{1}{2}(k_{右}+k_{左})d\\ \theta&=\frac{1}{2}(k_{右}-k_{左})d\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}49)$$

合成复振幅可以表示为

$$E_{合}=e^{i\psi}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})\\ \frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})\end{bmatrix}=e^{i\psi}\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}$$

它代表光矢量与水平方向成 θ 角的线偏振光。这说明入射的线偏振光的光矢量转过了 θ 角。由式（6－48）与（6-49）得到

$$\theta=(n_{右}-n_{左})\frac{\pi d}{\lambda}\qquad(6\text{-}50)$$

如果左旋圆偏振光传播得快，$n_{左}<n_{右}$，则 $\theta>0$，即光矢量是向逆时针方向旋转的；如果右旋圆偏振光传播得快，$n_{右}<n_{左}$，则 $\theta<0$，即光矢量是向顺时针方向旋转的。这就说明了左旋光物质与右旋光物质的区别。而且式（6-50）还指出角度 θ 与 d 成正比，也说明了 θ 角与波长 λ 有关（旋光色散），这些都是与实验相符的。

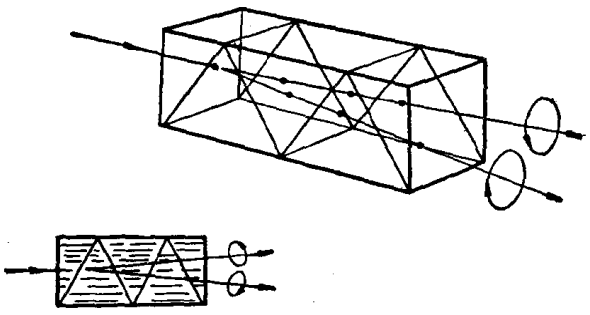


图6-32　菲涅耳的实验

为了证实在旋光物质中左旋圆偏振光和右旋圆偏振光的传播速度不同，菲涅耳把由左旋石英和右旋石英制成的三棱镜交替地胶合起来（图 6-32）。这些棱镜的光轴都平行于棱镜的底面。当光射到相邻棱镜的界面上时，例如从左旋棱镜射到右旋棱镜上时，对左旋圆偏振光来说，是从光疏介质射向光密介质；对右旋圆偏振光来说，是从光密介质射向光疏介质。正象§6-3 中讨论过的渥拉斯登棱镜能把 o 光和 e 光分开一样，菲涅耳制成的这种特殊棱镜也能把左旋圆偏振光和右旋圆偏振光分离开来。由于棱镜材料交替变换，致使两圆偏振光逐次向互相分离的方向折射，最后射出了分得很开的左旋圆偏振光和右旋圆偏振光，从而证实了菲涅耳的假设。

当然，菲涅耳的理论还不能说明现象的根本原因，不能回答为什么在旋光物质中两圆偏振光的传播速度不同。这个问题必须从分子结构去考虑。量子力学理论指出，在研究光与物质的相互作用时，如果不仅仅考虑分子的电矩对入射光的反作用，而且还考虑到分子有一定的大小和磁矩等次要作用，入射光波的光矢量的旋转就是必然的。

三、科纽棱镜

在光谱仪器中，石英晶体是很好的棱镜材料。但是，由于旋光性的存在，会影响光谱的纯度。例如，钠黄光通过由整块石英晶体制成的60°棱镜（光轴与底面平行）后，可观察到左旋部分与右旋部分之间有27秒的夹角（图6-33 *a*）。因此使一根谱线分裂成两根，这是不容许的。为了避免旋光性的影响，分别用左旋石英和右旋石英做成30°棱镜，然后把它们胶合成60°棱镜，如图6-33 *b* 所示。由于右旋部分和左旋部分速度的交换，在最小偏向角的位置上，两部分光以相同的角度从棱镜中射出。在光谱棱镜中使用的60°石英棱镜差不多都属于这种型式。这种棱镜叫科纽棱镜。

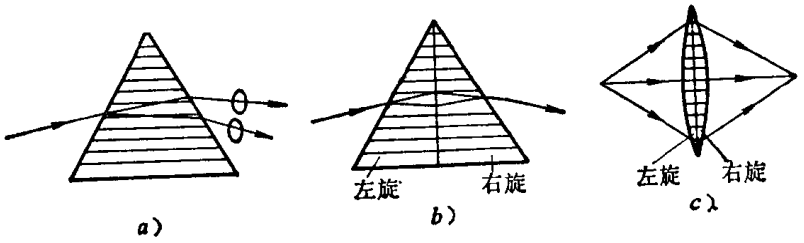


图 6-33

a）石英棱镜　*b*）科纽棱镜　*c*）石英透镜

有时，用在精密光学仪器中的石英透镜也用上述原理构成。这类透镜由两个平凸透镜组成，一半是右旋石英制的，另一半是左旋石英制的（图6-33 *c*）。

§6-7 磁光效应

在强磁场的作用下，物质的光学性质会发生改变，这就是所谓磁光效应。下面着重讨论磁光效应中比较重要的法拉第效应和康顿-莫顿（Cotton-Mouton）效应。

一、法拉第效应

1846年，法拉第发现在磁场的作用下，本来不具有旋光性的物质也产生了旋光性，即能使光矢量发生旋转。这种现象叫做磁致旋光效应或法拉第效应。这个发现在物理学史上有着重要的意义，这是光学过程与电磁过程有密切联系的最早的证据。

利用图6-34所示的装置就可以观察法拉第效应。将一根玻璃棒的两端抛光，放进螺线管的磁场中，再加上起偏器 P_1 和检偏器 P_2，让光束通过起偏器后顺着磁场方向通过玻璃棒，光矢量的方向就会旋转。旋转的角度可以用检偏器来测量。

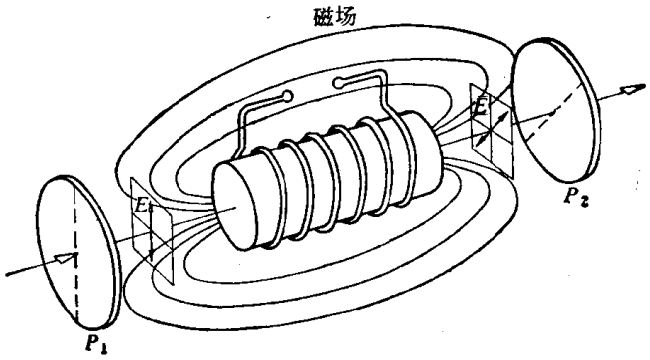


图6-34　法拉第效应

实验表明，光矢量旋转的角度 θ 与光在物质中通过的距离 l 及磁感应强度 B 成正比

$$\theta = VBl \tag{6-51}$$

式中 V 是物质的特性常数，叫维尔德（Verdet）常数。一些物质的维尔德常数列于表6-4。固体和液体的维尔德常数的数量级一般为0.01分/高斯·厘米，但稀土玻璃的维尔德常数要大得多，约为0.13～0.27分/高斯·厘米，具体数值随玻璃中所含的稀土元素的种类而异。如果图

6-34 中的玻璃棒是由稀土玻璃制成的，并设它的长度为 10 厘米，磁感应强度的平均值为 10，高斯，则光矢量能旋转 22°～45°。

表6-4 一些物质的维尔德常数

物　　质	维尔德常数(分/高斯·厘米)
冕玻璃	0.015～0.025
火石玻璃	0.030～0.050
稀土玻璃	0.13～0.27
氯化钠	0.036
金刚石	0.012
水	0.013

磁致旋光的方向与磁场方向有关，而与光的传播方向无关，这与上一节讨论过的物质的固有的旋光不同，固有旋光的方向与传播方向有关。以顺着磁场观察的人为标准，绝大多数物质的磁致旋光的方向都是右旋的（顺时针旋转），这种物质叫正旋体。但是，也有些物质是负旋体。

磁致旋光的方向与光的传播方向无关这个特点被法拉第巧妙地用来加强磁光效应。如图 6-35 所示，在样品的两端面除了进口和出口的地方外都镀上铝，用多次反射来增加光在物质中的路程 l，从而增大旋光的角度。

磁致旋光在科学技术中有着广泛的应用，下面举几个例子。

1. 利用旋光方向与光的传播方向无关的特点，可以制成单通光闸。例如在图 6-34 所示的装置中，让偏振片 P_1 与 P_2 的透光轴成 45° 角，而且从 P_1 转到 P_2 是顺时针的。再让磁致旋光的角度恰好等于 45°，方向也是顺时针的。从图 6-36 不难明白，对于从 P_1 传播到 P_2 的光，光矢量沿顺时针方向旋转 45° 角后恰好与 P_2 的透光轴一致，能够通过；对于从 P_2 传播到 P_1 的光，光矢量沿顺时针方向旋转 45° 角后恰好与 P_1 的透光轴垂直，不能通过。这样就起到了单通光闸的作用。

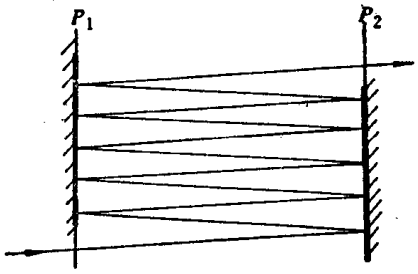


图6-35 利用多次反射来加强磁致旋光效应

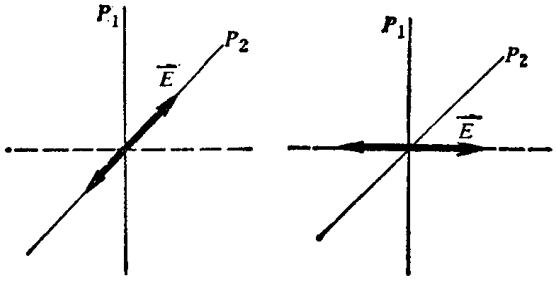


图6-36 说明单通光闸原理的示意图

2. 由于磁致旋光的转角与磁场成正比，因而与螺线管中的电流成正比，我们可以用改变电流的方法来控制光矢量的转动，以便在偏振仪器中实现自动测量。例如，图 6-37 是量糖计的光路图。图中 N_1、N_2 是起偏器和检偏器，K 是待测的糖溶液，F 就是利用法拉第效应使光矢量转动的装置，叫做法拉第盒。它由螺线管和放在螺线管中的维尔德常数大的物质组成。在普通的量糖计中是没有法拉第盒这个装置的，它依靠检偏器 N_2 的转动来测量光矢量经过糖溶液后的转角，亦即在未放糖溶液时先使 N_2 处在消光位置，放入糖溶液后转动 N_2 再次达到消光，两次消光之间检偏器 N_2 转动的角度就等于光经过糖溶液后光矢量的转角。

在图 6-37 所示的量糖计中，检偏器 N_2 是固定的，它的透光轴始终与起偏器 N_1 正交。线偏振光通过糖溶液后光矢量发生转动，不再消光。法拉第盒又使光矢量向相反方向转过相等的角度，再次达到消光。测出消光时螺线管中的电流，就可以知道转角。用这种方法完全省去了机械转动机构，而且把转角的测量转变为电学量的测量，很容易实现自动测量。

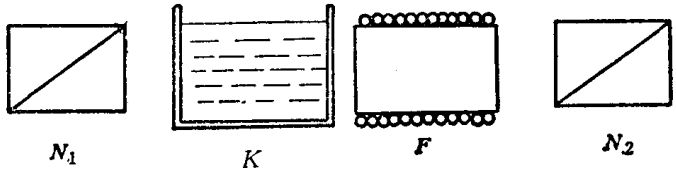


图6-37 量糖计

3. 制造调制器。在图 6-34 的装置中，让起偏器与检偏器的相对位置固定，按预定的方式改变螺线管中的电流，就可以改变入射到检偏器上的光矢量的方位，因而使射出的光强按照马吕定律发生相应的变化。这就是所谓光调制㊀。用于光调制的装置称为调制器。调制器是激光通讯中非常重要的装置（参阅 § 8-12）。

二、康顿-莫顿效应

如果把强磁场作用到透明的液体介质上，液体的分子会在磁场的感应下形成一定的规则排列，因而表现出像单轴晶体那样的双折射性质。这种效应叫康顿-莫顿效应。当光沿着垂直于磁场的方向通过液体时就分解为两束线偏振光，一束线偏振光的光矢量平行于磁场，另一束线偏振光的光矢量垂直于磁场。两束线偏振光的折射率之差正比于磁场强度的平方。这种效应与下一节将要讨论的克尔（Kerr）效应是类似的。

§ 6-8 电光效应

在强电场的作用下，本来是各向同性的介质也可以产生双折射现象，而本来有双折射性质的晶体，它的双折射性质也要发生变化，这就是所谓电光效应。

一、普克尔效应（一级电光效应）

让我们先看一个实验。在图 6-38 所示的装置中，P_1 为起偏器，P_2 为检偏器，两者透光轴互相正交，中间放一块 KDP（磷酸二氢钾）晶体。KDP 是单轴晶体，未加工前的外形如图 6-39 所示。两端四棱锥的顶点的联线就是光轴方向。晶体切成长方体，两个端面与光轴垂直，端面的两边分别跟两个偏振器的透光轴平行。从起偏振器透出的线偏振光沿 KDP

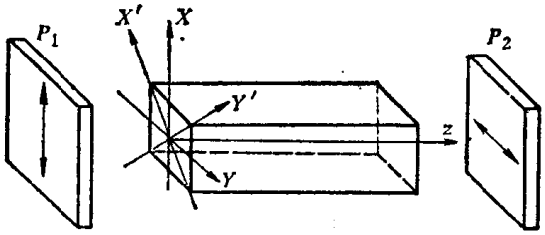


图6-38 KDP 晶体的普克尔效应

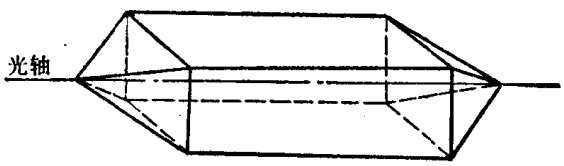


图6-39 KDP 晶体的外形

㊀ 凡使光波的振幅、频率、位相三个参量中的任何一个量随外加讯号而变化，统称为光调制。使光的振幅变化称为调幅或调强；使光的频率变化称为调频；使光的位相变化称为调相。推广之，使光波的传播方向或偏振态随外加讯号变化也叫做光调制。

的光轴（z 轴）通过，因此从晶体出来仍为线偏振光，而且它的光矢量的方向不变，与检偏器的透光轴垂直，不能通过检偏器，视场是暗的。

现在在晶体两端面镀一层透明的电极，并在两极间加一个强电场（电压 4000 伏左右），我们将发现检偏器的视场立即变亮。改变外电场的强度，透过检偏器的光强也随着变化。这是由于在外电场的作用下，KDP 晶体的光学性质发生改变，由单轴转化为双轴晶体，原来的光轴（z 轴）不再是光轴了。实验和晶体光学的理论都指出，这时在 XY 平面上存在两个互成 90° 的主振动方向，它们就是正方形的对角线方向（图 6-38 中的 X' 轴和 Y' 轴）。当光矢量平行于 X' 轴时，传播速度为 v'，相应的主折射率为 n'；当光矢量方向平行于 Y' 轴时，传播速度为 v''，相应的主折射率为 n''。（$n'-n''$）称为感生折射率差，它与电场强度 E 成正比

$$n'-n''=n_o^3\gamma E \tag{6-52}$$

式中 n_o 为 KDP 晶体的 o 折射率，γ 是一个常数，称为电光系数。

当存在电场时，由于从起偏器 N_1 射出的线偏振光的光矢量方向与主振动方向构成 45° 角，就象在 § 6-4 中所讲的那样，它将分解为两束振幅相等的线偏振光，一束的光矢量平行于 X' 轴，另一束的光矢量平行于 Y' 轴，它们在晶体中传播方向虽然相同，但速度不同，所以从长度为 l 的晶体中出来后，将有一个固定的位相差 δ

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}(n'-n'')\,l=\frac{2\pi}{\lambda}\,n_o^3\gamma lE \tag{6-53}$$

式中 λ 是光在真空中的波长。考虑到电场与电压的关系，即 $E=\frac{V}{l}$，可得

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}\,n_o^3\gamma V \tag{6-54}$$

在一般情况下，这两个分量合成为一束椭圆偏振光。根据公式（6-44），从检偏器透射出来的光强为

$$I=I_0\sin^2\frac{\delta}{2}=I_0\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda}\,n_o^3\gamma V\right) \tag{6-55}$$

这里，I_0 为射到晶体上的光强。以透射光强的相对值 I/I_0 为纵座标，以位相差 δ（或电压 V）为横座标，可以把强度公式（6-55）用图 6-40 表示出来。这条曲线称为晶体的透射率曲线。它定量地反映了透射率随外加电压的变化。

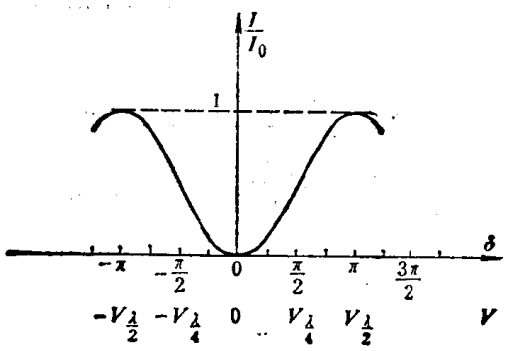


图6-40 晶体的透射率曲线

公式（6-52）中的电光系数 γ 是衡量晶体材料电光性能优劣的一个重要参数。不过，在实际工作中常常使用另一个叫做半波电压的参数。半波电压是指为了达到 π 位相差所需的外加电压，用 $V_{\frac{\lambda}{2}}$ 表示。$V_{\frac{\lambda}{2}}$ 与 γ 成反比，$V_{\frac{\lambda}{2}}$ 越小越好。一些晶体的半波电压和电光系数列于表 6-5。

在上述图 6-38 所示的装置中，外加电场的方向与光的传播方向平行，称为纵向电光效应。如果电场方向与光的传播方向垂直，称为横向电光效应。还是以 KDP 晶体为例，如图6-41

表6-5 一些晶体材料的电光系数①和半波电压

晶　　体	γ (10^{-12}米/伏)	n_o	$V_{\frac{\lambda}{2}}$ (千伏)
$ADP(NH_4H_2PO_4)$	8.5	1.52	9.2
$KDP(KH_2PO_4)$	10.6	1.51	7.6
$KDA(KH_2AsO_4)$	~13.0	1.57	~6.2
$KD^*P(KD_2PO_4)$	~23.3	1.52	~3.4

① 在室温下测得，对应波长为 $\lambda=5461$埃。

所示，让 KDP 晶体的 z 轴与光的传播方向垂直，并重新加工晶体，使它的正方形截面的两边分别与 x' 轴和 y' 轴平行，让 x' 轴与光的传播方向平行，电场加在 z 轴方向。实验和晶体光学的理论都指出，在这种情形下，在 $y'z$ 平面内存在两个主振动方向，一个沿着 z 轴方向，另一个沿着 y' 轴方向，而且它们的主折射率差也与电场强度成正比

$$n'-n''=n_0^3\gamma' E \tag{6-56}$$

因为现在的电光系数与纵向时不同，故式中用 γ' 表示。通过起偏器 P_1 入射到晶体上的线偏振光的光矢量与主振动方向成 45° 角，那么与纵向电光效应类似，入射的线偏振光分解为两个分量，它们经过晶体后的位相差 δ 为

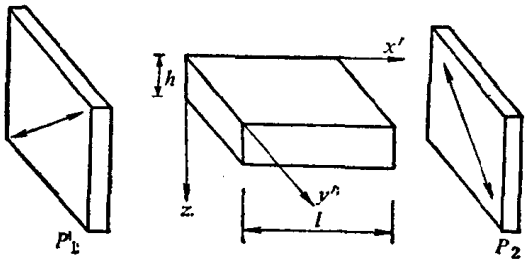


图6-41 KDP 晶体的横向电光效应

$$\delta=(n'-n'')\,l=\frac{2\pi}{\lambda}\,n_0^3\gamma' lE \tag{6-57}$$

如果晶体的厚度为 h，则电场强度与电压的关系为 $E=\frac{V}{h}$，代入式（6-57）得到

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}\,n_0^3\gamma'\left(\frac{l}{h}\right)V \tag{6-58}$$

上式说明，位相差 δ 仍与电压成正比，另外还与因子 l/h 有关。将材料做成扁长形，使 $l/h>1$，就可以大大降低样品的半波电压，这是横向电光效应的一个重要优点。

上面讲的 KDP 晶体以及 ADP（磷酸二氢氨）、SBN（铌酸锶钡）、钽酸锂（$LiTaO_3$）、铌酸锂（$LiNbO_3$）、砷化镓（GaAs）、氯化亚铜（CuCl）等晶体，在外电场作用下的感生折射率差都与电场强度的一次方成正比，这种效应称为普克尔（Pockels）效应或一级电光效应。晶体光学的理论指出，只有那些不具有对称中心的晶体才能产生一级电光效应。具有对称中心的晶体和一些液体，如硝基苯，在外电场作用下的感生折射率差与电场强度的平方成正比，称为克尔（Kerr）效应或二级电光效应。

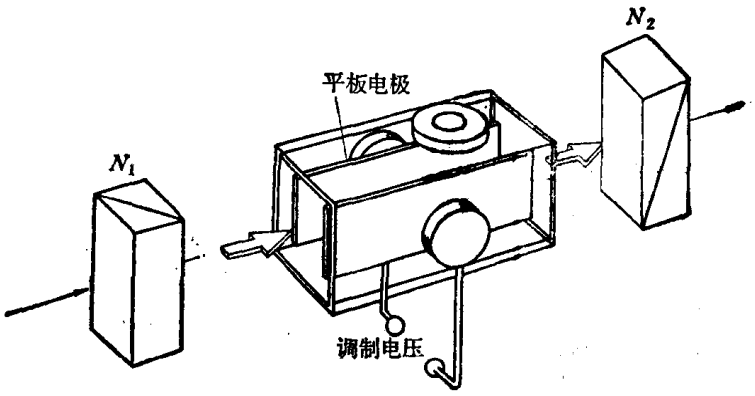


图6-42 克尔效应的实验装置

二、克尔效应（二级电光效应）

图 6-42 是观察克尔效应的典型装置，这种装置中的电光介质大多是硝基苯（$C_6H_5NO_2$）和硝基甲苯（$C_6H_7NO_2$）。在两平行平板之间加上高电压，在电场作用下，由于分子的规则排列，这些介质就表现出象单轴晶体那样的光学性质，光轴的方向就与电场的方向对应。当线偏振光沿着与电场垂直的方向通过介质时，分解为两束线偏振光。一束的光矢量沿着电场方向，另一束的光矢量与电场垂直。两束线偏振光的折射率之差 Δn 与电场强度 E 的平方成正比：

$$\Delta n = n_{\parallel} - n_{\perp} = \kappa\lambda E^2 \tag{6-59}$$

式中 λ 是光在真空中的波长，κ 叫做该物质的克尔常数。表 6-6 列出了一些液体的克尔常数。

表6-6　克尔常数（20℃，$\lambda = 5893$ 埃）

物质名称	κ（10^{-12}厘米·伏$^{-2}$）	物质名称	κ（10^{-12}厘米·伏$^{-2}$）
C_6H_6	0.7	H_2O	5.2
CS_2	3.5	$C_5H_7NO_2$	137
$CHCl_3$	-3.9	$C_6H_5NO_2$	244

这样两束折射率不同的线偏振光通过介质后产生的光程差为：

$$\Delta = \Delta n \cdot l = \lambda\kappa E^2 l$$

式中 l 为光在介质中经过的长度。若两平行板之间的距离为 h，所加电压为 V，则 $E = \frac{V}{h}$，于是位相差为

$$\delta = 2\pi\frac{\Delta}{\lambda} = 2\pi\kappa l V^2/h^2 \tag{6-60}$$

如果检偏器与起偏器正交，而且与电场方向成45°角，透射光的相对强度为：

$$I/I_0 = \sin^2\frac{\delta}{2} = \sin^2(\pi\kappa l V^2/h^2) \tag{6-61}$$

可见透射光的强度随所加的电压而改变。

从表 6-6 可见，硝基苯的克尔常数比其他液体要高得多。所以，虽然它有剧毒且易爆炸，在克尔效应中还是广泛地用它作电光介质。如果盛硝基苯的克尔盒的 $h \approx 1$ 厘米，$l \approx$ 几厘米，从式（6-60）可以估计出半波电压约为 3 万伏，比普克耳效应中的半波电压要高 5～10倍。

三、电光效应的应用

1. 激光的光强调制

在图 6-38 或图 6-41 的装置中，如果把信号电压加在晶体上，输出光强就随信号而变化。根据透射率曲线（图 6-40）用作图的方法可以直观地说明光强是如何随信号变化的，就象根据晶体管的特性曲线可以从输入电压求出输出电流一样。在图 6-43 中，V 表示外加电压，I 表示用作图法求得的输出光强。由于调制器的工作点是在透射率曲线的非线性部分，使得输出光信号的波形失真，而且由于透射率曲线对于 $+\delta$ 和 $-\delta$ 是对称的，因而输出的光信号的调制频率是外加电压频率的两倍。为了使输出信号的波形真实地反映原来的信号电压的波形，就必须让调制器工作在透射率曲线的接近直线的部分，即在 $\delta = \frac{\pi}{2}$ 附近。为此需要在

KDP晶体前放置一个$\frac{1}{4}$波片，并让它的快慢轴也与入射线偏振光的光矢量成45°角。这样，偏振光在射到晶体前，它的两个正交等幅的分量就已具有$\frac{\pi}{2}$的位相差，这就是说将调制器的工作点移到了透射率曲线的线性部分。这时若在KDP晶体上施加信号电压，只要它的幅度不太大，输出光强的调制频率就等于外加电压的频率，输出光强的变化规律也与信号电压相同，这一点从图6-43 b很容易明白。

上述调制器可用于激光通讯或激光电视。

2．电光开关

利用电光效应可以制造灵敏度极高的光开关。装置仍如图6-38或6-41所示，当然也可以利用图6-42所示的克尔盒装置。未加电压时，光为检偏器所阻挡，电光开关处于关闭状态；一接通电源加上半波电压，偏振光的光矢量便由于电光效应旋转了90°，电光开关处于全通状态。建立电光开关所需的时间称为时间常数，用τ表示，它由物质内部结构决定。τ约为10^{-9}秒，因此电光开关能够在一秒钟内开关10^9次。当然，施加在晶体上的脉冲电压要通过电路来实现，所以最终的时间常数将由电路的弛豫时间决定。

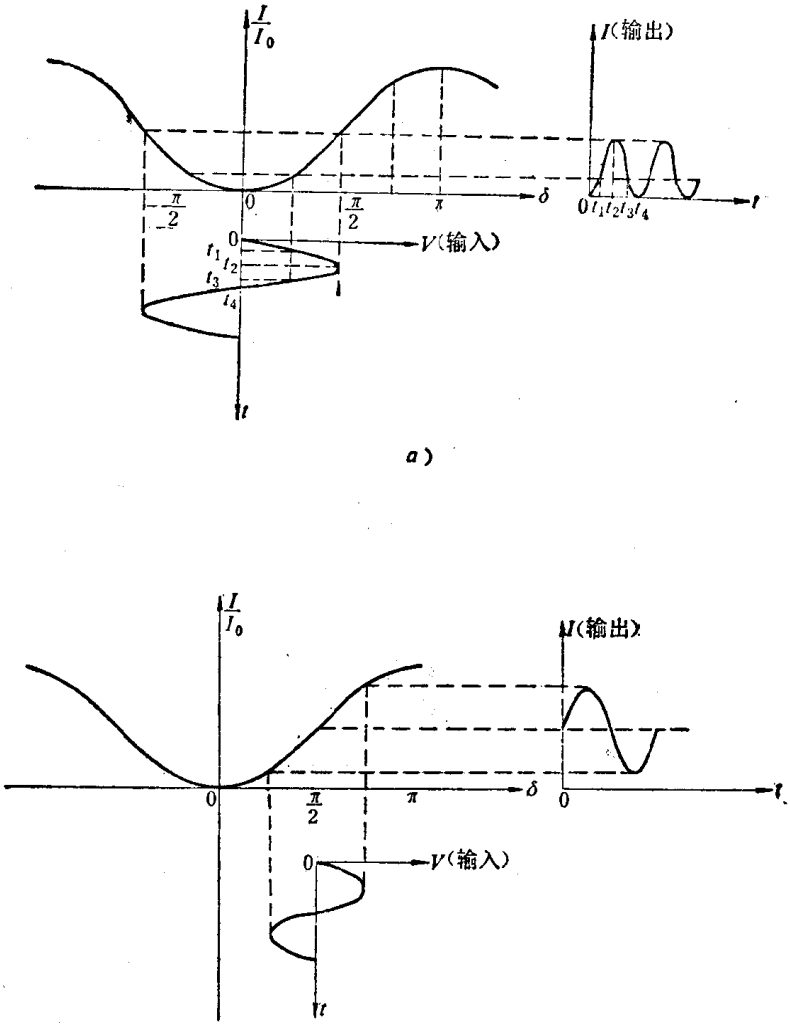


图6-43　电光调制器的特性

a）不带$\frac{1}{4}$波片　b）带$\frac{1}{4}$波片

§6-9　光测弹性方法和玻璃内应力的测定

一、光测弹性方法

本来是各向同性的介质，不但在强电场或强磁场的作用下会表现出各向异性的光学性质，在应力的作用下也会表现出各向异性的光学性质。这就是所谓光弹效应或应力双折射效应。对于平面物体来说，当受到应力作用时，物体上每一点都有两个主应力方向。当光入射到这样的透明物体上时，就分解为两束线偏振光。它们的光矢量分别沿着两个主应力方向，它们的

折射率之差与主应力之差成正比。把受有应力的透明薄片C放在如图6-44所示的两个正交偏振片P_1与P_2之间，就像把波片放在两正交偏振片之间一样，在屏M上会出现由于偏振光的干涉所造成的干涉花样。如果用白光照明，干涉花样是彩色的。条纹的形状由光程差相等亦即主应力差相等的那些点的轨迹决定。这样，根据这些条纹可以确定物体中各点的主应力之差。再用其他方法测出各点的主应力之和及主应力的方向，就可以定量地测出物体中的应力分布。图6-45 a是一片透明塑料在受力时出现的干涉花样的照片，为了对照，在图b中展示了塑料片未受力时的照片。对于不透明的机械构件或桥梁、水坝等，可以用光弹灵敏度高的透明材料（如环氧树脂）制成模型，并且模拟它们的实际受力情况加上应力，就可以利用偏振光的干涉图样分析其中的应力分布。这种方法称为光测弹性方法。我们知道，一些形状和结构复杂的部件，在不同负荷下的应力分布是很复杂的，用力学的方法计算往往是不可能的。但是用光测弹性方法就可以迅速地从实验中作出定性的判断，进而作出定量的计算。因此这种方法在工程力学中有重要的价值。

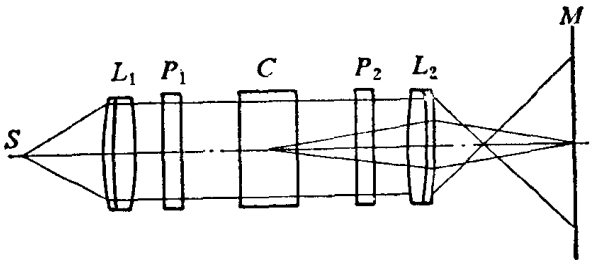
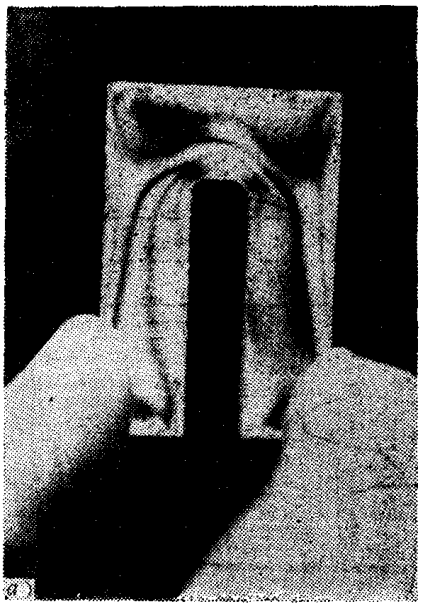


图6-44　光测弹性仪的示意图



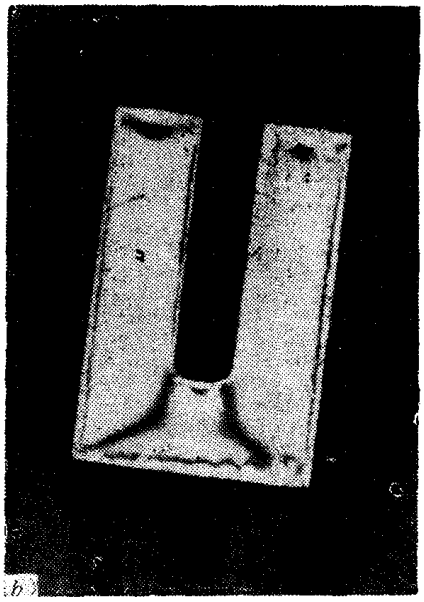


图6-45　在正交偏振片之间插入透明塑料片后干涉场的照片

a）加力　b）不加力

二、玻璃内应力的测定

光学玻璃在制造过程中，由于冷却不均匀或其他原因而存在一定的内应力，这会使玻璃产生双折射，影响制成的光学元件的质量，因此在使用前必须检验光学玻璃的内应力。

光学玻璃内应力的大小用钠黄光通过1厘米厚的玻璃所产生的光程差来表示，并按其大小分为五类，列于表6-7。

表6-7　玻璃毛坯按双折射（内应力）的大小分为五类

类　　别	每厘米最大光程差（毫微米）
1	2
2	6
3	10
4	20
5	50

检验玻璃内应力的方法与上述光测弹性方法类似，也是利用偏振光的干涉现象。下面介绍常用的两种方法。

1．干涉色法

图 6-46 是测定玻璃内应力的应力仪的光路图。图中 S 是光源，起偏器 P_1 和检偏器 P_2 是正交的，G 是待测玻璃，W 是全波片。眼睛调节于待测玻璃的表面，毛玻璃的作用在于它被照明后就成为一个漫射光源，以便使眼睛能同时看到整个表面上的干涉图样。

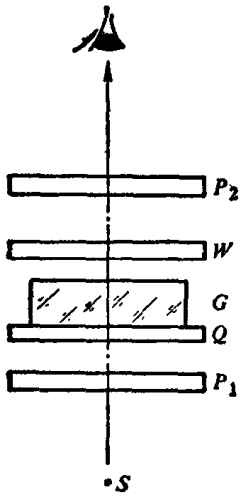


图6-46 应力仪光路图

如果玻璃的内应力很大，不必用全波片即可看到鲜明的干涉色。如果内应力不均匀，还可以看到干涉图样。如前所述，干涉色与光程差之间有着完全对应的关系（见表 6-8），根据干涉色就可以测出玻璃所产生的光程差。但一般光学玻璃的内应力比较小，所引起的光程差不大。例如，若玻璃厚度为 10 厘米，对于第一类玻璃，只产生 20 纳米的光程差，对应干涉色为灰黑色；第三类玻璃对应的光程差为 100 纳米，呈灰色；第四类玻璃才呈现略带蓝色的灰色。总之，在这个范围内干涉色随光程差的变化很不灵敏，不适于测量小的光程差。查阅表 6-8 可见，当光程差在 560 纳米左右时，即干涉色在紫色附近时，干涉色随光程差的变化非常显著。为了提高测量精度，就加一个全波片，并让它的快慢轴与偏振片的透光轴成 45° 角。这样一来，产生干涉的两光束的光程差就在 560 纳米附近，干涉色随玻璃内应力的变化就很灵敏了。因此，这个全波片也叫做灵敏色片。仍举上面那个例子，假定玻璃由于内应力所产生的快慢轴的方向与全波片的快慢轴一致，对于 10 厘米厚的第一类玻璃，总的光程差变成 560 + 20 = 580 纳米，干涉色就由不放入玻璃时的紫色变成了靛蓝色；

表6-8 干涉色-光程差表

光程差（纳米）		干涉色 $P_1 \perp P_2$	干涉色 $P_1 /\!/ P_2$	光程差（纳米）		干涉色 $P_1 \perp P_2$	干涉色 $P_1 /\!/ P_2$
第一级	0	黑	白	第二级	565	绛红	亮绿
	40	金属灰	白		575	紫	绿黄
	97	岩灰	鹅黄		589	靛蓝	金黄
	158	灰蓝	鹅黄		664	天蓝	橙
	218	淡灰	黄褐		728	浅青蓝	褐橙
	234	绿白	褐		747	绿	洋红
	259	白	鲜红		826	亮绿	鲜绛红
	267	淡黄	洋红		843	黄绿	紫绛红
	275	淡麦黄	暗红褐		866	绿黄	紫
	281	麦黄	暗紫		910	纯黄	靛蓝
	306	黄	靛蓝		948	橙	暗蓝
	332	亮黄	天蓝		998	亮红橙	绿蓝
	430	褐黄	灰蓝		1101	暗紫红	绿
	505	红橙	淡蓝绿		1128	亮绿紫	黄绿
	536	火红	亮绿		1151	靛蓝	土黄
	551	暗红	黄绿		1258	浅蓝（带绿）	肉色

对于第三类玻璃，总光程差变成 660 纳米，干涉色成为天蓝色；对第四类玻璃，干涉色变成了绿色。当然，玻璃内部快慢轴的方向预先是不知道的。我们可以转动玻璃，这样它的快慢轴也随之旋转。设玻璃所产生的光程差为 Δ_g，不难明白，当玻璃的快轴与全波片的快轴重合时，总的光程差为（$560+\Delta_g$）纳米；当玻璃的快轴与全波片的慢轴重合时，总的光程差为（$560-\Delta_g$）纳米。在其他情形下，可以证明，总的光程差介于上述两个极限值之间。当玻璃转动时，总的光程差就在（$560-\Delta_g$）纳米到（$560+\Delta_g$）纳米之间变化，干涉色也随之变化。与这些干涉色对应的最大光程差是（$560+\Delta_g$）纳米，最小光程差是（$560-\Delta_g$）纳米。由此可以计算出 Δ_g 来，再除以玻璃的厚度，就可以决定它的类别。对一块玻璃毛坯，要从 X、Y、Z 三个方向进行检验，取双折射最大者为准。干涉色法的测量误差较大，约为 20～50 纳米。

2. $\frac{1}{4}$波片法

测量装置如图 6-47 所示。它与图 6-46 基本相同，只是把全波片 W 换成了 $\frac{1}{4}$波片，$\frac{1}{4}$波片的快轴与起偏器 P_1 的透光轴平行，并且用单色光入射。检偏器 P_2 可以旋转，但起初与 P_1 正交。

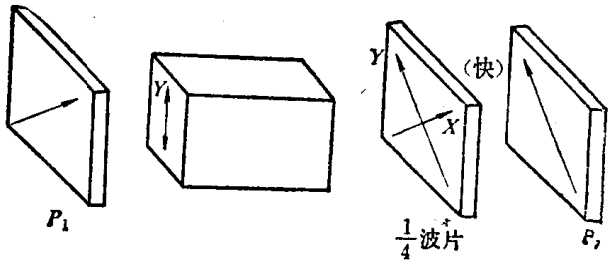


图6-47　用$\frac{1}{4}$波片法测定玻璃的内应力

下面用琼斯矩阵方法求出光通过$\frac{1}{4}$波片后的偏振态。

选择 X、Y 轴分别沿着$\frac{1}{4}$波片的快慢轴，并让玻璃的快慢轴方向与起偏器的透光轴成 $\pm45^\circ$ 角。透过起偏器的线偏振光的琼斯矢量是$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，从表 6-3 知道，$\frac{1}{4}$波片的琼斯矩阵是$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & i\end{bmatrix}$。设玻璃产生的光程差为 Δ，则位相差为

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta \tag{6-62}$$

因而玻璃的琼斯矩阵为$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -i\tan\frac{\delta}{2}\\-i\tan\frac{\delta}{2} & 1\end{bmatrix}$。线偏振光通过玻璃和$\frac{1}{4}$波片后的偏振态为：

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -i\tan\frac{\delta}{2}\\-i\tan\frac{\delta}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-i\tan\frac{\delta}{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\\tan\frac{\delta}{2}\end{bmatrix}$$

这说明从$\frac{1}{4}$波片出射的是线偏振光。如果玻璃的内应力不大，δ 不超过 360°，出射的线偏振

光的光矢量与$\frac{1}{4}$波片快轴的夹角γ就等于

$$\gamma=\frac{\delta}{2}$$

由此

$$\delta=2\gamma \tag{6-63}$$

若$\delta=0$，则$\gamma=0$，即是说光矢量在X轴方向，与P_2的透光轴垂直，视场是全暗的。若$\delta\neq0$，则$\gamma\neq0$，视场是亮的。把P_2转到消光位置，则转动角度就等于γ。从式（6-63）求出玻璃产生的位相差δ，从式（6-62）求出光程差Δ，再除以玻璃厚度就得到玻璃的双折射率。

如果玻璃的内应力较大（$\delta>360^\circ$），那么线偏振光的光矢量与$\frac{1}{4}$波片的快慢轴的夹角γ等于

$$\gamma=\frac{\delta}{2}-N\cdot180^\circ \quad (N=1,2,\cdots)$$

因而

$$\delta=2\gamma+N\cdot360^\circ \tag{6-64}$$

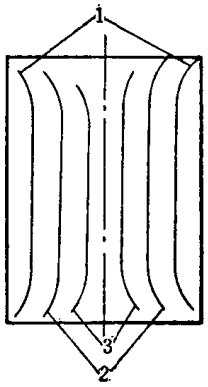


图6-48 当玻璃内应力较大时在应力仪视场中出现的黑条纹

由于玻璃中内应力不均匀，δ也不是常数。在这种情形下，当P_2与P_1正交时会看到好多条黑条纹，如图6-48所示，这些黑条纹与$\delta=N\cdot360^\circ$相对应。这时首先要确定哪一对黑条纹与$\delta=0$对应，为此需要换用白光来照明。这时只有$\delta=0$处仍是黑条纹，而$\delta=360^\circ$、720°等处变成了彩色条纹。譬如说，用白光条纹已经判定图6-48中条纹“2”与$\delta=0$对应，则条纹“3”就对应于$\delta=360^\circ$。中央虚线处的δ就等于

$$\delta=360^\circ+2\gamma$$

式中2γ是δ的“零头”部分。

γ仍用上述方法测定，亦即转动检偏器，使中央虚线处出现黑条纹，从转角就可以确定γ值。

$\frac{1}{4}$波片法的精度较高，误差只有几个纳米。

习　题

6.1. 证明式（6-4）。

6.2. 线偏振光斜入射到两种介质的界面上，试分析反射光的偏振态。

6.3. 平面偏振光垂直入射到一块光轴平行于表面的方解石晶体上，若光矢量的方向与晶体主截面成（i）30°、（ii）45°、（iii）60°的夹角，问o光和e光从晶体透射出来后的强度之比是多少？

6.4. 试求自然光通过尼科耳棱镜后能产生完全偏振光的最大孔径角。

6.5. 试证明式（6-21）。

6.6. 由方解石制成的渥拉斯登棱镜（图6-18）的顶角$\theta=45^\circ$，试求当波长为6328埃的激光垂直入射时出射的两支偏振光之间的夹角。

6.7. 如果格兰棱镜的光轴方向如图6-49所示，顶角为38.5°，间隔层为空气。它能否从自然光获得线偏振光？这种棱镜比起图6-17所示的那种格兰棱镜来有什么缺点？

（提示：考虑透射率）

6.8. 图6-50是偏振光度计的光路图。从光源 S_1 和 S_2 射来的光都被渥拉斯登棱镜W分为两束线偏振

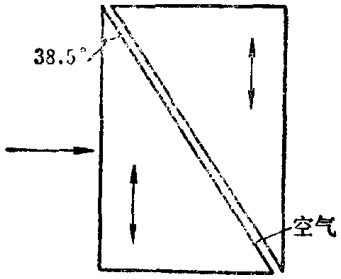


图6-49 格兰棱镜的另一种型式

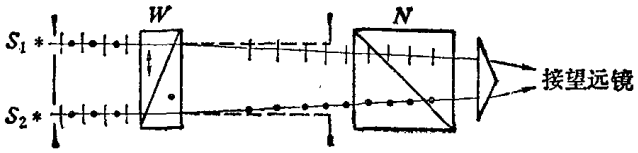


图6-50 偏振光度计光路图

光，但其中一束被挡住，进入视场的只有一束。来自 S_1 的这束光的光矢量在图面内，来自 S_2 的这束光的光矢量垂直于图面。转动检偏器N，直到视场两半的亮度相等。设这时检偏器的透光轴与图面的夹角为 θ，试证明光源 S_2 与 S_1 的强度之比是 $\tan^2\theta$。

6.9. 如图 6-51 所示的双折射棱镜是由石英晶体制成的($n_o=1.544$，$n_e=1.553$)。当光线正入射时，e 光出射后的偏转角多大？

6.10. 如图 6-52 所示，一束光从方解石三棱镜的左边入射。方解石的光轴可以有三种取向：分别与图中直角座标系的三个轴平行。试分析每一种情形下出射光束的偏振情况以及如何测定 n_o 和 n_e。

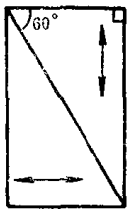


图6-51 习题6.9的图

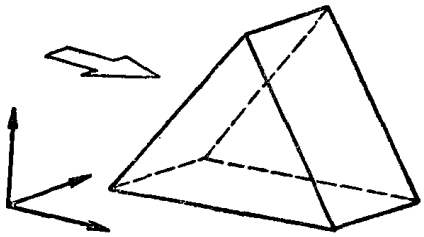


图6-52 习题6.10的图

6.11. 在两正交尼科耳棱镜之间插入一方解石晶片，它的光轴与表面平行，并与尼科耳棱镜的透光轴成35°角。设光通过第一个尼科耳棱镜后的振幅为1。试求：

（1）通过晶片时分解出来的 o 光和 e 光的振幅和强度；

（2）这两束光通过检偏器后的振幅和强度。

6.12. 如图 6-53所示，K为双折射晶体，N为尼科耳棱镜。试分析图示的两种情形下能否实现偏振光的干涉，为什么？

6.13. 两尼科耳棱镜 N_1和 N_2 之间插入一片$\frac{1}{2}$波片，波片的快轴与 N_1 的透光轴成38°角。让H_e-N_e激光束（$\lambda=6328$ 埃）经 N_1后垂直地通过晶片射到 N_2 上。

（1）欲使透射光有最大振幅，问N_2应如何放置？

（2）已知晶片的折射率 $n_o=1.52$、$n_e=1.48$，试计算此晶片的厚度。

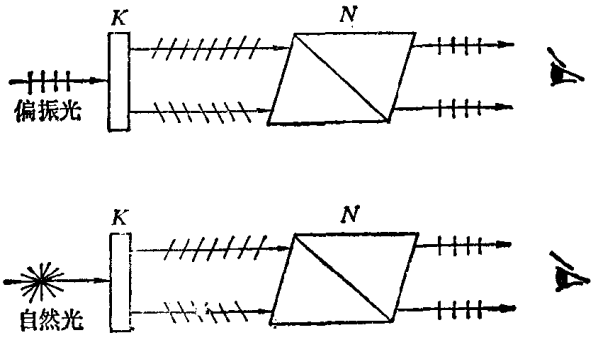


图6-53 习题6.12的图

6.14. 一束自然光通过偏振片后再通过$\frac{1}{4}$波片入射到反射镜上，欲使反射光不能透过偏振片，波片的快慢轴与偏振片的透光轴应该成多大角度？为什么？

6.15. 将巴比涅补偿器放在正交偏振片之间，使它的快慢轴与偏振片的透光轴成 45° 角。将观察到怎么样的干涉条纹？

6.16. 一个巴比涅补偿器放在两正交偏振片之间，它的快慢轴与偏振片的透光轴成 45° 角，当一片云母片（它的快慢轴与巴比涅补偿器一致）放到补偿器上时，所有黑带移动了$\frac{1}{4}$条纹间隔，试计算该云母片产生的光程差（照明光是钠黄光）。

6.17. 设两个光矢量互相垂直的线偏振光的琼斯矢量分别为$\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix}$，试证明：

$$A_1A_2^* + B_1B_2^* = 0$$

6.18. 求正交于$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3i \end{bmatrix}$的琼斯矢量 E_2，并画图表示由 E_1 和 E_2 所代表的偏振态。

6.19. 试用矩阵方法证明右（左）旋圆偏振光经过半波片后变成左（右）旋圆偏振光。

6.20. 为了决定一束圆偏振光的旋转方向，可将$\frac{1}{4}$波片置于检偏器之前，再将后者转到消光位置。这时发现$\frac{1}{4}$波片的快轴的方位是这样的：它须沿着逆时针方向转 45° 才能与检偏器的透光轴重合。问该圆偏振光是右旋的还是左旋的？

6.21. 当经过尼科耳棱镜观察一束光时，其强度随着尼科耳棱镜的旋转而改变，但总不为零。当在强度为极小时，在检偏器前插入一片$\frac{1}{4}$波片，转动$\frac{1}{4}$波片使它的快轴平行于检偏器的透光轴，再把检偏器沿顺时针方向转动 20° 就完全消光。（1）问这是什么偏振光？（2）写出它的琼斯矢量（座标轴自选）。

6.22. 设计一个产生椭圆偏振光的实验，该椭圆的长轴沿铅垂方向，长短轴之比是 2：1，旋转方向是逆时针的。

（说明实验装置中要有哪些部件以及它们的相对方位）

6.23. 波长为 5893 埃的线偏振光垂直通过水晶片（光轴垂直于表面）后，光矢量旋转了 150°，求水晶片的厚度（水晶对这种波长的光的旋光本领为 29.7°/毫米）。

6.24. 试根据图 6-32 判断图中哪几块棱镜是由右旋石英制成的，哪几块棱镜是由左旋石英制成的。

云

第七章　光的量子性

在前面几章，我们研究了光的干涉、衍射和偏振等现象。所有这些现象虽然都涉及到光与物质的相互作用，但是，在这些现象中我们既不能研究单个原子与光相互作用的个别事件，也无法检测出电磁场的瞬时值，只能研究大量原子与光相互作用的时间平均值。因此，可以把这些现象叫做宏观的光学现象。

光的电磁理论，把光看作连续的电磁波，非常成功地说明了宏观光学现象。但是，在上世纪末与本世纪初，科学实验深入到微观领域，在一系列新的实验事实面前，光的电磁理论遇到了巨大的困难。例如，它无法解释气体的吸收与发射光谱的起源，也不能说明荧光的波长为什么总比入射光的长。在光电效应的基本规律面前，电磁理论更是无能为力。

所有这些微观光学现象的发现，使物理学的概念产生了从连续到量子化的新的飞跃：辐射能（包括光能）是量子化的，进而，原子本身的能量也是量子化的。从而出现了一门新的理论——量子物理学，使我们对光的本性与微观世界的认识有了新的发展。

