

光学原理

下册

M. 玻恩 E. 沃耳夫 著

科学出版社

内 容 简 介

本书是光学方面的一部名著。全书在经典电磁理论范围内系统地讨论了光在各种媒质中传播的基本规律，包括光的反射、折射、色散、干涉和衍射以及金属光学和晶体光学等。几何光学作为波长趋于零的极限情况，也纳入了麦克斯韦方程系统，同时讨论了象差的衍射理论等。中译本根据原书第五版译出，分上、下两册出版。上册包括历史引言和前八章，下册包括后六章及附录，主要内容为衍射理论、金属光学、晶体光学等。

本书可供光学专业的工作人员和高等院校师生参考。

Max Born and Emil Wolf

PRINCIPLES OF OPTICS

*Electromagnetic Theory of Propagation,
Interference and Diffraction of Light
(5 th ed.)*

Pergamon Press, 1975

光学原理

光的传播、干涉和衍射的电磁理论

(下册)

M. 玻恩 E. 沃耳夫 著

黄乐天 陈熙谋 陈秉乾 译校

责任编辑 方开文

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1981年7月第一版 开本：850×1168 1/32

1981年7月第一次印刷 印张：13 3/4 插页：2

印数：0001—9,120 字数：362,000

统一书号：13031·1589

本社书号：2185·13—3

定 价： 2.75 元

537
379
下沙

科学出版社

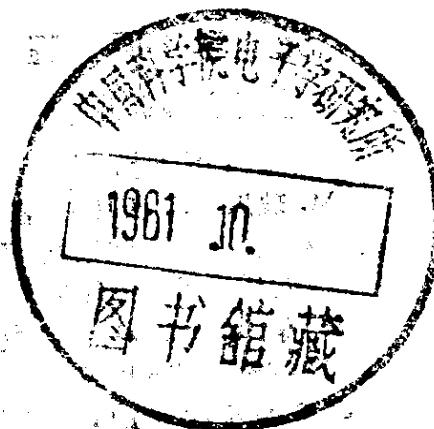
光 学 原 理

光的传播、干涉和衍射的电磁理论

(下册)

M. 玻恩 E. 沃耳夫 著

黄乐天 陈熙谋 陈秉乾 译校



科学出版社

1981

1109595

目 录

第九章 象差的衍射理论	603
§ 9.1 有象差存在时的衍射积分.....	604
§ 9.1.1 衍射积分	604
§ 9.1.2 位移定理. 参考球的变化	607
§ 9.1.3 强度与波阵面平均形变之间的关系	609
§ 9.2 象差函数的展开.....	610
§ 9.2.1 泽尼克圆多项式	610
§ 9.2.2 象差函数的展开	613
§ 9.3 初级象差的容限条件.....	616
§ 9.4 与单一象差相联系的衍射图样.....	622
§ 9.4.1 初级球面象差	626
§ 9.4.2 初级彗差	629
§ 9.4.3 初级象散	632
§ 9.5 扩展物的成象.....	634
§ 9.5.1 相干照明	635
§ 9.5.2 不相干照明	639
第十章 部分相干光的干涉和衍射	648
§ 10.1 引言	648
§ 10.2 实多色场的复数表示	652
§ 10.3 光束的相关函数	659
§ 10.3.1 两个部分相干光束的干涉. 互相干函数和复相干度	659
§ 10.3.2 互相干的谱表示	664
§ 10.4 准单色光的干涉和衍射	667
§ 10.4.1 准单色光的干涉. 互强度	667
§ 10.4.2 扩展不相干准单色光源发出的光的互强度和相干度的计算	671

(a) 范西特-泽尼克定理	671
(b) 霍普金斯公式	677
§ 10.4.3 一个例子	679
§ 10.4.4 互强度的传播	684
§ 10.5 某些应用	686
§ 10.5.1 扩展的不相干准单色光源象中的相干度	686
§ 10.5.2 聚光镜对显微镜分辨率的影响	691
(a) 临界照明	691
(b) 柯勒照明	694
§ 10.5.3 用部分相干准单色照明成象	696
(a) 互强度通过光学系统的透射	696
(b) 透照物的象	699
§ 10.6 关于互相干的一些定理	704
§ 10.6.1 来自不相干光源光的互相干的计算	704
§ 10.6.2 互相干的传播	707
§ 10.7 部分相干性的严格理论	709
§ 10.7.1 互相干波动方程	709
§ 10.7.2 互相干传播定律的严格表述	711
§ 10.7.3 相干时间和有效谱宽	715
§ 10.8 准单色光的偏振特性	719
§ 10.8.1 准单色平面波的相干矩阵	720
(a) 完全非偏振光(自然光)	725
(b) 完全偏振光	726
§ 10.8.2 某些等价表示. 光波的偏振度	728
§ 10.8.3 准单色平面波的斯托克斯参量	732
第十一章 严格的衍射理论	736
§ 11.1 引言	736
§ 11.2 边界条件与面电流	738
§ 11.3 平面屏的衍射: 巴俾涅原理的电磁形式	740
§ 11.4 平面屏的二维衍射	742
§ 11.4.1 二维电磁场的标量性质	742
§ 11.4.2 平面波的角谱	743
§ 11.4.3 利用对偶积分方程表述	746

§ 11.5 半平面对平面波的二维衍射	748
§ 11.5.1 E 偏振对偶积分方程的解	748
§ 11.5.2 用菲涅耳积分表示的解	751
§ 11.5.3 解的性质	755
§ 11.5.4 H 偏振的解	760
§ 11.5.5 某些数值计算	762
§ 11.5.6 与近似理论及实验结果的比较	764
§ 11.6 半平面对平面波的三维衍射	766
§ 11.7 半平面对局域源的衍射	769
§ 11.7.1 平行于衍射棱边的线电流	769
§ 11.7.2 偶极子	775
§ 11.8 其他问题	779
§ 11.8.1 两个平行的半平面	779
§ 11.8.2 平行错开的半平面的无限堆垛	782
§ 11.8.3 窄条	783
§ 11.8.4 某些进一步的问题	785
§ 11.9 解的唯一性	785
第十二章 光被超声波衍射	788
§ 12.1 现象的定性描述和基于麦克斯韦微分方程的理论概要	788
§ 12.1.1 现象的定性描述	788
§ 12.1.2 基于麦克斯韦方程的理论概要	792
§ 12.2 用积分方程法处理光被超声波衍射	796
§ 12.2.1 E 偏振的积分方程	798
§ 12.2.2 积分方程的试探解	799
§ 12.2.3 衍射和反射光谱中光波振幅的表达式	803
§ 12.2.4 方程用逐次逼近法得出的解	803
§ 12.2.5 某些特殊情况下第一序和第二序谱线强度的表达式	808
§ 12.2.6 某些定性的结果	810
§ 12.2.7 喇曼-纳斯近似	812
第十三章 金属光学	815
§ 13.1 波在导体中的传播	816

§ 13.2 金属表面的折射和反射	820
§ 13.3 金属光学常数的初等电子理论	832
§ 13.4 波在分层导电媒质中的传播. 金属膜的理论	836
§ 13.4.1 透明衬底上的吸收膜	836
§ 13.4.2 吸收衬底上的透明膜	842
§ 13.5 导体球的衍射;米氏理论	843
§ 13.5.1 问题的数学解	845
(a) 用德拜势表示场	845
(b) 场分量的级数展开	851
(c) 关于缔合勒让德函数与柱面函数的公式概述	860
§ 13.5.2 米氏公式的某些结果	862
(a) 分波	862
(b) 极限情况	864
(c) 散射光的强度和偏振	869
§ 13.5.3 总散射与消光	875
(a) 某些一般的考虑	875
(b) 计算结果	881
第十四章 晶体光学	887
§ 14.1 各向异性媒质的介电张量	887
§ 14.2 在各向异性媒质中单色平面波的结构	890
§ 14.2.1 相速度和光线速度	890
§ 14.2.2 光在晶体中传播的菲涅耳公式	894
§ 14.2.3 确定传播速度和振动方向的几何作图	898
(a) 波法线椭球	898
(b) 光线椭球	901
(c) 法线面和光线面	902
§ 14.3 单轴晶体和双轴晶体的光学性质	904
§ 14.3.1 晶体的光学分类	904
§ 14.3.2 光在单轴晶体中的传播	906
§ 14.3.3 光在双轴晶体中的传播	908
§ 14.3.4 晶体中的折射	912
(a) 双折射	912
(b) 锥形折射	914
§ 14.4 晶体光学测量	920

§ 14.4.1 尼科耳棱镜	920
§ 14.4.2 补偿器	921
(a) 四分之一波片	922
(b) 巴俾涅补偿器	923
(c) 索累补偿器	925
(d) 伯列克补偿器	925
§ 14.4.3 有晶片时的干涉	926
§ 14.4.4 单轴晶片的干涉图	931
§ 14.4.5 双轴晶片的干涉图	934
§ 14.4.6 晶体媒质的光轴定位及其主折射率的测定	936
§ 14.5 应力双折射和形式双折射	937
§ 14.5.1 应力双折射	937
§ 14.5.2 形式双折射	941
§ 14.6 吸收晶体	944
§ 14.6.1 光在吸收的各向异性媒质中的传播	944
§ 14.6.2 吸收晶片的干涉图	951
(a) 单轴晶体	952
(b) 双轴晶体	953
§ 14.6.3 二向色的起偏振器	955
附录 1 变分法	959
§ 1 作为极值必要条件的欧勒方程	959
§ 2 希耳伯特独立积分与哈密顿-雅科毕方程	961
§ 3 致极曲线场	963
§ 4 从哈密顿-雅科毕方程的解确定全部致极曲线	965
§ 5 哈密顿正则方程	967
§ 6 被积函数中不显含独立变量时的特殊情况	968
§ 7 不连续性	970
§ 8 维尔斯特拉斯 (Weierstrass) 条件和勒让德条件 (极值的充分条件)	972
§ 9 一个端点约束在一曲面时变分积分的极小值	975
§ 10 极小值的雅科毕判据	976
§ 11 例一：光学	976
§ 12 例二：质点系力学	979

附录 2	光学,电子光学和波动力学	983
§ 1	基本形式的哈密顿类似	983
§ 2	变分形式的哈密顿类似	986
§ 3	自由电子的波动力学	989
§ 4	光学原理应用于电子光学	992
附录 3	一些积分的渐近逼近	995
§ 1	最速下降法	995
§ 2	稳相法	1002
§ 3	二重积分	1003
附录 4	狄喇克 δ 函数	1006
附录 5	严格推导洛伦兹-洛伦茨定律用到的一个数学引理 (§ 2.4.2)	1012
附录 6	电磁场中不连续性的传播(§ 3.1.1)	1015
§ 1	联系各个场矢量不连续变化的关系式	1015
§ 2	运动的不连续曲面上的场	1018
附录 7	泽尼克圆多项式(§ 9.2.1)	1020
§ 1	某些一般考虑	1020
§ 2	径向多项式 $R_n^{(k)}(\rho)$ 的显式	1022
附录 8	一个不等式的证明(§ 10.7.3)	1028
附录 9	计算两个积分的值(§ 12.2.2)	1030

第九章 象差的衍射理论

第五章中，我们在几何光学基础上研究了象差效应。在那一种处理中，认为象就是几何光线与象平面的交点所构成的模糊图样。由于几何光学给出的是在波长很短的极限情况下有效的近似模型，因此可以预料，当象差变小时，几何理论逐渐失效。例如，在从一个圆孔发出的理想球面会聚波的极限情况下，几何光学预言焦平面上焦点处的强度无限大，其他各处的强度为零；然而，正如在§ 8.5.2 中已经指出的，实象是由一个被一些暗环和亮环围绕着的中央亮区（爱里图样）组成的。在焦平面附近，光分布也呈现出比几何光学所设想的更为复杂的性质（参看图 8.41）。这就促使我们在衍射理论基础上研究象差效应。

这个领域内的首批研究成果是瑞利¹⁾提出的。他的主要贡献是用公式立出判据（在 § 9.3 中讨论），它的一种推广形式已经广泛地用于确定光学仪器所能容许的最大象差。这一课题已由于许多作者的研究进一步推进了，他们研究了各种象差效应²⁾，我们可以特别提到斯图瓦尔特（Steward）、皮希特（Picht）和玻恩的一些更广泛的处理方法³⁾。

1) Lord Rayleigh, *Phil. Mag.*, (5), 8 (1879), 403. 重载于他的 *Scientific Papers* (Cambridge University Press, 1899), 1, 428.

2) E. Wolf 在 *Rep. Progr. Phys.* (London, Physical Society), 14 (1951), 95 中已给出象差衍射理论的历史概述。

3) G.C. Steward, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A, 225 (1925), 131; 也见于他的书 *The Symmetrical Optical System* (Cambridge University Press, 1928). J. Picht, *Ann. d. Physik*, (4) 77 (1925), 685. 同上 80 (1926), 491; 也见于他的 *Optische Abbildung* (Braunschweig, Vieweg, 1931). M. Born, *Naturwissenschaften*, 20 (1932), 921; 以及他的 *Optik* (Berlin, Springer, 1933), p. 202.

有象差存在时成象的广泛衍射处理方法是奈波尔¹⁾提出的，其中一部分在泽尼克的合作下完成。他们研究了波阵面与球面的偏离不到一个波长时的微小象差的影响。范卡本 (Van Kampen)²⁾ 在衍射理论的基础上，利用渐近逼近法研究了大象差的效应；这种处理方法的基础是形式上推广到稳相原理的双变量函数，它后来已首先由福克 (J. Focke) 严格地用公式作了表述 (见附录 3, 1002 页)。

本章主要叙述奈波尔-泽尼克理论，并考查受初级象差影响的衍射象的结构。在最后一节 (§ 9.5) 中，将从点状物推广到扩展物，并研究相干照明和不相干照明的成象问题。部分相干照明的成象将在第十章中讨论。

§ 9.1 有象差存在时的衍射积分

§ 9.1.1 衍射积分

考虑一个具有单色点光源 P_0 的共轴光学系统 (图 9.1)。取笛卡儿坐标系，原点位于 P_0 的高斯象点 P_1^* ， z 轴沿 CP_1^* ，其中 C 是出射光瞳的中心， y 轴取在子午面 (包含 P_0 和系统轴的平面) 内。 P_0 和 P_1^* 的离轴距离分别用 Y_0 和 Y_1^* 表示。

同第五章一样，出射光瞳区内波阵面的形变用象差函数 ϕ 描述。设 \bar{Q} 和 Q 分别是象空间内的一条光线与通过 C 的波阵面及

1) B.R.A. Nijboer (上册译作奈波), Thesis, University of Groningen, 1942. 主要部分也发表于 *Physica*, **10** (1943), 679; 同上, **13** (1947), 605; F. Zernike 和 B.R.A. Nijboer, 撰稿于 *La Théorie des Images Optiques* (Paris, Revue d'Optique, 1949), p. 227. K. Nienhuis 和 B.R.A. Nijboer 在 *Physica*, **14** (1948), 590 中讨论了理论推广到象差稍大的情况。还必须提到 K. Nienhuis 的一篇论文 (University of Groningen, 1948)，它主要涉及象差效应的实验研究。在 § 9.4 中复制了 Nienhuis 获得的几张精美的照片。

在上册 576 页所引 M.P. Bachynski 和 G. Bekefi 的论文以及 *Trans. Inst. Radio Eng.*, AP-4 (1956), 412 中描述了在微波频段有象差存在时象区结构的实验研究。

2) N.G. Van Kampen, *Physica*, **14** (1949), 575; 同上, **16** (1950), 817; 同上, **25** (1958), 437

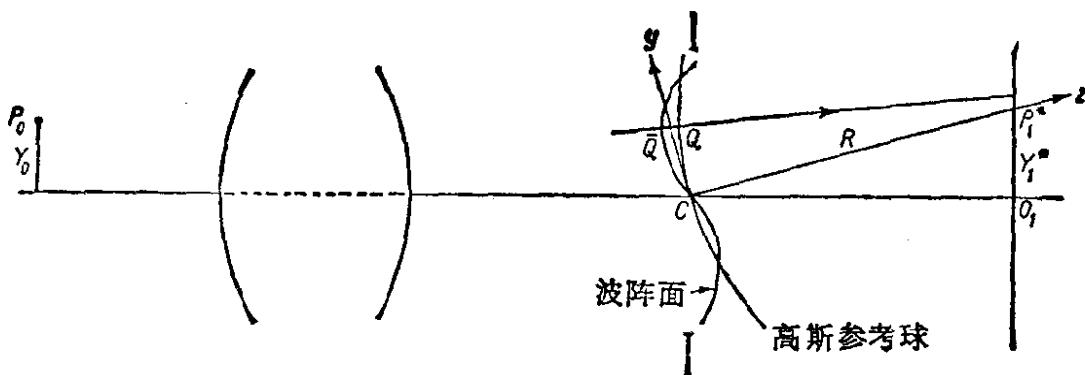


图 9.1 参考系和记号的选择

高斯参考球的交点。假定象空间的折射率为 1, Φ (图 9.1 中取正值) 表示沿光线测得的距离 $\bar{Q}Q$ 。

设 R 表示高斯参考球的半径 CP_1^* , s 为 Q 与象区内任一点 P 之间的距离。 Q 点的扰动用 $A e^{ik(\Phi-R)}/R$ 表示, 其中 A/R 是 Q 点的振幅。根据惠更斯-菲涅耳原理, P 点的扰动由下式给出:

$$U(P) = -\frac{i}{\lambda} \frac{A e^{-ikR}}{R} \iint \frac{e^{ik[\Phi+s]}}{s} dS, \quad (1)$$

式中积分遍及参考球近似充满出射光瞳的那一部分。(1) 式中已假定所涉及的角度很小, 因此倾斜因子在参考球上的变化可以忽略; 也已假定波的振幅在波阵面上基本上是常数, 因此 A 可提出积分号外。

设 (ξ, η, ζ) 是 Q 的坐标, (x, y, z) 是 P 的坐标, a 是出射光瞳的半径。同 § 8.8 中讨论过的无象差波 ($\Phi = 0$) 的特殊情况一样, 令

$$\left. \begin{array}{l} \xi = a\rho \sin \theta, \quad x = r \sin \phi, \\ \eta = a\rho \cos \theta, \quad y = r \cos \phi, \end{array} \right\} \quad (2)$$

与 § 8.8(2) 式和 § 8.8(9) 式一样¹⁾, 我们有

$$k(s - R) = -v\rho \cos(\theta - \phi) - \frac{1}{2} u\rho^2 + \left(\frac{R}{a}\right)^2 u, \quad (3)$$

式中 u 和 v 是 P 的两个“光学坐标”:

1) R 现在相当于 § 8.8 的 f . 值得指出: 如果应用 § 8.8 的(2)和(3)式, 则衍射积分可再次用平面波的角谱形式来表示 [见 J. Focke, Optica Acta, 3 (1956), 110].

$$u = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{a}{R} \right)^2 z, \quad v = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{a}{R} \right) \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (4)$$

这时把 Φ 看作 Y_1^* , ρ 和 θ 的函数是方便的, 即

$$\Phi = \Phi(Y_1^*, \rho, \theta). \quad (5)$$

高斯参考球的面元是 $dS = a^2 \rho d\rho d\theta$, 如果 CP_1^* 与系统轴的夹角很小, 则积分范围可取为 $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$. 此外, 对于象区内的观察点, 在被积函数分母中可用 R 代替 s . 因此, 将(3) 式代入, (1) 式变为

$$\begin{aligned} U(P) &= U(u, v, \phi) \\ &= -\frac{i}{\lambda} \frac{Aa^2}{R^2} e^{i\left(\frac{R}{a}\right)^2 u} \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{i[k\Phi(Y_1^*, \rho, \theta) - v\rho \cos(\theta - \phi) - \frac{1}{2} u\rho^2]} \\ &\quad \rho d\rho d\theta, \end{aligned} \quad (6)$$

因此, P 点的强度为 .

$$\begin{aligned} I(P) &= |U(P)|^2 \\ &= \left(\frac{Aa^2}{\lambda R^2} \right)^2 \left| \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{i[k\Phi(Y_1^*, \rho, \theta) - v\rho \cos(\theta - \phi) - \frac{1}{2} u\rho^2]} \rho d\rho d\theta \right|^2. \end{aligned} \quad (7)$$

把强度 $I(P)$ 表示为强度 I^* 的分数是方便的, 如果象差不存在, I^* 就是在高斯象点 P_1^* 得到的强度. 根据(7)式, 有

$$I^* = \pi^2 \left(\frac{Aa^2}{\lambda R^2} \right)^2, \quad (8)$$

因此归一化强度为¹⁾

$$\begin{aligned} i(P) &= \frac{I(P)}{I^*} \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left| \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{i[k\Phi(Y_1^*, \rho, \theta) - v\rho \cos(\theta - \phi) - \frac{1}{2} u\rho^2]} \rho d\rho d\theta \right|^2. \end{aligned} \quad (9)$$

象差不存在时, 强度在高斯象点处为极大. 当象差存在时, 一般就不再是这种情况了, 我们可以把强度极大的点称为衍射焦

1) 归一化强度所用的符号 i 与 $\sqrt{-1}$ 所用的同一符号之间不会引起混乱, 因为前者总是带着自变量出现的, 例如 $i(P)$, $i(u, v, \phi)$, 等等.

点¹⁾。通常人们感兴趣的只是特定观察平面内的强度极大值；这个值[按(9)式那样归一化时]就称为斯特列耳(Strehl)强度²⁾。

由(9)式可立即导出以后必需的一些简单结果。

§ 9.1.2 位移定理. 参考球的变化

设 Φ 和 Φ' 是两个象差函数，使得

$$\Phi' = \Phi + H\rho^2 + K\rho \sin \theta + L\rho \cos \theta + M, \quad (10)$$

式中 H, K, L 和 M 都是与 λ 同数量级的常数。又设 $i(u, v, \phi)$ 和 $i'(u, v, \phi)$ 是相应的归一化强度，则由(9)式得出

$$i(u, v, \phi) = \frac{1}{\pi^2} \left| \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{if(u, v, \phi; \rho, \theta)} \rho d\rho d\theta \right|^2, \quad (11)$$

式中

$$f(u, v, \phi; \rho, \theta) = k\Phi - v\rho \cos(\theta - \phi) - \frac{1}{2} u\rho^2, \quad (12)$$

对于 i' 有类似的表达式。现在根据(10)式，则后一式也可写成如下形式：

$$\begin{aligned} f(u, v, \phi; \rho, \theta) &= k\Phi' - k[H\rho^2 + K\rho \sin \theta \\ &\quad + L\rho \cos \theta + M] - v\rho \cos(\theta - \phi) \\ &\quad - \frac{1}{2} u\rho^2 \\ &= k\Phi' - v'\rho \cos(\theta - \phi') - \frac{1}{2} u'\rho^2 - kM \\ &= f'(u', v', \phi'; \rho, \theta) - kM, \end{aligned} \quad (13)$$

式中

$$\begin{aligned} u' &= u + 2kH, \quad v' \sin \phi' = v \sin \phi + kK, \\ v' \cos \phi' &= v \cos \phi + kL. \end{aligned} \quad (14)$$

1) 当然，一般说来可能有不止一个衍射焦点，但如果象差充分小，衍射焦点就是唯一的。

2) 这个概念出自 K. Strehl, z.f. Instrumkde., 22 (1902), 213, 他称之为“Definitionshelligkeit”。在英文文献中常采用不大恰当的术语(“definition”) (清晰度)。

根据(2)和(4)式,(14)式表示如下变换:

$$\begin{aligned} z' &= z + 2\left(\frac{R}{a}\right)^2 H, \quad x' = x + \left(\frac{R}{a}\right) K, \\ y' &= y + \left(\frac{R}{a}\right) L. \end{aligned} \quad (15)$$

由(11)和(13)式得出

$$i(u, v, \phi) = i'(u', v', \phi'). \quad (16)$$

由此我们已证明了如下的位移定理: 象差函数加上一项 $H\rho^2 + K\rho \sin \theta + L\rho \cos \theta + M$, 其中 H, K, L 和 M 都是与 λ 同数量级的常数, 并不引起焦点附近三维强度分布的变化, 只是整个分布按照变换(15)有一位移; 即沿主方向 CP_1^* 离出射光瞳的位移量为 $2(R/a)^2 H$, 在正 x 和 y 方向的位移量分别为 $(R/a)K$ 和 $(R/a)L$.

(10)式右方的附加项可以解释为代表参考球的变化. 假定我

们选择一个新参考球, 球心在象区 $P'(x', y', z')$ 点上, 而半径为 R' , 使得它至多偏离高斯球几个波长. 设光线 $\bar{Q}Q$ 与新参考球相交于 N 点. 于是以这个新球作参考的波象差 Φ' 为(见图 9.2)

$$\begin{aligned} \Phi' &= \bar{Q}N = \bar{Q}Q - NQ \\ &\sim \bar{Q}Q - NG, \end{aligned} \quad (17)$$

式中 G 是 NP' 线与高斯参考球的交点, 和前面一样, 假定象空间的折射率为 1. 这时

$\bar{Q}Q = \Phi$ 就是以高斯球作参考的波象差, $NG = NP' - GP' = R' - s$, 式中 s 表示从 G 到 P' 的距离. 因此(17)式可写成

$$\Phi' \sim \Phi + s - R'$$

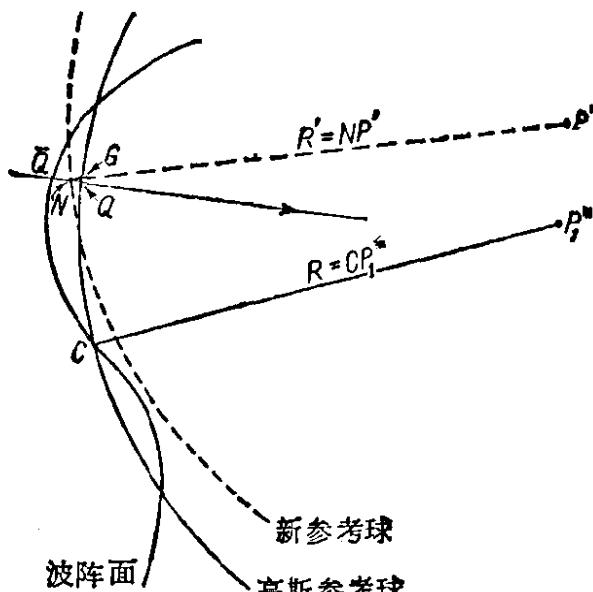


图 9.2 参考球的变化

$$= \Phi + \frac{\lambda}{2\pi} \left[-v\rho \cos(\theta - \phi) - \frac{1}{2} u\rho^2 + \left(\frac{R}{a} \right)^2 u \right] + (R - R'), \quad (18)$$

式中已用了(3)式。这里 u , v 和 ϕ 由(3)和(4)式给出, 其中以 x' , y' , z' 代替 x , y , z 。取

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{2} \left(\frac{a}{R} \right)^2 z', & K &= -\left(\frac{a}{R} \right) x', \\ L &= -\left(\frac{a}{R} \right) y', & M &= z' + R - R', \end{aligned} \quad (19)$$

可将(18)式写成(10)式那样的形式。

§ 9.1.3 强度与波阵面平均形变之间的关系

当象差很小时, 可用波象差的均方值表示参考球中心处的强度。设 Φ_P 是以象区内 P 点为中心的参考球作参考的波象差。于是, 根据(9)和(18)式, P 点的归一化强度可表示为如下形式:

$$\begin{aligned} i(P) &= \frac{1}{\pi^2} \left| \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{ik\Phi_P} \rho d\rho d\theta \right|^2 \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left| \int_0^1 \int_0^{2\pi} [1 + ik\Phi_P + \frac{1}{2} (ik\Phi_P)^2 + \dots] \rho d\rho d\theta \right|^2. \end{aligned} \quad (20)$$

设 $\overline{\Phi_P^n}$ 表示 Φ_P 的 n 次幂的平均值, 即

$$\overline{\Phi_P^n} = \frac{\int_0^1 \int_0^{2\pi} \Phi_P^n \rho d\rho d\theta}{\int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho d\rho d\theta} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \Phi_P^n \rho d\rho d\theta. \quad (21)$$

如果假定象差小到足以忽略(20)式中 $k\Phi_P$ 的三次及更高次幂, 则 P 点的强度可写成

$$\begin{aligned} i(P) &\sim \left| 1 + ik\overline{\Phi_P} - \frac{1}{2} k^2 \overline{\Phi_P^2} \right|^2 \\ &= 1 - \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 [\overline{\Phi_P^2} - (\overline{\Phi_P})^2]. \end{aligned} \quad (22)$$

右边括号中的量是波阵面的“均方形变” $(\Delta\Phi_p)^2$, 即

$$(\Delta\Phi_p)^2 = \frac{\int_0^1 \int_0^{2\pi} (\Phi_p - \bar{\Phi}_p)^2 \rho d\rho d\theta}{\int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho d\rho d\theta} = \bar{\Phi}_p^2 - (\bar{\Phi}_p)^2, \quad (23)$$

因此(22)式可写成

$$i(P) \sim 1 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 (\Delta\Phi_p)^2. \quad (24)$$

这个公式的意思是,当象差很小时,焦区内参考球中心处的归一化强度与象差的性质无关,并且它小于理想值1,其差值正比于波阵面的均方形变。

§ 9.2 象差函数的展开

§ 9.2.1 泽尼克圆多项式

在几何光学基础上讨论象差效应时(第五章),我们曾将象差函数 Φ 展开为幂级数。在这种处理中,必须在单位圆上作积分,因此更适宜于用在单位圆内部相互正交的多项式完备集来展开 Φ ¹⁾。可以构成许多个具有这种性质的多项式的集;不过,由泽尼克²⁾引入的这样一个集具有某些简单的不变性。在附录7中将表明这些泽尼克圆多项式可以用什么方法导出,并且讨论它们的一些特性;这里仅概述本章所需的公式。

泽尼克圆多项式是两个实变量 X, Y 的多项式 $V_n^l(X, Y)$,用极坐标($X = \rho \sin \theta, Y = \rho \cos \theta$)表示时,它的形式是

$$V_n^l(\rho \sin \theta, \rho \cos \theta) = R_n^l(\rho) e^{il\theta}, \quad (1)$$

式中, $l \geq 0$ 和 $n \geq 0$ 均为整数, $n \geq |l|$, 并且 $n - |l|$ 为偶

1) 术语“完备”的含义是任一性能适当良好的函数均能展开为该集的一系列函数。这一术语更精确的定义,例如可参看 R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. I (1st English Edition, New York, Interscience Publishers, 1953), pp. 51—54。

2) F. Zernike, *Physica*, 1 (1934), 689。

数。正交和归一化性质由下式表示：

$$\begin{aligned} & \iint_{x^2+y^2 \leq 1} V_n^{l*}(X, Y) V_{n'}^{l'}(X, Y) dXdY \\ &= \frac{\pi}{n+1} \delta_{ll'} \delta_{nn'}, \end{aligned} \quad (2)$$

式中 $\delta_{ll'}$ 是克朗内克符号, 星号表示复共轭。径向函数 $R_n^l(\rho)$ 是含有 $\rho^n, \rho^{n-2}, \dots, \rho^{|l|}$ 等幂的 ρ 的多项式, 如附录 7 所述, 它们与雅科毕多项式(有尽超几何级数)有密切关系。由(1)和(2)式可以看出, 径向多项式满足关系式

$$\int_0^1 R_n^l(\rho) R_{n'}^{l'}(\rho) \rho d\rho = \frac{1}{2(n+1)} \delta_{nn'}. \quad (3)$$

这些径向多项式由下列公式给出 ($m = |l|$),

$$\begin{aligned} R_n^{\pm m}(\rho) &= \frac{1}{\left(\frac{n-m}{2}\right)! \rho^m} \left\{ \frac{d}{d(\rho^2)} \right\}^{\frac{n-m}{2}} \\ &\times \left\{ (\rho^2)^{\frac{n+m}{2}} (\rho^2 - 1)^{\frac{n-m}{2}} \right\} \\ &= \sum_{s=0}^{\frac{n-m}{2}} (-1)^s \\ &\times \frac{(n-s)!}{s! \left(\frac{n+m}{2} - s\right)! \left(\frac{n-m}{2} - s\right)!} \rho^{n-2s}. \end{aligned} \quad (4)$$

已选择了归一化, 使得对于所有的 n 和 m 的允许值, 有

$$R_n^{\pm m}(1) = 1. \quad (6)$$

径向多项式具有生成函数

$$\begin{aligned} & \frac{[1 + z - \sqrt{1 - 2z(1 - 2\rho^2) + z^2}]^m}{(2z\rho)^m \sqrt{1 - 2z(1 - 2\rho^2) + z^2}} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} z^s R_{m+2s}^{\pm m}(\rho). \end{aligned} \quad (7)$$

当 $m = 0$ 时, 左边化为自变量为 $2\rho^2 - 1$ 的勒让德多项式的生

表 21 $m \leq 8, n \leq 8$ 的径向多项式 $R_n^m(\rho)$

$m \setminus n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	$2\rho^2 - 1$							
1	ρ	$3\rho^3 - 2\rho$							
2	ρ^2		$4\rho^4 - 3\rho^2$						
3		ρ^3			$5\rho^6 - 4\rho^3$				
4			ρ^4			$6\rho^6 - 5\rho^4$			
5				ρ^5			$7\rho^7 - 6\rho^5$		
6					ρ^6			$8\rho^8 - 7\rho^6$	
7						ρ^7			
8							ρ^8		

或函数¹⁾,因此

$$R_{2n}^0(\rho) = P_n(2\rho^2 - 1). \quad (8)$$

表 21 中给出了头几个 n 和 m 值的径向多项式的显式.

在奈波尔-泽尼克理论中,下列关系式(也在附录中证明)是很重要的:

$$\int_0^1 R_n^m(\rho) J_m(v\rho) \rho d\rho = (-1)^{\frac{n-m}{2}} \frac{J_{n+1}(v)}{v}, \quad (9)$$

式中 J 是第一类贝塞耳函数.

可以用实多项式

$$\left. \begin{aligned} U_n^m &= \frac{1}{2} [V_n^m + V_n^{-m}] = R_n^m(\rho) \cos m\theta, \\ U_n^{-m} &= \frac{1}{2i} [V_n^m - V_n^{-m}] = R_n^m(\rho) \sin m\theta, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

来代替复多项式 V . 在我们的应用中只需要多项式 $U_n^m = R_n^m(\rho) \times \cos m\theta$. 这是因为波畸变是对于子午面 $\theta = 0$ 对称的,所以象差函数是 θ 的偶函数.

§ 9.2.2 象差函数的展开

仿照奈波尔的方法,用泽尼克圆多项式展开象差函数 Φ . 同 § 5.1 一样,由对称性得出,变量只以其组合 Y_1^{*2} , ρ^2 和 $Y_1^* \rho \cos \theta$ 出现于展开式中,因此该展开式必具有以下的形式:

$$\Phi(Y_1^*, \rho, \theta) = \sum_l \sum_n \sum_m a_{lmn} Y_1^{*2l+m} R_n^m(\rho) \cos m\theta, \quad (11)$$

式中 l , n 和 m 是非负的整数, $n \geq m$, $n - m$ 是偶数,并且这些 a 都是常数.

由于下面主要涉及到一个固定物点的衍射象 (Y_1^* 是常数),因此方便的做法是不写出 Φ 对 Y_1^* 的明显依赖关系,而把 (11) 式改写为以下的形式:

1)例如参看 R. Courant 和 D. Hilbert, 上述引文, p. 85.

$$\begin{aligned}\Phi = A_{00} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=2}^{\infty} A_{n0} R_n^0(\rho) \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n A_{nm} R_n^m(\rho) \cos m\theta.\end{aligned}\quad (12)$$

系数 A_{nm} 是 Y_1^* 的函数，并已在第二项中引入因子 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ，以便简化最后的公式。

如果象差充分小，则高斯焦点的归一化强度可用这些系数 A 表示为简单形式。将 (12) 式代入 § 9.1(21) 式，并用正交关系式 (3)，则有

$$\begin{aligned}\bar{\Phi} = A_{00}, \\ \bar{\Phi}^2 = A_{00}^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{A_{nm}^2}{n+1}.\end{aligned}\quad (13)$$

第一个关系式意味着 A_{00} 代表波阵面落后于高斯参考球的平均推迟。第二个关系式是正交函数集 $R_n^m(\rho) \cos m\theta$ 的“帕塞瓦公式”。将 (13) 式代入 § 9.1(22) 式，得出高斯焦点的归一化强度为

$$i(P_1^*) = 1 - \frac{2\pi^2}{\lambda^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{A_{nm}^2}{n+1}.\quad (14)$$

用圆多项式展开的显著优点，与不同级的象差彼此“平衡”以便获得最大强度这一重要问题有关。假定用单个“幂级数”项

$$\Phi = A'_{nm} \rho^n \cos^m \theta \quad (15)$$

代表象差，式中 A'_{nm} 是一个波长数量级或更小的常数。我们要问是否可能通过引入较低级的象差来增加强度 $i(P_1^*)$ 。更确切地说，我们希望在表达式

$$\Phi' = A'_{nm} \rho^n \cos^m \theta + \sum_{p < n} \sum_{q < p} A'_{pq} \rho^p \cos^q \theta \quad (16)$$

中选择常数 A'_{pq} ，使得高斯焦点的强度尽可能大。

有了对这些常数 A'_{pq} 的任意一种特定选择，还可以把象差函数 (16) 式用圆多项式表示为以下的形式：

$$\Phi' = \varepsilon_{nm} A_{nm} R_n^m(\rho) \cos m\theta$$

$$+ \sum_{p < n} \sum_{q < p} \varepsilon_{pq} A_{pq} R_p^q(\rho) \cos q\theta, \quad (17)$$

式中

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_{nm} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ 当 } m = 0, n \neq 0 \text{ 时,} \\ = 1, \quad \text{其他.} \end{array} \right\} \quad (18)$$

这时根据(5)式, (17)式中 ρ 的最高次幂即 ρ^n 的系数为 $\frac{n!}{[\frac{1}{2}(n+m)]! [\frac{1}{2}(n-m)]!}$, 因此通过比较(16)和(17)式中 ρ^n 的系数得出,

$$\frac{n!}{[\frac{1}{2}(n+m)]! [\frac{1}{2}(n-m)]!} \varepsilon_{nm} A_{nm} = A'_{nm}. \quad (19)$$

这时因 A'_{nm} 已定, 从而 A_{nm} 亦已定, 由(14)式得出, 取(17)式中求和号下的所有系数恒为零就得到 P_1^* 点的最大强度. 于是象差函数变为

$$\Phi' = \varepsilon_{nm} A_{nm} R_n^m(\rho) \cos m\theta, \quad (20)$$

这时 P_1^* 点的强度为

$$i(P_1^*) = 1 - \frac{2\pi^2}{\lambda^2} \frac{A_{nm}^2}{n+1}, \quad (21)$$

A_{nm} 由(19)式用系数 A'_{nm} 给出. 这时很明显, 在展开式(12)的单个象差项 $A_{nm} R_n^m(\rho) \cos m\theta$ 中, 已经将若干个 $A'_{pq} \rho^p \cos^q \theta$ 形式的项(其中 $p = n, n-2, \dots, m; q = m, m-2, \dots, 1$ 或 0)按这样一种方式结合起来, 使得对于一个给定的(充分小的) $\rho^n \cos^m \theta$ 系数值, 高斯焦点的归一化强度为极大值.

我们用一个简单例子说明这个结果. 假定一个系统有小量的六级球面象差 [$\Phi = A'_{60}\rho^6$], 并且假定我们能够引入数值可以控制的四级球面象差 [$A'_{40}\rho^4$] 和散焦 [$A'_{20}\rho^2$]. 我们寻找系数 A'_{40} 和 A'_{20} 的值, 使得衍射焦点的强度尽可能大. 这一类问题首先由

里西脱 (Richter)¹⁾ 研究过了, 他指出, 当选择这两个系数使得

$$\frac{A'_{40}}{A'_{60}} = -\frac{3}{2}, \quad \frac{A'_{20}}{A'_{60}} = \frac{3}{5}, \quad (22)$$

就得到最大值。一看 612 页的表 21 就知道, 这正好是多项式 $R_6^0(\rho)$ 中相应系数的比值:

$$R_6^0(\rho) = 20\rho^6 - 30\rho^4 + 12\rho^2 - 1. \quad (23)$$

可见, 在上述解释的意义上, 只要象差充分小, 引入泽尼克圆多项式就自动解决了象差的平衡问题; 而且利用位移定理还能确定衍射焦点的位置。

§9.3 初级象差的容限条件

考虑有象差存在时确定衍射象中强度分布这一困难问题以前, 先讨论估计一个光学系统所能容许的最大象差这一简单得多的问题。

由上一节的讨论明显看出, 当存在象差时, 衍射象中最大强度小于具有相同孔径和焦距的无象差系统中高斯焦点 (爱里图样中心) 处的强度。瑞利²⁾首先证明, 一个系统因有初级球面象差而使得出射光瞳处的波阵面偏离高斯参考球不到四分之一波长时, 高斯焦点处的强度减弱不到百分之二十一——光的这种损失通常是可以容许的。以后一些作者发现, 有寻常出现的其他象差存在时, 若波阵面形变小于四分之一波长, 则象的质量同样不会受到严重影响。这个结果已成为通常所说的瑞利四分之一波长定则, 它是成象系统中所能容许的象差数值的一个有效判据。当然, 就一个系统校正到合乎需要的状态而言, 这个定则只不过是个粗略的指引, 因为象上的光分布不仅取决于波阵面的最大形变, 而且取决于波阵面的形状(象差的类型)。此外, 所容许的光损失当然取决于仪

1) R. Richter, *z.f. Instrumkde.*, 45 (1925), 1.

2) Lord Rayleigh, *Phil. Mag.*, (5), 8 (1879), 403. 重载于他的 *Scientific Papers* (Cambridge University Press, 1899), I, 432—435.