§7-1　辐射能的量子化

一、金属中的光电效应

说明经典电磁理论遇到困难的最明显的例子是光电效应。1887年，赫兹在进行著名的验证电磁波存在的实验时偶然发现，当接收线路中两个小锌球之一受到紫外线照射时，两球之间的电火花就容易产生一些。现在我们知道，这是由于紫外光照射到锌球上从锌中释放出电子的缘故，这也就是现在所说的光电效应。但是赫兹没有追踪这个重要的线索继续研究，致使近在眼前的重要成果从他身边悄悄溜走。后来里纳德（Lenard）等人利用较完善的实验装置对光电效应进行了系统的研究。这些实验研究在普通物理学中已经论及，这里不再赘述。

入射光从金属中释放出电子，单是这一实验事实并没有什么令人惊讶的地方。即使从经典电磁理论看来，这一现象也是可以预料到的。因为既然光是电磁波，当然会对金属中的电子产生作用。使经典电磁理论为难的，是里纳德等人从实验中得到的下列结果：

1. 每种金属都有一个确定的截止频率 ν_0，当入射光的频率低于截止频率 ν_0 时，不论入射光多么强，照射时间多么长，都不能从金属中释放出电子；

2. 对于频率高于截止频率的入射光，从金属中释放出的电子的最大动能与入射光的强度无关，却与光的频率有关。频率越高，释放出的电子的最大动能就越大；

3. 对于频率高于截止频率的入射光，即使入射光非常微弱，开始照射后也能立即释放出电子，滞后时间不超过 10^{-8} 秒。

这些现象都是经典电磁理论无法解释的。我们知道，金属内存在着自由电子，自由电子可以在原子之间游移，但是它们不能轻易脱离金属表面飞到外部空间。欲使电子脱离金属表面，需要供给电子一定的能量。刚好使电子脱离金属表面所需要的能量叫脱出功。如果外界供给电子的能量大于脱出功，多余的能量就转变为逸出的电子的动能。经典电磁理论把光看

作连续分布的电磁波，金属内的电子在电磁波的交变电场的作用下发生受迫振动，其振幅与光波本身的振幅成正比。按照这一看法自然得到如下结论：不管入射光的频率如何，只要入射光足够强，就可以使金属中的电子获得足够的能量，从而克服金属表面的束缚而逸出。入射光越强，电磁场的振幅越大，引起电子的振动就越剧烈，因而逸出的电子的动能就越大。但是实验却表明，每种金属都存在一个截止频率。只有当入射光的频率比截止频率高时才有电子被击出，而被击出的电子的最大动能与入射光强毫无关系，即使把光强改变几千倍也是如此。这在经典电磁理论看来是多么不可思议的事！如果入射光非常微弱，按照经典电磁理论，电子不能一下子获得足够的能量跑出金属表面，必须有一段积累能量的时间。我们来举一个例子。设电子从金属表面逸出所需的能量为5电子伏特，并假设金属中的电子可以从半径为10^{-9}米（相当于原子直径的10倍）的圆形面积上取得它所需要的能量。当用一个功率为1毫瓦的光源在离金属板5米远处照射它时，在光能量连续地分布于整个空间的前提下可以算出，当光开始照射后需要等待20多个小时才能释放出电子。这跟实验结果是完全不符合的。

二、光量子学说

矛盾激励着物理学家们去探索更接近真理的微观世界模型。问题的症结在哪里？经典理论的前提是把电磁场看作连续的波场，把光的能量看作连续地分布在整个空间的。莫非这种"连续"的看法与微观世界的情况不符？因此，在1905年德国物理学家爱因斯坦（Einstein）在新的实验事实面前提出了创造性的见解。他认为光的能量不是连续分布的，光是由一粒粒运动着的光子组成的。每个光子具有确定的能量，它只能作为一个整体被吸收或产生。每个光子的能量E与光的频率ν成正比

$$E = h\nu \tag{7-1}$$

式中h是普朗克常数

$$h = 6.625\times10^{-34}\ \text{焦耳·秒}$$

根据爱因斯坦的光子模型，很容易解释光电效应的实验事实。穿透金属表面的光子被自由电子所捕获，它们的能量转变为电子的动能。这些电子在到达金属表面时要失去一部分动能，在离开金属表面时要克服表面的束缚，又要消耗动能。根据能量守恒定律，离开金属表面的电子的动能为

$$K = h\nu - W_0 - W'$$

式中$h\nu$为被电子捕获的光子的能量，W_0为脱出功，W'为电子在到达金属表面前所失去的动能。

对于那些本来就在金属表面的电子，$W' = 0$，因而这些电子在离开金属表面时具有最大的动能K_{max}

$$K_{max} = h\nu - W_0 \tag{7-2}$$

令$W_0 = h\nu_0$，可以将式（7-2）改写为

$$K_{max} = h(\nu - \nu_0) \tag{7-3}$$

这个方程称为爱因斯坦光电方程。它清楚地说明了光电子的最大动能与光的频率有关，与光的强度无关。因为光强的增加，只增加光子的密度，因而增加光电流，但并不增加每个光子的能量。但是当光的频率增高时，每个光子的能量就增加了，因而释放出来的电子的最大动能也增大了。

其次，当 $\nu=\nu_0$ 时，$K_{max}=0$。这时捕获的光子能量刚好使电子克服金属表面的束缚逸出。当 $\nu<\nu_0$ 时，就不能产生光电效应了，这说明截止频率的存在。表 7-1 给出了一些金属的脱出功、截止频率与截止波长的数值。

另外，不管入射光多么微弱，每个光子的能量是不变的，凡是能捕获到光子的电子就能立刻离开金属表面，不需要一个积累能量的过程，所以不出现电磁理论所预言的那样长的时间滞后。

表7-1　一些金属的脱出功、截止频率与截止波长

金　　属	Cs	Na	Ba	Ag	Mo	Pt
脱出功（电子伏特）	1.9	2.3	2.5	3.9	4.2	4.7
截止频率（10^{14}赫）	4.62	5.66	6.00	9.38	10.0	11.5
截止波长（微米）	0.65	0.53	0.50	0.32	0.30	0.26

不但如此，爱因斯坦还根据方程（7-3）预言，被击出的电子的最大动能与光的频率成线性关系。后来美国物理学家米里康（Millikan）花了十年时间验证这个方程，最后完全证实了爱因斯坦的预言，根据直线斜率求出的普朗克常数的数值也与从其他实验测得的值一致。

值得提出的是，爱因斯坦的光子学说是在普朗克（M.Planck）关于量子的概念的基础上提出来的。1900 年与 1901 年，普朗克在研究黑体辐射时发现，为了说明黑体辐射的光谱分布，必须假定：以频率 ν 振动的原子的能量不能取任意的连续的数值，只能取 $h\nu$ 的整数倍。这说明原子只能以 $h\nu$ 为最小单位跟辐射场交换能量，能量小于 $h\nu$ 的交换过程不存在。普朗克把能量的基本单位 $h\nu$ 叫做“量子”。但是普朗克认为辐射场本身仍然是连续的波场，在这一点上它未能冲破根深蒂固的传统观念的束缚。爱因斯坦进一步把普朗克的量子观念推广到辐射场，指出辐射场的能量也是量子化的。普朗克与爱因斯坦的学说都是半经验性的，它不是从以前的定律与理论推导出来的，科学实践才是检验他们的学说正确与否的唯一标准。

1912 年爱因斯坦与德拜应用光子模型计算固体比热，得出与实验一致的结果。后来的一些涉及到 X 射线、γ 射线与物质相互作用的实验，也只有在爱因斯坦的假设的基础上才能解释。因此这一模型就被普遍接受，并且奠定了量子物理近代理论的基础。

三、光子的动量

光子总是以光的速度 c 运动，它也具有一定的动量

$$p=mc \tag{7-4}$$

式中 m 是光子的惯性质量。从相对论的著名公式可以得到

$$m=\frac{E}{c^2}=\frac{h\nu}{c^2}$$

代入式（7-4）得到

$$p=\frac{h\nu}{c}=\frac{h}{\lambda} \tag{7-5}$$

在著名的康普顿（Compton）效应中，让光子跟电子进行弹性碰撞，不但直接证明了光子具有动量，而且定量地验证了式（7-5）的正确性。

用具有动量的光子模型很容易说明1899年列别捷夫（Лебедев）的光压实验，即照射到物体表面的光会产生压力（习题7.3）。

四、波粒二象性

光既表现出明显的波动性，又表现出勿容置疑的粒子性，这就是光的波粒二象性。

光的这种奇特的性质确实容易使人感到困惑，原因就在于我们最初对物理现象的观察所涉及的是宏观体系。在宏观体系里，我们用两个基本过程——“波”与“粒子”来描述运动，此外再没有别的描述运动的直观图象了。而且，在宏观体系里“波”与“粒子”是截然不同的，我们从来没有见过在单一事物中同时表现出波动性与粒子性。于是，我们就形成了一套“经典的偏见”。当我们研究光学现象时，也习惯于跟亲眼见过的“波”或“粒子”的图象来对号，总想穷根究底地追问“光究竟是波还是粒子”。其实，波动性与粒子性是光的内在本性在不同方面的表现，二者既对立又统一。

为了进一步了解波动性与粒子性之间的联系，让我们回到第四章中讨论过的单缝衍射实验（图4-25 a）。如果入射光足够强，在接收底片上一下子就出现衍射图样，我们可以根据经典的电磁理论准确地预言底片上的强度分布 $I(x)=|\tilde{a}(x)|^2$，这充分显示了光的波动性。如果入射光极其微弱，光子几乎是一个一个地入射的。由于光与底片的相互作用是以光子为单元进行的，当最初的几个光子打到底片上时，在底片上就出现若干点子，而不是经典理论所预言的由 $|\tilde{a}(x)|^2$ 所描述的那种连续分布，这显示了光的粒子性。就个别光子而言，我们无法确定它究竟出现在什么位置。但是，如果连续观察大量的光子，就会发现，在 $|\tilde{a}(x)|^2$ 大的位置，光子出现的几率大，在 $|\tilde{a}(x)|^2$ 小的位置，光子出现的几率小。就大量光子统计平均的分布而言，与经典电磁理论所预言的 $|\tilde{a}(x)|^2$ 的分布是一致的㊀。因此我们可以把 $|\tilde{a}(x)|^2$ 看作在该位置找到光子的几率。如果光源在一段时间内稳定地发射大量光子，那么在某个区域内观察到的平均能量确实等于电磁理论所预言的结果。这样，光的粒子性在这种统计平均的过程中被湮没，仅用经典的电磁理论就可以正确地描述光学现象。再举一个例子。光电效应是显示光的粒子性的典型实验，但是，如果不去研究发射的光电子的动能（这与单个光子的能量有关），而去研究光电流的大小（这与大量光子的统计平均值有关），那么只要入射光的频率足够高，使得电子能够从金属表面逸出，就不能发现光的粒子性。

还应当指出，象电子、质子、中子这些微观粒子，它们的粒子性是显而易见的，但是它们也具有波动性，而且波长与动量之间也有公式（7-5）那样的关系，即

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{mv} \tag{7-6}$$

式中 m 与 v 是微观粒子的质量与速度。这些微观粒子具有波动性的最好证据自然是干涉与衍射。图7-1 a 是一束快速电子通过厚度约0.1微米的多晶铝箔后的衍射图样。为了对比，图7-1 b 中展示了X射线通过同一铝箔后的衍射图样，两者何其相似！所以波粒二象性是一切微观粒子（包括光子）的普遍属性。

㊀ 1909年泰勒（G. I. Taylor）拍摄了用极微弱的光源照明的缝衣针影子中的衍射图样，入射光的强度是如此之低以致在任何一个时刻仪器中实际上只能有很少的几个光子，然而，经过大约三个月的曝光之后，产生的衍射图样就跟用强光源一样地清楚和线条分明。

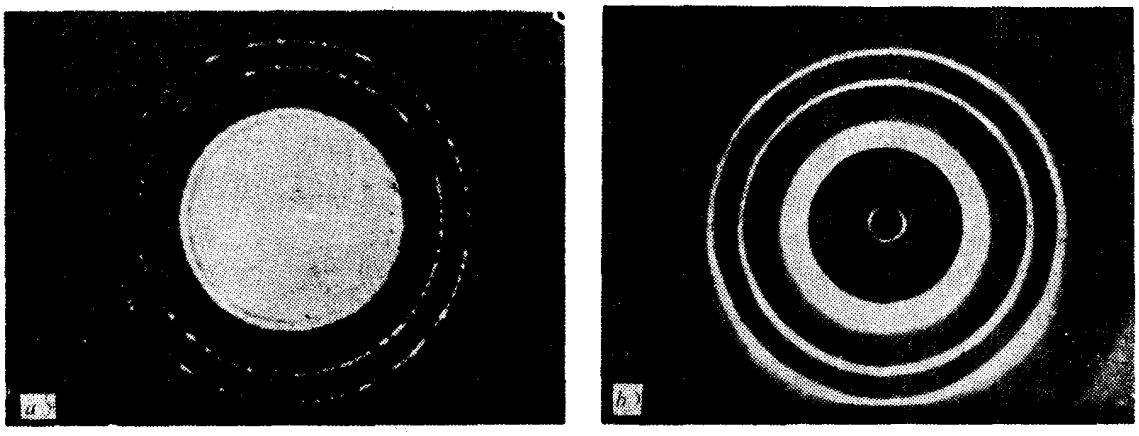


图 7-1

a）电子通过多晶铝箔后的衍射花样　b）X射线通过同一铝箔后的衍射花样

§7-2　光的发射与吸收的量子模型

从上一节知道，光的能量不是连续可分的，而是量子化的。在这一节将会看到，光的这一特性是与发射或吸收光的原子本身的能量的量子化密切相关的。导致这一结论的主要实验事实是物质的发射与吸收光谱。

一、氢原子光谱

从 1860 年以来，人们已经知道，每种元素在适当条件下加以激发都会产生它自己的特征光谱。“特征”的含义就是：只要元素相同，产生的光谱就一样；元素不同，产生的光谱就不同。这说明光谱包含着有关原子结构的丰富的信息。下面我们介绍一下最简单的原子光谱——氢原子光谱，它有着明显的规律性。

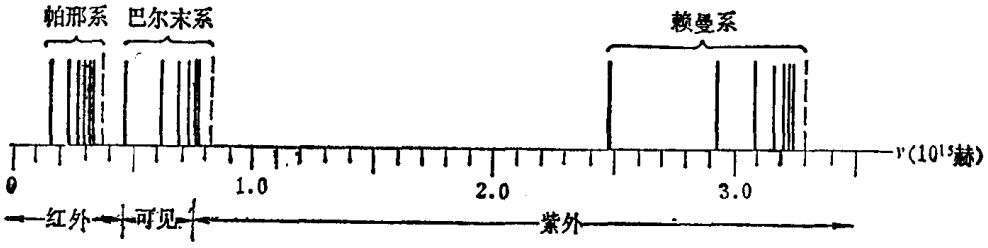


图7-2　氢原子光谱的示意图

图 7-2 是氢原子光谱的示意图。这些谱线可以分成若干个线系：巴尔末（Balmer）线系在光谱的可见区与近紫外区，很容易观察到。氢灯的红色就是由于这个线系的第一条很强的谱线（$\lambda=6563$ 埃）产生的；帕邢（Paschen）线系在红外区；赖曼（Lyman）线系在远紫外区。在每个线系的高频端（图中用虚线表示），谱线越来越密，也越来越弱。

这些谱线的明显的规律性促使人们寻找一个适用于每条谱线的频率的简单公式。结果发现，氢原子的全部谱线的频率可以用经验公式表示为

$$\nu = Rc\left(\frac{1}{n_0^2}-\frac{1}{n_1^2}\right) \tag{7-7}$$

式中 c 是光速，R 是一个常数，称为里德堡数，$R=109677.58/$厘米。n_0、n_1 是正整数，并且对一个线系来说 n_0 是不变的。例如：

$n_0=1$，$n_1=2$，3，4……给出赖曼线系的频率；

$n_0=2$，$n_1=3$，4，5……给出巴尔末线系的频率；

$n_0=3$，$n_1=4$，5，6……给出帕邢线系的频率。

式（7-7）可以改写为

$$\hat{\nu}=\frac{\nu}{c}=R\left(\frac{1}{n_0^2}-\frac{1}{n_1^2}\right) \tag{7-8}$$

$\hat{\nu}$表示每厘米内所含波长的数目，这个量称为波数⊖。

例 计算巴尔末系第一条谱线的波数与波长。

对巴尔末系的第一条谱线，$n_0=2$，$n_1=3$。

根据式（7-8）

波数 $\hat{\nu}=R\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)=\frac{5}{36}R=\frac{109677.58\times5}{36}$厘米$^{-1}$=15233.00厘米$^{-1}$

波长 $\lambda=\frac{1}{\hat{\nu}}=6.564\times10^{-5}$厘米=6564 埃

实际测得的波长是 6563 埃，两者很好符合。

二、玻尔的氢原子理论及光的发射与吸收的量子模型

如上所述，原子光谱包含着有关原子结构的丰富的信息。任何原子理论的首要任务应是能够正确地说明原子光谱的起源。

1911 年，卢瑟福（Rutherford）根据 α 粒子的散射实验指出，原子是由带正电的原子核与绕核旋转的带负电的电子组成的。原子核只占整个原子体积的极小部分，却集中了原子的绝大部分质量。氢原子是最简单的原子，只有一个电子绕核旋转。电子与原子核之间的库仑引力恰好用作维持电子作圆周运动的向心力。设电子质量为 m，电子所带电荷为 $-e$，氢原子核所带电量为 $+e$，电子轨道半径为 r，电子的角速度为 ω，则有

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=m\omega^2 r \tag{7-9}$$

上式左方是库仑引力，右方是向心力。卢瑟福的原子模型成功地说明了 α 粒子的散射实验，但是它还存在两大难题：（i）电子在原子核的库仑力场中运动时，由于有加速度，按照经典电动力学观点，要辐射能量，辐射频率就等于电子绕核旋转的频率。由于辐射损失，电子的轨道越来越小，最终会螺旋般地坠落到核中，就像地球卫星最终要坠落一样；（ii）如果电子也像卫星一样，其轨道半径可以取任意数值，从式（7-9）可见，它的辐射频率也可以取任意值，那么原子光谱应是连续的，这与原子光谱是线光谱的实验事实不符合。

在本世纪初，物理学的概念正处在由连续到量子化的飞跃阶段。在新的实验事实面前，经典物理学的概念受到严重的挑战。有的需要修正，有的需要摒弃。正是在这样的背景下，玻尔（Bohr）在 1913 年建议直接地把爱因斯坦的光子学说应用于卢瑟福的原子模型，提出了光的发射与吸收的量子模型

⊖ 在光谱学中，波数通常定义为 $\hat{\nu}=\frac{\nu}{c}=\frac{1}{\lambda}$，这跟第一章中定义的波数 $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ 相差 2π 倍。

1. 在微观领域内，经典电动力学是不适用的。在半径只有几埃的情形下，电子绕核旋转时并不以电磁波的形式向外发射能量；

2. 电子的轨道角动量不是连续可变的，而是量子化的。具体地说，电子的轨道角动量L要满足下面的量子化条件

$$L = m\omega r^2 = n\frac{h}{2\pi} \tag{7-10}$$

式中n是正整数，称为量子数。提出这一量子化条件的理由，可以在后面看到。

由式（7-9）、（7-10）可以求出，电子轨道的半径只能取下列分立的值

$$r_n = n^2\frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2} \tag{7-11}$$

将具体数值代入，得到$r_n = n^2 \times 0.5$埃。

下面求与这些轨道相应的原子的能量，它由电子的动能与电子一原子核的静电势能组成。

静电势能 $$E_p = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

电子动能 $$E_K = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

根据式（7-9）可以得到 $E_K = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$，所以

$$E = E_p + E_K = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$$

把式（7-11）代入，得到

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\cdot\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \tag{7-12}$$

把具体数值代入得到

$$E_n = -\frac{13.6}{n^2}\ \text{电子伏特}$$

可见，原子的能量不能连续改变，只能取某些允许的分立的数值。进而，我们可以说，原子的运动状态也不能连续变化，也是量子化的。在玻尔理论里，这表现为电子只能在某些确定的分立的轨道上运动，这些量子化的运动状态在量子力学里称为量子态。能量最低的量子态称为基态。能量高于基态的量子态称为激发态。在玻尔理论中，氢原子的基态就对应于$n = 1$的运动状态，激发态就对应于$n > 1$的运动状态。激发态与基态的能量之差称为该激发态的激发能。把各个量子态的能量按一定比例画成图，叫做能级图。氢原子的能级图示于图7-3；

3. 玻尔直接地应用了爱因斯坦的光子假设，指出当原子从高能级E_m跃迁到低能级E_n时，可以用发射光子的方式与外界交换能量，所发射的光子的能量$h\nu$就等于这两个能级的能量之差

$$h\nu = E_m - E_n \tag{7-13}$$

同样地，如果外来光子的能量$h\nu$恰好等于两个能级的能量之差，原子就可以吸收这个光子的能量从低能级跃迁到高能级。

把式（7-12）代入式（7-13）得到

$$\nu = \frac{E_m - E_n}{h} = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) \tag{7-14}$$

这就导出了里德堡经验公式。与式（7-7）对比，得到里德堡常数的表示式

$$R = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} \tag{7-15}$$

在上面，我们是把原子核当作不动的。事实上，原子核与电子都绕着它们的共同的质心转动。考虑到这一点，式（7-15）中的电子质量m应该用电子—原子核的折合质量$m' = \frac{mM}{m+M}$（M是原子核的质量）来代替

$$R = \frac{m'e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} \tag{7-16}$$

按照式（7-16）求出的R值跟实际测得的值很好地符合。这样，玻尔的理论成功地说明了氢原子光谱的起源。

原子在能级之间的跃迁可以在能级图上用竖线清楚地表示出来。图7-3上就画出了氢原子的诸能级之间的跃迁与氢原子光谱诸线系之间的关系。

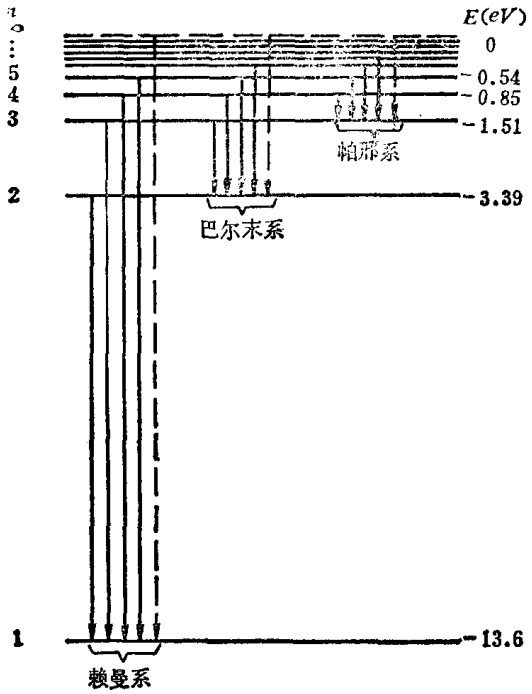


图7-3 氢原子能级图

用玻尔理论很容易说明一个早已熟知的实验事实：原子吸收光谱中出现的谱线总可以在发射光谱中找到。用玻尔理论也很容易说明斯托克定则，即荧光的波长总比入射光的长。这两个实验事实留给同学们自己去解释。

按照玻尔的量子模型，发射的光子频率取决于能量之差。按照经典理论，发光频率等于电子绕核旋转的频率，两者是不同的。但是玻尔指出，由于经典理论在宏观范围内是适用的，因此，当电子轨道越来越大时，由量子理论得出的结论应该与经典理论的结论一致。这就是所谓“对应原理”。

根据对应原理，当电子半径越来越大时，电子在相邻轨道之间跃迁时的发光频率应等于电子绕核的旋转频率，由此得出，电子的轨道角动量只能取$\frac{h}{2\pi}$的整数倍（习题7.6）。这就是玻尔理论中角动量量子化条件的由来。后来，德布洛意（L. de Broglie）从另一观点来说明这一量子化条件。他指出，电子也具有波动性，当电子在某一轨道运动时，轨道的周长应等于电子的波长的整数倍。这样不管电子转了多少圈，前一圈的波峰和波谷总是分别与后一圈的波峰和波谷相遇，各圈重迭起来不会由于干涉而相消。按照德布洛意的假设，得到：

$$2\pi r = n\frac{h}{mv} = n\frac{h}{m\omega r}$$

于是

$$m\omega r^2 = n\frac{h}{2\pi}$$

同样导致角动量量子化条件（7-10）。

玻尔理论既应用了普朗克与爱因斯坦的量子模型，又保留了经典力学的概念，认为每个电子具有确定的轨道。近代量子力学的理论指出，电子也具有波动性，它并不像经典粒子那样具有确定的轨道。处在一定量子态的电子要用波函数$\Psi(x、y、z)$来描述，波函数的模的平方$|\Psi(x,y,z)|^2$就代表电子在（x，y，z）点出现的几率。波函数是从描述原子系统动力学特性的一个微分方程（叫做薛定谔方程）求解得到的。近五十年来，量子力学已经获得高度发展，并且成功地反映了微观领域里的运动规律。关于光的发射与吸收的全面精确的理论，应该用量子力学来讨论。但是玻尔理论中关于能级与跃迁的比较简单的概念还是有效的。至于玻尔理论中的电子轨道，我们可以理解为电子的平均位置。

三、量子数

在玻尔理论里，每个量子态只用一个量子数n来描述。根据量子力学近代理论，每个量子态要用四个量子数来描述，每个量子数描述原子系统的一定的物理特性，并用专门的符号来表示。现将这四个量子数列表如下：

名　　称	符　号	物　理　特　性	可　能　值
主量子数	n	电子离核的平均距离	1，2，3，…
轨道量子数	l	角动量	0，1，…，$n-1$
磁量子数	m	角动量在Z方向的分量	$-l \leqslant m \leqslant l$
自旋量子数	s	电子的自旋	$+\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}$

由于历史原因，角动量量子数l的数值通常是用下列字母来代表的：

l的值	0	1	2	3
字　母	S	P	D	F

主量子数的数值就放在上述符号之前。例如，$3P$表示$n=3$，$l=1$；$2S$表示$n=2$，$l=0$等等。

只有一个电子的原子（或离子），只用一组量子数（n，l，m，s）来表征量子态。n可以取1，2，3，……这些正整数值；l只能取小于n的非负的整数值；m只能取绝对值不大于l的整数值；s只能取$\pm\frac{1}{2}$两个值。两个量子态，当n不同时，能量差别最大。当n相同而l不同时，能量差别要小得多。当n，l相同而m，s不同时，往往具有相同的能量，只有在外磁场存在时，才显示出不同的能量。这样，能级图中的每个能级可以对应于若干个量子态，这种能级叫做简并的，它所对应的量子态的数目叫做该能级的简并度或统计权重。

在具有多个电子的原子里每个电子对应一组量子数（n，l，m，s），而且，根据量子力学中的一个基本原理-泡利不相容原理，在一个原子里不可能有两个电子具有相同的量子态。这样，如果两个电子的主量子数n都等于1，它们的角动量量子数l与磁量子数m都只能取0，那么它们的自旋量子数必然相反，一个电子的自旋$s=\frac{1}{2}$，另一个电子的自旋$s=-\frac{1}{2}$。此外在这个原子里不可能再有主量子数$n=1$的电子。因此，$n=1$的电子不能

超过 2 个。根据同样道理，一个原子里主量子数 $n=2$ 的电子不能超过 8 个，$n=3$ 的电子不能超过 18 个。一般情形下，$n=N$ 的电子不能超过 $2N^2$ 个。

四、选择定则

原子可以从一个量子态跃迁到另一个量子态，但是跃迁的几率有大有小。在有些量子态之间，原子跃迁的几率很大，称为允许跃迁。在有些量子态之间，原子跃迁的几率非常小，称为禁止跃迁。选择定则就指出了哪些跃迁是允许的，哪些跃迁是禁止的。

选择定则中最简单的一条指出，在跃迁时电子的总自旋保持不变。以 He 原子为例，它有两个电子。这两个电子的自旋 s 可以相同，也可以相反。总自旋 s 可以是 1，也可以是 0。在光谱学里，总自旋 $s=0$ 的量子态叫单重态，$s=1$ 的态叫三重态。所以上述选择定则指出，单重态跟三重态之间的跃迁是禁止的。

五、激发方式

通常情形下，系统中的绝大多数原子都处在基态。为了发光，必须使原子跃迁到较高的能级。原子从低能级跃迁到高能级的过程叫做激发。激发的方式主要有以下三种：

1. 加热

许多气态物质，特别是金属蒸气，在加热时会发出线光谱。例如，把食盐放在火焰上，食盐会分解，产生的高温 Na 蒸气会发出黄光。

从统计物理学可以知道，当原子体系处在热平衡状态时，原子在各能级上的分布可以用玻尔兹曼定律表示，处在激发能为 E_i 的能级上的原子数目为

$$N_i = g_i N_0 \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right) \tag{7-17}$$

式中 k 是玻尔兹曼常数，T 是该系统的绝对温度，g_i 是该能级的统计权重，N_0 是比例常数，它表示处在最低能级的一个量子态的原子数。

从式（7-17）可见，当温度升高时，处在高能级上的原子数迅速增加。当它们向低能级跃迁时，会发出光来。

2. 辐射激发

用外来辐射照射原子体系，当外来光子的能量恰好等于原子的激发能时，处在基态的原子就能在外来光子的激励下吸收外来光子而跃迁到激发态，这一过程叫做受激吸收。由于受激吸收而跃迁到激发态的原子回到基态时就可以发光。但回到基态可以有两种途径：

（1）直接回到基态（图7-4 a）。这时辐射的光子的频率与吸收的光子的频率一样。这称为共振辐射。

（2）通过中间能级回到基态（图 7-4 b）。如果在这个过程中能发射辐射，那么它的频率必定比吸收的频率低。这一现象称为荧光。例如，当用波长为 3803 埃的紫外光照射钠蒸汽时，它会发出黄光；当用水银灯的绿光照射碘蒸汽时会发出橙光。

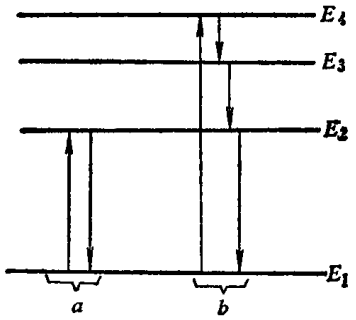


图7-4 共振辐射 a 与荧光 b

3. 碰撞激发

氢灯，汞灯，钠光灯这类气体放电光源都是采用这种方式激发的。其激发机构是，从阴极发射出来的电子，在电场作用下获得动能，具有很大动能的电子与处在基态的原子碰撞时，

电子把自己的能量传递给原子，使原子激发到高能级。

值得指出的是，一个处在基态的原子也可以通过跟另一个处在激发态的原子碰撞，使自己跃迁到激发态，而另一个原子则回到基态。有人曾做过这样的实验：用水银灯发出的波长为2536埃的紫外光照射水银蒸汽，它就发生共振辐射。如果在水银蒸汽里掺入铊蒸汽，那么当用2536埃的紫外光照射时，水银蒸汽的共振辐射会减弱，同时却出现铊蒸汽所特有的绿光。这是由于水银原子吸收了2536埃的紫外光跃迁到激发态，当他们跟基态铊原子碰撞时，就把激发能传递给铊原子，使铊原子激发，而水银原子则回到基态。因此水银的共振辐射减弱，而获得激发能的铊原子回到基态时就发出绿光来。两种原子通过这种方式相互转移激发能的过程叫做共振转移。两种原子的激发能的数值越接近，共振转移的效率越高。在下一章将会看到，在氦氖激光器中正是利用共振转移使Ne原子激发的。

§7-3 光的自发发射、受激发射与受激吸收

上一节介绍了光的发射与吸收的量子模型。当处在高能级的原子向低能级跃迁时可以发射光子，这里要区分两种不同的发射：自发发射与受激发射。此外，也必定存在上文已经提到过的受激吸收的过程。下面分别介绍这三个过程的特点以及它们之间的关系。学好这一节对于了解激光的机理是非常重要的。

为了简单起见，下面的讨论中都假定原子体系只有两个能级，下能级用E_1表示，上能级用E_2表示。

一、光的自发发射

处在高能级E_2的原子，即使没有任何外界的激励，也总是自发地跃迁到低能级E_1，并且发射一个频率为ν、能量为

$$h\nu = E_2 - E_1$$

的光子。对于大量的处于高能级的原子来说，它们是各自独立地自发地发射一个个能量相同但彼此无关的光子，这相当于它们各自独立地自发地发射一列列频率相同的光波。各列光波之间没有固定的位相关系，偏振方向与传播方向也是杂乱的。这种发射称为自发发射。

设处于高能级E_2的原子数密度为N_2。不难想像，在单位体积中，在dt时间内，由高能级E_2自发跃迁到低能级并发射光子的原子数dN_{21}应该跟N_2及dt成正比

$$dN_{21} = A_{21}N_2 dt \tag{7-18}$$

其中比例常数A_{21}，称为自发发射几率。它是原子能级系统的特征参量，即对于每一种原子的每两个能级就有一个确定的A_{21}值。由式（7-18）得到

$$A_{21} = \frac{dN_{21}}{N_2 \cdot dt}$$

因此A_{21}代表处于高能级的原子在单位时间内发生自发发射的比例数，也可以理解为每一个处在高能级的原子在单位时间内发生自发发射的几率。

一旦外界停止激发后，处在高能级的原子数由于自发发射会逐渐减少。设在t时刻（从外界停止激发的时刻算起）单位体积内处在高能级上的原子数为$N_2(t)$，在dt时间内减少的原子数为

$$-dN_2(t) = A_{21}N_2(t)dt$$

解上式得到

$$N_2(t)=N_{20}\exp(-A_{21}t) \tag{7-19}$$

式中N_{20}代表起始时刻高能级上的原子数密度。从上式可见，外界停止激发后处在高能级上的原子数是按指数规律衰减的。

由于高能级上的原子陆续跃迁到低能级，原子在高能级上的停留时间有长有短。单位体积内在 t 至 $t+\mathrm{d}t$时间内离开高能级的原子数为 $A_{21}N_2(t)\mathrm{d}t$，其中每个原子的停留时间为 t，它们总的停留时间为 $t\cdot A_{21}N_2(t)\mathrm{d}t$。所以高能级上的全部原子的平均停留时间为

$$\tau=\frac{1}{N_0}\int_0^{\infty}t\cdot A_{21}N_2(t)\mathrm{d}t$$

把式（7-19）代入求得

$$\tau=\frac{1}{A_{21}} \tag{7-20}$$

原子在激发态的平均停留时间 τ 称为激发态的寿命，所以激发态的寿命等于自发发射几率的倒数。

下面来求自发发射的辐射功率。单位时间单位体积内发生自发发射的原子数为 $-\frac{\mathrm{d}N_2(t)}{\mathrm{d}t}$，每个原子发射的光子的能量为 $h\nu$，所以单位体积的辐射功率为

$$I(t)=-h\nu\frac{\mathrm{d}N_2(t)}{\mathrm{d}t}=h\nu A_{21}N_2(t)=h\nu A_{21}N_{20}e^{-A_{21}t}$$

如果 $t=0$ 时的辐射功率为 I_0，则有

$$I(t)=I_0\exp(-A_{21}t) \tag{7-21}$$

上式说明外界激发停止后自发辐射的强度将按指数规律衰减。如果从实验上测出这一强度随时间的变化，就可以计算出自发发射几率 A_{21}。

二、光的受激发射

处在高能级 E_2 上的原子，由于受到能量恰好为$h\nu=E_2-E_1$ 的外来光子的激励而跃迁到低能级 E_1，并发射一个与外来光子一模一样的光子，这种发射称为受激发射。受激发射的光与入射光频率相同，位相相同，偏振方向与传播方向也相同，二者是完全相干的。

不难想像，在 $\mathrm{d}t$ 时间内，单位体积中从高能级受激跃迁到低能级的原子数 $\mathrm{d}N'_{21}$ 除了与 $\mathrm{d}t$ 及高能级的粒子数密度 N_2 成正比外，还与入射的单色辐射能密度（即以频率 ν 为中心的一频率间隔内的辐射能密度）ρ_ν成正比

$$\mathrm{d}N'_{21}=B_{21}N_2\rho_\nu\mathrm{d}t \tag{7-22}$$

式中 B_{21} 称为受激发射系数，它也是原子能级系统的特征参量。

如果引入 $W_{21}=B_{21}\rho_\nu$，则

$$W_{21}=B_{21}\rho_\nu=\frac{\mathrm{d}N'_{21}}{N_2\mathrm{d}t} \tag{7-23}$$

即 W_{21} 代表高能级 E_2 上的原子在单位时间内发生受激发射的几率，W_{21} 称为受激发射几率。值得注意的是，对每一个能级系统来说，受激发射几率还与入射光强有关，不像自发发射几率 A_{21} 那样是一个常数。

三、受激吸收

如上节所述，处在低能级 E_1 的原子受到能量恰好为$h\nu=E_2-E_1$ 的光子照射时，吸收这

种光子而跃迁到高能级 E_2 的过程称为受激吸收，或简称为吸收。与受激发射类似，在 dt 时间内，单位体积中由于吸收入射光子从低能级 E_1 跃迁到高能级 E_2 的原子数 dN_{12} 除了与低能级 E_1 上的原子数密度 N_1 及 dt 成正比外，还与单色辐射能密度 ρ_ν 成正比

$$dN_{12} = B_{12}\rho_\nu N_1 dt \tag{7-24}$$

其中比例常数 B_{12} 称为受激吸收系数，它也是原子能级系统的特征参量。

引入 $W_{12} = B_{12}\rho_\nu$，则

$$W_{12} = B_{12}\rho_\nu = \frac{dN_{12}}{N_1 dt} \tag{7-25}$$

W_{12}代表低能级 E_1 上的原子在单位时间内发生受激吸收的几率。W_{12} 称为受激吸收几率。W_{12} 跟 W_{21} 一样，与 ρ_ν 成正比，不是常数。

四、自发发射，受激发射与受激吸收的关系

自发发射，受激发射与受激吸收三者之间是互相联系的，这定量地反映在 A_{12}、B_{21}与B_1 间有着十分简单而又重要的关系。为了推导这一关系，设想在一个温度为 T 的热平衡的空腔中充有大量的某种原子（见图7-5）。空腔内壁的热辐射在腔内来回反射，形成一个稳定的辐射场。从普朗克的理论已经知道，空腔中的单色辐射能密度 ρ_ν 为

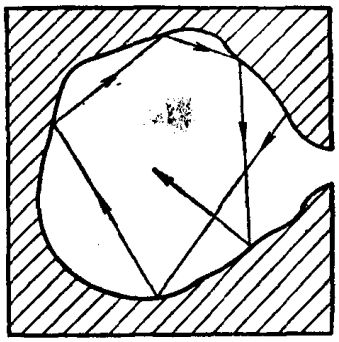


图7-5 空腔

$$\rho_\nu = \frac{8\pi h n^3 \nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1} \tag{7-26}$$

式中 h 是普朗克常数，k 是玻尔兹曼常数，c 是光速，n 是空腔内介质的折射率，T 是空腔的绝对温度。

这种辐射对于处在空腔中的原子来说就是外来辐射，因此这些原子除了自发发射外，还在辐射场的激励下发生受激发射与受激吸收。由于空腔处于热平衡状态，它内部的辐射场已形成一种不随时间变化的稳定分布，这就要求原子系统所发射的光子数等于它所吸收的光子数

$$dN_{21} + dN'_{21} = dN_{12}$$

上式左方是 dt 时间内单位体积中自发发射与受激发射的光子数，右方是受激吸收的光子数。把式（7-18）、（7-22）、（7-24）代入得到

$$(A_{21} + B_{21}\rho_\nu) N_2 dt = B_{12}\rho_\nu N_1 dt \tag{7-27}$$

又因空腔内处于热平衡状态，所以 E_1 与 E_2 上的原子数 N_1 与 N_2 满足玻尔兹曼分布。根据式(7-17）得到

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1}\exp[-(E_2 - E_1)/kT] = \frac{g_2}{g_1}\exp(-h\nu/kT) \tag{7-28}$$

式中g_1、g_2分别是能级 E_1 与 E_2 的统计权重。由式（7-27）与（7-28）可得到空腔内的单色辐射能密度 ρ_ν 为

$$\rho_\nu = \frac{A_{21}}{B_{21}} \cdot \frac{1}{\frac{B_{12}g_1}{B_{21}g_2}\exp(h\nu/kT) - 1}$$

与式（7-26）对比，就得到

$$\frac{A_{21}}{B_{21}}=\frac{8\pi hn^3\nu^3}{c^3} \tag{7-29}$$

$$\frac{B_{12}}{B_{21}}=\frac{g_2}{g_1} \tag{7-30}$$

如果上下能级的统计权重相等，则

$$\frac{B_{12}}{B_{21}}=1 \tag{7-30 a}$$

式（7-29）与（7-30）就是十分重要的 A_{21}、B_{12} 与 B_{21} 之间的关系式。由于这三个系数都是原子的能级系统的特征参量，所以虽然这些公式是在热平衡条件下推得的，它们对普遍情况也是适用的。

从这两个公式可以直接得出下面两点推论：

1．受激发射与自发发射的强度之比

当原子系统有处于高能级的原子时，就有自发发射。这种自发发射的光子对于其他粒子来说就是外来光子，因此在自发发射的同时，总伴随有受激发射（还有受激吸收）。两者的功率分别为

$$I_{自发}=N_2A_{21}h\nu$$

$$I_{受激}=N_2B_{21}\rho_\nu h\nu$$

两者之比为

$$\frac{I_{受激}}{I_{自发}}=\frac{B_{21}\rho_\nu}{A_{21}}=\frac{c^3}{8\pi hn^3\nu^3}\rho_\nu \tag{7-31}$$

这个比值随辐射场的强弱可以有悬殊的差别。在实际系统中往往是一种过程占绝对优势，分析问题时只需考虑占优势的那种过程。

在热平衡的情形，对光波而言，总是自发辐射占绝对优势。例如在 $T=1500$开的热平衡的空腔中，对 $\lambda=5000$埃的可见光，根据上式算得

$$\frac{I_{受激}}{I_{自发}}=\frac{c^3}{8\pi hn^3\nu^3}\rho_\nu=\frac{1}{\exp(h\nu/kT)-1}=2\times10^{-8}$$

即自发发射比受激发射强九个数量级。

在激光器内，由于打破了热平衡，在激光束的方向上受激发射要占绝对优势。在下一章再来详细讨论这一点。

2．光的吸收和增益

频率为 ν 的光通过具有能级 E_2 和 $E_1(E_2-E_1=h\nu)$ 的介质时，将同时发生受激吸收和受激发射。前者使入射光减弱，后者使入射光加强。设 dt 时间内单位体积中受激吸收的光子数为 dN_{12}，受激发射的光子数为 dN'_{21}，从前面的讨论知道

$$\frac{dN'_{21}}{dN_{12}}=\frac{B_{21}N_2\rho\nu}{B_{12}N_1\rho\nu}=\frac{B_{21}N_2}{B_{12}N_1}=\frac{g_1N_2}{g_2N_1}$$

在热平衡时，能级上的粒子数分布满足玻尔兹曼公式，所以

$$\frac{dN'_{21}}{dN_{12}}=\frac{g_1N_2}{g_2N_1}=\exp[-(E_2-E_1)/kT]=\exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)<1$$

这说明受激发射少于受激吸收，光通过介质时会减弱。欲使光通过介质时得到增益，必须打破热平衡，使粒子数分布满足

$$\frac{g_1 N_2}{g_2 N_1} > 1 \tag{7-32}$$

通常将上式所描述的状态称为粒子数反转分布状态，或简称为“粒子数反转”。在下一章将会看到，这是产生激光的必要条件。

§7-4 光谱线的宽度

在上面的讨论中，我们假定，原子从高能级向低能级跃迁时发射单一频率的光子，也就是说发出严格的单色光。实际上，正如第一章中已经指出的那样，光源发出的光并不是严格的单色光，谱线总是有一定宽度的。这一节讨论一下谱线增宽的原因，这可以使我们对光源的发光机构有进一步的了解，同时也有助于了解下一章将要讨论的激光的工作特性。

一、光谱线的自然增宽

光谱线的自然宽度是微观粒子普遍属性—测不准原理㊀的必然结果。

上面已经指出，由于存在自发跃迁，原子在激发态上只有有限的寿命 τ。因此，根据测不准原理知道，原子在激发态不可能具有确定的能量，也就是说激发态的能级是有一定宽度的。设能级宽度为 ΔE，那么ΔE与寿命 τ 之间要满足如下的测不准关系：

$$\Delta E \cdot \tau \geqslant \frac{h}{2\pi} \tag{7-33}$$

式中 h 为普朗克常数。可见，寿命越短，能级越宽。图 7-6 示意把画出了上能级有一定的宽度及相应的跃迁。左边的箭头表示从上能级的下限向下能级的跃迁，右边的箭头表示从上能级的上限向下能级的跃迁。这样，发射的光子的频率

$$\nu = \frac{E_2 - E_1}{h} \tag{7-34}$$

也有一定的范围，亦即发射的谱线，有一定的宽度。由于这种增宽是必然存在的，所以称为自然增宽。考虑到下能级一般为基态，寿命极长，能级的宽度几乎为零，不难求出谱线的自然宽度为

$$\Delta\nu_n = \frac{\Delta E}{h} \geqslant \frac{1}{2\pi\tau} \tag{7-34}$$

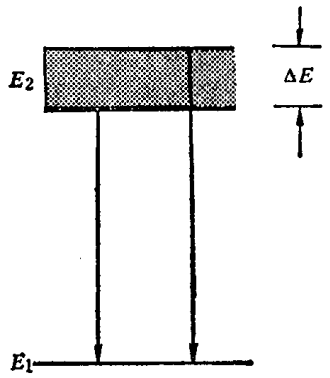


图7-6 有一定自然宽度的能级图

从经典的观点来看，可以把原子看作由正电中心与负电中心组成的偶极子。当负电中心相对于正电中心作频率为 ν_0 的谐振动时，该原子就发射频率为 ν_0 的电磁波。在空间某一点的电矢量 E 为：

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}\exp(i2\pi\nu_0 t)$$

考虑到原子在发射电磁波的过程中，本身所具有的能量不断衰减，相应地所辐射的电磁场亦将不断衰减（见图 7-7）。详细的数学分析表明，考虑到衰减后的电矢量为：

$$\boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{a}\exp(-\pi\gamma t)\exp(i2\pi\nu_0 t) \tag{7-35}$$

式中 γ 称为衰减因子，它表征衰减的快慢。γ 越大，衰减越快。因此它与激发态的寿命应有

㊀ 关于测不准关系，请参阅普通物理学的有关章节。

一定的关系。事实上，根据式（7-35），发射的光强为

$$I \propto |E(t)|^2 = a^2 \exp(-2\pi\gamma t) \tag{7-36}$$

由上一节式（7-21），对于自发发射

$$I \propto \exp(-A_{21}t) \propto \exp\left(-\frac{1}{\tau}t\right) \tag{7-37}$$

式中A_{21}是自发发射几率。比较式（7-36）与（7-37）得到衰减因子γ与激发态寿命τ的关系为

$$\gamma = \frac{1}{2\pi\tau} \tag{7-38}$$

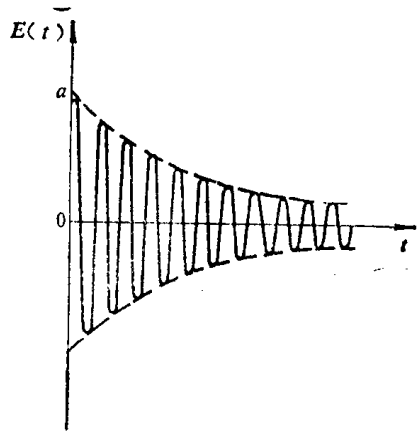


图7-7　电磁场随时间按指数规律衰减

由式（7-35）或图7-7可见，由于能量不可避免地要衰减，原子所发射的不是严格的单色光波。按照傅里叶变换的理论，它是由许多频率不同的单色光波组成的。不同频率的单色光波的复振幅$\widetilde{A}(\nu)$由$E(t)$的傅里叶变换给出

$$\widetilde{A}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(t)\exp(-i2\pi\nu t)\,dt$$

把式（7-35）代入并积分得到

$$\widetilde{A}(\nu) = a\int_0^{+\infty} \exp\{[i2\pi(\nu_0-\nu)-\pi\gamma]t\}dt = \frac{a}{\pi\gamma - i2\pi(\nu_0-\nu)}$$

不同频率的单色光波的强度为

$$I(\nu) = |\widetilde{A}(\nu)|^2 = \frac{a^2}{4\pi^2}\,\frac{1}{(\nu-\nu_0)^2+\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \tag{7-39}$$

上式给出了谱线中所包含的各单色光波的强度随频率的变化，也就是给出了谱线的轮廓。我们把归一化的谱线轮廓叫做谱线的线型函数，用$g(\nu)$表示。按照这个定义

$$g(\nu) = \frac{I(\nu)}{\int_0^{\infty} I(\nu)d\nu} \tag{7-40}$$

可见，$g(\nu)$也代表谱线中频率在ν附近的单位频率间隔中的单色光的强度与谱线总强度的比值。

将式（7-39）代入式（7-40），不难求出自然增宽的线型函数为

$$g_n(\nu) = \frac{\gamma}{2\pi}\cdot\frac{1}{(\nu-\nu_0)^2+\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \tag{7-41}$$

这是洛仑兹型函数（见图7-8）。

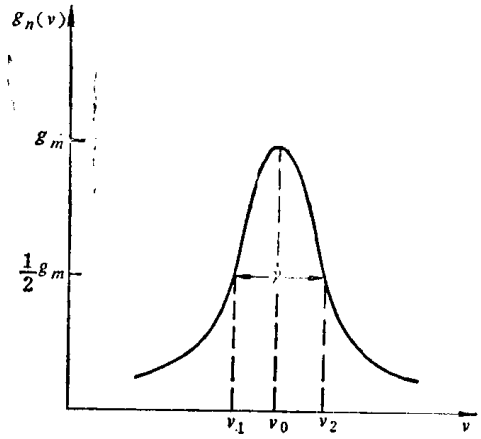


图7-8　自然增宽的线型函数(洛仑兹型)

从式（7-41）可以求出

i）当$\nu=\nu_0$时，$g_n(\nu)$有极大值g_m

$$g_m = g_n(\nu_0) = \frac{2}{\pi\gamma} \tag{7-42}$$

ii) 当 $\nu_1 = \nu_0 - \frac{\gamma}{2}$ 与 $\nu_2 = \nu_0 + \frac{\gamma}{2}$ 时

$$g_n(\nu_1) = g_n(\nu_2) = \frac{1}{2} g_m$$

所以自然增宽谱线的宽度为

$$\Delta\nu_n = \nu_2 - \nu_1 = \gamma \tag{7-43}$$

根据式（7-38）

$$\Delta\nu_n = \frac{1}{2\pi\tau} \tag{7-43a}$$

这与上面根据测不准关系求得的结果是一致的。

自然增宽谱线的相对宽度为

$$\frac{\Delta\nu_n}{\nu} = \frac{1}{2\pi\nu\tau}$$

可见光的频率 ν 的数量级为 5×10^{14} 赫，τ 的数量级约为 $10^{-7}\sim10^{-8}$ 秒，于是 $\frac{\Delta\nu_n}{\nu}$ 约为 10^{-7}。所以自然增宽是很小的。