器的特定用途，在某些情况下必须施加更严格的容限。

将条件 $|\Phi_{\max}| = \lambda/4$ 用于不同类型的象差时，得出衍射焦点处的强度值稍有不同。看来更恰当的是用公式表示相应于衍射焦点处强度规定值的容限判据。马雷夏尔 (Marechal)¹⁾ 研究过这类判据，他利用了参考球中心处的强度和波阵面偏离球面的方均根偏差之间存在的关系。

当象差充分小时，根据 § 9.1(24) 式，象区内 P 点处的强度可表示为

$$i(P) \sim 1 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 (\Delta\Phi_P)^2. \quad (1)$$

仿照马雷夏尔，当衍射焦点 F 处的归一化强度大于或等于 0.8 时，我们就认为系统已校正好。这时，由 (1) 式，当 $|\Delta\Phi_F| \lesssim \lambda/14$ 时， $i(F) \geq 0.8$ ，因此这一条件等价于下述要求：波阵面偏离以衍射焦点为中心的参考球的方均根偏差不超过 $\lambda/14^2$ 。

现在让我们来确定衍射焦点的位置和初级(赛德耳)象差的容限。在本章的记法中，每一初级象差代表一种具有

$$\Phi = a'_{lmn} Y_l^{*2l+m} \rho^n \cos^m \theta \quad (2)$$

1) A. Marechal, *Rev. d'Optique*, 26 (1947), 257.

2) 实际上，Marechal 条件是根据稍有不同的不等式得出的。由 § 9.1 (20) 式得出，

$$\begin{aligned} i(F) &= \frac{1}{\pi^2} \left| \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{ik\Phi_F} \rho d\rho d\theta \right|^2 \\ &\geq \frac{1}{\pi^2} \left| \int_0^1 \int_0^{2\pi} \cos(k\Phi_F) \rho d\rho d\theta \right|^2. \end{aligned}$$

这时若 $k|\Phi_F| < \pi/2$ ，即若 $|\Phi_F| < \lambda/4$ ，则在此不等式中显然可用 $1 - 1/2 \times (k\Phi_F)^2$ 代替 $\cos(k\Phi_F)$ 。此外，若选择参考球半径使得 $\Phi_F = 0$ ，则 $(\Delta\Phi_F)^2 = \overline{\Phi_F^2}$ ，而不等式变为

$$i(F) \gtrsim \left[1 - \frac{2\pi^2}{\lambda^2} (\Delta\Phi_F)^2 \right]^2. \quad (1a)$$

马雷夏尔判据是根据不等式 (1a) 得出的，但如果象差很小，这种差别显然没有多大实际意义。对我们来说，使用 (1) 式比用 (1a) 式有利之处在于它更直接与泽尼克圆多项式的极值性质有关。

形式的波阵面形变¹⁾, 式中 $2l + m + n = 4$. 令

$$A'_{lmn} = a'_{lmn} Y_1^{*2l+m} \quad (3)$$

是方便的, (2) 式变为

$$\Phi = A'_{lmn} \rho^n \cos^m \theta. \quad (4)$$

常数 A' 不难用第五章所引入的赛德耳系数 B, C, D, E 和 F 表示. 如果取 § 5.2(7) 和 (8) 式中的任意常数 λ_0 等于 1, 则 λ_1 表示光瞳平面之间的放大率, 并且如果回想起这时有 $n_1 = 1$, 则 § 5.3(7) 式中的变量 ρ 和 y_0 相应于本节的 $a\rho/\lambda_1$ 和 $-\lambda_1 Y_1^*/R$; 比较 (4) 式与 § 5.3(7) 式, 得出

$$\left. \begin{aligned} A'_{040} &= -\frac{1}{4} \left(\frac{a}{\lambda_1}\right)^4 B, \\ A'_{031} &= -\left(\frac{a}{\lambda_1}\right)^3 \left(\frac{\lambda_1 Y_1^*}{R}\right) F, \\ A'_{022} &= -\left(\frac{a}{\lambda_1}\right)^2 \left(\frac{\lambda_1 Y_1^*}{R}\right)^2 C, \\ A'_{120} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{a}{\lambda_1}\right)^2 \left(\frac{\lambda_1 Y_1^*}{R}\right)^2 D, \\ A'_{111} &= -\left(\frac{a}{\lambda_1}\right) \left(\frac{\lambda_1 Y_1^*}{R}\right)^3 E. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

在用圆多项式展开的式子中, 一个典型项代表象差²⁾

$$\Phi = e_{nm} A'_{lmn} R_n^m(\rho) \cos m\theta. \quad (6)$$

l, m 和 n 值满足 $2l + m + n = 4$ 的项(初级象差)在表 22 最后一行中示出. 可以看到这时某些赛德耳项伴随有较低次的项, 根据位移定理(§ 9.1.2), 它们引起强度分布的整体位移. 这时根据 § 9.2.2 的定理, 受到(6)式所示的象差影响的象, 在高斯焦点处有

1) 我们对幂级数表示法的系数加撇, 而对用泽尼克圆多项式表示法的系数不加撇.

2) 为了与 § 9.2 的公式一致, 这里保留了因子 e_{nm} , 除了 $m = 0, n \neq 0$ 时 e_{nm} 等于 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 外, e_{nm} 均等于 1.

表 22 初级象差的表示

象差类型	l	n	m	用(4)的形式表示	用(6)的形式表示
球面象差	0	4	0	$A'_{040}\rho^4$	$\frac{1}{\sqrt{2}} A_{040} R_4^0(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2}} A_{040}(6\rho^4 - 6\rho^2 + 1)$
彗差	0	3	1	$A'_{031}\rho^3 \cos \theta$	$A_{031} R_3^1(\rho) \cos \theta = A_{031}(3\rho^3 - 2\rho) \cos \theta$
象散	0	2	2	$A'_{022}\rho^2 \cos^2 \theta$	$A_{022} R_2^2(\rho) \cos 2\theta = A_{022}\rho^2(2 \cos^2 \theta - 1)$
象场弯曲	1	2	0	$A'_{120}\rho^2$	$\frac{1}{\sqrt{2}} A_{120} R_2^0(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2}} A_{120}(2\rho^2 - 1)$
畸变	1	1	1	$A'_{111}\rho \cos \theta$	$A_{111} R_1^1(\rho) \cos \theta = A_{111}\rho \cos \theta$

最大强度。因此，比较表 22 最后两行中的对应项，就可立即确定受到初级象差影响的象的衍射焦点坐标。我们通过仔细考虑初级球面象差来说明这一点。这一象差表示为

$$\Phi = A'_{040}\rho^4. \quad (7)$$

相应的表达式(6)为

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} A_{040} R_4^0(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2}} A_{040}(6\rho^4 - 6\rho^2 + 1). \quad (8)$$

这时如果

$$A'_{040} = \frac{6}{\sqrt{2}} A_{040}, \quad (9)$$

则根据位移定理，在两种情况中强度分布相同；但根据 § 9.1 (15) 式，其中

$$H = \frac{6A_{040}}{\sqrt{2}} = A'_{040}, \quad K = L = 0,$$

$$M = -\frac{A_{040}}{\sqrt{2}} = \frac{A'_{040}}{6},$$

即根据下述变换：

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z + 2 \left(\frac{R}{a} \right)^2 A'_{040}, \quad (10)$$

(7) 式相应的分布对(8)式相应的分布有一位移。因为与(8)式

相联系的衍射象在原点 $x = y = z = 0$ 处具有最大强度, 所以对于(7)式所示的初级球面象差, 衍射焦点 F 位于

$$x_F = y_F = 0, \quad z_F = 2 \left(\frac{R}{a} \right)^2 A'_{040} \quad (11)$$

这一点处.

(11)式所确定的点 F 有一种简单的几何解释. 设 ΔY 和 ΔZ 分别是横向和纵向的球面象差, 当光线与轴相交于高斯焦点的正侧时它们取正值. 由 § 5.1 (17) 式, 取 $\Phi = A'_{040}\rho^4$, $\rho = Y/a$, $D_1 \sim -R \sim -R'$, $X_0 = X = 0$, $n_1 = 1$, 得

$$\Delta Y = Y_1 - Y_1^* = 4 \left(\frac{R}{a} \right) \left(\frac{Y}{a} \right)^3 A'_{040}, \quad (12a)$$

因此, 由初等几何并应用上述关系, 得

$$\Delta Z = Z_1 - Z_1^* \sim \frac{R}{Y} \Delta Y = 4 \left(\frac{R}{a} \right)^2 \left(\frac{Y}{a} \right)^2 A'_{040}. \quad (12b)$$

对于边缘光线 ($Y = a$), 上式给出 $(\Delta Z)_{\max} = 4 \left(\frac{R}{a} \right)^2 A'_{040}$, 由此可见, (11)式意味着¹⁾有小量的初级球面象差存在时, 衍射焦点位于近轴焦点和边缘焦点二者的中央.

其次, 让我们确定初级球面象差的容限. 对于(6)式所表征的任一象差, 根据 § 9.2 (14) 式, 如果

$$1 - \frac{2\pi^2}{\lambda^2} \frac{A_{lmn}^2}{n+1} \geq 0.8,$$

即只要

$$|A_{lmn}| \lesssim \frac{\lambda \sqrt{n+1}}{10}, \quad (13)$$

则高斯焦点处的归一化强度将大于或等于 0.8. 特别是对于初级球面象差, 上式给出

$$|A_{040}| \lesssim 0.22\lambda,$$

1) 这里忽略了由于 § 5.1 和本节讨论中选择不同的 $*$ 方向而引起的微小影响.

或者由(9)式,

$$|A'_{040}| \lesssim 0.94\lambda. \quad (14)$$

这就是初级球面象差所要求的容限条件, 它意味着波阵面偏离高斯参考球的最大偏差必须小于波长的 0.94 倍.

对于其他初级象差, 可用严格类似的方法求出衍射焦点的位置和该象差的容限. 特别是, 有小量的初级象散存在时, 求出衍射焦点的坐标是

$$x_F = y_F = 0, \quad z_F = \left(\frac{R}{a}\right)^2 A'_{022}. \quad (15)$$

这个结果也有一种简单的物理解释. 根据(5)式和§5.3(18)式, 切向焦面和弧矢焦面的半径 R_t 和 R_s 由下式给出 (仍假定 $n_1 = 1$):

$$\frac{1}{R_t} = -\frac{4}{a^2} \left(\frac{R}{Y_1^*}\right)^2 A'_{022}, \quad \frac{1}{R_s} = 0, \quad (16)$$

因此, 两焦线的横坐标 Z_t 和 Z_s 为

$$Z_t = -\frac{Y_1^{*2}}{2R_t} = 2 \left(\frac{R}{a}\right)^2 A'_{022}, \quad Z_s = 0. \quad (17)$$

表 23 初级象差的衍射焦点位置和容限条件

象差类型	衍射焦点 F 的坐标			容限条件 [$i(F) \geq 0.8$]
	x_F	y_F	z_F	
球面象差	0	0	$2 \left(\frac{R}{a}\right)^2 A'_{040}$	$ A'_{040} \lesssim 0.94\lambda$
彗 差	0	$\frac{2}{3} \left(\frac{R}{a}\right) A'_{031}$	0	$ A'_{031} \lesssim 0.60\lambda$
象 散	0	0	$\left(\frac{R}{a}\right)^2 A'_{022}$	$ A'_{022} \lesssim 0.35\lambda$
象场弯曲	0	0	$2 \left(\frac{R}{a}\right)^2 A'_{120}$	—
畸 变	0	$\left(\frac{R}{a}\right) A'_{111}$	0	—

所以(15)式意味着,有小量的初级象散存在时,衍射焦点位于切向焦线和弧矢焦线二者的中央.

由于初级象场弯曲和初级畸变分别用 ρ 的二次项和一次项来表示,因此根据位移定理得出,这些象差的唯一影响是与无象差的象相联系的三维分布“整体移动”. 所以有小量的初级象场弯曲或初级畸变存在时,衍射焦点处的归一化强度 i 为 1, 但衍射焦点与高斯象点不重合.

表 23 中概括了有关初级象差的一些结果.

§ 9.4 与单一象差相联系的衍射图样

现在考虑存在 § 9.2(11) 展开式中某一单项

$$\Phi = a_{lm} Y_1^{*l+m} R_n^m(\rho) \cos m\theta \quad (1)$$

所表示的象差时的衍射象. 同前, 我们不写出对 Y_1^* 的明显依赖关系, 而令

$$a_{lm} = \frac{2\pi}{\lambda} a_{lm} Y_1^{*l+m} = \frac{2\pi}{\lambda} \varepsilon_{lm} A_{lm}. \quad (2)$$

又令

$$C = - \frac{i\pi A}{\lambda} \left(\frac{a}{R}\right)^2 e^{i\left(\frac{R}{a}\right)^2 u}. \quad (3)$$

于是 § 9.1(6) 式的衍射积分变为

$$U(u, v, \phi) = \frac{C}{\pi} \times \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{i[-v\rho \cos(\theta-\psi) - \frac{1}{2}u\rho^2 + a_{lm} R_n^m(\rho) \cos m\theta]} \rho d\rho d\theta. \quad (4)$$

(4)式的积分可展开为无穷级数, 其方法是利用雅科毕恒等式 [§ 8.8 (29) 式]

$$e^{ix\cos\phi} = J_0(z) + 2 \sum_{s=1}^{\infty} i^s J_s(z) \cos s\phi, \quad (5)$$

把 $e^{-i v \rho \cos(\theta-\psi)}$ 和 $e^{i a_{lm} R_n^m(\rho) \cos m\theta}$ 两项都展开. 将这两个展开式相乘, 得到

$$\begin{aligned}
& e^{i[-v\rho \cos(\theta-\phi) + \alpha_{lm} R_n^m(\rho) \cos m\theta]} \\
& = 4 \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{s'=0}^{\infty} i^s (-i)^{s'} J_s [\alpha_{lm} R_n^m(\rho)] J_{s'}(v\rho) \cos ms\theta \\
& \quad \times \cos [s'(\theta - \phi)], \tag{6}
\end{aligned}$$

式中求和号上带撇的意思是 $s = 0$ 和 $s' = 0$ 的项应各带有因子 $1/2$. 将这个二重级数代入 (4) 式，并对 θ 逐项积分. 这就得出

$$\begin{aligned}
U(u, v, \phi) & = 4C \sum_{s=0}^{\infty} (-i)^{(m-1)s} \cos ms\phi \\
& \quad \times \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}iu\rho^2} J_s [\alpha_{lm} R_n^m(\rho)] J_m(v\rho) \rho d\rho, \tag{7}
\end{aligned}$$

$s = 0$ 的项仍带有因子 $1/2$.

由于我们对小的象差 (α 小) 感兴趣，因此把积分号内的 $J_s [\alpha_{lm} R_n^m(\rho)]$ 项展开为幂级数，并按照 α_{lm} 的幂重新整理所得到的表达式. 这就得出

$$\begin{aligned}
U(u, v, \phi) & = C [U_0 + i\alpha_{lm} U_1 + (i\alpha_{lm})^2 U_2 \\
& \quad + (i\alpha_{lm})^3 U_3 + (i\alpha_{lm})^4 U_4 + \dots], \tag{8a}
\end{aligned}$$

式中

$$\left. \begin{aligned}
U_0 & = 2 \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}iu\rho^2} J_0(v\rho) \rho d\rho, \\
U_1 & = 2(-i)^m \cos m\phi \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}iu\rho^2} R_n^m(\rho) J_m(v\rho) \rho d\rho, \\
U_2 & = \frac{1}{2!} \left\{ \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}iu\rho^2} [R_n^m(\rho)]^2 J_0(v\rho) \rho d\rho \right. \\
& \quad \left. + i^{2m} \cos 2m\phi \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}iu\rho^2} [R_n^m(\rho)]^2 J_{2m}(v\rho) \rho d\rho \right\}, \\
U_3 & = \frac{1}{2 \cdot 3!} \left\{ 3(-i)^m \cos m\phi \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}iu\rho^2} [R_n^m(\rho)]^3 J_m(v\rho) \rho d\rho \right. \\
& \quad \left. + (-i)^{3m} \cos 3m\phi \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}iu\rho^2} [R_n^m(v\rho)]^3 J_{3m}(v\rho) \rho d\rho \right\}, \\
U_4 & = \frac{1}{2^2 \cdot 4!} \left\{ 3 \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}iu\rho^2} [R_n^m(\rho)]^4 J_0(v\rho) \rho d\rho \right. \\
& \quad \left. + 4i^{2m} \cos 2m\phi \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}iu\rho^2} [R_n^m(\rho)]^4 J_{2m}(v\rho) \rho d\rho \right. \\
& \quad \left. + i^{4m} \cos 4m\phi \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}iu\rho^2} [R_n^m(\rho)]^4 J_{4m}(v\rho) \rho d\rho \right\}.
\end{aligned} \right\} \tag{8b}$$

奈波尔已发现，式中 u 和 α_{lmm} 都是 1 的数量级，展开式 (8a) 中约四项强度就足以精确到百分之几的范围以内。

求 (8b) 式中积分值可如下进行：我们可用径向多项式表示因子 $e^{-\frac{1}{2}iu\rho^2}$ ，其方法是利用下述熟知的出自包尔 (Bauer)¹⁾ 的公式

$$e^{iz\cos\phi} = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} \sum_{s=0}^{\infty} i^s (2s+1) J_{s+\frac{1}{2}}(z) P_s(\cos\phi), \quad (9)$$

式中所有的 P 都是勒让德多项式。如果令 $\cos\phi = 2\rho^2 - 1$ ，并利用关系式 $P_s(2\rho^2 - 1) = R_{2s}^0(\rho)$ [§ 9.2(8)]，由此得出

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{2}iu\rho^2} &= e^{-\frac{1}{4}iu} e^{-\frac{1}{4}iu(2\rho^2-1)} \\ &= e^{-\frac{1}{4}iu} \sqrt{\frac{2\pi}{u}} \sum_{s=0}^{\infty} (-i)^s (2s+1) \\ &\quad \times J_{s+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}u\right) R_{2s}^0(\rho). \end{aligned} \quad (10)$$

把(10)式代入 (8b) 式中，得到一些积分，其中每一个积分由径向多项式的乘积再乘以一个贝塞耳函数组成。这时，只要每一个上述径向多项式的乘积均可表示为线性组合 $\sum_p A_p R_p^m(\rho)$ 的形式，

其中 m 等于此乘积所乘的贝塞耳函数的阶，则上述积分可用 § 9.2 的公式(9)

$$\int_0^1 R_n^m(\rho) J_m(v\rho) \rho d\rho = (-1)^{\frac{n-m}{2}} \frac{J_{n+1}(v)}{v} \quad (11)$$

求值。要得出系数 A_p 的一般表达式是不容易的，但以后从某些例子中将看到，如果 m 和 n 不太大，利用 612 页的表 21 就不难建立这样的线性关系。关于更普遍情况的方法讨论，我们介绍读者参看奈波尔的论文。

在无象差的波的特殊情况下，把 (10) 式代入 (7) 式，得出

1) 例如参看 G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* (Cambridge University Press, 2nd Ed., 1944), p. 368.

$$\begin{aligned}
U(u, v, \phi) &= 2Ce^{-\frac{1}{4}iu} \sqrt{\frac{2\pi}{u}} \sum_{s=0}^{\infty} (-i)^s (2s+1) J_{s+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4}u \right) \\
&\quad \times \int_0^1 R_{2s}^0(\rho) J_0(v\rho) \rho d\rho \\
&= 2Ce^{-\frac{1}{4}iu} \sqrt{\frac{2\pi}{u}} \sum_{s=0}^{\infty} (i)^s (2s+1) J_{s+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4}u \right) \\
&\quad \times \frac{J_{2s+1}(v)}{v}, \tag{12}
\end{aligned}$$

式中已用了(11)式。虽然形式上不同，但这个展开式与§8.8.1给出的洛梅耳级数展开式等价。

由展开式(8)可立即导出衍射象的某些普遍性质。可以看出，以 $\phi + 2\pi\mu/m$ ($\mu = 1, 2, \dots, m$) 代 ϕ 时 U 保持不变；所以 z 轴是 m 重对称轴。而且通过 z 轴并与 $x = 0$ 平面夹角为 $\pi\mu/m$ 的平面是对称面。当然， $m = 0$ 时有旋转对称性。

其次，考虑相对于 $z = 0$ 平面的对称性。我们看到以 $-u$ 代 u 时，(8)式中所有积分都变为它们的共轭。这时，如果 m 是奇数，则这些积分所乘的系数都是实数。所以在这种情况下， $U(u, v, \phi)$ 变为它的共轭，结果强度保持不变。因此，如果 m 是奇数，则强度分布相对于 $z = 0$ 平面对称。另一方面，如果 m 是偶数（但 $m \neq 0$ ），则那些含有因子 $\cos 2\mu m \phi$ (μ 是整数) 的系数都是实数，而其他含有因子 $\cos(2\mu + 1)m\phi$ 的系数都是纯虚数。所以，如果以 $-u$ 代 u 并且同时以 $\phi + \pi/m$ 代 ϕ ，则这时 U 变为它的共轭。因此，如果 m 是偶数但不为零，则 $z = \text{常数}$ 的平面内任一点处的强度与经 $z = 0$ 平面反射再绕 z 轴转 π/m 角度而得出的那一点处的强度相同。由此得出，虽曾指出 z 轴一般是 m 重对称轴，但 m 是偶数时，它却是相对于 $z = 0$ 平面内图样的 $2m$ 重对称轴。 $m = 0$ (球面象差) 时，衍射象相对于 $z = 0$ 平面是不对称的。

最后，我们看到，当象差常数 α_{lmm} 的符号改变时，如果 m 是

偶数时以 $-u$ 代 u , 以及 m 是奇数时以 $\phi + \pi$ 代 ϕ , 则强度分布不变.

下面简单研究一下当系统有小量的初级象差时象的结构.

§ 9.4.1 初级球面象差

在这种情形中, $l = m = 0$ 和 $n = 4$. 象差函数与 θ 无关, 并且三维衍射象对于主方向 $v = 0$ 具有旋转对称性.

根据(8)式, 衍射积分按 α 的幂的展开式为

$$U(u, v, \phi) = C[U_0 + i(\alpha_{00})U_1 + (i\alpha_{00})^2 U_2 + \dots], \quad (13)$$

式中 U_0 代表无象差的象的扰动, U_1, U_2, \dots 由(8b)式中其他表达式给出, 其中 $m = 0, n = 4$. 特别是

$$U_1 = 2 \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}iu\rho^2} R_4^0(\rho) J_0(v\rho) \rho d\rho. \quad (14)$$

以(10)式代替 $e^{-\frac{1}{2}iu\rho^2}$, 得出

$$\begin{aligned} U_1 &= 2e^{-\frac{1}{4}iu} \sqrt{\frac{2\pi}{u}} \sum_{s=0}^{\infty} (-i)^s (2s+1) J_{s+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}u\right) \\ &\times \int_0^1 R_{2s}^0(\rho) R_4^0(\rho) J_0(v\rho) \rho d\rho. \end{aligned} \quad (15)$$

为了求出右方积分的值, 如前所述, 径向多项式的乘积将由上标等于贝塞耳函数的阶(此时为零)的径向多项式的线性组合来代替. 利用 § 9.2(8) 式

$$R_{2s}^0(\rho) = P_s(2\rho^2 - 1), \quad (16)$$

和某些涉及勒让德多项式的熟知关系, 不难求出这种线性组合. 我们有

$$R_{2s}^0(\rho) R_4^0(\rho) = P_s(2\rho^2 - 1) P_2(2\rho^2 - 1). \quad (17)$$

现在 $P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1)$, 因此(17)式右方可写为

$$P_s(t) P_2(t) = \frac{3}{2} t^2 P_s(t) - \frac{1}{2} P_s(t). \quad (18)$$

多次应用递推关系式¹⁾

$$tP_s(t) = \frac{1}{2s+1} [(s+1)P_{s+1}(t) + sP_{s-1}(t)], \quad (19)$$

由此得出

$$P_2(t)P_s(t) = a_s P_{s+2}(t) + b_s P_s(t) + c_s P_{s-2}(t), \quad (20)$$

式中

$$\begin{aligned} a_s &= \frac{3}{2} \frac{(s+2)(s+1)}{(2s+3)(2s+1)}, \quad b_s = \frac{(s+1)s}{(2s+3)(2s-1)}, \\ c_s &= \frac{3}{2} \frac{s(s-1)}{(2s+1)(2s-1)}. \end{aligned} \quad (21)$$

因此(17)式变为

$$R_{2s}^0(\rho)R_4^0(\rho) = a_s R_{2s+4}^0(\rho) + b_s R_{2s}^0(\rho) + c_s R_{2s-4}^0(\rho). \quad (22)$$

最后, 把(22)式代入(15)式中, 并利用(11)式, 由此得出

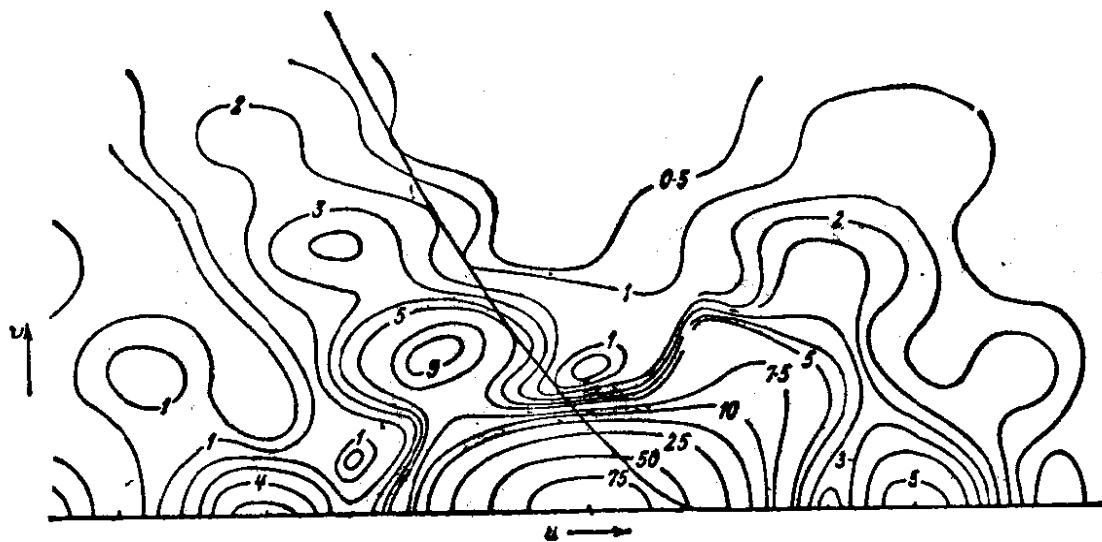
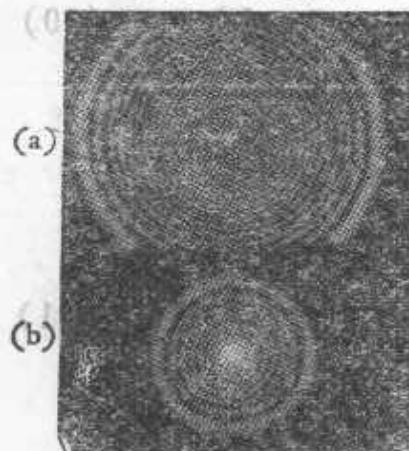


图 9.3 存在初级球面象差 $\Phi = 0.48\lambda\rho^4$ 时在一子午面内的等照线。粗线表示几何焦散。无象差的象的中心处强度已归一化为 100。在最佳接收平面内的斯特列耳强度为 0.95 [引自 F. Zernike 和 B. R. A. Nijboer, 摘稿于 *La Théorie des Images Optiques* (Paris, Revue d'Optique, 1949), p. 232.]

1) 例如参看 E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis* (Cambridge University Press, fourth ed. 1940), p. 308.

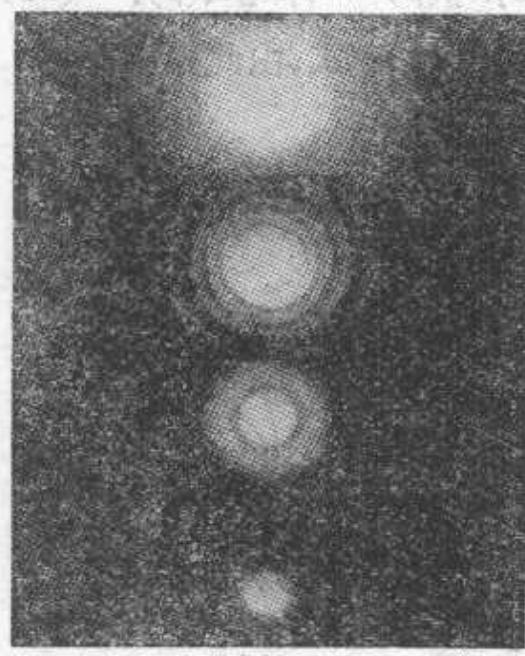
$$(21) \quad U_1 = 2e^{-\frac{1}{4}iu} \sqrt{\frac{2\pi}{u}} \frac{1}{v} \sum_{s=0}^{\infty} (i)^s (2s+1) J_{s+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} u \right) \\ \times [a_s J_{2s+5}(v) + b_s J_{2s+1}(v) + c_s J_{2s-3}(v)]. \quad (23)$$

用类似的方法¹⁾可得出 U_2, U_3, \dots 的级数展开式. 然后可利

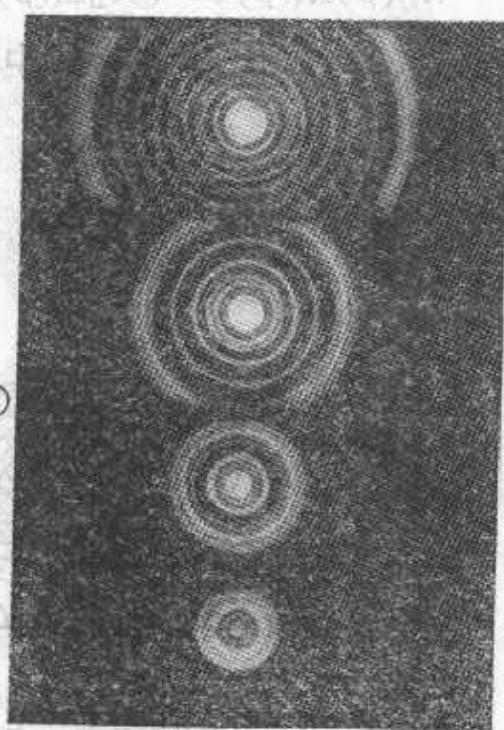


(a)

图 9.4 存在初级球面象差 $\Phi = 16\lambda\rho^4$ 时在边缘焦平面内 [(a)] 和在几何明晰圈的平面内 [(b)] 的象
(引自 K. Nienhuis, Thesis, University of Groningen
1948, p. 56.)



(a)



(b)

图 9.5 存在初级球面象差 $\Phi = 17.5\lambda\rho^4, 8.4\lambda\rho^4, 3.7\lambda\rho^4$ 和 $1.4\lambda\rho^4$ 时在高斯焦平面内 [(a)] 和在几何明晰圈的平面内 [(b)] 的象 [(b) 的标度是 (a) 的三倍] (引自 K. Nienhuis, Thesis, University of Groningen, 1948, p. 56.)

1) 详细讨论见 F. Zernike 和 B. R. A. Nijboer, 撰稿于 *La Théorie des Images Optiques* (Paris, Revue d'Optique, 1949), p. 227.

用这些展开式计算象区内若干点处的强度 $I = |U|^2$, 并作出等照度线(等强度线).当然,在垂直于主方向 $\nu = 0$ 的任一平面内,等照度线是一些圆.

图 9.3 画出了初级球面象差 $\Phi = 0.48\lambda\rho^4$ 时在一子午面内的等照度线,而图 9.4 和图 9.5 中的复制照片显示出球面象差稍大时在不同的接收平面内的象的外貌¹⁾.

§ 9.4.2 初级彗差

这时有 $l = 0$, $n = 3$, $m = 1$. 根据 621 页的表 23, 衍射焦点在 $z = 0$ 平面内, 而在此平面内的扰动由下式给出,

$$U(0, \nu, \phi) = C[U_0(0, \nu, \phi) + (i\alpha_{031})U_1(0, \nu, \phi) + (i\alpha_{031})^2U_2(0, \nu, \phi) + \dots]. \quad (24)$$

有了 $u = 0$, 由 (8b) 式定义的积分 U_0 就代表在无象差系统的焦平面内的扰动 $2J_1(\nu)/\nu$ (爱里图样), 而 U_1 的值可用 (11) 式立即求出. 为了求出 U_2, U_3, \dots 的值, 必须再一次把圆多项式的乘积表示为这种多项式的适当线性组合. 特别是, 可利用 621 页的表 21 来证实

$$\begin{aligned} (R_3^1)^2 &= \frac{1}{4} R_0^0 + \frac{1}{20} R_2^0 + \frac{1}{4} R_4^0 + \frac{9}{20} R_6^0 \\ &- \frac{2}{5} R_2^2 + \frac{3}{5} R_6^2. \end{aligned} \quad (25)$$

把这些关系式用于 (8b) 的 U_2 表达式中, 并应用 (11) 式, 即可求出 U_2 的积分值, 我们总共有

1) 当象差与波长相比并不小时, 展开式(13)不适用于计算强度. 对于初级球面象差为几个波长时在一子午面内的等照度线, A. Maréchal 曾利用机械积分器确定, 并发表于 E. H. Linfoot, *Recent Advances in Optics* (Oxford, Clarendon Press, 1955), pp. 60—61, 和 M. Françon, 撰稿于 *Encyclopedia of Physics*, XXIV (Ed. S. Flügge, Berlin, Springer, 1956), pp. 321—322; J. Focke 用渐近逼近法确定, 见 *Optica Acta* 3 (1956), 110. 又见 J. Picht, *Ann. d. Physik*, (4), 77 (1925), 685.

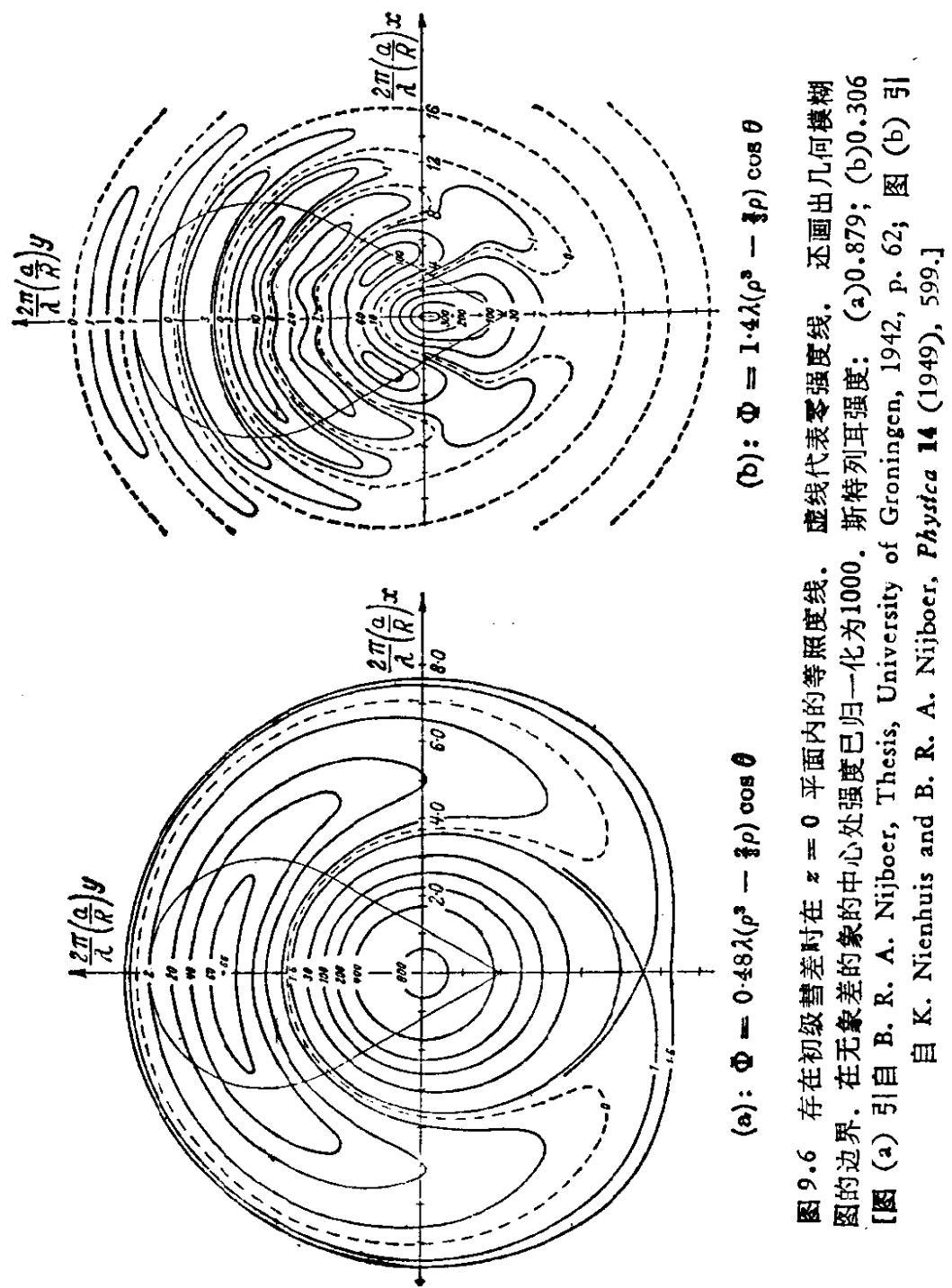


图 9.6 存在初级彗差时在 $z=0$ 平面内的等照度线。虚线代表零强度线。还画出几何模糊图的边界。在无象差的象的中心处强度已归一化为1000。斯特列耳强度: (a)0.879; (b)0.306
[图 (a) 引自 B. R. A. Nijboer, Thesis, University of Groningen, 1942, p. 62; 图 (b) 引自 K. Nienhuis and B. R. A. Nijboer, *Physica* **14** (1949), 599.]

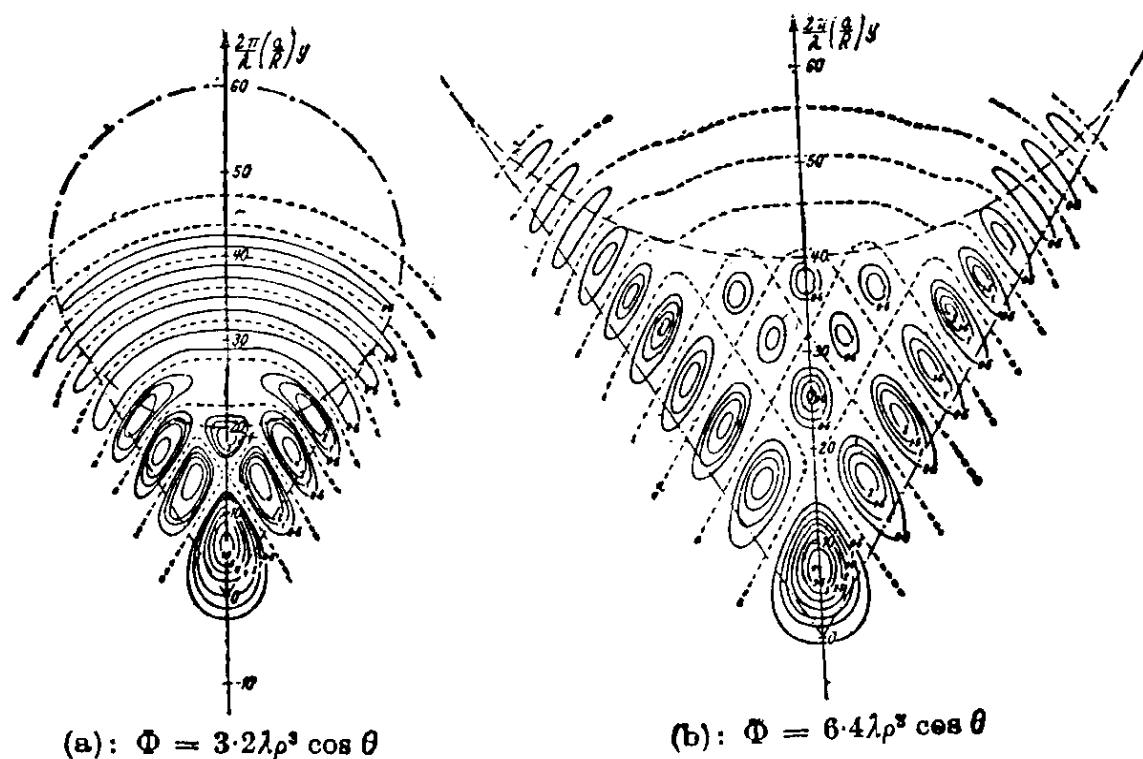


图 9.7 存在初级彗差时在 $z = 0$ 平面内的等照度线。
在无象差的象的中心处强度已归一化为 100 [引自 R. Kingslake, *Proc. Phys. Soc.* **61** (1948), 147.]

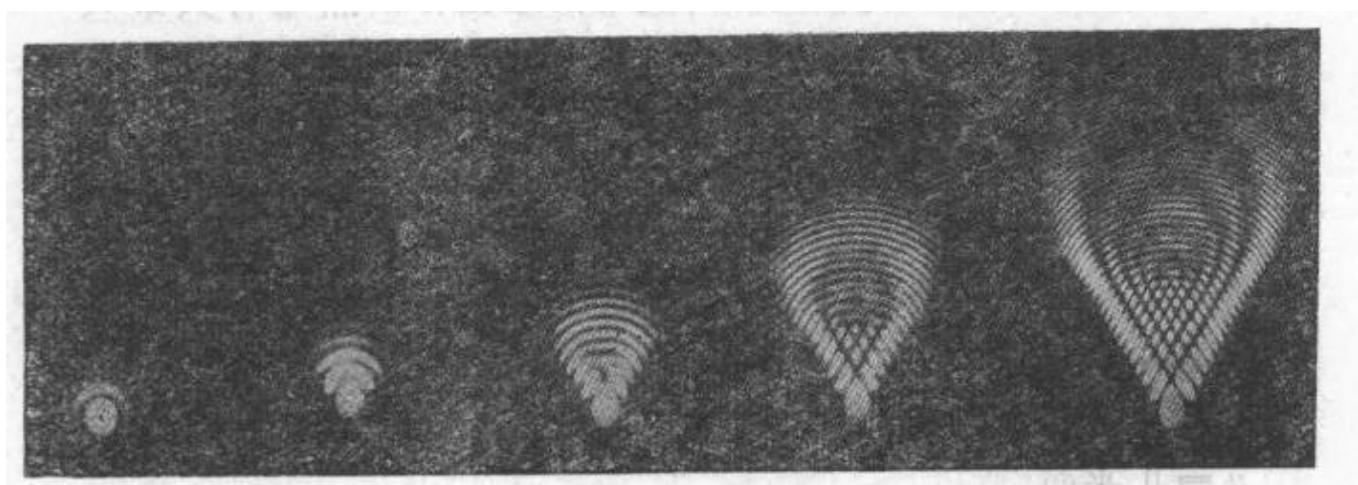


图 9.8 存在彗差 $\Phi = 0.3\lambda\rho^3 \cos \theta, \lambda\rho^3 \cos \theta, 2.4\lambda\rho^3 \cos \theta, 5\lambda\rho^3 \cos \theta, 10\lambda\rho^3 \cos \theta$ 时在高斯焦平面内的象 (引自 K. Nienhuis, Thesis, University of Groningen, 1948, p. 40.)

$$\left. \begin{aligned}
 U_0(0, \nu, \phi) &= \frac{2J_1(\nu)}{\nu}, \\
 U_1(0, \nu, \phi) &= i \cos \phi \frac{2J_4(\nu)}{\nu}, \\
 U_2(0, \nu, \phi) &= \frac{1}{2\nu} \left\{ \frac{1}{4} J_1(\nu) - \frac{1}{20} J_3(\nu) + \frac{1}{4} J_5(\nu) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{9}{20} J_7(\nu) - \cos 2\phi \right. \\
 &\quad \times \left. \left[\frac{2}{5} J_3(\nu) + \frac{3}{5} J_7(\nu) \right] \right\}.
 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

有不同数值的初级彗差时的等照度线如图 9.6 和 9.7 所示。图 9.6 的数据是由级数展开算出的，图 9.7 的数据是用数值积分算出的。图 9.8 给出了受初级彗差影响的象的照片。这些图形表明，当象差具有波长的数量级时，这些象既不类似于爱里图样，也不类似于几何光学所预示的图样。当象差增大时，真实的象很快变成几何光学所示的形状，但是被一系列的暗带所分割；这可解释为由孔的直径上相对的点所衍射的光线干涉而引起的。

图 9.6 也说明了 § 9.2 所确立的一般结果，即一个小的象差用圆多项式表示时，强度图样有位移以致在坐标原点处有其最大值。

§ 9.4.3 初级象散

有小量初级象散的效应可用类似的方法来研究。这时有 $l = 0, n = m = 2$ ，如 § 9.3 所述，衍射焦点在两焦线的中央。考虑在 中央平面即过该点并垂直于主方向的平面内的光分布。当象差用适当的圆多项式 $[A_{022}R_2^2(\rho)\cos 2\theta]$ 表示时，中央平面就是 $u = 0$ 平面。

中央平面内的扰动由下式给出，

$$\begin{aligned}
 U(0, \nu, \phi) &= C [U_0(0, \nu, \phi) + (i\alpha_{022})U_1(0, \nu, \phi) \\
 &\quad + (i\alpha_{022})^2U_2(0, \nu, \phi) + \dots],
 \end{aligned} \quad (27)$$

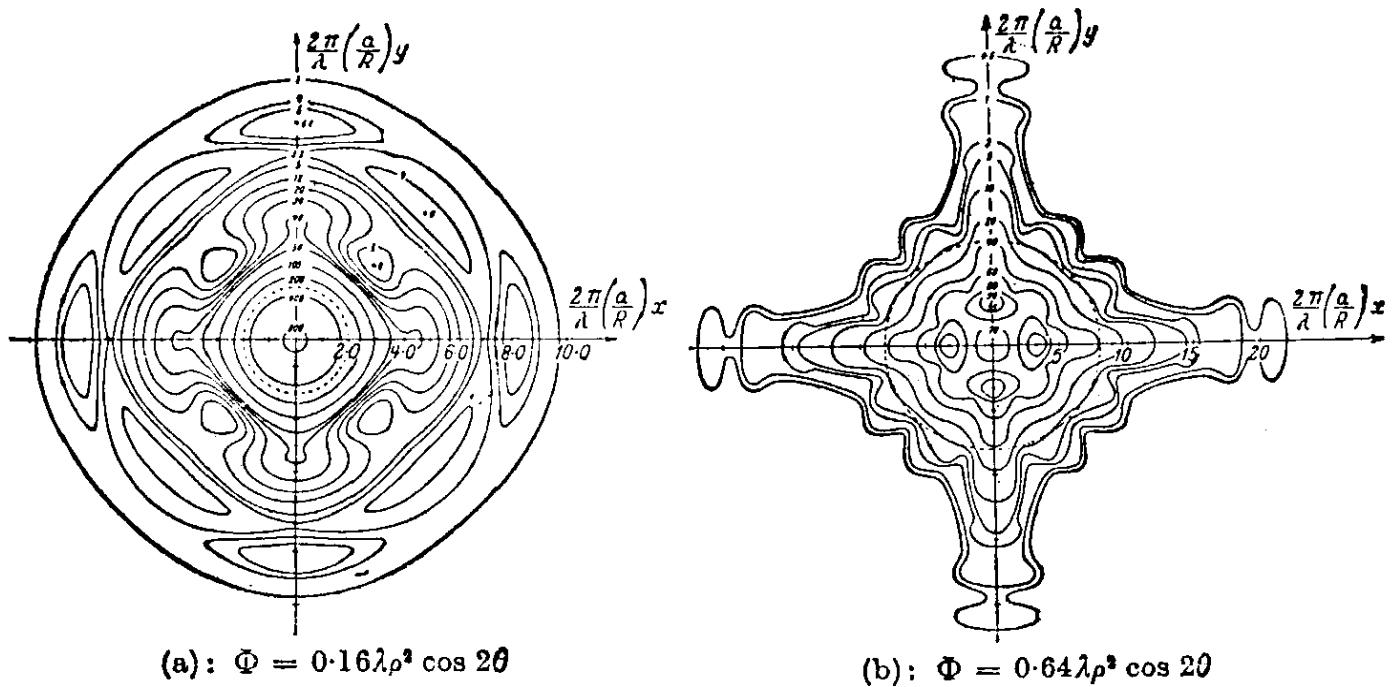


图 9.9 存在初级象散时在中央平面内的等照度线。虚圆代表几何模糊图的边界。在无象差的象的中心处强度已归一化为 1000。斯特列耳强度: (a) 0.84; (b) 0.066 [图 (a) 引自 B. R. A. Nijboer, Thesis University of Groningen, 1942, p. 55; 图 (b) 引自 K. Nienhuis, Thesis, University of Groningen, 1948, p. 13.]

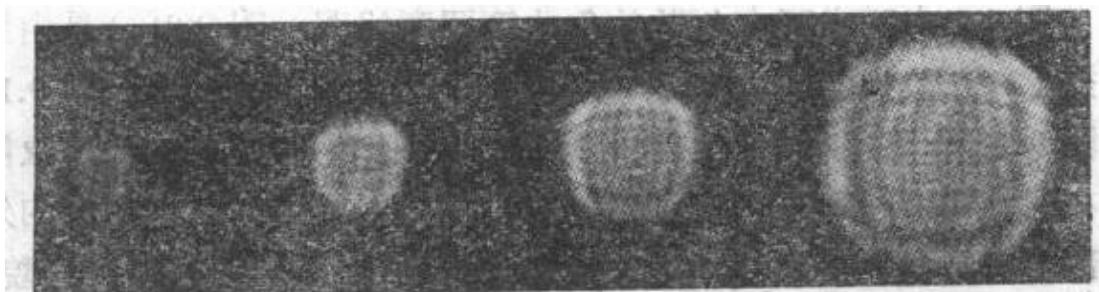


图 9.10 存在初级象散 $\Phi = 1.4\lambda\rho^2 \cos 2\theta, 2.7\lambda\rho^2 \cos 2\theta, 3.5\lambda\rho^2 \cos 2\theta, 6.5\lambda\rho^2 \cos 2\theta$ 时在中央平面内的象 (引自 K. Nienhuis, Thesis, University of Groningen, 1948, p. 32.)

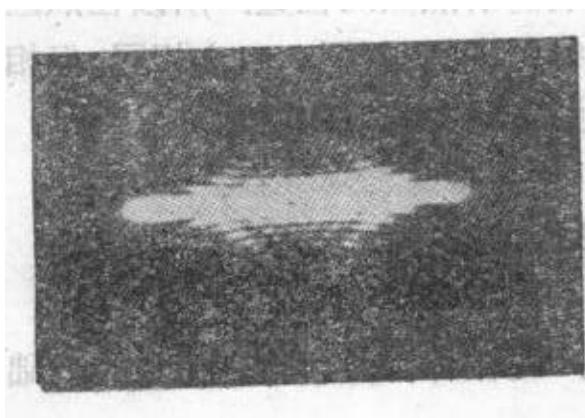


图 9.11 存在初级象散 $\Phi = 2.7\lambda\rho^2 \cos 2\theta$ 时, 在包含一焦线的平面内的象 (引自 K. Nienhuis, Thesis, University of Groningen, 1948, p. 32.)

式中 $U_0(0, \nu, \phi)$ 同以前一样代表爱里图样分布，而 $U_1(0, \nu, \phi)$ 的值可用 (11) 式立即求出。为了求出 U_2 的值，我们利用恒等式

$$\left. \begin{aligned} (R_2^2)^2 &= \frac{1}{3} R_0^6 + \frac{1}{2} R_2^6 + \frac{1}{6} R_4^6, \\ &= R_4^4, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

并同以前一样进行计算。总共得到

$$\left. \begin{aligned} U_0(0, \nu, \phi) &= \frac{2J_1(\nu)}{\nu}, \\ U_1(0, \nu, \phi) &= -2\cos 2\phi \frac{2J_3(\nu)}{\nu}, \\ U_2(0, \nu, \phi) &= \frac{1}{2\nu} \left\{ \frac{1}{3} J_1(\nu) - \frac{1}{2} J_3(\nu) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} J_5(\nu) + \cos 4\phi J_5(\nu) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

图 9.9 中画出了有象散的象的等照度线图。图 9.9(a) 是由展开式 (27) 算出的，其中已计及直至包含 α 四次幂的项。图 9.10 和图 9.11 给出了有象散的象的照片。可以看出，只有小量象散存在时，中央平面内的等照度线在中心附近是圆形的，但在象的外圈部分有更复杂的形状。当象散增大时，象具有类似软垫的外貌，并且被一些干涉条纹跨于其上。

至于其余两种初级象差（象场弯曲和畸变），我们已经知道它们不影响三维象的结构，而仅影响衍射焦点的位置。所以在焦区内的等照度线图与无象差的象的等照度线图（图 8.41）相同，但相对于高斯焦点有一位移，其数值如 621 页的表 23 所示。

§9.5 扩展物的成象

前面一直涉及的是点源的象。现在将在傅里叶变换法的基础

上描述有关扩展物成象的某些一般方法。这些方法主要是由迪菲厄 (Duffieux)¹⁾ 而部分是在朗斯罗 (Lansraux) 的合作下发展起来的, 后来许多作者²⁾ 已推广并应用于一些特殊问题。

我们分别考虑相干光成象和不相干光成象。

§ 9.5.1 相干照明

我们分别用两套坐标轴彼此平行并且原点在同一轴的两点上的笛卡儿坐标 (x_1, y_1) 和 (ξ, η) 表示高斯象平面和出射光瞳平面内的点。物平面内的点可方便地用标度已归一化的坐标 (x_0, y_0) 来表示, 即如果 (x_0, y_0) 是某一物点的笛卡儿坐标, M 是横向放大率, 则

$$x_0 = MX_0, \quad y_0 = MY_0, \quad (1)$$

因此, 这时一个物点和它的高斯象点有相同的坐标数值³⁾。

系统的成象特性可用透射函数 $K(x_0, y_0; x_1, y_1)$ 来表征, 它定义为 x_0y_0 平面每单位面积由于物点 (x_0, y_0) 处的单位振幅和零位相的扰动在高斯象平面内 (x_1, y_1) 点处引起的复振幅。当然, 透射函数也取决于光的波长 λ , 但因将只涉及到单色光, 所以不必考虑这种依赖关系。

设 $U_0(x_0, y_0)$ 代表物平面内的复扰动。 (x_0, y_0) 处的面元对于象平面内 (x_1, y_1) 点处扰动所作的贡献为 $dU_1(x_1, y_1) = U_0(x_0, y_0)K(x_0, y_0; x_1, y_1)dx_0dy_0$ 。因而 (x_1, y_1) 处的总扰动为

$$U_1(x_1, y_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(x_0, y_0)K(x_0, y_0; x_1, y_1)dx_0dy_0. \quad (2)$$

1) P. M. Duffieux, *L'Intégrale de Fourier et ses Applications à l'Optique* (Rennes, 1946); P. M. Duffieux and G. Lansraux, *Rev. d'Optique*, **24** (1945), 65, 151, 215.

2) 例如参看 A. Blanc-Lapierre, *Ann. de l'Inst. Henri Poincaré*, **13** (1953), 245; H. H. Hopkins, *Proc. Roy. Soc. A*, **217** (1953), 408; 同上, **A**, **231** (1955), 91; *Proc. Phys. Soc. B*, **69** (1956), 562; K. Miyamoto, *Progress in Optics*, Vol. I ed. E. Wolf (Amsterdam, North Holland, Publishing Company and New York, J. Wiley and Sons, 1961), 41.

3) (x_0, y_0) 和 (x_1, y_1) 可看作是 § 5.2 中选任意常数 $I_1 = C = 1$ 时的赛德耳变量。

积分只是在形式上遍及无穷域, 因为在那些没有光传送到系统的象空间中去的面积上, $U_0 K$ 为零.

这时讨论的是一些点源, 我们用出射光瞳内的复扰动来说明系统的特性, 它是由象差函数和一个振幅因子表征的, 后者在有适中孔径的系统内假定为常数. 利用这些量不难找到透射函数的表达式. 为此, 首先考虑光源简化为一个在点 $x_0 = x'_0$, $y_0 = y'_0$ 处具有单位强度及零位相的点源, 即

$$U_0(x_0, y_0) = \delta(x_0 - x'_0)\delta(y_0 - y'_0) \quad (3)$$

时(2)式的极限形式, 式中 δ 是狄喇克 δ 函数[参看附录 4]. 于是由(2)式给出

$$U_1(x_1, y_1) = K(x'_0, y'_0; x_1, y_1), \quad (4)$$

即透射函数 K 表示由点源(3)引起的扰动. 取中心在高斯象点 $x'_1 = x'_0$, $y'_1 = y'_0$ 处的高斯参考球. 设 R 为这个参考球的半径, 并设

$$H(x'_0, y'_0; \xi, \eta) = \frac{i}{\lambda} G(x'_0, y'_0; \xi, \eta) \frac{e^{-ikR}}{R} \quad (5)$$

为点源(3)在这个球上某一点 (ξ, η) 处所引起的扰动. 除了一个附加因子 $\pi/2$ 以外, G 的位相就是系统的象差函数 Φ , 而 G 的振幅则是成象的波振幅中不均匀性的量度. 在(5)式右方已引入了因子 i/λ 以便简化后面的公式. 现在根据惠更斯-菲涅耳原理, 象平面内的扰动同高斯参考球上的扰动按下述公式相联系 (假定衍射角很小):

$$U_1(x_1, y_1) = -\frac{i}{\lambda} \iint H(x'_0, y'_0; \xi, \eta) \frac{e^{iks}}{s} d\xi d\eta, \quad (6)$$

式中 s 是该球的 (ξ, η) 点到高斯象平面内的 (x_1, y_1) 点的距离, 积分遍及参考球大致充满孔径的那一部分. 根据 § 8.8 的(2)和(7)式, 其中 $x = x_1 - x'_0$, $y = y_1 - y'_0$, $z = 0$, 并用 R 代替 f , 则还有

$$s \sim R - \frac{(x_1 - x'_0)\xi + (y_1 - y'_0)\eta}{R}. \quad (7)$$

由公式(4)至(7)得出

$$K(x_0, y_0; x_1, y_1) = \frac{1}{(\lambda R)^2} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x_0, y_0; \xi, \eta) e^{-\frac{2\pi i}{\lambda R} [(x_1 - x_0)\xi + (y_1 - y_0)\eta]} d\xi d\eta, \quad (8)$$

在孔径以外的 (ξ, η) 点处 G 取为零。这就是系统的透射函数 K 与“光瞳函数” G 之间所要求的关系式。

因为 K 可看作一个点源的象上的扰动，所以把它看作 x_1, y_1 的函数时，在高斯象点 $x_1 = x_0, y_1 = y_0$ 或其近旁，它具有相当锐的极大值，而随着与该点距离的增大，它很快地但一般非单调地下降。在一个经过很好校正的系统中，仅在一块其大小为爱里图样第一个暗环数量级的区域内， K 才可看得出来。把透射函数看作 (x_0, y_0) 的函数，则该点沿物表面考察时，透射函数变化缓慢。更确切地说，可以把工作领域分成若干区，每一区都比系统所能分辨的最精细的细节大得多，其特性是在每一个这样的区 A 内，作为良好的近似， K 是一个起自高斯象点但不包括象点本身位置的位移矢量的函数。例如，在一个经过很好校正的系统中， $K(x_0, y_0; x_1, y_1)$ 代表以 (x_0, y_0) 的高斯象点为中心的爱里图样（除了一个常数因子以外）。在这种情形中，可写出

$$K(x_0, y_0; x_1, y_1) = K_A(x_1 - x_0, y_1 - y_0). \quad (9)$$

具有这种特性的区 A 称为系统的等晕区。我们将限于讨论那些小到落在这样一个等晕区范围内的物体¹⁾。在这种情况下，(2) 和 (8) 式可用下列式子替换，

$$U_1(x_1, y_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(x_0, y_0) K(x_1 - x_0, y_1 - y_0) dx_0 dy_0, \quad (2a)$$

和

$$K(x_1 - x_0, y_1 - y_0) = \frac{1}{(\lambda R)^2} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi, \eta) e^{-\frac{2\pi i}{\lambda R} [(x_1 - x_0)\xi + (y_1 - y_0)\eta]} d\xi d\eta, \quad (8a)$$

1) 关于 (9) 式成立的条件的透彻讨论已由 P. Dumontet 发表于 *Optica Acta*, 2 (1955), 53.

这时函数 G 与物点无关.

让我们把 U_0 , U_1 和 K 表示为下列傅里叶积分:

$$U_0(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{U}_0(f, g) e^{-2\pi i [fx_0 + gy_0]} df dg, \quad (10a)$$

$$U_1(x_1, y_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{U}_1(f, g) e^{-2\pi i [fx_1 + gy_1]} df dg, \quad (10b)$$

$$K(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{K}(f, g) e^{-2\pi i [fx + gy]} df dg. \quad (10c)$$

于是,由傅里叶反演公式,

$$\mathcal{U}_0(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(x_0, y_0) e^{2\pi i [fx_0 + gy_0]} dx_0 dy_0, \quad (11a)$$

$$\mathcal{U}_1(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U_1(x_1, y_1) e^{2\pi i [fx_1 + gy_1]} dx_1 dy_1, \quad (11b)$$

$$\mathcal{K}(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, y) e^{2\pi i [fx + gy]} dx dy. \quad (11c)$$

根据 (2a) 式, U_1 是 U_0 与 K 的卷积(也称为褶积);关于傅里叶反演,由卷积定理¹⁾ 得到简单关系式

$$\mathcal{U}_1(f, g) = \mathcal{U}_0(f, g) \mathcal{K}(f, g). \quad (12)$$

上式意味着,如果把物平面内的扰动和象平面内的扰动各自看成是所有可能的“空间频率” f, g 的空间谐波分量的叠加,则象的每一分量只取决于物的相应分量,并且这两个分量的比值为 \mathcal{K} . 因此从物到象的变换与一个线性滤波器的作用等效. 而且,比较 (10c) 和 (8a) 两式得出,

$$\mathcal{K}\left(\frac{\xi}{\lambda R}, \frac{\eta}{\lambda R}\right) = G(\xi, \eta), \quad (13)$$

因此对于相干照明, 频率响应函数(也称为透射因子) $\mathcal{K}(f, g)$ 等于光瞳函数 G 在高斯参考球的

$$\xi = \lambda R f, \quad \eta = \lambda R g \quad (14)$$

点处的值.

1) 参看 I. N. Sneddon, *Fourier Transforms* (New York, McGraw-Hill, 1951), p. 23.

因为在 $\xi\eta$ 平面上孔的边界以外各点处, G 为零, 所以系统不透过频率大于某一值的频谱振幅。如果孔呈圆形, 其半径为 a , 则显然不透过

$$f^2 + g^2 > \left(\frac{a}{\lambda R}\right)^2 \quad (15)$$

这样的一对对频率。为了说明这个结果, 考虑一个一维物体, 其特性在 x 方向上不变。设 Δy_0 是属于频率 g 的周期。于是由(15)式, 系统只能透过满足

$$\Delta y_0 = \frac{1}{g} > \frac{\lambda}{\sin \theta_1} \quad (16)$$

的那些频谱分量的信息, 式中 $\sin \theta_1 \sim a/R$ 是在象方的半孔径角(已假定它很小)。这时 $y_0 = M Y_0$, 式中 M 是单向放大率, 如果我们假定系统遵从正弦条件, 则(参看 § 4.5.1) $\frac{n_0 \sin \theta_0}{n_1 \sin \theta_1} = M$, 并且

(16)式可写成

$$\Delta Y_0 > \frac{\lambda_0}{n_0 \sin \theta_0}, \quad (17)$$

式中 $\lambda_0 = n_1 \lambda$ 是真空波长, $n_0 \sin \theta_0$ 是系统的数值孔径。因此, 如果横跨物平面的扰动随位移作正弦变化, 则仅当周期超过(17)式右方所给的值时, 才能在象平面内获得有关它的信息。

§ 9.5.2 不相干照明

现在考虑从物平面不同面元发出的光是不相干的, 例如物体是初级光源时的情况。用同前面一样的坐标, 设 $I_0(x_0, y_0)$ 是物平面内某一点处的强度。从中心在物点 (x_0, y_0) 的面元 $dx_0 dy_0$ 到达象平面上点 (x_1, y_1) 的光强度是 $dI_1(x_1, y_1) = I_0(x_0, y_0) \times |K(x_0, y_0; x_1, y_1)|^2 dx_0 dy_0$, 式中 K 仍是系统的透射函数。因为假定物体是不相干的, 来自物平面不同面元的强度应相加, 所以 (x_1, y_1) 处的总强度由下式给出,

$$I_1(x_1, y_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I_0(x_0, y_0) |K(x_0, y_0; x_1, y_1)|^2 dx_0 dy_0. \quad (18)$$

如果仍限于讨论充分小的物体，则可用下式替换(18)式¹⁾:

$$I_1(x_1, y_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I_0(x_0, y_0) |K(x_1 - x_0, y_1 - y_0)|^2 dx_0 dy_0. \quad (19)$$

(19)式表明，对于不相干照明成象，象上的强度分布是物上的强度分布与透射函数模的平方的卷积。把这些函数表示为形如(10)式的傅里叶积分，并且用 $\mathcal{J}_0(f, g)$, $\mathcal{J}_1(f, g)$ 和 $\mathcal{L}(f, g)$ 来表示它们的“空间频谱”。于是，由傅里叶反演定理，代替(11)式，得出

$$\mathcal{J}_0(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I_0(x_0, y_0) e^{2\pi i [fx_0 + gy_0]} dx_0 dy_0, \quad (20a)$$

$$\mathcal{J}_1(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I_1(x_1, y_1) e^{2\pi i [fx_1 + gy_1]} dx_1 dy_1, \quad (20b)$$

$$\mathcal{L}(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |K(x, y)|^2 e^{2\pi i [fx + gy]} dx dy. \quad (20c)$$

由(19)式利用卷积定理得出

$$\mathcal{J}_1(f, g) = \mathcal{J}_0(f, g) \mathcal{L}(f, g). \quad (21)$$

因此，从物到象的变换仍是一个线性滤波器，但这时按此法变换的是强度的空间频谱，而不是复振幅的空间频谱。频率响应函数是函数 $\mathcal{L}(f, g)$ ，由(20c), (10c)和卷积定理，它可表示为以下的形式：

$$\mathcal{L}(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{K}(f' + f, g' + g) \mathcal{K}^*(f', g') df' dg'. \quad (22)$$

1) 我们注意到，用(19)式替换(18)式并不需要 K 满足完全等晕条件(9)式；只要 K 的模满足此条件，即物体占有整个区 A ，这就足够了，作为良好的近似，我们有

$$|K(x_0, y_0; x_1, y_1)| = |K_A(x_1 - x_0, y_1 - y_0)|.$$

Dumontet (上述引文) 的分析表明，通常这个条件在物平面比(9)式所要求的更大得多的区域内在良好的近似程度上成立。因此光学成象表示为线性滤波器，这对于不相干照明比对于相干照明有更宽的有效范围。然而为了能够通过比较简单的公式(后面的(22)式)用系统的光瞳函数来表示频率响应函数，我们仍限于讨论那些小到完全等晕条件能成立的物体。

(22) 式右方的积分通称为(函数 \mathcal{K} 的)自相关函数, 它出现于许多具有统计性质的物理问题分析中. 以后在有关部分相干性理论中还将遇到它.

我们曾经指出, $\mathcal{K}(f, g)$ 是光瞳函数 G 在高斯参考球上一适当点处的值. 如果把 (13) 式代入 (22) 式, 则得出

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\frac{\xi}{\lambda R}, \frac{\eta}{\lambda R}\right) &= \frac{1}{(\lambda R)^2} \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi' + \xi, \eta' + \eta) G^*(\xi', \eta') d\xi' d\eta', \end{aligned} \quad (23)$$

由此确立了下述重要结果: 除了一个常数因子以外, 对于不相干照明, 频率响应函数 $\mathcal{L}(f, g)$ 是系统光瞳函数的自相关函数.

设 \mathcal{A} 是出射光瞳的面积. 因为光瞳函数 $G(\xi', \eta')$ 在孔的边界以外各点处处为零, 所以 $\xi' \eta'$ 平面内 (23) 式的被积函数不为零的区域, 就是孔径 \mathcal{A} 与同一孔径相对于 \mathcal{A} 作一平移后二者所共有的面积, 该平移量 ξ 和 η 分别在负的 ξ' 和 η' 方向上(见图 9.12). 当 ξ 和 η 大到那两块面积不重叠时, 响应函数的值显然为零; 因此, 同相干情况类似, 系统只透过不大于某一极大值的空间频率. 特别是对于半径为 a 的圆孔, 当 $\xi^2 + \eta^2 \geq (2a)^2$, 即

$$f^2 + g^2 > \left(\frac{2a}{\lambda R}\right)^2 \quad (24)$$

时, 那两块面积就没有公共的区域. 通过与上述由 (15) 式导出 (17) 式同样的论证, 这意味着, 用不相干照明时, 不晕系统只能透过其周期 ΔY_0 满足

$$\Delta Y_0 > \frac{0.5 \lambda_0}{n_0 \sin \theta_0} \quad (25)$$

的频谱分量的信息. 可以看出, 这个极限值正好是用相干光成象时所得值的一半.

虽然一个给定系统的响应函数 \mathcal{L} 取决于两个变量 f 和 g , 但原则上有可能从包含一维试验物的实验导出它的全部信息. 为了看出这一点, 考虑一对频率 (f, g) , 并引入极坐标, 使得

$f = h \sin \theta$, $g = h \cos \theta$. 现在假定轴在其本身平面内沿 θ 正方向旋转一角度 $\bar{\theta}$. 于是 f 和 g 变换到 $\bar{f} = h \sin(\theta - \bar{\theta})$ 和 $\bar{g} = h \cos(\theta - \bar{\theta})$, 但 \mathcal{L} 的值显然保持不变. 这时可选择转角 $\bar{\theta}$ 等于 $\tan^{-1} f/g$, 它相当于沿 OO' 线取新的 η 轴 ($O\bar{\eta}$), (见图 9.12). 因此 $\bar{f} = 0$, $\bar{g} = \sqrt{f^2 + g^2}$; 由此得出, 一对频率 (f, g) 的光学系统响应函数 \mathcal{L} 的值等于频率 $\sqrt{f^2 + g^2}$ 的一维结构的该函数值, 其周期性方向对于午面 $\theta = 0$ 的倾角为 $\tan^{-1} f/g$. 这个结果大大简化了在任一给定情况下响应函数的解析求值. 关于相干物的响应函数 $\mathcal{K}(f, g)$, 类似的结果显然成立, 但这个结果较少有直接的实际意义.

现在考虑一个无象差但聚焦不足 (defect of focus¹⁾) 的共轴系统的频率响应. 由 § 9.1.2 的讨论得出, 接收平面在 z 正方向上的小量位移 z , 形式上等效于引人数值为

$$\Phi(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{R} \right)^2 z \rho^2 \quad \left(\rho^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{a^2} \leq 1 \right), \quad (26)$$

的波象差, 因此, 如果波的振幅在整个高斯参考球上为常数, 则除了一个常数因子外, 光瞳函数为

$$G(\xi, \eta) = e^{ik\Phi(\xi, \eta)} = e^{i\frac{1}{2}k\left(\frac{a}{R}\right)^2 z \rho^2}. \quad (27)$$

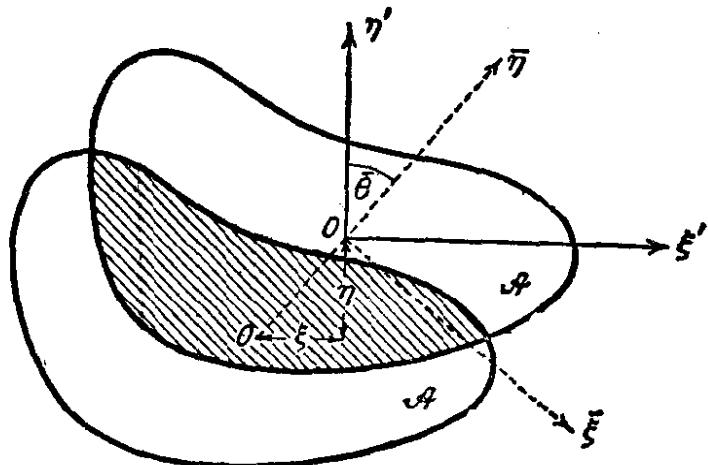


图 9.12 对于一对频率 $f = \xi/\lambda R$, $g = \eta/\lambda R$, 在不相干照明时响应函数 $\mathcal{L}(f, g)$ 求值的积分区域(用阴影线示出)

1) 可参看上册 578 页的焦点公差. ——译者注

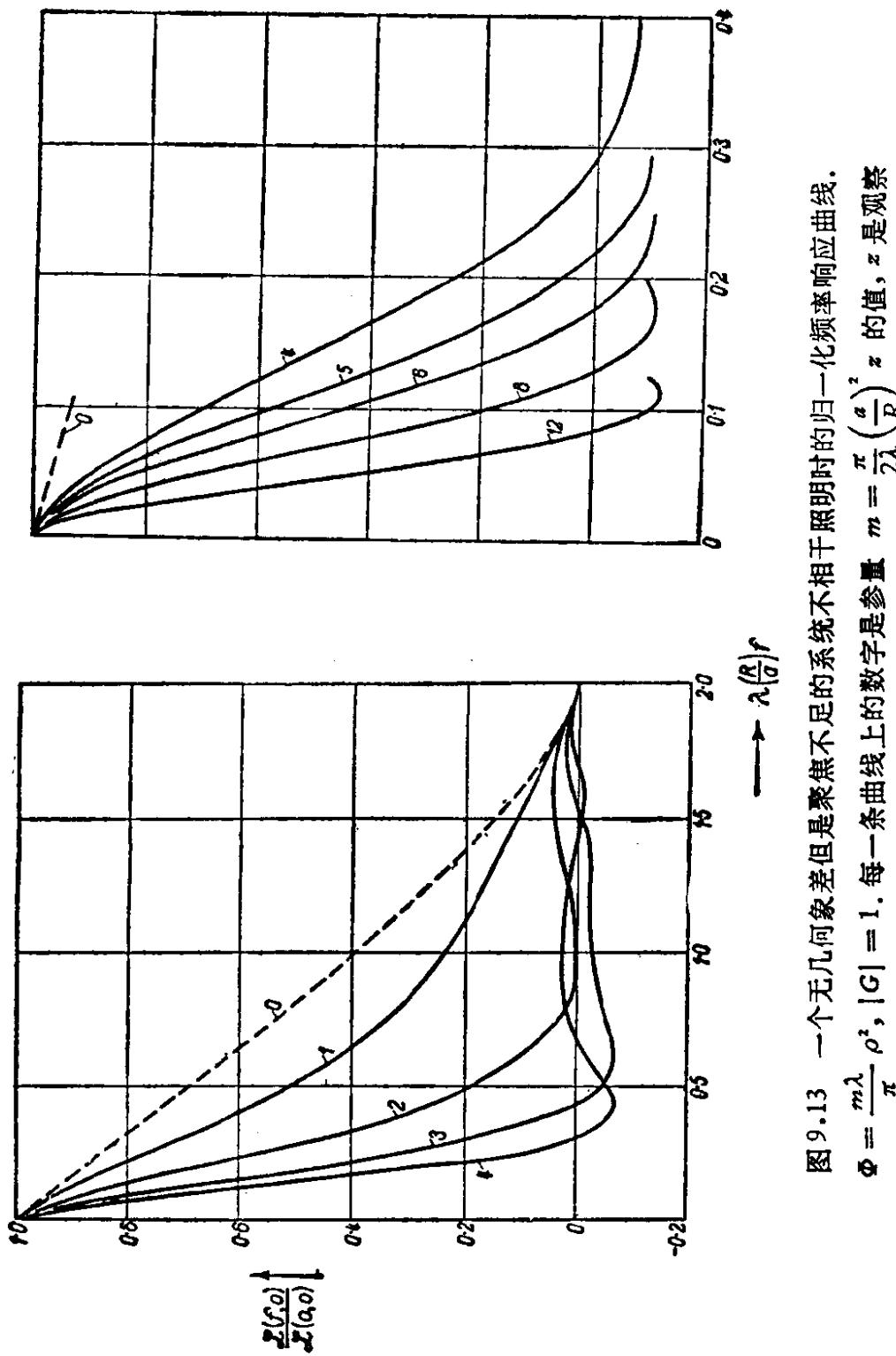


图 9.13 一个无几何象差但是聚焦不足的系统不相干照明时的归一化频率响应曲线。
 $\Phi = \frac{m\lambda}{\pi} \rho^2, |G| = 1$. 每一条曲线上的数字是参数 $m = \frac{\pi}{2\lambda} \left(\frac{a}{R}\right)^2 z$ 的值, z 是观察平面与高斯焦平面之间的距离 [引自 H. H. Hopkins, Proc. Roy. Soc., A, 231 (1955), 98.]

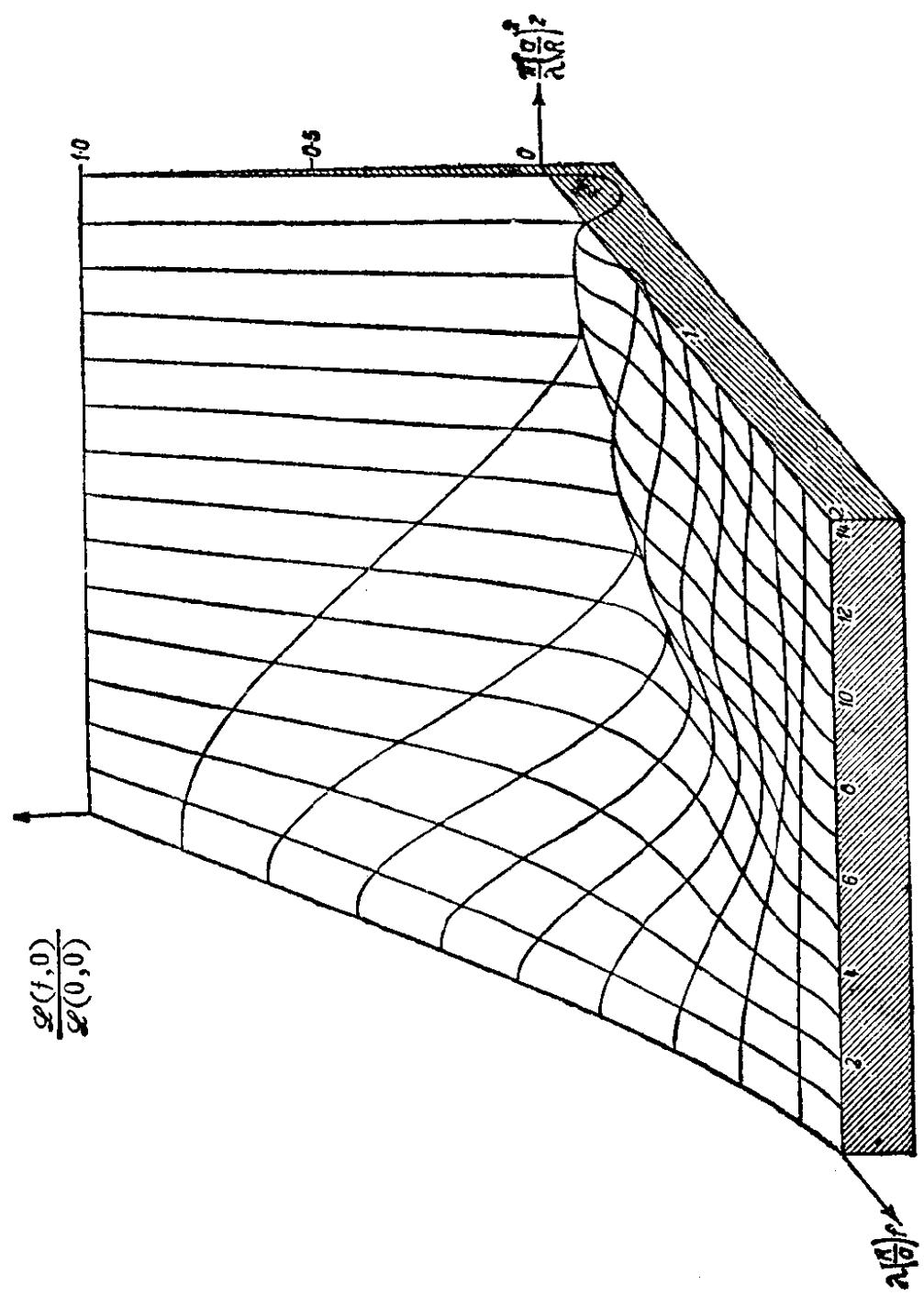
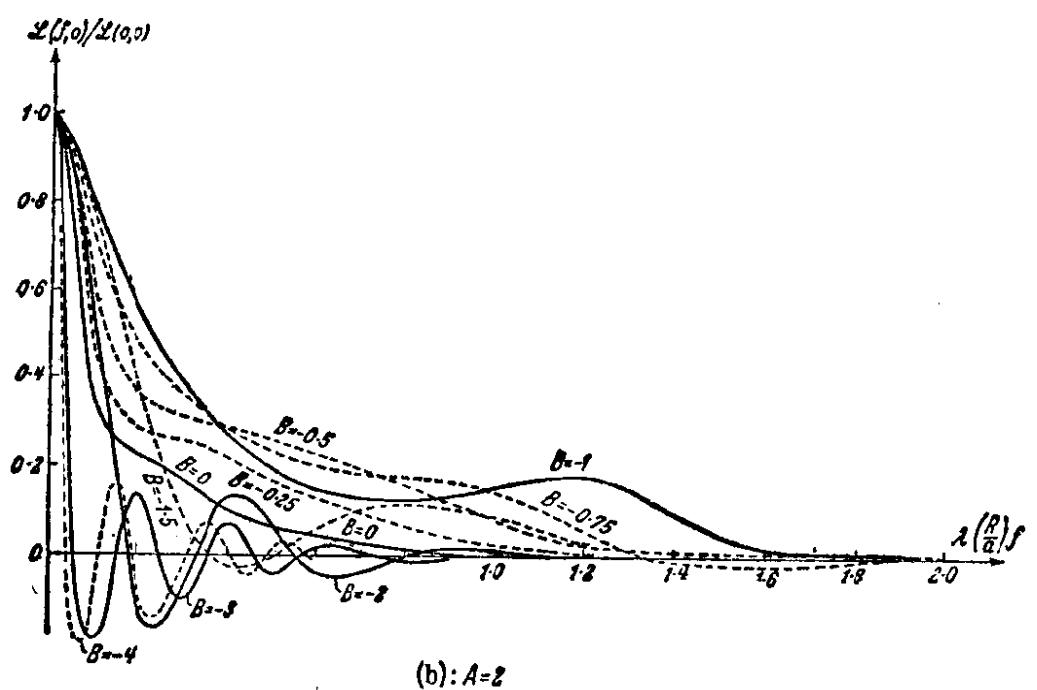
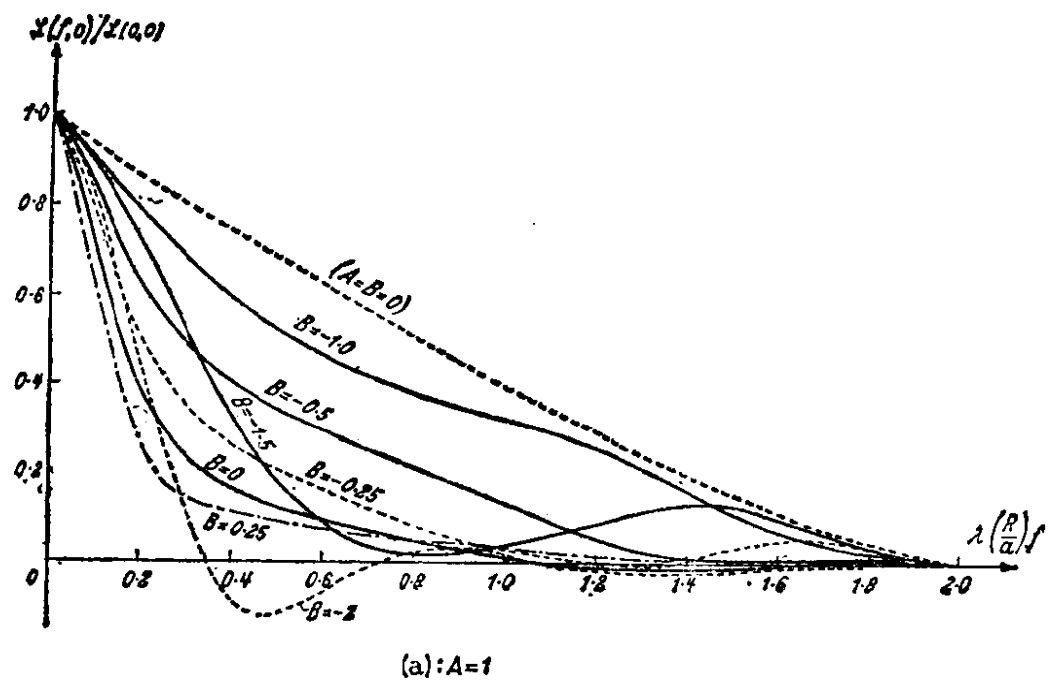


图 9.14 一个无几何象差但是聚焦不足的系统不相干照明时的归一化频率响应曲线，作为空间频率 f 和散焦 z 的函数， $|G| = 1$ 。图 9.13 所示的曲线是此曲面被垂直于 z 轴的平面所截的交线 [引自 W. H. Steel, *Optica Acta*, 3 (1956), 67.]