二、碰撞增宽

在气体中，大量粒子（分子，原子或离子）作无规则运动时将不断发生碰撞。这里所说的“碰撞”，并非指经典力学中的那种碰撞。只要两个粒子足够靠近，以致彼此明显地相互影响时就会发生光学碰撞。这种碰撞使粒子发光的位相在碰撞前后发生无规则的改变（见图7-9）。这就相当于缩短了波列的有效长度，因而引起光谱线进一步增宽。这种增宽的线型函数 $g_c(\nu)$ 也是洛仑兹型函数

$$g_c(\nu) = \frac{\Delta\nu_c}{2\pi}\cdot\frac{1}{(\nu-\nu_0)^2+\left(\frac{\Delta\nu_c}{2}\right)^2} \tag{7-44}$$

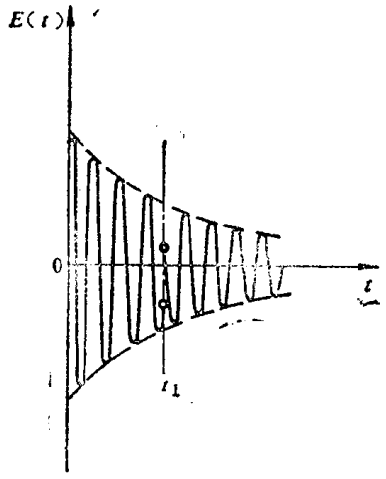


图7-9 原子发射的光波的位相在碰撞前后突然改变

图中 t_1 代表碰撞时刻

其中 $\Delta\nu_c$ 为碰撞引起的线宽，称为碰撞宽度。正如自然宽度与激发态寿命成反比一样，碰撞宽度也与相邻两次碰撞之间的时间成反比，而后者又与气压成反比，所以碰撞宽度 $\Delta\nu_c$ 与气压成正比

$$\Delta\nu_c = \alpha p \tag{7-45}$$

其中 p 为气压，α 为比例系数，它随气体的种类及谱线的不同而变化。例如，在 He^3:Ne^{20} 按 7:1 气压比混合的气体放电管中，对于 Ne 的 6328 埃谱线，α 值为

$$\alpha \sim 9.6\times10^7 \text{赫/毛}$$

当管内总气压为 1～2 毛时，碰撞增宽约为 96～190 兆赫。

当碰撞增宽与自然增宽两种因素同时作用时，所得到的谱线仍为洛仑兹型，其线宽等于两者之和

$$\Delta\nu = \Delta\nu_c + \Delta\nu_n \tag{7-46}$$

三、多普勒增宽

与声波的多普勒效应类似，当光源与接收器之间有相对运动时，接收器接到的光波频率会随着相对速度的不同而改变。这种现象叫光波的多普勒效应。

设光源发出的光波频率为 ν_0，光源与接收器之间在它们联线方向上的相对速度为 v_z。我们规定，当光源向着接收器运动时 v_z 取正值，当光源离开接收器运动时 v_z 取负值。那么，接收器接收到的光波频率为

$$\nu = \nu_0\left(1 + \frac{v_z}{c}\right) \tag{7-47}$$ ⊖

式中 c 为光速。上式表明，当光源向着接收器运动时，$\nu > \nu_0$。反之，当光源离开接收器运动时 $\nu < \nu_0$。

现在来讨论气体管内大量同类粒子的发光。由于这些粒子是向四面八方以不同速度运动着的，即使每个粒子发出的光是频率相同的单色光，接收器接收到的不同原子所发的光波之间也有一定的频移，因而引起谱线有一定的宽度。这种增宽叫多普勒增宽。为了定量地讨论多普勒增宽，必须知道气体粒子的速度分布。假定在热平衡条件下气体粒子的速度分布遵从麦克斯韦-玻尔兹曼分布定律，Z 轴速度分量在 $v_z \sim (v_z + dv_z)$ 之间的粒子数占粒子总数的比率为

$$P(v_z)\,dv_z = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT}\right) dv_z \tag{7-48}$$

式中 m 为单个粒子的质量，k 为玻尔兹曼常数，T 为绝对温度。不难明白，光源接收到的频率在 $\nu \sim (\nu + d\nu)$ 之间的光强与总光强的比值 $g(\nu)d\nu$ 应该等于 Z 向速度在对应的 $v_z \sim (v_z + dv_z)$ 之间的粒子数与粒子总数的比值 $P(v_z)dv_z$，即

$$g(\nu)d\nu = P(v_z)dv_z \tag{7-49}$$

根据式（7-47），ν 与 v_z 之间有如下关系

$$\left.\begin{aligned} v_z &= \frac{c}{\nu_0}(\nu - \nu_0) \\ dv_z &= \frac{c}{\nu_0} d\nu \end{aligned}\right\} \tag{7-50}$$

把式（7-48）与（7-50）代入（7-49）就得到多普勒增宽的线型函数为

$$g_d(\nu) = \frac{c}{\nu_0}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{mc^2(\nu - \nu_0)^2}{2kT\nu_0^2}\right] \tag{7-51}$$

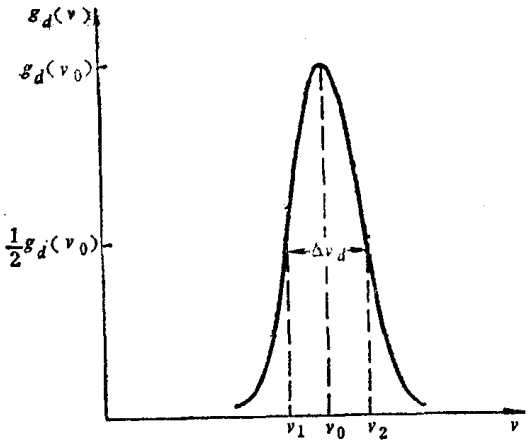


图7-10 多普勒增宽的线型函数（高斯型）

这种类型的函数通常称为高斯型函数，图 7-10 是它的图形。从公式或图形可以知道

i）当 $\nu = \nu_0$ 时，$g_d(\nu)$ 有极大值

$$g_d(\nu_0) = \frac{c}{\nu_0}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \tag{7-52}$$

⊖ 这个公式的推导可参阅普通物理学中声波的多普勒公式。按照相对论得到的精确公式为

$$\nu = \nu_0\sqrt{\frac{1 + v_z/c}{1 - v_z/c}} = \nu_0\left(1 + \frac{v_z}{c} + \frac{1}{2}\frac{v_z^2}{c^2} + \cdots\right)$$

ii）当频率偏离ν_0时强度下降，设频率为ν_1和ν_2时强度下降到极大值的一半

$$g_d(\nu_1)=g_d(\nu_2)=\frac{1}{2}g_d(\nu_0)$$

ν_2与ν_1之差就叫做多普勒宽度$\Delta\nu_d$。容易算出

$$\Delta\nu_d=\nu_2-\nu_1=2\cdot(2\ln 2)^{\frac{1}{2}}\frac{\nu_0}{c}\left(\frac{kT}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{7-53}$$

可见，粒子质量越大，温度越低，多普勒宽度就越小。

为了计算方便，引入气体原子的原子量或气体分子的分子量M来代替m

$$m=1.66053\times10^{-27}M \text{ 千克}$$

代入式（7-53）得

$$\Delta\nu_d=7.16\times10^{-7}\left(\frac{T}{M}\right)^{1/2}\nu_0 \tag{7-53 a}$$

将式（7-53）代入式（7-51），就可以用$\Delta\nu_d$表示线型函数的极大值

$$g_d(\nu)=\frac{2}{\Delta\nu_d}\left(\frac{\ln 2}{\pi}\right)^{1/2}\simeq\frac{0.939}{\Delta\nu_d} \tag{7-52 a}$$

四、小结-均匀增宽与非均匀增宽

上面分析了自然增宽、碰撞增宽及多普勒增宽，还存在其他一些引起谱线增宽的因素，我们不能在这里一一加以叙述。但是可以把各种增宽归纳成两类，即均匀增宽与非均匀增宽。下面举例加以说明。

在自然增宽与碰撞增宽中，增宽是由于辐射衰减与碰撞使波列偏离单色光波引起的。在这类增宽中，每一发光粒子对谱线内的任一频率都有贡献，称为均匀增宽；反之，在多普勒增宽中，接收器所接收到的不同频率的光来自不同速度的粒子。每一发光粒子只对谱线内某些确定的频率有贡献，而不是对谱线内的全部频率都有贡献。这种增宽叫非均匀增宽。

另外，在实际的光谱线中，往往同时存在多种增宽因素。例如，在上面讨论多普勒增宽时，我们假定一定速度的原子发出一定频率的单色光波，在线形内贡献一条无限窄的谱线。实际上，由于还存在碰撞增宽、自然增宽等因素，一定速度的原子发出的也不是严格的单色光，在线形内将贡献一条有一定宽度的谱线。整个线形是所有这些基元谱线的叠加。从数学上说，整个线型是多普勒线型函数与每个原子发射的线型函数的卷积。这样得到的线型称为综合增宽线型，它是更为复杂的。

最后列举几条光谱线的宽度，使我们有一个数量的概念。

增宽类型 / 谱线名称	均匀增宽		非均匀增宽
	自然宽度（兆赫）	碰撞宽度（兆赫）	多普勒宽度（兆赫）
Ne 6328埃	10	100～200	1300
CO_2 10.6微米	—	100	53

习　题

7.1. 当金属靶受到高速电子的轰击时会发射出X射线。图7-11是金属钼和钨受到能量为35×10^{5}电子伏特的电子轰击时发射的X射线谱。试解释为什么它们有相同的短波极限（$\lambda_{min}=0.35$ Å）。

7.2. 分子的平均动能

$$E_K=\frac{3}{2}kT$$

试计算与室温下的分子平均动能相当的光子的波长是多少？

7.3. 设辐射通量为I的光束正入射到某材料上被它完全吸收。试证明作用到该材料上的辐射压强为

$$p=\frac{I}{c}$$

如果该光束发生全反射，那么辐射压强等于多少？

7.4. 为使AgBr分解所需的能量约为1.0电子伏特/分子。试计算能使AgBr分解的光子的阈值波长，并解释为什么无线电波不能使底片感光？

7.5. 在以太阳为球心、半径等于地球公转轨道的平均半径的球面上，太阳辐射能的通量为1.34千瓦/米^2。假定平均波长为7000埃，问每平方厘米的面积在每秒钟内接收到多少光子？

7.6. 试根据对应原理推导角动量量子化条件。

7.7. 在氢原子光谱中有一条谱线的波长$\lambda=9500$埃，试在能级图中表示出这条谱线来。

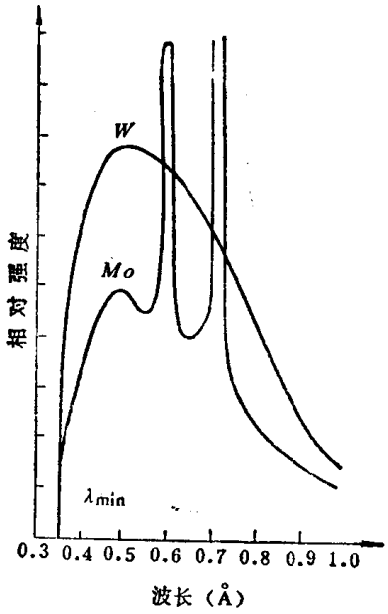


图7-11　金属钼和钨的X射线谱

7.8. 在光谱学中已知一个实验事实：赖曼线系的第一条谱线与巴尔末系的第一条谱线的频率之和等于赖曼线系的第二条谱线的频率。试解释这个实验事实，并指出其他类似的组合。

7.9. 试写出氦离子（He^{+}）光谱的频率公式，求出氦离子的里德堡数，指出它的光谱与氢原子光谱有什么相似点？又有什么不同？

7.10. 设某谱线的波长$\lambda=6000$埃，自发发射几率$A_{21}=10^{8}$秒$^{-1}$，试计算

i）受激发射系数B_{21}。

ii）欲使受激辐射超过自发辐射，腔内的单色辐射能密度应是多少？

iii）对$\lambda=600$埃（紫外）、0.6埃（X射线）重复以上计算。并将计算结果加以比较。

7.11. 设原子在某两个能级之间跃迁时产生的谱线的波长$\lambda=6943$埃。试计算在热平衡条件下在室温时（$T=300°K$）上能级的原子数是下能级原子数的百分之几？（假设两能级的统计权重相同）

7.12. 试计算CO_2的10.6微米谱线与Ne的6328埃谱线的多普勒宽度，并加以比较（设放电管中的气体的温度都是400°K）。

7.13. 根据泡利原理列出氖原子处在基态时它的每个电子的量子数。如果要用最少的能量使它的一个电子激发，试求这个被激发后的电子的量子数。

7.14. 在对共振荧光的一次研究中，用汞灯所发出的波长为2537 Å的紫外光照射到一个石英容器C所装的物质上，观察到下列事实：

i）假如容器C仅盛有汞蒸气而别无它物，那么C中的气体将非常强烈地散射入射光，被散射的辐射的波长也是2537 Å。

ii）如果C装有铊蒸汽而别无它物，那么对入射光来说，C将是透明的，只有极少一点入射光被散射。

iii）假定容器C装有铊和汞蒸汽的混合物，那么C将辐射汞线2768 Å，同时也发射出一些铊的特征

谱线即波长为 2768 Å，3230 Å，3529 Å，3776 Å和 3350 Å的谱线。如果把一块玻璃板放在 C 与汞灯之间，就不发射任何一条谱线。

iv）在上述条件下，可以发现铊线 3776 Å远宽于铊线 2768 Å。事实上，前者要比与容器 C 的温度对应的多普勒宽度宽得多，它也比从充以纯铊蒸汽的放电管中发出的同样谱线宽得多。

试根据铊的能级图（见图 7-12）解释所有这些现象。

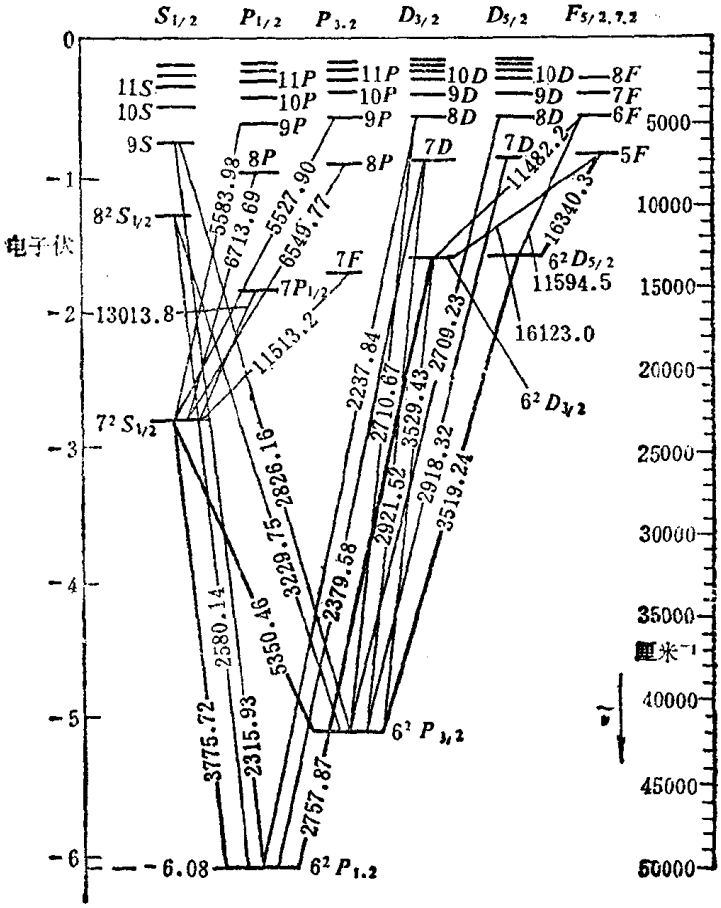


图7-12　铊原子能级图

第八章 激 光

第一台激光器发明于1960年。这一新型相干光源的出现使古老的光学获得了新的生命力，给光学以至整个科学领域带来了极为深远的影响。

我们知道，产生频率直到1千兆赫的电磁波的电子管振荡器在很多年以前就已发明。在这些电路里产生的电磁波具有很好的相干性，可以人为地控制它们的振幅与位相，用来传递信息。光波虽然也是电磁波，但是光波是以单个原子或分子作为发射器发出的。由于光源内部存在大量的原子、分子，它们发射的光波在方向上是杂乱的，在位相上没有固定的关系。这样的光源就象一个噪声发生器一样，不能人为地控制其位相或振幅，不能用来传递信息。

那么，能否产生象无线电波那样有恒定的振幅与位相关系的相干光波呢？要想用普通的电子学方法来产生这样的光波是不可能的。我们知道，无线电波中频率最高的要数微波，产生微波的谐振腔必须具有波长那样的大小。由于光波频率极高（$\sim 10^{14}$赫），波长极短（~ 0.5微米），要想制成与光波波长有同一数量级大小的谐振腔是极其困难的。即使能制成，其功率也是微不足道的。但是，采用上一章讨论过的用受激发射使光放大的方法却能实现这一点，因为受激发射产生的光波与原来的光波是完全相干的。1953年首先在微波领域内用这个原理制成了微波激射器（或称脉塞），它发射的微波具有极好的相干性。1958年邵洛和汤斯提出了把频率范围扩展到光频的建议。1960年迈曼等人根据这个原理果然制成了第一台激光器——红宝石激光器。几个月后，雅文等人也制成了氦氖激光器。现在，已经制成的激光器如雨后春笋，种类繁多，它们的波长也已扩展到从远红外到紫外的范围。

下面我们将介绍激光的基本原理、激光器的基本类型以及有关激光技术、激光应用的一些问题。

§8-1 光在介质中的放大

一、粒子数反转

在§7-3中已经指出，当光通过介质时，同时存在受激发射与吸收的过程。要使介质对光产生放大作用，必须使受激发射超过受激吸收，因而必须使粒子数分布达到反转状态

$$N_2 > \frac{g_2}{g_1} N_1 \tag{8-1}$$

式中 N_2、N_1分别是上、下能级的粒子数密度，g_2、g_1分别是上、下能级的统计权重。粒子数反转是介质能对光产生放大作用的前提，也是产生激光的前提。

在热平衡状态下，介质中的粒子在各能级上是按玻尔兹曼定律分布的。高能级上的粒子数总比低能级上少，而且在室温下绝大多数粒子都处在基态。把粒子从基态激发到高能级以便在某两个能级之间实现粒子数反转的过程称为抽运。

二、抽运的几种方法

1. 光泵抽运

如图8-1 a所示，用外来光照射工作物质，使处在基态E_0的粒子吸收外来光子而跃

迁到高能级 E_2，结果在 E_2 与 E_1 两能级之间实现粒子数反转。这是固体激光器中常用的方法。

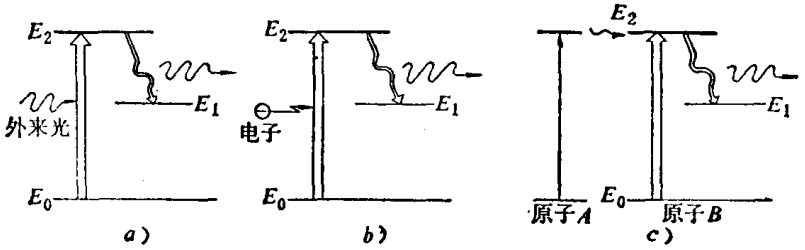


图 8-1

a）光泵抽运　b）电子碰撞　c）共振转移

2. 电子碰撞

让电子通过气体介质，在适当的气压与电流下，电子碰撞气体粒子，把它激发到高能级以实现粒子数反转（见图 8-1 b）。这是某些气体激光器（例如氩离子激光器）中使用的方法。

3. 共振转移

在这种方法中，是把两种激发能相同或相近的原子 A 和 B 以适当比例混合在一起。通过气体放电先把 A 原子激发到激发态。如果这个激发态是亚稳态⊖，它不能以辐射跃迁的方式回到基态，但是可以与处在基态的 B 原子碰撞，将激发能转移给 B，把 B 激发到激发态 E_2，在 B 原子的两能级 E_2 与 E_1 之间实现粒子数反转（见图 8-1 c）。上述过程可以用式子表示为

$$A \xrightarrow[\text{电子碰撞}]{} A^*$$

$$A^* + B \longrightarrow B^* + A$$

式中星号“*”表示激发态。

4. 化学反应

通过化学反应产生一种处于激发态的原子或分子以实现粒子数反转。例如，用光照射氯气与氢气的混合物就会发生如下的反应

$$Cl_2 \longrightarrow Cl + Cl$$

分解出来的氯原子跟氢分子反应，产生处于激发态的 HCl 分子与氢原子

$$Cl + H_2 \longrightarrow HCl^* + H$$

产生的氢原子又跟 Cl_2 反应产生处于激发态的 HCl 分子与氯原子

$$H + Cl_2 \longrightarrow HCl^* + Cl$$

Cl 原子又可以跟 H_2 反应，这样循环下去，形成了链式反应，使得处在激发的 HCl 分子越来越多，实现了粒子数反转。这样制成的激光器叫化学激光器。

还有其它的抽运方法，在这里就不一一叙述了。回忆一下，在上一章我们曾指出光源的几种激发方式，它与现在谈到的抽运方式是相对应的，区别仅在于现在不但把粒子激发到高能级，而且必须实现粒子数反转状态。怎样实现这一点呢？容易想到的是提高抽运的速率，但是更重要的是必须研究粒子系统的能级状况。例如，如果粒子只有两个能级，想用光泵抽

⊖ 所谓亚稳态，是指该激发态的寿命比一般能级要长得多。

运的方法在二能级系统中实现稳定的粒子数反转是不可能的。因为粒子吸收外来光固然可以从下能级激发到上能级，但是同样可能的是上能级的粒子在外来光的激励下也会跃迁到下能级，所以充其量也只能使上下能级的粒子数相等。能够实现粒子数反转的能级系统主要有下面两类：

i ）三能级系统

如图 8-2 a 所示，粒子从基态 E_0 首先被激发到能级 E_3，粒子在能级 E_3 上是不稳定的，很快地衰变到能级 E_2。能级 E_2 是亚稳态，在 E_2 上可以积聚足够多的粒子。这样就可以在该能级与基态之间实现反转。可见，亚稳态在实现反转中起着重要的作用。

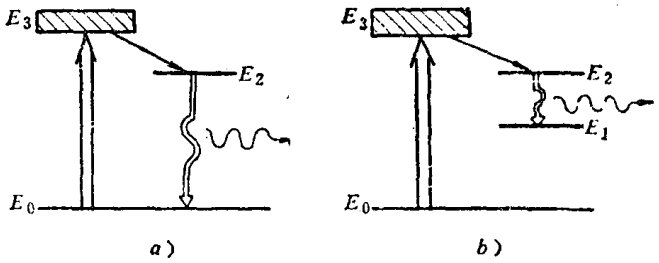


图 8-2

a）三能级系统　b）四能级系统

在 § 8-6 中将要讨论的红宝石激光器就属于三能级系统。在三能级系统中，由于激光跃迁的下能级是基态，为了达到反转，必须把半数以上的基态粒子抽到上能级，因此要求很高的抽运功率。

ii ）四能级系统

如图 8-2 b 所示，如果在 E_2（亚稳态）与基态之间还有一个高踞于基态之上的能级 E_1，由于能级 E_1 基本上是空的，这样在 E_2 与 E_1 之间就比较容易实现反转。所以，四能级系统的效率一般比三能级系统高。

三、增益系数

现在定量地讨论一下处于反转状态的粒子系统对光的放大作用。

在 § 7-3 中曾讨论过有外来辐射存在时的受激发射与吸收的问题。在那里假定原子发射的是理想的单色光，谱线是无限细的，现在考虑到谱线增宽以后，应该更仔细地分析这个问题。我们以由多普勒效应引起的非均匀增宽作为例子来进行分析。由于原子热运动速度有一定分布，尽管各原子的发光频率相同，接收器所接收到的频率也有一定的分布范围。我们把接收到的频率称为该原子的表观发光频率。当外来光子的频率处在以 ν 为中心的单位频率间隔内时，单位体积内处在上能级的 N_2 个原子中，只有那些表观发光频率处在相应频率范围内的 ΔN_2 个原子才有可能发生受激发射。$\frac{\Delta N_2}{N_2}$ 就等于线型函数 $g(\nu)$

$$\frac{\Delta N_2}{N_2} = g(\nu)$$

$$\Delta N_2 = g(\nu) N_2 \tag{8-2}$$

同样地，单位体积内处在下能级的 N_1 个原子中，也只有 ΔN_1 个原子可能吸收上述频率的光子，$\Delta N_1/N_1$ 也等于 $g(\nu)$。所以

$$\Delta N_1 = g(\nu) N_1 \tag{8-3}$$

现在可以根据公式（7-22）与（7-24）计算单位体积中在 dt 时间内在单位频率间隔内受激发射与吸收的光子数。

受激发射

$$dN'_{21} = B_{21}\rho_\nu \Delta N_2 dt = B_{21}\rho_\nu N_2 g(\nu)dt \tag{8-4}$$

受激吸收

$$dN_{12} = B_{12}\rho_\nu \Delta N_1 dt = B_{12}\rho_\nu N_1 g(\nu)dt \tag{8-5}$$

式中各符号的意义与上一章相同。对于一般的谱线增宽，利用经典的偶极子辐射模型，或者用严格的量子力学，可以证明公式（8-4）与(8-5）也是成立的。

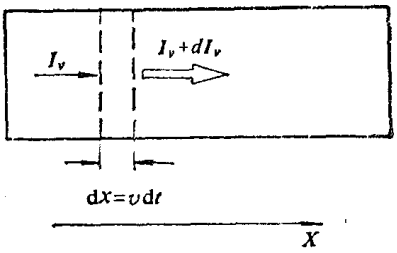


图8-3 光通过介质时的放大

设入射光是沿 x 方向传播的平行光（见图8-3）。它的单色辐射通量为 I_ν。如果 I_ν 足够大，使得在光的进行方向上受激发射远远超过自发发射，因而可以忽略后者，那么辐射能密度的净增加量为

$$d\rho_\nu = (dN'_{21} - dN_{12})h\nu = (B_{21}N_2 - B_{12}N_1)g(\nu)\rho_\nu h\nu dt$$

介质中的辐射能密度与入射光的辐射通量之间有如下的关系

$$\rho_\nu = \frac{n}{c}\cdot I_\nu$$

式中 c 是光速，n 是介质的折射率。由上式得到

$$d\rho_\nu = \frac{n}{c}dI_\nu$$

再注意到

$$dt = n\cdot dx/c$$

所以

$$dI_\nu = (B_{21}N_2 - B_{12}N_1)g(\nu)I_\nu\frac{n}{c}h\nu dx$$

另外，B_{12} 与 B_{21} 之间有公式（7-30）所述的关系，因此

$$\frac{dI_\nu}{dx} = \left(N_2 - N_1\frac{g_2}{g_1}\right)B_{21}\frac{n}{c}g(\nu)h\nu I_\nu \tag{8-6}$$

可见，光在介质中通过单位距离后的增长量 $\frac{dI_\nu}{dx}$ 与单色辐射通量 I_ν 成正比。我们把光通过单位距离后的增长率 $\frac{dI_\nu}{I_\nu dx}$ 叫做增益系数，用 $G(\nu)$ 表示。另外把 $N_2 - N_1\frac{g_2}{g_1}$ 称为上、下能级粒子数密度之差，用 ΔN 表示。则增益系数

$$G(\nu) = \frac{dI_\nu}{I_\nu dx} = \Delta N\frac{n}{c}B_{21}h\nu g(\nu) \tag{8-7}$$

我们看到，增益系数与上、下能级粒子数密度之差成正比，同时与线型函数 $g(\nu)$ 成正比。因此线型函数也代表了增益系数与频率之间的函数关系。

§8-2 激光振荡

一、谐振腔的作用

从上一节知道，一旦介质达到粒子数反转状态，就可以对光起放大作用，在介质内由自发发射产生的一个或几个光子，通过介质时就会获得增益。所增加的光子跟原来的光子

具有相同的频率、相同的位相、相同的偏振与传播方向。然而，由于介质的增益系数和介质的长度都是有限的，光子一次通过介质所获得的增益是很微弱的。如果加上一对平行的反射镜（见图 8-4 a），使光子来回通过介质，光子的数目就会象滚雪球似的越滚越多，结果形成一支很强的激光输出。

以这一对反射镜为端面的腔体，就叫做谐振腔。在谐振腔内，只有沿轴线附近传播的光能被来回反射形成激光，这就使输出的激光束有很好的方向性。

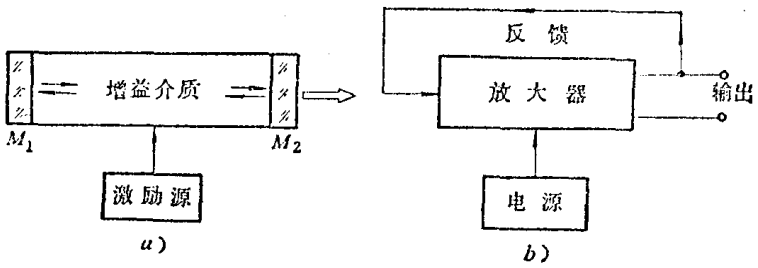


图8-4 激光器与电子学振荡器的比较

a）激光器 b）电子学振荡器

如果将激光器跟电子管或晶体管振荡器加以对比，可以看到两者是很相似的（图 8-4）。电子管或晶体管振荡器是由加上正反馈的放大器组成的；而激光器的增益介质（实现了反转的工作介质）就相当于放大器，谐振腔的反射镜 M_1 与 M_2 就起着正反馈的作用。

二、振荡的阈值条件

把工作介质放到谐振腔里，并且使介质达到反转状态以后，只是说有可能产生激光。由于工作介质内部还存在散射、衍射等损耗，另外谐振腔的反射镜对光也有吸收，而且还有一部分光要透出腔外，这对腔内的激光振荡来说也是一个损失。因此工作介质的增益至少要高于某一最低限度，才足以克服损耗，产生振荡，输出激光。这就象晶体管或电子管放大器加上正反馈以后，也必须使正反馈超过某一最低限度，才能成为振荡器一样。

根据公式（8-7），当平行光通过介质时，单位距离的增长率为

$$\frac{\mathrm{d}I_\nu}{I_\nu \mathrm{d}x} = G(\nu) \tag{8-8}$$

考虑到损耗后应该写成

$$\frac{\mathrm{d}I_\nu}{I_\nu \mathrm{d}x} = G(\nu) - \alpha_{内} \tag{8-9}$$

其中 $\alpha_{内}$ 表示腔内损耗。对一定频率来说，暂且把 $G(\nu)$ 看作常数，从上式求积分得到

$$I_\nu = I_{\nu 0} e^{[G(\nu) - \alpha_{内}]x} \tag{8-10}$$

式中 $I_{\nu 0}$ 为 $x = 0$ 处的单色辐射通量。再设谐振腔的两个反射镜的反射率分别为 R_1 与 R_2，谐振腔的长度为 d，那么光束在腔内走一个来回后的光强为

$$I_\nu = R_1 R_2 I_{\nu 0} e^{[G(\nu) - \alpha_{内}] \cdot 2d} \tag{8-11}$$

为了维持振荡，必须使 $I_\nu \geqslant I_{\nu 0}$，由此得到

$$R_1 R_2 e^{[G(\nu) - \alpha_{内}] \cdot 2d} \geqslant 1 \tag{8-12}$$

$$G(\nu) \geqslant \alpha_{内} - \frac{1}{2d} \ln(R_1 R_2) \tag{8-13}$$

这就是激光振荡的增益阈值条件。通常令

$$\alpha = \alpha_{内} - \frac{1}{2d} \ln(R_1 R_2) \tag{8-14}$$

α称为总损耗系数，它等于光通过单位距离的平均损耗率。那么增益阈值为

$$G(\nu)_{阈值}=\alpha \tag{8-13a}$$

由于增益系数$G(\nu)$跟上下能级粒子数密度差成正比，所以根据上式与式（8-7）可以求出上下能级粒子数密度差的阈值为

$$\Delta N_{阈}=\frac{c\alpha}{nB_{21}h\nu g(\nu)}$$

根据公式（7-29）

$$B_{21}=\frac{c^3A_{21}}{8\pi hn^3\nu^3}=\frac{c^3}{8\pi hn^3\nu^3\tau_{自}}$$

所以

$$\Delta N_{阈}=\frac{8\pi\nu^2n^2\alpha\tau_{自}}{c^2g(\nu)} \tag{8-15}$$

式中α为总损耗系数，$\tau_{自}$为上能级的自发发射的寿命，$g(\nu)$为线型函数。

上式给出了粒子数反转的阈值，实际工作中的阈值往往是指外界供给能量的速率或抽运速率，两者之间还存在许多转移环节。所以要定量地计算抽运速率的阈值是很困难的。但是公式（8-15）可以帮助我们定性地分析激光的形成跟哪些因素有关。

例如，对固体激光器，假定激光发生在原子跃迁谱线的中心频率ν_0附近，于是

$$\Delta N_{阈}=\frac{8\pi\nu_0^2n^2\alpha\tau_{自}}{c^2g(\nu_0)}$$

再假定谱线线型是洛仑兹型，从式（7-42）与（7-43）可以求出峰值$g(\nu_0)$与线宽$\Delta\nu$的关系为：

$$g(\nu_0)=\frac{2}{\pi\Delta\nu}$$

于是

$$\Delta N_{阈}=\frac{4\pi^2\nu_0^2n^2\Delta\nu\alpha\tau_{自}}{c^2} \tag{8-16}$$

可见，$\Delta N_{阈}\propto\Delta\nu$。所以在其他条件相同时，荧光线宽比较小的介质（例如掺钕钇铝石榴石）比起荧光线宽大的介质（例如钕玻璃）来，前者的阈值低。

三、增益饱和与稳定态的建立

一台激光器，当外界激发作用很弱时，介质中的增益系数小于阈值，没有激光输出。当增益系数刚刚达到阈值时，激光器开始有激光输出，但输出极微弱。当增益（小讯号增益系数）超过阈值后，就有较强的激光输出。

既然增益超过阈值，根据公式(8-12)

$$R_1R_2\exp[2(G(\nu)-\alpha_{内})d]>1$$

光在腔内走一个来回后被放大。那么当光不断地来回通过介质时光强会不会无限制地增加呢？这是不会的。因为在上面的讨论中，我们假定对一定频率来说，$G(\nu)$是不随光强改变的。实际上，$G(\nu)$与粒子数反转$N_2-N_1\frac{g_2}{g_1}$成正比。随着光强的增加，受激跃迁几率越来越大。在抽运速率一定的情形下，必然导致上能级粒子密度N_2下降，因而增益系数$G(\nu)$也随着光强的增加而减小。增益随光强增加而减小的现象叫做增益饱和。到一定光强时，增

益系数终于下降到使阈值条件成立，于是

$$I_0R_1R_2e^{2(G-\alpha_{内})d}=I_0$$

这时来回一周的光强不变，建立了稳定状态。

还应指出，增益饱和的行为随谱线增宽的类型而有很大的不同。我们知道，导致增益饱和的原因是激光的建立消耗了上能级的粒子。但是上能级粒子的消耗情况随着谱线增宽的类型而有很大的不同。在非均匀增宽中，发光粒子中的不同部分对谱线中的不同频率有贡献。粗略地，可以把全部发光粒子分成许多组，每组发光粒子只发出某一表观频率的光，而对其他频率没有贡献。这样一来，如果在腔内建立了频率为 ν_1 的激光，它只消耗表观发光频率为 ν_1 的那组粒子，并不消耗其他粒子。因此在增益曲线上只在频率 ν_1 附近增益下降，而对其他频率，增益并不下降。这个现象称为“烧孔”(见图 8-5)。在均匀增宽的情形下，每一发光粒子对谱线内的全部频率都有贡献。换言之，谱线内的任一频率与全体发光粒子都有关联。因此谱线内任一频率的激光的建立将“均匀地”消耗全体发光粒子，导致增益曲线在整个频率范围内被压低。图 8-6 中，曲线 1 表示小信号时的增益系数，曲线 2 表示当建立起某一频率的激光振荡时被压低了的增益曲线。这时如果有其他频率的光入射，即使是很微弱的光，它的增益系数也出现饱和。

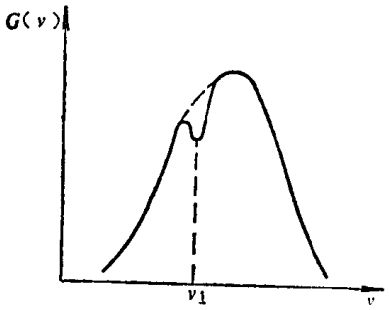


图8-5 “烧孔”现象

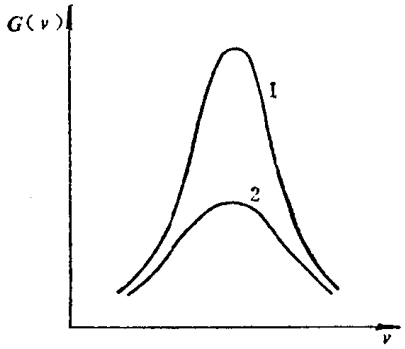


图8-6 均匀增宽谱线的增益饱和现象

最后讨论一种特殊情况。气体激光器中，谱线增宽一般是由多普勒效应引起的。设谱线的中心频率为 ν_0，频率为 $\nu_0+\Delta\nu$ 的光沿 $+Z$ 方向传播时将消耗沿 $+Z$ 方向运动的速度在

$$v_z=c\frac{\Delta\nu}{\nu_0}$$

附近的上能级粒子，因而在增益曲线上在 $\nu_2=\nu_0+\Delta\nu$ 附近造成一个烧孔。但是在驻波型气体激光器⊖中，谐振腔中除了沿 $+Z$ 方向传播的光束外，还有沿 $-Z$ 方向传播的光束。后者将消耗速度在

$$v_z=-c\frac{\Delta\nu}{\nu_0}$$

附近的上能级粒子（负号表示沿 $-Z$ 方向运动）。依照同样的分析可知，对于频率为 $\nu_0-\Delta\nu$ 的光，也将消耗上述两组粒子。因此，在这种情形下，两组上能级粒子与两个频率 $\nu_0\pm\Delta\nu$ 相对应。在腔内一种频率的激光的建立，将同时消耗这两组粒子，因而也导致另一对称频率的增益饱和。因此，在气体激光器中，当在增益曲线中心频率的一侧出现烧孔时，另一侧也

⊖ 我们平常用的气体激光器都是驻波型的，参阅 §9-5。

对称地造成一个烧孔（图 8-7）。与此相联系的是，激光的输出功率 $P(\nu)$ 在中心频率 ν_0 处有一个下陷，称为兰姆凹陷（见图 8-8）。这是由于频率为 ν_0 的激光只与速度 $v_z=0$ 的原子相对应，而频率为 $\nu_0+\Delta\nu$ 或 $\nu_0-\Delta\nu$ 的激光与速度为 $v_z=\pm c\frac{\Delta\nu}{\nu_0}$ 的两组粒子相对应。在气体中粒子的速度分布是遵从麦克斯韦-玻尔兹曼定律的。尽管 $v_z=0$ 的这组粒子比 v_z 为其他值的粒子多，却比不上 $v_z=\pm c\frac{\Delta\nu}{\nu_0}$ 这两组粒子的总和多（假定 $\Delta\nu$ 足够小）。这说明中心频率处的输出功率会有一个下陷。这就定性地说明了兰姆凹陷的成因。

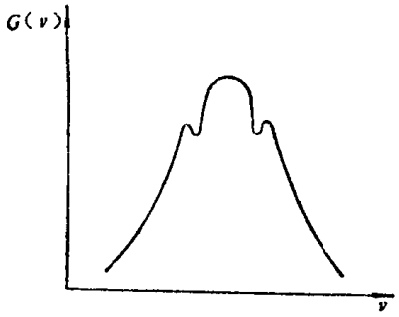


图8-7　气体激光器中的对称“烧孔”现象

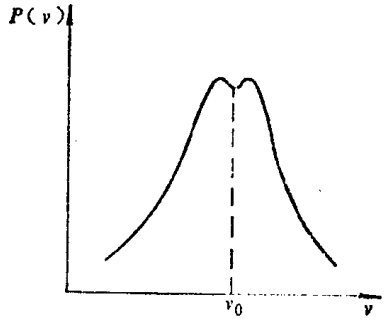


图8-8　兰姆凹陷

§8-3　谐振腔的几何光学理论

一、谐振腔的形式

激光器中常见的光学谐振腔的形式如图（8-9）所示，有平行平面腔、双凹面腔和凹面平面腔三种。其中双凹面腔中的一种特殊形式是共焦腔。它由两个曲率半径相同的凹面镜组成，而且两镜面之间距离等于曲率半径(图 8-10 a)。这样，两个镜面的焦点重合。这就是

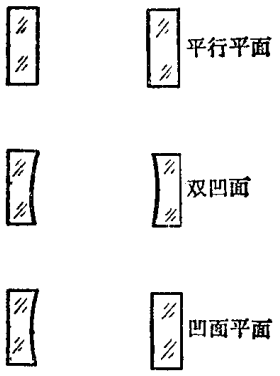


图8-9　光学谐振腔的几种常见形式

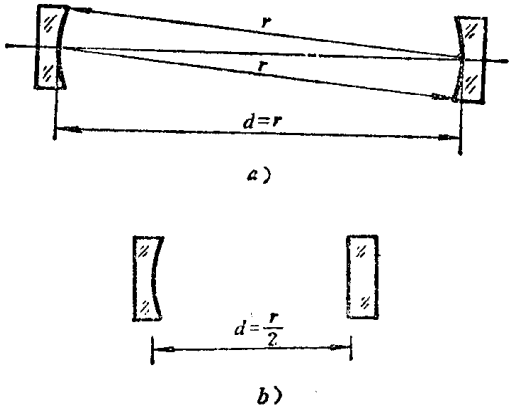


图8-10　共焦腔 a）与半共焦腔 b）

其名称的由来。共焦腔比起平行平面腔的一个优点是制作激光器时容易调整。后者要求两平面镜平行，误差不得超过 1 秒。对共焦腔，两镜面之间的调整精度可以放宽到 15 分。另外共焦腔的衍射损耗也比较小。凹面平面腔中的一种特殊形式是半共焦腔（图 8-10 b），它相当于共焦腔的一半。由于光波在腔内是来回反射的，所以它与共焦腔在光学上是等效的。

二、谐振腔的稳定性

在光学谐振腔中光在两反射镜之间不断来回反射，如果光在腔内经过少数几次反射就偏离腔的轴线而离开腔体的话，就很难形成激光。因此，通常要求谐振腔能保证沿轴向附近传播的光在腔内来回反射时始终不会逸出腔外。满足这个要求的腔称为稳定腔，否则称为非稳定腔。下面我们用光线矩阵的方法分析一下腔的外形尺寸（两反射镜的曲率半径及间距）要满足什么条件才能构成稳定腔。

先讨论对称谐振腔即两镜面的曲率半径相等的情形。设两镜面的曲率半径为 r，间隔为 d。光线在腔内来回反射等效于通过一系列间距为 d 焦距为 $f=r/2$ 的薄透镜序列（图 8-11 a）。为简单起见，只讨论子午面内的情形，并采用傍轴近似。

光线在子午面内的位置用两个参量 x 与 θ 确定。x 代表光线与镜面的交点离轴的距离，交点在轴线之上为正，在轴线之下为负。θ 代表光线与轴之夹角。θ_0 的正负规定如下：从光线转到轴线，顺时针为正，逆时针为负。这两个参数可以写成一列矩阵 $\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix}$ 的形式，称为光线矢量。光线从第一个透镜出发时的光线矢量为 $\begin{pmatrix} x_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix}$，到达第二个透镜时的光线矢量为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$。

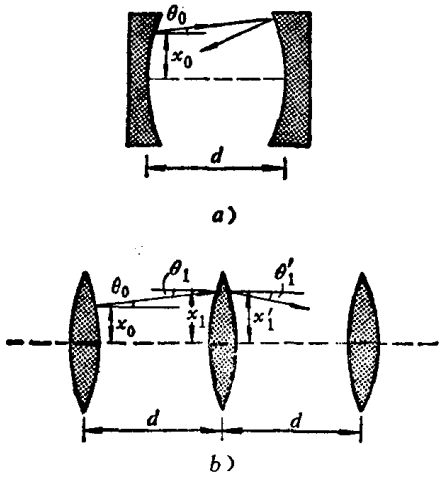


图8-11 光学谐振腔 a）及其等效的透镜序列 b）

显然

$$x_1 = x_0 + d\theta_0$$

$$\theta_1 = \theta_0$$

上述方程可以写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} \tag{8-17}$$

因此光线从透镜 1 到达透镜 2 可以用如下的变换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 表示

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8-18}$$

光线经过焦距为 f 的透镜折射后的光线矢量为 $\begin{pmatrix} x_1' \\ \theta_1' \end{pmatrix}$。根据高斯公式可以得到

$$x_1' = x_1$$

$$\theta_1' = -\frac{1}{f} x_1 + \theta_1$$

上述方程组同样可以写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \theta_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \tag{8-19}$$

所以透镜对光线的变换可以用如下的矩阵 $\boldsymbol{F}$ 表示

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \tag{8-20}$$

物理光学十八 郭

结合式（8-17）与（8-19）得到

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \theta_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & 1-\frac{d}{f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} \tag{8-21}$$

所以光线从透镜 1 出发经过透镜 2 的变换矩阵为

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & 1-\frac{d}{f} \end{pmatrix} \tag{8-22}$$

经过N个透镜后的光线矢量为

$$\begin{pmatrix} x_N' \\ \theta_N' \end{pmatrix} = \underbrace{\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}\cdots\boldsymbol{M}}_{N个} \begin{pmatrix} x_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}^N \begin{pmatrix} x_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} \tag{8-23}$$

如果对于大量光线来说，经过任意次往返之后（亦即$N\to\infty$时），x_N'是有界的，那么谐振腔就是稳定的。由于子午面内的任何光线矢量都可以用矩阵$\boldsymbol{M}$的两个本征矢量的线性组合来表示，因此只要分析矩阵$\boldsymbol{M}$的两个本征矢量就够了。按照本征矢量的定义，它们满足

$$\begin{pmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & 1-\frac{d}{f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\lambda \\ \theta_\lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_\lambda \\ \theta_\lambda \end{pmatrix} \tag{8-24}$$

或者

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & d \\ -\frac{1}{f} & 1-\frac{d}{f}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\lambda \\ \theta_\lambda \end{pmatrix} = 0 \tag{8-24 a}$$

式中$\begin{pmatrix} x_\lambda \\ \theta_\lambda \end{pmatrix}$是本征矢量，$\lambda$是本征值。对于$\begin{pmatrix} x_\lambda \\ \theta_\lambda \end{pmatrix}$的非零解，必须有

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & d \\ -\frac{1}{f} & 1-\frac{d}{f}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{8-25}$$

由此

$$\lambda^2 - 2\left(1-\frac{d}{2f}\right)\lambda + 1 = 0 \tag{8-26}$$

令

$$\alpha = 1 - \frac{d}{2f} \tag{8-27}$$

则

$$\lambda^2 - 2\alpha\lambda + 1 = 0 \tag{8-26 a}$$

解上述二次方程得到

$$\lambda = \begin{cases} \alpha \pm \sqrt{\alpha^2-1} & 当\ |\alpha| > 1 \\ \pm 1 & 当\ |\alpha| = 1 \\ \alpha \pm i\sqrt{1-\alpha^2} = e^{\pm i\varphi} & 当\ |\alpha| < 1 \end{cases}$$

式中φ为实数

$$\varphi = \arctan\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} \tag{8-28}$$

下面根据$|\alpha|$的不同值分别加以讨论。

1）$|\alpha|<1$

矩阵$\boldsymbol{M}$的本征值$\lambda = e^{\pm i\varphi}$，相应的本征光线矢量用$\begin{pmatrix} x_a \\ \theta_a \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} x_b \\ \theta_b \end{pmatrix}$表示。亦即

$$\boldsymbol{M}\begin{pmatrix} x_a \\ \theta_a \end{pmatrix} = e^{i\varphi}\begin{pmatrix} x_a \\ \theta_a \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}\begin{pmatrix} x_b \\ \theta_b \end{pmatrix} = e^{-i\varphi}\begin{pmatrix} x_b \\ \theta_b \end{pmatrix}$$

在子午面内的任何光线矢量$\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix}$都可以用上述两个本征矢量的线性组合来表示

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_a \\ \theta_a \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} x_b \\ \theta_b \end{pmatrix} \tag{8-29}$$

式中A、B是两个常数。将上式代入式(8-23)，求出这条光线经过N次反射后的光线矢量为

$$\begin{pmatrix} x'_N \\ \theta'_N \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}^N\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = A\boldsymbol{M}^N\begin{pmatrix} x_a \\ \theta_a \end{pmatrix} + B\boldsymbol{M}^N\begin{pmatrix} x_b \\ \theta_b \end{pmatrix} = Ae^{iN\varphi}\begin{pmatrix} x_a \\ \theta_a \end{pmatrix} + Be^{-iN\varphi}\begin{pmatrix} x_b \\ \theta_b \end{pmatrix} \tag{8-30}$$

由于$|e^{iN\varphi}| = 1$，可见x'_N仍然是有界的。这说明当$|\alpha|<1$时谐振腔是稳定的。

2）$|\alpha|>1$

矩阵$\boldsymbol{M}$的本征值为

$$\lambda_a = \alpha + \sqrt{\alpha^2+1}$$

$$\lambda_b = \alpha - \sqrt{\alpha^2+1}$$

相应的本征矢量用$\begin{pmatrix} x'_a \\ \theta'_a \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} x'_b \\ \theta'_b \end{pmatrix}$表示。于是

$$\boldsymbol{M}^N\begin{pmatrix} x'_a \\ \theta'_a \end{pmatrix} = \lambda_a^N\begin{pmatrix} x'_a \\ \theta'_a \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{M}^N\begin{pmatrix} x'_b \\ \theta'_b \end{pmatrix} = \lambda_b^N\begin{pmatrix} x'_b \\ \theta'_b \end{pmatrix}$$

在这种情形下，$|\lambda_a|$与$|\lambda_b|$中必有一个是大于1的。因此当$N\to\infty$时$|\lambda_a^N|$与$|\lambda_b^N|$中必有一个趋于无穷大。那么根据类似的讨论可以知道，在这种情形下，腔内的光线除了少数例外情形外，经过多次反射后，x'_N将趋于无穷大。这说明谐振腔是非稳定腔。