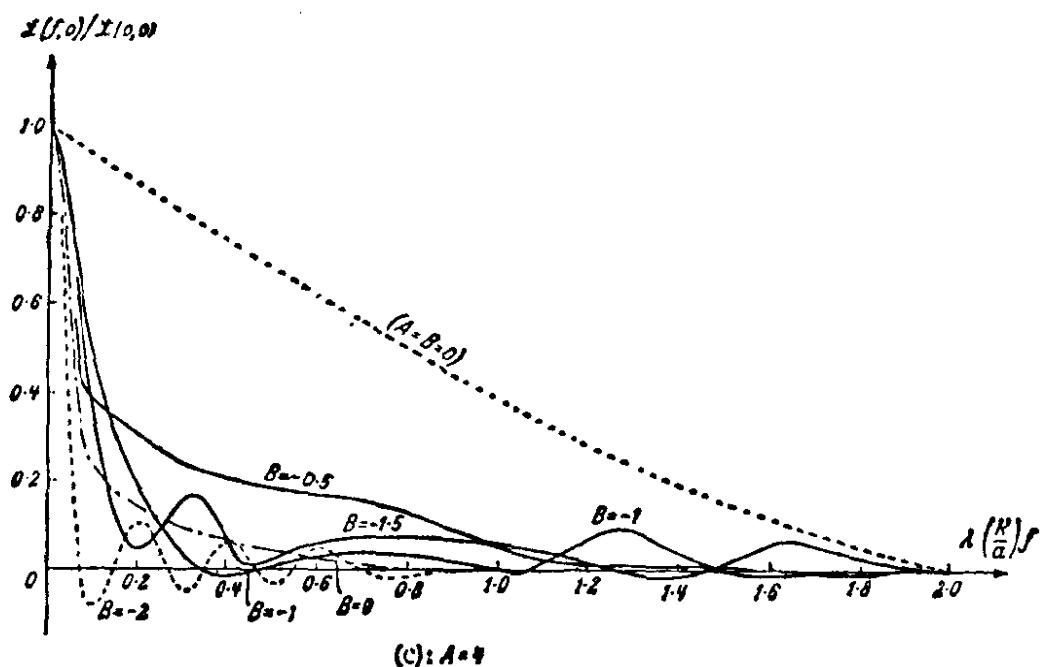


图 9.15 在一个有小量初级球面象差 $\Phi = A(\rho^4 + B\rho^2)\lambda$ 的系统中选定的聚焦位置处, 不相干照明时的归一化频率响应曲线, $|G| = 1$. 数值 $B=0$ 相应于近轴焦平面, $B=-2$ 相应于通过边缘焦点的接收平面 [引自 G. Black and E. H. Linfoot, *Proc. Roy. Soc., A* 239 (1957), 522.]

响应函数可由 (23) 和 (27) 式确定, 结果如图 9.13 和 9.14 所示. 可以看出, 由于引入的小量聚焦不足, 超过了相应于 $\Phi = \frac{\lambda}{\pi} \rho^2$ 的值, 即超过了 $z = \frac{2\lambda}{\pi} \left(\frac{R}{a}\right)^2$, 系统的响应对于较高频率很快变坏.

图 9.15 和 9.16 画出了有初级球面象差和初级象散的系统的响应曲线.

村田 (K. Murata)¹⁾ 曾给出关于测量频率响应函数的仪器概述.

1) K. Murata, *Progress in Optics*, Vol. 5, ed. E. Wolf (Amsterdam, North Holland Publishing Company and New York, J. Wiley and Sons, 1965), p. 199.

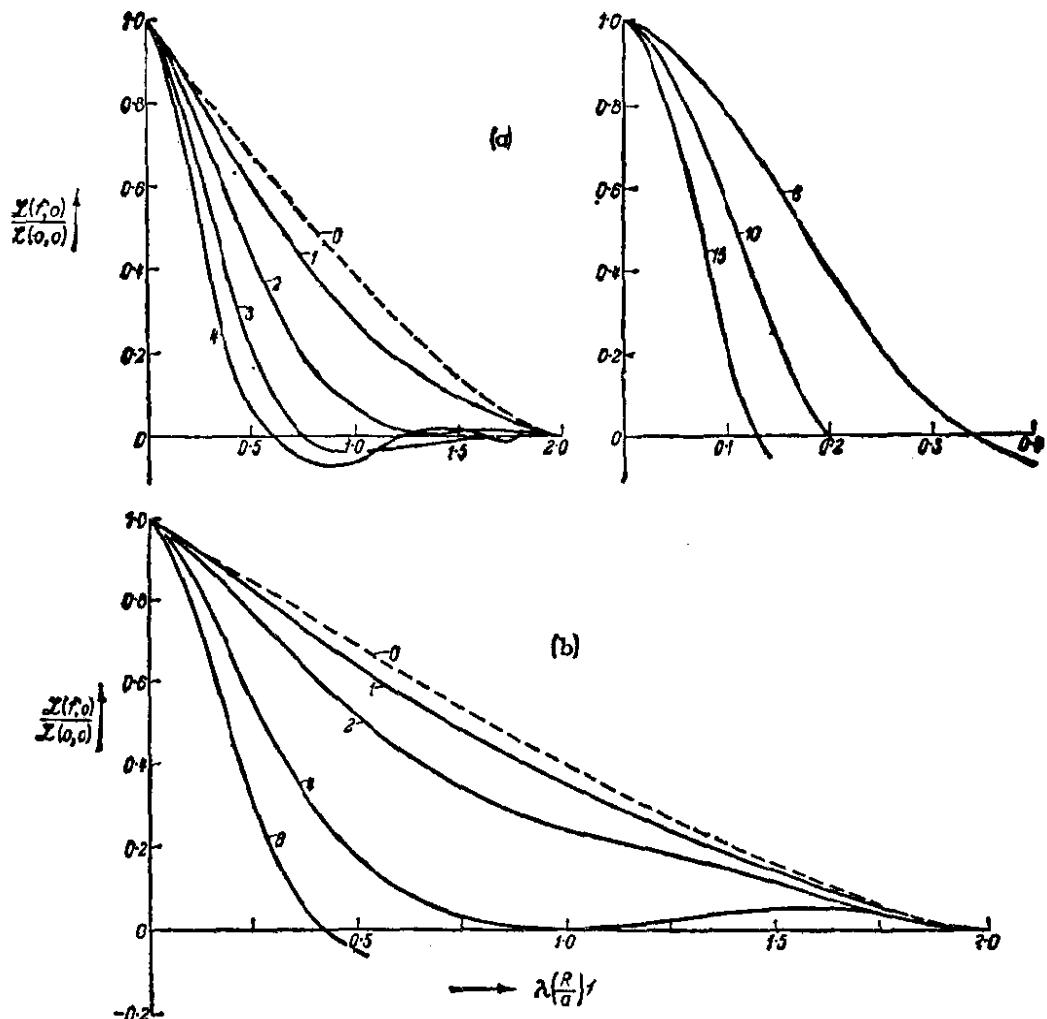


图 9.16 存在初级象散 $\Phi = \frac{m\lambda}{\pi} \rho^2 \cos^2 \theta$ 及 $|G| = 1$ 时,

在切向焦线与弧矢焦线中央的接收平面, 不相干照明时的归一化频率响应曲线。线周期性沿着子午圈 $\theta = \pi/4$ [(a)], 和沿着子午圈 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi/2$ [(b)]。每一条曲线上的数字是 m 的值 [引自 M. De, Proc. Roy. Soc., A 233 (1955), 96.]

第十章 部分相干光的干涉和衍射

§ 10.1 引言

至此，我们主要涉及一个点光源产生的单色光。实际物理光源发出的光决不是严格单色的，因为即使最锐的光谱线也具有一定的宽度。此外，物理光源不是一个点光源，而有一定的广延性，由大量基元辐射体（原子）组成。根据傅里叶定理，这样的一个光源产生的扰动可表示为许多严格单色而因此无限长的波列之和。初等的单色理论本质上只涉及这种傅里叶表示的单个分量。

在单色波场中，任一点 P 处振动的振幅不变，而位相随时间作线性变化。在实际光源所产生的波场中，情况不再是这样：振幅和位相都在不规则地涨落着，其涨落速度基本上取决于光谱的有效宽度 $\Delta\nu$ 。只当时间间隔 Δt 比有效谱宽 $\Delta\nu$ 的倒数小得多时，复振幅才大体上保持不变；在这样一个时间间隔内，任何两个傅里叶分量的相对位相变化都比 2π 小很多，并且这些分量叠加所代表的扰动在这一时间间隔内的表现就象具有平均频率的单色波一样；然而，对于较长的时间间隔来说，这就不对了。特征时间 $\Delta t = 1/\Delta\nu$ 与 § 7.5.8 中引入的相干时间具有相同数量级。

其次，考虑扩展的准单色光源所产生的波场中两点 P_1 和 P_2 处的光扰动。为了简单起见，假定波场在真空中，并且 P_1 和 P_2 与光源相距许多个波长。可以预料到，当 P_1 和 P_2 彼此足够靠近时，在这两点处振幅的涨落以及位相的涨落都不是独立的。下述的假定是合理的：如果 P_1 和 P_2 相互如此靠近，以致光源上每一点 s 到这两点的程差 $\Delta s = SP_1 - SP_2$ 比平均波长 $\bar{\lambda}$ 小得多，则在 P_1 和 P_2 处的涨落实际上是相同的；而且，只要对于光源上所有各点，程差 Δs 不超过相干长度 $c\Delta t \sim c/\Delta\nu = \bar{\lambda}^2/\Delta\lambda$ ，

即使 P_1 和 P_2 间距较大，则在这两点的涨落之间仍存在某种相关。因而导致波场中任一点 P 周围的相干区域的概念。

为了适当地描述有限的多色光源所产生的波场，显然需要对场中不同点 P_1 和 P_2 处的振动之间存在的相关引入某种量度。我们必定预料到，这种量度与来自这两点的振动合成得出的干涉条纹的锐度密切有关。当高度地相关时（例如 P_1 和 P_2 处的光来自一个光谱范围很窄的非常小的光源时），必定预料到有锐条纹，而不存在相关时（例如 P_1 和 P_2 各自接收来自不同的物理光源的光时），就必定预料到完全没有条纹。我们分别用术语“相干”和“不相干”来描述这两种情况。一般地说，这两种情况都不出现，于是不妨谈及部分相干的振动。

与部分相干性课题密切有关的首批研究成果，看来出自费尔德（Verdet）¹⁾，他研究过来自一个扩展的初级光源的光的相干区域的大小。其后迈克耳孙的研究工作确立了干涉条纹可见度和扩展初级光源表面强度分布之间的联系²⁾（参看 § 7.3.6），以及可见度和一条光谱线内能量分布之间的联系³⁾（参看 § 7.5.8）。迈克耳孙的结果实际上直到很久以后才用相关来解释，但他的研究曾对部分相干性的近代理论阐述作出了贡献⁴⁾。劳厄⁵⁾对光振动的相关首次作出定量的量度，并且在他的研究工作中把它用于光束的热力学上。贝莱克（Berek）⁶⁾作出进一步的贡献，他用相关的概念来研究显微镜中的成象。

-
- 1) E. Verdet, *Ann. Scientif. l'École Normale Supérieure*, **2** (1865), 291; *Lecons d'Optique Physique* (Paris, L'Imprimerie Impériale), **1** (1869), 106.
 - 2) A. A. Michelson, *Phil. Mag.* (5), **30** (1890), 1; **31** (1891), 256; *Astrophys. J.* **51** (1920), 257.
 - 3) A. A. Michelson, *Phil. Mag.* (5), **31** (1891), 338; **34** (1892), 280.
 - 4) 参看 F. Zernike, *Proc. Phys. Soc.*, **61** (1948), 158.
 - 5) M. von Laue, *Ann. d. Physik* (4), **23** (1907), 1, 795.
 - 6) M. Berek, *Z. Phys.*, **36** (1926), 675, 824; **37** (1926), 387; **40** (1926), 420. C. Lakeman 和 J. Th. Groosmuller 描述了有关 Berek 研究工作的实验, *Physica* (Gravenhage), **8** (1928), 193, 199, 305.

范西特 (Van Cittert)¹⁾ 文章的发表开始了这个课题发展的新阶段，他确定了在扩展的初级光源照明的屏上任何两点处的光扰动的联合概率分布。在其后的一篇论文中²⁾，他又确定了在任一点处而在两个不同时刻的光扰动的概率分布。在他的计算精度内，得出这些分布是高斯型的，而且他确定了适当的相关系数。

泽尼克在 1938 年发表的一篇重要论文³⁾ 中介绍了探讨部分相干性问题的另一种更简单的方法。泽尼克以直接同实验相联系的方式定义了光振动的“相干度”，并确定了关于这个量的一些有价值的结果。虽然对大多数实际用途来说，泽尼克的相干度与范西特的相关因子等价，也与劳厄对相关的量度密切有关，但看来他的方法特别适合于处理仪器光学的实际问题。霍普金斯 (Hopkins)⁴⁾ 还进一步简化了这种方法，并用来研究成象和分辨本领。

上述研究填补了完全相干与完全不相干这两种极端情况之间的空白，但所得结果仍有一定限制，即主要适用于准单色光以及干涉光束之间的程差充分小的情况。为了处理更复杂的情况，并在严格的基础上系统阐述这种理论，还需要作进一步的推广。这一步已由沃耳夫⁵⁾ 以及由布朗·拉皮埃尔 (Blanc-Lapierre) 和迪蒙

1) P. H. van Cittert, *Physica*, **1** (1934), 201.

2) P. H. van Cittert, *Physica*, **6** (1939), 1129; 又见 L. Jánossy, *Nuovo Cimento*, **6** (1957), 111; 同上, **12** (1959), 369.

3) F. Zernike, *Physica*, **5** (1938), 785.

4) H. H. Hopkins, *Proc. Roy. Soc. A*, **208** (1951), 263; 同上 *A*, **217** (1953), 408.

D. Gabor 和 H. Gamo 的有关研究工作从信息论的观点研究光学传递时利用了部分相干性概念 [D. Gabor, *Proc. Symb. Astr. Optics*, ed. Z. Kopal (Amsterdam, North Holland Publishing Company, 1956), 17; *Proc. Third Symposium on Information Theory*, ed. C. Cherry (London, Butterworths Scientific Publications, 1956), 26; H. Gamo, *J. Appl. Phys. Japan*, **25** (1956), 431; *Progress in Optics*, Vol. **3**, ed. E. Wolf (Amsterdam, North Holland Publishing Company and New York, J. Wiley and Sons, 1964), 187].

5) E. Wolf, *Proc. Roy. Soc. A*, **230** (1955), 246. 又见, 同上, *A*, **225** (1954), 96; *Nuovo Cimento*, **12** (1954), 884.

泰 (Dumontet)¹⁾ 独立地完成了，其中涉及到引入一些更一般的相关函数。已发现这些相关函数严格遵从两个波动方程；其结果意味着，不仅光的扰动，而且扰动之间的相关，都以波的形式传播。借助于这个结果，以前建立的许多定理都得到了较简单的解释。

迄今所述的相关函数都表征在两个空时点处的光振动之间的相关。这种“二阶”相关函数完全适合于分析那些涉及从稳恒光源²⁾发出的光的干涉和衍射的普通光学实验。对于更复杂实验的分析，可能需要更高阶相关函数，即所含各个场变量的总幂高于二次的那些相关函数。然而，至今这样的相关函数还不曾应用到值得重视的程度³⁾。

1) A. Blanc-Lapierre and Dumontet, *Rev. d'Optique*, **34** (1955), 1.

2) 更确切地说，是从产生一个平稳场的光源发出，平稳场的含义按后面 657 页给出的定义。对于非平稳场的分析，可利用类似的相关函数，但它们必须用系综平均而不是用时间平均来定义（对于平稳场，这两类平均通常给出同一结果）。但因非平稳场的分析需要的数学工具复杂得多，且因至今不曾作出关于非平稳光相干效应的实验，所以我们只限于讨论平稳场。

3) 当光来自一个热光源（如白炽物质或气体放电管）时，可假定在 n 个空时点处场的联合概率分布十分近似于高斯型。众所周知（例如，见 J. J. Freeman, *Principles of Noise*, New York; J. Wiley & Sons, Inc., 1958, 245—247），这种分布由二阶相关函数完全确定，它本身又意味着与热光源的光相联系的所有高阶相关函数都可以用二阶相关函数来表示。然而对于来自非热光源的光，例如激光，就不是这样了。

E. Wolf 在 *Quantum Electronics, 3rd Congress*, Vol. 1, ed. N. Bloembergen and P. Grivet (New York, Columbia University Press; Paris, Dunod, 1964), p. 13, 和 L. Mandel, 同上, p. 101, 已扼要讨论过某些高阶相干效应和适当的相关函数。又见 E. Wolf, *Proc. Symp. on Optical Masers* (New York, Brooklyn Polytechnic Press and J. Wiley & Sons, Inc., 1963), p. 29, 其中概述了相干效应的分类。

R. J. Glauber 在 *Quantum Electronics, 3rd Congress*, Vol. 1, ed. N. Bloembergen and Grivet (New York, Columbia University Press; Paris, Dunod, 1964), p. 111 和 *Phys. Rev.* **130** (1963), 2529, 引入了类似的量子力学相关函数。E. C. G. Sudarshan, *Phys. Rev. Lett.*, **10** (1963), 277, 以及 J. R. Klauder 和 E. C. G. Sudarshan, *Fundamentals of Quantum Optics* (New York, W. A. Benjamin, Inc., 1968), 讨论了经典处理和量子处理之间的关系。又见 L. Mandel 和 E. Wolf, *Rev. Mod. Phys.*, **37** (1965), 231; 这篇论文也包括了对二阶和高阶相干效应的评述。

部分相干性理论引人注目的特点是它使用一些原则上可由实验测定的量(即相关函数和时间平均强度)来运算。这与初等光波理论大不相同，在初等光波理论中，因光的振动非常迅速，其基本量是不可测量的。本章中，将研究部分相干波场的特性，并用几个有实际意义的例子来说明其结果。我们将仅涉及光的情况，但我们的分析与其他领域也密切有关；特别是，在相关技术用于测量射电星¹⁾及用于射电波探察电离层²⁾方面，类似的考虑也适用。

关于部分相干性所使用的数学技巧，也很适合于分析部分偏振。这里所涉及的现象可用电磁场矢量的正交分量之间的相关来解释。在这方面，早期的研究出自斯托克斯³⁾。使用相关函数和相关矩阵概念的近代论述，主要出自维纳（Wiener）⁴⁾，皮兰（Perrin）⁵⁾，沃耳夫⁶⁾和潘查拉特南（Pancharatnam）⁷⁾。这个课题将在本章最后一节（§ 10.8）讨论。

§ 10.2 实多色场的复数表示

在讨论单色波场时，已经发现，把每一个实波函数看作是相综合的复波函数的实部是有好处的。本章中，将涉及多色（即非单

-
- 1) 参看 R. N. Bracewell, *Radio Astronomy Techniques in Encyclopedia of Physics*, ed. S. Flügge (Berlin, Springer), **54** (1959), Chapter V.
 - 2) 参看 J. A. Ratcliffe, *Rep. Progr. Phys.* (London, Physical Society), **19** (1956), 188.
 - 3) G. G. Stokes, *Trans. Cambr. Phil. Soc.*, **9** (1852), 399; 重载于他的 *Mathematical and Physical Papers*, Vol. III (Cambridge University Press, 1901), 233; 又见 P. Soleillet, *Ann. de Physique* (10), **12** (1929), 23.
 - 4) N. Wiener, *J. Math. and Phys.*, **7** (1928), 109; *J. Franklin Inst.*, **207** (1929), 525; *Acta Math.* **55** (1930), § 9.
 - 5) F. Perrin, *J. Chem. Phys.*, **10** (1942), 415.
 - 6) E. Wolf, *Nuovo Cimento*, **12** (1954), 884; *Proc. Symp. Astr. Optics*, ed. Z. Kopal (Amsterdam, North Holland Publishing Company, 1956), 177; *Nuovo Cimento*, **13** (1959), 1165.
 - 7) S. Pancharatnam, *Proc. Ind. Acad. Sci., A*, **44** (1956), 398; 同上, **57** (1963), 218, 231.

色)场,采用复数表示也是有好处的,它可看作是单色场所用的复数表示的自然推广。

设 $V^{(r)}(t)$ ($-\infty \leq t \leq \infty$) 代表在空间一固定点处的一个实扰动,例如电矢量的一个笛卡儿分量,并假定 $V^{(r)}(t)$ 是平方可积的。它可表示为傅里叶积分的形式:

$$V^{(r)}(t) = \int_0^\infty a(\nu) \cos [\phi(\nu) - 2\pi\nu t] d\nu. \quad (1)$$

与 $V^{(r)}$ 相结合的复函数为

$$V(t) = \int_0^\infty a(\nu) e^{i[\phi(\nu) - 2\pi\nu t]} d\nu. \quad (2)$$

因此,

$$V(t) = V^{(r)}(t) + iV^{(i)}(t), \quad (3)$$

式中

$$V^{(i)}(t) = \int_0^\infty a(\nu) \sin [\phi(\nu) - 2\pi\nu t] d\nu. \quad (4)$$

函数 $V^{(i)}(t)$ 和 $V(t)$ 由 $V^{(r)}(t)$ 唯一确定,从 $V^{(r)}$ 中把每个傅里叶分量的位相 $\phi(\nu)$ 替换为 $\phi(\nu) - \pi/2$, 就得到 $V^{(i)}$ 。积分(1)和(4)称为同源的傅里叶积分 (allied Fourier integrals), 或相结合的函数(又称共轭函数), 可以证明¹⁾, 它们相互为希耳伯特变换, 即

$$\begin{aligned} V^{(i)}(t) &= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V^{(r)}(t')}{t' - t} dt', \\ V^{(r)}(t) &= -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V^{(i)}(t')}{t' - t} dt', \end{aligned} \quad (5)$$

式中 P 表示在 $t' = t$ 处的柯西主值。

这种复数表示常用于通讯理论,其中 V 称为属于 $V^{(r)}$ 的解析

1) 例如,见 E. C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals* (Oxford, Clarendon Press, 2nd ed., 1948), Chapter 5.

信号¹⁾. 这个名称的来历是, 只要 $V^{(r)}$ 满足某些一般的正则条件, 则作为复变量 z 的函数 $V(z)$ 在下半 z 平面内是解析的²⁾.

为了今后使用, 我们特别提到当 $V^{(r)}$ 表示为下述形式的傅里叶积分

$$V^{(r)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\nu) e^{-2\pi i \nu t} d\nu \quad (6)$$

时从 $V^{(r)}$ 到 V 的变换. 因为 $V^{(r)}$ 是实的, 所以

$$v(-\nu) = v^*(\nu). \quad (7)$$

利用 (7) 式, 可将 (6) 式改写成 (1) 式的形式, 并作比较, 得出

$$v(\nu) = \frac{1}{2} a(\nu) e^{i\phi(\nu)}, \quad \nu \geq 0. \quad (8)$$

利用 v , (2) 式变为

$$V(t) = 2 \int_0^{\infty} v(\nu) e^{-2\pi i \nu t} d\nu. \quad (9)$$

因此, 把 $V^{(r)}$ 表示为 (6) 式的积分, 去掉属于负频率的振幅, 并把正频率的振幅乘以 2, 就可以由 $V^{(r)}(t)$ 导出 $V(t)$. 因此之故, V 也称为与 $V^{(r)}$ 相结合的复半域函数 (the complex half-range function). 反之, 很明显, 如果复函数 V 的傅里叶谱不包含属于负频率的振幅, 则 V 的实部和虚部是相结合的函数. 注意下列关系式, 它们由 (6), (7) 和 (9) 式并利用帕塞瓦 (Parseval) 定理及 (3) 式得出:

1) 解析信号的概念是 D. Gabor 引入的, 见 *J. Inst. Electr. Engrs.*, **93** (1946), Pt. III, 429. 又见 V. I. Bunimovich, *J. Tech. Phys. U. S. S. R.*, **19** (1949), 1231; J. Ville, *Câbles et Transmission*, **2** (1948), 61; 同上, **4** (1950), 9; J. R. Oswald, *Trans. Inst. Radio Engrs.*, CT-3 (1956), 244.

一个实变量的复函数, 其实部和虚部由希耳伯特变换关系相联系, 在物理学和工程学的许多分支中起着重要的作用. 在物理学中, 希耳伯特变换关系常被称为色散关系, 因它首先出现于光被原子色散的理论中 [H. A. Kramers, *Atti Congr. Internaz. Fisici, Como* (Sept. 1927), (V), Bologna, N. Zanichelli, 1928; 又见 J. S. Toll, *Phys. Rev.*, **104** (1956), 1760; J. Hilgevoord, *Dispersion Relations and Causal Description* (Amsterdam, North Holland Publishing Company, 1960)].

2) 参看 E. C. Titchmarsh, 上述引著, p. 128.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} V^{(r)^2}(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} V^{(i)^2}(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} V(t) V^*(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |v(\nu)|^2 d\nu = 2 \int_0^{\infty} |v(\nu)|^2 d\nu. \end{aligned} \quad (10)$$

在我们将涉及的大多数应用中，谱振幅只在比平均频率 $\bar{\nu}$ 小很多的频宽间隔 $\Delta\nu$ 内才有可观的值。因此，解析信号有一种简单的解释。我们把 V 表示为下述形式：

$$V(t) = A(t) e^{i[\Phi(t) - 2\pi\bar{\nu}t]}, \quad (11)$$

式中 $A(\geq 0)$ 和 Φ 都是实的。根据 (9) 和 (11) 式，

$$\begin{aligned} A(t) e^{i\Phi(t)} &= 2 \int_0^{\infty} v(\nu) e^{-2\pi i(\nu - \bar{\nu})t} d\nu \\ &= \int_{-\bar{\nu}}^{\infty} g(\mu) e^{-2\pi i\mu t} d\mu, \end{aligned} \quad (12)$$

式中

$$g(\mu) = 2\nu(\bar{\nu} + \mu). \quad (13)$$

现因已假定谱振幅只在 $\nu = \bar{\nu}$ 附近才明显不为零，所以 $|g(\mu)|$ 只在 $\mu = 0$ 附近才是可观的。因此，(12) 式的积分表示低频谐分量的叠加；又因 $\Delta\nu/\bar{\nu} \ll 1$ ，所以 $A(t)$ 和 $\Phi(t)$ 比 $\cos 2\pi\bar{\nu}t$ 和 $\sin 2\pi\bar{\nu}t$ 变化缓慢¹⁾。由于 $V^{(r)}$ 和 $V^{(i)}$ 是 V 的实部和虚部，用 A 和 Φ 表示，则有

$$\left. \begin{aligned} V^{(r)}(t) &= A(t) \cos [\Phi(t) - 2\pi\bar{\nu}t], \\ V^{(i)}(t) &= A(t) \sin [\Phi(t) - 2\pi\bar{\nu}t]. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

这些公式把 $V^{(r)}$ 和 $V^{(i)}$ 表示为载频 $\bar{\nu}$ 的调制信号的形式，并且我们看到，复解析信号与实信号的包络²⁾ 密切有关。利用解析信号 V ，包络 $A(t)$ 及其伴随的位相因子 $\Phi(t)$ 由下式给出：

1) 根据 (14) 式，在这种情况下显然有

$$V^{(i)}(t) \sim V^{(r)} \left(t + \frac{1}{4\bar{\nu}} \right).$$

2) L. Mandel 研究过解析信号的包络性质，见 *J. Opt. Soc. Amer.*, 57 (1967), 613。

$$\left. \begin{aligned} A(t) &= \sqrt{V^{(r)^2} + V^{(i)^2}} = \sqrt{VV^*} = |V|, \\ \Phi(t) &= 2\pi\bar{\nu}t + \tan^{-1} \frac{V^{(i)}}{V^{(r)}} \\ &= 2\pi\bar{\nu}t + \tan^{-1} \left(i \frac{V^* - V}{V^* + V} \right). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

可以看出, $A(t)$ 与 $\bar{\nu}$ 的精确选择无关, 而 $\Phi(t)$ 只通过附加项 $2\pi\bar{\nu}t$ 依赖于 $\bar{\nu}$ 。显然, 我们可在 (14) 式中选定任一其他频率 $\bar{\nu}'$ 代替 $\bar{\nu}$ 而不影响 A 的值; 新的位相因子的表达式与 (15) 式不同之处仅在于用 $\bar{\nu}'$ 代替 $\bar{\nu}$ 。

推导 (14) 和 (15) 式时, 不曾用到所讨论的是窄带信号 ($\Delta\nu/\bar{\nu} \ll 1$) 这一事实, 因此这些关系式相当普遍地成立。然而, 只有在 $\Delta\nu/\bar{\nu} \ll 1$ 时, 包络的概念才是有用的。

我们已假定“扰动” $V^{(r)}(t)$ 对所有的 t 值都有定义。实际上, 扰动仅存在于有限的时间间隔 $-T \leq t \leq T$ 内, 但这个间隔与物理上有意义的时间标度 (平均周期 $1/\bar{\nu}$ 和相干时间 $1/\Delta\nu$) 相比, 通常是如此之大, 以致可假定 $T \rightarrow \infty$ 而将情况理想化。根据与场的平稳性假设有关的理由 (参看 § 10.3.1), 这种理想化在数学上是合乎需要的。显然还必须假定, 随着求平均的时间间隔无限增大, 强度 (它正比于 $V^{(r)^2}$) 的时间平均趋于一有限值, 即假定

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T V^{(r)^2}(t) dt \quad (16)$$

是有限的。现在, 如果这个极限是有限的, 并且不为零, 则显然 $\int_{-\infty}^{\infty} V^{(r)^2}(t) dt$ 发散。然而, 有可能利用傅里叶分析的方法¹⁾。定义截断函数 (truncated function)

1) 二十世纪初, 有些参与白光和噪声性质研究的物理学家 (著名的是 L. G. Gouy, 瑞利, 和 A. Schuster), 遇到了解析时间函数当 t 趋于无穷大而不消失的问题。严格的数学方法主要是由 N. Wiener 在其广义调和分析的论文 [*Acta Math.*, 55 (1930), 117] 中发展起来的。这篇论文还概述了这个问题的历史, 并列入了很完整的文献目录。

$$\left. \begin{aligned} V_T^{(r)}(t) &= V^{(r)}(t), & \text{当 } |t| \leq T \text{ 时,} \\ &= 0, & \text{当 } |t| > T \text{ 时.} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

因为可以假定每一个这样的截断函数都是平方可积的, 所以可把它表示为傅里叶积分, 如

$$V_T^{(r)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v_T(\nu) e^{-2\pi i \nu t} d\nu. \quad (18a)$$

设 $V_T^{(i)}$ 是相结合的函数, V_T 是相应的解析信号, 即

$$V_T(t) = V_T^{(r)}(t) + iV_T^{(i)}(t) = 2 \int_0^{\infty} v_T(\nu) e^{-2\pi i \nu t} d\nu. \quad (18b)$$

于是, 用 $V_T^{(r)}$ 代替 $V^{(r)}$, 依此类推, 则 (10) 式仍成立. 因此, 如果也用 $2T$ 除 (10) 式中每个表达式, 就得出²⁾

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} V_T^{(r)2}(t) dt &= \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} V_T^{(i)2}(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} V_T(t) V_T^*(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G_T(\nu) d\nu = 2 \int_0^{\infty} G_T(\nu) d\nu, \end{aligned} \quad (19)$$

式中

$$G_T(\nu) = \frac{|v_T(\nu)|^2}{2T}. \quad (20)$$

现在求 $T \rightarrow \infty$ 时的极限看来是自然的. 不幸, 在许多有实际意义的情况下, 通常称为周期图 (periodogram) 的函数 $G_T(\nu)$ 随着 T 的增加并不趋于极限而是不断地涨落²⁾. 然而, 通过适当的“修匀过程” (Smoothing procedure) 就可以克服这个困难. 例如, 在随机过程的理论中, 通常把函数 $V^{(r)}(t)$ 看作表征过程统计性质的函数系统中的一个典型成员. 而且通常光学遇到的系统是平稳和

1) 因截断函数的希耳伯特变换不一定是截断函数, 所以 $V_T^{(i)}$ 和 v_T 在 $-T \leq t \leq T$ 的区域以外一般不为零. 由于上述原因, 还为了避免某些数学加工, 所以在 (19) 和 (23) 式中对时间积分的上下限取 $\pm\infty$, 而不取 $\pm T$.

2) 例如, 见 W. B. Davenport and W. L. Root, *An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise* (New York, Mc Graw-Hill, 1958), p. 107—108. 又见 D. Middleton, *IRE Trans.*, CT-3 (1956), 299.

各态历经的。平稳性意味着所有的系综平均都与时间原点无关，而各态历经性意味着每一系综平均等于包含该系综一典型成员的相应的时间平均。今后假定所讨论的是平稳和各态历经的系综¹⁾。于是可以证明，当 $T \rightarrow \infty$ 时， $G_T(\nu)$ 对函数 $V^{(r)}(t)$ 的系综所取的平均趋于确定的极限。因此，如果用横线表示系综平均，则“光滑周期图”(Smoothed periodogram)

$$\overline{G_T(\nu)} = \frac{\overline{|v_T(\nu)|^2}}{2T} \quad (21)$$

有一极限²⁾

$$G(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \overline{G_T(\nu)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\overline{|v_T(\nu)|^2}}{2T}. \quad (22)$$

现在，如果用尖括号表示时间平均，

$$\langle F(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} F_T(t) dt, \quad (23)$$

则在 $T \rightarrow \infty$ 时的极限下，得到类似于(19)式的下述关系式：

$$\begin{aligned} \langle V^{(r)^2}(t) \rangle &= \langle V^{(i)^2}(t) \rangle = \frac{1}{2} \langle V(t) V^*(t) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) d\nu = 2 \int_0^{\infty} G(\nu) d\nu. \end{aligned} \quad (24)$$

1) 对这些概念更充分的讨论，例如，见 W. B. Davenport and W. L. Root, 上述引著；S. Goldman, *Information Theory* (New York, Prentice-Hall, Inc., 1953); D. Middleton, *An Introduction to Statistical Communication Theory* (New York, McGraw-Hill Co., 1960); A. M. Yaglom, *An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions* (Englewood Cliffs, N. J. Prentice-Hall, 1962).

2) 严格证明这一极限的存在和本节中启发性地引入的某些关系式，会使我们过分深入到各态历经理论中，因此这里不能给出。参看 J. L. Doob, *Stochastic Processes* (New York, J. Wiley & Sons, Inc., 1953), Chapt. XI; 又见 S. Goldman, 上述引著, § 8.4; A. M. Yaglom, 上述引著, 43—51; 或 D. Middleton, 上述引著, § 3.2.

代替作系综平均，也可作其他的修匀运算 [参看 S. Goldman, 上述引著 p. 244; 或 M. S. Bartlett, *An Introduction to Stochastic Processes* (Cambridge, University Press, 1955), p. 280—284].

665 页注 2 指出定义功率谱 $G(\nu)$ 的另一种方法，它不依赖于系综概念。

在平稳随机过程的理论中, (22) 式所定义的函数 $G(\nu)$ 称为用函数 $V^{(r)}(t)$ 的系综表征的随机过程的功率谱。在我们的讨论中, $V^{(r)}(t)$ 代表光扰动, $G(\nu)d\nu$ 正比于来自频率范围 $(\nu, \nu + d\nu)$ 对强度的贡献; 我们将把 $G(\nu)$ 称作光振动的谱密度。

因 $V_T^{(r)}$ 是 V_T 的实部, 由此得出, 如果对 $V_T^{(r)}$ 的运算是线性的, 就可以直接用 V_T 来运算, 并在计算到最后时取其实部。而且, 正如单色光情况一样, 根据关系式 $\langle V^{(r)2} \rangle = \frac{1}{2} \langle VV^* \rangle$, 就能用相综合的复扰动直接计算实扰动平方的时间平均。

§ 10.3 光束的相关函数

§ 10.3.1 两个部分相干光束的干涉。互相干函数和复相干度

§ 10.1 中曾经指出, 为了满意地处理涉及从一有限光源发出并具有有限光谱范围的光的问题, 必须确定波场中任意两点处的振动之间可能存在的相关。通过分析双光束干涉实验, 提出了对这种相关的一种适当的量度。

考虑由一个扩展多色光源 σ 产生的波场。暂时忽略偏振效应, 因此可把光扰动看作是位置和时间的实标量函数 $V^{(r)}(P, t)$, 与 $V^{(r)}(P, t)$ 相综合的解析信号为 $V(P, t)$ 。通过观察来确定这些量如何随时间变化, 当然是不可能的, 因为任何一种探测器都只是记录在一个时间间隔内的平均, 在此时间间隔内, 扰动就已改变符号非常多次了。可观察的强度 $I(P)$ 与 $V^{(r)2}(P, t)$ 的平均值成正比, 因此, 除了一个无关紧要的常数以外,

$$I(P) = 2\langle V^{(r)2}(P, t) \rangle = \langle V(P, t)V^*(P, t) \rangle, \quad (1)$$

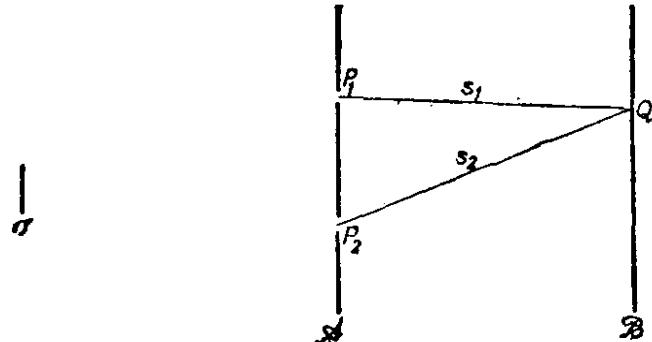


图 10.1 来自扩展光源 σ 的多色光的干涉实验

式中已用了 § 10.2(24) 式。

现在考虑波场中的两点 P_1 和 P_2 。除了测量强度 $I(P_1)$ 和 $I(P_2)$ 以外，还可以从实验上测定来自这两点的振动叠加所引起的干涉效应。为此，设想有一个不透明的屏 \mathcal{A} 横放在场中，屏上 P_1 和 P_2 处有一对针孔，考虑放在与光源相反的另一侧并且离 \mathcal{A} 相当远的第二个屏 \mathcal{B} 上的强度分布（图 10.1）。为了简单起见，假定两个屏之间的媒质折射率为 1。设 s_1 和 s_2 是从 P_1 和 P_2 到屏 \mathcal{B} 上某一代表点 Q 的距离。我们可以把 P_1 和 P_2 看作次级扰动的中心，因此 Q 处的复扰动由下式给出：

$$V(Q, t) = K_1 V(P_1, t - t_1) + K_2 V(P_2, t - t_2). \quad (2)$$

式中 t_1 和 t_2 分别是光从 P_1 传播到 Q 和从 P_2 传播到 Q 所需的时间，即

$$t_1 = \frac{s_1}{c}, \quad t_2 = \frac{s_2}{c}, \quad (3)$$

式中 c 是光在真空中的速度。因子 K_1 和 K_2 与 s_1 和 s_2 成反比，还取决于开孔的大小和实验的几何布局 (P_1 和 P_2 处的入射角和衍射角)。因为从 P_1 和 P_2 发出的次级子波位相与初级波相差 $1/4$ 周期（参看 § 8.2, § 8.3），所以 K_1 和 K_2 都是纯虚数。

由 (1) 和 (2) 式得出， Q 处的强度为¹⁾

$$\begin{aligned} I(Q) &= K_1 K_1^* \langle V_1(t - t_1) V_1^*(t - t_1) \rangle \\ &\quad + K_2 K_2^* \langle V_2(t - t_2) V_2^*(t - t_2) \rangle \\ &\quad + K_1 K_2^* \langle V_1(t - t_1) V_2^*(t - t_2) \rangle \\ &\quad + K_2 K_1^* \langle V_2(t - t_2) V_1^*(t - t_1) \rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

现在假定场是平稳的，我们可以在所有这些式子中移动时间原点，因此得出

$$\langle V_1(t - t_1) V_1^*(t - t_1) \rangle = \langle V_1(t) V_1^*(t) \rangle = I_1, \quad (5)$$

其他各项也有类似的关系。如果又利用 (3) 式，并且记住 K_1 和 K_2 是纯虚数，则 (4) 式可简化为

1) 今后在方便的场合均使用缩写记号，用 $V_1(t)$ 代替 $V(P_1, t)$ ， $\Gamma_{11}(t)$ 代替 $\Gamma(P_1, P_1, t)$ ，等等。

$$I(Q) = |K_1|^2 I_1 + |K_2|^2 I_2 + 2 |K_1 K_2| \Gamma_{12}^{(r)} \left(\frac{s_2 - s_1}{c} \right), \quad (6)$$

式中 $\Gamma_{12}^{(r)}(\tau)$ 是函数

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle V_1(t + \tau) V_2^*(t) \rangle \quad (7)$$

的实部。 (7) 式所表示的这个量在部分相干性理论中是基本的。我们称之为 P_1 和 P_2 处光振动的互相干性，这里所考虑的 P_1 处的振动比 P_2 处落后了时间 τ ； $\Gamma_{12}(\tau)$ 称为波场的互相干函数¹⁾。当两点重合时 ($P_1 = P_2$)，得出

$$\Gamma_{11}(\tau) = \langle V_1(t + \tau) V_1^*(t) \rangle, \quad (8)$$

于是就谈到了 P_1 处光振动的自相干性；当 $\tau = 0$ 时，它化为普通强度：

$$\Gamma_{11}(0) = I_1, \quad \Gamma_{22}(0) = I_2.$$

(6) 式中 $|K_1|^2 I_1$ 项显然就是当 P_1 处的针孔单独打开时 ($K_2 = 0$) 在 Q 处观察到的强度， $|K_2|^2 I_2$ 项也有类似的解释。用 $I^{(1)}(Q)$ 和 $I^{(2)}(Q)$ 分别表示这两个强度，即

$$\begin{aligned} I^{(1)}(Q) &= |K_1|^2 I_1 = |K_1|^2 \Gamma_{11}(0), \\ I^{(2)}(Q) &= |K_2|^2 I_2 = |K_2|^2 \Gamma_{22}(0). \end{aligned} \quad (9)$$

又将 $\Gamma_{12}(\tau)$ 归一化：

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)} \sqrt{\Gamma_{22}(0)}} = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{I_1} \sqrt{I_2}}. \quad (10)$$

根据即将得知的理由， $\gamma_{12}(\tau)$ 将称为光振动的复相干度。借助于 (9) 和 (10) 式，(6) 式最后可写成下述形式：

$$\begin{aligned} I(Q) &= I^{(1)}(Q) + I^{(2)}(Q) + 2 \sqrt{I^{(1)}(Q)} \sqrt{I^{(2)}(Q)} \\ &\quad \times \gamma_{12}^{(r)} \left(\frac{s_2 - s_1}{c} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

式中 $\gamma_{12}^{(r)}$ 表示 γ_{12} 的实部。

1) 在平稳随机过程的一般理论中， $\Gamma_{12}(\tau)$ 称为 $V_1(t)$ 和 $V_2(t)$ 的交叉相关函数 (cross-correlation function，又译互相关函数)，而 $\Gamma_{11}(\tau)$ 称为 $V_1(t)$ 的自相关函数。

公式(11)是平稳光场的一般干涉定律. 它表明,为了确定两束光叠加所引起的强度,就必须知道每束光的强度和复相干度实部 $\gamma_{12}^{(r)}$ 的值. 以后将说明如何从表征光源和媒质透射特性的数据计算 $\gamma_{12}^{(r)}$.

如果从 P_1 和 P_2 发出的光不直接到达 Q 处,而是经过一个插入的光学系统;并且,如果色散效应可忽略,则只要用程差 $P_2Q - P_1Q$ 代替 $s_2 - s_1$, (11) 式仍保持有效. 采用这种推广,当由一初级光束得出两个干涉光束的方法不是在 P_1 和 P_2 处作“波阵面分割”,而是在单独一点 P_1 紧邻处作“振幅分割”时,例如在迈克耳孙干涉仪中,公式(11)也成立. 在后一种情况下,(11)式中要用 $\gamma_{12}^{(r)}(\tau)$ 代替 $\gamma_{12}^{(r)}(\tau)$.

与扰动 $V^{(r)}$ 不同,相关函数 $\gamma_{12}^{(r)}$ 和 $\Gamma_{12}^{(r)}$ 代表可用实验确定的量. 为了对给定的任一对点 P_1 和 P_2 以及给定的任一个 τ 值求出 $\gamma_{12}^{(r)}$ 的值,放一个不透明的屏横过光束,屏上 P_1 和 P_2 处有一对针孔,如图 10.1 所示. 然后在屏的后方一点 Q 处(使 $P_2Q - P_1Q = c\tau$) 测量强度 $I(Q)$. 再分别测量来自每一个针孔的光强度 $I^{(1)}(Q)$ 和 $I^{(2)}(Q)$. 利用这三个观测值,根据(11)式, $\gamma_{12}^{(r)}$ 为

$$\gamma_{12}^{(r)} = \frac{I(Q) - I^{(1)}(Q) - I^{(2)}(Q)}{2 \sqrt{I^{(1)}(Q)} \sqrt{I^{(2)}(Q)}}. \quad (12)$$

为了确定 $\Gamma_{12}^{(r)}$,还必须测量每一针孔处的强度 $I(P_1)$ 和 $I(P_2)$. 根据(10)和(12)式, $\Gamma_{12}^{(r)}$ 为

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^{(r)} &= \sqrt{I(P_1)} \sqrt{I(P_2)} \gamma_{12}^{(r)} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{I(P_1)I(P_2)}{I^{(1)}(Q)I^{(2)}(Q)}} [I(Q) - I^{(1)}(Q) - I^{(2)}(Q)]. \end{aligned} \quad (13)$$

回到(10)式,不难看出我们所采用的归一化保证了 $|\gamma_{12}(\tau)| \leq 1$. 为了证明这一点,如 § 10.2(17) 式,引入截断函数

$$\left. \begin{aligned} V_T^{(r)}(P, \tau) &= V^{(r)}(P, \tau), & \text{当 } |\tau| \leq T \text{ 时,} \\ &= 0, & \text{当 } |\tau| > T \text{ 时.} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

并用 $V_T(P, t)$ 表示相结合的解析信号。由薛华兹不等式¹⁾

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty}^{\infty} V_T(P_1, t + \tau) V_T^*(P_2, t) dt \right|^2 \\ & \leq \int_{-\infty}^{\infty} V_T(P_1, t + \tau) V_T^*(P_1, t + \tau) dt \\ & \quad \times \int_{-\infty}^{\infty} V_T(P_2, t) V_T^*(P_2, t) dt. \end{aligned} \quad (15)$$

在右方第一个积分中, 可用 t 代替 $t + \tau$ 。然后两边都除以 $4T^2$, 取 $T \rightarrow \infty$ 时的极限, 由此得出,

$$|\Gamma_{12}(\tau)|^2 \leq \Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0), \quad (16)$$

或者, 由 (10) 式得出,

$$|\gamma_{12}(\tau)| \leq 1. \quad (17)$$

将 (11) 式表示为稍有不同的形式, 最能看出 γ_{12} 的意义。设 $\bar{\nu}$ 是光的平均频率, 并写出

$$\gamma_{12}(\tau) = |\gamma_{12}(\tau)| e^{i[\alpha_{12}(\tau) - 2\pi\bar{\nu}\tau]}, \quad (18)$$

式中

$$\alpha_{12}(\tau) = 2\pi\bar{\nu}\tau + \arg \gamma_{12}(\tau). \quad (19)$$

于是, (11) 式变为

$$\begin{aligned} I(Q) &= I^{(1)}(Q) + I^{(2)}(Q) + 2\sqrt{I^{(1)}(Q)}\sqrt{I^{(2)}(Q)} \\ &\quad \times |\gamma_{12}(\tau)| \cos [\alpha_{12}(\tau) - \delta], \end{aligned} \quad (20)$$

式中参量 τ 和位相差 δ 的值为

$$\tau = \frac{s_2 - s_1}{c}, \quad \delta = 2\pi\bar{\nu}\tau = \frac{2\pi}{\lambda}(s_2 - s_1), \quad (21)$$

λ 是平均波长。如果 $|\gamma_{12}(\tau)|$ 为极值 1, 则 Q 处的强度与波长为 λ 的严格单色光在 P_1 和 P_2 处振动之间的位相差为 $\alpha_{12}(\tau)$ 时在 Q 处所得出的强度相同。在这种情况下, P_1 和 P_2 处的振动(它们之间有适当的时间延迟 τ)可称为相干的²⁾。如果 $\gamma_{12}(\tau)$ 为另

1) 例如, 见 H. Margenau and G. M. Murphy, *The Mathematics of Physics and Chemistry* (New York, D. van Nostrand Co., 1947), p. 131.

2) L. Mandel 和 E. Wolf 已研究过相干光的一般性质, 见 *J. Opt. Soc. Amer.*, **51** (1961), 815。

一极值零，则(20)式中最后一项不存在；两个光束不产生任何干涉效应，因此 P_1 和 P_2 处的振动可称为不相干的。如果 $|\gamma_{12}(\tau)|$ 不是这两个极值，即 $0 < |\gamma_{12}(\tau)| < 1$ ，则 P_1 和 P_2 处的振动称为部分相干的， $|\gamma_{12}(\tau)|$ 表示它们的相干度¹⁾。

不管 $|\gamma_{12}|$ 的值如何，强度 $I(Q)$ 也可表示为下述形式。

$$\begin{aligned} I(Q) = & |\gamma_{12}(\tau)| \left\{ I^{(1)}(Q) + I^{(2)}(Q) \right. \\ & + 2 \sqrt{I^{(1)}(Q)} \sqrt{I^{(2)}(Q)} \cos[\alpha_{12}(\tau) - \delta] \Big\} \\ & + \left\{ 1 - |\gamma_{12}(\tau)| \right\} \left\{ I^{(1)}(Q) + I^{(2)}(Q) \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

第一、二行的项可看作是由两束强度为 $|\gamma_{12}(\tau)| I^{(1)}(Q)$ 和 $|\gamma_{12}(\tau)| \times I^{(2)}(Q)$ 而相对位相差为 $\alpha_{12}(\tau) - \delta$ 的光相干叠加引起的；第三行的项可看作是由两束强度为 $[1 - |\gamma_{12}(\tau)|] I^{(1)}(Q)$ 和 $[1 - |\gamma_{12}(\tau)|] I^{(2)}(Q)$ 的光不相干叠加引起的。因此，从两个针孔到达 Q 点的光可看作是相干光和不相干光的混合，其强度比为

$$\frac{I_{\text{相干}}}{I_{\text{不相干}}} = \frac{|\gamma_{12}(\tau)|}{1 - |\gamma_{12}(\tau)|}, \quad (23a)$$

或

$$\frac{I_{\text{相干}}}{I_{\text{总}}} = |\gamma_{12}|, \quad (I_{\text{总}} = I_{\text{相干}} + I_{\text{不相干}}). \quad (23b)$$

我们已经看到（见(12)式）， $\gamma_{12}^{(r)}$ 可在适当的干涉实验中通过强度测量来确定。在 § 10.4.1 中将看到，在大多数有实际意义的情况下， γ_{12} 的模（原则上还有它的位相）同样能从这样的实验确定。

§ 10.3.2 互相干的谱表示

设

$$V_T^{(r)}(P, t) = \int_{-\infty}^{\infty} v_T(P, \nu) e^{-2\pi i \nu t} d\nu \quad (24)$$

1) M. Francon 和 S. Mallick 讨论过测量相干度的不同方法，见 *Progress in Optics*, Vol. 6, ed. E. Wolf (Amsterdam, North-Holland Publishing Company and New York, J. Wiley, 1967), p. 71.

是实截断函数 $V_T^{(r)}$ 的傅里叶积分表示。于是，由傅里叶反演公式，

$$v_T(P, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} V_T^{(r)}(P, t) e^{2\pi i \nu t} dt, \quad (25)$$

由此得出，

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} V_T^{(r)}(P_1, t + \tau) V_T^{(r)}(P_2, t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} V_T^{(r)}(P_2, t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} v_T(P_1, \nu) e^{-2\pi i \nu(t+\tau)} d\nu \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} V_T^{(r)}(P_2, t) e^{-2\pi i \nu t} dt \right] v_T(P_1, \nu) e^{-2\pi i \nu \tau} d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} v_T(P_1, \nu) v_T^*(P_2, \nu) e^{-2\pi i \nu \tau} d\nu. \end{aligned} \quad (26)$$

其次，(26)式两边都除以 $2T$ ，并对 $v_T(P_1, \nu) v_T^*(P_2, \nu)/2T$ 这个量作“修匀运算”，例如对随机函数 $V^{(r)}$ 的系综作系综平均(用一横线表示)，如同前面 §10.2(20)式中所说明那样。最后取 $T \rightarrow \infty$ 时的极限，就可以预期得到¹⁾

$$\langle V^{(r)}(P_1, t + \tau) V^{(r)}(P_2, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} G_{12}(\nu) e^{-2\pi i \nu \tau} d\nu, \quad (27)$$

式中

$$G_{12}(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{v_T(P_1, \nu) v_T^*(P_2, \nu)}{2T} \right]. \quad (28)$$

函数 $G_{12}(\nu)$ 可称为 P_1 和 P_2 处光振动的互谱密度。它是前面 [§ 10.2(22)式] 引入的谱密度的推广，当两点重合时，前者就化为后者。互谱密度是平稳随机过程理论中的交叉功率谱概念的光学模拟。(27)式表明，实相关函数 $\langle V^{(r)}(P_1, t + \tau) V^{(r)}(P_2, t) \rangle$ 和互谱密度 $G_{12}(\nu)$ 构成一傅里叶变换对²⁾。

1) 这里应加上与 658 页注 2 同样的附注。

2) 在 $P_1 = P_2$ 的情况下，这个结果是熟知的 Wiener-Khintchine 定理的光学等效形式 [N. Wiener, *Acta Math.*, 55 (1930), 117; A. Khintchine, *Math. Ann.*, 109 (1934), 604]。

可以不用修匀过程而用 (27) 式的傅里叶逆变换来定义互谱密度 $G_{12}(\nu)$ 。这另一种方法完全适用于本章的主要部分。

现在转到复表示。设

$$V(P, t) = 2 \int_0^\infty v(\nu) e^{-2\pi i \nu t} d\nu \quad (29)$$

是与 $V^{(r)}(P, t)$ 相结合的解析信号(参看 § 10.2)。通过类似于由(24)式导出(27)式的分析得出,

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}(\tau) &= \langle V(P_1, t + \tau) V^*(P_2, t) \rangle \\ &= 4 \int_0^\infty G_{12}(\nu) e^{-2\pi i \nu \tau} d\nu. \end{aligned} \quad (30)$$

因为 Γ_{12} 不包含属于负频率的谱分量, 它是一个解析信号。所以, 如果用 $\Gamma_{12}^{(r)}$ 和 $\Gamma_{12}^{(i)}$ 表示它的实部和虚部, 即

$$\Gamma_{12}(\tau) = \Gamma_{12}^{(r)}(\tau) + i\Gamma_{12}^{(i)}(\tau), \quad (31)$$

则这些函数由下述希耳伯特变换关系相联系:

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^{(i)}(\tau) &= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma_{12}^{(r)}(\tau')}{\tau' - \tau} d\tau', \\ \Gamma_{12}^{(r)}(\tau) &= -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma_{12}^{(i)}(\tau')}{\tau' - \tau} d\tau'. \end{aligned} \quad (32)$$

由此得出, [参看 § 10.2(11)–(15)式], $|\Gamma_{12}|$ 作为 τ 的函数, 它是 $\Gamma_{12}^{(r)}$ 的包络; 并且由(30), (31)和(27)式得出¹⁾,

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^{(r)}(\tau) &= 2 \langle V^{(r)}(P_1, t + \tau) V^{(r)}(P_2, t) \rangle \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} G_{12}(\nu) e^{-2\pi i \nu \tau} d\nu. \end{aligned} \quad (33)$$

而且 $|\gamma_{12}|$ 是实相关因子

$$\begin{aligned} \gamma_{12}^{(r)}(\tau) &= \frac{\Gamma_{12}^{(r)}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)} \sqrt{\Gamma_{22}(0)}} \\ &= \frac{\langle V^{(r)}(P_1, t + \tau) V^{(r)}(P_2, t) \rangle}{\sqrt{\langle V^{(r)2}(P_1, t) \rangle} \sqrt{\langle V^{(r)2}(P_2, t) \rangle}} \end{aligned} \quad (34)$$

1) 不难证明, $\Gamma_{12}^{(i)}(\tau)$ 也等于 $2 \langle V^{(i)}(P_1, t + \tau) V^{(i)}(P_2, t) \rangle$, $\Gamma_{12}^{(i)}(\tau) = 2 \langle V^{(i)}(P_1, t + \tau) V^{(r)}(P_2, t) \rangle = -2 \langle V^{(r)}(P_1, t + \tau) V^{(i)}(P_2, t) \rangle$ [例如, 见 P. Roman and E. Wolf, *Nuovo Cimento*, 17 (1960), 474–476, 或 L. Mandel, *Progress in Optics*, Vol. 2, ed. E. Wolf (Amsterdam, North Holland Publishing Company and New York, J. Wiley and Sons, 1963), 241–242].

的包络。

(30) 式给出互相干函数 $\Gamma_{12}(\tau)$ 的谱表示。 (33) 式表明, $\Gamma_{12}(\tau)$ 的实部等于实函数 $V^{(r)}(P_1, t)$ 和 $V^{(r)}(P_2, t)$ 的交叉相关函数的两倍, 而 (32) 式给出 $\Gamma_{12}(\tau)$ 的实部和虚部之间的联系。

§ 10.4 准单色光的干涉和衍射

我们已经看到, 为了充分描述部分相干光的干涉, 一般必须知道互相干函数 $\Gamma_{12}(\tau)$, 或与它等效的普通强度 I_1 和 I_2 以及复相干度 $r_{12}(\tau)$ 。现在限于讨论准单色光的重要情况, 即光所含的谱成分的频率范围 $\Delta\nu$ 比平均频率 $\bar{\nu}$ 小很多。我们将看到, 在这种情况下, 理论的形式较简单。特别是, 我们将发现, 根据在许多应用中均满足的某种附加的假定, 就有可能用与参量 τ 无关的相关函数代替 $\Gamma_{12}(\tau)$ 和 $r_{12}(\tau)$ 。

§10.4.1 准单色光的干涉. 互强度

让我们再次考虑图 10.1 所示的干涉实验。根据 § 10.3(20) 式, 干涉图样中 Q 点处的强度为

$$I(Q) = I^{(1)}(Q) + I^{(2)}(Q) + 2 \sqrt{I^{(1)}(Q)} \sqrt{I^{(2)}(Q)} \times |r_{12}(\tau)| \cos [\alpha_{12}(\tau) - \delta], \quad (1)$$

式中

$$\tau = \frac{s_2 - s_1}{c}, \quad \delta = 2\pi\bar{\nu}\tau = \frac{2\pi}{\lambda} (s_2 - s_1). \quad (2)$$

现在假定光是准单色的。由 § 10.3(18) 式, 按与 § 10.2(11) 式中相同的方法得出, $|r_{12}(\tau)|$ 和 $\alpha_{12}(\tau)$ 作为 τ 的函数, 它们都比 $\cos 2\pi\bar{\nu}\tau$ 和 $\sin 2\pi\bar{\nu}\tau$ 变化缓慢。而且, 如果 P_1 和 P_2 处的开孔足够小, 则分别来自每个孔的衍射光强度 $I^{(1)}(Q)$ 和 $I^{(2)}(Q)$ 将在图样的一个区域内明显地保持不变, 在这个区域内, $\cos 2\pi\bar{\nu}\tau$ 和 $\sin 2\pi\bar{\nu}\tau$ 已改变符号许多次了。由此得出, 在任一点 Q 附近的强度分布, 是由几乎均匀的背景 $I^{(1)}(Q) + I^{(2)}(Q)$ 叠加上具有几乎

不变的振幅 $2\sqrt{I^{(1)}(Q)}\sqrt{I^{(2)}(Q)}|\gamma_{12}(\tau)|$ 的正弦式强度分布而组成的。图 10.2 示出三种典型情况中总强度分布的特性。在 Q 点附近的强度极大值和极小值，作为良好的近似，由下式给出：

$$\left. \begin{aligned} I_{\text{极大}} &= I^{(1)}(Q) + I^{(2)}(Q) + 2\sqrt{I^{(1)}(Q)}\sqrt{I^{(2)}(Q)}|\gamma_{12}(\tau)|, \\ I_{\text{极小}} &= I^{(1)}(Q) + I^{(2)}(Q) - 2\sqrt{I^{(1)}(Q)}\sqrt{I^{(2)}(Q)}|\gamma_{12}(\tau)|. \end{aligned} \right\} (3)$$

因此， Q 处的条纹可见度为

$$V(Q) = \frac{I_{\text{极大}} - I_{\text{极小}}}{I_{\text{极大}} + I_{\text{极小}}} = \frac{2\sqrt{I^{(1)}(Q)}\sqrt{I^{(2)}(Q)}}{I^{(1)}(Q) + I^{(2)}(Q)}|\gamma_{12}(\tau)|. \quad (4)$$

这个公式用两束光的强度和它们的相干度来表示条纹可见度。如果两束光强度相等 [$I^{(1)} = I^{(2)}$]，通常就是这样的，则 (4) 式简化为

$$V(Q) = |\gamma_{12}(\tau)|, \quad (5)$$

即条纹可见度等于相干度。

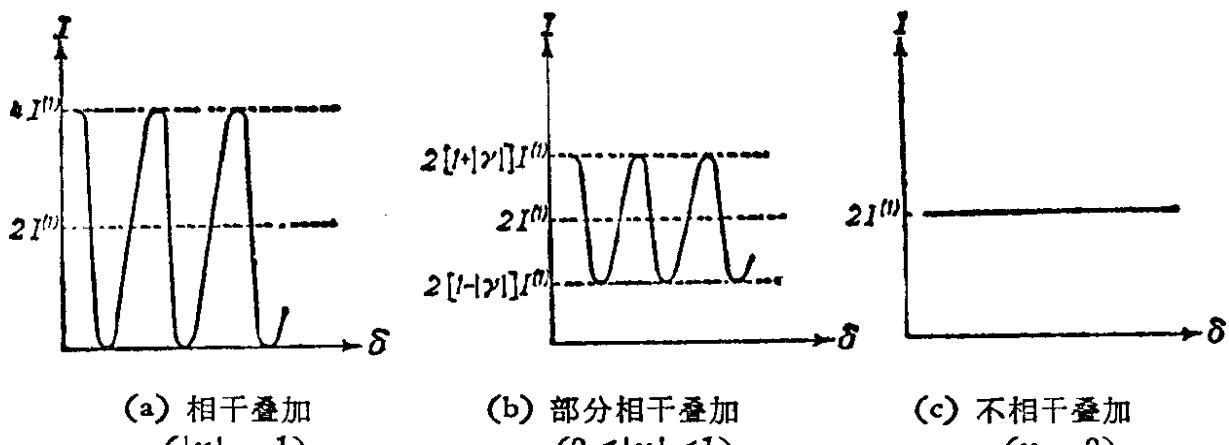


图 10.2 两束具有相同强度 $I^{(1)}$ 而相干度为 $|\gamma|$ 的准单色光产生的干涉图样中的强度分布

根据 (1) 和 (2) 式， Q 点附近的强度极大值位置为

$$\frac{2\pi}{\lambda}(s_2 - s_1) - \alpha_{12}(\tau) = 2m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

正如开孔被波长为 λ 的严格单色光照明而 P_1 处的位相比 P_2 处推迟了 $\alpha_{12}(\tau)$ 一样。现在根据 §7.3(7) 式，位相推迟 2π 相当于干

涉图样在平行于 P_1P_2 的方向上有一位移量 $a\lambda/d$, 其中 d 是 P_1 和 P_2 之间的距离, a 是屏 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 之间的距离. 因此, 相对于由 P_1 和 P_2 处单色及同位相照明而形成的条纹, 准单色条纹在平行于双孔连线方向上有一位移量

$$x = \frac{\bar{\lambda}}{2\pi} \frac{a}{d} \alpha_{12}(\tau). \quad (6)$$

我们看到, 两束准单色光的复相干度的振幅和位相, 可通过测量干涉条纹的可见度和位置来确定. 这些结果与 § 7.5.8 所述通过测量可见度曲线来确定光谱线中强度分布的迈克耳孙方法密切有关. 由 § 10.3(10) 和 (30) 式得出,

$$\gamma_{11}(\tau) = \frac{\int_0^\infty G(\nu) e^{-2\pi i \nu \tau} d\nu}{\int_0^\infty G(\nu) d\nu},$$

式中 $G(\nu)$ 是谱密度. 因此, 根据傅里叶反演定理, $G(\nu)$ 与 $\gamma_{11}(\tau)$ 的傅里叶变成正比. 但刚才已经看到, $\gamma_{11}(\tau)$ 的模其实就是条纹可见度, 而 $\gamma_{11}(\tau)$ 的位相与在适当的干涉实验中形成的条纹位置有简单关系. 因此, 按照完全相同于迈克耳孙曾用过的方法就能计算 G . 图 7.54 和 7.55 中所示的可见度曲线, 显然可解释成 $|\gamma_{11}|$ 被表示为两束光之间的时间延迟的函数.

实际上, 两个干涉光束之间引起的时间延迟 τ 常常很小, 因此可简化上述公式. 根据 § 10.3(30), (18) 和 (10) 式, 有

$$\begin{aligned} |\Gamma_{12}(\tau)| e^{i\alpha_{12}(\tau)} &= \sqrt{I_1} \sqrt{I_2} |\gamma_{12}(\tau)| e^{i\alpha_{12}(\tau)} \\ &= 4 \int_0^\infty G_{12}(\nu) e^{-2\pi i (\nu - \bar{\nu}) \tau} d\nu. \end{aligned} \quad (7)$$

如果 $|\tau|$ 小到对于所有 $|G_{12}(\nu)|$ 可觉察的频率都有 $|(\nu - \bar{\nu})\tau| \ll 1$, 即如果

$$|\tau| \ll \frac{1}{\Delta\nu}, \quad (8)$$

则用 1 代替 (7) 式被积函数的指数项时, 显然只引入很小的误差. 根据 § 7.5(105) 式, 条件 (8) 意味着 $|\tau|$ 必须比光的相干时间小

得多。当这个条件满足时， $|\Gamma_{12}(\tau)|$ ， $|\gamma_{12}(\tau)|$ 和 $\alpha_{12}(\tau)$ 分别与 $|\Gamma_{12}(0)|$ ， $|\gamma_{12}(0)|$ 和 $\alpha_{12}(0)$ 的区别就微不足道了。下面的写法是有好处的，令¹⁾

$$J_{12} = \Gamma_{12}(0) = \langle V_1(t) V_2^*(t) \rangle, \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} \mu_{12} = \gamma_{12}(0) &= \frac{\Gamma_{12}(0)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)} \sqrt{\Gamma_{22}(0)}} = \frac{J_{12}}{\sqrt{J_{11}} \sqrt{J_{22}}} \\ &= \frac{J_{12}}{\sqrt{I_1} \sqrt{I_2}}, \end{aligned} \quad (9b)$$

$$\beta_{12} = \alpha_{12}(0) = \arg \gamma_{12}(0) = \arg \mu_{12}. \quad (9c)$$

假定(8)式成立，则这时§10.3(18)和(10)式给出

$$\gamma_{12}(\tau) \sim |\mu_{12}| e^{i(\beta_{12} - 2\pi\nu\tau)} = \mu_{12} e^{-2\pi i\nu\tau}, \quad (10a)$$

$$\Gamma_{12}(\tau) \sim |J_{12}| e^{i(\beta_{12} - 2\pi\nu\tau)} = J_{12} e^{-2\pi i\nu\tau}. \quad (10b)$$

因此，只要(8)式满足，则可在我们所有公式中分别用(10a)和(10b)式右边的量来代替 $\gamma_{12}(\tau)$ 和 $\Gamma_{12}(\tau)$ 。特别是，干涉定律(1)变为

$$\begin{aligned} I(Q) &\sim I^{(1)}(Q) + I^{(2)}(Q) + 2 \sqrt{I^{(1)}(Q)} \sqrt{I^{(2)}(Q)} \\ &\quad \times |\mu_{12}| \cos(\beta_{12} - \delta), \end{aligned} \quad (11)$$

并且只要两个干涉光束之间引起的程差 $|s_2 - s_1| = c|\tau|$ 比相干长度 $c/\Delta\nu$ 小得多，即只要

$$|\Delta\mathcal{S}| = |s_2 - s_1| = \frac{\lambda}{2\pi} \delta \ll \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}, \quad (12)$$

(式中已用到关系式 $c/\Delta\nu = \lambda^2/\Delta\lambda$) 则(11)式成立。

(11)式是初等(准单色)的部分相干性理论的基本公式，它构成了本节其余部分的主题；§10.5中将讨论这一理论的某些应用。在其[由(8)或(12)式所示的]有效范围内，波场中任何两点 P_1 和 P_2 处振动之间的相关，宁可用 J_{12} 而不用 $\Gamma_{12}(\tau)$ 来表征，即宁可用一个取决于两点位置而与时间差值 τ 无关的量来表征。由(10a)式得出，在这一初等理论精确范围内，

1) 在方便的场合仍使用缩写记号，即用 J_{12} 代替 $J(P_1, P_2)$ ，等等。

$$|\gamma_{12}(\tau)| \sim |\mu_{12}|, \quad (13)$$

因此 $|\mu_{12}| (0 \leq |\mu_{12}| \leq 1)$ 表示 P_1 和 P_2 处振动的相干度；并且由(11)式看出， μ_{12} 的位相 β_{12} 表示其有效位相差。 μ_{12} 是 $\gamma_{12}(\tau)$ 的特殊情况，正如 $\gamma_{12}(\tau)$ 一样， μ_{12} 通常称为复相干度（有时称为复相干因子）；而 J_{12} 称为互强度。

§10.4.2 扩展不相干准单色光源发出的光的互强度和相干度的计算

(a) 范西特-泽尼克定理

现在我们来确定被一个扩展的准单色初级光源 σ 照明的屏 \mathcal{A} 上两点 P_1 和 P_2 的互强度 J_{12} 和复相干度 μ_{12} 。为了简单起见，取 σ 为平行于 \mathcal{A} 的平面的一部分，并假定光源和屏之间的媒质是均匀的。还假定 σ 的线度比光源与屏之间的距离 OO' 小得多（图 10.3），以及 OO' 与光源代表点 S 到 P_1 和 P_2 的连线之间的夹角很小。

设想光源被分为许多面元 $d\sigma_1, d\sigma_2, \dots$ ，其中心在 S_1, S_2, \dots 各点，其线度比平均波长 $\bar{\lambda}$ 小得多。如果 $V_{m1}(t)$ 和 $V_{m2}(t)$ 是由面元 $d\sigma_m$ 在 P_1 和 P_2 处引起的复扰动，则在这两点处的总扰动为

$$V_1(t) = \sum_m V_{m1}(t), \quad V_2(t) = \sum_m V_{m2}(t). \quad (14)$$

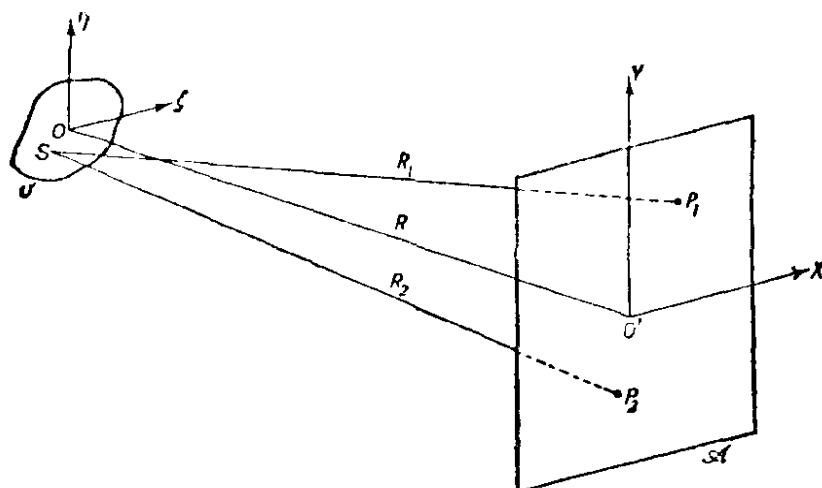


图 10.3 范西特-泽尼克定理的图示

因此,

$$\begin{aligned} J(P_1, P_2) &= \langle V_1(t) V_2^*(t) \rangle \\ &= \sum_m \langle V_{m1}(t) V_{m2}^*(t) \rangle + \sum_{m \neq n} \sum \langle V_{m1}(t) V_{n2}^*(t) \rangle. \end{aligned} \quad (15)$$

现在, 可假定由光源不同面元引起的光振动是统计独立(互不相干)的, 平均值为零, 因此¹⁾

$$\langle V_{m1}(t) V_{n2}^*(t) \rangle = \langle V_{m1}(t) \rangle \langle V_{n2}^*(t) \rangle = 0, \text{ 当 } m \neq n \text{ 时.} \quad (16)$$

如果 R_{m1} 和 R_{m2} 是光源面元 $d\sigma_m$ 到 P_1 和 P_2 的距离, 则

$$\begin{aligned} V_{m1}(t) &= A_m \left(t - \frac{R_{m1}}{\nu} \right) \frac{e^{-2\pi i \bar{\nu}(t-R_{m1}/\nu)}}{R_{m1}}, \\ V_{m2}(t) &= A_m \left(t - \frac{R_{m2}}{\nu} \right) \frac{e^{-2\pi i \bar{\nu}(t-R_{m2}/\nu)}}{R_{m2}}, \end{aligned} \quad (17)$$

式中 $|A_m|$ 表征第 m 个面元辐射的强度, 而 $\arg A_m$ 表征其位相²⁾, ν 是在光源和屏之间的媒质中光的速度。因此,

$$\begin{aligned} \langle V_{m1}(t) V_{m2}^*(t) \rangle &= \left\langle A_m \left(t - \frac{R_{m1}}{\nu} \right) A_m^* \left(t - \frac{R_{m2}}{\nu} \right) \right\rangle \\ &\times \frac{e^{2\pi i \bar{\nu}(R_{m1}-R_{m2})/\nu}}{R_{m1} R_{m2}} \\ &= \left\langle A_m(t) A_m^* \left(t - \frac{R_{m2}-R_{m1}}{\nu} \right) \right\rangle \\ &\times \frac{e^{2\pi i \bar{\nu}(R_{m1}-R_{m2})/\nu}}{R_{m1} R_{m2}}. \end{aligned} \quad (18)$$

如果程差 $R_{m2} - R_{m1}$ 比光的相干长度小得多, 则可忽略 A_m^* 的自变量中的推迟项 $(R_{m2} - R_{m1})/\nu$, 由 (15), (16) 和 (18) 式得出,

$$J(P_1, P_2) = \sum_m \langle A_m(t) A_m^*(t) \rangle \frac{e^{2\pi i \bar{\nu}(R_{m1}-R_{m2})/\nu}}{R_{m1} R_{m2}}. \quad (19)$$

1) 不相干总是意味着一个有限(虽然不一定很宽)的光谱范围, 实际上 (16) 式对严格单色光的理想情况并不成立。对于单色光, 有 $V_{m1}(t) = U_{m1} e^{-2\pi i \nu t}$, $V_{m2}(t) = U_{m2} e^{-2\pi i \nu t}$, 式中 U_{m1} 和 U_{m2} 与时间无关, 因此 $\langle V_{m1}(t) V_{m2}^*(t) \rangle = U_{m1} U_{m2}^*$, 这个量一般不为零。

2) A_m 一般还依赖于方向, 但为了简单起见, 我们忽略了这种依赖关系。

$\langle A_m(t)A_m^*(t) \rangle$ 这个量表征光源面元 $d\sigma_m$ 的辐射强度。在任何一种实际情况中，都可以假定光源面元的总数如此之大，以致可把光源看成实际上是连续的。用 $I(S)$ 表示光源单位面积的强度，即 $I(S_m)d\sigma_m = \langle A_m(t)A_m^*(t) \rangle$ ，(19) 式变为¹⁾

$$J(P_1, P_2) = \int_{\sigma} I(S) \frac{e^{i\bar{k}(R_1-R_2)}}{R_1 R_2} dS, \quad (20)$$

式中 R_1 和 R_2 表示光源代表点 S 与 P_1 和 P_2 点之间的距离， $\bar{k} = 2\pi\bar{\nu}/v = 2\pi/\lambda$ 是媒质中的波数。根据(20)和(9b)式，复相干度 $\mu(P_1, P_2)$ 由下式给出：

$$\mu(P_1, P_2) = \frac{1}{\sqrt{I(P_1)} \sqrt{I(P_2)}} \int_{\sigma} I(S) \frac{e^{i\bar{k}(R_1-R_2)}}{R_1 R_2} dS, \quad (21)$$

式中

$$\begin{aligned} I(P_1) &= J(P_1, P_1) = \int_{\sigma} \frac{I(S)}{R_1^2} dS, \\ I(P_2) &= J(P_2, P_2) = \int_{\sigma} \frac{I(S)}{R_2^2} dS, \end{aligned} \quad (21a)$$

是 P_1 和 P_2 处的强度。

我们注意到，积分(21)与另一种很不相同的情况下出现的积分一样，这就是根据惠更斯-菲涅耳原理计算球面波在不透明屏上的开孔衍射引起的衍射图样中的复扰动时出现的积分。更精确地说，(21)式意味着，复相干度描述被一个扩展的准单色初级光源照明的平面上固定点 P_2 处和可变点 P_1 处振动的相关，它等于中心在 P_2 的某个衍射图样中相应点 P_1 处的归一化复振幅。这个图样可按下述方法得出：用一个大小和形状同光源一样的衍射孔代替光源，会聚于 P_2 的球面波充满该孔，孔内波阵面上的振幅分布与光源上的强度分布成正比。这个结果首先由范西特²⁾确定，其后又由泽尼克³⁾用一种较简单的方法得出。我们把它称为范西特-泽尼克定理。

1) 今后常用记号 $dS, dP_1 \dots$ 表示中心在 $S, P_1 \dots$ 点的面元。

2) P. H. van Cittert, *Physica*, 1 (1934), 201.

3) F. Zernike, *Physica*, 5 (1938), 785.

在大多数应用中，可假定强度 $I(s)$ 与 s 在表面上的位置无关（均匀强度）。因此，相应的衍射问题，就是均匀振幅的球面波被一个大小和形状同光源一样的孔衍射的问题。

设 (ξ, η) 是光源上代表点 s 在 O 处参考轴的坐标， (X_1, Y_1) 和 (X_2, Y_2) 是 P_1 和 P_2 在 O' 处另一套平行参考轴的坐标（图 10.3）。如果用 R 表示距离 OO' ，则

$$R_1^2 = (X_1 - \xi)^2 + (Y_1 - \eta)^2 + R^2,$$

因此

$$R_1 \sim R + \frac{(X_1 - \xi)^2 + (Y_1 - \eta)^2}{2R}. \quad (22)$$

这里只保留了 X_1/R , Y_1/R , ξ/R 和 η/R 中的首项¹⁾。对 R_2 也得出严格类似的表达式，因此

$$\begin{aligned} R_1 - R_2 &\sim \frac{(X_1^2 + Y_1^2) - (X_2^2 + Y_2^2)}{2R} \\ &- \frac{(X_1 - X_2)\xi + (Y_1 - Y_2)\eta}{R}. \end{aligned} \quad (23)$$

在(20)和(21)式的被积函数的分母中，作为良好的近似，可用 R 代替 R_1 和 R_2 。又令

$$\frac{(X_1 - X_2)}{R} = p, \quad \frac{(Y_1 - Y_2)}{R} = q, \quad (24)$$

$$\phi = \frac{\bar{k}[(X_1^2 + Y_1^2) - (X_2^2 + Y_2^2)]}{2R}. \quad (25)$$

则(21)式化为

$$\mu_{12} = \frac{e^{i\phi} \iint_{\sigma} I(\xi, \eta) e^{-i\bar{k}(p\xi + q\eta)} d\xi d\eta}{\iint_{\sigma} I(\xi, \eta) d\xi d\eta}. \quad (26)$$

1) 即 $R \gg \sqrt{(X_1 - \xi)^2 + (Y_1 - \eta)^2}$ 时，有

$$R_1 = R \left[1 + \frac{(X_1 - \xi)^2 + (Y_1 - \eta)^2}{R^2} \right]^{1/2} \sim R + \frac{(X_1 - \xi)^2 + (Y_1 - \eta)^2}{2R}.$$

——译者注

因此，如果光源的线度以及 P_1 与 P_2 之间的距离都比光源到这两点的距离小得多，则相干度 $|\mu_{12}|$ 等于光源强度函数的归一化傅里叶变换的绝对值。

(25) 式所定义的量 ϕ 有一简单解释。根据(23)式，它表示位相差 $2\pi(OP_1 - OP_2)/\bar{\lambda}$ ，当

$$OP_1 - OP_2 \ll \bar{\lambda} \quad (27)$$

时，它显然可忽略。

对于中心在 O 点而半径为 ρ 的均匀圆形光源，(26) 式积分得出(参看 § 8.5.2)：

$$\mu_{12} = \left(\frac{2J_1(\nu)}{\nu} \right) e^{i\phi}, \quad (28)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \nu &= \bar{k}\rho \sqrt{p^2 + q^2} = \frac{2\pi}{\bar{\lambda}} \frac{\rho}{R} \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2}, \\ \phi &= \frac{2\pi}{\bar{\lambda}} \left[\frac{(X_1^2 + Y_1^2) - (X_2^2 + Y_2^2)}{2R} \right], \end{aligned} \right\} (29)$$

J_1 是一阶第一类贝塞耳函数¹⁾。根据 § 8.5.2， $|2J_1(\nu)/\nu|$ 从 $\nu = 0$ 时为 1 平稳地下降到 $\nu = 3.83$ 时为零；因此，随着 P_1 和 P_2 点越来越分开，相干度就平稳地降低，当 P_1 和 P_2 分开的距离为

$$P_1P_2 = \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2} = \frac{0.61R\bar{\lambda}}{\rho} \quad (30)$$

时，就完全不相干了。 ν 进一步增大将重新引起小量的相干性，但相干度保持小于 0.14，当 $\nu = 7.02$ 时又完全不相干。因为当 ν 通过 $J_1(\nu)$ 的每一个零值时， $J_1(\nu)$ 改变符号，所以位相 $\beta_{12} = \arg \mu_{12}$ 在该处有 π 的变化，结果在每次条纹消失以后，亮暗条纹互换位置。

函数 $|2J_1(\nu)/\nu|$ 从 $\nu = 0$ 时为 1 平稳地下降到 $\nu = 1$ 时为

1) 符号 J 也用来表示互强度，因互强度总是带着两个下标或几个自变量出现，所以不致引起混淆。

0.88, $\nu = 1$ 即

$$P_1 P_2 = \frac{0.16 R \bar{\lambda}}{\rho}. \quad (31)$$

把对理想值 1 偏离 12% 看作最大容许偏离, 由此得出, 被角半径 $\alpha = \rho/R$ 的准单色均匀光源近乎相干照明的圆面积直径¹⁾ 为 $0.16 \bar{\lambda}/\alpha$. 在估计干涉和衍射实验所需光源的大小时, 这个结果是有用的.

举一个例子, 考虑被太阳直照的屏上一任意点周围的“相干面积”的大小. 日轮 (sun's disc) 在地球表面上所张的角直径 2α 约为 $0^\circ 32' \sim 0.0093$ 弧度. 因此, 如果忽略日轮上的亮度变化, 则相干面积的直径 d 近似等于 $0.16 \bar{\lambda}/0.0047 \sim 34 \bar{\lambda}$. 取平均波长 $\bar{\lambda}$ 为 5.5×10^{-5} 厘米, 得出 $d \sim 0.019$ 毫米.