3）$|\alpha| = 1$

矩阵的本征值$\lambda = \pm 1$。当$N\to\infty$时，λ^N的值是不定的，所以要进一步加以讨论。

由于$\alpha = 1 - \frac{d}{2f}$，所以这种情形只可能是$d = 4f$。代入式（8-22）得到

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 4f \\ -\frac{1}{f} & -3 \end{pmatrix} \tag{8-31}$$

用数学归纳法不难证明

$$\boldsymbol{M}^N = (-1)^N\begin{pmatrix} 1-2N & -4Nf \\ N/f & 1+2N \end{pmatrix} \tag{8-32}$$

所以

$$\begin{pmatrix} x'_N \\ \theta'_N \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}^N\begin{pmatrix} x_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} = (-1)^N\begin{pmatrix} 1-2N & -4Nf \\ N/f & 1+2N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} \tag{8-33}$$

$$x'_N = (-1)^N x_0 - (-1)^N \cdot 2N(x_0 + 2f\theta_0) \tag{8-34}$$

可见，当$N \to \infty$时，除了少数例外情形外，x'_N是无界的。所以当$|\alpha| = 1$即当$d = 4f$时，谐振腔也是非稳定的。

综上所述，在对称谐振腔的情形，稳定条件由

$$|\alpha| < 1 \tag{8-35}$$

或者由

$$0 < d < 2R \tag{8-35a}$$

给出。

如果谐振腔的两反射镜的曲率半径不相等，设它们的曲率半径分别为r_1与r_2。可以把谐振腔展开成由焦距为$f_1 = \frac{r_1}{2}$与$f_2 = \frac{r_2}{2}$的透镜相间组成的透镜序列，透镜之间的间隔为d。根据类似的讨论可以得到稳定条件为

$$0 < \alpha_1\alpha_2 < 1 \tag{8-36}$$

或者

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \tag{8-37}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 - \frac{d}{2f_1} = 1 - \frac{d}{r_1} \\ \alpha_2 &= 1 - \frac{d}{2f_2} = 1 - \frac{d}{r_2} \end{aligned}\right\} \tag{8-38}$$

因此谐振腔的稳定条件可以用以α_1和α_2为座标轴的图来表示（图8-12）。图中每个点代表腔的一种特定的几何结构。阴影部分的点表示稳定结构。稳定区域与非稳定区域的分界就是座标轴和由$\alpha_1\alpha_2 = 1$所决定的双曲线。

对于共焦腔来说，$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$，即与图中的座标原点相对应。它虽然是稳定的，但由加工误差等因素引起的微小偏差就可能使系统偏离稳定区而引起严重的损耗，因此最好稍微避开这个区域。

最后应指出，上面仅仅考虑了几何损耗。实际上稳定腔与非稳定腔都还存在衍射损耗，只不过非稳定腔的衍射损耗远大于稳定腔。因此稳定性图上的稳定区与非稳定区应理解为低损耗区与高损耗区为宜，不要认为与非稳定区对应的腔就肯定不能形成激光。

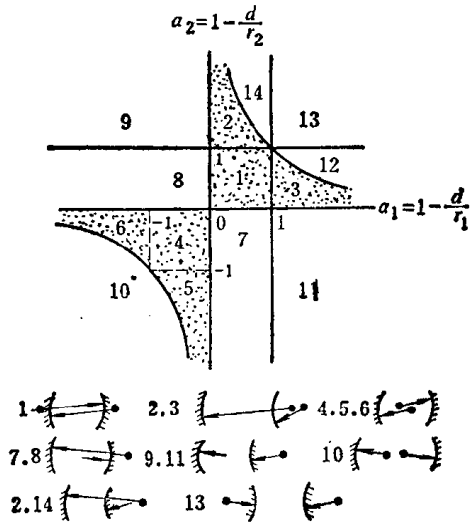


图8-12 球面镜腔的稳定性图

阴影部分代表稳定腔。与稳定性图上标有数字的各区域相对应的腔的结构画在座标图的下面，并用相同的数字标出。

§8-4 光学谐振腔的物理光学理论

一、谐振频率

图8-13中的钟形曲线代表工作介质的增益曲线，水平虚线代表振荡阈值。当频率处在A与B之间时能满足阈值条件，但是并非这个范围内的任何频率都能产生激光。原因是由于光在谐振腔的两个镜子之间来回反射，形成很多束相干光束。对于某些频率来说，光在腔内走一个来回时位相的改变是2π的整数倍。因此向一方向传播的诸相干光束位相相同，相互加强，产生谐振，形成激光。对于另一些频率来说，光在腔内走一个来回时位相的改变是π的奇数倍，它们相互抵消，不能形成激光。因此，光学谐振腔与第三章中讲过的法布里-珀罗标准具类似，也起着滤波的作用。由于光在腔内走一个来回的位相差是$\frac{4\pi nd}{\lambda}$（μ是介质折射率，d是谐振腔的长度），根据谐振条件

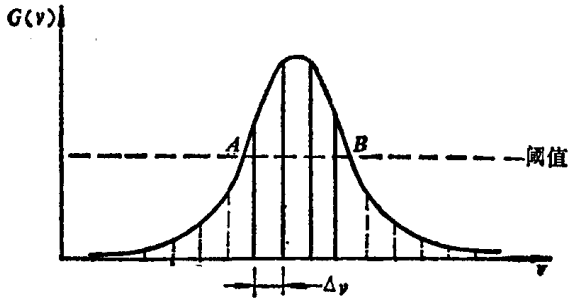


图8-13 谐振频率的确定

$$\frac{4\pi nd}{\lambda}=J\cdot 2\pi \tag{8-39}$$

（式中J是整数）可以求出谐振频率为

$$\nu_J=\frac{c}{\lambda_J}=J\cdot\frac{c}{2nd} \tag{8-40}$$

可见，这些谐振频率是等间隔的，间隔为

$$\Delta\nu=\frac{c}{2nd} \tag{8-41}$$

$\Delta\nu$就等于光在腔内来回一次所需时间的倒数。粗略地，我们把图8-13中A与B之间的频率间隔取作谱线宽度，它除以相邻谐振频率的间隔$\Delta\nu$就可以求出能够形成激光的谐振频率的个数。

例如：对于氦氖激光器，$n\approx1.0$，若腔长$d=250$mm，由式(8-41)算得相邻谐振频率的间隔$\Delta\nu$为

$$\Delta\nu=\frac{c}{2nd}\approx600\text{兆赫}$$

已知Ne原子6328埃谱线的宽度为1500兆赫，所以有两个或三个谐振频率能形成激光。

将光学谐振腔看作法布里-珀罗标准具，根据第三章多光束干涉理论可以求出，共振线的线宽为

$$\delta\nu_0=\frac{c}{2\pi d}\left(\frac{1-R}{\sqrt{R}}\right) \tag{8-42}$$

式中R为反射镜的反射率。仍以上面举的Ne-Ne激光器为例，设$R=98\%$，算出$\delta\nu_0\approx0.5$兆赫。所以共振线宽比荧光谱线宽度小得多。但激光谱线的宽度还远远小于共振线宽，其原

因在下一节再讨论。

二、纵模的物理图象

现在分析一下发生谐振时腔内的物理图象。对于每一个谐振频率，沿着同一方向传播的诸光波的位相完全相同。因此可以把谐振腔内多次反射形成的光波归结成两列沿相反方向传播的光波。一列沿 $+z$ 方向传播，另一列沿 $-z$ 方向传播。根据第二章波的迭加理论知道，这样两列光波会发生干涉，形成稳定的驻波，相邻波节之间的距离是 $\frac{\lambda}{2}$。我们把谐振腔内部沿轴向形成的稳定的驻波花样称为纵模。满足阈值条件的每个谐振频率对应一个纵模。在上面举的例子中，对于腔长为 250mm 的氦氖激光器，有两个或三个谐振频率满足阈值条件，相应地就有两个或三个纵模存在。

三、单纵模的选取

激光中出现多个纵模也就是出现多种频率，影响了激光的单色性。在许多应用（如干涉计量）中需要的是单频（即单纵模）的激光束，所以应该进行选模。

由于纵模间隔与腔长成反比，若缩短激光器的腔长，以增大纵模间隔，使荧光线宽范围内只有一个纵模能形成振荡，就可以获得单纵模的激光输出。例如对于氦氖激光器，如果将腔长缩短到 100 毫米，就能获得单纵模。在对输出功率要求不高的场合，这是一种行之有效的方法。但是缩短腔长显然会影响输出功率。特别是在固体激光器的场合，荧光谱线的宽度非常大，例如红宝石的 6943 埃谱线的宽度为 3.3×10^5 兆赫，如果要用缩短腔长的方法来获得单纵模是行不通的。这时必须采用其他方法来选取纵模。法布里-珀罗标准具法就是另一种常用的选模方法。

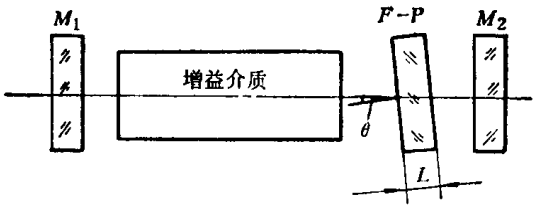


图8-14　用法布里-珀罗标准具选模的装置

如图 8-14 所示，在谐振腔内插入法布里-珀罗标准具，它是一块厚度为 L 对激光束透明的平板，两面有很高的平面度与平行度，并且镀有反射模。根据多光束干涉的理论知道，只有当激光的频率满足一定条件时，标准具才允许它几乎百分之百地通过。这个条件是

$$\nu_m = m\frac{c}{2n_1L\cos\theta'}$$

其中 m 是正整数，c 是光速，n_1 是标准具材料的折射率，L 是标准具的厚度，θ' 是在平板中的折射角。只要选择 L 足够小，就可以使标准具允许通过的各频率之间的间隔超过荧光谱线的宽度。图8-15 a 表示激光器不选模时有五个纵模。图 b 表示标准具的透过率曲线。在 ν_{m-1}、ν_m、ν_{m+1}……处有高透过率，而 ν_m 与 ν_{m-1} 的间隔远远大于激光器的纵模间隔，再适当调节标准具的倾角 θ，使标准具的某一峰值频率 ν_m 与位于中央的纵模频率 ν_g 重合，那么五个纵模中只有一个纵模 ν_g 有高透过率，可以形成振荡，其他四个

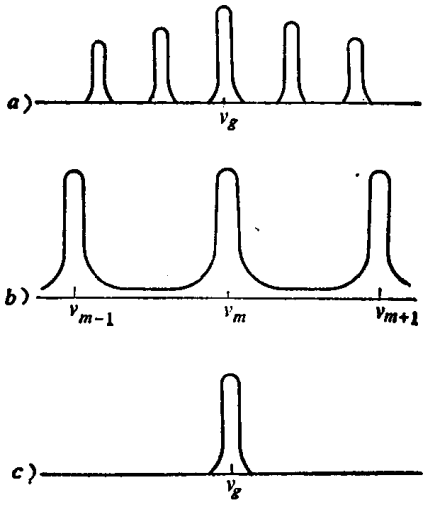


图8-15　用标准具选模的原理的说明

纵模不能形成振荡。因而最后形成图 c 所示的单一纵模的输出。

用法布里-珀罗标准具作为谐振腔的一个反射镜也能达到选模的目的，也可以将标准具放在腔外选模。这些方法就不一一讨论了。

四、横模的形成

上面分析了腔内沿轴向形成的稳定的场分布，在与轴垂直的横截面上，我们假定场是均匀的。但是，这样均匀的横向分布不可能是稳定的。原因很简单，就是光在腔内来回反射时会发生衍射。以平行平面镜腔为例，设两镜子的口径为 $2a$，间距为 d。光在两镜面之间来回反射时所发生的衍射等效于光波通过一系列口径为 $2a$，间距为 d 的圆孔（图 8-16）。设光场原来是均匀的，经过第一个孔时将发生衍射，这就是我们所熟悉的圆孔衍射。在第二个圆孔处，边缘部分将被挡住，同时又发生第二次衍射。通过第三、四、五……孔时将继续发生上述过程。每次作用的结果是削弱边缘部分的光振幅。通过一系列的(例如几百个)圆孔后，将形成图中最后所示的分布。这种分布的特点是光能集中在圆孔的中心部分，边缘部分光强甚小。这样的光束在圆孔系列中传播（即在反射镜间来回反射）时，可以保持其分布不变。也就是说它是一种在反射镜之间来回反射时可以保持稳定的横向光场分布，称之为横模。

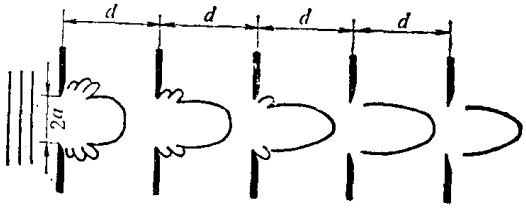


图8-16　与平行平面镜腔等效的圆孔序列

图中曲线代表光波的振幅分布，不是代表波阵面的形状

下面进一步定量地分析横模的形成。在两个镜面上分别作直角座标(x、y)与(x'、y')（见图8-17)。用$\widetilde{E}(x、y)$与$\widetilde{E}'(x'、y')$分别代表两镜面上电磁场的复振幅。根据第四章基尔霍夫衍射理论可以写出

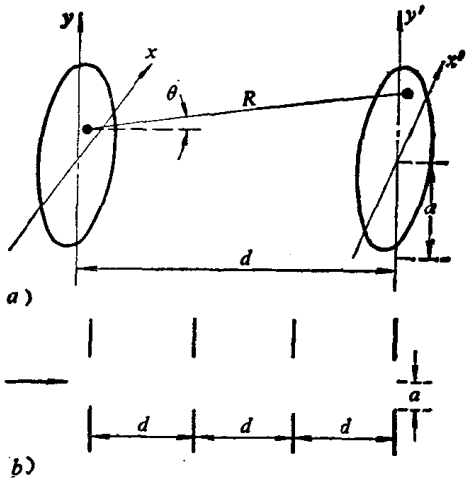


图8-17　衍射公式（8-43）的说明

$$\widetilde{E}'(x',y')=\frac{-ik}{4\pi}\iint\frac{\widetilde{E}(x,y)}{R}\exp(ikR)(1+\cos\theta)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{8-43}$$

式中

$$R=[d^2+(x'-x)^2+(y'-y)^2]^{1/2}$$

$$\cos\theta=\frac{d}{R}$$

如果两镜子相同，那么当来回反射达到稳定时，函数$\widetilde{E}'$与$\widetilde{E}$除了一个常数因子 γ 外是相同的，即

$$\widetilde{E}'(x',\ y')=\gamma\widetilde{E}(x',\ y') \tag{8-44}$$

由式(8-43)与(8-44)得到

$$\gamma\widetilde{E}(x',y')=\iint\widetilde{E}(x,y)K(x,y;\ x',y')\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{8-45}$$

式中

$$K(x, y; x', y') = -\frac{ik(1+\cos\theta)}{4\pi R}\exp(ikR) \tag{8-46}$$

方程（8-45）是未知函数$\widetilde{E}$的积分方程。K叫方程的核，γ叫本征值。这个积分方程有无数个解$\widetilde{E}_m(m=1, 2, \cdots\cdots)$，每一个解对应于一定的本征值$\gamma_m$。每一个解就代表在来回反射时能够重现它自身的稳定的横向分布，即代表一个横模。

用解析的方法精确地求解方程(8-45)是非常困难的。在平行平面镜腔的情形，福克斯与李氏用电子计算机找出了这个方程的数值解。他们的步骤是，假定在一个反射镜上有一初始的场分布，利用方程（8-43）逐步求出场在反射镜之间来回"传播"后的分布。他们注意到，经过多次往返传播之后，场$\widetilde{E}(x, y)$取得了一种不再随往返传播而变化的分布，这就是图 8-16 中定性地描绘的图象。

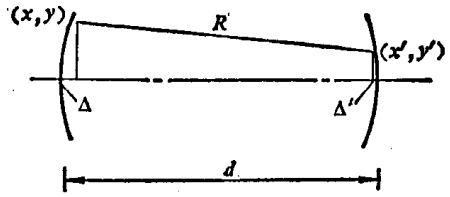


图8-18 公式（8-47）的说明

在共焦腔的情形，利用类似于讨论夫琅和费衍射时所用的远场近似方法，可以解析求解。在这种情况下（见图 8-18）

$$R = [(d-\Delta-\Delta')^2 + (x'-x)^2 + (y'-y)^2]^{1/2} \tag{8-47}$$

式中

$$\Delta = \frac{x^2+y^2}{2r} = \frac{x^2+y^2}{2d} \qquad \Delta' = \frac{x'^2+y'^2}{2d}$$

所以

$$R \approx d - \frac{xx'+yy'}{d}$$

代入式（8-46）得到

$$K(x, y; x', y') \approx C\exp[i\frac{k}{d}(xx'+yy')] \tag{8-48}$$

式中C是常数。于是方程（8-46）变成

$$\widetilde{E}(x'y') = \frac{C}{\gamma}\iint\widetilde{E}(x、y)\exp\left[-i\frac{k}{d}(xx'+yy')\right]dxdy \tag{8-49}$$

这个方程告诉我们，除了一个常数因子外，函数$\widetilde{E}(x, y)$是它本身的傅立叶变换。从第五章傅立叶光学理论知道，满足这个条件的函数中最简单的就是高斯函数：

$$\widetilde{E}(x、y) = \exp\left[-\frac{(x^2+y^2)}{\omega^2}\right] = \exp\left(-\frac{\rho^2}{\omega^2}\right) \tag{8-50}$$

式中 $\rho = (x^2+y^2)^{1/2}$是离轴线的距离，ω称为光斑尺寸，它表示当离开腔轴的距离达到ω时，场的振幅将下降到轴上值的$\frac{1}{e}$。

满足方程（8-49）的更一般的函数是厄米多项式与高斯函数的乘积

$$\widetilde{E}_{p,q} = H_p\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{\omega}\right)H_q\left(\frac{\sqrt{2}\,y}{\omega}\right)\exp\left(-\frac{\rho^2}{\omega^2}\right) \tag{8-51}$$

式中 p、q 表示厄米多项式的阶。厄米多项式是

$$\left.\begin{aligned} H_0(u) &= 1 \\ H_1(u) &= 2u \\ &\vdots \\ H_p(u) &= (-1)^p e^{u^2} \frac{d^p}{du^p} e^{-u^2} \end{aligned}\right\} \tag{8-52}$$

在式（8-51）中，每组（p，q）对应于一个特定的稳定的横向分布，也就是对应于一个特定的横模，通常用符号 TEM_{pq} 表示。公式（8-50）所表示的最简单的横模与 $p=0$，$q=0$ 对应，称为基模（TEM_{00} 模）。图 8-19 中画出了基模及一些低阶横模的复振幅的一维分布，图 8-20 给出了基模与一些低阶横模的照片。从这些图可见，基模的能量分布比较集中，也比较均匀。

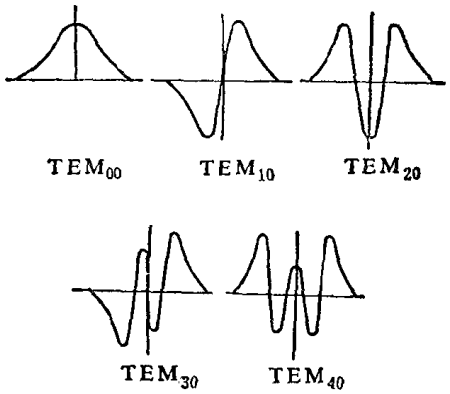


图8-19 基模和一些低阶横模的复振幅分布

还要指出，不但式（8-51）给出的这些横模是可能的稳定分布，它们的线性组合也代表可能出现的稳定分布。

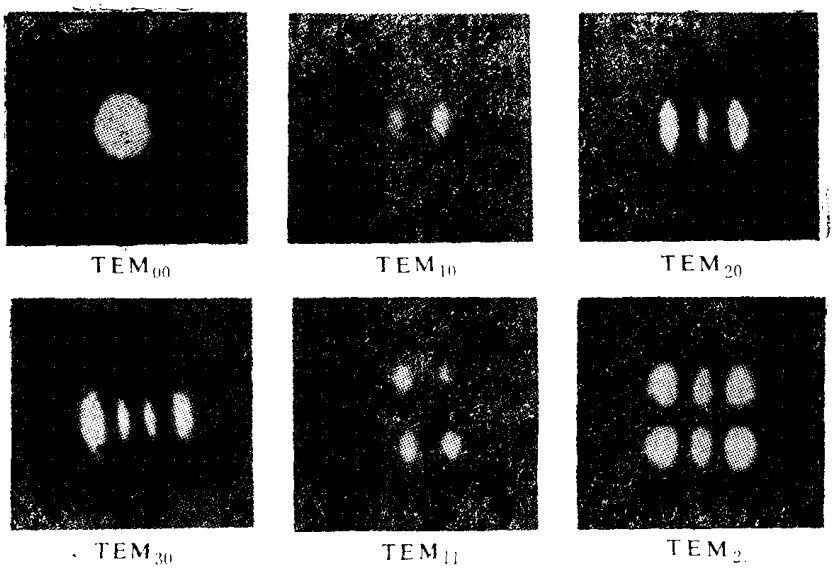


图8-20 某些低阶横模的照片

五、模的频率与横模的衍射损耗

公式（8-45）指出，每个横模 TEM_{pq} 对应一定的本征值 γ_{pq}。把 γ_{pq} 表示为

$$\gamma_{pq} = |\gamma_{pq}| e^{i\phi_{pq}} \tag{8-53}$$

下面分别讨论 φ_{pq} 与 $|\gamma_{pq}|$ 的意义。

1）ϕ_{pq} 代表给定的模式单程通过谐振腔的相移。在共焦腔的情况，把式（8-51）代入方程（8-45）可以求出

$$\phi_{pq} = (p+q+1)\frac{\pi}{2} - kd$$

根据谐振条件，往返的相移 $2\phi_{pq}$ 必须是 2π 的整数倍。于是

$$2\left[(p+q+1)\frac{\pi}{2}-kd\right]=-2\pi m$$

式中m为正整数。由此得到

$$\frac{4d}{\lambda}=2m+(p+q+1) \tag{8-54}$$

于是可以求出模式的频率为

$$\nu=\frac{c}{4nd}(2m+p+q+1) \tag{8-55}$$

式中n是介质的折射率，p、q代表横模的阶。进一步的分析可以证明，m就代表沿腔轴形成的驻波的节数，$m-1$等于节点数。不同的m对应不同的纵模。

从式（8-55）不难看出，相邻纵模之间的间隔为$\frac{c}{2nd}$，与公式（8-41）一致。相邻横模之间的间隔是$\frac{c}{4nd}$。因为p、q、m的许多种组合都给出相同的ν，所以，一定的ν值可以与许多模式相对应。

对于一般的非共焦腔，可以证明它的模式的频率由下式给出

$$\nu=\frac{c}{2nd}\left[m+\frac{p+q+1}{\pi}\cos^{-1}\sqrt{\left(1-\frac{d}{r_1}\right)\left(1-\frac{d}{r_2}\right)}\right] \tag{8-56}$$

式中r_1与r_2分别是两反射镜的曲率半径。

2）$1-|\gamma_{pq}|^2$代表该模式单程通过谐振腔时由衍射引起的相对能量损失。博尹德和戈登曾计算了平行平面腔与共焦腔的一些低阶横模的单程功率损失。计算表明，衍射损失取决于费涅耳数

$$N=\frac{a^2}{\lambda d} \tag{8-57}$$

式中a代表正方形的反射镜的边长的一半。N越大，衍射损失越小。图8-21是他们的计算结果。图中横座标代表费涅耳数N，纵座标代表单程通过谐振腔的相对功率损耗。从图上可以看出，高阶横模的衍射损失比基模大，这是由于基模的能量比较集中于轴线。另外，共焦腔的衍射损耗比较小，这是由于共焦腔对能量有会聚作用。

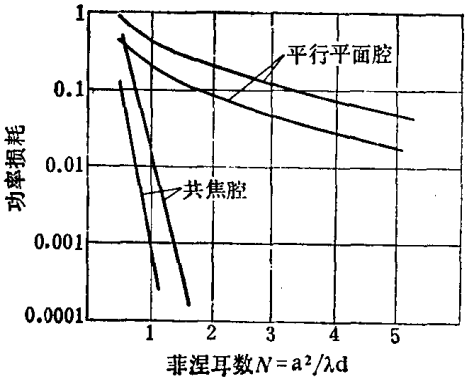


图8-21 横模的衍射损失

六、基模的光斑尺寸与波面的曲率半径

由于一些明显的原因，在实际工作中几乎只利用基模（习题8.9）。由于基模的损耗比较小，它又是激光器中最容易得到的一种模式。

公式（8-51）给出了基模在共焦腔镜面上的场分布。利用方程（8-43）所给出的一般形式的费涅耳积分，也可以求出腔内或腔外任一横截面上基模的场分布。结果表明，在任一横截面上场的分布都是高斯型的。从中心到边缘，振幅按指数规律下降。振幅下降到轴上值的$\frac{1}{e}$时所对应的半径值称为光斑尺寸，用ω_z表示。由于存在衍射，光斑尺寸ω_z必定随着离腔中心的轴向距离z的增大而增大。更详细的讨论可以得出定量的关系为

$$\omega_z=\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}\cdot\frac{d^2+4z^2}{d}} \tag{8-58}$$

不难看出，在 $z=0$ 处，亦即在腔的中心，光斑尺寸最小。这个最小的光斑尺寸称为光束的腰。从式（8-58）可以求出光束的腰为

$$\omega_0=\sqrt{\frac{\lambda d}{2\pi}} \tag{8-59}$$

可以用光束的腰作为一个参数来表示任一横截面上的光斑尺寸。从式（8-58）与（8-59）得到

$$\omega_z=\omega_0\sqrt{1+\frac{\lambda^2 z^2}{\pi^2\omega_0^4}} \tag{8-58a}$$

当 z 足够大时，

$$\omega_z\approx\frac{\lambda z}{\pi\omega_0} \tag{8-60}$$

即光斑尺寸随 z 正比地增加。由此得到光束的发散角为

$$\alpha=\tan^{-1}\frac{d\omega}{dz}\approx\frac{\lambda}{\pi\omega_0} \tag{8-61}$$

研究基模在共焦腔镜面上的复振幅 $\widetilde{E}$ 的表示式（8-50）可以知道，由于在镜面上 $\widetilde{E}$ 是正实数，所以在镜面上场的位相处处相同。这就是说，在镜面处的波前是球面，正好与镜面吻合。在其他横截面上，研究场的表示式的位相因子，同样可以知道，在腔轴附近波前是球面，曲率半径为

$$R_{波前}=z+\frac{d}{4z} \tag{8-62}$$

图8-22　共焦腔内基模的波面形状、驻波花样与模向分布

（图内圆弧线既表示波面形状也表示波腹所在处）

当 $z\to 0$ 时，$R_{波前}\to\infty$。所以在腔中心附近，波前接近平面。当 $z\to\infty$ 时，$R_{波前}\approx z$，波面就好像是从腔中心的点光源发出的一样。当 z 不是很大时，$(R-z)$ 随 z 而变，这说明波面的表观曲率中心随 z 改变。图 8-22 粗略地表示了共焦腔内基模的波面形状、驻波花样与横向分布。

§8-5　激光的谱线宽度

激光具有优异的单色性，正是这种单色性使它在精密计量与全息术等方面获得了重要的应用。

一、激光线宽与谐振腔的品质因子 Q 的关系

在微波技术中，常常采用品质因子 Q 来描述一个微波谐振腔的质量。Q 的定义是

$$Q=\frac{2\pi}{\text{每周期内能量的损耗率}}=2\pi\frac{\text{腔内贮藏的能量}}{\text{每周期损耗的能量}} \tag{8-63}$$

或者

$$Q=2\pi\nu_0\frac{\text{腔内贮藏的能量}}{\text{每秒损耗的能量}} \tag{8-64}$$

其中 ν_0 为谐振频率。显然，每周期内能量的损耗率越小，Q 值就越高，腔的质量就越好。

在激光技术中也同样采用品质因子 Q 来描述光学谐振腔的质量。重要的是，Q 值与谐振

腔的谱线宽度 $\delta\nu$ 之间有如下关系

$$Q=\frac{\nu_0}{\delta\nu} \tag{8-65}$$

这个式子的物理意义是很容易理解的。谐振腔的 Q 值越高，它在每周期内的能量损耗就越小，发射的波列就越长，因而谱线越窄。下面来证明式(8-65)。

设光通过谐振腔时每单位距离的损耗率为 β，即

$$\frac{dI}{Idx}=-\beta \tag{8-66}$$

单位距离内所包含的波长数为 $\frac{1}{\lambda}=\frac{\nu_0}{c}$，所以光通过一个波长距离（亦即一个周期内）的损耗率为 $\frac{\beta c}{\nu_0}$。代入式（8-63）得到

$$Q=\frac{2\pi\nu_0}{\beta c} \tag{8-67}$$

将 $dx=c\cdot dt$ 代入式（8-66），并求积分得到

$$I=I_0e^{-c\beta t} \tag{8-68}$$

可见，谐振腔发射的波列是按指数函数衰减的。用与§8-4中讨论自然增宽时同样的方法可以算出，线宽等于

$$\delta\nu=\frac{c\beta}{2\pi} \tag{8-69}$$

由式（8-67)与(8-69）就得出式(8-65)。

二、单模激光的线宽极限

在激光器中由于介质对光有增益作用，增益可以弥补损耗，因而使激光具有很长的波列，这就是激光器具有优异的单色性的原因。在稳定态时，激光器总是满足阈值条件的，即增益等于损耗。这样一来，似乎激光器的净损耗 β 等于零，光学谐振腔的 Q 值应该趋于无穷大，谱线宽度应该等于零。实际情况并非如此。原因是我们忽略了自发发射过程。自发发射过程也向谐振腔的模式提供能量。在达到稳定时

$$\underbrace{P_{自发}+P_{受激}}_{增益}=P_{损耗} \tag{8-70}$$

其中 $P_{自发}$ 为自发辐射所贡献的非相干辐射的功率，$P_{受激}$ 为受激发射所贡献的相干辐射的功率。二者之和恰好等于损耗的功率，但是受激辐射本身所贡献的相干辐射的功率却小于损耗。因此，每一光波有一定的衰减率，正是这种衰减造成一定的线宽。同时，腔内自发辐射又产生一列列与前者位相无关的波列，它们的光强相加（非相干叠加)，使腔内光强保持恒定。所以，单位时间内相干辐射的净损耗为

$$P_{净}=P_{损耗}-P_{受激}=P_{自发} \tag{8-71}$$

设腔内贮藏的总能量为 W，按照式(8-64)，

$$Q=2\pi\nu_0\frac{W}{P_{净}}=2\pi\nu_0\frac{W}{P_{自发}} \tag{8-72}$$

代入式（8-65）求得单模激光的线宽

$$\delta\nu=\frac{P_{自发}}{2\pi W} \tag{8-73}$$

进一步的讨论可以把自发辐射所贡献的功率与激光器的输出功率联系起来，最后得到

$$\delta\nu = \frac{N_2}{N_2 - \frac{g_2}{g_1}N_1} \cdot \frac{2\pi(\Delta\nu_0)^2 h\nu}{P_{出}} \tag{8-74}$$

式中N_2、N_1为上、下能级的粒子数密度，g_2、g_1为上、下能级的统计权重，$P_{出}$为激光输出功率，$\Delta\nu_0$为无源谐振腔的线宽，即上一节谈到的共振线宽〔式(8-42)〕。如上所述，式(8-74)所给出的线宽是由于还存在自发发射产生的，自发发射是无法排除的，因此称这个线宽为线宽极限，也就是消除了其他各种使激光线宽增加的因素后可以达到的最小线宽。

例如，设He-Ne激光器的输出功率为1毫瓦，波长$\lambda = 6328$埃，腔长$d = 300$毫米，两反射镜的反射率均为98%。在上一节已算出

$$\Delta\nu_0 = 0.3 \text{ 兆赫}$$

将这些数值代入式(8-74)算出线宽极限

$$\delta\nu = 2 \times 10^{-4} \text{ 赫}$$

三、实际激光器的线宽

实际激光器输出的线宽远远超过上述极限，下面分别以氦氖激光器和红宝石激光器为例加以说明。我们知道，纵横频率与腔长有直接的关系。当温度起伏引起腔长变化时，就会导致纵横频率的漂移。对玻璃壳的氦氖激光器，即使温度仅仅变化百分之一度，将引起频率漂移10^8赫。若在某一段时间内温度有上述起伏，在该时间内接收到的激光线宽就有这一数量级。此外，激光器中增益或损耗的无规涨落也会引起纵横频率的漂移。在采取稳频措施（见§8-7）以后，目前氦氖激光器可以获得的最窄的线宽为几赫兹。

在固体激光器中，除了上述因素引起频率漂移外，还有两个重要的因素：i）固体激光器一般是多模运转的，多模振荡的迭加也使线宽增大；ii）固体介质在工作时，由于温度升高所引起的荧光谱线中心频率的移动更是远远超过上述数量。例如红宝石激光器输出的6943埃激光的线宽约为6×10^{10}赫(～1埃)。

§8-6 激光器的类型

一、气体激光器

气体激光器是目前种类最多、应用最广泛的一类激光器，它具有容易连续运转、相干性好、结构简单、造价低廉等优点。因此在国防建设与工农业各部门广泛地用作准直导向、计量基准、材料加工以及作为全息照相、激光光谱学的相干光源等。

1. 一般结构

图8-23是气体激光器的三种典型结构。图8-23 *a* 中组成光学谐振腔的两个反射镜紧贴在放电管的两端，称为内腔式；图8-23 *b* 中组成光学谐振腔的两个反射镜与放电管完全分开装架，称为外腔式。在这种型式中，光从放电管D的端面射出再被反射到管内，需要经过窗表面四次。为了减少反射损失，采用了与光轴成一倾角的透明窗（称为布儒斯特窗），使得光在窗片上的入射角等于布儒斯特角。这样，对于TM波（电场方向与入射面平行，磁场与入射面垂直的波）来说，在端面不反射，犹如没有窗片一样，可以畅通无阻，在腔内形成稳定的振荡；而对TE波（电场方场跟入射面垂直的波）来说，在端面反射损失很大，不能形成振荡。因此

从外腔式气体激光器射出的激光是电矢量与入射面平行的线偏振光；图8-23 c 中谐振腔的两个镜片，一个紧贴放电管的一端，另一个与放电管分开装架，称为半外腔式。它产生的激光也是线偏振光。

气体激光器一般采用放电激发。具体地说，可以有如下几种方式：

i）直流放电；

ii）交流放电；

iii）无电极的高频放电；

iv）高压脉冲。

前两种方法是目前常用的。如果激光器是用于外差式通讯等用途，第一种方法比较有利。第二种方法的优点是简单，只要将高压变压器的次级接到放电管的两个电极上即可。第三种方法是雅文等人在制成第一台 He-Ne 激光器时用过的。第四种方法用于高压脉冲激光器。当不能维持稳定的粒子数反转时，就必须采用这种方法。

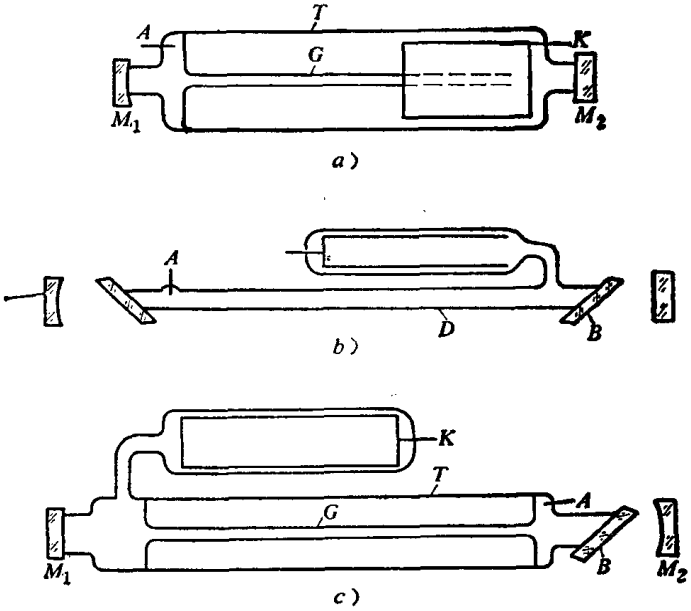


图8-23 气体激光器的三种典型结构

M_1、M_2—反射镜 A—阳极 K—阴极 T—套管 G—毛细管 B—布儒斯特窗

2. He-Ne激光器

图 8-24 是 He-Ne 激光器系统的能级图。从图可以看到，Ne 原子的 $2S$ 和 $3S$ 能级的激发能同 He 原子的 $2S_1$ 和 $2S_0$ 能级差不多。在气体放电时，He 原子首先被激发到 $2S_1$ 与 $2S_0$ 能级。这两个能级是亚稳态，从它们到基态的辐射跃迁是被禁止的。处在这两个亚稳态的 He原子与基态的 Ne 原子碰撞，将 Ne 原子激发，而 He 原子无辐射地回到基态。这就是上一章中讲过的共振转移：

$$\left.\begin{aligned} He^*(2S_1)+Ne &\longrightarrow He+Ne^*(2S) \\ He^*(2S_0)+Ne &\longrightarrow He+Ne^*(3S) \end{aligned}\right\} \quad (8\text{-}75)$$

式中用“*”号表示激发态原子。在适当条件下，在氖原子的 $3S$、$2S$ 能级与 $3P$、$2P$ 能级之间会出现粒子数反转。在 $2P$ 与 $3P$ 能级上的 Ne 原子则通过自发跃迁很快地落到 $1S$ 能级，再通过跟管壁的碰撞，将能量交给管壁回到基态。这样一种抽空激光下能级的过程有助于维持稳定的反转状态。

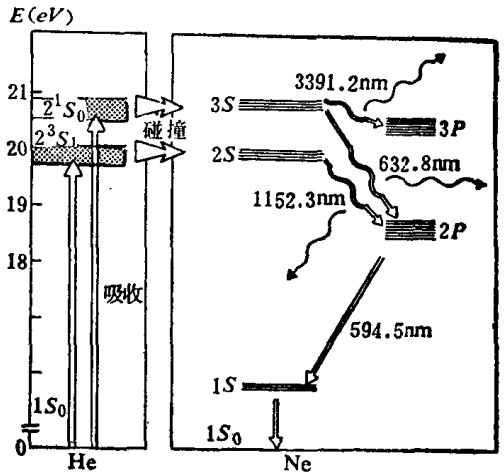


图8-24 He-Ne 激光器系统的能级图

在 He-Ne 激光器中产生的激光谱线主要有三条，它们与 Ne 原子的下列跃迁相对应

$3S_2 \longrightarrow 2P_4$ 6328 埃

$2S_2 \longrightarrow 2P_4$ 1.1523 微米

$3S_2 \longrightarrow 3P_4$ 3.39 微米

6328 埃与 3.39 微米跃迁具有共同的上能级，而且 3.39 微米跃迁的增益比 6328 埃高得多，它会大量消耗 $3S_2$ 能级上的氖原子，这对 6328 埃激光是不利的。为了提高 6328 埃的输出功率，必须抑制 3.39 微米的激光。最常用的方法是使激光器的反射镜只对 6328 埃有高反射率，而对 3.39 微米反射率很低。另一个方法是沿放电管放置许多磁铁（见图8-25），产生一个不均匀的轴向磁场。磁场使 6328 埃和 3.39 微米两条谱线分裂为频率相差很小的两条谱线（这称为塞曼效应）。由于磁场是不均匀的，放电管中有些地方磁场强，有些地方磁场弱，因此有的地方谱线分裂的大，有的地方分裂的小，这相当于把谱线加宽了。而增益反比于线宽，谱线加宽就使增益下降。6328 埃的多普勒宽度约为 3.39 微米的五倍，所以磁场造成的谱线加宽，对 6328 埃来说因其谱线本来就很宽影响不大，而对 3.39 微米影响很大，这就有效地降低了 3.39 微米的增益，抑制了 3.39 微米的激光。

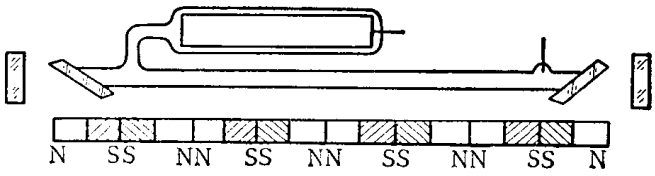


图8-25　利用磁铁抑制 He-Ne激光器3.39 μ 的激光

He-Ne 激器的输出功率约在 1～100 毫瓦的范围。最常见的长度为 250 毫米的 He-Ne 激光器的输出功率约为 1.5 毫瓦，直流放电电压 1500 伏，放电电流 5 毫安，输入功率 8 瓦，效率为 0.02%。氦氖激光器的输出功率与放电条件有很大关系，下面分几点加以说明。

i）在一定的气体配比下，存在一个使输出功率达到极大的最佳充气气压。实验表明，最佳充气气压 p 与管径 a 的乘积近似地是一个常数

$$p \cdot a = 3.6\text{乇}\cdot\text{毫米} \tag{8-76}$$

ii）输出功率随气体配比的变化不太明显。随着放电管管径的增大，最佳气体配比略有下降。当管径 a =1.5 毫米时，充气配比 He:Ne 取 7:1 最好；当 a = 8 毫米时，取 4:1 最好。

iii）输出功率随放电电流的变化如图 8-26 的曲线所示。可见，最佳放电电流随充气气压的降低而升高。

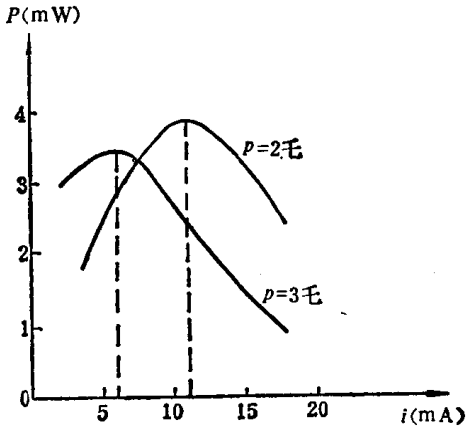


图8-26　氦氖激光器的输出功率随放电电流的变化

3. 其他的气体激光器

在单种气体或气体混合物中的放电已经产生大量的激光谱线，它们的波长从远红外一直延伸到紫外。表 8-1 总结了一些常见的气体激光器及其主要谱线。全部惰性气体（氦、氖、氩、氪、氙、氡）能在单种气体中产生激光跃迁。例如，氩离子激光器，在可见波段的兰区产生好几种波长的激光，在连续工作条件下，功率可达 500 瓦。在锌、镉、水银、铅、锡等金属蒸汽中的脉冲放电也已用来产生激光。卤素如氯、溴、碘等同样能在脉冲条件下产生激光跃迁。在分子气体中的放电可以在分子能级之间产生粒子数反转。最著名的是氮分子激光器（在红外与紫外区）与二氧化碳激光器（波长在 10 微米左右）。特别是二氧化碳激光器，近年来进展很快，为大功率高效率激光器开辟了新的途径。目前二氧化碳激光器的连续输出功率已达 100 千瓦，是所有激光器中最高的，脉冲输出的峰值功率可达数兆兆瓦。

表8-1 常用气体激光器的波长

气体种类	激活介质①	主要激光波长(微米)	备注
He-Ne	Ne	0.6328, 1.15, 3.39	连续
Ne	Ne	0.5401, 0.6143, 1.15	脉冲、高增益
Ne	Ne^+	0.3323, 0.3378, 0.3392	连续或脉冲
Ar	Ar^+	0.4765, 0.4880, 0.5145	连续或脉冲
Kr	Kr^+	0.5308, 0.5509, 0.5863, 0.6471	连续或脉冲
Xe-He	Xe	3.507, 5.574	连续、高增益
Xe	Xe^+	0.4603, 0.5419, 0.5971	连续或脉冲
$Ne-O_2$, $Ar-O_2$	O	0.8446	连续
N_2	N_2	0.3371	脉冲、高增益
空气, N_2	N^+	0.5679	脉冲
He-Cd	Cd^+	0.3250, 0.4416	连续、高效率
CO_2-N_2-He	CO_2	10.6	连续或脉冲，高功率与高效率
H_2	H_2	0.12, 0.17	第一个真空紫外激光器
H_2O	H_2O	27.9, 118.6	长波长
CH_3CN-NH_3 (乙腈-氨)	HCN (氰化氢)	337	波长更长

① 激活介质指产生激光跃迁的介质。

二、固体激光器

1. 一般结构

固体激光器中，起受激发射作用的激活离子镶嵌在晶体或玻璃之类的固体基质中。激活离子的密度约为 $10^{19}\sim10^{22}$个/厘米^3，比气体工作物质的粒子密度大得多。作为基质的晶体或玻璃通常做成棒状，两端面抛光成光学平面，并具有很好的平行度。在两端面镀上反射膜，就可以构成谐振腔。也可以另外用两个反射镜构成谐振腔。

固体激光器一般采用光泵抽运。作光泵用的光源通常是氙灯或高压水银灯，可以是连续发光的或脉冲式发光的。

图 8-27 画出了固体激光器的两种典型结构。在图8-27 *a* 中，激光棒 *L* 放在螺旋状灯 *X* 的里面，棒的端面镀有反射膜。这样，整个激光器既紧凑又简单。图8-27 *b* 是一种比较复杂的系统。激光棒 *L* 放在椭圆柱面镜 *K* 的一条焦线上，作光泵用的氙灯 *X* 放在另一条焦线上。谐振腔的两个反射镜 M_1、M_2 与激光棒分开装架。

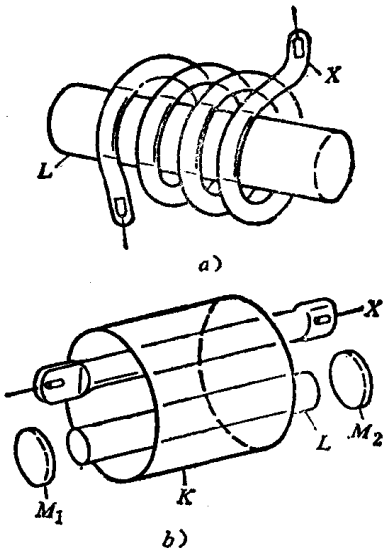


图8-27 用光泵抽运的固体激光器的两种典型结构

2. 红宝石激光器

红宝石激光棒是由掺有0.05%(按重量计)的Cr_2O_3的人造白宝石（Al_2O_3）单晶制成的。Cr^{3+}的密度约为1.6×10^{19}个/厘米^3。在光学上，它属于单轴晶体，$n_0=1.764$，$n_e=1.756$。由于晶体中的Al^{3+}被Cr^{3+}所取代，对蓝光与绿光有吸收作用，使棒呈粉红色，故有红宝石之称。我国在1958年大跃进高潮中第一次制成了优质的红宝石晶体，并在这个基础上于1961年制成了第一台红宝石激光器。

在红宝石中，激活离子是Cr^{3+}离子。Cr^{3+}离子的能级如图8-28所示。在激光器运转时，Cr^{3+}吸收了外来光从基态^4A跃迁到激发态$^4T_1$或$^4T_2$，这对应于红宝石中Cr^{3+}离子的吸收光谱（图8-29）的蓝紫区与绿区的吸收峰。$^4T_1$与$^4T_2$两能级很宽，每一个宽约为1000埃，使得光泵抽运的效率比较高。Cr^{3+}在这两个能级上是不稳定的，迅速无辐射地跃迁到亚稳态

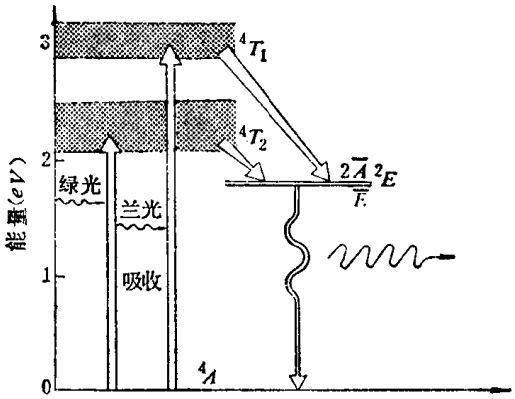


图8-28 红宝石中的Cr^{3+}离子的能级图

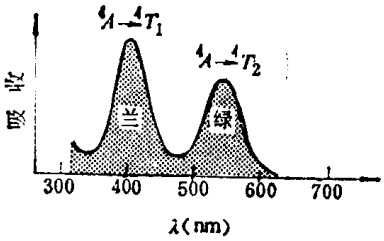


图8-29 红宝石的Cr^{3+}离子的吸收光谱

^2E，^2E的寿命长达3×10^{-3}秒，所以在^2E上能积累起大量的Cr^{3+}离子，这样在^2E与基态^4A之间出现粒子数反转。能级E^2实际上由两个靠得很近的能级$\bar{E}$与$2\bar{A}$组成。从$\bar{E}$到基态的跃迁称为R_1跃迁，对应于波长6943埃；从$2\bar{A}$到基态的跃迁称为R_2跃迁，对应于波长6929埃。由于$\bar{E}$与$2\bar{A}$两能级靠得很近，热运动使这两能级间的粒子交换十分频繁，可以认为它们的粒子数始终相等。但由于R_1线与R_2线的荧光强度比为7:5，亦即增益系数G之比为7:5，结果R_1线首先达到阈值，产生激光，此时$\bar{E}$能级上的粒子大量被消耗，$2\bar{A}$上的粒子迅速补充到$\bar{E}$能级上来，使R_2线始终达不到阈值。所以通常在红宝石激光器中只有R_1跃迁（$\lambda=6943$埃）能形成激光。

下面介绍一下红宝石激光器的输出特性。

i）时间特性

在抽运闪光开始后约半毫秒，红宝石激光器开始发生激光。一经开始，受激发射迅速耗用高能级上的粒子——比抽运供给速率快得多。这样激光被迫停顿，并“等待”粒子数反转再次出现。这个过程不断被重复，结果给出一个含有大量尖峰的输出（见图8-30）。每个尖峰持续约1微秒。

ii）激光线宽

激光谱线的宽度较大，约为0.1～1.0埃。宽度大的原因有二：一是红宝石器件一般为多模运转；二是在一次脉冲过程中，激光棒温度的变化引起激光波长的变化。例如，当棒的温度变化10℃时，可以引起波长改变0.7埃。

iii）偏振特性

当红宝石棒的几何轴线与晶体的光轴方向一致时，输出的激光是自然光。当棒轴方向与晶体的光轴方向成60°或90°角时，输出的激光是线偏振光，其电矢量垂直于由棒轴与晶体光轴所构成的平面。

iv）空间特性

对平行平面镜腔产生的基模激光束，发散角应该是很小的，近似等于激光棒孔径的衍射角：

$$2\theta = 2 \times \frac{1.22\lambda}{\phi} \qquad (8\text{-}77)$$

其中 ϕ 为棒的直径。例如对 $\phi = 6$ 毫米的晶体，按上式计算出来的发散角 2θ 为0.28毫弧度。但实际制成的激光器，发射角往往高达 5 毫弧度。这是由于晶体内部不均匀及工作时出现高阶横模造成的。用高质量晶体制成并经严格选模的单横模激光器，其发散角可接近衍射角。曾报导 ϕ 3.5 毫米的红宝石晶体产生的单模激光束，其发射角为 0.53 毫弧度，与式（8-77）给出的衍射极限十分接近。

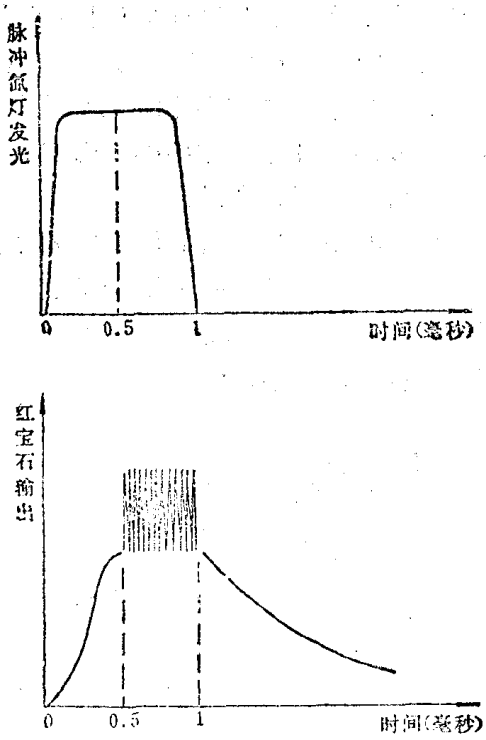


图8-30 红宝石激光器输出的时间特性

3. 其他的固体激光器

除红宝石外，一些其他晶体，当掺入外壳层不完全充满的杂质原子时，也能产生激光跃迁。例如：掺钕的钇铝石榴石（Nd：YAG）是很有效的激光材料，激光跃迁的波长 $\lambda = 1.06$ 微米。这种激光器当用钨丝灯作光泵抽运时能连续运转。另外如玻璃、CaF_2 晶体、$CaWO_4$晶体等许多固体材料也可以作为钕的基质。表 8-2列出了一些固体激光器的材料与波长。

表8-2 一些固体激光器的材料与波长

激活离子	基底材料	波长（微米）	备注
Cr^{3+}	Al_2O_3(红宝石)	0.6943	大功率
Nd^{3+}	CaF_2	1.046	—
	$CaWO_4$	1.06	—
	玻璃	1.06	使用广泛
	YAG(钇铝石榴石)	1.06	效率高，也能连续工作
Ho^{3+}	CaF_2	2.09	—
Er^{3+}	CaF_2，玻璃	2.04	—
Tm^{3+}	SrF_2，$CaWO_4$	1.9	—
Yb^{3+}	玻璃	1.1	—
U^{3+}	BaF_2，CaF_2	2.5	—

三、半导体激光器

半导体激光器在所有激光器中是最小巧的，而且它结构简单坚固，又便于直接调制，所以在光通讯、测距、信息存贮与处理等方面有着重要的应用。此外，在激光技术的一个重要方面——可调谐激光器的研究中，半导体激光器也占有一定的地位。

最简单的半导体激光器是由一个P－N结构成的。我们所熟悉的半导体二极管、三极管等许多半导体器件也是由一个或几个P－N结构成的。

P－N结的一个重要特性是具有整流作用。这一点在普通物理学中已经论及，不再赘述。P－N结还有一个特性，当正向通过电流时，电子从N区通过P－N结注入P区，空穴从P区通过P－N结注入N区，有一部分电子和空穴在结区复合，复合的结果要释放出能量。这种能量可以用光子的形式释放出来，称为复合辐射，这就是发光二极管的原理。在制成半导体激光器之前，人们就已制成了发光二极管。目前制造发光二极管的材料通常是GaAs。发光二极管有许多用途，例如在电子计算机中作数值显示。正像普通光源一样，这里也有自发辐射、受激辐射和受激吸收三个过程。在发光二极管中自发辐射占绝对优势。如果注入电流足够大，受激辐射就会超过受激吸收。当电流达到阈值使受激辐射的增益超过损耗时就可以形成激光。当然，为了产生激光还必须有光学谐振腔。可以利用GaAs晶体的天然解理面来作谐振腔的两个反射面。图8-31是GaAs半导体激光器的示意图。图中的（110）面就是天然解理面，它构成谐振腔的反射面。

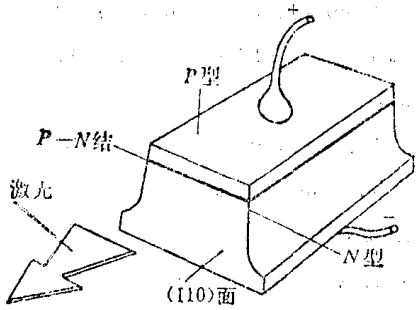


图8-31　GaAs激光器的示意图

在上面的例子中，P型与N型的基质都是GaAs，这样形成的P－N结叫同质结。同质结半导体激光器在室温下的阈值电流高达5×10^4安/厘米^2，所以不能连续工作。现在已经发展了异质结的半导体激光器，所谓异质结就是指由不同材料构成的结。这种激光器在室温下的阈值电流已降到2000安/厘米^2，可以连续工作。输出功率高达200毫瓦，寿命达几百万小时，功率效率可达10～20%。

同质结GaAs激光器的波长约为9040埃，异质结GaAs半导体激光器的波长约为8100埃。如果在GaAs中掺入磷，则波长可移向可见光。如果掺入铟，可以将波长移到1.1微米左右，这对于光通讯有很大的意义。因为光通讯中是依靠玻璃纤维来传输光讯号的。当波长为1.1微米时，光讯号在玻璃纤维中损耗极小，可以传播很长的距离。

四、染料激光器

第一台染料激光器是1966年制成的。近年来在这方面的研究工作十分活跃，这是因为染料激光器能够连续调谐。虽然用其他方法也能获得可调谐的激光，但是在光谱的可见区与近紫外区，要数染料激光器最简单最方便。

染料激光器的工作物质是染料溶液。为了了解它的工作原理，先简单介绍一下染料分子的能级图。分子的能级比原子能级要复杂得多。这是因为在分子中，除了电子的能量外，组成分子的各个原子之间还有相对振动；另外，分子作为整体，还要转动。所以分子的能量可以看作由三部分组成

$$E = E_{电子} + E_{振动} + E_{转动}$$

这三部分能量都是量子化的。其中，电子能量 $E_{电子}$的量子化间隔最大，约为几个电子伏特；振动能量 $E_{振动}$的量子化间隔约为1/10电子伏特；转动能量 $E_{转动}$的量子化间隔最小，比振动能量的量子化间隔还要小两个数量级。

图8-32粗略地表示了染料分子的能级图。其中，S_0是基态，S_1、S_2是激发态。S_0、S_1、S_2之间的大间隔就是由于电子能量的量子化形成的。S_0、S_1、S_2本身又是由许多密集的振动转动能级组成的，其中粗实线之间的间隔是由于振动能量的量子化形成的。在原子光谱里，不同电子态之间的跃迁产生一条锐的谱线。在分子光谱里，不同电子态(例如 S_1与S_0)之间的跃迁将产生由一簇密集的谱线组成的谱带。

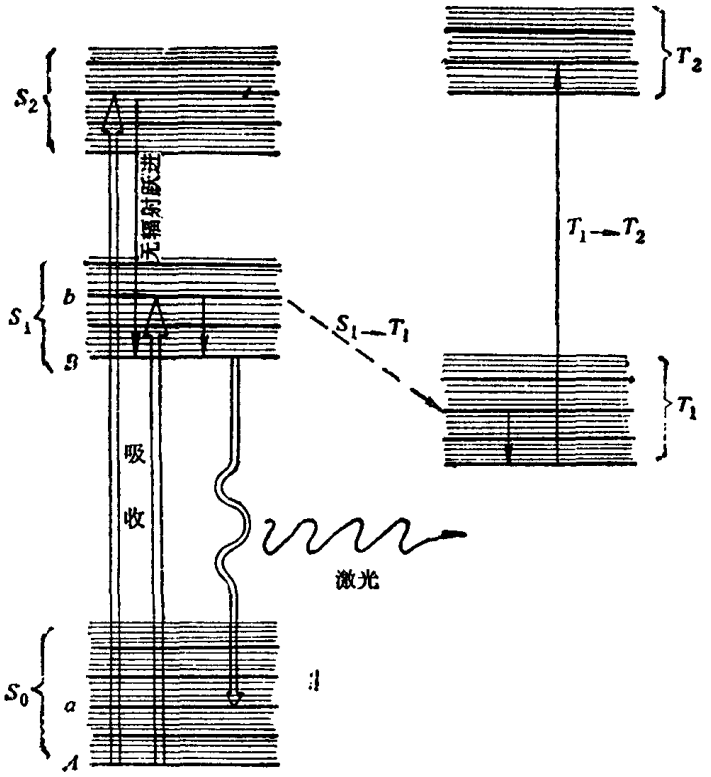


图8-32 染料分子能级图

在热平衡时，分子在各能级上的分布也是遵从玻尔兹曼分布定律的。在室温下，绝大部分分子处在基态的最低的那些振动转动能级上。吸收了外来光子后，分子就从这些能级跃迁到 S_1 态的较高的那些振动转动能级上（见图 8-32 中 $A\rightarrow b$）。分子也有可能从基态跃迁到S_2态再很快地落到S_1态上。由于频繁的热交换，在 S_1 态的各个振动转动能级上，分子将重新分布，在极短的时间(约10^{-11}秒)内达到玻尔兹曼分布，大多数被激发的分子无辐射地衰变到 S_1 态的最低的振动转动能级上（$b\rightarrow B$）。这样，在B与基态 S_0 的较高的振动转动能级（例如 a）之间就实现了粒子数反转。当反转达到阈值时，就可以产生激光。

能级图中的 T_1 和 T_2 是三重态，它们虽然没有直接卷入激光跃迁，但对染料激光器有重要的影响。从单重态 S_1 到三重态 T_1 的跃迁虽然是选择定则所不允许的，但也有一定的几率会发生。因为 T_1—S_0 跃迁是禁止的，于是 T_1 态上的分子越积越多。从 $T_1\rightarrow T_2$ 的跃迁是允许的，而且这一跃迁所吸收的光子的频率范围恰好与激光跃迁的频率范围相同。当 T_1 态上积累了足够的分子后，$T_1\rightarrow T_2$的吸收将很快使激光器的增益下降，以致激光淬灭。由于这个原因，一些染料激光器往往是脉冲运转的，脉冲持续时间短于T_1态上的粒子积累时间。为了连续运转，必须让染料溶液迅速而连续地流动。这一方面是为了避免 $T_1\rightarrow T_2$ 的吸收的干扰，另一方面也是为了避免染料由于强烈吸收光而发热分解。

所有的染料激光器都是用光泵抽运的，主要要求光泵输出的波段接近染料的吸收峰。可以象固体激光器那样用氙灯抽运，也可以用别的激光器(如氮分子激光器、氩离子激光器等)来抽运。

如上所述，激光跃迁的下能级是S_0态的较高的那些振动转动能级。由于S_0态的振动转动能级有一个分布范围，这样就可以利用插入腔内的调谐元件（光栅、棱镜等）来改变输出激光的频率。图8-33是用激光抽运的可调谐染料激光器的光路图。激发光源是红宝石激光器（未画出），它的光束与谐振腔轴成一个小角度（～3°）。谐振腔由反射光栅G与一个镀有介质膜的反射镜M组成。转动光栅就可以改变输出激光的频率。腔内插入一个法布里-珀罗标准具，按图中箭头所示方向摆动标准具可以进一步选择输出激光的频率。不插入标准具时，输出激光的线宽为0.5埃，插入标准具后，可获得线宽约为0.01埃的单模激光。

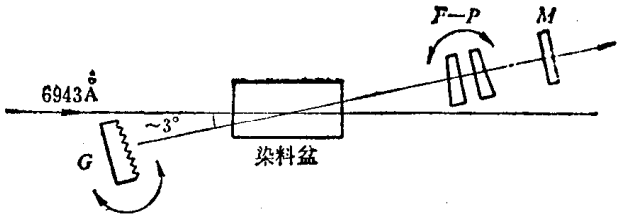


图8-33 可调谐染料激光器的光路

表8-3总结了一些激光染料的调谐范围。

表8-3 一些激光染料的调谐范围

染料	大致的调谐范围(埃)	染料	大致的调谐范围(埃)
甲酚紫	6400～7000	四甲基缬形酮	4400～5400
吖啶红	6000～6300	香豆素	4400～4900
若丹明-B	5800～6900	二苯基蒽	4300～4500
若丹明-6G	5600～6500	钠水杨酸盐	3900～4200
钠荧光素	5200～5700	POPOP	3800～4400

§8-7 氦氖激光器的稳频

一、稳频的意义

He—Ne激光器具有良好的单色性和相干性，所以广泛地用于干涉计量。在长度计量等应用中还需要稳定激光的频率。因为当用光波波长作为基准测量长度时，光的频率稳定与否，亦即光的波长稳定与否，直接影响到测量的精度。另外，频率的漂移也会引起输出功率的变化。

一台激光器的频率稳定性可以用频率的相对变化$\frac{\Delta\nu}{\nu}$来衡量。它分为两个指标：（i）如果$\Delta\nu$是指一次工作期间频率的变化，这样得出的$\frac{\Delta\nu}{\nu}$叫稳定度。这又可以分为短时间的稳定度与长时期的稳定度；（ii）如果$\Delta\nu$是指一台激光器在这一工作期间与过了一段时间以后再工作时的频率的差别，或者指用同样方法稳频的两台激光器之间的频率差别，这样得出的$\frac{\Delta\nu}{\nu}$叫再现性。

二、影响频率稳定的因素与消除方法

在§8-4中已经指出，激光器的纵模频率由下式决定

$$\nu_J = J\frac{c}{2nd} \tag{8-78}$$

式中n是介质的折射率，d是腔长。d或μ的变化都会引起输出频率的变化。更细致的分析

一下，可以知道影响频率稳定的因素有以下四个：

i）腔体振动；

ii）机械机构的热膨胀；

iii）腔内光学元件（如布儒斯特窗片）的折射率随温度变化；

iv）气压的变化引起折射率的变化。

为消除第一个因素，必须使谐振腔具有坚固的结构并使其与振动隔绝。为消除第四个因素，应保持谐振腔周围的气压稳定。至于第二、三两个因素原则上可以利用机械结构的热补偿来消除。例如，1973年曾报道制成一种外腔式稳频器件，腔的间隔是由正膨胀系数的石英和负膨胀系数的陶瓷用环氧树脂粘接成的，再采用隔热材料使腔体与发热的激光放电管之间热隔离，并控制外界温度变化范围$<\pm1.5°C$。结果达到了5×10^{-8}的稳定度。

当然，通过仔细的设计所能达到的稳定度也是有一个限度的。为了进一步提高稳定度，必须采用某种类型的反馈伺服机构，以补偿上述因素所带来的影响。通常是把谐振腔的一个反射镜M_1装在压电陶瓷环上（图8-34）。压电陶瓷环有这样的特性，当在它的内、外表面上加上电压时，按照电压的正负，环的长度会伸长或缩短，变化量与所加电压成正比。压电陶瓷环的端面A与谐振腔的另一块反射镜M_2之间的距离是固定的。因此，环的伸缩就导致腔长的缩短或伸长。当激光器输出的频率变化时，利用下文详细讨论的方法给伺服机构一个误差信号，伺服机构便精确地控制压电陶瓷环的伸缩，使腔长适当缩短或伸长，于是使频率恢复到原来的值。

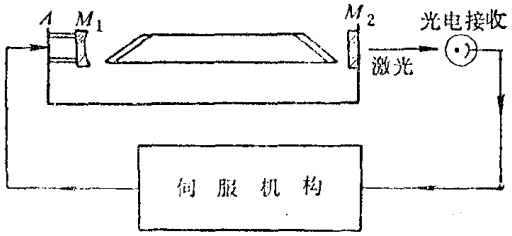


图8-34 伺服稳频激光器示意图

制造伺服稳频激光器的主要问题在于，如何获得一个驱动压电元件的合适的误差信号。对这个误差信号的基本要求是：i）其量值与所需的腔长修正成正比；ii）能指示出腔长修正的方向，亦即能指示出需要缩短腔长呢还是要增加腔长。

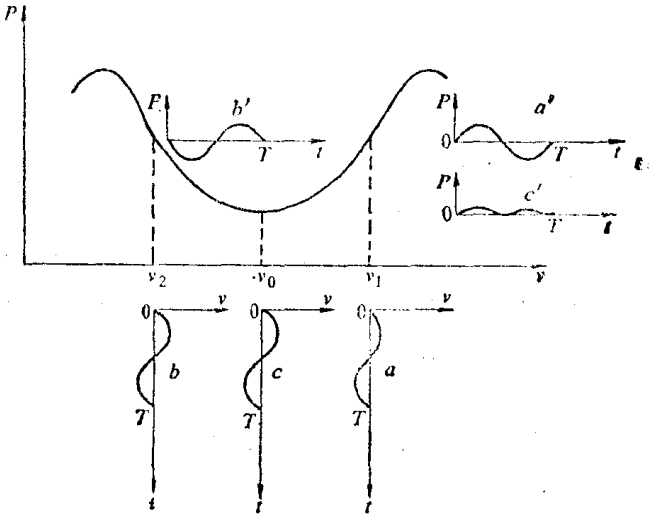


图8-35 利用兰姆下陷获得误差信号的示意图

三、获得误差信号的几种方法

1. 兰姆下陷

这是目前用得最广泛的一种方法。它是根据这样的事实，即由于兰姆下陷，单纵模气体激光器的输出功率，当输出频率出现在原子跃迁谱线的中心时，会有一个局部极小值（见图8-8）。图8-35中夸大地画出了输出功率P在中心频率ν_0附近的变化情形。先假定某一时刻谐振腔的谐振频率$\nu_1>\nu_0$。在压电陶瓷环上加上频率f约为1千赫的正弦调制电压，则腔长以这个频率伸缩，输出激光的频率也以ν_1为中心作正弦式变化，如图8-35中曲线a所

示。利用与第六章中图6-43类似的作图法可以求出，输出功率也以频率 f 作正弦变化，这样就给出了误差信号，如图中曲线 a' 所示。由于在 ν_0 附近输出功率随频率的变化曲线近似地是抛物线，所以，ν_1 偏离 ν_0 越大，输出的误差信号的振幅也越大，两者近似地成正比。如果谐振频率比谱线中心频率 ν_0 低，例如在图中 ν_2 处，当在压电陶瓷环上加上正弦调制电压时，同样会给出与偏差（$\nu_2-\nu_0$）成正比的误差信号，如图中曲线 b' 所示。不过，从图不难看出，当在压电陶瓷环上所加的调制电压相同时，这时输出的误差信号（曲线 b'）与谐振频率比 ν_0 高时输出的误差信号（曲线 a'）恰好反相。把光电接收器接收到的信号经过选频放大后输入相敏检波电路，就得到一个直流电压。由于在 ν_1 与 ν_2 两种情形下的误差信号位相相反，所得到的直流电压的正负极性也相反。这样就控制了腔长修正的方向。如果输出激光的频率恰好在原子跃迁谱线的中心频率 ν_0 处，由于在 ν_0 两侧输出功率随频率的变化是对称的，当在压电陶瓷环上加上频率为 f 的调制电压时，激光输出功率将以 $2f$ 频率作正弦变化，而且辐度很小，如图中曲线 c' 所示。由于选频放大器调谐在频率 f 处，这时伺服机构就没有反应，腔长仍维持原来的值。

我国计量科学院利用这个方法获得了 4×10^{-9} 的长期稳定度。这个方法的再现性稍差，约为 10^{-7}，这主要是由于谱线中心频率随放电条件改变造成的。

2. 双频稳频法

如图8-36所示，将激光器的放电管置于磁场中，磁场 H 的方向沿着谐振腔的轴线。那么，由于塞曼效应，氖原子的6328埃谱线会分裂为两条：一条是左旋圆偏振光，它的频率比原来不加磁场时的频率高；一条是右旋圆偏振光，它的频率比原来的频率低。因此增益曲线也分裂为两条。图8-37画出了分裂后左旋和右旋圆偏振光的增益曲线。图中 ν_0 代表分裂前的谱线中心频率，$\Delta\nu_H$ 代表分裂后两圆偏振光的中心频率之差。

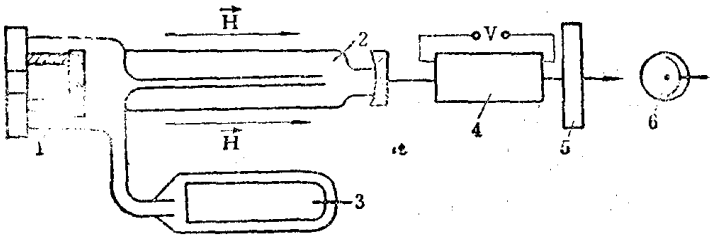


图8-36 双频激光器结构

1—压电陶瓷 2—阳极 3—阴极 4—电光调制器 5—偏振器 6—光电接收器

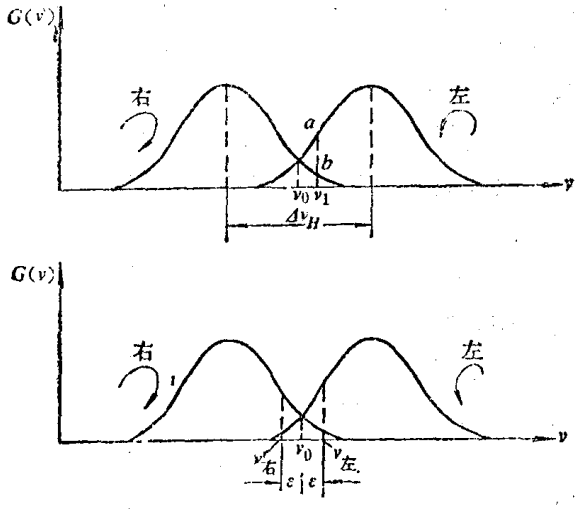


图8-37 分裂后左旋和右旋圆偏振光的增益曲线

如果谐振腔的谐振频率 $\nu_1>\nu_0$，则左旋圆偏振光的输出功率用图中 a 点的纵座标表示，右旋圆偏振光的输出功率用图中 b 点的纵座标表示，前者大于后者。利用偏振方法交替测量左旋与右旋圆偏振光的输出功率就给出一个误差信号。反之，如果谐振频率低于中心频率 ν_0，用类似的论证方法不难看出，这时右旋圆偏振光的输出功率比左旋圆偏振光大。交替地测量左旋与右旋圆偏振光的输出功率，同样给出一个误差信号，不过跟前一种情形下得到的误差信

号恰好反相。得到误差信号后再反馈控制腔长的方法与兰姆下陷法类似，不再赘述。只有当谐振频率等于 ν_0时，两圆偏振光的输出功率才相等，不给出误差信号。图 8-36 中的电光调制器、偏振器及光电接收器就是为了交替地测量左旋与右旋圆偏振光的输出功率用的。请学员们根据第六章所学的知识，思考一下它们是如何工作的。

在上面的讨论中，我们忽略了工作介质的色散作用。考虑到这一点以后，左旋圆偏振光与右旋圆偏振光的谐振频率稍有不同：

左旋圆偏振光　　$\nu_{左} = \nu_j + \varepsilon$

右旋圆偏振光　　$\nu_{右} = \nu_j - \varepsilon$

式中 $\nu_j = J\dfrac{c}{2\mu d}$〔见式(8-40)〕是不考虑色散时的谐振频率，$\varepsilon \approx 10^{-8}\Delta\nu_H$。从图8-37 b 不难看出，这时只有当 $\nu_j = \nu_0$ 因而 $\nu_{左}$与 $\nu_{右}$对称地处在 ν_0 的两侧时，左旋与右旋圆偏振光的输出功率才相等。否则，或者左旋圆偏振光的功率大于右旋圆偏振光，或者右旋圆偏振光的功率大于左旋圆偏振光。只要交替地测量两圆偏振光的功率，就给出误差信号。

由于同时输出的右旋与左旋圆偏振光的频率略有不同，因此称为双频稳频法。这种方法的再现性也是10^{-7}。但是在这种方法中不需要对腔长进行正弦调制，因此输出的激光频率严格地在 $\nu_{左}$与 $\nu_{右}$处。而在兰姆下陷法中，输出激光的频率是在中心频率 ν_0 附近作正弦式变化的，这会使激光的单色性受到一定限制。

3. 饱和吸收法

这个方法是在腔内放置一个吸收管（图8-38）。吸收管内充的气体在激光频率附近有一个锐的吸收峰，但它的吸收曲线在中心频率 ν_0 处有一个下陷。这个吸收下陷产生的原因与兰姆下陷很相似。对于多普勒效应引起的非均匀增宽谱线来说，我们可以把吸收气体的原子按轴向速度v_z分成许多组。如果激光频率 ν 不在谱线中心 ν_0 处，则 $v_z = \pm\left(\dfrac{\nu-\nu_0}{\nu_0}\right)c$ 的两组原子都可以吸收它；如果激光频率在谱线中心，则只有$v_z = 0$ 的一组原子能够吸收它，因而吸收曲线在$\nu = \nu_0$ 处出现下陷（图8-39 a）。放置了这样的吸收管以后，由于吸收管内吸收介质与激光管内的增益介质共同作用的结果，使激光管输出功率曲线在 ν_0 处出现一个小峰，称为反转的兰姆下陷（图8-39 b），于是可以像兰姆下陷一样地用来提供误差讯号。由于吸收管内气压比较低，通常只有 10^{-2}～10^{-1} 乇，所以其碰撞增宽比较小，使得这个小峰比兰姆下陷的宽度小得多，而且吸收峰的位置稳定，不受放电条件的影响，所以稳频精度比较高。目前用 I_2^{127} 分子的吸收线稳定 He—Ne 激光器的6328埃谱线的频率，再现性可达10^{-9}～10^{-10}，短时间稳定度可达到

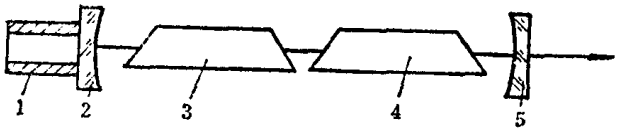


图8-38　饱和吸收稳频装置

1—压电陶瓷　2、5—反射镜　3—激励管　4—吸收管

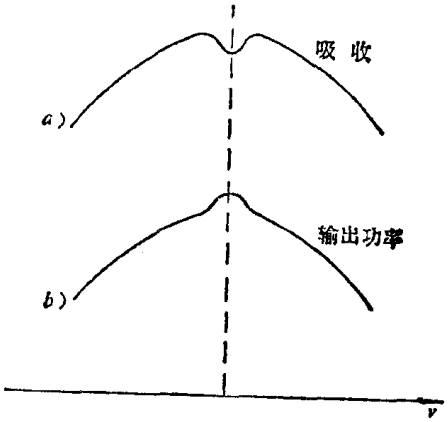


图8-39　反转的兰姆下陷

10^{-14}。用甲烷吸收线稳定 He—Ne 激光器的3.39μ谱线的频率，可以达到 10^{-18} 的稳定度。

§8-8 调 Q 技术

一、为什么要调 Q

在上一节已经谈到，未加控制的脉冲激光器输出的激光具有尖峰结构，它是一系列宽度为微秒数量级、强度不等的小脉冲尖峰。每个小尖峰都是在阈值附近产生的，因此峰值功率较低，一般为几十千瓦数量级。增大输入能量，只增加小脉冲的数目，却不能有效地提高输出功率的峰值。对于许多用途来说，这样的激光脉冲远远不能满足要求。例如脉冲激光测距仪就要求高峰值功率（传播距离远）的单个窄脉冲（计时精度高）。调 Q 技术正是适应这种要求发展起来的。Q 值是指谐振腔的品质因素，在§8-5中已经介绍过它的意义。

调 Q 技术也叫 Q 开关技术，就是通过某种方法使腔的 Q 值按预定的程序变化，以输出一个很强的激光脉冲（又称巨脉冲）。在激光器开始工作时，先让腔处于低 Q 值状态。由于 Q 值低，损耗很大，激光振荡不能产生，但粒子不断地被抽运到亚稳态上，亚稳态上的粒子数可以积累到十分高的水平。然后使腔的 Q 值突然增大（这就是 Q 开关名称的由来），在腔内迅速建立起极强的振荡，在极短时间内高能级粒子贮藏的大部分能量转变为腔内的光能量，此时就输出一个很强的激光脉冲。

目前，利用调 Q 技术从红宝石或钕玻璃激光器获得 100 兆瓦的脉冲是平常的事。另外，脉冲宽度也从通常的几微秒缩短到10^{-9}秒。如果让调 Q 激光器的输出脉冲再通过一个放大器或一系列串联的放大器，可以获得更高的峰值。用这样的方法获得 GW（10^9瓦）或 TW（10^{12}瓦）级的巨脉冲也是可能的。这样高的峰值功率对于核聚变是十分必要的。

要实现调 Q，有两个重要条件：

i）抽运速率必须高于高能级的自发衰变速率。否则，在高能级上就不能积累足够多的粒子；

ii）与受激过程相比，Q 开关的动作必须快。否则，受激发射将持续一段较长的时间，从而得到的脉冲宽度大，峰值功率下降。实用上希望 Q 开关的时间至少要短于10^{-8}秒。

二 调 Q 的方法

1. 转镜调 Q

图8-40是转镜调 Q 装置的示意图，其中图8-40 *a* 是正视图，图8-40 *b* 是俯视图。这个方法就是让作为谐振腔全反射镜的直角棱镜绕与腔轴垂直的 C 轴高速旋转。当氙灯点燃后，由于棱镜面与腔轴不垂直（图8-40 *b* 中的虚线位置），腔的 Q 值很低，不能形成振荡。在这一段时间内，亚稳态上粒子大量积累。与此同时，棱镜面逐渐转到与腔轴垂直的位置（图8-40 *b* 实线位置），腔的 Q 值升高，到一定时刻就形成激光振荡，输出一个很强的激光脉冲。显然，在器件中必须控制灯的点燃时刻与成腔时刻之间的延迟时间。为此，一般在棱镜架上装一块磁钢。当磁钢通过磁头时就给出

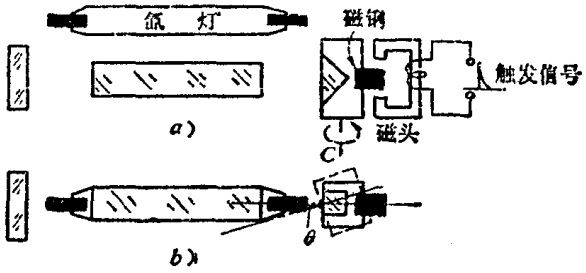


图8-40 转镜调 Q 装置

一个脉冲信号以控制氙灯的点燃时刻，实现同步，调节磁头的位置就可以改变延迟时间。

对小型钕玻璃激光器，常用的马达转速为2～6万转/分，获得的脉冲宽度约为几十毫微秒。

2. 电光晶体调Q

如图8-41所示，在腔内放一个由偏振棱镜和电光晶体组成的电光开关。当氙灯刚点燃时，在晶体上加有电压 $V_{\lambda/4}(V_{\lambda/4}=\frac{1}{2}V_{\lambda/2})$，电光开关处于关闭状态，不能形成振荡。当亚稳态上粒子数积累到足够多时，突然撤去晶体上的电压，电光开关马上打开，器件处于高Q值状态，产生激光振荡，输出一个很强的激光脉冲。当然，开关的打开时刻必须比氙灯点燃时刻适当滞后，这是由电路系统控制的。由于电光开关动作迅速，能在不到10毫微秒的时间内完成开关动作，用来调Q十分有效。

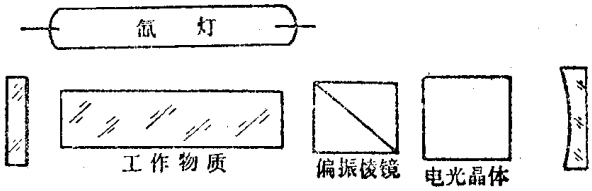


图8-41 电光晶体调Q装置

3. 声光调Q

声光调Q的原理也很简单。设想在腔内插进一个光栅。由于衍射，光束将偏离腔的轴线方向，因此损耗很大，不能形成振荡。当亚稳态上粒子数积累到足够多时，突然撤去光栅，光束就沿轴线方向传播，Q值突然增大，形成激光振荡，输出一个强的激光脉冲。不过这里的光栅不是普通的刻线光栅，而是由声光效应形成的三维光栅。

我们知道，当波长为 λ_s 的超声波在均匀介质内传播时，超声波引起介质内的密度周期性地变化，从而导致介质的折射率也周期性地变化（见图8-42）。于是这个超声场将形成一个以 λ_s 为周期的三维光栅。当光波入射到这个三维光栅上时，会发生衍射。图8-43是超声场的示意图。虽然这个三维光栅将以超声波的速度向前推移，但是由于超声频率比光波低很多个数量级，相对于光波来说，超声场可以看作是静止的。超声场的移动对光的衍射的强度分布没有影响。

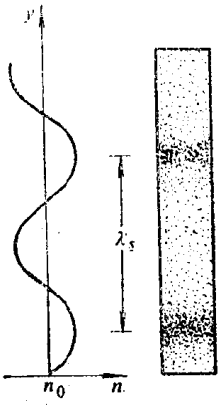


图8-42 超声波引起介质的密度和折射率呈周期分布

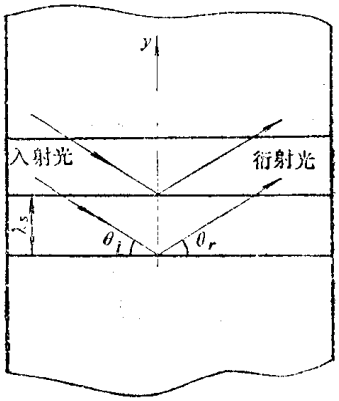


图8-43 超声光栅的示意图

图8-43中，间距为 λ_s 的水平线代表三维光栅的部分反射面，当入射角的余角 θ_i 满足布喇格条件

$$2\lambda_s\sin\theta_i=\lambda \tag{8-79}$$

时，将在 $\theta_r=\theta_i$ 的方向得到衍射极大。式中 λ 为光波在介质中波长。例如，频率为40兆周的超声波在熔融石英中传播时，速度为 5.96×10^5 厘米/秒，波长 λ_s 为 1.49×10^{-2} 毫米。当波长

$\lambda_0=1.06$微米的激光入射时，布喇格条件为

$$\theta_i=\sin^{-1}\frac{\lambda}{2\lambda_s}=\sin^{-1}\frac{\lambda_0}{2n\lambda_s}=0.14^\circ$$

（式中 n 为石英的折射率）

图8-44是声光调Q装置的示意图。声光调制器由电源、换能器、声光介质和吸声材料组成。电源产生的射频电压加在换能器上，获得射频超声波。换能器由压电材料（如石英、铌酸锂等）制成。换能器产生的超声波耦合到声光介质中，在介质中形成超声场。常用的声光介质有玻璃、熔融石英和钼酸铅等。吸声材料一般用金属铝。声光器件在谐振腔中按布喇格条件放置。当加上超声波时，光束沿着布喇格条件决定的衍射方向偏离开谐振腔的轴线，这时腔的损耗严重。当撤去超声波时，光束顺利地通过均匀的声光介质，不发生偏折，Q值突然升高。

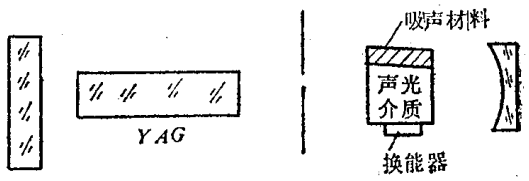


图8-44　声光调Q装置

声光调Q具有重复频率高和输出稳定等优点，目前多用于中等功率高重复频率的脉冲激光器。

4．染料调Q

如图8-45所示，在腔内插入某种类型的染料盒。染料盒是一种可饱和吸收器，当它被强烈照射时，处于基态的染料分子吸收光以后被激发到高能级。当高能级的粒子数已达到饱和后就不再吸收光，因而使染料被漂白或变成透明。这时Q值突然增大，在腔内形成激光振荡，输出很强的激光脉冲。

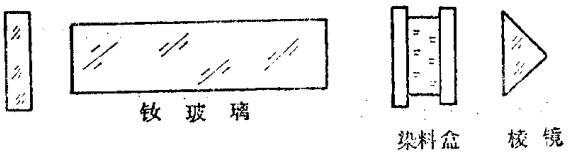


图8-45　染料调Q装置

这种方法属于被动调Q方法，它的最大优点是能够自动与抽运同步。

可以用于调Q的染料的种类很多。钕玻璃激光器调Q用的可饱和染料一般为十一甲川蓝色素与王甲川蓝色素。红宝石激光器调Q用的染料一般为隐花菁、钒钛菁和叶绿素D。

§8-9　锁模技术

一、锁模的意义

激光器的输出往往是由许多频率相隔很小的模式组成的。如果把第 m 个模式的电矢量 $E_m(t)$ 记作

$$E_m(t)=A_m e^{i(\omega_m t+\phi_m)} \tag{8-80}$$

式中 A_m、ω_m 与 ϕ_m 是第 m 个模式的振幅、频率与初位相，那么激光输出的总辐射场为：

$$E_T(t)=\sum_m E_m(t)=\sum_m A_m e^{i(\omega_m t+\phi_m)} \tag{8-81}$$

可见，激光器的总输出是随时间改变的，改变的方式取决于所有这些模式的振幅、频率及相对位相。通常，这些模式的振幅、频率和相对位相是不固定的。在激光器工作物质内部的随

机起伏及非线性效应使这些参数随时间无规律地改变，因而输出也以一种无法加以控制的方式随时间变化。如果能够用某种方法强使这些振荡模式维持固定的频率间隔与固定的相对位相，那么激光器的输出将以一种预定的方式随时间变化，这就叫做锁模。变化的方式取决于有哪些模式参与振荡以及它们之间维持什么样的位相关系。例如，通过锁模可以得到等距的脉冲序列，每个脉冲的宽度小到10^{-13}秒。这样的超短脉冲可以用来推动开关时间只有几微微秒的克尔盒，用于超高速摄影以及研究微观过程，例如测量很短的荧光寿命；这样的超短脉冲也可以用来研究玻璃纤维的色散等传播特性。由于这种脉冲的宽度比利用调Q技术得到的脉冲还要小很多个数量级，因此峰值功率特别高，可以用于受控热核反应。

上面是针对纵模来说的。对不同横模也可以锁模，得到具有一定特性的输出。例如，可以得到空间扫描的光束，像“机关枪”似的周期性地“扫射”到输出反射镜的不同位置上。

二、锁模特性的形成

上面指出，如果强使各个模式维持固定的频率间隔以及固定的位相关系与振幅，激光器的输出将以预定的方式随时间变化。例如，如果维持各个纵模的振幅相等、频率间隔相等，位相相同，亦即

$$\left.\begin{aligned} A_m &= A_0 \\ \omega_m &= \omega_0 + m\Omega \\ \phi_m &= \phi_0 \end{aligned}\right\} \tag{8-82}$$

式中Ω是纵模园频率间隔，m是整数。那么激光器将输出等间隔的脉冲序列。事实上，将式(8-82)代入式(8-81)得到激光器的总的输出为

$$E_T(t) = \sum_m A_0 e^{i[(\omega_0+m\Omega)t+\phi_0]} = A_0 e^{i(\omega_0 t+\phi_0)} \sum_m e^{im\Omega t}$$

设共有k个纵模（k为奇数），则

$$E_T(t) = A_0 e^{i(\omega_0 t+\phi_0)} \sum_{m=-\frac{k-1}{2}}^{\frac{k-1}{2}} e^{im\Omega t}$$

利用与讨论光栅衍射时相同的方法可以得到

$$E_T(t) = A_0 \frac{\sin\frac{k\Omega t}{2}}{\sin\frac{\Omega t}{2}} e^{i(\omega_0 t+\phi_0)} \tag{8-83}$$

所以输出的激光束的振幅受到了调制。不难验证，调制的周期

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} \tag{8-84}$$

把纵模园频率间隔$\Omega = 2\pi\Delta\nu = \frac{\pi c}{nd}$（公式8-41）代入，得到

$$T = \frac{2nd}{c} \tag{8-85}$$

这也就是光在谐振腔内来回一周的时间。

输出光强为

$$I_T(t)=|E_T(t)|^2=A_0^2\frac{\sin^2\frac{k\Omega t}{2}}{\sin^2\frac{\Omega t}{2}} \tag{8-86}$$

图8-46是锁模后光强随时间变化的曲线。

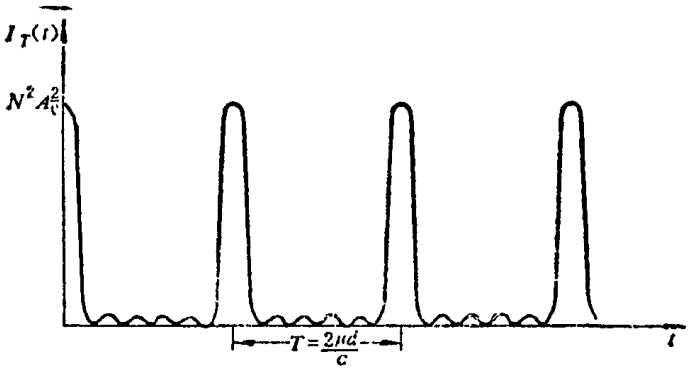


图8-46 输出光强随时间的变化曲线

根据公式（8-86），用与讨论光栅时类似的方法可以证明，脉冲宽度与脉冲间隔的比值近似地等于$\frac{1}{k}$，脉冲峰值强度

$$I_{max}=k^2A_0^2$$

而不锁模时 k 个纵模的光强为

$$I=kA_0^2$$

所以锁模脉冲的光强为不锁模时的 k 倍，也就是说脉冲峰值功率为不锁模时平均功率的 k 倍。因此，原子跃迁的荧光谱线越宽，所包含的纵模数 k 越大，锁模脉冲宽度就越小，峰值功率就越高。表 8-4 说明了这个问题

表8-4 一些锁模激光器脉冲宽度

激光器名称	荧光线宽（赫）	脉冲宽度（计算值）（秒）	脉冲宽度（测量值）（秒）
He-Ne(6328埃)（连续）	1.5×10^{9}	6.7×10^{-10}	6×10^{-10}
YAG(1.06微米)（连续）	1.95×10^{11}	5.2×10^{-12}	7.6×10^{-11}
红宝石(6943埃)（脉冲）	3.3×10^{11}	3×10^{-12}	1.2×10^{-11}
钕玻璃(1.06微米)（脉冲）	7.5×10^{12}	1.3×10^{-13}	4×10^{-13}

三、锁模的方法

上面已经指出，要获得锁模的激光脉冲，各纵模之间必须有固定的位相关系。一般激光器的各个纵模振荡互不相关，即不存在固定的相对位相。为了达到锁模目的，要采取措施强制各纵模的振荡同步。目前采用的锁模方法有两类：一类是主动式锁模，在腔中插入一定频率的调制器，对光束进行振幅调制或位相调制；另一类是被动式锁模，利用插入腔内的可饱和吸收染料（或吸收气体）来实现锁模。由于锁模的理论比较复杂，本节不作全面介绍，仅以振幅调制为例作一简单说明。

设频率在增益曲线中心附近的纵模的电矢量为

$$A_0\cos2\pi\nu_c t$$

式中ν_c为该纵模的频率，A_0为振幅。如果在腔内插入频率 $f=\frac{c}{2nd}$的振幅调制器，则调制后的电矢量为

$$A(t)=A_0(1+M\cos2\pi ft)\cos2\pi\nu_c t \tag{8-87}$$

式中M为调制度。将上式展开得

$$A(t)=A_0\cos2\pi\nu_c t+\frac{MA_0}{2}\cos2\pi(\nu_c-f)t+\frac{MA_0}{2}\cos2\pi(\nu_c+f)t \qquad (8\text{-}38)$$

可见，调制的结果不仅包含原有频率ν_c的振荡，还包含下列频率的两个边带

$$\nu_{c-}=\nu_c-f=\nu_c-\frac{c}{2nd}$$

$$\nu_{c+}=\nu_c+f=\nu_c+\frac{c}{2nd}$$

ν_{c-}和ν_{c+}跟相邻的两个纵模的频率相等（见图8-47），于是这两个边带将激发起相邻的两个纵模振荡。由于边带与中心频率ν_c的振荡同相，新激发起来的纵模也与中心纵模同位相，而不再象一般激光器那样各纵模之间没有固定的位相关系。同样，由这两个相邻纵模还可以激发起下列频率的同相的纵模：

$$\nu'_{c-}=\nu_{c-}-f=\nu_0-2f$$

$$\nu'_{c+}=\nu_{c+}+f=\nu_0+2f$$

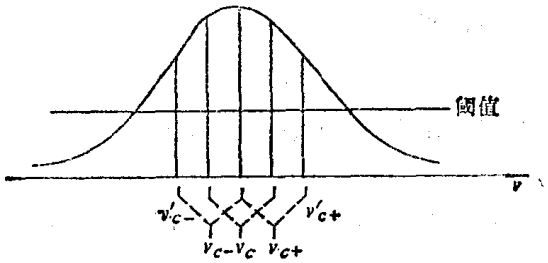


图8-47 说明位相锁定的示意图

图8-47示意地表示了上述过程。图中钟形曲线代表增益曲线。图的正下方的“Y”形线表示由中心附近的纵模ν_c激起两个边带ν_{c+}与ν_{c-}，两侧的“Y”形线表示由这两个边带再激起ν'_{c+}与ν'_{c-}。依此类推，可以激发起所有的纵模，它们都有相同的位相，最后合成得到等间隔的尖脉冲。

四、典型器件

i）振幅调制锁模激光器

图8-48是一个连续的振幅调制锁模激光器的示意图。增益介质是YAG棒，尺寸为D2.5×30毫米。棒的一端镀有多层介质模，反射率为90%。腔的另一端是一个反射率为99.5%、曲率半径为0.5米的凹面镜，腔长0.5米。调制器为熔融石英声光调制器，按布儒斯特角放置。超声调制频率为300兆周。输出锁模脉冲宽度为8×10^{-11}秒，脉冲间隔为3.3×10^{-9}秒，峰值功率为3.9瓩。

ii）可饱和吸收染料锁模激光器

图8-49是可饱和吸收染料锁模激光器的示意图。工作介质是$\phi15\times200$毫米的钕玻璃棒，

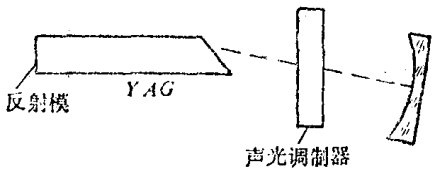


图8-48 振幅调制锁模激光器

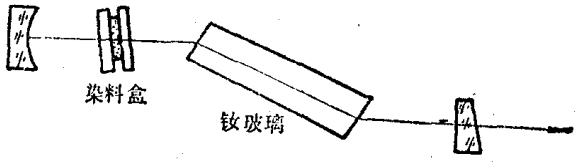


图8-49 可饱和吸收染料锁模激光器

两端磨成布儒斯特角。构成谐振腔的两个反射镜的反射率均为75%。染料盒厚为25毫米，按布儒斯特角放置。适当选取染料浓度与光泵强度，可以得到能量为0.3焦耳、脉冲总长度为0.4～1微秒的脉冲序列，序列中每个脉冲宽度为5×10^{-12}秒，相邻脉冲间隔为$(4\sim6)\times10^{-9}$秒。

§8-10 非线性光学

我们知道，介质在电场的作用下会发生极化。光既然是一种电磁波，当光通过介质时，介质也会相应地产生极化。极化与电场强度的一次方成正比，也就是说随电场线性地变化。但是，当光的强度非常高时，极化会随电场非线性地变化。在最简单的各向同性介质的情形，极化强度 $\boldsymbol{P}$ 跟电场强度 $\boldsymbol{E}$ 是同方向的，可将极化强度展开成电场强度的级数：

$$P(E)=\varepsilon_0(\chi E+\chi_2E^2+\chi_3E^3+\cdots) \tag{8-89}$$

式中 P 和 E 分别代表矢量 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的大小，ε_0 是真空电容率，χ 是通常的线性极化率。上式除了线性项外，还有非线性项。χ_2 是二阶非线性极化率，χ_3 是三阶非线性极化率，等等。这种非线性变化在物理学的其他领域里是很普遍的。相反地，线性变化只在一定的特殊条件下才出现。例如在力学中研究应变与应力的关系时，只有当应力很小时才存在线性关系（虎克定律）。另外，在与光学非常相近的无线电电子学中，非线性现象更是我们所熟悉的。我们广泛地使用电子管、晶体管等非线性元件进行频率变换与信息处理，诸如整流、检波、倍频、和频、差频、参量放大和振荡等。

量子力学的理论指出，在光学领域里，式(8-89）中非线性项与线性项的比值为

$$\frac{\chi_2E^2}{\chi E}\approx\frac{E}{E_{原子}}$$

上式中 E 为入射光的电场强度，$E_{原子}$ 为原子内部的平均场强，约为 10^{11} 伏特/米。式（8-89）中后面各高次项也大致按上述比值递降。对普通光源发出的光，它的电场强度 E 要比 $E_{原子}$ 低好多个数量级。因此，在激光出现之前，除了克尔效应等个别例子外几乎没有观察到非线性光学现象，以至我们对这个领域相当陌生就不足为怪了。激光出现以后，我们能获得高度集中的光能。例如，用一个好的透镜可以将 Q 开关红宝石激光器发出的 200 兆瓦的光脉冲集中到直径约为25微米的面积上，所得到的电场强度约为 10^{10} 伏特/米，（见习题8.13），比 $E_{原子}$ 只低一个数量级。用现代的技术甚至可以获得还要强的电场（10^{12} 伏特/米），这就为研究非线性光学提供了强有力的工具。1961年，在激光问世不久，夫朗肯（Franken）将红宝石激光器发出的功率约为 3 千瓦的光脉冲（$\lambda=6943$ 埃），聚焦到水晶晶体上，再进行摄谱，结果在紫外端发现了3471.5埃这条谱线，它的频率正好是红宝石发出的红光的两倍。以这个实验为开端，近二十年来非线性光学蓬勃发展，新的非线性光学现象相继发现，而且在各个领域里获得了越来越广泛的应用。下面着重讨论倍频效应，并扼要地介绍其他几种非线性光学现象。

一、倍频效应（二次光学谐波效应）

1. 倍频光的产生

在式（8-89）中我们把注意力集中在二次非线性项，用 $P^{(2)}$ 表示。它与场强的关系为

$$P^{(2)}=\varepsilon_0\chi_2E^2 \tag{8-90}$$

现在若有角频率为 ω 的单色光入射到非线性介质上，则场强可以表示为

$$E=E_0\cos\omega t \tag{8-91}$$

代入式（8-90）得到

$$P^{(2)}=\varepsilon_0\chi_2E_0^2\cos^2\omega t=\frac{\varepsilon_0}{2}\chi_2E_0^2(1+\cos2\omega t) \tag{8-92}$$