在这里, 要用新的眼光看待迈克耳孙测量恒星的角直径的方法(参看 § 7.3.6). 根据(5)和(13)式, 条纹可见度等于迈克耳孙恒星干涉仪两个外镜(图 7.16 中的 M_1 和 M_2)处光振动的相干度. 对于角半径为 α 的亮度均匀的圆形恒星轮, 根据(30)式, 相干度为零(第一次条纹消失)时的两镜最小距离等于 $0.61 \bar{\lambda}/\alpha$, 与 § 7.3(43)式一致. 而且, 通过测量条纹的可见度及其位置, 原则上不仅能确定恒星的直径, 而且也能确定恒星轮上的强度分布. 因为根据 § 10.4.1, 测量条纹的可见度和位置, 相当于确定复相干度 μ_{12} 的振幅和位相, 而且根据(26)式, 强度分布与 μ_{12} 的逆傅里叶变换成正比.

§ 7.3.6 中曾提到汉布里·布朗 (Hanbury Brown) 和特威兹 (Twiss) 对迈克耳孙恒星干涉仪的重大改进. 在汉布里·布朗-特威兹系统中, 来自恒星的光聚焦在两个光电探测器 P_1 和 P_2 上, 研究二者电流输出涨落的相关, 就得到该恒星的信息. 详尽地分析

1) 早在 1865 年, 费尔德 (E. Verdet) 就估计过“相干圆”的直径略小于 $0.5 R \bar{\lambda} / \rho$ [*Ann. Scientif. de l'École Normale Supérieure*, 2 (1865), 291; 以及他的 *Lecons d'Optique Physique* (Paris, L'Imprimerie Impériale), 1 (1869), 106].

这一系统的性能，必须考虑光电效应的量子性质¹⁾，还需要某些电子学知识，因而超出本书的范围。然而这种方法的原理却并不难理解。在理想的实验条件(无噪声)下，每个光电探测器的电流输出与入射光的瞬时强度 $I(t)$ 成正比，而电流输出的涨落与 $\Delta I(t) = I(t) - \langle I(t) \rangle$ 成正比。因此，在汉布里·布朗和特威兹干涉仪中，实际测得的量与 $\Omega_{12} = \langle \Delta I_1 \Delta I_2 \rangle$ 成正比。简单的统计计算表明²⁾， Ω_{12} 与相干度的平方成正比，因此，知道了 Ω_{12} ，如同知道了 $|\mu_{12}|$ ，也就得出关于恒星大小的信息了。

(b) 霍普金斯公式

在推导范西特-泽尼克公式(21)中，曾假定光源 σ 与 P_1 和 P_2 点之间的媒质是均匀的。不难将此公式推广到其他情况，例如媒质是不均匀的，或者媒质是由若干个折射率不同的均匀区相连接组成的。

我们再次设想光源被分为许多小面元 $d\sigma_1, d\sigma_2, \dots$ ，其中心在 S_1, S_2, \dots 各点，其线度比平均波长 λ 小得多。目前，如果 $V_{m1}(t)$ 和 $V_{m2}(t)$ 代表由面元 $d\sigma_m$ 在 P_1 和 P_2 处引起的扰动，则(15)和(16)式仍成立，但在(17)式中，必须用更普遍的函数代替每个因子 $e^{i\bar{k}R_{mj}}/R_{mj}$ ($j = 1, 2$; $\bar{k} = 2\pi\nu/\nu$)。引入媒质的透射函数 $K(S, P, \nu)$ ，它按与 § 9.5.1 中类似的方法定义；它代表一个位于 S 处的面元 $d\sigma$ 的单色点光源在 P 处引起的复扰动，这个单色点光源的频率为 ν 并具有单位强度和零位相。对于均匀媒质，由惠更斯-菲涅耳原理得出， $K(S, P, \nu) = -ie^{i\bar{k}R}/\lambda R$ ，式中

1) 参看 R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss, *Proc. Roy. Soc., A.* **242** (1957), 300; 同上, *A.* **243** (1957), 291. 又见 E. M. Purcell, *Nature*, **178** (1956), 1449; F. D. Kahn, *Optica Acta*, **5** (1958), 93 和 L. Mandel, *Proc. Phys. Soc.*, **72** (1958), 1037; *Progress in Optics*, Vol. 2 ed. E. Wolf (Amsterdam, North Holland Publishing Company and New York, J. Wiley and Sons, 1963), 181.

2) E. Wolf, *Phil. Mag.*, **2** (1957), 351. 又见 J. A. Ratcliffe, *Rep. Progr. Phys.* (London, Physical Society), **19** (1956), 233.

R 表示距离 SP , 已假定 SP 与 $d\sigma$ 的法线夹角充分小。由此得出, 在更普遍的情况下, 必须用 $i\bar{\lambda}K(S_m, P, \bar{v})$ 代替因子 $e^{i\bar{\lambda}R_{mi}}/R_{mi}$; 过渡到连续分布, 就得出下述关系式来代替(20)式:

$$J(P_1, P_2) = \bar{\lambda}^2 \int_{\sigma} I(S) K(S, P_1, \bar{v}) K^*(S, P_2, \bar{v}) dS. \quad (32)$$

根据(32)和(9b)式,

$$\begin{aligned} \mu(P_1, P_2) &= \frac{\bar{\lambda}^2}{\sqrt{I(P_1)} \sqrt{I(P_2)}} \\ &\times \int_{\sigma} I(S) K(S, P_1, \bar{v}) K^*(S, P_2, \bar{v}) dS, \end{aligned} \quad (33)$$

式中 $I(P_1) = J(P_1, P_1)$ 和 $I(P_2) = J(P_2, P_2)$ 分别是 P_1 和 P_2 处的强度。

为了以后应用起见, 将(32)和(33)式表示成稍有不同的形式是有好处的。令

$$\begin{aligned} i\bar{\lambda}K(S, P_1, \bar{v}) \sqrt{I(S)} &= U(S, P_1), \\ i\bar{\lambda}K(S, P_2, \bar{v}) \sqrt{I(S)} &= U(S, P_2). \end{aligned} \quad (34)$$

公式(32)和(33)变为

$$J(P_1, P_2) = \int_{\sigma} U(S, P_1) U^*(S, P_2) dS, \quad (35a)$$

$$\mu(P_1, P_2) = \frac{1}{\sqrt{I(P_1)} \sqrt{I(P_2)}} \int_{\sigma} U(S, P_1) U^*(S, P_2) dS. \quad (35b)$$

注意到(34)式所定义的 $U(S, P)$, 与一个位于 S 的频率为 ν 并具有强度 $\sqrt{I(S)}$ 和零位相的严格单色点光源在 P 处引起的扰动成正比。因此(35)式可解释为, 通过一个“相缔合”的单色光源上每一个光源点在 P_1 和 P_2 处引起的那些扰动¹⁾, 来表示一个扩展的准单色光源所引起的互强度 $J(P_1, P_2)$ 和复相干度 $\mu(P_1, P_2)$ 。

霍普金斯²⁾根据一些启发性的考虑最早提出了(35b)式, 它

1) 不应假定这一虚构的光源发出的光的互强度和复相干度也由(35)式给出。因为如前所述, 在单色辐射的极限情况下, 推导这些公式时用到的(16)式不成立; 单色光的相干度事实上总是等于1。

2) H.H. Hopkins, *Proc. Roy. Soc., A*, **208** (1951), 263.

在解决仪器光学的相干性问题中很有用处。此公式的主要用处是由于它类似范西特-泽尼克定理，不必明显利用平均过程就能计算一个不相干光源发出的光的复相干度。

§ 10.4.3 一个例子

我们将通过讨论一个实验来说明上述考虑。透镜 L_0 把初级光源 σ_0 成象在针孔 σ_1 上，透镜 L_1 使从针孔出射的光变为平行光。另一个同 L_1 完全一样的透镜 L_2 把那些干涉光束会聚到透镜 L_2 焦平面 \mathcal{F} 内的焦点 F 上。平面镜 M 用来缩短仪器的总长度（图 10.4）。如果在 L_1 和 L_2 之间的平行光束中放入一个衍射掩模（一个暗屏 \mathcal{A} ，例如一块均匀变黑的底片），其上的那些孔具有所需的任意大小、形状和分布，则在焦平面 \mathcal{F} 内形成它的夫琅和费衍射图样，正常使用时，工作人员通过显微镜观察衍射图样时可替换掩模¹⁾。

假如 σ_0 是一个准单色点光源，它就会在 σ_1 平面内其几何象附近产生相干照明。此相干照明面积的大小与一个光源点由透镜 L_0 形成的爱里衍射图样 σ_A 的有效大小同一数量级。由一个有限的初级光源在 σ_1 平面内形成的光分布，可认为是由许多这样的图

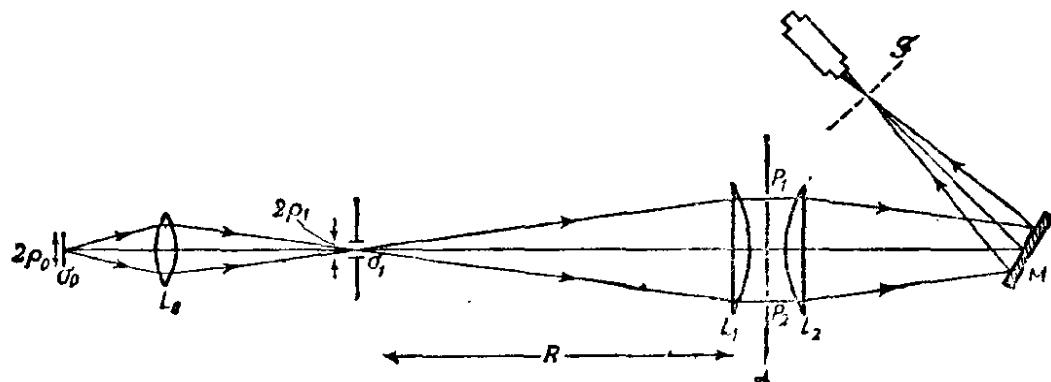


图 10.4 衍射计

1) 这种仪器称为衍射计，它的主要用途是以光学衍射方法解决 X 射线结构分析问题 [参看 C. A. Taylor, R. M. Hinde and H. Lipson, *Acta Cryst.*, **4** (1951), 261; A. W. Hanson, H. Lipson, and C. A. Taylor, *Proc. Roy. Soc. A*, **218** (1953), 371; W. Hughes and C. A. Taylor, *J. Sci. Instr.*, **30** (1953), 105]。

样不相干叠加引起的。如果假定这个扩展光源由 L_0 形成的象以及针孔 σ_1 两者都比 σ_1 大得多，则被照明的针孔 σ_1 本身实际上可作为一个不相干光源¹⁾。根据范西特-泽尼克定理，这样一个光源在透镜 L_1 的第一个表面上（更一般地说，在平面 \mathcal{A} 内）任何两点处的振动之间引起相关；用通常的近似，由公式 (28) 给出复相干度：

$$\mu_{12} = |\mu_{12}| e^{i\beta_{12}} = \frac{2J_1(\nu)}{\nu} e^{i\phi}, \quad (36a)$$

式中

$$\nu = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\rho_1 d}{R}, \quad \phi = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{r_1^2 - r_2^2}{2R} \right), \quad (36b)$$

式中 $d = P_1 P_2$, ρ_1 是 σ_1 的半径, R 是 σ_1 和 L_1 之间的距离, r_1 和 r_2 是由轴到 P_1 和 P_2 的距离。

如果衍射掩模 \mathcal{A} 内有两个小圆孔，其中心在 P_1 和 P_2 ，则在焦平面 \mathcal{F} 内观察到的图样，是由这两个孔出射的具有相干度 $|\mu_{12}|$ 的两个部分相干光束叠加引起的。我们将研究随着 P_1 和 P_2 的距离逐渐增大，即随着两个干涉光束之间的相干度改变，这个图样结构的变化。

假定 P_1 和 P_2 的位置是轴对称的，因此 $\phi = 0$ ，并且在焦平

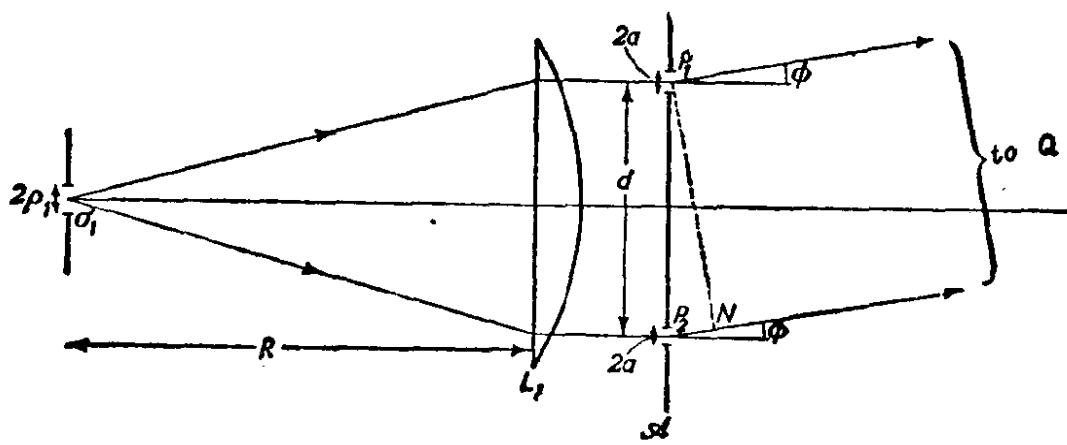


图 10.5 衍射计焦平面内强度分布的计算

1) 这一点将在 § 10.5.1 中定量地讨论。又见 A. T. Forrester, Amer. J. Phys., 24 (1956), 194.

面内 Q 点处各与两个光束之一有关的强度 $I^{(1)}(Q)$ 和 $I^{(2)}(Q)$ 相等, 二者均由圆孔衍射的夫琅和费公式 (§ 8.5(14) 式) 给出。如果 Q 点是在与 \mathcal{A} 的法线成 ϕ 角的方向上衍射的光线焦点, a 是每个孔的半径 (见图 10.5), 则除了一个归一化因子外, 有

$$I^{(1)}(Q) = I^{(2)}(Q) = \left(\frac{2J_1(u)}{u}\right)^2, \quad u = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \phi. \quad (37)$$

衍射到 Q 点的两个光束之间的位相差 δ 为

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} P_2 N = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \phi = Cuv, \quad C = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{R}{\rho_1 a}, \quad (38)$$

式中 N 是由 P_1 落到 P_2 处衍射光线上的垂足。把 (36), (37) 和 (38) 式代入 (11) 式, 最后得出, 当 P_1 和 P_2 处两个孔的距离为 d 时, 焦平面内 $Q(\phi)$ 点处的强度表达式如下:

$$I(\phi, d) = 2 \left(\frac{2J_1(u)}{u}\right)^2 \left\{ 1 + \left| \frac{2J_1(v)}{v} \right| \cos [\beta_{12}(v) - Cuv] \right\}, \quad (39)$$

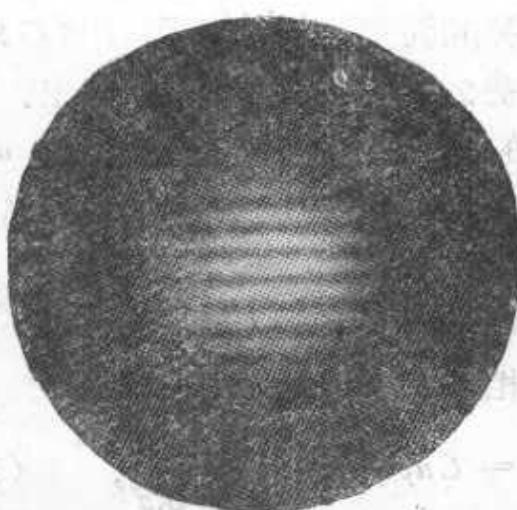
式中

$$\left. \begin{aligned} \beta_{12}(v) &= 0, & \text{当 } \frac{2J_1(v)}{v} > 0 \text{ 时,} \\ & & \left. \right\} \\ &= \pi, & \text{当 } \frac{2J_1(v)}{v} < 0 \text{ 时.} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

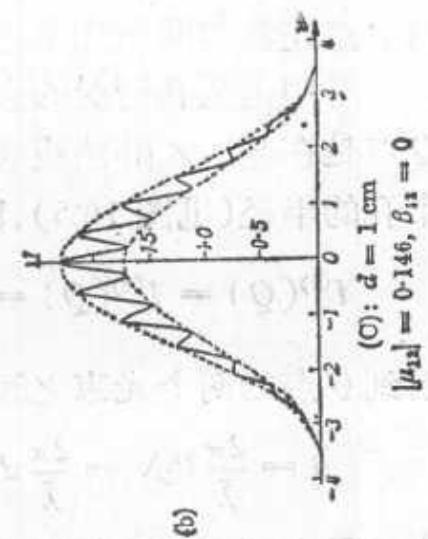
图 10.6 中示出利用这种装置对不同的双孔距离 d 观察到的图样照片。还示出按公式 (39) 计算的相应理论曲线。虚线代表包络:

$$\left. \begin{aligned} I_{\text{极大}}(\phi, d) &= 2 \left(\frac{2J_1(u)}{u}\right)^2 \left\{ 1 + \left| \frac{2J_1(v)}{v} \right| \right\}, \\ I_{\text{极小}}(\phi, d) &= 2 \left(\frac{2J_1(u)}{u}\right)^2 \left\{ 1 - \left| \frac{2J_1(v)}{v} \right| \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

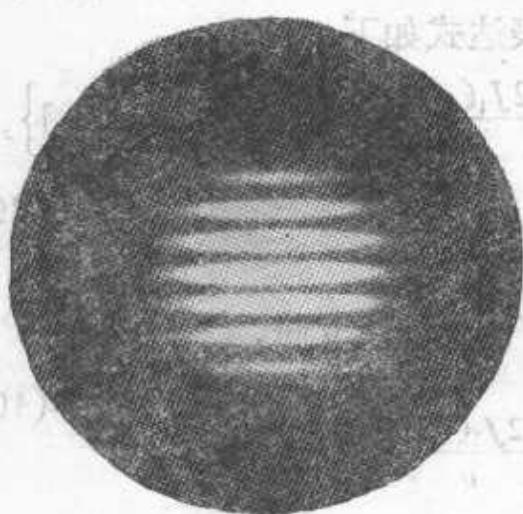
注意到下述结果是有意义的: 当 $\beta = \pi$ 时 (情况 (D) 和 (E)), 每个图样中心处强度是相对的极小值, 而不是极大值, 与我们的一般考虑一致。相干度随双孔距离的变化如图 10.7 所示, 其中与图 10.6 照片对应的六种情形也用相应的字母标明。



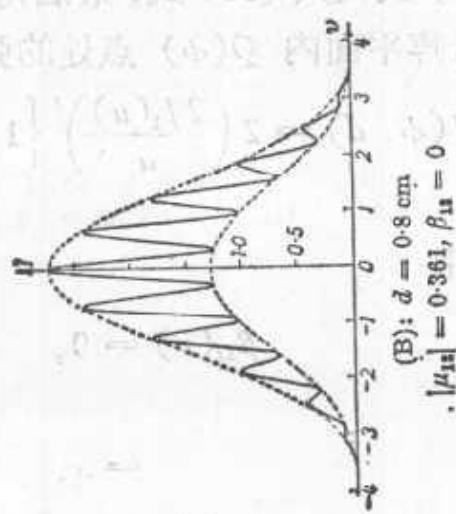
(a)



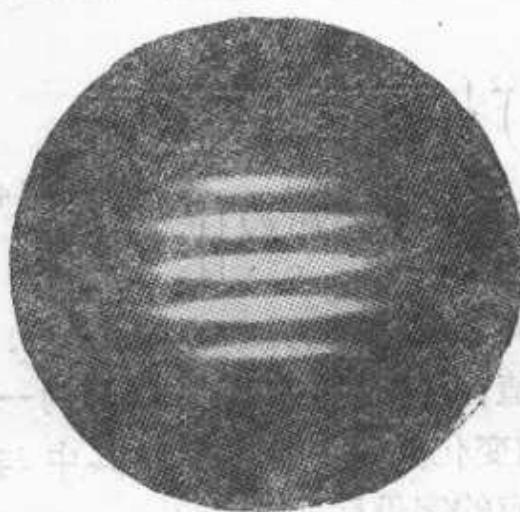
(b)



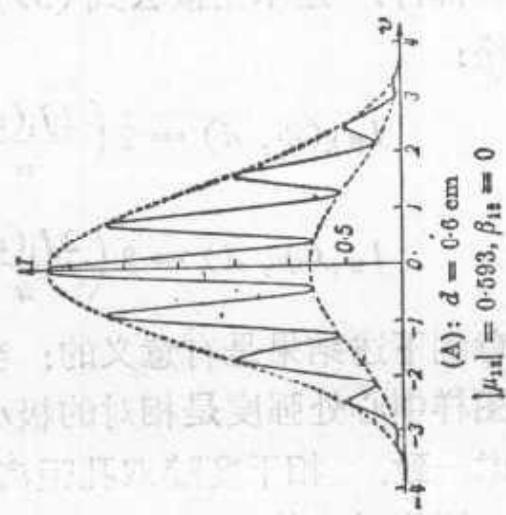
(a)



(b)



(a)



(b)

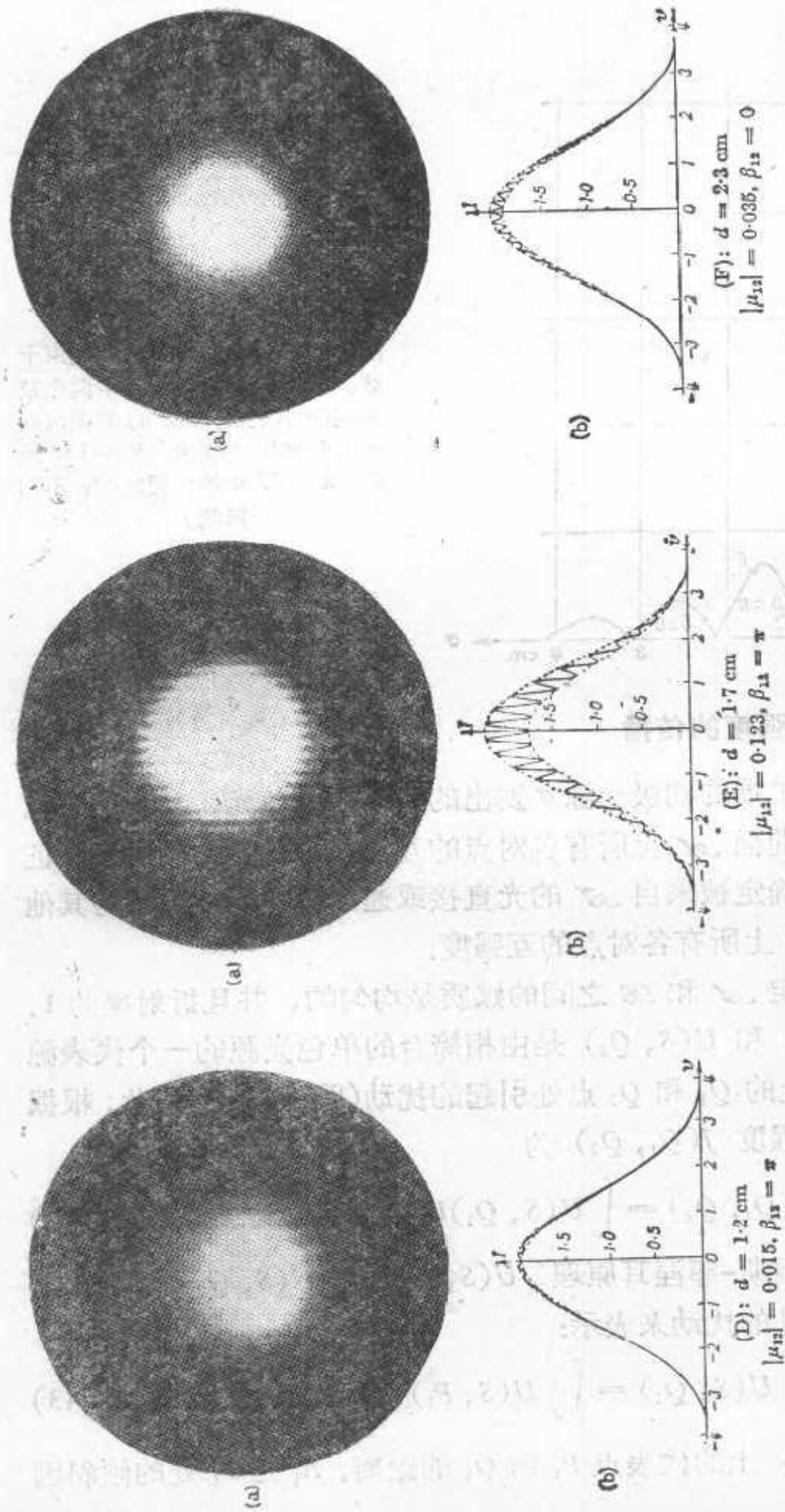


图 10.6 部分相干光的双光束干涉

(a) 观察到的图样, (b) 理论强度曲线, 衍射计遇镜 L_0 , L_1 和 L_2 的焦距: $f_0 = 20$ 厘米, $f_1 = f_2 = R = 152$ 厘米, L_0 的直径: 5 厘米, L_0 到 σ_1 的距离: 40 厘米, L_1 和 L_2 的距离: 14 厘米, L_2 到镜 M 的距离: 85 厘米, 针孔 σ_1 的直径: $2\rho_1 = 0.9 \times 10^{-3}$ 厘米, P_1 和 P_2 处小孔的直径 $2a$: 0.14 厘米, 平均波长 $\lambda = 5790$ 埃
 直径 $2\rho_1 = 0.9 \times 10^{-3}$ 厘米, P_1 和 P_2 处小孔的直径 $2a$: 0.14 厘米, 平均波长 $\lambda = 5790$ 埃

[引自 B. J. Thompson and E. Wolf, *J. Opt. Soc. Amer.*, **47** (1957), 895.]

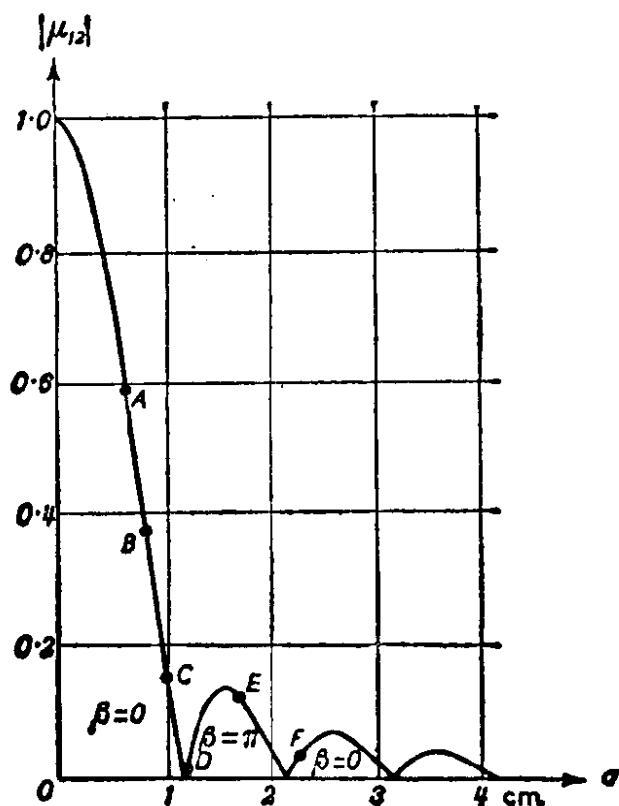


图 10.7 部分相干光的双光束干涉。相干度作为衍射计中两个被照明的小孔距离 d 的函数 ($\rho_1 = 0.45 \times 10^{-2}$ 厘米, $R = 152$ 厘米, $\lambda = 5790$ 埃; 假定 σ_1 不相干照明)

§ 10.4.4 互强度的传播

考虑从扩展的初级光源 σ 发出的一束准单色光，并假定与光束相截的虚曲面 \mathcal{A} 上所有各对点的互强度是已知的。下面将证明，由此可确定被来自 \mathcal{A} 的光直接或通过光学系统照明的其他任一曲面 \mathcal{B} 上所有各对点的互强度。

首先假定 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 之间的媒质是均匀的，并且折射率为 1。设 $U(s, Q_1)$ 和 $U(s, Q_2)$ 是由相缔合的单色光源的一个代表源点 s 在 \mathcal{B} 上的 Q_1 和 Q_2 点处引起的扰动(图 10.8)。因此，根据(35)式，互强度 $J(Q_1, Q_2)$ 为

$$J(Q_1, Q_2) = \int_{\sigma} U(s, Q_1) U^*(s, Q_2) dS. \quad (42)$$

现在利用惠更斯-菲涅耳原理， $U(s, Q_1)$ 和 $U(s, Q_2)$ 可用 \mathcal{A} 上所有各点处的扰动来表示：

$$U(s, Q_1) = \int_{\mathcal{A}} U(s, P_1) \frac{e^{i\vec{k}s_1}}{s_1} A_1 dP_1. \quad (43)$$

式中 s_1 是 \mathcal{A} 上的代表点 P_1 到 Q_1 的距离， A_1 是 P_1 处的倾斜因

子(第八章中用 K 表示), $\hat{k} = 2\pi\hat{v}/c$ 是平均波数。当倾斜很小时, $\Lambda_1 \sim -i/\lambda$ 。根据(43)式和 $U(s, Q_2)$ 的类似表达式, 得出

$$U(s, Q_1)U^*(s, Q_2) = \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{B}} U(s, P_1)U^*(s, P_2) \times \frac{e^{i\hat{k}(s_1-s_2)}}{s_1 s_2} \Lambda_1 \Lambda_2^* dP_1 dP_2, \quad (44)$$

式中 P_1 和 P_2 两点独立地取积分曲面 \mathcal{A} 上所有各个位置。然后将(44)式代入(42)式, 变换积分次序。对 σ 积分正好给出 $J(P_1, P_2)$, 由此得出:

$$J(Q_1, Q_2) = \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{B}} J(P_1, P_2) \frac{e^{i\hat{k}(s_1-s_2)}}{s_1 s_2} \Lambda_1 \Lambda_2^* dP_1 dP_2. \quad (45)$$

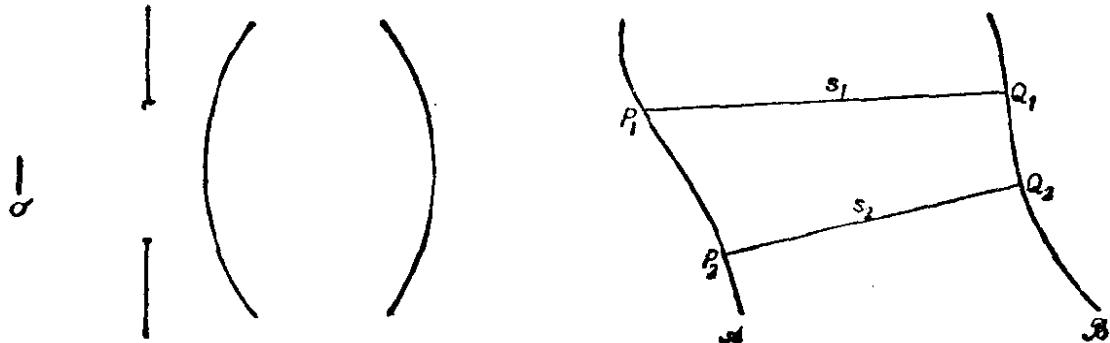


图 10.8 互强度的传播: 公式(45)的图示

这就是所要求的互强度传播的公式, 是由泽尼克¹⁾提出的。推导(45)式时已含蓄地假定从曲面 \mathcal{A} 上每一点出射的光都到达 Q_1 点和 Q_2 点。注意两个曲面之间有任何光阑存在时, 积分要限于曲面 \mathcal{A} 上能把光传送到 Q_1 和 Q_2 的那些部分, 除非光阑小到其边缘处的衍射效应不能忽略。需计及衍射时, 从 \mathcal{A} 到 \mathcal{B} 的过渡要分两步进行, 首先从 \mathcal{A} 到光阑平面, 然后从光阑平面到曲面 \mathcal{B} 。

在 Q_1 点与 Q_2 点重合的特殊情况下, 又用强度 $I(P_1)$, $I(P_2)$ 和复相干度 $\mu(P_1, P_2)$ 代替 $J(P_1, P_2)$, (45) 式就化为下述强度表达式:

1) F. Zernike, *Physica*, 5 (1938), 791.

$$I(Q) = \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} \sqrt{I(P_1)} \sqrt{I(P_2)} \mu(P_1, P_2) \\ \times \frac{e^{i\vec{k}(s_1 - s_2)}}{s_1 s_2} A_1 A_2^* dP_1 dP_2. \quad (46)$$

这个公式把 Q 点处的强度表示为与光束相截的任意曲面 \mathcal{A} 上每一对面元 dP_1, dP_2 所作的贡献之和(见图 10.9). 每一对面元的贡献依赖于 P_1 和 P_2 处的强度, 并且每一贡献的权重就是相应的复相干度因子 $\mu(P_1, P_2)$ 的值.

公式(46)可认为是一种关于部分相干场中强度传播的惠更斯-菲涅耳原理. 刚导出的公式与较初等的惠更斯-菲涅耳理论公式之间的相似性具有更深刻的意义, 我们将在部分相干性理论的严格表述中给予阐明(§ 10.7).

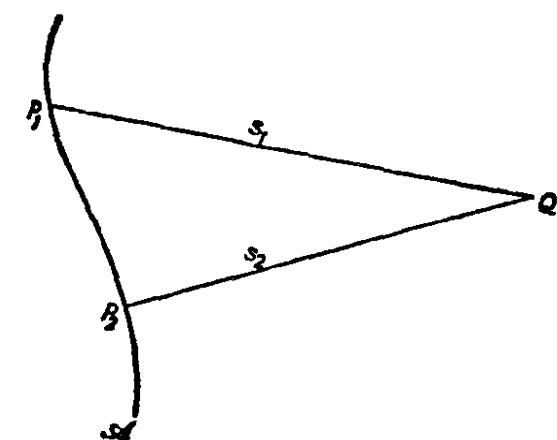


图 10.9 公式(46)的图示

如果从 \mathcal{A} 到达 \mathcal{B} 的光是通过光学系统的, 显然, 因子 $A e^{i\vec{k}_s/s}$ 必须用一个适当的透射函数 $K(P, Q)$ 来代替. 因此得出下述更普遍的公式来代替(45)式:

$$J(Q_1, Q_2) = \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} J(P_1, P_2) K(P_1, Q_1) K^*(P_2, Q_2) dP_1 dP_2. \quad (47)$$

§ 10.5 某些应用

§ 10.5.1 扩展的不相干准单色光源象中的相干度

作为研究部分相干光成象问题的准备, 先讨论一个扩展的不相干光源由共轴光学系统所形成的象的相干度, 将是有好处的. 由于衍射(一般也由于象差)的缘故, 来自每一个光源点的光并不集中于一点, 而是扩展到一有限面积上, 由此引起了象平面上的振动之间的相关度是一有限值. 这些“象图样”中有些彼此重叠, 结

果在象平面内那些彼此足够接近的点上同时接收到相干以及不相干的贡献。

假定 σ 是位于折射率为 n 的均匀物空间内的均匀准单色不相干圆形光源，其半径为 ρ ，其发射光平均(真空)波长为 $\bar{\lambda}_0$ 。又设 D 是物平面与入射光瞳平面之间的距离。对应于象的量用带撇的同样符号来表示。

设 d 是入射光瞳内 P_1 和 P_2 两点之间的距离。假定 $\rho/D \ll 1$ ， $d/D \ll 1$ ， $OP_1 - OP_2 \ll \bar{\lambda}_0$ ，式中 O 是光源的轴点¹⁾；则根据 § 10.4(28) 式，复相干度 $\mu(P_1, P_2)$ 为

$$\mu(P_1, P_2) = \frac{2J_1(\nu)}{\nu}, \quad (1)$$

$$\nu = \frac{2\pi}{\bar{\lambda}} d \sin \alpha = \frac{2\pi n}{\bar{\lambda}_0} d \sin \alpha. \quad (2)$$

式中 $\alpha \sim \sin \alpha \sim \rho/D$ 是从入射光瞳中心看到的光源角半径(图 10.10)。

为了确定出射光瞳平面内任一对点的复相干度，我们可应用传播定律 § 10.4(47) 式。然而，现在涉及的是从一个平面传播到其共轭平面的特殊情况，在这种情况下，传播定律化为较简单的形式，它可直接推导如下：

如果 $U(S, P_1)$ 和 $U(S, P_2)$ 是相缔合的单色光源上一个光

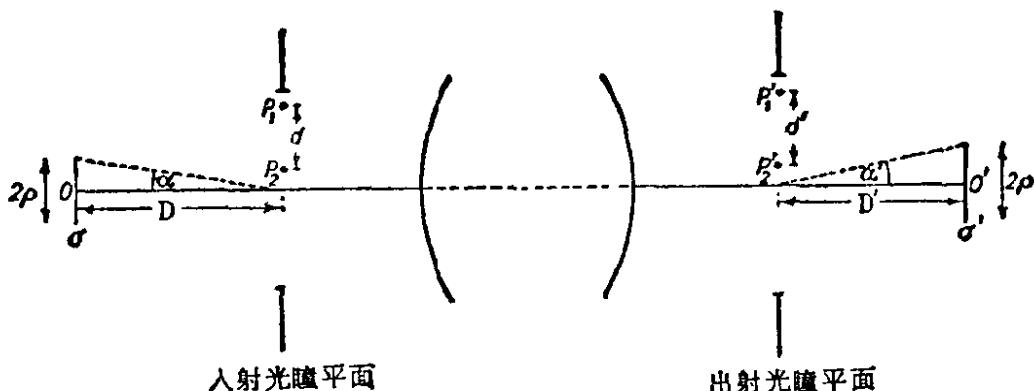


图 10.10 计算不相干光源象中的相干度

1) 如果最后这一条件不满足， $|\mu(P_1, P_2)|$ 仍保持不变，但根据 § 10.4(28) 式， $\mu(P_1, P_2)$ 的位相增加量 $\phi = 2\pi[OP_1 - OP_2]/\bar{\lambda}_0$ 。

源点 S 在 P_1 和 P_2 处引起的复扰动(参看 678 页), 则 S 在出射光瞳内其共轭点处引起的扰动为

$$U(S, P'_1) = K_{11}U(S, P_1), \quad U(S, P'_2) = K_{22}U(S, P_2). \quad (3)$$

式中 $K_{11} = K(P_1, P'_1)$ 是关于在两个光瞳平面的共轭点 P_1 和 P'_1 之间传播的适当的透射函数. 由霍普金斯公式 § 10.4(35b),

$$\mu(P'_1, P'_2) = \frac{1}{\sqrt{I(P'_1)} \sqrt{I(P'_2)}} \int_{\sigma} U(S, P'_1) U^*(S, P'_2) dS. \quad (4)$$

现在两个光瞳平面内的强度 $I(P'_1)$ 和 $I(P_1)$ 的关系是

$$\begin{aligned} I(P'_1) &= \int_{\sigma} |U(S, P'_1)|^2 dS = |K_{11}|^2 \\ &\times \int_{\sigma} |U(S, P_1)|^2 dS = |K_{11}|^2 I(P_1), \end{aligned} \quad (5)$$

$I(P'_2)$ 和 $I(P_2)$ 之间也有类似的关系. 由 (3), (4) 和 (5) 式得出,

$$\begin{aligned} \mu(P'_1, P'_2) &= \frac{K_{11}K_{22}^*}{|K_{11}||K_{22}|} \frac{1}{\sqrt{I(P_1)} \sqrt{I(P_2)}} \\ &\times \int_{\sigma} U(S, P_1) U^*(S, P_2) dS \\ &= e^{i(\Phi_{11}-\Phi_{22})} \mu(P_1, P_2), \end{aligned} \quad (6)$$

式中 Φ_{11} 和 Φ_{22} 分别是 K_{11} 和 K_{22} 的位相. 这个关系式意味着, 出射光瞳内任何两点的相干度 $|\mu|$ 等于入射光瞳内其共轭点的相干度; 而相应点对的复相干度的位相差为 $\Phi_{11} - \Phi_{22}$, 即几何位相差 $2\pi\{[P_1P'_1] - [P_2P'_2]\}/\bar{\lambda}_0$.

设

$$\nu' = \frac{2\pi n'}{\bar{\lambda}_0} d' \sin \alpha'. \quad (7)$$

因为 P'_1 是 P_1 的共轭点, P'_2 是 P_2 的共轭点, 由史密斯-亥姆霍兹定理 (§ 4.4(49) 式) 得出, 在高斯光学精确范围内, $\nu' = \nu^1$. 因此, 由 (1) 和 (6) 式, 出射光瞳内各对点的复相干度可写成

1) 这意味着 ν 和 ν' 代表赛德耳变量的一种特殊选择 (§ 5.2).

$$\mu(P'_1, P'_2) = \left(\frac{2J_1(\nu')}{\nu'} \right) e^{i(\theta_{11} - \theta_{22})}. \quad (8)$$

同 § 10.4(31)式, 如果认为数值 $|\mu| \geq 0.88$ 充分近似于完全相干, 并且记住 $\nu \leq 1$ 时, $|2J(\nu)/\nu| \geq 0.88$, 由此得出, 一个不相干准单色均匀圆形光源将在出射光瞳内产生直径为

$$d'_{\text{相干}} \sim \frac{0.16\bar{\lambda}_0}{n' \sin \alpha'} \quad (9)$$

的相干照明面积, 式中 $2\alpha' \sim 2\rho'/D'$ 是光源象的直径对出射光瞳中心的张角, $\bar{\lambda}_0/n' = \bar{\lambda}$ 是光在象空间中的平均波长.

将 (9) 式表示为稍有不同的形式. 设 r'_A 表示该系统相应的爱里图样中第一暗环的半径,

$$r'_A = \frac{0.61\bar{\lambda}_0}{n' \sin \theta'}, \quad (10)$$

式中 $n' \sin \theta' \sim n'a'/D'$ 是象方的数值孔径. 然后根据 (9) 和 (10) 式, $d'_{\text{相干}}/r'_A \sim 0.16 \sin \theta'/0.61 \sin \alpha'$, 因此

$$d'_{\text{相干}} \sim 0.26a' \left(\frac{r'_A}{\rho'} \right). \quad (11)$$

这一公式利用“物理参量”即相应的爱里图样第一暗环半径 r'_A , 光源几何象半径 ρ' 和出射光瞳半径 a' 可估计出射光瞳的相干照明面积的大小.

如果 $d'_{\text{相干}} \geq 2a'$, 即如果

$$\rho' \leq 0.13r'_A, \quad (12)$$

则出射光瞳以至象平面都几乎是相干照明的.