上式右边第一项代表“直流”项即不随时间变化的极化强度。由于这一项的存在，在介质的两表面分别出现正的与负的面电荷，形成与 E_0^2 亦即与入射光强成正比的恒定的电位差。借用无线电电子学中的术语，将这个效应叫做光整流。上式右边的第二项代表频率等于基频两倍的电偶极矩，它将辐射二次谐波（倍频光）。这个效应称为光学倍频。

如果非线性介质真是如上所说的各向同性的或是具有对称中心的晶体，那么当电场反向时极化强度也反向，P 是 E 的奇函数，级数展开式(8-89)中所有偶次项的系数等于零。因此这样的介质不可能产生二次谐波。只有那些不具有对称中心的晶体才能产生二次谐波。对于这些晶体，考虑到它们各向异性的特点，$\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 的方向一般是不同的。它们之间的关系应该用三阶张量来表示。但是，如果我们只关心由电场引起的二阶极化强度 $\boldsymbol{P}^{(2)}$ 的大小，公式（8-90）还可以应用，不过应该将式中的 χ_2 理解为二阶有效极化率 χ_{eff}，即

$$P^{(2)} = \varepsilon_0 \chi_{eff} E^2 \tag{8-93}$$

χ_{eff} 不仅随晶体而异，也随光在晶体内的传播方向改变。

2. 位相匹配

上面讲过，倍频效应最先于1961年发现。但当时效率极低，按功率计算，只有 $\frac{1}{10^8}$ 的基频光转换为倍频光。其原因是基频光通过非线性晶体时，沿途诱发的二阶偶极矩相当于一系列能辐射二次谐波的相干的次波元，由于晶体有色散，二次谐波在晶体中的传播速度与基频光不同，沿途诱发的二阶偶极矩相继发出的二次谐波到达出射面时不同相，于是由于相消干涉而削弱。下面我们参照图 8-50 来计算倍频光的强度。

设晶体厚度为 l，正入射的基频光在晶体中的电场可以表示为

$$E = E_0 \cos(\omega t - k_1 x)$$

式中 k_1 为基频光的波数

$$k_1 = \frac{2\pi n_1}{\lambda_1} \tag{8-94}$$

λ_1 是基频光在真空中的波长，n_1 是晶体对沿该方向传播的基频光的折射率。按公式（8-92），在座标为 x 处厚度为 dx 的一小段晶体内感应的二次偶极矩为

$$P^{(2)} \propto \frac{\varepsilon_0}{2} \chi_{eff} E_0^2 \cos(2\omega t - 2k_1 x)\, dx$$

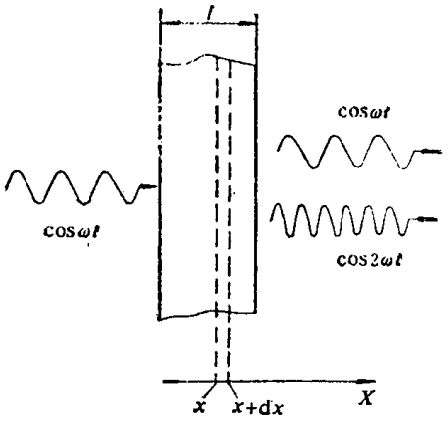


图8-50 用来计算倍频光的强度的示意图

相应地将辐射出倍频光，倍频光的初位相跟 $P^{(2)}$ 相同，它到达出射面时产生的电场为：

$$dE_{2\omega} \propto \frac{\varepsilon_0}{2} \chi_{eff} E_0^2 \cos[2\omega t - 2k_1 x - k_2(l - x)]\, dx$$

式中 k_2 为倍频光的波数

$$k_2 = \frac{2\pi n_2}{\lambda_2} \tag{8-95}$$

λ_2 为倍频光在真空中的波长，n_2 为晶体对沿该方向传播的倍频光的折射率。

令

$$\Delta k = k_2 - 2k_1 = \frac{4\pi}{\lambda_1}(n_2 - n_1) \tag{8-96}$$

则

$$dE_{2\omega} \propto \frac{\varepsilon_0}{2} \chi_{eff} E_0^2 \cos(2\omega t - k_2 l + \Delta k \cdot x) dx$$

在出射时倍频光的电矢量 $E^{(2)}$ 为晶体内各点产生的倍频光的迭加

$$E_{2\omega} = \int_0^l dE_{2\omega} \propto \frac{\varepsilon_0}{2} \chi_{eff} E_0^2 \int_0^l \cos(2\omega t - k_2 l + \Delta k \cdot x) dx$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \chi_{eff} E_0^2 l \frac{\sin(l\Delta k/2)}{l\Delta k/2} \cos(2\omega t - k_2 l + \Delta k \cdot l/2)$$

由于光强与电矢量的振幅的平方成正比，所以倍频光的强度为：

$$I_{2\omega} \propto \frac{\varepsilon_0^2}{4} \chi_{eff}^2 I_\omega^2 l^2 \left[\frac{\sin(l\Delta k/2)}{l\Delta k/2}\right]^2$$

式中 I_ω 是基频光的光强。更仔细的讨论可以得到：

$$I_{2\omega} = \frac{2\omega^2 \chi_{eff}^2 l^2 I_\omega^2}{\varepsilon_0 n_1^3 c^3} \left[\frac{\sin(l\Delta k/2)}{l\Delta k/2}\right]^2 \tag{8-97}$$

转换效率为

$$\frac{I_{2\omega}}{I_\omega} = \Gamma^2 l^2 \left[\frac{\sin(l\Delta k/2)}{l\Delta k/2}\right]^2 \tag{8-98}$$

式中

$$\Gamma^2 l^2 = \frac{2\omega^2 \chi_{eff}^2 I_\omega l^2}{n_1^3 c^3 \varepsilon_0} \tag{8-99}$$

式（8-98）跟单缝夫琅和费衍射的公式是很相似的。不难看出，只有当

$$\Delta k = k_2 - 2k_1 = 0 \tag{8-100 a}$$

亦即

$$n_1 = n_2 \tag{8-100 b}$$

时，倍频光最强，转换效率最高。公式（8-100 a）或（8-100 b）通常称为位相匹配条件。

位相匹配的物理实质在于，这时基频光与倍频光的传播速度相同，基频光在晶体中沿途各点激发的倍频光沿 x 方向传播到出射面时有相同的位相，因而相互加强得到好的倍频效果。在实现位相匹配时，转换效率等于

$$\frac{I_{2\omega}}{I_\omega} = \Gamma^2 l^2 \tag{8-101}$$

从公式（8-99）可见，它与二阶有效极化率的平方 χ_{eff}^2、晶体厚度的平方 l^2 以及入射光的强度 I_ω 成正比。

当位相不匹配（$\Delta k \neq 0$）时，从式（8-98）可见，转换效率随晶体厚度周期性地变化。当厚度 l 满足

$$l \cdot \Delta k = \pi \tag{8-102}$$

时，转换效率有极大值。由上式给出的晶体厚度叫相干长度（注意不要与第三章中的相干长度的概念混淆）。解上式得到

$$l_{相干} = \frac{\lambda_1}{4(n_2 - n_1)} \tag{8-103}$$

在位相不匹配时，即使再增加晶体的厚度，由于晶体中各点发出的倍频光不同相，也不能提高转换效率。对于一般的非线性晶体，相干长度约在10微米～100微米之间。而在位相匹配时，转换效率与晶体厚度的平方成正比。如果使用厚度为1厘米的晶体，那么可以粗略地估计出，位相匹配时的转换效率要比不匹配时提高10^4～10^6倍。可见，位相匹配对于有效地实现倍频效应具有关键性的影响。

如何实现位相匹配呢？对于各向同性的介质，由于在透明区存在正常色散效应，$n_2>n_1$，是不能实现位相匹配的。但在各向异性的晶体中，由于存在双折射，可以利用两束折射光的折射率不同来补偿色散效应，从而实现位相匹配。目前用的非线性晶体多为负单轴晶体，它对基频光和倍频光的折射率可以用图8-51中的折射率面来表示。折射率面㊀是这样定义的：它的每一根矢径的长度表示以此矢径方向为波法线方向的光波的折射率。图中实线是倍频光的折射率面，虚线是基频光的折射率面。o光的折射率面是球面，e光的折射率面是椭球。从图可见，如果基频光是o光，倍频光是e光，那么当波面沿着跟光轴成θ_m角的方向传播时，二者折射率相等，传播速度相同，即实现了位相匹配。θ_m称为匹配角，它满足下式（见习题8.14）

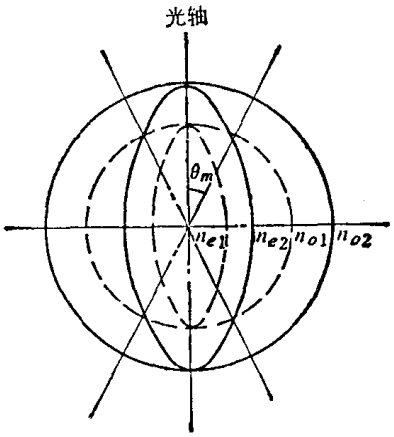


图8-51　负单轴晶体的折射率面

$$\sin^2\theta_m=\frac{n_{o1}^{-2}-n_{o2}^{-2}}{n_{e2}^{-2}-n_{o2}^{-2}} \tag{8-104}$$

式中n_{o1}是基频光的o折射率，n_{o2}、n_{e2}是倍频光的o折射率和e折射率。知道了晶体的这些数据，就可以算出θ_m。几种常用的非线性晶体的匹配角见表8-5。

对一般晶体，位相匹配角θ_m不是90°。根据晶体光学的理论可以知道，这时倍频光（e光）与基频光（o光）的波面的传播方向虽然相同，但光线（能量）的传播方向却不同，相互错开一定角度，这样会使转换效率下降。对某些晶体（如铌酸锂和铌酸钡钠），可以通过控制晶体温度的方法，使n_{o1}、n_{o2}和n_{e2}发生变化，在某一温度处可以达到$\theta_m=90°$，这种匹配叫温度匹配或90°位相匹配。

3. 晶体的有效厚度

根据公式（8-101），在位相匹配时倍频光的强度与晶体厚度l的平方成正比。似乎随着晶体厚度的增加，倍频光强可以无限制地增长。实际上却不然，这是因为在该式的推导过程中没有考虑到基频光沿途不断转换为倍频光因而振幅不断下降的缘故。考虑到这个问题后，计算出来的倍频光的强度为

$$I(2\omega)=I_o(\omega)\tanh^2(l/l_s) \tag{8-105}$$

式中

$$l_s=\frac{cn_1}{\omega\chi_{eff}E_0(\omega)} \tag{8-106}$$

l为晶体厚度，$I_o(\omega)$为入射面处基频光的强度，$E_o(\omega)$为入射面处基频光电矢量的振幅。转换效率为

㊀ 折射率面跟第六章中讲过的晶体中的波面有联系，但又有区别，不要混为一谈。

$$\frac{I(2\omega)}{I_o(\omega)}=\tanh^2(l/l_s) \tag{8-107}$$

图8-52画出了转换效率随晶体厚度的变化。当 $l=l_s$ 时，转换效率达60%；当 $l=2l_s$ 时，转换基本上达到饱和。所以 l_s 大体上指出了倍频技术中应该采用的晶体的厚度值。l_s 称为晶体的有效厚度。

从公式（8-106）可见，l_s 与入射光的振幅成反比，亦即与入射光强度的平方根成反比。例如，对 KDP 晶体，设入射光的波长为1.06微米，当 $I_o(\omega)=6$千瓦/米^{2}时，$l_s\sim10^5$ 厘米；当 $I_0(\omega)=60$兆兆瓦/米^{2}时，$l_s\sim1$厘米。如果晶体的 χ_{eff} 值更高些，则晶体有效厚度还要小。

4. 倍频装置

图8-53是腔内倍频装置的示意图。倍频晶体 K 按一定方向切割，两通光面平行且抛光。为实现90°位相匹配，要加温度控制器。

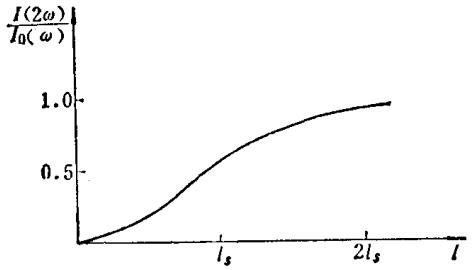


图8-52 位相匹配时转换效率随晶体厚度的变化

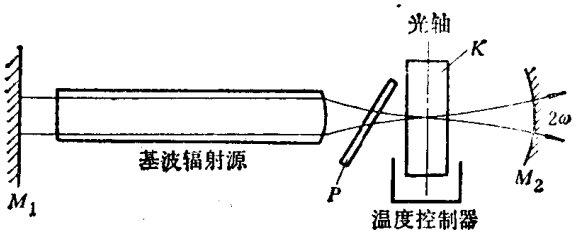


图8-53 腔内倍频实验装置

表8-5 一些常用的倍频晶体的有关参数

晶体名称	类型	χ^2_{eff}/n_1^3	匹配角	基频波长(微米)	透明波段(微米)
KDP	负单轴	0.08×10^{-24}	50±1° 40±1° 41±1° 64°	0.6943 1.06 1.153 0.59	0.22～1.1
ADP	负单轴	0.10×10^{-24}	58±1.5° 52±1° 42±1°	0.6328 0.6943 1.06	0.20～1.1
$LiNbO_3$（铌酸锂）	负单轴	3.9×10^{-24}	$\theta_m=90°$, $T_{mp}=-8$℃① $\theta_m=90°$, $T_{mp}=193$℃ $\theta_m=68\pm1°$（室温）	1.06 1.153 1.152	0.35～4.5
$Ba_2NaNb_5O_{15}$（铌酸钡钠）	双轴	15×10^{-24}	$\theta_m=90°$ $T_{mp}=89$℃ （光在 XZ 平面内入射）	1.06	0.37～5
Ag_3AsS_3（淡红银）	负单轴	8.2×10^{-24}	20±1°	10.6	0.60～13

① T_{mp}为匹配温度。

腔内倍频可采用共焦腔或半共焦腔，将倍频晶体放在光束的腰处，以增加功率密度，提高倍频效率。谐振腔的两反射镜M_1与M_2对基频光均为全反射，对倍频光，M_1为全反射，M_2为全透射。此外还可以加一个起偏器P，使腔内只有振动方向与倍频晶体所需的电矢量方向一致的光形成振荡，以提高效率。也可以将倍频晶体放在腔外，但效率不如腔内倍频高。

二、光学混频

另一类很有意义的非线性光学现象是光学混频。我们还是从二次非线性极化强度的标量表示式（8-93）出发来说明它的基本原理。

如果有两束频率不同的单色光同时入射到非线性介质上，入射光可以表示为

$$E = E_{01}\cos\omega_1 t + E_{02}\cos\omega_2 t \tag{8-108}$$

式中E_{01}、E_{02}分别表示园频率为ω_1、ω_2的单色光的振幅，将上式代入式（8-93）得到

$$\begin{aligned} P^{(2)} &= \varepsilon_0\chi_{eff}(E_{01}^2\cos^2\omega_1 t + E_{02}^2\cos^2\omega_2 t + 2E_{01}E_{02}\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t) \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2}\chi_{eff}E_{01}^2(1+\cos 2\omega_1 t) + \frac{\varepsilon_0}{2}\chi_{eff}E_{02}^2(1+\cos 2\omega_2 t) \\ &\quad + \varepsilon_0\chi_{eff}E_{01}E_{02}\cos(\omega_1+\omega_2)t + \varepsilon_0\chi_{eff}E_{01}E_{02}\cos(\omega_1-\omega_2)t \end{aligned} \tag{8-109}$$

可见，除了直流项与倍频项外，还出现角频率为$(\omega_1+\omega_2)$和$(\omega_1-\omega_2)$的振荡偶极矩，它们将辐射出相应频率的光。前者称为光学和频效应，后者称为光学差频效应。上面讲过的倍频效应可以看作和频效应在$\omega_1=\omega_2$时的特殊情形。

现在已经在多种晶体内实现了光学和频效应。例如，红宝石激光器输出的0.6943微米激光跟$CaWO_4:Nd^{3+}$激光器输出的1.06微米激光在KDP、ADP等晶体内的光学和频；He-Ne激光器跟输出的0.6328微米与1.1523微米激光在ADP晶体内的光学和频等。

三、光学参量放大

作为光学混频效应的一个很有实际意义的应用，讨论一下光学参量放大器的基本原理。

如果让一束频率为ω_s的很弱的信号光与一束频率ω_p较高的很强的激光同时通过非线性晶体，那么在一定条件下弱信号光会得到放大，同时在它们的差频（$\omega_i=\omega_p-\omega_s$）处得到另一束光。我们把这束光称为闲置光，而把那束频率较高的强激光称为泵光。这个过程可以看作一种特殊的光学混频过程：频率为ω_p的泵光与频率为ω_s的信号光同时射入晶体后，由于二次非线性极化强度$P^{(2)}$的存在，产生了频率为ω_i的差频光（闲置光），它的振幅正比于泵光与信号光的振幅之积。这一差频光又跟泵光产生新的差频效应进而辐射出频率为ω_s（$\omega_s=\omega_p-\omega_i$）的信号光，其振幅正比于泵光与闲置光的振幅之积。由于初始时泵光强度远远大于信号光强和新产生的闲置光强，在满足位相匹配条件的前提下，由于上述混频过程持续进行的结果，使得泵光的能量不断转化为信号光和闲置光，从而使信号得到放大。这种放大过程，借用电子学的术语，称为光学参量放大。我们知道，在微波领域里，参量放大器是一种既能提高灵敏度又具有较低噪声水平的放大器。它的工作原理是：利用具有非线性响应特性的可变电抗元件作为参量耦合器件，当频率为ω_s的待放大微弱信号输入时，同时以较高频率（ω_p）的强微波泵信号作用于上述器件，则由于非线性参量耦合作用的结果，可在ω_s频率处得到增强了的信号输出，同时还在差频处产生新的闲置信号。不难明白，上面讲的光学参量放大

就是微波参量放大器在光频区的推广。

为了有效地产生光学参量放大作用，除了应该满足如下的频率关系

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i \tag{8-110}$$

外，也应该满足位相匹配条件

$$k_p = k_s + k_i \tag{8-111}$$

式中k_p、k_s、k_i分别是泵光、信号光和闲置光的波数。如果把公式（8-100 a）所表示的倍频效应的位相匹配条件改写成$k_2 = k_1 + k_1$，就可以看到它与公式（8-111）之间的相似性。

从电磁场的量子理论来考虑，光学参量放大相当于光学和频的逆过程。在光学和频效应中，是两个不同频率的入射光子在非线性介质内的湮灭和一个和频光子的产生；在光学参量放大过程中，是一个泵光子在非线性介质内的湮灭和两个新的光子（信号光子和闲置光子）的同时产生。在上述过程中，光子间的转换应遵守能量守恒和动量守恒定律

$$\left.\begin{aligned} h\omega_p &= h\omega_s + h\omega_i \\ h\boldsymbol{k}_p &= h\boldsymbol{k}_s + h\boldsymbol{k}_i \end{aligned}\right\} \tag{8-112}$$

式中h为普朗克常数。不难看出，能量守恒就等同于从光学混频理论导出的频率关系(8-110)，动量守恒定律就等同于位相匹配条件（8-111）。

图8-54是光学参量放大的实验装置简图。其中利用ADP作为参量放大物质，以红宝石激光的二次谐波（3471埃）作为泵光束，以He-Ne激光器输出的6328埃作为信号光束。为了实现位相匹配，泵光以非常光方式、信号光以寻常光方式都沿着与晶体光轴成51°的方向入射，实验测得信号光束通过晶体后的增益为1分贝，同时还输出波长为7676埃的闲置光。

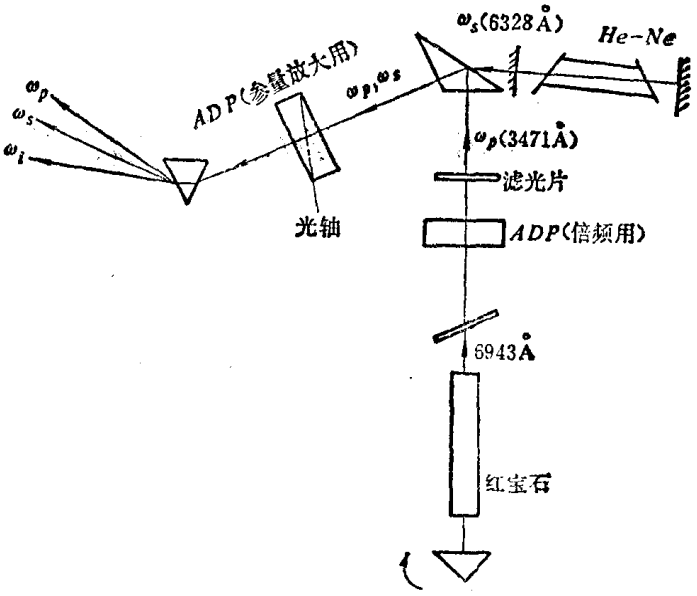


图8-54 光学参量放大实验装置示意图

四、光学参量振荡

在§8-2中指出过，一个放大器，只要加上适当的正反馈，使增益超过损耗，就可以成为振荡器。激光器中的谐振腔就起着正反馈的作用。同样地，在光学参量放大器的基础上，如果进一步采用光学反馈装置——谐振腔，使信号光或闲置光（或两者同时）在腔内来回反射并被放大，则在放大作用超过腔内损耗和输出耦合损耗的条件下，可在信号频率或闲置频率处（或同时在两个频率处）输出相干光。这就是光学参量振荡器的基本工作原理。作为振荡器，并不要求有信号光输入才能产生振荡。这是因为在自然界的任何空间或任何介质内部，均存在着由自发辐射产生的所有频率的噪声辐射。因此在非线性介质内，只要外界入射的泵光强度达到或超过阈值，满足频率条件和位相匹配条件的自发噪声辐射就会自动地在腔内形成参量振荡。

光学参量振荡器具有很重要的应用意义，因为它可以通过改变非线性晶体的折射率来实现可调谐的光参量振荡，也就是说可以输出波长能连续改变的激光。为了说明调谐原理，将波数 k 的关系式 $k=\frac{n\omega}{c}$ 代入了公式（8-111），把位相匹配条件改写成

$$n_p\omega_p = n_s\omega_s + n_i\omega_i$$

当泵光频率 ω_p 给定时，对一定的晶体来说，在一定条件下有一对确定的频率 ω_s 和 ω_i 满足上述条件而产生参量振荡。但是晶体对信号光与闲置光的折射率 n_s、n_i 是随晶体取向、温度而改变的。如果以适当方式改变晶体取向或温度，n_s 和 n_i 将发生变化，与此相应，满足位相匹配条件的一对频率 ω_s 和 ω_i 也将随之改变，从而可以在比较宽的范围内连续改变振荡光束的频率或波长。另一种调谐的方法是用可调谐的染料激光器作泵光源，利用 ω_p 在小范围内的改变来实现 ω_s 在大范围的调谐。

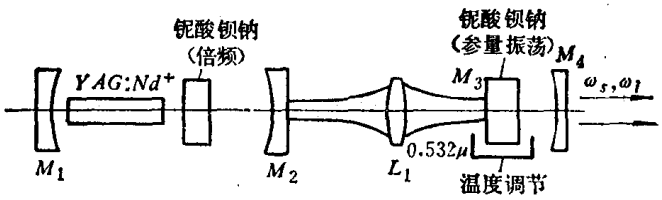


图8-55 光学参量振荡器的实验装置示意图

图8-55是连续输出的参量振荡器的示意图。这个装置采用 $YAG:Nd^{3+}$ 激光器输出的二次谐波作为泵光束，用铌酸钡钠晶体作参量振荡的工作物质，晶体的一个表面镀有高反射膜（M_3），它和反射镜 M_4 构成谐振腔。用调节温度的办法来调谐，输出波长范围为0.98～1.16微米。

五、自聚焦现象

当强度很高的激光入射到某些各向同性介质（如二硫化碳、甲苯等）中时，由于介质的分子在激光的强电场的作用下重新定向和重新排列的结果，会使折射率随光强线性地增加。这样，如果入射的是高斯光束，由于它的中心部分的强度比周围高，结果引起介质的中心部分的折射率比周围高，形成一种“类透镜”的结构，使光束自动聚焦，最后形成一根直径只有几微米的极细的光丝。在光丝经过的地方，折射率比周围高，由于全反射的缘故光束不再散开。这个现象叫光的自聚焦现象。由于自聚焦的结果，形成极高的能量密度，可以进一步激起其它的非线性光学现象，甚至使介质本身被破坏。

§8-11 环形激光器（激光陀螺）

环形激光器的基本特点在于其谐振腔是环形的。在这种环形腔中，沿顺时针和逆时针传播的两束激光是独立的，它们有不同的频率。频率之差由环形腔的转动角速度决定。因此，测出这个频率之差就可以决定环形腔（以及腔体所依附的物体例如飞船）的转动。这一节简单地介绍一下环形激光器的原理。为此先从塞格纳克（Sagnac）干涉仪说起。

一、塞格纳克干涉仪

1913年塞格纳克成功地显示了一种环形干涉仪。严格说来，这种干涉仪的原理应根据广义相对论来讨论。不过，由于转动的线速度相对于光速来说非常小，我们可以用经典理论近似地说明。

图8-56是一个理想的圆形干涉仪。光在 A 点入射并被析光镜分成两束。反射光沿着圆

形路径逆时针传播，透射光被镜子M反射回来后又被析光镜反射，沿着圆形路径顺时针传播。经过一周之后，这两束光在析光镜处又会合。当干涉仪不动时，两束光传播一周的时间，不管是顺时针的或是逆时针的，是相同的

$$t = \frac{2\pi R}{c} \tag{8-113}$$

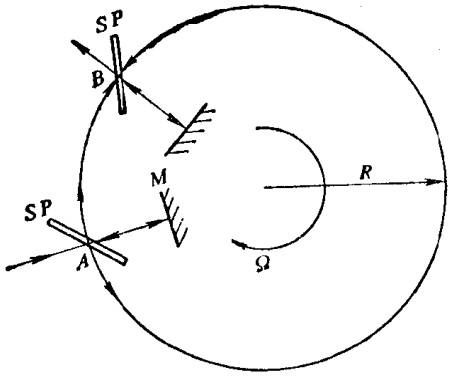


图8-56 理想的圆形干涉仪

式中R是圆的半径，c是光的传播速度。如果干涉仪以角速度Ω顺时针转动，对于随同干涉仪一起转动的观察者㊀来说，两束光传播一周的时间就不同了。顺时针传播的时间比式(8-113)给出的长。逆时针传播的时间比式（8-113）给出的短。原因是在这段时间内析光镜已从A点转到了B点。先看顺时针传播的光。当它再次到达析光镜时多走了一段$\overset{\frown}{AB}$，因此所需的时间㊁

$$t_+ = \frac{2\pi R + \Omega R t_+}{c} \tag{8-114}$$

式中$\Omega R t_+$就等于$\overset{\frown}{AB}$的长度。由上式求出

$$t_+ = \frac{2\pi R}{c - \Omega R} \tag{8-115}$$

用同样的方法可以求出逆时针传播的光束再次到达析光镜所需的时间为

$$t_- = \frac{2\pi R}{c + \Omega R} \tag{8-116}$$

两者之差（准确到第一级）

$$\Delta t = t_+ - t_- = 4\pi\Omega R^2/c^2 \tag{8-117}$$

这两束光在析光镜再次会合时的光程差㊂

$$\Delta L = \Delta t \cdot c = 4\pi\Omega R^2/c \tag{8-118}$$

由于圆的面积$S = \pi R^2$，所以

$$\Delta L = \frac{4\Omega S}{c} \tag{8-119}$$

只要将上式中的S理解为环形腔所包围的面积，那么该式不仅对圆形腔适用，对任意形状的平面环形腔都适用。现在对照图8-57证明这一结论。证明步骤也是先求出两束光传播一周的时间。先来看顺时针传播的光。把环形腔分成许多小线段，任取一线段元dl（图中的EF）。当腔体不动时，光通过这一段的时间为

$$dt = \frac{dl}{c}$$

当腔体以角速度Ω绕O点转动时，线段末端F也以线速度

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r} \tag{8-120}$$

㊀ 除非特别声明，下面的讨论都是在转动座标系中进行的。

㊁ 下文都用下标“+”代表顺时针传播，用下标“-”代表逆时针传播。

㊂ 光在AM这一段来回的光程是常数，在讨论当前这个问题时不必考虑。

移到了 F'（见图 8-57 b）。在转动座标系中光从 E 点到达 F 点时，在惯性座标系中看来，光是从 E 点到达 F' 点。所以在转动座标系中光从 E 到 F 的时间为

$$dt_+ = \frac{EF'}{c} \qquad (8\text{-}121)$$

由于 $|\boldsymbol{v}| \ll c$，$FF' \ll EF$。从 F' 作 EF 的垂线，垂足为 F''，则

$$EF' \approx EF'' = dl + \boldsymbol{FF'} \cdot dl/dl$$

$$= dl + \boldsymbol{v} \cdot \frac{d\boldsymbol{l}}{dl} \cdot dt_+$$

式中 $\boldsymbol{v}$ 由式（8-120）给出，代入上式得

$$EF' = dl + (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot \frac{d\boldsymbol{l}}{dl} \cdot dt_+$$

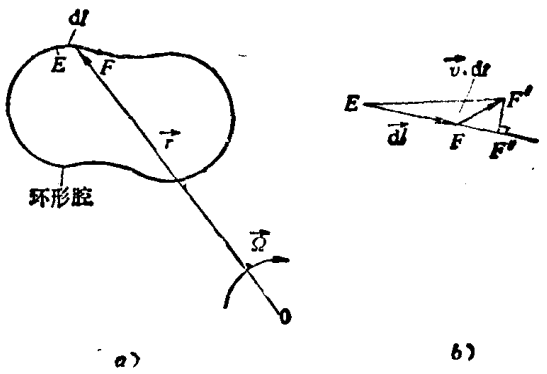


图8-57 任意形状的平面环形腔

代入式（8-121）求出

$$dt_+ = \frac{dl}{c} + \frac{1}{c^2}(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{l} \qquad (8\text{-}122)$$

因此在转动座标系中看来，顺时针传播一周所需的时间

$$t_+ = \oint dt_+ = \oint \left[\frac{1}{c}dl + \frac{1}{c^2}(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{l}\right] = \frac{1}{c}L + \frac{1}{c^2}\oint (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{l}$$

式中 L 为环形腔的周长。同样可以求出逆时针传播一周所需的时间

$$t_- = \frac{L}{c} - \frac{1}{c}\oint (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{l}$$

二者之差

$$\Delta t = \frac{2}{c^2}\oint (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{l} = \frac{2}{c^2}\oint \boldsymbol{\Omega} \cdot (\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{l}) = \frac{2}{c^2} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \oint \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{l} = \frac{4\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{S}}{c^2}$$

式中 $\boldsymbol{S} = \oint \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{l}$，$\boldsymbol{S}$ 的大小为环形腔所包围的面积，$\boldsymbol{S}$ 的方向为腔平面的法线方向，按通常环路积分的规则确定。因此

$$\Delta L = \Delta t \cdot c = \frac{4\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{S}}{c} = \frac{4\Omega S}{c}$$

公式（8-119）得证。

根据上式，一个处在转动座标系中的观察者只要测出光程差就能精确地知道他的座标系相对于惯性空间的转动角速度。1925年，麦克耳逊与盖勒根据塞格纳克提出的原理来测定地球的转动。他们把一个如图 8-58 所示的干涉仪固定在大地上。这个干涉仪的回路 $ABCD$ 是 2000×1000 英呎的矩形。为了测出光程差 L，还有一个面积小得多的参考回路 $ABC'D'$。它所产生的光程差可以忽略不计。这样就可以根据两套干涉条纹之间的位移测出在大回路中产生的光程差，这个光程差的数值约为 1300 埃（$\sim\frac{\lambda}{4}$）。

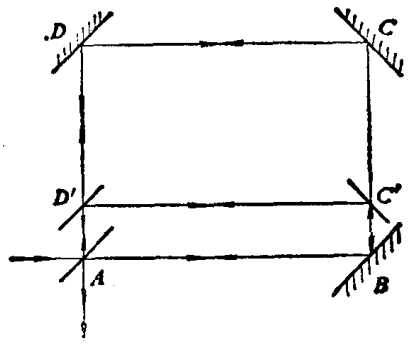


图8-58 麦克耳逊-盖勒实验

二、环形激光器

上面讨论的环形腔是无源的，需要有一个外部的光源。虽然它能从两束反向传播的光的光程差测出转动，但灵敏度极低，这一点从上面麦克耳逊和盖勒的实验中也可以看出。再举一个例子，一个边长为 13 厘米的正三角形腔以 10度/小时的角速度转动，所产生的光程差 ΔL 仅为 1.2×10^{-5} 埃。测量这样小的光程差是极困难的，即使用激光作为外部光源也无济于事。但是如果把系统做成有源的，即在腔内充入增益介质，使它本身产生激光振荡，情形就大大改变了。图 8-59 是三角形谐振腔的示意图。在前面讨论直腔的纵模时已指出，激光共振频率

$$\nu = J\frac{c}{2nd}$$

这里 $2nd$ 是激光在谐振腔中来回一次的光程。在环形腔的情形。$2nd$ 应该用传播一周的光程 L 来代替

$$\nu = J\frac{c}{L}$$

由于反向传播的两光束的光程不同，频率也就不同

$$\left.\begin{aligned}\nu_+ &= J\frac{c}{L_+}\\ \nu_- &= J\frac{c}{L_-}\end{aligned}\right\} \tag{8-123}$$

于是

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta L}{L} \tag{8-124}$$

式中$\Delta\nu = \nu_+ - \nu_-$ 是反向传播的两束激光的频率之差，称为拍频。

将式（8-119）代入得到

$$\Delta\nu = \frac{4S\Omega}{L\lambda} \tag{8-125}$$

式中 S 和 L 分别为环形腔的面积和周长。仍以上面举的边长为 13 厘米的正三角形腔为例，得到拍频（两光束频率之差）为 59 赫。这样的拍频容易用光混频的方法测量出来。所以用环形激光器作为转动传感器，灵敏度大大提高了。不过，必须严格保证激光腔中的两光束处在完全相同的物理环境中。否则，从式（8-123）知道由温度起伏或机械不稳定所引起的频率改变会远远超过由转动所引起的频率差。

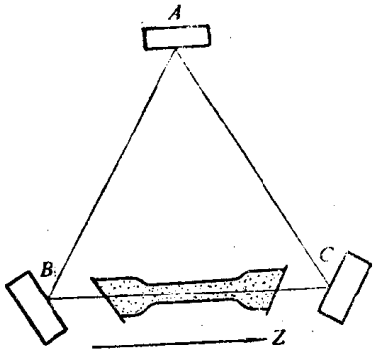


图8-59 环形谐振腔

三、角度的测量

如上所述，从拍频的测量可以知道腔体的转动角速度 Ω。将角速度积分可以测出转角

$$\theta = \int_0^t \Omega dt \tag{8-126}$$

实际上，我们可以根据干涉条纹的移动来测量转角。下面我们来形象地分析一下这个问题。

先以图 8-59 中的三角形腔为例，分析一下腔内的驻波花样。将 BC 取作 Z 轴。在 BC 段

顺时针与逆时针的行波可以表示为

$$E_+ = E_0 \exp[i(\omega_+ t + k_+ Z + \phi_+)] \tag{8-127 a}$$

$$E_- = E_0 \exp[i(\omega_- t - k_- Z + \phi_-)] \tag{8-127 b}$$

这里假定两行波振幅相等，它们的角频率与波数分别为 $\omega_\pm$ 与 $k_\pm$，初位相为 $\phi_\pm$。

当环形腔无转动时

$$\omega_+ = \omega_- = \omega$$

$$k_+ = k_- = k$$

于是在 BC 段形成驻波

$$E = E_+ + E_- = 2E_0 \cos\left(kz + \frac{\phi_+ - \phi_-}{2}\right) \exp\left[i\left(\omega t + \frac{\phi_- + \phi_-}{2}\right)\right] \tag{8-128}$$

当环形腔顺时针转动时

$$\omega_- - \omega_+ = \Delta\omega > 0$$

$$k_+ - k_- = \Delta k > 0$$

这时这两行波合成为

$$E = 2E_0 \cos\left(kz - \frac{\Delta\omega}{2} t\right) \exp[i(\omega t + \Delta k z)] \tag{8-129}$$

式中 $k = \frac{k_+ + k_-}{2}$，$\omega = \frac{\omega_+ + \omega_-}{2}$，为了简单起见，式中已把不重要的位相常数 $\frac{\phi_+ \pm \phi_-}{2}$ 略去。由于 $\Delta k \approx 0$，如果所考察的空间范围不大，可以把上式写成

$$E \approx 2E_0 \cos\left(kz - \frac{\Delta\omega}{2} t\right) \exp(i\omega t)$$

与式（8-128）对比，可以称它为“准驻波”。普通驻波的波节是固定的，这个“准驻波”的波节却是移动的。移动的速度为

$$v_z = \frac{\Delta\omega}{2k} = \frac{\pi \Delta \nu}{k}$$

将式（8-125）代入得到

$$v_z = \frac{2S\Omega}{L}$$

$v_z > 0$，这说明波节向 $+Z$ 方向移动。由于上述结论是在腔体按顺时针方向转动的假设下推出的，所以 $v_z > 0$ 也就说明波节是逆着转动方向移动的。不难相信，上述结论对于环形腔的任何一节都是正确的。现在让我们转换到理想的圆形腔。图 8-60 画出了圆形腔的一节。根据上面的分析。当圆形腔以角速度 Ω 顺时针转动时，在固定于腔体的观察者看来，准驻波的波节是逆时针移动的，而且移动的速度

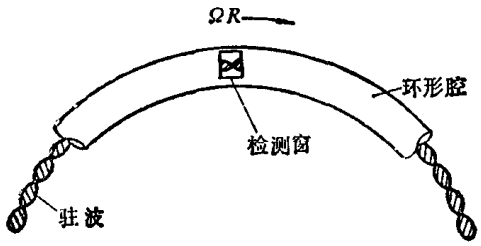


图8-60　钉锁在惯性空间的驻波

$$v = \frac{2S\Omega}{L} = \frac{2 \times \pi R^2 \times \Omega}{2\pi R} = \Omega R$$

正好等于腔体转动的线速度。因此这个准驻波相对于惯性空间是不动的，不被环形腔的转动所带动。于是当环型激光腔转动时，固定在腔体上的光电元件就能从检测窗上测出驻波波节

的相对运动。因为相邻波节的间距为$\frac{\lambda}{2}$。所以每移动一个波节就对应$\frac{\lambda}{2R}$的转角。

图 8-61 给出了一种具体的测量方案。在腔内向相反方向传播的两光束的一小部分能量（不到 0.1%）透过反射镜M射入直角棱镜P。直角棱镜的折射率为n，直角偏差为ε，ε很小。为了防止震动，也可以将直角棱镜与反射镜做成一体。两束光从直角棱镜出射后只有一个很小的夹角：

$$\alpha = 2n\varepsilon \tag{8-130}$$

于是形成平行等距的干涉条纹。干涉条纹的强度分布为（习题 8.16）

$$I = I_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\alpha}{\lambda}x + 2\pi\Delta\nu \cdot t + \phi\right)\right] \tag{8-131}$$

式中$\Delta\nu$是拍频，ϕ是某一常数。当腔体不动时，$\Delta\nu = 0$，条纹是稳定的。当腔体转动时，条纹也以拍频$\Delta\nu$移动。式（8-131）中的位相项$2\pi\Delta\nu \cdot t$每改变2π就移过一根条纹，所以探测器所接收的条纹数

$$F = \int_0^t \Delta\nu dt$$

把式（8-125）代入得到

$$N = \frac{4S}{\lambda L}\int_0^t \Omega dt = \frac{4S}{\lambda L}\theta \tag{8-132}$$

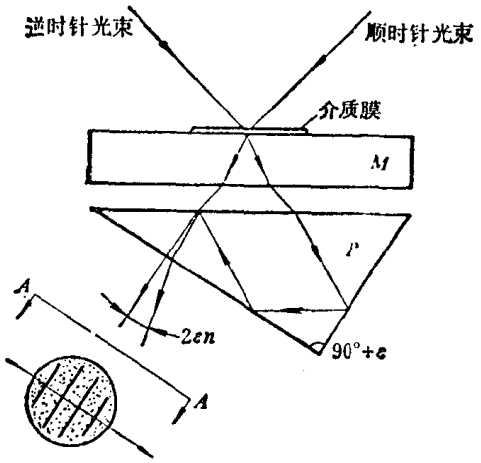


图8-61 测量转角的一种方案

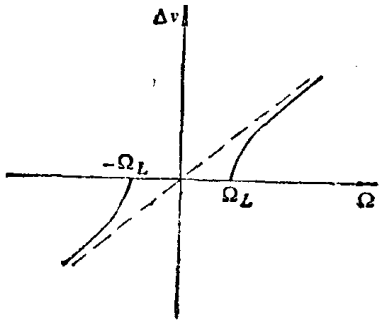


图8-62 激光陀螺工作曲线

这样就可以根据接收到的条纹数来测定转角。在实际测量时，用两个相隔$\frac{1}{4}$条纹的探测器来接收条纹。这两个探测器的输出信号的位相差 90°，通过逻辑电路就可以判断转动的方向，以便把相反方向的转角从累计中减去。

四、误差的讨论

上面讨论的都是理想的情况，拍频$\Delta\nu$与转动角速度成正比，如图 8-62 的虚线所示。实际上还存在一系列的误差源，使工作曲线偏离直线。在误差源中首先要讨论的是闭锁，即在低的转动角速度下拍频信号会消失。这是由于腔的反射镜上总存在对光的反向散射。这样，顺时针传播的光，由于反向散射会耦合到逆时针传播的光束中去，反之亦然。这种耦合就可

能使得由于转动引起的频率差减小甚至消失，也就使激光陀螺工作曲线偏离直线，如图8-62中实线所示。图中Ω_L到$-\Omega_L$这一段叫闭锁区。Ω_L一般在几度/小时到几百度/小时之间，这取决于反向散射的大小。目前已设计出许多方案（称为偏频方案）来部分地或完全地避开这个闭锁区。

此外，放电管中存在的气体流动，增益介质与振荡光之间的相互作用而引起的频率牵引和推斥效应，外界磁场对增益介质的作用等等都会引起可观的误差，这些正是环形激光器研制中有待解决的问题。

环形激光器（激光陀螺）主要用于飞船等的制导系统中。如果在飞船中装置三个正交的激光陀螺，再把测量结果输入专用的计算机，就可以决定飞船的方位并加以控制。目前国外的激光陀螺已进入实用阶段，精度约为0.01度/小时。

§8-12 光 通 讯

自从激光问世以来，人们就千方百计地把激光应用于通讯，这是激光最能施展其本领的领域。这一节介绍一下光通讯中与光学有关的几个环节，说明激光通讯比起电通讯所具有的巨大优越性，从而了解为什么光通讯是激光的最有前途的应用。

一、调制

通讯就是把信息传递给对方，这种信息可以是说话的波形、电视信号或从计算机输出的二进制数据。通讯包括发射、传输和接收三个过程。从发射这一方面来说，首先必须把信息施加于光束，使光束携带着某种信息，这个过程叫做调制。正象无线电广播时，必须经过调制，使载波携带广播员说话的波形信息一样。

光通讯中常用的调制方法有调幅和调频两种。

调幅就是使光束的振幅（功率）按一定的规律变化，通过振幅的变化来携带信息。下面介绍一种调幅方法——脉冲编码调制法（PCM法）。

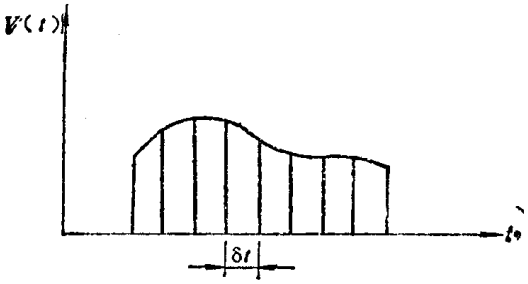


图8-63 信号及其取样

图中等间隔竖线代表信号的取样值

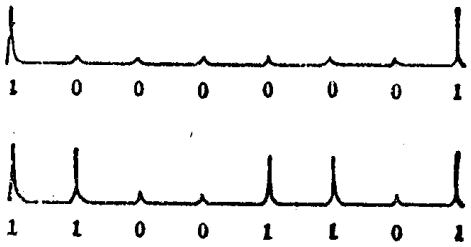


图8-64 用脉冲系列代表信号值

例如我们要传输如图8-63所示的信号$V(t)$。我们不需要把每时每刻的信号值传输出去，只要每隔一定的时间间隔δt测出信号值，得到取样信号$V_s(t)$（见图中等间隔的竖线）。在通讯理论中有一个著名的取样定理，它告诉我们，如果信号$V(t)$所包含的最大频率是ν_{max}，那么只要取样间隔$\delta t \leqslant \frac{1}{2\nu_{max}}$，就可以从取样信号$V_s(t)$完全地复原出信号$V(t)$，不会产生任何失真。例如，如果$V(t)$是声音的波形，它的最高频率就不超过4000赫，只要取$\delta t=\frac{1}{8000}$秒即可。得到取样信号后，再把信号大小分成若干档，用一个二进制数来表示信号大小，就象我们在计

算机中所做的那样。这个过程叫做编码。若把信号分成256档，可用八位的二进制数表示信号大小。例如，10000001就代表$2^7+1=129$，11001101就代表$2^7+2^6+2^3+1=205$。这样就可以用八个脉冲来代表信号大小。刚才例举的两个值用图8-64所示的脉冲来代表。得到电脉冲以后，再对光源进行调幅。它的方法很多。例如，可以用电信号来控制抽运功率，使激光输出功率随之改变；也可以利用第六章中讲过的电光晶体调制器（或电光开关）。综上所述，整个发射过程可以归结为图8-65所示的流程：首先把声音波形变成电信号，进行取样、编码、得到电脉冲，再用电脉冲来调制光源，使光源发射光脉冲系列。以上例来说，

图8-65 发射流程图

如果我们能使光源每隔$\frac{1}{8000}$秒发出一组如图8-63那样代表信号值的脉冲（相邻脉冲间隔为$\frac{1}{8\times8000}$秒），就把信号传输出去了。

另一种调制方法是调频。调频就是让激光的频率按一定规律变化，使频率改变量与信号成线性关系。例如，可以使谐振腔的腔长随信号改变，于是激光的频率也随之改变。

关于光通讯中所用的激光器的类型，要根据用途选择。半导体激光器由于小巧、价廉、又便于直接调制，是很实用的。目前用的半导体二极管激光器都是双异质结的（$GaAlAs$），波长为0.8～0.9微米，谱线宽度$\Delta\lambda<20$Å，阈值电流约为2 000埃/厘米^2，寿命可达几年。近来还制成了一种新的二极管激光器（$InGaAsP$），它的波长在1.05微米左右。这种波长的激光在光纤维中传输时损耗极小。另外，在近距离通讯时，也可以用发光二极管来代替半导体激光器。

二、传输

传输的方式有两种，直接传输和光纤传输。

由于直接传输最为简便，再加上激光具有高度指向性，所以这种传输方式是吸引人的。但是这种方式受大气干扰严重，当遇到下雨或发雾时衰减很厉害，只能用于近距离通讯或太空通讯（太空中没有大气）。

另一种传输方式是利用光纤维。它的优点是很突出的：i）普通的电通讯易受电感应的干扰，也容易泄密，光纤维通讯完全不受电磁干扰，保密性也很好。光纤维的这个优点在军事上尤为重要；ii）无需有色金属作导体，能节约大量有色金属；iii）重量轻，柔软可弯，便于运输和敷设；iv）最后还有一个非常重要的优点，就是通讯容量无比巨大。关于这一点下面再讨论。但是，用光纤维通讯还要考虑如下三个问题：

1. 微分滞后。图1-27所示的光纤维，它的芯和外套层是由不同材料制成的，芯的折射率是n_1，外套层的折射率是n_2。这种光纤维有一个很大的缺点，就是当光线跟光轴的夹角不同时，在光纤维中前进同一距离所需的时间也不同。这种现象称为微分滞后，其原因在于光在芯中是沿“Z”字形路径传播的。当光线跟光轴夹角不同时，沿光轴前进同一距离所经过的实际光程是不同的。当光线掠入射时，实际光程最短；当光线沿临界角入射时，实际光程最长。微分滞后可以从这两条光线的传播时间之差估计出来。微分滞后会使光脉冲变宽或变

形，在长距离传输时尤为严重。为了消除微分滞后，应该使临界角尽量小，也就是应该使 n_1 与 n_2 的差别尽量小。一般要求 n_2-n_1 小于 n_1 的 1%。另一个方法是将芯与外套层一体化，也就是不再额外地制造一层外套，而是在玻璃芯中掺入其它元素（例如硼），使纤维中的折射率从中心到边缘按抛物线函数降低（图 8-66 *a*）。这样的纤维就像透镜一样，本身就具有聚焦的作用（自聚焦），能把光束保持在轴线附近。图 8-66 *b* 中画出了光纤维中两条典型的光线的路径，当沿轴线前进同一距离时，*B* 走过的路程比 *A* 长，但 *B* 是沿边缘通过的，由于边缘的折射率较低，*B* 的光程是与 *A* 相同的，这样就消除了微分滞后。

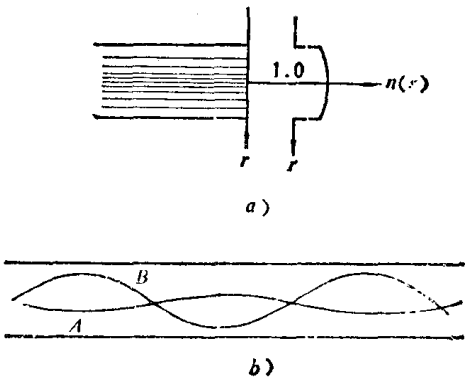


图8-66

a）自聚焦光纤维的折射率分布图

b）光线在光纤维中传播的路径

2. 吸收。最初制成的光纤维对光的吸收很厉害，严重限制了光纤维的应用。后来知道吸收不是玻璃本身的问题，而是由杂质造成的。经过工艺上的改进之后，损耗已下降到 1 分贝/公里 以下（即每公里损失不到 20%）。据报导，最近已研制成功每公里损失只有千分之二的光纤维。还应该指出，光纤维的损失与波长有关，当波长为 1.05 微米时损耗最小。