当 $d'_{\text{相干}} \ll 2a'$, 即

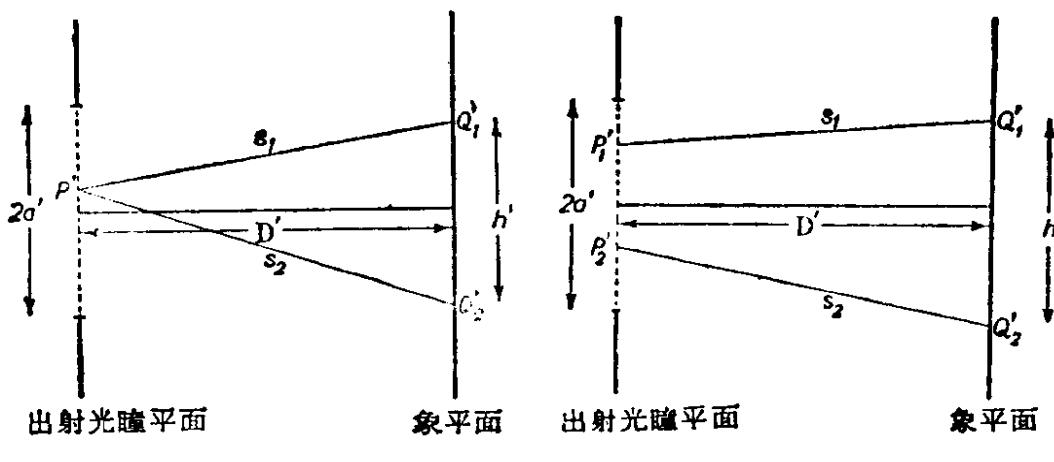
$$\rho' \gg 0.13r'_A \quad (13)$$

时, 出射光瞳的相干照明面积将比出射光瞳本身小得多, 因此在这种情况下, 出射光瞳的照明实际上是不相干的. 于是, 象平面内一对点 Q'_1 和 Q'_2 的复相干度, 本质上与出自一个不相干光源相同; 这个光源与出射光瞳有同样大小、形状和位置, 光源上的强度分布与出射光瞳上的强度分布也相同. 因此, 根据范西特-泽尼克定理 § 10.4(21)式,

$$\mu(Q'_1, Q'_2) = \frac{1}{\sqrt{I(Q'_1)} \sqrt{I(Q'_2)}} \int_{\mathcal{A}'} I(P') \frac{e^{ik(s_1-s_2)}}{s_1 s_2} dP', \quad (14)$$

$$I(Q'_1) = \int_{\mathcal{A}'} \frac{I(P')}{s_1^2} dP', \quad I(Q'_2) = \int_{\mathcal{A}'} \frac{I(P')}{s_2^2} dP'. \quad (15)$$

积分遍及出射光瞳 \mathcal{A}' , s_1 和 s_2 分别表示 \mathcal{A}' 中的代表点 P' 到 Q'_1 点和 Q'_2 点的距离(图 10.11(a)). 利用(5)式, 强度 $I(P')$ 可由入射光瞳内其共轭点处的强度 $I(P)$ 算出. 由于透射函数的位相在(5)式中不出现, 因此 $\mu(Q'_1, Q'_2)$ 与该系统的象差无关. 通常



(a) 出射光瞳的不相干照明 (b) 出射光瞳的部分相干照明

图 10.11 计算象平面内的复相干度

$I(P')$ 实际上是常数; 而且, 如果 Q'_1 点和 Q'_2 点彼此充分靠近, 则(14)式化为

$$\mu(Q'_1, Q'_2) = \frac{2J_1(u')}{u'}, \quad u' = \frac{2\pi n'}{\lambda_0} \frac{a'}{D'} h', \quad (16)$$

式中 h' 是 Q'_1 和 Q'_2 之间的距离.

在一般情况下, 当条件(12)或条件(13)都不成立时, 则出射光瞳被复相干度(8)式所表征的部分相干光照明. 因此, 象平面内各对点的复相干度的值必须利用传播定律 § 10.4(45)式来计算, 而导出下式:

$$\begin{aligned} \mu(Q'_1, Q'_2) &= \frac{1}{\sqrt{I(Q'_1)} \sqrt{I(Q'_2)}} \int_{\mathcal{A}'} \int_{\mathcal{A}'} \sqrt{I(P'_1)} \sqrt{I(P'_2)} \\ &\times \left(\frac{2J_1(v')}{v'} \right) e^{i[\phi_{11}-\phi_{22}+k(s_1-s_2)]} A_1 A_2^* dP'_1 dP'_2. \end{aligned} \quad (17)$$

如果利用 $\mu(Q'_1, Q'_1) = \mu(Q'_2, Q'_2) = 1$ 这个事实，则强度 $I(Q'_1)$ 和 $I(Q'_2)$ 也可由这个公式算出。注意到由于被积函数含有透射函数的位相 Φ_{11} 和 Φ_{22} ，因此现在复相干度依赖于该系统的象差。

§ 10.5.2 聚光镜对显微镜分辨率的影响

为了在显微镜下检查一个不发光的物体，必须照明该物体。如果物体几乎是透明的（通常就是这样），则从后面照明，或称透过照明（transilluminated），然后，穿过了物体的光聚焦在显微镜物镜的象平面上。为了获得充分集中的光，通常采用辅助透镜系统——聚光镜。人们使用的照明方法有多种。我们将扼要叙述两种常用的方法，即所谓临界照明和柯勒（Köhler）照明，并讨论这些方法能达到的分辨率。

(a) 临界照明

在这种照明方法中，一个亮度均匀的光源紧靠在场阑后方，并由聚光镜成象在显微镜物镜的物平面上（图 10.12）。调节场阑孔径的大小，使得它由聚光镜所成的象正好覆盖视场。

聚光器的象平面（物镜的物平面）内的照明区，比单个光源点产生的爱里图样的有效大小要大得多（用 § 10.5.1 的记号， $\rho' \gg r'$ ）。由 § 10.5.1 得出，在这种情况下，物镜的物平面内任一对点的复相干度与充满聚光镜孔径的一个不相干光源所产生的相同；而且，它与聚光镜的象差无关。显然，现在分辨率只依赖于入射到物上的光（由这个因子表征）的相干度以及显微镜物镜的特性。因此，聚光镜的象差对显微镜的分辨率没有影响。泽尼克¹⁾最早用一种不同的方式确定了这个重要结果，它表明人们广泛持有的一种观点，即认为高度地校正过的聚光镜有利于获得高分辨率，是不正确的。

为了估计聚光镜的大小对分辨率的影响，考虑物平面内两个

1) F. Zernike, *Physica*, 5 (1938), 794.

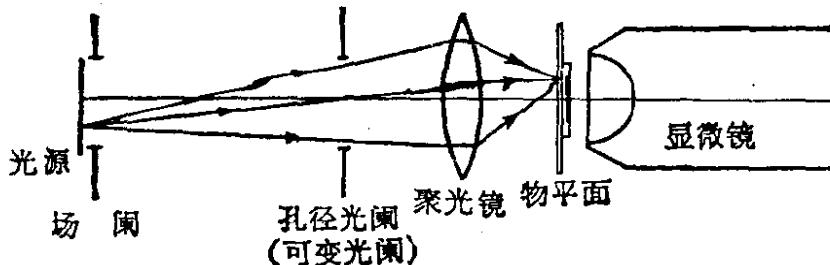


图 10.12 临界照明

针孔 $P_1(X_1, Y_1)$ 和 $P_2(X_2, Y_2)$ 。根据同前面一样的假定, 到达这两个针孔的光的复相干度由形如(16)式的公式给出:

$$\mu(P_1, P_2) = \frac{2J_1(u_{12})}{u_{12}},$$

$$u_{12} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 n'_c \sin \theta'_c}, \quad (18)$$

式中 $n'_c \sin \theta'_c$ 是聚光镜在显微镜物镜一侧的数值孔径。

设 $P(X, Y)$ 是物平面内另外任一点, P' 是它由物镜所成的象。如果假定物镜实际上无象差, 则单独来自 P_1 的光在物镜的象平面内的强度分布是中心在其象 P'_1 处的爱里图样。因此, 如果 $n_0 \sin \theta_0$ 是物镜的数值孔径, 则单独从 P_1 到达 P' 的光强度 $I^{(1)}(P')$, 除了一个常数因子以外, 等于

$$I^{(1)}(P') = \left(\frac{2J_1(v_1)}{v_1} \right)^2,$$

$$v_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{(X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2 n_0 \sin \theta_0}. \quad (19a)$$

从针孔 P_2 到达 P' 的光强度 $I^{(2)}(P')$ 由类似的表达式给出:

$$I^{(2)}(P') = \left(\frac{2J_1(v_2)}{v_2} \right)^2,$$

$$v_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{(X - X_2)^2 + (Y - Y_2)^2 n_0 \sin \theta_0}. \quad (19b)$$

由此得出, 当通过聚光镜照明这两个针孔时, 显微镜物镜的象平面内的强度 $I(P')$ 是由两个部分相干光束叠加引起的。每个光束的强度由(19)式给出, 而两个光束的复相干度由(18)式给出。将这些式子代入 § 10.4(11)式, 即可得出 $I(P')$ 的表达式。如果还

假定 P' 很靠近 P_1 和 P_2 的几何象(更精确地说, 假定 $\delta = [P_1P'] - [P_2P'] \ll \lambda$), 则有

$$I(P') = \left(\frac{2J_1(\nu_1)}{\nu_1} \right)^2 + \left(\frac{2J_1(\nu_2)}{\nu_2} \right)^2 + 2 \left(\frac{2J_1(m\nu_{12})}{m\nu_{12}} \right) \left(\frac{2J_1(\nu_1)}{\nu_1} \right) \left(\frac{2J_1(\nu_2)}{\nu_2} \right), \quad (20)$$

式中

$$m = \frac{n'_c \sin \theta'_c}{n_0 \sin \theta_0},$$

$$\nu_{12} = \frac{u_{12}}{m} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2} n_0 \sin \theta_0. \quad (21)$$

由(20)式可引出某些有趣的结论. 当 $m\nu_{12}$ 是方程 $J_1(m\nu_{12}) = 0$ 的非零根时, (20)式的乘积项消失, 并且化为

$$I(P') = \left(\frac{2J_1(\nu_1)}{\nu_1} \right)^2 + \left(\frac{2J_1(\nu_2)}{\nu_2} \right)^2. \quad (22)$$

这时, 象平面内的强度分布就好象 P_1 和 P_2 被不相干照明一样. 特别是, 当 $m = 1$ 并且 ν_{12} 是 $J_1(\nu_{12}) = 0$ 的非零根时, 亦即两个数值孔径相等并且两个针孔的几何象分开的距离等于物镜的爱里图样任一暗环半径时, 情况将是这样.

当聚光镜的数值孔径很小($m \rightarrow 0$)时, 则 $2J_1(m\nu_{12})/m\nu_{12} \sim 1$, 并且(20)式化为

$$I(P') = \left\{ \frac{2J_1(\nu_1)}{\nu_1} + \frac{2J_1(\nu_2)}{\nu_2} \right\}^2. \quad (23)$$

这时, 不管两个针孔的距离如何, 强度分布与完全相干照明一样.

利用(20)式可研究显微镜物镜的象平面内强度分布对数值孔径的比率 m 的依赖关系. 特别是, 考虑 P'_1 和 P'_2 之间中点处的强度. 当中点处的强度比 P'_1 和 P'_2 每一点处的强度都小 26.5% 时, 就认为两个针孔恰能分辨. 26.5% 的数值相当于不相干照明时圆孔的瑞利判据(参看 § 8.6.2). 我们用同不相干照明[§ 8.6(32)式]和相干照明[§ 8.6(55)式]一样的形式来表示这一极限分辨率距离(P_1P_2)_{极限}:

$$(P_1 P_2)_{\text{极限}} = L(m) \frac{\lambda_0}{n_0 \sin \theta_0}. \quad (24)$$

根据这个判据由(20)式计算得出的曲线 $L(m)$ 如图 10.13 所示。

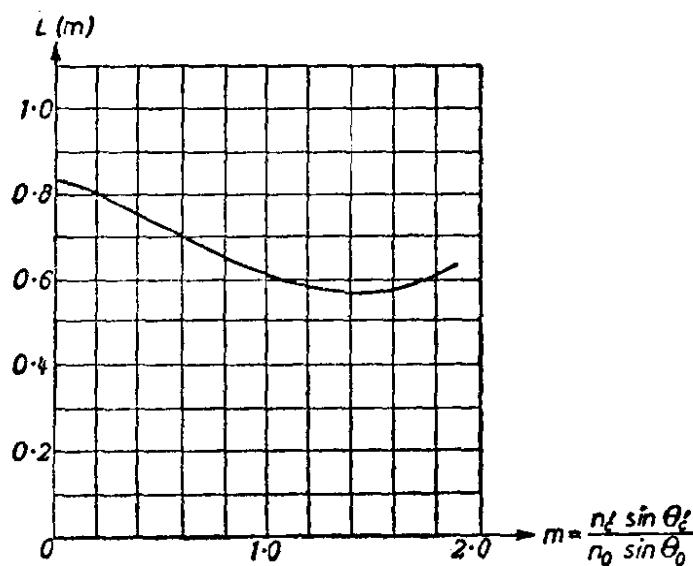


图 10.13 聚光镜孔径对两个等亮度针孔分辨率的影响
[引自 H. H. Hopkins and P. M. Barham, *Proc. Phys. Soc.*, **63** (1950), 72.]

可以看出, $m \sim 1.5$ 即聚光镜的数值孔径约为物镜的数值孔径的 1.5 倍时, 就得到最佳分辨率。这时 L 的值略小于不相干照明时所得到的值 0.61。

(b) 柯勒照明

柯勒¹⁾提出的照明方法如图 10.14 所示, 其中会聚透镜靠近场阑, 并在聚光镜(含有聚光镜光阑)的焦平面内形成光源 σ 的象。来自每一光源点的光线从聚光镜出射后成为平行光束。这种装置的优点是光源亮度分布的不规则性不会引起视场照明强度的不规则性。

为了估计柯勒照明法所达到的分辨极限, 必须首先确定显微镜物镜的物平面内各对点的复相干度 μ 。设

1) A. Köhler, *Zs.f. wiss. Mikrosk.*, **10** (1893), 433; **16** (1899), 1.

$$U(S, P_1) = A_1 e^{i\phi_1}, \quad U(S, P_2) = A_2 e^{i\phi_2} \quad (25)$$

是与 σ 相结合的单色光源上一个光源点 S 在显微镜物镜的物平面 $P_1(X_1, Y_1)$ 点和 $P_2(X_2, Y_2)$ 点处的复扰动(参看 678 页). 显然,

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} [p(X_1 - X_2) + q(Y_1 - Y_2)], \quad (26)$$

式中 p 和 q 是从光源点 S 发出通过 P_1 和 P_2 的两条平行光线的头两个光线分量¹⁾. 如果聚光镜系统有象差, 这两条光线就不会严

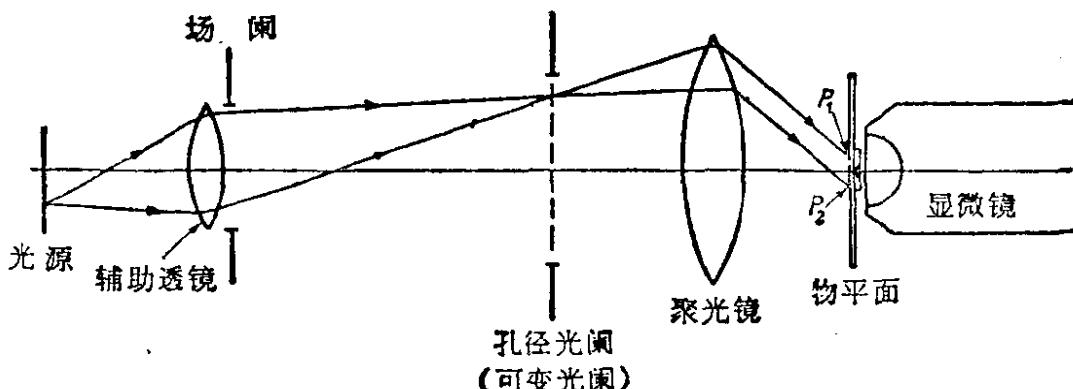


图 10.14 柯勒照明法

格平行, 但因只考虑彼此靠得很近的点, 这种影响可以忽略. 将 (25) 和 (26) 式代入霍普金斯公式 § 10.4(35b), 得出

$$\left. \begin{aligned} \mu(P_1, P_2) &= \frac{1}{\sqrt{I(P_1)} \sqrt{I(P_2)}} \int_{\sigma} A_1 A_2 e^{i k_0 [p(X_1 - X_2) + q(Y_1 - Y_2)]} dS, \\ I(P_1) &= \int_{\sigma} A_1^2 dS, \quad I(P_2) = \int_{\sigma} A_2^2 dS. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

由于每一光源点 $S(\xi, \eta)$ 都对应一对光线分量 (p, q) , 因此可将 σ 上的积分变换为入射到物上的光线所形成的立体角

$$p^2 + q^2 \leq n_c'^2 \sin^2 \theta'_c \quad (28)$$

上的积分. 这时, 精确到高斯光学, 关系式 $\xi = \xi(p, q)$ 和 $\eta = \eta(p, q)$ 都是线性的; 事实上, 由 § 4.3(10) 式不难看出, $\xi = fp$, $\eta = fq$, 式中 f 是聚光镜系统的焦距. 因此, 该变换的雅科毕式 $\partial(\xi, \eta)/\partial(p, q)$ 是不变的. 超出几何光学的范围, 雅科

1) 参看上册 181 页. ——译者注

毕式一般在该积分区域上是有变化的，但可假定这种变化比指数项的变化缓慢得多，因此可以忽略。如果又忽略 A_1 和 A_2 的缓慢变化，则(27)式化为

$$\mu(P_1, P_2) = \frac{\iint_{\Omega} e^{i k_0 [p(x_1 - x_2) + q(y_1 - y_2)]} dp dq}{\iint_{\Omega} dp dq}, \quad (29)$$

式中 Ω 表示积分区域(28)。计算(29)的值，得出

$$\begin{aligned} \mu(P_1, P_2) &= \frac{2 J_1(u_{12})}{u_{12}}, \\ u_{12} &= \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2} n'_c \sin \theta'_c. \end{aligned} \quad (30)$$

这个公式与临界照明的公式(18)相同。因此，不论使用临界照明还是柯勒照明，入射到显微镜物平面上的光的复相干度相同。鉴于这一结果，通常把临界照明称为“不相干”的而把柯勒照明称为“相干”的，是有些不适宜的。由此得出，(20)式对这两种照明方式都成立，并且图 10.13 同样适用于这两种情况。

§ 10.5.3 用部分相干准单色照明成象¹⁾

(a) 互强度通过光学系统的透射

§ 9.5 中叙述了研究扩展物成象的某些一般方法。已研究了完全相干照明(§ 9.5.1)和完全不相干照明(§ 9.5.2)的情况。在前一种情况下，考虑了复振幅通过系统的透射；在后一种情况下，考虑了强度通过系统的透射。现在将研究部分相干准单色照明的更普遍情况。在这种情况下适合于讨论的量是互强度。

使用同 § 9.5(1) 式中一样的标度归一化(赛德耳)坐标，因此，物点及其高斯象具有相同的坐标数值。设 $J_0(x_0, y_0; x'_0, y'_0)$ 是物平面内 (x_0, y_0) 点和 (x'_0, y'_0) 点的互强度。如果 $K(x_0, y_0; x_1, y_1)$ 是系统的透射函数(§ 9.5.1)，则根据传播定律 § 10.4(47)式，象

1) 本节的考虑部分地根据下述研究成果：H. H. Hopkins, *Proc. Roy. Soc., A*, 217 (1953), 408 和 P. Dumontet, *Publ. Sci. Univ. d'Alger, B*, 1 (1955), 33.

平面内的互强度为

$$\begin{aligned} J_1(x_1, y_1; x'_1, y'_1) \\ = \iiint_{-\infty}^{+\infty} J_0(x_0, y_0; x'_0, y'_0) K(x_0, y_0; x_1, y_1) K^*(x'_0, y'_0; x'_1, y'_1) \\ \times dx_0 dy_0 dx'_0 dy'_0. \end{aligned} \quad (31a)$$

积分只是在形式上遍及无穷域，因为对于物平面上所有那些没有光传播到象平面的各点， J_0 为零。

同 § 9.5 中一样，假定物体是这样小，以致它形成系统的一个等晕区，即对于其中所有各点，都可以用一个只取决于差值 $x_1 - x_0$ 和 $y_1 - y_0$ 的函数 $K(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ 很好地近似代替 $K(x_0, y_0; x_1, y_1)$ 。因此 (31a) 式变为

$$\begin{aligned} J_1(x_1, y_1; x'_1, y'_1) \\ = \iiint_{-\infty}^{+\infty} J_0(x_0, y_0; x'_0, y'_0) K(x_1 - x_0, y_1 - y_0) \\ \times K^*(x'_1 - x'_0, y'_1 - y'_0) dx_0 dy_0 dx'_0 dy'_0. \end{aligned} \quad (31b)$$

把 J_0, J_1 和乘积 KK^* 表示为四维傅里叶积分的形式：

$$\begin{aligned} J_0(x_0, y_0; x'_0, y'_0) &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}_0(f, g; f', g') e^{-2\pi i(fx_0 + gy_0 + f'x'_0 + g'y'_0)} \\ &\times df dg df' dg', \end{aligned} \quad (32a)$$

$$\begin{aligned} J_1(x_1, y_1; x'_1, y'_1) &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}_1(f, g; f', g') e^{-2\pi i(fx_1 + gy_1 + f'x'_1 + g'y'_1)} \\ &\times df dg df' dg', \end{aligned} \quad (32b)$$

$$\begin{aligned} K(x, y) K^*(x', y') &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{K}(f, g; f', g') e^{-2\pi i(fx + gy + f'x' + g'y')} \\ &\times df dg df' dg'. \end{aligned} \quad (32c)$$

然后由傅里叶反演公式，

$$\mathcal{J}_0(f, g; f', g') = \iiint_{-\infty}^{+\infty} J_0(x_0, y_0; x'_0, y'_0) e^{2\pi i(fx_0 + gy_0 + f'x'_0 + g'y'_0)}$$

$$\times dx_0 dy_0 dx'_0 dy'_0, \quad (33)$$

对于 \mathcal{J}_1 和 \mathcal{M} 也有严格类似的关系式.

对 (31b) 式应用卷积定理, 得出

$$\mathcal{J}_1(f, g; f', g') = \mathcal{J}_0(f, g; f', g') \mathcal{M}(f, g; f', g'). \quad (34)$$

这个公式意味着, 如果把物平面和象平面内的互强度表示为所有可能的空间频率 (f, g, f', g') 的四维空谱分量的叠加, 则象内的每个分量只取决于物内的相应分量, 并且这两个分量的比值等于 \mathcal{M} . 因此, 在目前所作近似的精度范围内, 光学系统对互强度的作用与一个四维线性滤波器的作用等效. \mathcal{M} 称为部分相干准单色照明的频率响应函数.

频率响应函数 \mathcal{M} 与系统的光瞳函数的关系很简单. 如果同 § 9.5(10c) 式一样, 把 K 表示为二维傅里叶积分的形式,

$$K(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{K}(f, g) e^{-2\pi i(fx+gy)} df dg, \quad (35)$$

并将 K 代入 (32c) 的反演公式, 则得出

$$\mathcal{M}(f, g; f', g') = \mathcal{K}(f, g) \mathcal{K}^*(-f', -g'). \quad (36)$$

但根据 § 9.5(13) 式, $\mathcal{K}(f, g)$ 等于系统光瞳函数 $G(\xi, \eta)$ 在高斯参考球(半径为 R)上

$$\xi = \lambda R f, \quad \eta = \lambda R g \quad (37)$$

点处的值. 因此, 对于部分相干的准单色照明, 频率响应函数与系统光瞳函数之间的关系式为

$$\mathcal{M}\left(\frac{\xi}{\lambda R}, \frac{\eta}{\lambda R}; \frac{\xi'}{\lambda R}, \frac{\eta'}{\lambda R}\right) = G(\xi, \eta) G^*(-\xi', -\eta'). \quad (38)$$

因为在出射光瞳面积以外各点处, 光瞳函数为零, 由此得出, 高于一定值的频率所具有的谱分量是不透过的. 如果出射光瞳是半径为 a 的圆, 则当 $\xi^2 + \eta^2 > a^2$ 或 $\xi'^2 + \eta'^2 > a^2$ 时, $G(\xi, \eta) \times G^*(-\xi', -\eta')$ 为零. 因此, 当

$$f^2 + g^2 > \left(\frac{a}{\lambda R}\right)^2 \text{ 或 } f'^2 + g'^2 > \left(\frac{a}{\lambda R}\right)^2 \quad (39)$$

时, 属于频率 (f, g, f', g') 的互强度谱分量是不透过的¹⁾. 上式中 λ 表示象空间内的平均波长.

表 24 从光学系统对空间频率响应的观点看光学系统的作用(假定是等晕物区)

照明	基本量	从物到象的变换	频率响应函数
相干	复扰动 $U(x, y)$	$\mathcal{U}_1(f, g)$ $= \mathcal{U}_0(f, g)\mathcal{K}(f, g)$	$\mathcal{K}(f, g)$
不相干	强度 $I(x, y)$	$\mathcal{J}_1(f, g)$ $= \mathcal{J}_0(f, g)\mathcal{L}(f, g)$	$\mathcal{L}(f, g) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{K}(f' + f, g' + g) \times \mathcal{K}^*(f', g') df' dg'$
部分相干	互强度 $J(x, y; x', y')$	$\mathcal{J}_1(f, g; f', g')$ $= \mathcal{J}_0(f, g; f', g')$ $\times \mathcal{M}(f, g; f', g')$	$\mathcal{M}(f, g; f', g') = \mathcal{K}(f, g)\mathcal{K}^*(-f', -g')$

$\mathcal{K}(f, g)$ 是系统透射函数 $K(x, y)$ 的傅里叶逆变换, 它与光瞳函数 $G(\xi, \eta)$ 的关系式为 $\mathcal{K}(\xi/\lambda R, \eta/\lambda R) = G(\xi, \eta)$, 式中 R 是高斯参考球半径, λ 是象空间内的平均波长.

表 24 中列出了关于部分相干照明成象的基本公式, 以及 § 9.5 中关于相干照明和不相干照明的相应公式. 关于不相干照明的公式, 可由一般公式 (34), (36) 和 (38), 通过假定 J_0 具有 $J_0(x_0, y_0; x'_0, y'_0) = I_0(x_0, y_0)\delta(x'_0 - x_0)\delta(y'_0 - y_0)$ 的形式导出, 式中 δ 是狄喇克 δ 函数(见附录 4). 计算不难, 但有点冗长, 这里从略. 关于完全单色(从而完全相干)照明的特殊情况的公式, 注意到在这种情况下互强度具有 $J_0(x_0, y_0; x'_0, y'_0) = U_0(x_0, y_0)U_0^*(x'_0, y'_0)$ 的形式, 就更为容易一些导出. 这时 J_0 的傅里叶变换 \mathcal{J}_0 同样分为两个因子的乘积, 应用 (34) 和 (36) 式得知, 复扰动 U_0 的每一个谱分量都透过系统, 与表 24 第一行列出的公式一致.

(b) 透照物的象

设有一透明或半透明物体占有物平面的一部分, 该物体被部

1) 如果系统的角孔径很小, 并遵从正弦条件, 则同 § 9.5 638 页中一样, 有 $a/\bar{\lambda}R \sim n_0 \sin \theta_0 / M \bar{\lambda}_0$, 式中 $n_0 \sin \theta_0$ 是系统的数值孔径, M 是高斯放大率, $\bar{\lambda}_0$ 是真空中平均波长.

分相干的准单色光照明。假定这些光从一个初级光源发出，通过某一照明系统(聚光镜)后到达物平面。

同 § 8.6.1 中一样，用适当的透射函数 $F_0(x_0, y_0)$ 来描述该物体。如果 $U_0^-(S; x_0, y_0)$ 代表相结合的单色光源上一个光源点 S 在物平面 (x_0, y_0) 点处引起的扰动(参看 678 页)，则由这个光源点发出并通过物后的扰动为

$$U_0(S; x_0, y_0) = U_0^-(S; x_0, y_0)F(x_0, y_0). \quad (40)$$

现在根据 § 10.4(35a) 式，入射到物上的光的互强度为

$$J_0^-(x_0, y_0; x'_0, y'_0) = \int_S U_0^-(S; x_0, y_0)U_0^{*-}(S; x'_0, y'_0)dS, \quad (41a)$$

由物出射的光的互强度为

$$J_0(x_0, y_0; x'_0, y'_0) = \int_S U_0(S; x_0, y_0)U_0^*(S; x'_0, y'_0)dS, \quad (41b)$$

因此，由于 (40) 式，得出

$$J_0(x_0, y_0; x'_0, y'_0) = F(x_0, y_0)F^*(x'_0, y'_0)J_0^-(x_0, y_0; x'_0, y'_0). \quad (42)$$

我们将限于注意下述重要情形：此时入射光的互强度 J_0^- 只通过差值 $x_0 - x'_0, y_0 - y'_0$ 的形式依赖于四个坐标 x_0, y_0, x'_0, y'_0 ，即此时 J_0^- 具有下述形式：

$$J_0^-(x_0, y_0; x'_0, y'_0) = J_0^-(x_0 - x'_0, y_0 - y'_0). \quad (43)$$

我们在 § 10.5.2 中得知，临界照明和柯勒照明这两种情况就是这样。保留以前的假定，即物体是这样小，以致它形成系统的一个等晕区。于是由 (31b) 式得出，象平面内的强度 $I_1(x_1, y_1) = J_1(x_1, y_1; x_1, y_1)$ 由下式给出：

$$\begin{aligned} I_1(x_1, y_1) &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} J_0^-(x_0 - x'_0, y_0 - y'_0)F(x_0, y_0)F^*(x'_0, y'_0) \\ &\quad \times K(x_1 - x_0, y_1 - y_0)K^*(x_1 - x'_0, y_1 - y'_0) \\ &\quad \times dx_0 dy_0 dx'_0 dy'_0. \end{aligned} \quad (44)$$

将 F 和 J_0^- 表示为二维傅里叶积分的形式，

$$F(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f, g)e^{-2\pi i(fx+gy)}df dg, \quad (45a)$$

$$J_0^-(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}_0^-(f, g) e^{-2\pi i(fx+gy)} df dg. \quad (45b)$$

如果把(45a)式的 F 及相应的 F^* 代入(44)式,利用恒等式 $f'x_0 - f''x'_0 = (f' - f'')x_1 - f'(x_1 - x_0) + f''(x_1 - x'_0)$ 及含 g 和 y 的类似恒等式,并引入新的积分变量 $u' = x_1 - x_0$, $u'' = x_1 - x'_0$,则得出 I_1 的下述表达式:

$$\begin{aligned} I_1(x_1, y_1) &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{T}(f', g'; f'', g'') \mathcal{F}(f', g') \mathcal{F}^*(f'', g'') \\ &\times e^{-2\pi i[(f' - f'')x_1 + (g' - g'')y_1]} df' dg' df'' dg'', \end{aligned} \quad (46)$$

式中

$$\begin{aligned} &\mathcal{T}(f', g'; f'', g'') \\ &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} \int J_0^-(u'' - u', v'' - v') K(u', v') K^*(u'', v'') \\ &\times e^{2\pi i[(f'u' + g'v') - (f''u'' + g''v'')] du' dv' du'' dv''} \\ &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} \int \mathcal{J}_0^-(f, g) K(u', v') K^*(u'', v'') \\ &\times e^{2\pi i[(f + f')u' + (g + g')v' - (f + f'')u'' - (g + g'')v'']} df dg du' dv' du'' dv'' \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}_0^-(f, g) \mathcal{K}(f + f', g + g') \mathcal{K}^*(f + f'', g + g'') df dg. \end{aligned} \quad (47)$$

在(47)式中,从第二、三行过渡到第四、五行时已用(45b)式代替 J_0^- ,从第三行过渡到第六行时已用了(35)式的逆变换.

我们看到,在(46)式中,物的影响(用 \mathcal{F} 表征)同照明(\mathcal{J}_0^-)与系统(\mathcal{K})的联合效应是分开的.采用均匀照明(I_0^- =常数)时,从物出射的光强度将与 $|F|^2$ 成正比,假如是理想成象,则象平面内的强度由下式给出(除了一个常数因子以外):

$$\tilde{I}_1(x_1, y_1) = F(x_1, y_1) F^*(x_1, y_1)$$

$$= \iiint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f', g') \mathcal{F}^*(f'', g'') \\ \times e^{-2\pi i [(f' - f'')x_1 + (g' - g'')y_1]} df' dg' df'' dg''. \quad (48)$$

(46)和(48)式分别把真实强度 I_1 和理想强度 \tilde{I}_1 表示为物的空间频谱中所有各对频率 (f', g') 和 (f'', g'') 的贡献之和。前者的每一贡献是后者的 \mathcal{T} 倍，由此得出，如果对于谱分量 $\mathcal{F}(f', g')$ 和 $\mathcal{F}(f'', g'')$ 两者都不为零的所有 f', g', f'', g'' 值， \mathcal{T} 不是常数，则关于物的某些信息就会丢失或出差错。函数 \mathcal{T} 称为采用给定的透过照明时系统的透射交叉系数。

现在考虑强度的空间频谱 $\mathcal{I}(f, g)$ ，而不是强度本身。为了导出适当的公式，用 $e^{2\pi i (fx_1 + gy_1)}$ 乘(46)式两边，并对 x_1 和 y_1 积分。然后用傅里叶积分定理，(或更简短些，用狄喇克 δ 函数的傅里叶积分表示，见附录 4)，就得出

$$\mathcal{I}_1(f, g) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f' + f, g' + g, f', g') \mathcal{F}^*(f', g') df' dg' \\ \times \mathcal{F}^*(f', g') df' dg'. \quad (49)$$

对于(48)式所代表的理想情况，则有

$$\tilde{\mathcal{I}}_1(f, g) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f' + f, g' + g, f', g') \mathcal{F}^*(f', g') df' dg'. \quad (50)$$

这两个公式把 \mathcal{I}_1 和 $\tilde{\mathcal{I}}_1$ 表示为物结构的每个空间频率 (f', g') 的贡献之和。可以看出 \mathcal{T} 起着同前面类似的作用。它表征由于物体的照明方式和成象系统的透射特性而在每一贡献中引起的变化。

因为点 $\xi = \bar{\lambda}Rf$, $\eta = \bar{\lambda}Rg$ 位于出射光瞳面积之外时，响应函数 $\mathcal{H}(f, g)$ 为零；由(47)式得出，对于足够高的频率， \mathcal{T} 为零。如果出射光瞳是半径为 a 的圆，则只有当 f, g 平面内，中心各在 $O'(-f', -g')$ 和 $O''(-f'', -g'')$ 点而半径均为 $\sqrt{f'^2 + g'^2} = a/\bar{\lambda}R$ 的两个圆 C' 和 C'' 具有公共区域时(图 10.15)，

乘积 $\mathcal{K}(f + f', g + g') \mathcal{K}^*(f + f'', g + g'')$ 以及 $\mathcal{T}(f', g'; f'', g'')$ 才能不为零。为了说明照明的影响，假定是临界照明或柯勒照明，并且聚光镜系统的数值孔径 $n'_0 \sin \theta'_0$ 是物的成象系统的数值孔径 $n_0 \sin \theta_0$ 的 m 倍。因此，根据(18)或(30)式，照明光束的互强度为

$$J_0^-(x_0 - x'_0, y_0 - y'_0) = \left(\frac{2J_1(m\nu)}{m\nu} \right) I_0^-, \quad (51)$$

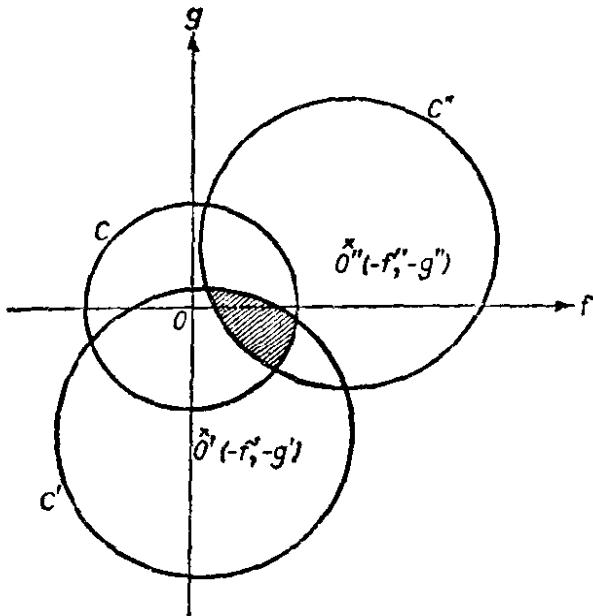


图 10.15 具有半径为 a 的圆形出射光瞳成象系统的透射交叉系数 $\mathcal{T}(f', g'; f'', g'')$ 的有效积分区域(用阴影线表示)。假定用平均波长为 $\bar{\lambda}_0$ 的准单色光通过数值孔径为 $mn_0 \sin \theta_0$ 的聚光镜透过照明物体，其中 $n_0 \sin \theta_0$ 是成象系统的数值孔径。 C' 和 C'' 分别是中心在 $O'(-f', -g')$ 和 $O''(-f'', -g'')$ 点处而半径为 $a/\bar{\lambda}R$ $\sim n_0 \sin \theta_0 / M\bar{\lambda}_0$ 的圆。 C 是中心在原点处而半径为 $mn_0 \sin \theta_0 / \bar{\lambda}_0$ 的圆 (R = 高斯参考球半径， M = 高斯放大率)

式中

$$\nu = \frac{2\pi}{\bar{\lambda}_0} \sqrt{(x'_0 - x_0)^2 + (y'_0 - y_0)^2} n_0 \sin \theta_0, \quad (52)$$

I_0^- 是(假定均匀的)入射光强度。这时(51)式右边的函数是下述函数的傅里叶变换(参看 § 8.5.2):

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{J}_0^-(f, g) &= \text{常数} = \left(\frac{\lambda_0^2}{\pi m^2 n_0^2 \sin^2 \theta_0} \right) I_0^-, \\ &\quad \left. \begin{aligned} &\text{当 } f^2 + g^2 < \frac{m^2 n_0^2 \sin^2 \theta_0}{\lambda_0^2} \text{ 时,} \\ &= 0, \quad \text{当 } f^2 + g^2 > \frac{m^2 n_0^2 \sin^2 \theta_0}{\lambda_0^2} \text{ 时.} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right) \quad (53)$$

图 10.15 中, 在 C 所表示的圆外, \mathcal{J}_0^- 为零, 由此得出, 对于给定的 (f', g') 和 (f'', g'') 只有位于 f, g 平面上三个圆 C, C' 和 C'' 的公共面积(用阴影线表示)内的那些点, 才对 \mathcal{T} 的积分(47)式有贡献.

§ 10.6 关于互相干的一些定理

§ 10.4 和 § 10.5 中, 我们讨论了准单色光的干涉和衍射, 并限于时间延迟 τ 比光的相干时间小得多的情况. 已经知道, 作为良好的近似, 相关函数仅通过一个简谐项的形式依赖于 τ , 即它们具有下述形式:

$$\begin{aligned} \Gamma(P_1, P_2, \tau) &\sim J(P_1, P_2) e^{-2\pi i \nu \tau}, \\ r(P_1, P_2, \tau) &\sim \mu(P_1, P_2) e^{-2\pi i \delta \tau}. \end{aligned}$$

采用这种近似的初等理论, 对考虑由于光源有限广延性而引起的图样“中央”处 ($\tau = 0$) 可见度的降低是适合的. 然而, 它没有考虑可见度随着程差增大而引起的变化. 为了适合于描述时间延迟 τ 与相干时间相比不可忽略的情况, 必须使用相关函数的更加精确的表达式. 现在讨论上述某些公式的适当推广.

§ 10.6.1 来自不相干光源光的互相干的计算

设 $V_1(t)$ 和 $V_2(t)$ 是扩展的(不一定是准单色的)初级光源 σ 产生的波场中 P_1 点和 P_2 点处的扰动. 首先假定 σ 与 P_1 和 P_2 点之间的媒质是均匀的.

同 § 10.4.2 中一样, 设想把光源分为中心在 S_1, S_2, \dots 各点

附近的面元 $d\sigma_1, d\sigma_2, \dots$, 其线度比实际波长小得多. 如果 $V_{m1}(t)$ 和 $V_{m2}(t)$ 是面元 $d\sigma_m$ 对 V_1 和 V_2 的贡献, 则

$$V_1(t) = \sum_m V_{m1}(t), \quad V_2(t) = \sum_m V_{m2}(t), \quad (1)$$

而互相干函数由下式给出:

$$\begin{aligned} \Gamma(P_1, P_2, \tau) &= \langle V_1(t + \tau) V_2^*(t) \rangle \\ &= \sum_m \langle V_{m1}(t + \tau) V_{m2}^*(t) \rangle. \end{aligned} \quad (2)$$

(2) 式右边已略去 $\langle V_{m1}(t + \tau) V_{m2}^*(t) \rangle (m \neq n)$ 类型的项, 这是因为来自光源不同面元的贡献可假定是互不相干的.