3. 连结问题。已初步试验成功的一种方法是利用一种特殊的开有许多沟槽的连结片。两束光纤维的端面先抛光，再沿各条沟槽一一对准，用折射率跟光纤维匹配的环氧树脂粘合。

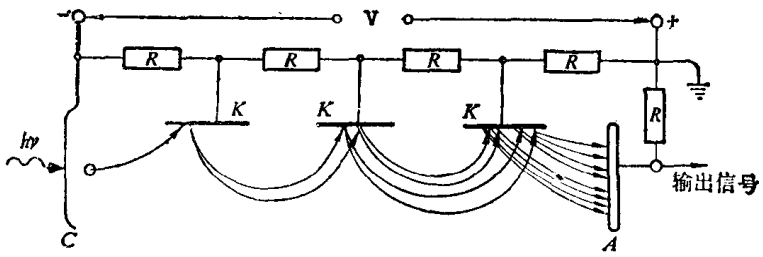


图8-67 光电倍增管

C—阴极 *K*—对阴极 *A*—阴极 *V*—高压直流电源 *R*—电阻

目前已投入实际使用的一条光纤维传输线的损耗为 4 分贝/公里（包括连结损失在内）。微分滞后小于 1.7×10^{-10} 秒/公里，在没有中继站再放大的情形下，能传输 10 公里。

三、接收

接收的方式有直接接收与相干接收两种。究竟采用哪种方式是由调制的类型决定的。对于振幅调制，采用直接接收，就是用光电元件直接接收光信号。光电元件的响应与入射光的强度成正比。如果输入的是编码的光脉冲序列，输出的就是编码的电脉冲序列，再经过译码电路还原出原来的信号。对于频率调制，采用相干接收，一般是超外差接收。跟超外差收音机相似，在接收器中有一个本地振荡器，它发出频率稳定的激光束，与接收到的光信号混频。接收器输出它们的差频信号，再经过解调电路还原出原来的信号。

无论采用哪种接收方式，都必须有光电元件把光信号转变成电信号。常用的光电元件有光电倍增管和半导体光电二极管两种。光电倍增管是利用光电效应制成的，如图 8-67 所示。当光子打到涂有金属氧化物的金属表面（称为光阴极）时，能发射出电子。由于光通讯中接收到的光信号很弱，从光阴极得到的光电流是非常微弱的。但在光电倍增管中光阴极射出的电子还被加到第二个阴极（称为对阴极）上的电压加速。高速电子打到对阴极上可以击出更

多的电子。在一个光电倍增管中有十来个对阴极，上述过程被重复，最后得到放大的光电流。光电倍增管的放大倍数的典型值为 10^6，灵敏度可达 10^{-19} 瓦。光电倍增管的优点是灵敏度高，频带宽。但它比较笨重，而且需要高压电源，因此在光通讯中常用半导体光电二极管作接收元件。如图 8-68 所示，光电二极管也是由 P N 构成的，不过在 P N 结两端加的是反向电压。在不受光照射时电流为零。当 P N 结受到光照射时，共价键上的价电子可以吸收光子而脱离共价键的束缚，并在外电场的作用下向正极运动，同时在共价键上留下一个带正电的空穴，它在外电场的作用下向负极运动。这样就产生了电流。所以在光电二极管里发生的物理过程跟发光二极管中的复合辐射恰好相反。如果使光电二极管的反向电压接近击穿电压，那么由光照射所产生的电子与空穴通过结区时会获得足够的动能，从而可以从共价键上释放出更多的电子-空穴对，使电流得到放大。这样的光电二极管叫雪崩式光电二极管。

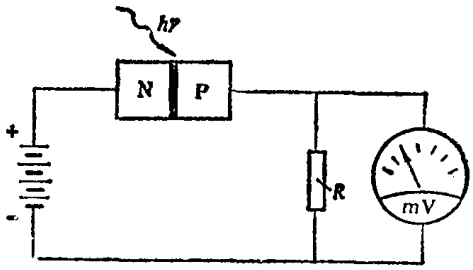


图8-68 光电二极管

四、多路通讯

在通讯中有一个非常重要的问题是多路通讯。说得通俗一点，就是在同一线路上允许很多电话或电视同时传输而互不干扰。实现多路通讯的基本方法有以下两种。

1. 频分制

以电话为例，就是把不同通话对象的声音信号加到不同频率的载波上。由于声音频率＜4 千赫，只要这些载波的频率差≥8 千赫，它们就可以在同一线路上同时传播，而不会互相干扰，在接收时利用选频的方法把它们分离开来。这是目前微波通讯中常用的多路通讯方法。显然，通频带越宽，就能允许越多的电话同时通话，亦即通讯容量越大。光波的频率比微波高好多个数量级，光波的频带也比微波宽很多。仅按红外光计算，频带宽度约为 10^{12}～10^{14} 赫，已经是目前所用的全部电波频带的几千倍。就理论上的潜力来说，红外光可同时传送上千亿个电话。可见，光通信的容量是空前巨大的。但是对光通讯来说，频分制还有许多困难，未进入实用阶段。

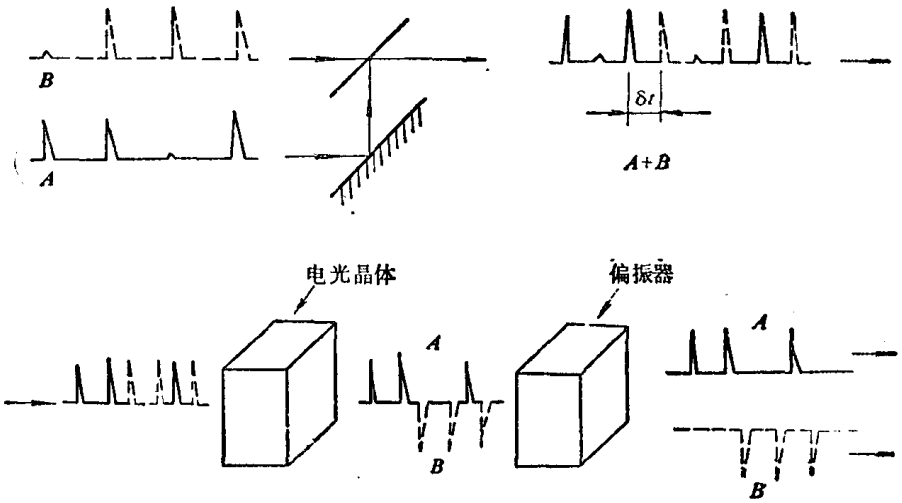


图8-69 多路通讯（时分制）示意图

2. 时分制

仍以电话为例，先把声音信号进行脉冲编码。例如有两个声音讯号已经经过编码，如图8-69的A和B所示。然后让它们以先后时间顺序在同一线路上传送，也就是让一个信号比另一个滞后一定时间δt。在接收端再利用电光晶体和偏振器将它们分开（习题8.18）。上面已经指出，对一个电话信号来说，相邻编码脉冲之间的时间间隔为$\frac{1}{8\times8000}$秒，每秒钟有8×8000个脉冲。按目前技术水平每秒钟可以处理4.5×10^7个电脉冲，所以每个光束可以同时传送700个电话。一根直径约10毫米的光纤维电话线包含24根光纤维，可以同时传送$700\times24=16800$个电话。从这个例子也可以看到光通讯的信息容量是非常巨大的。

光通讯可用于经济、军事、科学、文化等各方面。目前，光通讯刚刚进入实用阶段。将来有可能研制出更新的优异材料来作光纤维，集成光学的发展也将对光通讯起巨大影响，并使光通讯渗入到其它技术领域中去。

§8-13 薄膜波导与集成光学

六十年代末期出现的一门崭新的学科——集成光学，是继激光出现之后，主要为解决光通讯而逐步发展起来的。它采用类似于集成电路的那些技术，把一些光学元件(如发光元件、光放大元件、光逻辑元件、光传输元件、光的各种调制元件、光耦合元件和接收元件）以薄膜形式集成在同一衬底上，构成一个具有独立功能的微型光学系统。这样的集成光路具有体积小、性能稳定可靠、效率高、功耗低、使用方便等优点。它的发展在通讯、光学信息处理和计算技术领域里显示出强大的生命力，并将对其他学科产生深远的影响。

集成光学器件以薄膜为基础，但它与薄膜光学有很大的区别。薄膜光学是研究光束穿过薄膜时所发生的现象的，而集成光学则研究光束在薄膜里沿着薄膜传播时所发生的现象。因此，二者有着完全不同的研究内容与用途。

下面介绍一下集成光学中的几个主要问题。

一、薄膜波导

光学薄膜波导就是沉积在衬底上的一片薄膜（图8-70），它的折射率n_1比空气折射率n_0与衬底折射率n_2都高。考察薄膜里一条向上传播的光线。因为薄膜折射率n_1比空气折射率n_0高，当入射角大于临界角

$$\theta_{c0}=\sin^{-1}\frac{n_0}{n_1} \qquad (8\text{-}133\,a)$$

时，光将在薄膜上表面全反射。反射光向下表面传播。同样地，当入射角大于临界角

$$\theta_{c2}=\sin^{-1}\frac{n_2}{n_1} \qquad (8\text{-}133\,b)$$

时又发生全反射。这样，光在薄膜里将沿“Z”字形路径向前传播，称为“Z”形波。

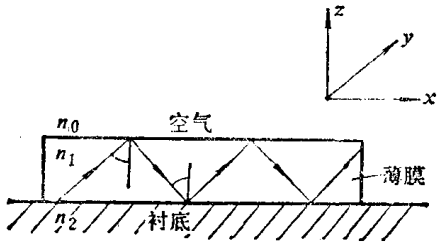


图8-70 薄膜波导

在波动光学中，上面讨论的光线代表一个平面波。设薄膜平面为xy平面。在图8-71中，想象一个x与y方向都无限广延的平面波在薄膜上下表面之间来回反射，形成了许多互相交迭的平面波。把Z形波向下的一支叫做A波。向上的一支叫做B波。不同的A波用字母

A_1、A_2、…表示；不同的B波用字母B_1、B_2、…表示。A波和B波的波矢量$\boldsymbol{k}_a$和$\boldsymbol{k}_b$的大小都是kn_1（这里$k=\frac{2\pi}{\lambda_0}$），但方向不同。$\boldsymbol{k}_a$和$\boldsymbol{k}_b$在X轴方向的分量都是

$$\beta = kn_1\sin\theta_1 \tag{8-134}$$

式中θ_1为入射角。但它们在Y轴方向的投影不同，分别为

$$-b = -kn_1\cos\theta_1 \tag{8-135}$$

和

$$+b = +kn_1\cos\theta_1 \tag{8-135 a}$$

A波和B波在数学上可以表示为

A波 $$A\exp[i(-\omega t+\beta x-bz+\phi_A)] \tag{8-136 a}$$

B波 $$B\exp[i(-\omega t+\beta x+bz+\phi_B)] \tag{8-136 b}$$

式中A、B分别是A波与B波的振幅，ϕ_A与ϕ_B分别是它们的初位相。

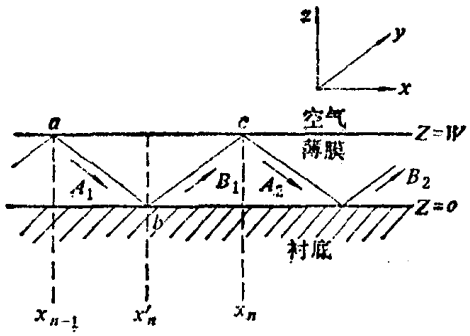


图8-71 薄膜中的Z形波

值得提醒的是，A波和B波并不是图中的一根线，而是充满整个薄膜的平面波。设膜厚为W，从图8-71可见，a点的x、z座标为（x_{n-1}，W），C点的x、z座标为（x_n，W）。代入式（8-136 a）写出A_1波在a点和c点的表示式为：

$$A_1(a) \quad A\exp[i(-\omega t+\beta x_{n-1}-bW+\phi_A)] \tag{8-137}$$

$$A_1(c) \quad A\exp[i(-\omega t+\beta x_n-bW+\phi_A)] \tag{8-138}$$

下面推导A_2波在C点的表示式。推导的步骤是沿着“Z”字形从$a\to b\to c$。先写出A_1波在b点的表示式。把b点的座标（x'_n，0）代入式（8-136 a）得到：

$$A_1(b) \quad A\exp[i(-\omega t+\beta x'_n+\phi_A)]$$

由于B_1波是A_1波经全反射得到的，B_1波的振幅$B=A$，但在b点全反射时位相改变了$2\phi_{12}$，所以B_1波在b点的表示式为

$$B_1(b) \quad A\exp[i(-\omega t+\beta x_n'+\phi_A+2\phi_{12})]$$

再根据式（8-136 b）写出B_1波在c点的表示式

$$B_1(c) \quad A\exp[i(-\omega t+\beta x_n+bW+\phi_A+2\phi_{12})]$$

A_2波是由B_1波在c点经全反射得到的。依照类似的方法可以写出A_2波在c点的表示式：

$$A_2(c) \quad A\exp[i(-\omega t+\beta x_n+bW+\phi_A+2\phi_{12}+2\phi_{10})] \tag{8-139}$$

式中$2\phi_{10}$表示在c点全反射时的位相改变。

A_1波和A_2波（还有A_3、A_4、……）在相互叠加时会产生干涉。只有当它们的位相差是2π的整数倍时，才能相互加强，产生谐振，形成一定的模式向前传播，正象在激光谐振腔中来回反射的诸光波也得满足一定的谐振条件才能形成纵模一样。比较式(8-138)与(8-139)不难得到谐振条件是

$$2bW+2\phi_{12}+2\phi_{10}=2m\pi$$

或者

$$bW+\phi_{12}+\phi_{10}=m\pi \tag{8-140}$$

式中m是正整数。这个公式是很重要的，它决定了波导的传播模式。这里模式的意义与§8-4讨论激光的纵模和横模的模式时一样，是指薄膜里面电磁场的稳定的分布图样。m称为

模式的阶。$2\phi_{10}$ 和 $2\phi_{12}$ 是在两表面全反射时的位相改变。以 TE 波为例，根据第一章中讨论全反射时得到的公式（1-106）可以求得：

$$\phi_{10}=\tan^{-1}\frac{(n_1^2\sin^2\theta_1-n_0^2)^{\frac{1}{2}}}{n_1\cos\theta_1},\qquad 0\leqslant\phi_{10}\leqslant\frac{\pi}{2}\tag{8-141}$$

$$\phi_{12}=\tan^{-1}\frac{(n_1^2\sin^2\theta_1-n_2^2)^{\frac{1}{2}}}{n_1\cos\theta_1},\qquad 0\leqslant\phi_{12}\leqslant\frac{\pi}{2}\tag{8-142}$$

把式（8-141）和（8-142）代入方程（8-140）将得到一个超越方程。这个方程的解析求解是困难的。但是对于一定的 n_0、n_1、n_2、和 m，可以从 θ_1 的值计算出厚度 W 来。这样，在 W 与 θ_1 之间建立起一一对应关系。为了下面讨论的需要，我们也从 θ_1 计算出 β/k 来，它的物理意义留待下面讨论。根据式（8-134）

$$\frac{\beta}{k}=n_1\sin\theta_1\tag{8-143}$$

图 8-72 针对玻璃上的 Ta_2O_5 膜画出了膜厚 W 与 β/k 的关系曲线，横座标代表膜厚，纵座标代表 β/k 值。下面来分析这些曲线。为了简单起见只研究 TE 波的情形。

1）当膜厚 W 一定时，对于给定的 m，只有一个确定的 β/k 与之对应，因此也只有一个确定的 θ_1 值与之对应。这说明对于一个给定的模式，只有一个确定的入射方向。阶数 m 越高，入射角越大。

2）对于一定的模式，存在一个最小膜厚（称为截止膜厚）。这时 β/k 等于 n_2，亦即入射角 θ_1 等于下表面临界角。当膜厚比截止膜厚还要小时，入射角小于临界角，电磁场就传播到衬底里去，因而沿薄膜很快衰减下去。

3）膜越厚，允许存在的模数越多

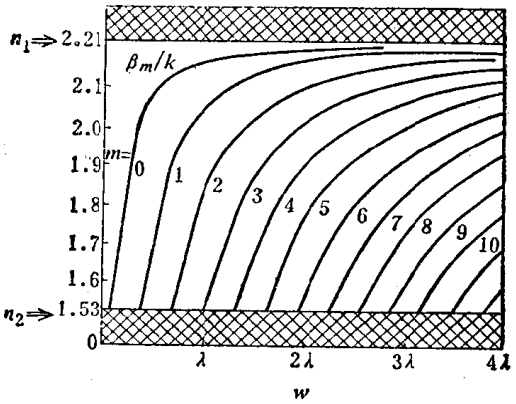


图8-72 沉积在玻璃上的 Ta_2O_5 薄膜波导中的 TE 模的有效折射率 β/k（$n_1=2.21$，$n_2=1.53$）

下面分析一下薄膜中这些模式的场的分布。

在满足公式（8-140）所表示的谐振条件时，所有的 A 波是同相的，所有 B 波也是同相的。因此薄膜中所有的波归结于两列波，可以用式（8-136 a）和（8-136 b）表示。此外，我们还知道，这两列波的振幅是相等的（$A=B$），位相有一定的关系。因为在下表面反射时位相改变是 $+2\phi_{12}$，所以在下表面（$Z=0$）处，B 波与 A 波的位相差

$$\Delta\phi=(-\omega t+\beta x+\phi_B)-(-\omega t+\beta x+\phi_A)=2\phi_{12}$$

亦即

$$\Delta\phi=\phi_B-\phi_A=2\phi_{12}\tag{8-143}$$

A 波与 B 波叠加后的电磁场

$$E=A\exp[i(-\omega t+\beta x-bz+\phi_A)]+A\exp[i(-\omega t+\beta x+bz+\phi_B)]\tag{8-144}$$

由式（8-143）和（8-144）不难求出

$$E=2A\cos(bz+\phi_{12})\exp\left[-i\left(\omega t-\beta x-\frac{\phi_A+\phi_B}{2}\right)\right]\tag{8-145}$$

可以从两方面来分析由上式表示的薄膜中的电磁场。

i）沿着薄膜的 x 方向是一个行波，行波的波矢量 β 就是 A 波或 B 波的波矢量沿薄膜方向的分量。行波的相速度

$$v=\frac{\omega}{\beta}=\frac{c}{\beta/k} \tag{8-146}$$

可见，β/k 就代表薄膜的有效折射率

$$n_{eff}=\beta/k \tag{8-147}$$

从图 8-72 可见，对一定模式（m 一定），当膜厚增加时，有效折射率也增加，亦即行波的相速度减小。这个特性在薄膜器件的制造中有重要的作用。

ii）在垂直于薄膜的 z 轴方向，是一个驻波。这个驻波可以看作是由波矢量为 $\pm b$ 的两列反向传播的平面波叠加形成的。图 8-73 是在厚度为 0.766 微米的 Ta_2O_5 薄膜里形成的四个模式的驻波花样及其相应的“Z”形波。我们看到，驻波的节点数正好等于模式的阶 m。对 $m=0$ 的模式，光线接近掠入射。当阶数 m 增加时，入射角也增加。最后一个模式的入射角接近临界角。与这些模式相应的行波速度也不同。

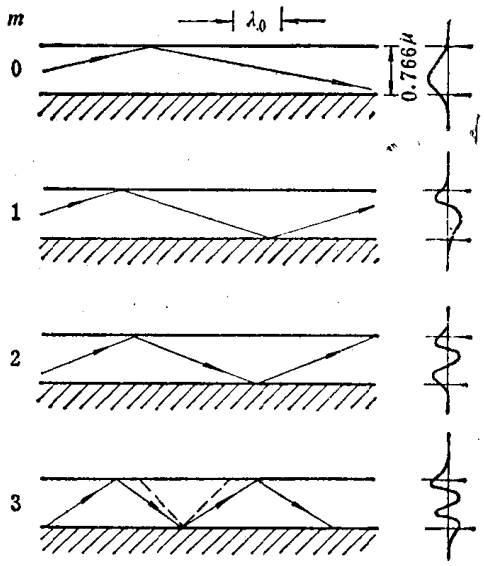


图8-73　在 Ta_2O_5 薄膜波导中的电场分布与“Z”形波

（最下面的图中的虚线表示临界角）

二、光的耦合

上面我们讨论了光波是如何在薄膜里传播的。那么如何将外面的光耦合到薄膜里或者在薄膜里传播的光又如何耦合到外面去呢？在集成光学的发展过程中这是一个相当重要的问题。由于薄膜非常薄（1 微米左右），要把外面的光直接对准薄膜边缘射入薄膜是非常困难的。现在采用的耦合方式有以下几种：

1. 棱镜耦合

如图 8-74 所示，将棱镜放在薄膜上面，在棱镜底面与薄膜上表面之间保持一个很小的空气隙，其厚度约在 $\frac{\lambda}{8}\sim\frac{\lambda}{4}$。当激光入射到棱镜底面上时发全反射，在棱镜内形成驻波。在底面法线方向上电场按正弦函数分布，但有一个按指数衰减的尾巴伸展到棱镜底面之下（参考图 8-73）。这个按指数衰减的尾巴就是在 § 1-8 中讲过的倏逝波。它不在 z 方向传播，但通过它棱镜中的激光束的能量能转移到薄膜中；反之，薄膜中的能量也能转移到棱镜中。

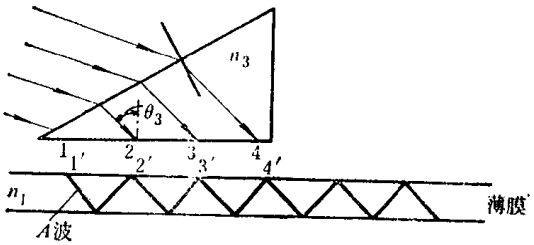


图8-74　棱镜耦合

这个耦合器是怎样工作的呢？图 8-74 例举出射入棱镜的激光束中的四条光线，它们射到棱镜底面上的 1、2、3、4 等四点。当第一支光线到达点 1 时，它就在薄膜中正对着点 1 的位置（1′）激起 A 波，这个 A 波沿着薄膜以式（8-146）所决定的相速度传播。当第二支光线到达点 2 时，也同样在薄膜中正对着点 2 的位置（2′）激起 A 波。由第一支光线激起的 A 波从点 1′ 传到点 2′ 需要一段时间，而第二支光线到达点 2 的时刻也比第一支光线到达点

1 的时刻滞后了一段时间。如果这两段时间恰好相等，那么当 A 波沿薄膜传播时，由于不断地有新的同相的波加入，变得越来越强。设棱镜折射率为 n_3，在底面上的入射角为 θ_3，1-2 之间距离为 d，不难求出光到达点 2 比到达点 1 所滞后的时间是 $dn_3\sin\theta_3/c$；另外根据式(8-146)，A 波从 1′-2′ 的时间是 $dn_1\sin\theta_1/c$。所以同步条件是

$$n_1\sin\theta_1 = n_3\sin\theta_3 \tag{8-148}$$

要使棱镜耦合器有效地工作，必须满足这个同步条件。这正像非线性光学中为了产生很强的谐波，必须让位相得到匹配一样。

对于任一波导模，θ_1 是一定的。总可以调整入射到棱镜上的激光束的方向。使得 θ_3 满足同步条件。这样，棱镜中的光波就被耦合到这一波导模中。

棱镜耦合是非常有效的。对均匀空气隙，能有 81% 的激光束能量被耦合到薄膜中。如果让空气隙的厚度按一定规律变化，理论上可达到 100% 的效率。目前实际达到的耦合效率已超过 90%。

为了使棱镜耦合器有良好的性能，棱镜的直角必须精确地抛光。直角棱即使只有很小的不规则或不锐都会严重影响耦合器的性能。

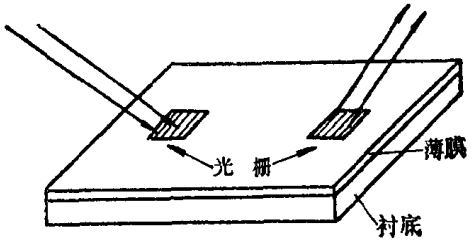


图8-75 光栅耦合器

2. 光栅耦合

图 8-75 表示一个光栅耦合器。在薄膜表面用全息术或其它方法形成一层光栅，当激光束入射到光栅上时会发生衍射。如果某一级衍射波的波矢量沿薄膜方向的分量与薄膜中某个膜式沿薄膜传播的波数（即 β）相等，与棱镜耦合的情形类似，这级衍射光在薄膜中激起的波就满足同步条件，这级衍射光就与这个模式发生耦合，光能被输入薄膜。光栅耦合比较稳定可靠，结构也较紧凑，耦合效率可达 70%（理论上也可以达到 100% 的效率）。

3. 楔形薄膜耦合

这种耦合器的原理是完全不同的。它利用非对称波导(即薄膜上方与下方的折射率不同)的截止特性。上面讲过，对每种模式存在一个截止膜厚，如果膜厚小于这个值，由于该模式在下表面的入射角小于临界角，光束就折射到衬底里。在图 8-76 中，膜厚从 x_a 到 x_b 逐渐减小到零，在 x_c 处恰好等于截止膜厚，x_a 至 x_b 的距离一般为 10～100 个波长。详细的计算表明，在 x_c 附近八个波长的范围内，能量逐渐地从薄膜耦合到衬底中。在衬底中 80% 以上的能量集中在薄膜表面附近 15° 角的范围内。用这种方法很容易把薄膜中的光能完全耦合到外面去。利用相反的过程也可以把能量从衬底耦合到薄膜中，但效率只有 20～40%。

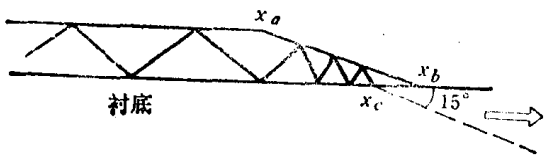


图8-76 楔形薄膜耦合

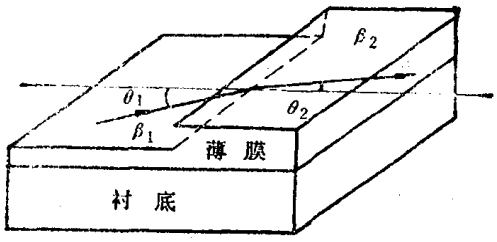


图8-77 薄膜中的折射

三、薄膜器件

1. 薄膜光学元件

薄膜中的模式沿薄膜传播的波数 β 依赖于膜厚，有效折射率 β/k 也依赖于膜厚。因此当光波经过厚度不同的薄膜时就像通常光经过折射率不同的两种介质界面时一样，会发生折射。图 8-77 示意地画出了薄膜中的折射。

在薄膜中的折射也服从折射定律：

$$\frac{\beta_1}{k}\sin\theta_1=\frac{\beta_2}{k}\sin\theta_2 \tag{8-149}$$

式中 β_1/k 与 β_2/k 是厚度不同的两薄膜的有效折射率，θ_1 与 θ_2 是入射角与折射角。从式（8-149）得到

$$\beta_1\sin\theta_1=\beta_2\sin\theta_2 \tag{8-149a}$$

在图 8-77 中，薄膜的厚度是陡然变化的，在折射时还伴随有反射和辐射。为了避免反射和辐射损失，一般采用斜坡过渡。

正像通常的棱镜、透镜是利用光的折射原理制成的一样，利用薄膜中的折射同样可以制成薄膜棱镜和透镜。图 8-78 是薄膜棱镜和透镜的示意图。棱镜是由较厚的三角形区域构成的。把厚膜的边界修改成双凸形，就得到薄膜正透镜。

利用有效折射率随膜厚改变的原理也可以制成薄膜光栅。图 8-79 是用光刻法或全息法

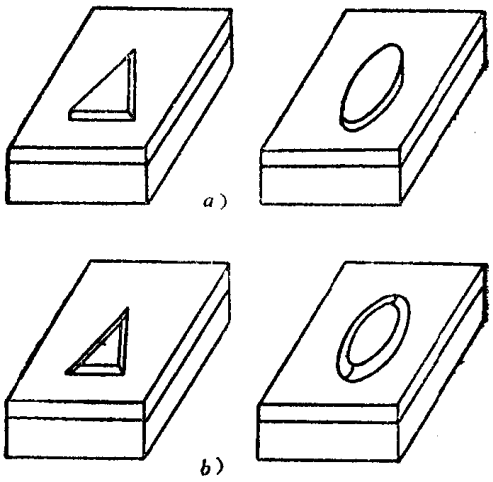


图8-78　薄膜棱镜和透镜
a）台阶式　b）斜坡过渡

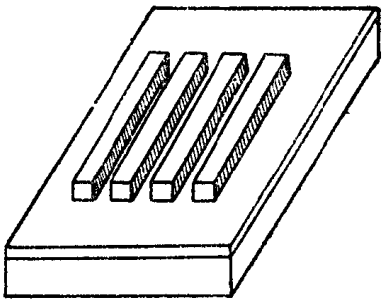


图8-79　薄膜光栅

制成的薄膜光栅的示意图。由于薄膜厚度发生周期性变化，有效折射率也发生周期性变化，因而形成了一个位相光栅。

如果让薄膜光栅的周期等于

$$L=\frac{\pi}{\beta}$$

式中 β 由式（8-134）定义，那么这样的光栅就起着反射镜的作用（习题8 .21）。

2. 薄膜激光器

薄膜激光器的原理与普通激光器是一样的，也由增益介质、谐振腔和外界激励源组成。薄膜激光器中用的增益介质也就是普通激光器中用的那些，例如钕玻璃等，不过要做成薄膜

的形式。谐振腔的反射镜可以用上面讲过的薄膜光栅来代替。至于抽运方法，可以用光抽运，也可以用电学方法抽运。薄膜激光器的结构如图 8-80 所示。目前薄膜激光器存在的主要问题是功率低，寿命短。

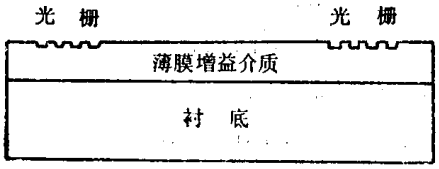


图8-80 薄膜激光器的结构

3. 薄膜调制器

薄膜调制器的作用是使输出光束的振幅、位相或方向随一个调制信号改变，种类很多。图8-81表示一种电光调制器。在钽酸锂衬底上制备一层铌酸锂薄膜，并制作两个梳状电极互相交叉。当在电极上加上电压时，在薄膜里产生周期分布的电场。由于铌酸锂的电光效应，薄膜的折射率也呈周期分布，形成一个位相光栅，使入射光束发生偏析，这样就可以使光束在调制信号的控制下实现扫描。

4. 波导的连接

要把所有的器件都制作在一片薄膜波导上是不大可能的，因此往往要把两片不同的薄膜波导连结起来。图 8-82 表示了一种连结方法。薄膜 I 与薄膜 II 是两片不同的波导，它们的

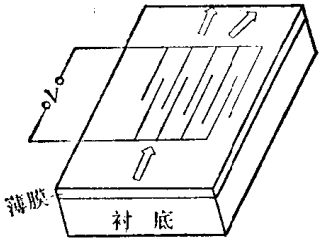


图8-81 薄膜电光调制器

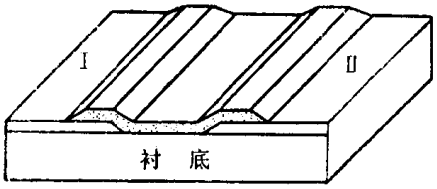


图8-82 薄膜波导的连接

折射率都比衬底高。为把它们连接起来，先把它们的一端如图那样制成楔状，然后再在衬底上沉积第三片薄膜，它的折射率 n_3 比薄膜 I 和 II 都高，并且它的两端做成楔状重叠在薄膜 I 和 II 上。根据楔形薄膜耦合器的原理不难明白，以第三片薄膜为桥梁，薄膜 I 与薄膜 II 的能量能够互相耦合（习题8.22）。

通过上面的介绍我们知道，所有这些薄膜器件的基础都是薄膜波导。把各种器件制作在同一衬底上并且相互连结起来，完成一定的功能，就组成了集成光路。

四、薄膜材料与工艺

在集成光学发展的初期，曾以为任何透明材料都能形成好的波导。结果发现，那些看起来很好的薄膜，损耗竟高达几十分贝/厘米。这主要是由于表面散射造成的。由于薄膜很薄，光沿着薄膜每传播一厘米就得经历约一千多次来回反射。如果表面稍不完善，每次反射时都将散射一些光，损失是很严重的。据估计，为使波导损失小于 1 分贝/厘米，每次反射时的散射损失应在 10^{-4} 以下。我们知道，在激光器中用的谐振腔反射镜，即使质量是最好的，每次反射时的散射损失也有 10^{-3}。可见对薄膜表面光洁度的要求是很高的。下面介绍几种低损耗的薄膜及其制备方法。

1. 有机硅薄膜

用的材料是乙烯基三甲硅烷或六甲基乙硅醚。薄膜是在真空罩里制备的，真空罩里充入上述材料（压力为 0.3 乇）和氩气（压力为 0.1 乇）。玻璃片基放在两电极之间，当发生射频放电时就开始在片基上形成有机硅聚合物。这样生成的薄膜光滑、坚固、没有小孔，对波长从 0.4 微米到 0.7 微米的光是透明的，并且损耗只有 0.04 分贝/厘米。更重要的是，利用在沉积之前改变乙烯基三甲硅烷和六甲基乙硅醚的百分比的方法，或者用在沉积之后进行化学处理的方法能够控制薄膜的折射率。

2. 非结晶态或多晶态的无机膜

目前比较成功的是 Ta_2O_5(半导体）薄膜。它是在氩气气氛中在衬底上先溅射一层金属钽（Ta），然后在 500℃ 下使钽氧化形成薄膜。它的折射率为 2.21(在 6328 埃处)，损耗为 0.4 分贝/厘米。

另一种薄膜是将高折射率的玻璃用射频溅射的方法沉积在折射率较低的玻璃片基上。当膜厚为 0.3 微米时，损耗为 1 分贝/厘米。

此外还可以用离子轰击、离子扩散、外延生长等方法制备薄膜。

上面介绍了集成光学的概况。集成光学从六十年代末出现以来，大致经历了这样几个发展阶段：在 1972 年以前，主要是研究集成光学的基础理论，解决薄膜波导的理论与实践；至 1974 年，集中精力解决薄膜调制器；发展到 1976 年，薄膜激光器的问题成为关键。现在的问题主要是如何把这些器件集成到一块衬底上，在小范围内试验一些简单的应用。

目前，集成光学器件与集成光路都仅仅是一些实验雏型，在功能，集成度和体积上还不能达到要求。但从发展方向看，集成光路将打破传统的光学系统设计与加工的概念，信息的传递将不再由传统的光学透镜、棱镜来完成，而由光学纤维和集成电路来完成，从而在光学与其它领域里引起革命性的变革。

习　题

8.1. 设光在介质中传播时，每通过 1 毫米路程有百分之一被吸收，计算吸收系数，并问光通过 1 米的路程后还剩百分之几？

8.2. 如果光在增益介质中通过 1 米后光强增加到两倍，试求增益系数等于多少毫米$^{-1}$？

8.3. 设 Ne 的 6328 埃谱线的增益曲线在半极大值处有一烧孔（图 8-83），增益曲线半宽度是 1500 兆赫。试问与烧孔对应的原子的速度是多少？

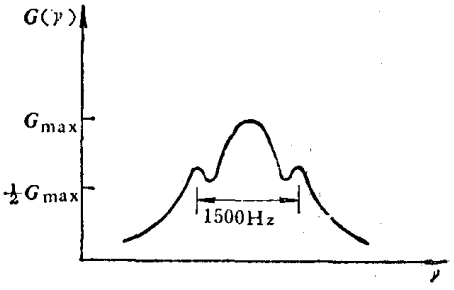


图　8-83

8.4. 试证明当 $0<\alpha_1\alpha_2<1$ 时，谐振腔是稳定的。

式中 $\alpha_1=1-\frac{d}{r_1}$，$\alpha_2=1-\frac{d}{r_2}$，r_1、r_2 是谐振腔两反射镜的曲率半径，d 是两反射镜的间距。

8.5. 一个双凹腔的两反射镜的曲率半径为 $r_1=50$ 厘米、$r_2=100$ 厘米。问腔长 d 在什么范围内是稳定腔？在什么范围内是非稳定腔？

8.6. 试证明公式（8-42）。

8.7. 设谐振腔的两反射镜的曲率半径为 $r_1=r_2=100$ 厘米，间隔 $d=40$ 厘米。问对应于同一纵模的两横模 TEM_{00} 与 TEM_{01} 的频率相差多少？如果这是一台 He-Ne 激光器（$\lambda=6328$ 埃），该频率差与激光频率的比值是多少？

8.8. 一台 He-Ne 激光器在谐振腔反射镜处的光斑尺寸是 0.5 毫米（$\lambda=6328$ 埃），并设谐振腔是共

焦腔，问腔长是多少？同一激光器的 3.39 微米激光在反射镜处的光斑尺寸是多少？

8.9. 为了抑制高阶横模，在一个共焦腔的反射镜处放置小孔光阑。若腔长为 1 米，波长为 6328 埃，为了只让 TEM_{00} 模起振，小孔的大小应如何？（提示：一般选取小孔直径等于镜面上基模光斑尺寸的 3-4 倍）

8.10. 总结一下基模比起其它横模来有哪些优点？

8.11. 设激光测距仪使用调 Q 的红宝石脉冲激光器作光源，脉冲宽度为 5×10^{-8} 秒，并设测量误差近似等于在脉冲宽度的时间内脉冲所经过的距离，试求测量误差是多少？如果脉冲宽度是 5×10^{-9} 秒，测量误差又是多少？

8.12. 半导体二极管激光器的外量子效率 η 的定义是

$$\eta=\frac{N_\nu}{N_e}$$

式中 N_ν 是每秒钟发射的频率为 ν 的光子数，N_e 是每秒钟流入二极管的电子数。二极管激光器的功率效率 $\eta_p=\frac{W}{IV}$，这里 V 是加在 PN 结上的电压，I 是电流，W 是激光器输出功率。

i）证明 $\eta=\frac{e\lambda W}{hcI}$，式中 h 是普朗克常数，c 是光速。

ii）若输出波长 $\lambda=9000$ 埃，$V=2$ 伏，$\eta=15\%$，求 η_p

8.13. 设用一个好的透镜将 Q 开关红宝石激光器发出的 200 兆瓦的光脉冲集中到直径约为 25 微米的面积上，试计算该面积上的电场强度。

8.14. 证明在负单轴晶体中，匹配角 θ_m 满足：

$$\sin^2\theta_m=\frac{n_{o1}^{-2}-n_{o2}^{-2}}{n_{e2}^{-2}-n_{o2}^{-2}}$$

式中 n_{o1} 是基频光的 o 折射率，n_{o2}、n_{e2} 是倍频光的 o 折射率和 e 折射率。

提示：单轴晶体中沿着与光轴成 θ 角方向的 e 光的折射率 $n(\theta)$ 满足下式

$$\frac{1}{n^2(\theta)}=\frac{\sin^2\theta}{n_e^2}+\frac{\cos^2\theta}{n_o^2}$$

8.15. 倍频晶体的有效厚度

$$l_c=\frac{cn_1}{\omega\chi_{eff}E_0(\omega)}$$

式中各物理量的意义已在正文中给出。试计算当入射光（$\lambda=1.06$ 微米）的强度为 60 兆兆瓦/米^{2}时 KDP 晶体的有效厚度。

8.16. 试证明公式（8-131）

8.17. 光纤通信的容量还取决于光纤维适于传送哪一段频带。如果光纤维传送的波段是 1.0 ～1.1 微米，试求其频带宽度，并计算在理论上可同时传送多少个电话？

8.18. 试说明在图 8-69 中如何利用电光晶体与偏振器来分开两个信号（提示：入射光是偏振光）。

8.19. 最初制成的光纤维的损耗是 1 分贝/米，问传播 1 公里后损耗了百分之几？

8.20. 设一根光纤维的芯的折射率 $n_1=1.532$，外套的折射率 $n_2=1.530$。

i）计算临界角；

ii）设一条光线沿轴向传播，另一条光线以临界角入射到外套层上，试求传播 1 公里后两光线的微分滞后。

iii）为什么在大多情形下希望临界角尽量小？

8.21. 如果薄膜光栅的周期 $L=\frac{\pi}{\beta}$，式中 β 由式(8-134)定义，试证明这样的光栅能起反射镜的作用。

8.22. 试根据楔形薄膜耦合器的原理解释图 8-82 中的薄膜 Ⅰ 与薄膜 Ⅱ 是怎样互相耦合的。

附　录

Ⅰ　高斯定理、斯托克斯定理及矢量分析的几个基本公式

一、高斯定理

高斯定理是关于空间区域上的三重积分与其边界上的曲面积分之间关系的一个定理。假设：1. 闭区域V的边界曲面Σ与任一平行于座标轴直线的交点不多于两个（见图Ⅰ-1）；2. 函数$P(x, y, z)$，$Q(x, y, z)$在V内具有一阶连续偏导数，则有

$$\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}x\mathrm{d}z+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (\text{Ⅰ}-1)$$

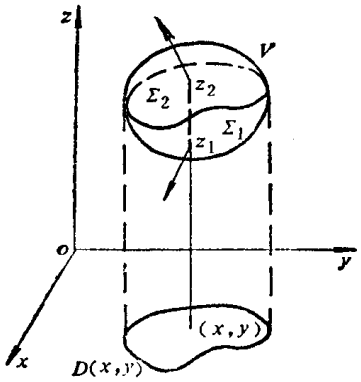


图　Ⅰ-1

(高斯公式)。这里曲面积分取曲面Σ的外侧。

证明：根据三重积分计算法，有

$$\iiint_V\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{D_{xy}}[R(x, y, z_2)$$

$$-R(x, y, z_1)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (\text{Ⅰ}-2)$$

式中D_{xy}是空间区域V在xoy平面上的投影，而$z=z_1(x, y)$是边界曲面的下部分Σ_1的方程，$z=z_2(x, y)$是边界曲面的上部分Σ_2的方程。

再根据曲面积分计算法，并用$-\Sigma_1$表示Σ_1的上侧，则函数$R(x, y, z)$在Σ的外侧的积分为

$$\iint_\Sigma R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_2}R\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{\Sigma_1}R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_2}R\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{-\Sigma_1}R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}R(x, y, z_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_{xy}}R(x, y, z_1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}[R(x, y, z_2)-R(x, y, z_1)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (\text{Ⅰ}-3)$$

由式（Ⅰ-2）和（Ⅰ-3），易见

$$\iiint_V\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_\Sigma R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

同样可证

$$\iiint_V\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\iiint_V\frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_\Sigma Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

因而，有高斯公式

$$\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}xR\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

公式还可写为稍为不同的形式。由于

$$\mathrm{d}\sigma_{yz}=\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\cos(n,\ x)\mathrm{d}\sigma$$
$$\mathrm{d}\sigma_{zx}=\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\cos(n,\ y)\mathrm{d}\sigma$$
$$\mathrm{d}\sigma_{xy}=\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\cos(n,\ z)\mathrm{d}\sigma$$

式中$\mathrm{d}\sigma_{yz}$、$\mathrm{d}\sigma_{zx}$、$\mathrm{d}\sigma_{xy}$为曲面元$\mathrm{d}\sigma$在座标面上的投影。显然，

$$\int_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\Sigma[P\cos(n,\ x)+Q\cos(n,\ y)+R\cos(n,\ z)]\mathrm{d}\sigma$$

所以高斯公式也可写为

$$\int_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_\Sigma[P\cos(n,\ x)+Q\cos(n,\ y)+R\cos(n,\ z)]\mathrm{d}\sigma \tag{I-4}$$

二、斯托克斯定理

斯托克斯定理是关于曲面积分与其边界曲线积分之间关系的定理。记空间曲面Σ的边界曲线为l，l的旋转正方向与面积的正方向合乎右手螺旋关系（见图I-2），并设函数P、Q、R在包围曲面Σ在内的一个空间区域上具有一阶连续偏导数，则有（斯托克斯公式）

$$\iint_\Sigma\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_l P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z \tag{I-5}$$

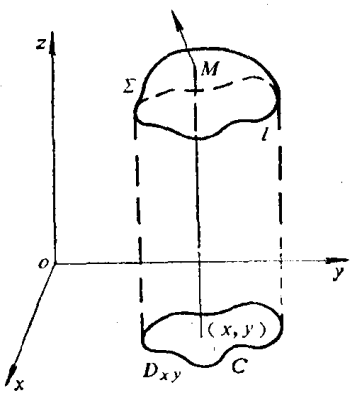


图 I-2

证明：先设Σ与平行于z轴的直线相交于一点（如图I-2 M点），令其方程为$z=f(x,y)$，仍用$\cos(n,\ x)$，$\cos(n,\ y)$，$\cos(n,\ z)$记法线的方向余弦，用$d\sigma_{yz}$、$d\sigma_{zx}$、$d\sigma_{xy}$记曲面元$\mathrm{d}\sigma$在座标面上的投影，由于

$$\frac{\cos(n,\ x)}{f_x}=\frac{\cos(n,\ y)}{f_y}=\frac{\cos(n,\ z)}{-1}$$

（f'_x和f'_y分别为f对x和y的偏导数）及$\mathrm{d}\sigma_{yz}=\cos(n,\ x)\mathrm{d}\sigma$，$\mathrm{d}\sigma_{zx}=\cos(n,\ y)\mathrm{d}\sigma$，$\mathrm{d}\sigma_{xy}=\cos(n,\ z)\mathrm{d}\sigma$故

$$d\sigma_{zx}=\frac{\cos(n,\ y)}{\cos(n,\ z)}d\sigma_{xy}=-f'_y d\sigma_{xy}$$

于是，可把曲面积分写为

$$\iint_\Sigma\frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_\Sigma\frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}\sigma_{zx}-\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}\sigma_{xy}$$
$$=-\int_\Sigma\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}f'_y\right)\mathrm{d}\sigma_{xy}$$

曲面积分化为二重积分时，以 $f(x, y)$ 代替 $P(x, y, z)$ 中的变量 z，且

$$\frac{\partial}{\partial y}P[x, y, f(x, y)]=\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}f'_y$$

则积分化为

$$\iint_{\Sigma}\frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D_{xy}}\frac{\partial}{\partial y}P[x, y, f(x, y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这里 D_{xy} 是曲面 Σ 在 xoy 平面上的投影，其边界曲线 c 就是 l 在 xoy 平面上的投影。根据表示平面区域上的二重积分与其边界积分之间关系的格林（Gauss）公式，上式化为

$$-\iint_{D_{xy}}\frac{\partial}{\partial y}P[x, y, f(x, y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c P[x, y, f(x, y)]\mathrm{d}x$$

又因为函数 $P[x, y, f(x, y)]$ 在曲线 c 上某点 (x, y) 处的值与函数 $P(x, y, z)$ 在曲线 l 上之对应点 $[x, y, z=f(x, y)]$ 处的值相同，并且两曲线上的对应小弧在 x 轴上的投影也相同，则上式右边的曲线积分等于空间曲线积分，即

$$\int_c P[x, y, f(x, y)]\mathrm{d}x=\int_l P(x, y, z)\mathrm{d}x$$

因而证得

$$\iint_{\Sigma}\frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_l P\mathrm{d}x$$

同样可证

$$\iint_{\Sigma}\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_l Q\mathrm{d}y$$

$$\iint_{\Sigma}\frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\int_l R\mathrm{d}z$$

综合得斯托克斯公式

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_l F\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

三、标量场的梯度及矢量场的散度和旋度

对空间任意点 $M(x, y, z)$，如果点函数 $f(M)$ 是一个标量，就说该函数是标量函数，并且它定出一个标量场（例如温度、电位等）。如果点函数 $\boldsymbol{F}(M)$ 是一个矢量，就说该函数是矢量函数，并且它定出一个矢量场（例如速度、电场强度等）。

标量场 $f(x, y, z)$ 在某一点 $M(x, y, z)$ 的梯度是一个矢量，它以 $f(x, y, z)$ 在该点的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$、$\frac{\partial f}{\partial y}$、$\frac{\partial f}{\partial z}$（假定这三个偏导数不同时为零）为其在 x、y、z 座标轴上的投影，记作

$$\mathrm{grad}f(x, y, z)=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{x}_0+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{y}_0+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{z}_0 \tag{1-6}$$

式中 $\boldsymbol{x}_0$、$\boldsymbol{y}_0$、$\boldsymbol{z}_0$ 分别为沿 x、y、z 座标轴的单位矢。

引入记号矢量——微分算符▽（也称为哈密顿算符），定义为

$$\nabla = \boldsymbol{x}_0\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{y}_0\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{z}_0\frac{\partial}{\partial z} \tag{I-7}$$

设矢量函数 $\boldsymbol{F}(M)$ 在座标轴上的投影为 P、Q、R，它的散度是一个标量函数，定义为微分算符 ∇ 与矢量 $\boldsymbol{F}$ 的数量积，即

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\boldsymbol{F} = \nabla\cdot\boldsymbol{F} &= \left(\boldsymbol{x}_0\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{y}_0\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{z}_0\frac{\partial}{\partial z}\right)(P\boldsymbol{x}_0 + Q\boldsymbol{y}_0 + R\boldsymbol{z}_0)\\ &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\end{aligned} \tag{I-8}$$

设矢量函数 $\boldsymbol{F}(M)$ 在座标轴上的投影为 P、Q、R，它的旋度是一个矢量函数，定义为微分算符 ∇ 与矢量 $\boldsymbol{F}$ 的矢量积，即

$$\begin{aligned}\mathrm{Rot}\boldsymbol{F} = \nabla\times\boldsymbol{F} &= \left(\boldsymbol{x}_0\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{y}_0\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{z}_0\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(P\boldsymbol{x}_0 + Q\boldsymbol{y}_0 + R\boldsymbol{z}_0)\\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{x}_0 + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{y}_0 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{z}_0\end{aligned} \tag{I-9}$$

标量函数 $f(M)$ 的梯度应用微分算符表示

$$\mathrm{grad}f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{x}_0 + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{y}_0 + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{z}_0 \tag{I-10}$$

可见得到一个矢量——梯度矢量，它构成一矢量场。原来函数 f（或 $-f$）叫做这矢量场的势，该矢量场叫做势场。例如静电场就是一势场，静电场中各点的电场强度等于该点电位梯度矢量的负值。但是，任意一个矢量场不一定是势场，因为它不一定是某一标量函数的梯度。

四、高斯公式和斯托克斯公式的矢量形式

现在把高斯公式和斯托克斯公式表为矢量记法。矢量记法的好处在于形式简单，适于应用，并且与所取座标轴无关。

高斯公式（I-4）的左边可以写为

$$\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_V \mathrm{div}\boldsymbol{F}\mathrm{d}V$$

而右边可以写为

$$\begin{aligned}&\iint_\Sigma[P\cos(n,\ x) + Q\cos(n,\ y) + R\cos(n,\ z)]\mathrm{d}\sigma\\ &= \iint_\Sigma \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{d}\sigma = \iint_\Sigma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{n}$ 为单位朝外法线矢，$\mathrm{d}\sigma$ 为面积元，方向取 $\boldsymbol{n}$ 方向。由上面两式，得到高斯公式的矢量形式为

$$\iiint_V \mathrm{div}\boldsymbol{F}\mathrm{d}V = \iint_\Sigma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \tag{I-11}$$

即是，矢量场散度的三重积分等于矢量场在积分区域的边界曲面上的法线投影对面积的曲面积分。式（I-11）右边的曲面积分也叫做矢量场 $\boldsymbol{F}$ 通过曲面 Σ 的通量。如果 $\mathrm{div}\boldsymbol{F} = 0$，则从闭合面 Σ 上流过的总通量为零，即流出区域外与流入区域内的通量相等，所以散度为零的矢量场叫做无源场（如磁场）。

对于斯托克斯公式（I-5），其左边可写成

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$
$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}\mathrm{Rot}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$$

而右边可写成

$$\int_l F\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_l[P\cos(t,x)+Q\cos(t,y)$$
$$+R\cos(t,z)]\mathrm{d}l=\int_l \mathbf{F}\cdot\boldsymbol{t}^{\circ}\mathrm{d}l=\int_l \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

式中 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mathrm{d}l\cdot\boldsymbol{t}^{\circ}=\mathrm{d}l[\cos(t,x)\boldsymbol{x}_0+\cos(t,y)\boldsymbol{y}_0+\cos(t,z)\boldsymbol{z}_0]$，$\boldsymbol{t}^{\circ}$是曲线 l 的切线单位矢。因此，得到斯托克斯公式的矢量形式

$$\iint_{\Sigma}\mathrm{Rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\int_l \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{I-12}$$

右边的曲线积分叫做矢量场 $\boldsymbol{F}$ 在曲线 l 上的环流量。如果 $\mathrm{Rot}\boldsymbol{F}=0$，则在任意闭曲线上的环流量为零，因此矢量场不形成涡旋结构，这时矢量场叫做无旋场（如静电场）。

五、矢量分析基本公式

1. 梯度场的旋度等于零，$\mathrm{Rot}(\mathrm{grad}f)=0$ (I-13)

证：
$$\mathrm{Rot}(\mathrm{grad}f)=\nabla\times\nabla f=\left(\boldsymbol{x}_0\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{y}_0\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{z}_0\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{x}_0\right.$$
$$\left.+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{y}_0+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{z}_0\right)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\right)\boldsymbol{x}_0$$
$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\right)\boldsymbol{y}_0+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)\boldsymbol{z}_0=0$$

可见梯度场（势场）是无旋的。

2. 旋度场的散度等于零，$\mathrm{div}(\mathrm{Rot}\cdot\boldsymbol{F})=0$ (I-14)

证：
$$\nabla(\nabla\times\boldsymbol{F})=\nabla\left[\left(\boldsymbol{x}_0\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{y}_0\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{z}_0\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(P\boldsymbol{x}_0+Q\boldsymbol{y}_0+R\boldsymbol{z}_0)\right]$$
$$=\left(\frac{\partial^2 R}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial x}\right)+\left(\frac{\partial^2 P}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y}\right)$$
$$+\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z}\right)=0$$

可见有旋场是无源的，场有涡旋结构。

3. 梯度场的散度等于拉普拉斯式 $\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}f)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$，即

$$\nabla\cdot(\nabla f)=\nabla^2 f \tag{I-15}$$

4. $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{F})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F})-\nabla^2\boldsymbol{F}$ (I-16)

可这样看，先把∇看作矢量，于是由矢量代数公式

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{F})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F})-\boldsymbol{F}(\nabla\cdot\nabla)$$

再考虑到∇为微分算符，$\boldsymbol{F}$ 应在它后面，因而后项改写为

$$-(\nabla\cdot\nabla)\boldsymbol{F}=-\nabla^2\boldsymbol{F}$$

故得

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{F})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F})-\nabla^2\boldsymbol{F}$$

只要注意▽的双重性质——具有矢量和微分运算，就可以简便的推得下列关系

$$\nabla\cdot(f\cdot\boldsymbol{F})=(\nabla f)\cdot\boldsymbol{F}+f\nabla\cdot\boldsymbol{F}$$

$$\nabla\times(f\cdot\boldsymbol{F})=(\nabla f)\times\boldsymbol{F}+f\nabla\times\boldsymbol{F}$$

$$\nabla(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{S})=\boldsymbol{F}\times(\nabla\times\boldsymbol{S})+(\boldsymbol{F}\cdot\nabla)\boldsymbol{S}+\boldsymbol{S}\times(\nabla\times\boldsymbol{F})+(\boldsymbol{S}\cdot\nabla)\boldsymbol{F}$$

$$\nabla(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{S})=(\nabla\times\boldsymbol{F})\boldsymbol{S}-\boldsymbol{F}(\nabla\times\boldsymbol{S})$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{S})=(\boldsymbol{S}\cdot\nabla)\boldsymbol{F}-(\nabla\cdot\boldsymbol{F})\boldsymbol{S}-(\boldsymbol{F}\cdot\nabla)\boldsymbol{S}+(\nabla\cdot\boldsymbol{S})\cdot\boldsymbol{F}$$

Ⅱ. 傅里叶级数和傅里叶积分

一、傅里叶级数

由余弦函数构成的无穷级数

$$a_0+a_1\cos(kx+\alpha_1)+a_2\cos(2kx+\alpha_2)+\cdots+a_n\cos(nkx+\alpha_n)+\cdots \tag{Ⅱ-1}$$

称为三角级数。利用三角公式

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

可将式（Ⅱ-1）改写为

$$\begin{aligned}&\frac{A_0}{2}+A_1\cos kx+B_1\sin kx+A_2\cos 2kx+B_2\sin 2kx+\cdots\\&\quad+A_n\cos nkx+B_n\sin nkx+\cdots\\&=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nkx+B_n\sin nkx)\end{aligned} \tag{Ⅱ-2}$$

其中$\frac{A_0}{2}=a_0$，$A_n=a_n\cos\alpha_n$，$B_n=-a_n\sin\alpha_n$

设$f(x)$是一个周期为$\lambda(=2\pi/k)$的函数，且满足狄里赫利条件（$f(x)$在一周期内只有有限个极值点和第一类不连续点），则$f(x)$可以展开为式（Ⅱ-2）表示的级数，即

$$f(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nkx+B_n\sin nkx) \tag{Ⅱ-3}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}A_0&=\frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda}f(x)\mathrm{d}x\\A_n&=\frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda}f(x)\cos nkx\mathrm{d}x\\B_n&=\frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda}f(x)\sin nkx\mathrm{d}x\end{aligned}\right\} \tag{Ⅱ-4}$$

称为傅里叶系数，而级数（Ⅱ-3）称为傅里叶级数。

证：定理的证明可以先假设式（Ⅱ-3）成立，然后求出系数A_0、A_n和B_n，看是否与式(Ⅱ-4)表示的系数一致。因为三角函数系$\{1,\cos kx,\sin kx,\cos 2kx,\sin 2kx,\cdots\cos nkx,\ \sin nkx\cdots\}$

具有正交性，即任二项之积在（0，λ）上积分值为零

$$\int_0^\lambda 1\cdot\cos nkx\mathrm{d}x=\int_0^\lambda 1\cdot\sin nkx\mathrm{d}x=\int_0^\lambda \sin nkx\sin mkx\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^\lambda \cos nkx\cos mkx\mathrm{d}x=\int_0^\lambda \sin nkx\cos mkx\mathrm{d}x=0 \qquad (m\neq n)$$

而每一项的自乘积在〔0，λ〕上积分值不为零

$$\int_0^\lambda 1^2\mathrm{d}x=\lambda,\quad \int_0^\lambda \cos^2 nkx\mathrm{d}x=\int_0^\lambda \sin^2 nkx\mathrm{d}x=\frac{\lambda}{2}$$

将式（Ⅱ-3）二边同时在〔0，λ〕上积分有

$$\int_0^\lambda f(x)\mathrm{d}x=\int_0^\lambda\left[\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nkx+B_n\sin nkx)\right]\mathrm{d}x=\frac{A_0}{2}\cdot\lambda$$

即

$$A_0=\frac{2}{\lambda}\int_0^\lambda f(x)\mathrm{d}x$$

将式（Ⅱ-3）二边同乘 $\cos nkx$ 在〔0，λ〕上积分，有

$$\int_0^\lambda f(x)\cos nkx\mathrm{d}x=A_n\int_0^\lambda \cos^2 nkx\mathrm{d}x=A_n\cdot\frac{\lambda}{2}$$

即

$$A_n=\frac{2}{\lambda}\int_0^\lambda f(x)\cos nkx\mathrm{d}x$$

将式（Ⅱ-3）二边同乘 $\sin nkx$ 在〔0，λ〕上积分，有

$$\int_0^\lambda f(x)\sin nkx\mathrm{d}x=B_n\int_0^\lambda \sin^2 nkx\mathrm{d}x=B_n\cdot\frac{\lambda}{2}$$

即

$$B_n=\frac{2}{\lambda}\int_0^\lambda f(x)\sin nkx\mathrm{d}x$$

式（Ⅱ-4）的积分限是从0到λ，范围是一个周期，这个积分限改为 $-\frac{\lambda}{2}$ 到 $\frac{\lambda}{2}$，也同样是可以的，这是由于周期都是λ。

傅里叶级数（Ⅱ-3）可写为如下的指数形式

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{ink x} \qquad (Ⅱ-5)$$

其中

$$C_n=\frac{1}{\lambda}\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x \quad n=0,\ \pm1,\ \pm2\cdots \qquad (Ⅱ-6)$$

证：据式（Ⅱ-3）

$$f(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nkx+B_n\sin nkx)$$

$$=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\frac{e^{inkx}+e^{-inkx}}{2}-iB_n\frac{e^{inkx}-e^{inkx}}{2}\right)$$

$$=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n-iB_n}{2}\cdot e^{inkx}+\frac{A_n+iB_n}{2}\cdot e^{-inkx}\right)$$

$$=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}(C_ne^{inkx}+C_{-n}e^{-inkx})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_ne^{inkx}$$

其中

$$C_0=\frac{A_0}{2}=\frac{1}{\lambda}\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}}f(x)\mathrm{d}x$$

$$C_n=\frac{A_n-iB_n}{2}=\frac{1}{\lambda}\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}}f(x)\left(\frac{\cos nkx-i\sin nkx}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\lambda}\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}}f(x)e^{-inkx}\mathrm{d}x\quad n=1、2、\cdots$$

$$C_{-n}=\frac{A_n+iB_n}{2}=\frac{1}{\lambda}\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}}f(x)e^{inkx}\mathrm{d}x\quad n=1、2\cdots$$

将上面三式统一为一式有

$$C_n=\frac{1}{\lambda}\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}}f(x)e^{-inkx}\mathrm{d}x\quad n=0,\ \pm1,\ \pm2\cdots$$

二、傅里叶积分

据式（Ⅱ-5）和（Ⅱ-6），以λ为周期的函数$f(x)$的傅里叶级数指数形式为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda}\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}}f(\tau)e^{-ink\tau}\mathrm{d}\tau\right)e^{inkx}\qquad\left(\lambda=\frac{2\pi}{k}\right)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{k}{2\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{k}}^{\frac{\pi}{k}}f(\tau)e^{-ink\tau}\mathrm{d}\tau\right)e^{inkx}\qquad(\text{Ⅱ}-7)$$

令 $k_n=nk$，$\Delta k=k_n-k_{n-1}=k$，$F(k_n)=\int_{-\frac{\pi}{k}}^{\frac{\pi}{k}}f(\tau)e^{-ink\tau}\mathrm{d}\tau$ 则式（Ⅱ-7）可写为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}F(k_n)e^{inkx}\Delta k\qquad(\text{Ⅱ}-8)$$

当 $\lambda\to\infty$ 时，$\Delta k\to 0$，$\frac{\pi}{k}\to\infty$，此时上式

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(k_n)e^{ik_nx}\Delta k\to\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(k)e^{ikx}dk \tag{Ⅱ-9}$$

其中
$$F(k)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-ik\tau}d\tau$$

即当 $\lambda\to\infty$ 时，傅里叶级数（Ⅱ-3）变为式（Ⅱ-9）的积分。

定理：若非周期函数 $f(x)$ 在 $[-\infty,+\infty]$ 上满足狄里赫利条件，且 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ 存在，则有

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(k)e^{ikx}dk \tag{Ⅱ-10}$$

其中
$$F(k)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ikx}dx \tag{Ⅱ-11}$$

此定理证明从略。积分式 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(k)e^{ikx}dx$ 称为 $f(x)$ 的傅里叶积分。

由此定理知，每一个满足狄里赫利条件的非周期函数 $f(x)$ 可表示为连续频率的正弦谐波的积分，而 $F(k)$ 则为 $f(x)$ 的频谱。我们又可从另一角度来考察式（Ⅱ-10）和（Ⅱ-11）；每给出一个空域中函数 $f(x)$，可由（Ⅱ-11）找到一个频域中的函数 $F(k)$ 与之对应，同样每给出一个频域函数 $F(k)$ 又可由式（Ⅱ-10）找到一个空域中函数 $f(x)$ 与之对应。两个域间的函数的这种对应关系称为该两域间的函数变换。由傅里叶积分公式给出的函数变换称为傅里叶变换，即

$$F(k)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ikx}dx$$

为 $f(x)$ 的傅里叶变换。而称

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(k)e^{ikx}dk$$

为 $F(k)$ 的傅里叶反变换。

把空间角频率 k 写为 $k=2\pi u$，u 为空间频率，傅里叶变换又可写为

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F(u)e^{i2\pi ux}du \tag{Ⅱ-12}$$

$$F(u)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i2\pi ux}dx \tag{Ⅱ-13}$$

Ⅲ．二维的傅里叶变换

二维的傅里叶变换是一维的傅里叶变换（Ⅱ-12）和（Ⅱ-13）的推广，式子有

$$f(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty}F(u,v)e^{i2\pi(ux+vy)}dudv$$

$$F(u,v)=\iint_{-\infty}^{\infty}f(x,y)e^{-i2\pi(ux+vy)}dxdy$$

u、v是二维空间函数$f(x,y)$的空间频率分量，$F(u,v)$是频谱函数。同样，称$F(u,v)$是$f(x,y)$的傅里叶变换，$f(x,y)$是$F(u,v)$的傅里叶逆变换。

为书写简便起见，可用更简单的记号表示傅里叶变换和逆变换。$f(x,y)$的傅里叶变换记为

$$F\{f(x,y)\}=F(u,v)$$

而$F(u,v)$的傅里叶逆变换记为

$$F^{-1}\{F(u,v)\}=f(x,y)$$

下面介绍傅里叶变换的几个基本性质。对于它们的证明可参考有关数学书籍。

（一）线性定理　设a_1和a_2是两个任意常数，如果有$F\{f_1(x,y)\}=F_1(u,v)$和$F\{f_2(x,y)\}=F_2(u,v)$，则

$$F\{a_1f_1(x,y)+a_2f_2(x,y)\}=a_1F_1(u,v)+a_2F_2(u,v)$$

即两个函数的线性组合的变换，等于它们各自变换的线性组合。

（二）相似性定理（缩放定理）　如果$F\{f(x,y)\}=F(u,v)$则有

$$F\{f(ax,by)\}=\frac{1}{ab}F\left(\frac{u}{a},\ \frac{v}{b}\right)$$

式中a和b是任意常数。这个定理说明空间域中座标(x,y)的压缩，将导致频率域中座标(u,v)的伸展，并且频谱的幅度发生总体的变化。

（三）相移定理　若$F\{f(x,y)\}=F(u,v)$则

$$F\{f(x-a,y-b)\}=F(u,v)e^{-i2\pi(ua+vb)}$$

式中a、b是任意实常数。这个定理说明函数在空域中的平移，带来频域中的一个线性相移。

（四）帕色伐（Parseval）定理　若$F\{f(x,y)\}=F(u,v)$则

$$\iint_{-\infty}^{\infty}|f(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{-\infty}^{\infty}|F(u,v)|^2\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

这个定理是能量守恒的表述。

（五）卷积定理　卷积积分的定义是

$$f_1(x,y)*f_2(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty}f_1(\alpha,\beta)f_2(x-\alpha,y-\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$$

$*$号表示卷积积分。如果有$F\{f_1(x,y)\}=F_1(u,v)$和$F\{f_2(x,y)\}=F_2(u,v)$，则卷积定理是

$$F\{f_1(x,y)*f_2(x,y)\}=F_1(u,v)F_2(u,v)$$

表明空域中两个函数的卷积的变换完全等效于一个更简单的运算：各自变换式的乘积。

（六）自相关定理　自相关函数的定义是

$$f(x,y)\star f(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty}f(\alpha,\beta)f^*(\alpha-x,\beta-y)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$$

$\star$号表示自相关运算。如果$F\{f(x,y)\}=F(u,v)$则

$$F\{f(x,y)\star f(x,y)\}=|F(u,v)|^2$$

和
$$F\{|f(\alpha,\beta)|^2\}=\iint_{-\infty}^{\infty}F(\alpha,\beta)F^*(\alpha+u,\beta+v)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$$

这个定理可看成是卷积定理的特例。

（七）傅里叶积分定理　在函数$f(x,y)$的各个连续点上

$$FF^{-1}\{f(x,y)\}=F^{-1}F\{f(x,y)\}=f(x,y)$$

在$f(x,y)$的各个间断点上，这两次相继变换给出该点的一个小邻域内f的平均值。亦即，除在间断点外，对函数相继进行变换和逆变换又重新得出该函数。

下面再介绍几个常用函数和它们的傅里叶变换式。

在光学中常用的几个数学函数的定义如下：

1. 矩形函数

$$rect(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant\frac{1}{2}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

2. sinc　函数

$$\mathrm{sinc}(x)=\frac{\sin\pi x}{\pi x}$$

3. 刀口函数（符号函数）

$$\mathrm{edge}(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

4. 三角状函数

$$\Lambda(x)=\begin{cases}1-|x| & |x|\leqslant 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

5. 梳状函数

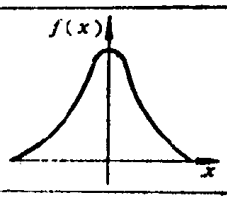
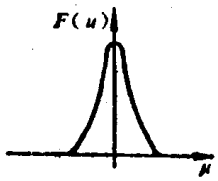
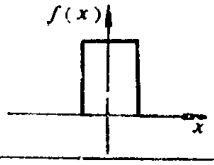
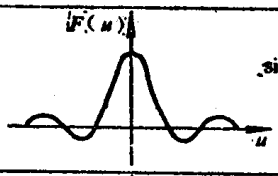
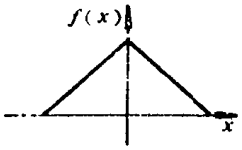
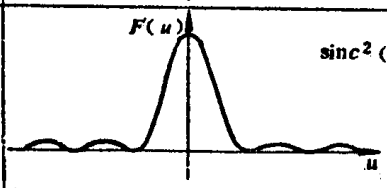
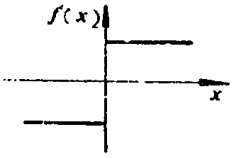
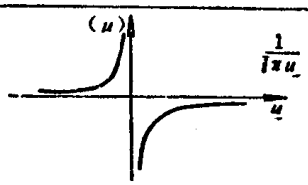
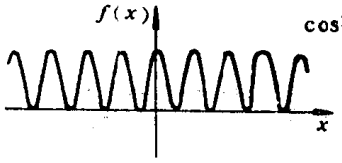
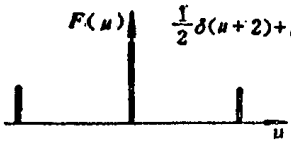
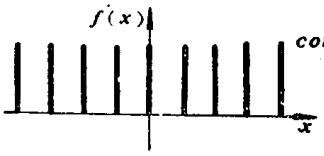
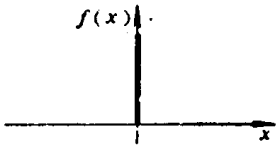
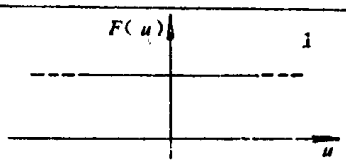
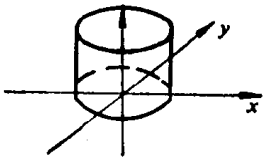
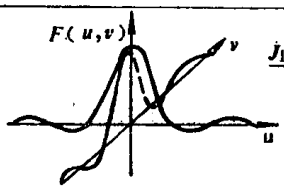
$$\mathrm{comb}(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n)$$

6. 圆域函数

$$\mathrm{circ}(\sqrt{x^2+y^2})=\begin{cases}1 & \sqrt{x^2+y^2}\leqslant 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

上述函数及其他几个函数的傅里叶变换式见表Ⅲ-1。

表Ⅱ-1 一些常用函数和它们的傅里叶变换式及其图形

函数	傅里叶变换式
 $e^{-\pi x^2}$	 $e^{-\pi u^2}$
 $rect(x)$	 $sinc(u)$
 $\Lambda(x)$	 $sinc^2(u)$
 $edge(x)$	 $\frac{1}{i\pi u}$
 $\cos^2 x$	 $\frac{1}{2}\delta(u+2)+\delta(u)+\frac{1}{2}\delta(u-2)$
 $comb(x)$	$comb(u)$
 $\delta(x)$	 1
 $circ(r)$	 $\frac{J_1(2\pi\rho)}{\rho}$

Ⅳ．亥姆霍兹-基尔霍夫积分定理，基尔霍夫衍射公式

一、亥姆霍兹-基尔霍夫积分定理

在真空中，光波场中任一点P的复振幅$\widetilde{E}(P)$满足方程

$$(\nabla^2+k^2)\widetilde{E}(P)=0 \tag{Ⅳ-1}$$

这是一个与时间无关的波动方程，称为亥姆霍兹（Helmholtz）方程。下面就利用它来讨论衍射问题。

我们需要解决的问题是：给定入射波（例如图Ⅳ-1所示的一个点光源发出的波入射到一带有小孔的平面屏上）与衍射孔的形状大小，如何求出在屏后空间某一点P的复振幅。把这个问题提得更普遍些就是光场中任一点P的复振幅，能否用场中其他各点的复振幅，例如图Ⅳ-2所示的一个包围P点的封闭面σ上各点的复振幅表示出来。这是一个根据边界值求解波动方程的问题，可以利用格林定理求解。

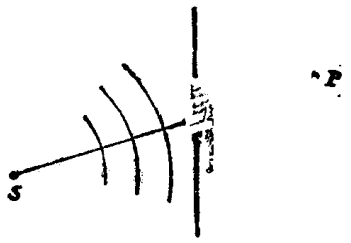


图 Ⅳ-1

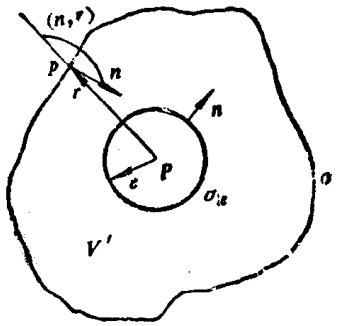


图 Ⅳ-2

格林定理陈述如下：两个空间位置函数$\widetilde{E}(p)$和$\widetilde{G}(p)$，如果它们的一阶和二阶偏导数在一个封闭面σ内部与σ上各点都是单值连续的，则有

$$\iiint_V(\widetilde{E}\nabla^2\widetilde{G}-\widetilde{G}\nabla^2\widetilde{E})\,\mathrm{d}V=-\iint_\sigma\left(\widetilde{E}\frac{\partial\widetilde{G}}{\partial n}-\widetilde{G}\frac{\partial\widetilde{E}}{\partial n}\right)\mathrm{d}\sigma \tag{Ⅳ-2}$$

式中$\frac{\partial}{\partial n}$表示在$\sigma$面上各点沿向内法线的微商。这个定理给出了把函数$(\widetilde{E}\nabla^2\widetilde{G}-\widetilde{G}\nabla^2\widetilde{E})$的体积积分转变为面积分的关系。如果我们把光波在各点的复振幅作为函数$\widetilde{E}(P)$，并适当选择一个辅助函数$\widetilde{G}(p)$（格林函数），就可以用格林定理解决上面提出的边界值问题。

由式（Ⅳ-2）可以看到，等式右方已经是由一个封闭面上函数$\widetilde{E}$、$\widetilde{G}$决定的面积分。如果选择适当的$\widetilde{G}$函数，并选择适当的积分域，使式（Ⅳ-2）变成只包含P点的$\widetilde{E}$值和一个由封闭面σ上$\widetilde{E}$、$\widetilde{G}$决定的量，就解决了我们的问题。现在按照基尔霍夫的做法，选择G函数为一个以P为原点的球面波的复振幅函数

$$\widetilde{G}(p)=\frac{e^{ikr}}{r} \tag{Ⅳ-3}$$

式中r表示空间任意点p到定点P的距离。

这样选择的函数$\widetilde{G}$在$r=0$处，即在P处有奇点。因此，要正确应用格林定理，必须使P点不包含在体积V内。这只要用一个以P为中心的小球面σ_ε把P点再包围起来，而考虑球面σ_ε和封闭面σ之间所包围的体积V'就可以了（图Ⅳ-2）这样格林定理可以写成

$$\iiint_{V'}(\widetilde{E}\nabla^2\widetilde{G}-\widetilde{G}\nabla^2\widetilde{E})\,\mathrm{d}V=-\iint_{\sigma'}\left(\widetilde{E}\frac{\partial\widetilde{G}}{\partial n}-\widetilde{G}\frac{\partial\widetilde{E}}{\partial n}\right)\mathrm{d}\sigma \tag{Ⅳ-4}$$

上式右方积分域是在曲面$\sigma'=\sigma+\sigma_\varepsilon$上，$\sigma$与$\sigma_\varepsilon$这两个面的法线正向都是指向体积$V'$之内。令球面$\sigma_\varepsilon$的半径为$\varepsilon$，则无论$\varepsilon$多么小，式（Ⅳ-4）都成立。

现在来看函数G。我们知道，这样的球面波是波动方程的一种最简单的解。因此，函数G也一定满足亥姆霍兹方程，即

$$(\nabla^2+k^2)\widetilde{G}(p)=0 \tag{Ⅳ-5}$$

由式（Ⅳ-1），也有$(\nabla^2+k^2)\widetilde{E}(P)=0$。代入式（Ⅳ-4）可得

$$\iiint_{V'}(\widetilde{E}\nabla^2\widetilde{G}-\widetilde{G}\nabla^2\widetilde{E})\,\mathrm{d}V=-\iiint_{V'}(k^2\widetilde{E}\widetilde{G}-k^2\widetilde{E}\widetilde{G})\mathrm{d}V=0$$

因而式（Ⅳ-4）的右方变为

$$\iint_{\sigma'}\left(\widetilde{E}\frac{\partial\widetilde{G}}{\partial n}-\widetilde{G}\frac{\partial\widetilde{E}}{\partial n}\right)\mathrm{d}\sigma=0$$

即

$$\iint_{\sigma}\left(\widetilde{E}\frac{\partial\widetilde{G}}{\partial n}-\widetilde{G}\frac{\partial\widetilde{E}}{\partial n}\right)\mathrm{d}\sigma+\iint_{\sigma_\varepsilon}\left(\widetilde{E}\frac{\partial\widetilde{G}}{\partial n}-\widetilde{G}\frac{\partial\widetilde{E}}{\partial n}\right)\mathrm{d}\sigma=0 \tag{Ⅳ-6}$$

此外，G函数的法线微商有

$$\frac{\partial\widetilde{G}}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial n}=\left(ik-\frac{1}{r}\right)\frac{e^{ikr}}{r}\cdot\frac{\partial r}{\partial n}$$

$\frac{\partial r}{\partial n}$表示在曲面$\sigma$或$\sigma_\varepsilon$上任一点$p$的$r$值沿法线正方向的变化率，有

$$\frac{\partial r}{\partial n}=\lim_{\Delta n\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta n}=\cos(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{r})$$

式中$(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{r})$表示法线$\boldsymbol{n}$的正向与由$P$点引向$p$的矢径$\boldsymbol{r}$之间的夹角。因此

$$\frac{\partial\widetilde{G}}{\partial n}=\left(ik-\frac{1}{r}\right)\frac{e^{ikr}}{r}\cos(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{r}) \tag{Ⅳ-7}$$

在σ_ε面上，$r=\varepsilon$，并由于$\boldsymbol{n}$与$\boldsymbol{r}$同向，夹角为零，$\mathrm{con}(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{r})=1$，故在$\sigma_\varepsilon$面上各点

$$\widetilde{G}=\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon},\quad \frac{\partial\widetilde{G}}{\partial n}=\left(ik-\frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon}$$

且都是常量。现令$\varepsilon\to 0$，由于函数$\widetilde{E}$和它的偏导数在P点应是连续的，所以σ_ε面上的积分可以写成

$$\iint_{\sigma_\varepsilon}\left(\widetilde{E}\frac{\partial\widetilde{G}}{\partial n}-\widetilde{G}\frac{\partial\widetilde{E}}{\partial n}\right)\mathrm{d}\sigma=4\pi\varepsilon^2\left[\overline{E}\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon}\left(ik-\frac{1}{\varepsilon}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon}\frac{\partial\overline{E}}{\partial n}\right]=-4\pi\overline{E}$$

式中$\frac{\partial \overline{E}}{\partial n}$与$\overline{E}$代表$\sigma_\varepsilon$面上的平均值，当$\varepsilon \to 0$时，$\overline{E}$趋于$\widetilde{E}$（$P$）。于是从式(Ⅳ-6)即得

$$\widetilde{E}(P)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\sigma}\left[\widetilde{E}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)-\frac{e^{ikr}}{r}\frac{\partial \widetilde{E}}{\partial n}\right]d\sigma \qquad (Ⅳ-8)$$

这样，P点的复振幅$\widetilde{E}(P)$可以由包围P点的封闭面σ上各点的$\widetilde{E}$与$\frac{\partial \widetilde{E}}{\partial n}$的值通过积分式（Ⅳ-8）求出。式（Ⅳ-8）称为基尔霍夫积分定理。

二、基尔霍夫衍射公式

把上面的积分定理应用于图Ⅳ-3，即考虑从点光源S发出的单色波，它传播通过不透明平面屏上的一个开孔，求任一点P的复振幅。假定开孔的线度比波长大，但比S和P到屏的距离都小得多。

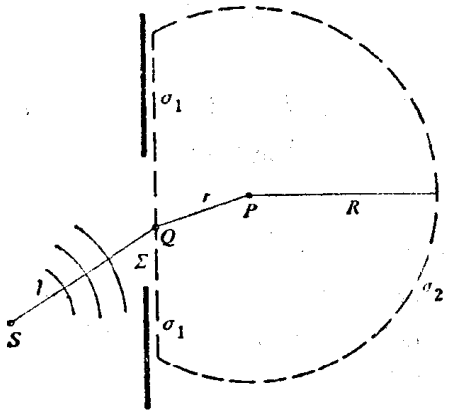


图 Ⅳ-3

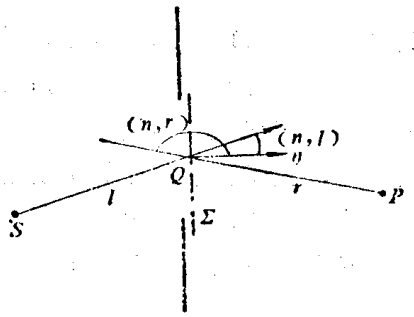


图 Ⅳ-4

为求得P点的振动，围绕P点作一个闭合面σ，对它取基尔霍夫积分。闭合面σ由三部分组成：1）开孔Σ；2）不透明屏的部分背照面σ_1；3）以P为中心，R为半径的大球的部分球面σ_2。因此有

$$\widetilde{E}(P)=\frac{1}{4\pi}\left[\iint_{\sigma_1}+\iint_{\sigma_2}+\iint_{\Sigma}\right]\left\{\widetilde{E}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)-\frac{e^{ikr}}{r}\frac{\partial \widetilde{E}}{\partial n}\right\}d\sigma \qquad (Ⅳ-9)$$

上式中的σ_1、σ_2、Σ上的$\widetilde{E}$、$\frac{\partial \widetilde{E}}{\partial n}$值无法准确知道，不过可以假定，在$\Sigma$上，除紧靠孔边以外，各点的$\widetilde{E}$和$\partial\widetilde{E}/\partial n$同没有屏时相差无几。而在$\sigma_1$上，这些量近似为零。因此，基尔霍夫假设（基尔霍夫边界条件）：

在Σ面上各点，$\widetilde{E}$、$\frac{\partial \widetilde{E}}{\partial n}$与屏不存在时相同，即只由入射波在这里的光场决定；

在σ_1面上各点，$\widetilde{E}$和$\frac{\partial \widetilde{E}}{\partial n}$都为零。

剩下要考虑球面部分σ_2的贡献。当R增大时，$\widetilde{E}$、$\widetilde{G}$将按$\frac{1}{R}$减小。可以证明，随着R增

大，在 σ_2 面上的被积函数比 $1/R^2$ 更快地趋于零⊖。因此，虽然当 R 增大时，σ_2 的面积按 R^2 增大，σ_2 面上的积分仍然趋于零。

将以上条件代入式（Ⅳ-9），即得

$$\widetilde{E}(P)=\frac{i}{4\pi}\iint_{\Sigma}\widetilde{E}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)-\left(\frac{e^{ikr}}{r}\frac{\partial\widetilde{E}}{\partial n}\right)d\sigma \tag{Ⅳ-10}$$

由图Ⅳ-4中可知，在孔面 Σ 上有

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{E}&=\frac{Ae^{ikl}}{l}\\ \frac{\partial\widetilde{E}}{\partial n}&=\frac{Ae^{ikl}}{l}\left[ik-\frac{1}{l}\right]\cos(n,l)\end{aligned}\right\} \tag{Ⅳ-11}$$

将式（Ⅳ-11）代入式（Ⅳ-10），并略去沿法线微商中的 $\frac{1}{l}$ 和 $\frac{1}{r}$ 项（因为它们比 k 小得多），最后得到

$$\widetilde{E}(P)=\frac{1}{i\lambda}\iint_{\Sigma}\frac{Ae^{ikl}}{l}\left[\frac{\cos(n,l)-\cos(n,r)}{2}\right]\frac{e^{ikr}}{r}d\sigma \tag{Ⅳ-12}$$

此式称为基尔霍夫衍射公式。这个公式对于光源点和观察点是对称的。这意味着，点光源 S 在 P 点产生的作用与处在 P 点同等强度的点光源在 S 点所产生的作用相同。这个结果有时称为亥姆霍兹互易定理（或可逆定理）。

需要指出，上述衍射定理和衍射公式只是一个近似理论，因为我们是把光波作为标量波来处理的。实验证明，在衍射孔径远大于波长以及观察衍射现象是在离衍射孔比较远的地方的条件下，这种衍射的标量波理论可以给出很准确的结果。对于我们一般所要考虑的问题，是能够满足上述两个条件的。但是，对于某些不满足这些条件的问题，例如在高分辨衍射光栅的理论中，如果要得到有相当精确度的结果，就必须考虑光波场的矢量性质。

Ⅴ．贝塞尔函数

微分方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0 \qquad (n\geqslant 0)$$

称为贝塞尔微分方程，它的解叫贝塞尔函数，方程的通解是

$$y=C_1J_n(x)+C_2y_n(x)$$

$J_n(x)$ 称为 n 阶第一类贝塞尔函数⊖，$y_n(x)$ 称为 n 阶第二类贝塞尔函数。

本书只用到第一类贝塞尔函数 $J_n(x)$，下面简单介绍 $J_n(x)$ 的级数表示及其主要性质。

一、贝塞尔函数的级数表示式

$J_n(x)$ 是个无穷级数，定义为

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)}$$

⊖ 参见M. 玻恩，E. 沃耳夫著《光学原理》中译本§8.3.2. 及 J. W. 顾德门著《付里叶光学导论》中译本§3-3。

⊖ 一般提到贝塞尔函数，都是指第一类贝塞尔函数。

把上式的 n 换为 $-n$，有

$$J_{-n}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(-n+k+1)}$$

其中 $\Gamma(k+1)$ 称为 Γ 函数，它的定义为

$$\Gamma(k)=\int_0^{\infty}e^{-x}x^{k-1}dx$$

根据 Γ 函数的一个性质：当 k 为正整数时，有

$$\Gamma(k+1)=k!$$

因此，$J_n(x)$ 可写成

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!}$$

通常 $J_0(x)$ 和 $J_1(x)$ 用得比较多，在上式中取 $n=0$ 和 $n=1$，得

$$J_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot4^2}-\frac{x^6}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}+\cdots$$

$$J_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}}{k!(k+1)!}$$

$$=\frac{x}{2}\left[1-\frac{x^2}{2\cdot4}+\frac{x^4}{2\cdot4\cdot4\cdot6}-\frac{x^6}{2\cdot4\cdot6\cdot4\cdot6\cdot8}+\cdots\right]$$

$J_0(x)$，$J_1(x)$ 分别称为零阶和一阶贝塞尔函数。在图V-1中，画出 $J_0(x)$，$J_1(x)$，$J_2(x)$ 的曲线，它们很象阻尼的正弦波。对于 n 为整数的 $J_n(x)$，从 $J_n(x)$ 的公式中可以看出，n 为偶数的 $J_n(x)$ 全是 x 的偶次方项，这样的 $J_n(x)$ 是偶函数；n 为奇数的 $J_n(x)$ 全是 x 的奇次方项，这样的 $J_n(x)$ 是奇函数，图V-1中只画出 x 是正值的情况，从奇偶函数的性质就知道 x 为负值的曲线形状了。

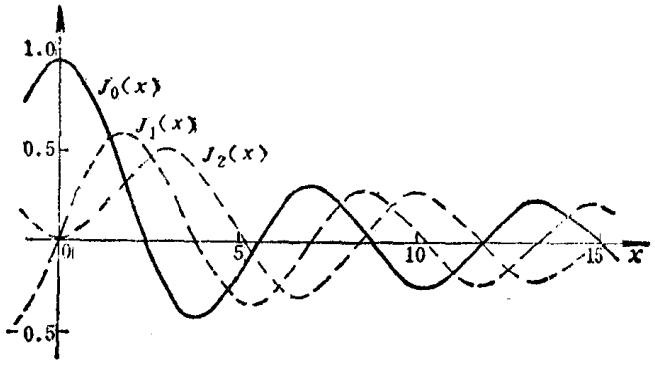


图 V-1

$J_0(x)$ 和 $J_1(x)$ 的数值，在普通的数学手册中可以查到。

二、几个基本性质

（一）$J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x)$

（二）$J_n(x)=\frac{x}{2n}[J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)]$

(三) $\frac{d}{dx}J_n(x)=\frac{1}{2}[J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)]$

(四) $\frac{d}{dx}[x^{n+1}J_{n+1}(x)]=x^{n+1}J_n(x)$

(五) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{J_n(x)}{x^n}=\frac{1}{2^n n!}$

三、贝塞尔函数的积分公式

(一) $e^{ix\sin\varphi}=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)e^{in\varphi}$

(二) $J_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x\sin\varphi-n\varphi)d\varphi$

(三) $e^{ix\cos\theta}=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)i^n e^{-in\theta}$

(四) $\frac{i^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ix\cos\theta}e^{in\theta}d\theta=J_n(x)$

(五) $\frac{i^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ix\cos\theta}\cos n\theta d\theta=J_n(x)$

Ⅵ. δ 函 数

δ函数常常用来代表物理现象中基本质点的物理量。几何学中的一个点是没有大小的，它仅仅标志一个位置。如果用几何学中的一个点来代表物理量是不符合实际的，物理现象都是物质变化的现象，如果质点没有大小，它等于零，物质就不存在，物理量也不存在了，我们用δ函数来代表脉冲、点光源、点电荷等基本的物理量就可以解决这个矛盾。δ函数也叫脉冲函数。单从δ函数的定义去理解δ函数有时感到比较抽象，先举一个例子作些说明。

设有一个矩形函数 $f(t)$，如图Ⅵ-1所示，它的面积等于1，它定义为

$$f(t)=\begin{cases}\frac{1}{2a} & |t|\leqslant a\\ 0 & |t|>a\end{cases}$$

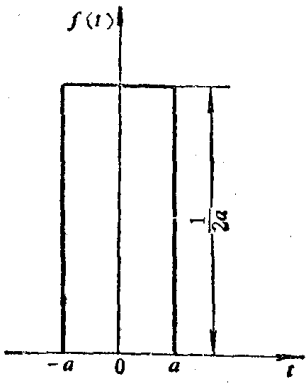


图 Ⅵ-1

这里的矩形函数的高度随着宽度变，宽度越窄，高度越高，总要保持面积为1，即 $2a\times\frac{1}{2a}=1$。当 a 趋于零时，可以把这个函数的极限叫做δ函数，并记为 $\delta(t)$，即

$$\delta(t)=\lim_{a\to 0}f(t)$$

就是说，把 $f(t)$ 这个长条拉到无限高，又变得无限细，虽然无限细，却又不等于零，面积始终还是等于1。

有了这个初步的印象就可以开始介绍δ函数的定义。δ函数的定义有各种下法，例如

$$\delta(t)=\lim_{N\to\infty} N\exp(-N^2\pi t^2)$$

$$\delta(t)=\lim_{N\to\infty} N\mathrm{rect}(Nt)$$

$$\delta(t)=\lim_{N\to\infty} N\mathrm{sinc}(Nt)$$

二维 δ 函数的定义只是一维情形的简单推广，虽然这时还有更多的脉冲函数可供选择。下面例举几个二维空间 δ 函数的定义

$$\delta(x,y)=\lim_{N\to\infty} N^2\exp[-N^2\pi(x^2+y^2)]$$

$$\delta(x,y)=\lim_{N\to\infty} N^2\mathrm{rect}(Nx)\mathrm{rect}(Ny)$$

$$\delta(x,y)=\lim_{N\to\infty} N^2\mathrm{sinc}(Nx)\mathrm{sinc}(Ny)$$

光学中就用空间 δ 函数来描述一个点光源。

δ 函数有以下的基本性质

$$\delta(x,y)=\begin{cases}\infty & x=y=0\\ 0 & \text{其他地方}\end{cases}$$

$$\iint_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1 \qquad \text{任意 } \varepsilon>0$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty}f(\alpha,\beta)\delta(x-\alpha,y-\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta=f(x,y)$$

$$\delta(ax,by)=\frac{1}{|ab|}\delta(x,y)$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty}\delta(x,y)e^{-i2\pi(ux+vy)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$$

Ⅶ. 矩阵的基本性质

这一节简单说明一下本书所涉及的矩阵的基本性质。

一、矩阵的定义

一个矩阵，就是指排成长方阵列或正方阵列的实数或复数，在符号上常用粗体大写英文字母表示。例如

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2}\cdots & a_{mn}\end{bmatrix} \tag{Ⅶ-1}$$

式中 a_{ij} 代表第 i 行第 j 列元素。上式也可以简单地记为

$$\mathbf{A}=[a_{ij}] \tag{Ⅶ-1a}$$

因为这个矩阵包括 m 行 n 列，就称它是一个 $m\times n$ 维矩阵。

当 $m=1$ 时

$$A=[a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}]$$

称为单行矩阵；

当 $n=1$ 时

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

称为单列矩阵或列阵；

当 $m=n$ 时，A 称为 n 阶方阵。

一个方阵，若

$$a_{ij}=\begin{cases} 1 & 当\ i=j \\ 0 & 当\ i\neq j \end{cases}$$

称为单位矩阵，并用 I 代表

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad (\text{VII}-2)$$

如果 A 是一个方阵，则与 A 相应的行列式为

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \qquad (\text{VII}-3)$$

若 $|A|=1$，则 A 称为单位模矩阵。

二、矩阵的线性运算

1. 矩阵的相等。若两个矩阵 $[a_{ij}]$ 和 $[b_{ij}]$ 的行数相同，列数也相同，并且对应元素都相等

$$a_{ij}=b_{ij}$$

则称这两个矩阵相等，即 $A=B$

2. 矩阵的加减。若两个矩阵 $[a_{ij}]$ 和 $[b_{ij}]$ 都是 $m\times n$ 维矩阵，则它们的和或差也是 $m\times n$ 维矩阵，它的矩阵元等于 $[a_{ij}]$ 和 $[b_{ij}]$ 的对应矩阵元的和或差，记为

$$[a_{ij}]\pm[b_{ij}]=[c_{ij}] \qquad (\text{VII}-4)$$

其中

$$c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij} \qquad (\text{VII}-4\ a)$$

3. 常数乘矩阵。设 α 为一个常数，则

$$\alpha[a_{ij}]=[c_{ij}] \qquad (\text{VII}-5)$$

其中

$$c_{ij}=\alpha\cdot a_{ij} \qquad (\text{VII}-5\ a)$$

三、矩阵的乘积

两个矩阵 A 和 B 的乘积 AB 只有当 A 的列数等于 B 的行数时才有定义。设 A 是一个

$m\times p$ 维矩阵，B 是一个 $p\times n$ 维矩阵，则 AB 是一个 $m\times n$ 维矩阵，记为

$$C=AB \tag{Ⅶ-6}$$

其中 C 的元素 c_{ij} 是 A 的第 i 行与 B 的第 j 列对应元素乘积之和

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \tag{Ⅶ-6 a}$$

矩阵的乘积满足结合律和分配律，即

$$(AB)C=A(BC) \tag{Ⅶ-7}$$

$$A(B+C)=AB+AC \tag{Ⅶ-8}$$

但交换律一般不成立，$AB\neq BA$。在特殊情形下，当 $AB=BA$ 时，矩阵 A 和 B 称为可易矩阵。

任何方阵与同阶单位矩阵的乘积仍等于它自身

$$AI=IA=A \tag{Ⅶ-9}$$

四、矩阵的本征矢和本征值

给定一个 n 阶方阵 A，当它作用到一个具有 n 个矩阵元的单列矩阵 x 上时就形成另一个单列矩阵。但是有可能选取特殊的单列矩阵 x，使得它受到矩阵 A 作用之后形成的单列矩阵的每个矩阵元正比于 x 的每个矩阵元，即

$$Ax=\lambda x \tag{Ⅶ-10}$$

其中，λ 是比例因子。当这个方程得到满足时，就称 x 是 A 的一个本征矢，称 λ 是 A 的一个本征值。例如，若 A 是二阶方阵，把方程（Ⅶ-10）详细写出来就是

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2=\lambda x_1$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2=\lambda x_2$$

移项后得到：

$$(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}=0$$

$$a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2=0$$

根据线性方程组的理论知道，要使上述方程组有非零解，系数行列式必须为零

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{Ⅶ-11}$$

或把行列式展开得到

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})=0 \tag{Ⅶ-11 a}$$

这个方程称为特征方程。A 的本征值就是特征方程的根。设特征方程的根是 λ_1 和 λ_2，根据二次方程的初等理论可以证明

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1+\lambda_2&=a_{11}+a_{22}\\ \lambda_1\lambda_2&=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}=|A|\end{aligned}\right\} \tag{Ⅶ-12}$$

式中 $a_{11}+a_{22}$ 是矩阵的对角线上诸元素之和，称为矩阵的迹，$|A|=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$ 就是与矩阵 A 对应的行列式的值。公式（Ⅶ-12）可以推广到更高阶的方阵。

Ⅷ. 基本物理常数表[1]

名称	符号	最佳实验值
光速	c	$(2.997925\pm0.000003)\times10^{8}$米/秒[2]
真空磁导率	μ_0	$4\pi\times10^{-7}$亨利/米(正确值)
真空电容率	ε_0	$(8.85418\pm0.00002)\times10^{-12}$法拉/米
基本电荷	e	$(1.60210\pm0.00007)\times10^{-19}$库仑
普朗克常数	h	$(6.6256\pm0.0005)\times10^{-34}$焦耳·秒
电子静止质量	m_e	$(9.1091\pm0.0004)\times10^{-31}$千克
质子静止质量	m_p	$(1.67252\pm0.00008)\times10^{-27}$千克
阿伏伽德罗常数	N_0	$(6.02252\pm0.00028)\times10^{23}$克分子$^{-1}$
玻耳兹曼常数	k	$(1.38054\pm0.00018)\times10^{-23}$焦耳/开
精细结构常数	α	$(7.29720\pm0.00010)\times10^{-3}$
电子荷质比	e/m	$(1.758796\pm0.000019)\times10^{11}$库仑/千克
量子/电荷比	h/e	$(4.13556\pm0.00012)\times10^{-15}$焦耳·秒/库仑
电子的康普顿波长	λ_c	$(2.42621\pm0.00006)\times10^{-12}$米
里德堡常数	R_∞	$(1.0973731\pm0.0000003)\times10^{7}$米$^{-1}$
玻尔半径	a_0	$(5.29167\pm0.00007)\times10^{-11}$米

部分习题答案

第 一 章

1.5 0.005毫米；20π

1.6 1000伏/米

1.8 $\theta_B=59°32'$；$r_p=-6\times10^{-3}$，$r_s=-0.49$

1.11(2) $2u=68°$

1.12 (2) $2u=66°26'$

第 二 章

2.1 $E=10\cos(120\pi t+0.93)$

2.8 $\approx8.3\times10^{-1}$埃

2.9 5.55×10^{3}米

2.10 0.25°

第 三 章

3.4 $\sim6.7\times10^{-4}$厘米

3.6 (1) 1毫米；(2) 3条

3.7 0.9毫米

3.10 1.8×10^{-4}毫米

3.16 6.29×10^{-5}厘米

3.20 (1) 0.448；(2) $2\pi/0.448$

[1] 见"A Pilgrim's Progress in Search of the Fundamental Constants", by J. W. M. Du Mond, Physics Today, October, 1965.

[2] 目前测得的最佳值为 $c=2.997924562\times10^{8}$米/秒$\pm1.1$米/秒。

第 四 章

4.3 156 厘米

4.4 1 厘米

4.5 10 米

4.7 $I/I_0=0.22\%$，$I/I_0=0.027\%$

4.12 (1)3.1 倍；(2)71 条；(3)35条

4.22 10^{-1} 米

4.24 6°

第 五 章

5.8 (1)254 埃；(2)5 埃

5.10 $\approx 14^\circ$

第 六 章

6.3 1/3，1.3

6.6 19.7°

6.11 (1)0.574，0.819，0.329，0.671 (2)0.470，0.221

6.14 45°

6.22 5.05 毫米

第 七 章

7.2 32 微米

7.4 1.24 微米

7.5 4.7×10^{17}

7.10 $B_{21}=1.3\times10^{19}$ 米^3/焦耳·秒^2；
$\rho_\nu=7.7\times10^{-14}$ 焦耳·秒/米^3

7.12 CO_2；$\Delta\nu_d=61$ 兆赫

7.13 $n=3$，$l=0$，$m=0$，$s=\pm1/2$

第 八 章

8.1 1 米$^{-1}$；36.8%

8.2 0.0006 毫米$^{-1}$

8.3 949 米/秒

8.5 100 厘米$\leqslant d<150$ 厘米及 $d\leqslant50$ 厘米是稳定的

8.7 1.1×10^8 赫

8.8 1.24 米；1.16 厘米

8.11 15%

8.12 1.75×10^{10} 伏/米

8.19 4.3×10^{-9} 秒