现在的处理与 § 10.4 稍有不同. 根据 § 10.3(30) 式, (2) 式中求和号内每一项都可表示为下述形式:

$$\langle V_{m1}(t + \tau) V_{m2}^*(t) \rangle = 4 \int_0^\infty G_m(P_1, P_2, \nu) e^{-2\pi i \nu \tau} d\nu, \quad (3)$$

式中

$$G_m(P_1, P_2, \nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{\overline{v_{mT}(P_1 \nu)} v_{mT}^*(P_2, \nu)}{2T} \right] \quad (4)$$

是扰动 $V_{m1} \Rightarrow V_m(P_1, t)$, $V_{m2} \Rightarrow V_m(P_2, t)$ 的互谱密度. 现在 v_m 表示适当的频率对来自面元 $d\sigma_m$ 的扰动所作的贡献, 并且由于假定媒质是均匀的, 此贡献以球面波的形式传播. 因此

$$v_{mT}(P_1, \nu) = a_{mT}(\nu) \frac{e^{ikR_{m1}}}{R_{m1}}, \quad v_{mT}(P_2, \nu) = a_{mT}(\nu) \frac{e^{ikR_{m2}}}{R_{m2}}, \quad (5)$$

式中 R_{m1} 和 R_{m2} (假定比实际波长大得多) 表示光源点 S_m 到 P_1 和 P_2 的距离, $k = 2\pi\nu/\lambda = 2\pi/\lambda$. $a_m(\nu)$ 的振幅 $|a_m(\nu)|$ 表示来自面元 $d\sigma_m$ 的频率 ν 的分量强度, $\arg a_m(\nu)$ 表示它的位相. 由 (4) 和 (5) 式得出,

$$G_m(P_1, P_2, \nu) = \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|a_{mT}(\nu)|^2}{2T} \right) \frac{e^{ik(R_{m1}-R_{m2})}}{R_{m1}R_{m2}}. \quad (6)$$

右边大括弧内的项表示来自光源面元 $d\sigma_m$ 的光的频谱密度. 同 § 10.4.2 中一样, 假定光源面元的数目如此之大, 以致可以把光源

当作实际上连续的来处理。因此，如果 $I(S_m, \nu) d\sigma_m d\nu = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \left[\frac{|a_{mT}(\nu)|^2}{2T} \right] d\nu$ ，即如果 $I(S, \nu)$ 表示单位频率范围内单位光源面积上的强度，则根据(2), (3)和(6)式，有

$$\begin{aligned} \Gamma(P_1, P_2, \tau) &= \sqrt{I(P_1)} \sqrt{I(P_2)} \gamma(P_1, P_2, \tau) \\ &= \int_0^\infty d\nu e^{-2\pi i \nu \tau} \int_\sigma I(S, \nu) \frac{e^{ik(R_1-R_2)}}{R_1 R_2} dS, \end{aligned} \quad (7)$$

式中

$$\begin{aligned} I(P_1) &= \Gamma(P_1, P_1, 0) = \int_0^\infty d\nu \int_\sigma \frac{I(S, \nu)}{R_1^2} dS, \\ I(P_2) &= \Gamma(P_2, P_2, 0) = \int_0^\infty d\nu \int_\sigma \frac{I(S, \nu)}{R_2^2} dS, \end{aligned} \quad (8)$$

是 P_1 和 P_2 处的强度， R_1 和 R_2 是光源点 S 到这两点的距离。(7)式是 § 10.4 中范西特-泽尼克公式(20), (21)的推广。

如果光源与 P_1 和 P_2 点之间的媒质不是均匀的，可仿照 § 10.4 处理。我们只须用 $i c K(S, P_i, \nu)/\nu$ 代替因子 e^{ikR_i}/R_i ，其中 K 是适当的媒质透射函数。于是代替(7)式，得出

$$\begin{aligned} \Gamma(P_1, P_2, \tau) &= \sqrt{I(P_1)} \sqrt{I(P_2)} \gamma(P_1, P_2, \tau) \\ &= c^2 \int_0^\infty \frac{d\nu}{\nu^2} e^{-2\pi i \nu \tau} \\ &\quad \times \int_\sigma I(S, \nu) K(S, P_1, \nu) K^*(S, P_2, \nu) dS, \end{aligned} \quad (9)$$

式中

$$\begin{aligned} I(P_1) &= c^2 \int_0^\infty \frac{d\nu}{\nu^2} \int_\sigma I(S, \nu) |K(S, P_1, \nu)|^2 dS, \\ I(P_2) &= c^2 \int_0^\infty \frac{d\nu}{\nu^2} \int_\sigma I(S, \nu) |K(S, P_2, \nu)|^2 dS. \end{aligned} \quad (10)$$

从 § 10.4 类推，将(9)或(10)式改写成稍有不同的形式。令

$$\begin{aligned} \frac{i c}{\nu} K(S, P_1, \nu) \sqrt{I(S, \nu)} &= U(S, P_1, \nu), \\ \frac{i c}{\nu} K(S, P_2, \nu) \sqrt{I(S, \nu)} &= U(S, P_2, \nu). \end{aligned} \quad (11)$$

则(9)和(10)式变为

$$\begin{aligned}\Gamma(P_1, P_2, \tau) &= \sqrt{I(P_1)} \sqrt{I(P_2)} \gamma(P_1, P_2, \tau) \\ &= \int_0^\infty d\nu e^{-2\pi i \nu \tau} \int_\sigma U(S, P_1, \nu) U^*(S, P_2, \nu) dS,\end{aligned}\quad (12)$$

式中

$$\begin{aligned}I(P_1) &= \int_0^\infty d\nu \int_\sigma |U(S, P_1, \nu)|^2 dS, \\ I(P_2) &= \int_0^\infty d\nu \int_\sigma |U(S, P_2, \nu)|^2 dS.\end{aligned}\quad (13)$$

公式(12)是 §10.4 中霍普金斯公式(35)的推广，它利用相缔合的虚光源引起的光分布表示互相干函数和复相干度。这是因为根据(11)式， $U(S, P, \nu)$ 可看作位于 S 处具有频率 ν ，位相为零而强度正比于 $\sqrt{I(S, \nu)}$ 的单色点光源在 P 处引起的扰动。

§ 10.6.2 互相干的传播

同 § 10.4.4 中一样，设 \mathcal{A} 是与扩展初级光源 σ 发出的光束相截的虚曲面(图 10.8)。我们将说明如何从 \mathcal{A} 上所有各对点的互相干的知识确定来自 \mathcal{A} 的光照明的其他任一曲面 \mathcal{B} 上的互相干值。为了简单起见，假定 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 之间的媒质折射率等于 1。

\mathcal{B} 上任何两点 Q_1 和 Q_2 的互相干可用(12)式计算。在该公式中， U 代表单色扰动，因此，它可利用惠更斯-菲涅耳原理由曲面 \mathcal{A} 所有各点处的扰动来确定：

$$U(S, Q_1, \nu) = \int_{\mathcal{A}} U(S, P_1, \nu) \frac{e^{ik_0 s_1}}{s_1} A_1 dP_1. \quad (14)$$

式中 s_1 表示 \mathcal{A} 上代表点 P_1 与 Q_1 点之间的距离， A_1 是通常的倾斜因子。 $U(S, Q_2, \nu)$ 也有严格类似的公式。如果将这些公式代入(12)式中，改变积分次序后就得到互相干的下述表达式：

$$\begin{aligned}\Gamma(Q_1, Q_2, \tau) &= \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} \frac{dP_1 dP_2}{s_1 s_2} \\ &\times \int_0^\infty J(P_1, P_2, \nu) A_1(\nu) A_2^*(\nu) e^{-2\pi i \nu [\tau - \frac{s_1 - s_2}{c}]} d\nu,\end{aligned}\quad (15)$$

式中

$$J(P_1, P_2, \nu) = \int_{\sigma} U(S, P_1, \nu) U^*(S, P_2, \nu) dS. \quad (16)$$

(15) 式中重复积分的意思是 P_1 点和 P_2 点彼此独立地在曲面 \mathcal{A} 上取值。这时倾斜因子 $\Lambda_1(\nu)$ 和 $\Lambda_2(\nu)$ 通过乘积因子 ν 而依赖于频率，它随着 ν 的变化比其他各项缓慢。如果光的有效光谱范围足够小，则可用 $\bar{\Lambda}_1 = \Lambda_1(\bar{\nu})$, $\bar{\Lambda}_2 = \Lambda_2(\bar{\nu})$ 代替倾斜因子，其中 $\bar{\nu}$ 表示光的平均频率。根据(12)式，对 ν 的积分的其余部分正好是 $\Gamma(P_1, P_2, \tau - (s_1 - s_2)/c)$ 。因此最后得出公式：

$$\Gamma(Q_1, Q_2, \tau) = \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} \frac{\Gamma\left(P_1, P_2, \tau - \frac{s_1 - s_2}{c}\right)}{s_1 s_2} \bar{\Lambda}_1 \bar{\Lambda}_2^* dP_1 dP_2. \quad (17)$$

这就是所要求的利用曲面 \mathcal{A} 上所有各对点处的互强度来表示曲面 \mathcal{B} 上 Q_1 点和 Q_2 点处的互相干函数的公式。

特别感兴趣的是 Q_1 和 Q_2 两点重合而 $\tau = 0$ 时的情况。用 Q 表示该点，(17)式左边化为强度 $I(Q)$ 。如果在(17)式右边也用强度和相关因子 γ 来代替 Γ ，则(17)式化为

$$I(Q) = \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} \frac{\sqrt{I(P_1)} \sqrt{I(P_2)}}{s_1 s_2} \times \gamma \left(P_1, P_2, \frac{s_2 - s_1}{c}\right) \bar{\Lambda}_1 \bar{\Lambda}_2^* dP_1 dP_2. \quad (18)$$

这个公式把任意点 Q 处的强度表示为任意曲面 \mathcal{A} 所有各对面元的贡献之和。每一贡献与这两个面元处强度的几何平均值成正比，而与 Q 到这两个面元的距离的乘积成反比，并用适当的相关因子 γ 的值作权重。

(17) 和 (18) 式由沃耳夫导出，它们分别是泽尼克传播定律 [§ 10.4(45)式] 和部分相干波场中强度公式 § 10.4(46) 的推广。

§ 10.7 部分相干性的严格理论¹⁾

§ 10.7.1 互相干波动方程

前几节导出的关于相关函数的一些定理，在某些方面与关于复扰动本身的定理相类似。例如，扩展的准单色初级光源所照明的平面内复相干度的范西特-泽尼克公式 § 10.4(21)，看来与具有光源同样大小和形状的一个开孔衍射所引起的衍射图样内复扰动的公式一样。另外的例子是，互强度的传播定律[§ 10.4(45)式]看来类似于惠更斯-菲涅耳原理。现在，关于复扰动的这些结果可看成某些严格定理即亥姆霍兹和基尔霍夫公式[§ 8.3(7), (13)式]的近似推论，而这些严格定理是光扰动作为波传播这一事实的必然结果。这种相似性提醒我们，相关性也象波一样传播，而上述定理是亥姆霍兹-基尔霍夫类型的某些相应定理的近似公式。不难证明事实上就是这样。

现在考虑真空中的平稳波场，设 $V(P_1, t)$ 和 $V(P_2, t)$ 分别代表 P_1 点和 P_2 点处的扰动。一开始就把互相干函数表示为更对称的形式会带来方便，即

$$\begin{aligned}\Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2) &= \langle V(P_1, t_1 + \tau) V^*(P_2, t_2 + \tau) \rangle \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} V_T(P_1, \tau + t_1) V_T^*(P_2, \tau + t_2) d\tau.\end{aligned}\quad (1)$$

进一步令

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \quad (2)$$

是对 P_1 的笛卡儿直角坐标的拉普拉斯算符。将此算符用于(1)式，并互换不同运算的次序，得出

$$\begin{aligned}\nabla_1^2 \Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \{ [\nabla_1^2 V_T(P_1, \tau + t_1)] V_T^*(P_2, \tau + t_2) \} d\tau.\end{aligned}\quad (3)$$

1) 本节分析的主要部分是根据 E. Wolf 的研究结果, *Proc. Roy. Soc., A, 230* (1955), 246; 和 *Proc. Phys. Soc., 71* (1958), 257.

现在, V_T 的实部 $V_T^{(r)}$ 代表真实的物理波场 (例如电矢量波的一个笛卡儿分量), 因此它满足波动方程

$$\nabla_1^2 V_T^{(r)}(P_1, t + t_1) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} V_T^{(r)}(P_1, t + t_1). \quad (4a)$$

V_T 的虚部 $V_T^{(i)}$ 以及 V_T 本身也满足波动方程; 对 (4a) 式两边作希耳伯特变换, 并利用下述事实: 如果两个函数彼此互为希耳伯特变换, 则它们的微商也互为希耳伯特变换, 就立即得出上述结果. 因此¹⁾

$$\nabla_1^2 V_T(P_1, t + t_1) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} V_T(P_1, t + t_1). \quad (4b)$$

由此得出, 可在(3)式右边用 $\partial^2/c^2 \partial t_1^2$ 代替 ∇_1^2 , 再次互换运算次序后, 得出

$$\begin{aligned} \nabla_1^2 \Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2) &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} V_T(P_1, t + t_1) V_T^*(P_2, t + t_2) dt, \end{aligned}$$

即

$$\nabla_1^2 \Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2)}{\partial t_1^2}. \quad (5a)$$

用严格类似的方法, 还得出

$$\nabla_2^2 \Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2)}{\partial t_2^2}, \quad (5b)$$

式中 ∇_2^2 是对 P_2 点坐标的拉普拉斯算符.

现在, 对于平稳场, Γ 只通过差值 $t_1 - t_2 = \tau$ 依赖于 t_1 和 t_2 , 因此可象以前一样写出 $\Gamma(P_1, P, t_1, t_2) = \Gamma(P_1, P_2, \tau)$. 于是 $\partial^2/\partial t_1^2 = \partial^2/\partial t_2^2 = \partial^2/\partial \tau^2$, 由(5)式得出:

$$\nabla_1^2 \Gamma(P_1, P_2, \tau) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Gamma(P_1, P_2, \tau)}{\partial \tau^2}, \quad (6a)$$

1) 可指出另一种证明如下: 因 $V_T^{(r)}$ 满足波动方程, 所以它的每个频谱分量 $v_T(\nu)(-\infty \leq \nu \leq \infty)$ 都满足亥姆霍兹方程. 现根据 §10.2(18b) 式, $V_T = V_T^{(r)} + iV_T^{(i)}$ 的频谱是 $2v_T(\nu)$ 或零, 随 $\nu \geq 0$ 而定. 因此 V_T 的每个频谱分量也满足亥姆霍兹方程, 结果 V_T 就满足波动方程.

$$\nabla_1^2 \Gamma(P_1, P_2, \tau) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Gamma(P_1, P_2, \tau)}{\partial \tau^2}. \quad (6b)$$

可以看出，真空中互相干遵从两个波动方程¹⁾。每一个方程描述其中一点 (P_2 或 P_1) 固定而另一点和参量 τ 改变时互相干的变化。现在 τ 代表两个时刻之差，这里考虑的是两点各处于这两个时刻的相关，在所有实验里， τ 只以 $c\tau = \Delta\phi$ 这样的组合形式即作为程差而出现。因此，时间本身实际上已从我们对场的最终描述中消去了。这是部分相干性理论中特别引入注目的特点，因为在光波场中真正的时间变量是完全无法探测的。这一理论的核心即互相干函数 $\Gamma(P_1, P_2, \tau)$ 是可以直接测量的，例如利用 § 10.3 和 § 10.4 中描述过的干涉实验作测量。

§ 10.7.2 互相干传播定律的严格表述

仍考虑真空中的平稳波场。设 Q_1 和 Q_2 是场中任意两点， \mathcal{A} 是围绕这两点的任一虚构曲面。如果 ∇_1^2 表示对 Q_1 坐标的拉普拉斯算符，则根据(5a)式，有

$$\nabla_1^2 \Gamma(Q_1, Q_2, t_1, t_2) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Gamma(Q_1, Q_2, t_1, t_2)}{\partial t_1^2}. \quad (7)$$

由此得出，对 Γ 可应用 § 8.3 的基尔霍夫积分公式 (13)。因此， $\Gamma(Q_1, Q_2, t_1, t_2)$ 可用 $[\Gamma(P_1, Q_2, t_1, t_2)]_1$ 的值来表示，其中 P_1 取 \mathcal{A} 上所有的位置， $[\cdots]_1$ 表示相对于第一个时间自变量的推迟，即

$$[\Gamma(P_1, Q_2, t_1, t_2)]_1 = \Gamma\left(P_1, Q_2, t_1 - \frac{s_1}{c}, t_2\right), \quad (8)$$

s_1 是 P_1 和 Q_1 之间的距离(图 10.16)。将其明显地写出来，则基尔霍夫公式给出

1) 当 τ 比相干时间小得多时，根据 § 10.4(10) 式，有 $\Gamma(P_1, P_2, \tau) \sim J(P_1, P_2) \propto e^{-2\pi i \delta \tau}$ 。由(6)式得出，在准单色理论有效范围内，真空中的互强度 J_{12} 在良好近似的程度上遵从亥姆霍兹方程

$$\nabla_1^2 J(P_1, P_2) + k^2 J(P_1, P_2) = 0, \quad \nabla_2^2 J(P_1, P_2) + k^2 J(P_1, P_2) = 0.$$

$$\begin{aligned} \Gamma(Q_1, Q_2, t_1, t_2) = & \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{A}} \left\{ f_1 [\Gamma(P_1, Q_2, t_1, t_2)]_1 \right. \\ & + g_1 \left[\frac{\partial}{\partial t_1} \Gamma(P_1, Q_2, t_1, t_2) \right]_1 + h_1 \left[\frac{\partial}{\partial n_1} \Gamma(P_1, Q_2, t_1, t_2) \right]_1 \left. \right\} dP_1. \end{aligned} \quad (9)$$

式中 $\partial/\partial n_1$ 表示在 P_1 处沿 \mathcal{A} 的内法线方向求微商, 以及

$$f_1 = \frac{\partial}{\partial n_1} \left(\frac{1}{s_1} \right), \quad g_1 = -\frac{1}{cs_1} \frac{\partial s_1}{\partial n_1}, \quad h_1 = -\frac{1}{s_1}. \quad (10)$$

现在根据(5b)式, 还有

$$\nabla_2^2 \Gamma(P_1, Q_2, t_1, t_2) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Gamma(P_1, Q_2, t_1, t_2)}{\partial t_2^2}, \quad (11)$$

式中 ∇_2^2 是对 Q_2 坐标的拉普拉斯算符. 因此, (9) 式右边出现的 $\Gamma(P_1, Q_2, t_1, t_2)$ 可以表示为含有 $[\Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2)]_2$ 值的基尔霍夫积分的形式, 其中 P_2 取 \mathcal{A} 上所有可能的位置, $[\dots]_2$ 表示相对于第二个时间自变量的推迟, 例如

$$[\Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2)]_2 = \Gamma \left(P_1, P_2, t_1, t_2 - \frac{s_2}{c} \right), \quad (12)$$

s_2 是 P_2 和 Q_2 之间的距离. 明显地写出来, 相应的公式为

$$\begin{aligned} \Gamma(P_1, Q_2, t_1, t_2) = & \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{A}} \left\{ f_2 [\Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2)]_2 \right. \\ & + g_2 \left[\frac{\partial}{\partial t_2} \Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2) \right]_2 + h_2 \left[\frac{\partial}{\partial n_2} \Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2) \right]_2 \left. \right\} dP_2. \end{aligned} \quad (13)$$

式中 $\partial/\partial n_2$ 表示在 P_2 处沿内法线方向求微商, f_2 , g_2 , h_2 与 (10) 式中的量相同, 但下标 1 要换成 2. 然后将(13)式对 t_1 和 n_1 求微商, 得出

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_1} \Gamma(P_1, Q_2, t_1, t_2) = & \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{A}} \left\{ f_2 \left[\frac{\partial}{\partial t_1} \Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2) \right]_2 \right. \\ & + g_2 \left[\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2) \right]_2 \\ & \left. + h_2 \left[\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial n_2} \Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2) \right]_2 \right\} dP_2, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial n_1} \Gamma(P_1, Q_2, t_1, t_2) = & \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{A}} \left\{ f_2 \left[\frac{\partial}{\partial n_1} \Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2) \right]_2 \right. \\
& + g_2 \left[\frac{\partial^2}{\partial n_1 \partial t_2} \Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2) \right]_2 \\
& \left. + h_2 \left[\frac{\partial^2}{\partial n_1 \partial n_2} \Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2) \right]_2 \right\} dP_2. \quad (15)
\end{aligned}$$

现在将(13), (14)和(15)式代入(9)式, 就得到 $\Gamma(Q_1, Q_2, t_1, t_2)$ 的下述表达式:

$$\begin{aligned}
\Gamma(Q_1, Q_2, t_1, t_2) = & \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} \left\{ f_1 f_2 [\Gamma]_{1,2} + f_1 g_2 \left[\frac{\partial}{\partial t_2} \Gamma \right]_{1,2} \right. \\
& + f_1 h_2 \left[\frac{\partial}{\partial n_2} \Gamma \right]_{1,2} + g_1 f_2 \left[\frac{\partial}{\partial t_1} \Gamma \right]_{1,2} + g_1 g_2 \left[\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \Gamma \right]_{1,2} \\
& + g_1 h_2 \left[\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial n_2} \Gamma \right]_{1,2} + h_1 f_2 \left[\frac{\partial}{\partial n_1} \Gamma \right]_{1,2} + h_1 g_2 \left[\frac{\partial^2}{\partial n_1 \partial t_2} \Gamma \right]_{1,2} \\
& \left. + h_1 h_2 \left[\frac{\partial^2}{\partial n_1 \partial n_2} \Gamma \right]_{1,2} \right\} dP_1 dP_2, \quad (16)
\end{aligned}$$

式中右边 Γ 的前两个自变量是 P_1 和 P_2 , $[\cdots]_{1,2}$ 表示相对于两个时间自变量的推迟, 例如

$$[\Gamma]_{1,2} = \Gamma \left(P_1, P_2, t_1 - \frac{s_1}{c}, t_2 - \frac{s_2}{c} \right). \quad (17)$$

最后, 利用平稳性的假定, 它保证 Γ 只通过两个时间自变量的差值依赖于此二者. 同前, 写出 $\Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2) = \Gamma(P_1, P_2, \tau)$, $\tau = t_1 - t_2$. 因此 $\partial/\partial t_1 = -\partial/\partial t_2 = \partial/\partial\tau$, (16)式变为¹⁾

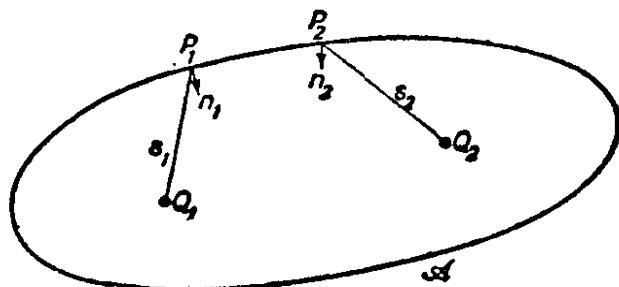


图 10.16 互相干传播定律严格表述中所用的符号

1) (18)式适用于来自任意形状的闭曲面 \mathcal{A} 的传播. 对于来自平面的传播, 存在更简单的公式 [见 M. J. Beran and G. B. Parrent, *Theory of Partial Coherence* (Englewood Cliffs, N. J., 1964), § 3.3].

$$\begin{aligned}
\Gamma(Q_1, Q_2, \tau) = & \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} \left\{ f_1 f_2 [\Gamma] - f_1 g_2 \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \Gamma \right] \right. \\
& + f_1 h_2 \left[\frac{\partial}{\partial n_2} \Gamma \right] + g_1 f_2 \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \Gamma \right] - g_1 g_2 \left[\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \Gamma \right] \\
& + g_1 h_2 \left[\frac{\partial^2}{\partial \tau \partial n_2} \Gamma \right] + h_1 f_2 \left[\frac{\partial}{\partial n_1} \Gamma \right] - h_1 g_2 \left[\frac{\partial^2}{\partial n_1 \partial \tau} \Gamma \right] \\
& \left. + h_1 h_2 \left[\frac{\partial^2}{\partial n_1 \partial n_2} \Gamma \right] \right\} dP_1 dP_2. \tag{18}
\end{aligned}$$

右边 Γ 的前两个自变量是 P_1 和 P_2 , $[\dots]$ 表示“推迟”量为 $(s_1 - s_2)/c$, 例如

$$[\Gamma] = \Gamma \left(P_1, P_2, \tau - \frac{s_1 - s_2}{c} \right). \tag{19}$$

(18)式可认为是互相干传播定律(§ 10.6(17)式)的严格表述。它利用围绕任意两点 Q_1 和 Q_2 的任意闭曲面上所有各对点处互相干函数值及其一些微商值, 来表示这两点的互相干函数值。

在 Q_1 和 Q_2 重合而 $\tau = 0$ 的特殊情况下, 由(18)式, 代入 $\Gamma_{12}(\tau) = \sqrt{I_1} \sqrt{I_2} \gamma_{12}(\tau)$, 就得到强度的下述表达式:

$$\begin{aligned}
I(Q) = & \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} \left(\sqrt{I_1} \sqrt{I_2} \left\{ f_1 f_2 [\gamma] + (f_2 g_1 - f_1 g_2) \right. \right. \\
& \times \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \gamma \right] - g_1 g_2 \left[\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \gamma \right] \left. \right\} \\
& + \sqrt{I_1} \left\{ f_1 h_2 \frac{\partial}{\partial n_2} \left(\sqrt{I_2} [\gamma] \right) \right. \\
& + g_1 h_2 \frac{\partial}{\partial n_2} \left(\sqrt{I_2} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \gamma \right] \right) \left. \right\} \\
& + \sqrt{I_2} \left\{ f_2 h_1 \frac{\partial}{\partial n_1} \left(\sqrt{I_1} [\gamma] \right) \right. \\
& - g_2 h_1 \frac{\partial}{\partial n_1} \left(\sqrt{I_1} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \gamma \right] \right) \left. \right\} \\
& + h_1 h_2 \frac{\partial^2}{\partial n_1 \partial n_2} \left(\sqrt{I_1} \sqrt{I_2} [\gamma] \right) \left. \right\} dP_1 dP_2, \tag{20}
\end{aligned}$$

式中 I_1 和 I_2 分别是 P_1 和 P_2 处的强度, $[\gamma] = \gamma(P_1, P_2, (s_2 - s_1) / c)$, 等等. (20) 式可认为是 § 10.6(18) 式所表述的定理的严格表述. 它利用围绕任意点 Q 的任意曲面上的强度分布和复相干度 (以及这两个量的一些微商) 来给出 Q 点处的强度.

§ 10.7.3 相干时间和有效谱宽

相干时间的概念在许多涉及多色光的研究中已发现很有用处, 它在 § 7.5.8 中通过研究具有有限持续时间的相同波列叠加而引起的扰动就已经介绍过了. 我们已通过一个简单例子 (周期波列的随机序列) 证明过, 所得到扰动的相干时间¹⁾ $\Delta\tau$ 和有效谱宽 $\Delta\nu = c\Delta\lambda/\bar{\lambda}^2$ 由数量级关系式

$$\Delta\tau\Delta\nu \sim 1 \quad (21)$$

相联系. 我们还讲过, 只要 $\Delta\tau$ 和 $\Delta\nu$ 定义为适当的平均值, 则在更普遍的条件下, 也有一个这种类型的关系式成立. 本节中将定义这些量, 并严格地建立所需的倒易关系.

假定一束光在 P 点处分成两束, 在这两束光之间引入程差 $c\tau$ 之后再合在一起. 由此引起的干涉效应由自相干函数

$$\Gamma(\tau) = \langle V(t + \tau)V^*(t) \rangle = 4 \int_0^\infty G(\nu)e^{-2\pi i \nu \tau} d\nu \quad (22)$$

表征, 式中 $V(t)$ 是 P 处的复扰动, $G(\nu)$ 是谱密度.

由于两个干涉光束的相干度用 $|\gamma(\tau)| = |\Gamma(\tau)|/\Gamma(0)$ 来表示, 因此把光在 P 处的相干时间定义为 $\Gamma(\tau)$ 的模平方的归一化方均根宽度 (r. m. s.) 是合理的, 并且在数学上也是方便的, 即²⁾

$$(\Delta\tau)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \tau^2 |\Gamma(\tau)|^2 d\tau}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Gamma(\tau)|^2 d\tau}. \quad (23)$$

1) 为了本章符号一致, 现在用 $\Delta\tau$ 代替 Δt .

2) 因 $|\Gamma(\tau)|$ 是 τ 的偶函数, 所以平均值 $\bar{\tau} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau |\Gamma(\tau)|^2 d\tau / \int_{-\infty}^{+\infty} |\Gamma(\tau)|^2 d\tau$ 为零.

关于相干时间的另一定义, 见 L. Mandel, *Proc. Phys. Soc.*, **74** (1959), 233. 又见 L. Mandel and Wolf, 同上, **80**(1962), 894.

其次，把光在 P 处的有效谱宽 $\Delta\nu$ 定义为 Γ 的谱的归一化方均根宽度，即遍及 $\nu \geq 0$ 范围的谱密度 $G(\nu)$ 平方的归一化方均根宽度。因此

$$(\Delta\nu)^2 = \frac{\int_0^\infty (\nu - \bar{\nu})^2 G^2(\nu) d\nu}{\int_0^\infty G^2(\nu) d\nu}, \quad \bar{\nu} = \frac{\int_0^\infty \nu G^2(\nu) d\nu}{\int_0^\infty G^2(\nu) d\nu}. \quad (24)$$

为了建立所需的倒易关系，令

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \nu - \bar{\nu}, & (a) \\ \Phi(\xi) &= 4G(\bar{\nu} + \xi), & \text{当 } \xi > -\bar{\nu} \text{ 时,} \\ &= 0, & \text{当 } \xi < -\bar{\nu} \text{ 时,} \\ \Psi(\tau) &= \Gamma(\tau) e^{2\pi i \bar{\nu} \tau}. & (c) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

假定 $\Phi(\xi)$ 处处连续 ($-\infty < \xi < \infty$)；因此 $\Phi(-\bar{\nu}) = G(0) = 0$ ¹⁾。由(22)式得出， Ψ 和 Φ 构成一对傅里叶变换，

$$\Psi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi) e^{-2\pi i \xi \tau} d\xi, \quad \Phi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\tau) e^{2\pi i \xi \tau} d\tau. \quad (26)$$

$\Delta\tau$ 和 $\Delta\nu$ 的表达式变为

$$(\Delta\tau)^2 = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 |\Psi(\tau)|^2 d\tau, \quad (27)$$

$$(\Delta\nu)^2 = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \Phi^2(\xi) d\xi, \quad (28)$$

式中

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(\tau)|^2 d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2(\xi) d\xi. \quad (29)$$

1) 事实上，这个条件对于(23)式分子积分的收敛是必需的。如果它被满足，如这里所假定，则当 $\Gamma(\tau) = \langle V(t + \tau) V^*(t) \rangle$ 被实相关函数 $\Gamma^{(r)}(\tau) = \mathcal{R}\Gamma(\tau) = 2\langle V^{(r)}(t + \tau) V^{(r)}(t) \rangle$ 代替时，(23)式的值保持不变 [参看 E. Wolf, *Proc. Phys. Soc., B*, **71** (1958), 257; R. Silverman, *Trans. Inst. Rad. Engrs.*, CT-5 (1958), 84]。A.G. Mayer 和 E. A. Leontovich, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, **4** (1934), 353, 以及 I. Kay 和 R. Silverman, *Information and Control*, **1** (1957), 64, 396, 研究过 $G(0) \neq 0$ 的更普遍情况。又见 A. A. Kharkevich, *Spectra and Analysis*, 译自俄文 (New York, Consultants Bureau, 1960), § 12.]

然后,用 Ψ 表示(28)式的积分。利用(26)式中第二个关系式,有

$$\begin{aligned}
 (\Delta\nu)^2 &= \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \Phi(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\tau) e^{2\pi i \xi \tau} d\tau \\
 &= \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\tau) d\tau \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi) e^{2\pi i \xi \tau} d\xi \\
 &= -\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\tau) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \Psi^*(\tau) d\tau \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \right|^2 d\tau. \tag{30}
 \end{aligned}$$

从第二行过渡到第三行时,已用了(26)式中第一个关系式,以及关系式 $\Psi(-\tau) = \Psi^*(\tau)$ 。最后一行是由前一行通过分部积分并且用了当 $\tau \rightarrow \pm\infty$ 时 $\Psi \rightarrow 0$ 而得出的。 Ψ 有这样的性质是因为已假定(29)式中的积分 $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(\tau)|^2 d\tau$ 收敛。

由(27),(29)和(30)式得出

$$(\Delta\tau)^2 (\Delta\nu)^2 = \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{4 \left(\int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 |\Psi(\tau)|^2 d\tau \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \right|^2 d\tau \right)}{\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(\tau)|^2 d\tau \right)^2} \right]. \tag{31}$$

现在,利用附录 8 给出的直接代数论证,对于任一函数 Ψ 只要积分存在,(31)式右边大括弧内的项就大于或等于 1。因此,就建立了关于相干时间和有效谱宽的下述倒易不等式⁹:

$$\Delta\tau \Delta\nu \geq \frac{1}{4\pi}. \tag{32}$$

记住准单色光而且两个干涉光束强度相等时,根据 § 10.4(5) 式,相干度 $|\gamma_{11}(\tau)| = |\Gamma_{11}(\tau)|/\Gamma_{11}(0)$ 等于这两光束之间的程差为 $c\tau$ 的一点处的条纹可见度 $\mathcal{V}(\tau)$ 。因此,(23)式可写成下述

1) 我们的推导仿照 H. Weyl 和 W. Pauli 所给出的关于海森伯测不准关系的推导 [H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics* (London, Methuen, 1931; also Dover Publications, New York), pp. 77 and 393]。

形式:

$$(\Delta\tau)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 \mathcal{V}^2(\tau) d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{V}^2(\tau) d\tau} = \frac{\int_0^{\infty} \tau^2 \mathcal{V}^2(\tau) d\tau}{\int_0^{\infty} \mathcal{V}^2(\tau) d\tau}; \quad (33)$$

所以,当两个干涉光束强度相等时,相干时间 $\Delta\tau$ 等于可见度函数平方的归一化方均根宽度.

相干时间的上述定义比 § 7.5.8 给出的定义更合适,因为现在不必对引起扰动的初级场的性质作特殊的假定. 事实上,上述定义依据可测的相关函数 $\Gamma(\tau)$, 而不再需要知道迅速涨落的函数 $V(\tau)$ 的详细情况. 如果希望保留用初级波列来描述干涉现象,则可把 $\Delta\tau$ 看作平均波列的持续时间; 然而采用这种解释必须小心谨慎.

回到(32)式, 我们看到仅当(31)式右边大括弧内的项等于 1 时, (32)式的等号才成立, 根据附录 8, 只有在 $\Psi(\tau)$ 是高斯函数时这才有可能. 这时, 一个高斯函数的傅里叶变换还是一个高斯函数, 由于这个函数对于其自变量的所有值 ($-\infty < \xi < \infty$) 都不为零, 因此它不遵守(25 b)式第二个条件. 所以(32)式中的等号从来不用. 然而, 当高斯函数中心处的频率比它的方均根宽度大得多时, 负频率区对 ν 和 $\Delta\nu$ 的贡献可以忽略; 显然, 对于光学中遇到的高频谱而言, 乘积 $\Delta\tau\Delta\nu$ 的值与对应于整个高斯曲线¹⁾的 $\Delta\tau\Delta\nu$ 值不可能有明显的差别. 所以(32)式中的不等式符号可以用数量级符号来代替, 即

$$\Delta\tau\Delta\nu \sim \frac{1}{4\pi}. \quad (34)$$

刚才给出的相干时间的定义, 适合于单一光束在一点 P 处分成两个干涉光束的情况. 这个定义可推广到在两点 P_1 和 P_2 处分出两个干涉光束的情况, 例如在杨氏干涉实验中. 这种推广很简单. 此时必须用互相干函数 $\Gamma_{12}(\tau) = \Gamma(P_1, P_2, \tau)$ 代替自相干函

1) 即包括负频率区. ——译者注

数 $\Gamma(\tau) = \Gamma(p, p, \tau)$, 用互谱密度 $G_{12}(\nu)$ 代替寻常的谱密度 $G(\nu)$. 唯一的差别在于此时 $G_{12}(\nu)$ 是复值, 并且 $\Gamma_{12}(\tau)$ 不再一定是 τ 的偶函数, 因此 $\bar{\tau}$ 不一定为零. 此时适当的定义是:

$$(\Delta\tau_{12})^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\tau - \bar{\tau}_{12})^2 |\Gamma_{12}(\tau)|^2 d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_{12}(\tau)|^2 d\tau}, \quad \bar{\tau}_{12} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \tau |\Gamma_{12}(\tau)|^2 d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_{12}(\tau)|^2 d\tau}, \quad (35)$$

$$(\Delta\nu_{12})^2 = \frac{\int_0^{\infty} (\nu - \bar{\nu}_{12})^2 |G_{12}(\nu)|^2 d\nu}{\int_0^{\infty} |G_{12}(\nu)|^2 d\nu}, \quad \bar{\nu}_{12} = \frac{\int_0^{\infty} \nu |G_{12}(\nu)|^2 d\nu}{\int_0^{\infty} |G_{12}(\nu)|^2 d\nu}. \quad (36)$$

$\Delta\tau_{12}$ 可称为光在 P_1 和 P_2 处的互相干时间, $\Delta\nu_{12}$ 可称为光在 P_1 和 P_2 处的互有效谱宽. 对有关 $\Gamma_{11}(\tau)$ 的论证作显而易见的修改, 就得出这两个量满足倒易不等式

$$(\Delta\tau_{12})(\Delta\nu_{12}) > \frac{1}{4\pi}. \quad (37)$$

最后, 对于准单色光, 作为(33)式的推广, 有下述关系式:

$$(\Delta\tau_{12})^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\tau - \bar{\tau}_{12})^2 \mathcal{V}_{12}^2(\tau) d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{V}_{12}^2(\tau) d\tau}, \quad \bar{\tau}_{12} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \tau \mathcal{V}_{12}^2(\tau) d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{V}_{12}^2(\tau) d\tau}. \quad (38)$$

式中 $\mathcal{V}_{12}(\tau)$ 代表当两个干涉光束强度相同时, 来自 P_1 和 P_2 的光所形成的条纹可见度.

§ 10.8 准单色光的偏振特性

本章前几节中, 我们把光扰动作为标量处理. 现在扼要讨论准单色光波的某些矢量特性.

§ 1.4 中讲过, 严格单色光总是偏振的, 即随着时间的增加, 空间内每一点处的电矢量(以及磁矢量)的端点绕着一个椭圆作周期

性运动,当然,在特殊情况下,这个椭圆可变为一个圆或一条直线。还遇到过非偏振光。在这种情况下,可假定端点完全不规则地运动,并且在垂直于传播方向的各个不同方向上把它分解时,这种光显出没有优越的方向性,同完全相干与完全不相干一样,上述两种情况代表两种极端。场矢量的变化一般既不是完全规则的,又不是完全不规则的,我们可以说,这样的光是部分偏振的。通常这种光是由非偏振光经反射(参看§15.3)或散射(参看§13.5.2)而产生的。本节中将研究部分偏振光波的主要特性。我们将看到,它的一些可观察的效应,取决于与传播方向垂直的电矢量任何两个相互正交的分量的强度,以及这两者之间存在的相关。

§ 10.8.1 准单色平面波的相干矩阵¹⁾

考虑平均频率为 $\bar{\nu}$ 的准单色光波沿正 z 方向传播。设

$$E_x(t) = a_1(t) e^{i[\phi_1(t) - 2\pi\bar{\nu}t]}, \quad E_y(t) = a_2(t) e^{i[\phi_2(t) - 2\pi\bar{\nu}t]} \quad (1)$$

表示 O 点处的电矢量在垂直于传播方向的两个相互正交的方向上的分量。再次采用§10.2中讨论过的复数表示,其中 E_x 和 E_y 是与真正的(实)分量 $E_x^{(r)} = a_1(t) \cos [\phi_1(t) - 2\pi\bar{\nu}t]$, $E_y^{(r)} = a_2(t) \times \cos [\phi_2(t) - 2\pi\bar{\nu}t]$ 相结合的“解析信号”。如果光是严格单色的,则 a_1 , a_2 , ϕ_1 和 ϕ_2 都是常数。对于准单色波,这些量也依赖于时间 t ,但如前所述,在比相干时间即光的有效谱宽 $\Delta\nu$ 的倒数小得多的任一时间间隔内,它们只有相对小量的变化。

假定 y 分量相对于 x 分量有一推迟量 ε , (例如,利用§14.4.2中所描述的一种补偿器就能做到这一点),并考虑在与正 x 方向成 θ 角的方向上光振动的强度 $I(\theta, \varepsilon)$, (图10.17)。使光通过一个适当取向的起偏振器(§14.4.1),就会观察到这一强度。

引入推迟量 ε 以后,电矢量在 θ 方向上的分量为

$$E(t; \theta, \varepsilon) = E_x \cos \theta + E_y e^{i\varepsilon} \sin \theta, \quad (2)$$

1) §10.8.1 和 §10.8.2 中所作的分析是根据 E. Wolf 的研究 [Nuovo Cimento, 13 (1959), 1165]。G. B. Parrent 和 P. Roman 的论文中叙述了某些进一步的发展[同上, 15 (1960), 370]。

因此

$$\begin{aligned} I(\theta, \varepsilon) &= \langle E(t; \theta, \varepsilon) E^*(t; \theta, \varepsilon) \rangle \\ &= J_{xx} \cos^2 \theta + J_{yy} \sin^2 \theta + J_{xy} e^{-i\varepsilon} \cos \theta \sin \theta \\ &\quad + J_{yx} e^{i\varepsilon} \sin \theta \cos \theta, \end{aligned} \quad (3)$$

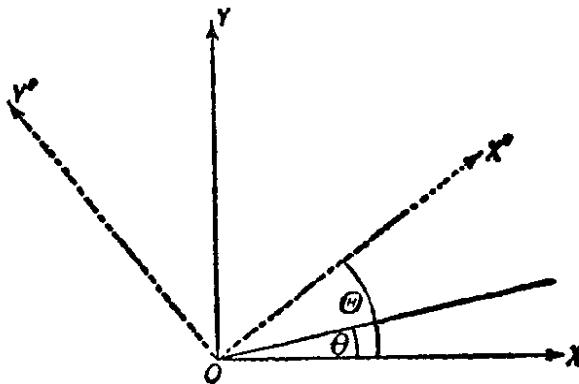


图 10.17 符号的图示

式中 J_{xx}, \dots 是矩阵

$$J = \begin{bmatrix} \langle E_x E_x^* \rangle & \langle E_x E_y^* \rangle \\ \langle E_y E_x^* \rangle & \langle E_y E_y^* \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle a_1^2 \rangle & \langle a_1 a_2 e^{i(\phi_1 - \phi_2)} \rangle \\ \langle a_1 a_2 e^{-i(\phi_1 - \phi_2)} \rangle & \langle a_2^2 \rangle \end{bmatrix} \quad (4)$$

的矩阵元。 J 的对角元是实数，可以看出，它们代表在 x 方向上和 y 方向上分量的强度。因此，矩阵的迹 $\text{Tr} J$ 即其对角元之和等于光的总强度，

$$\text{Tr} J = J_{xx} + J_{yy} = \langle E_x E_x^* \rangle + \langle E_y E_y^* \rangle. \quad (5)$$

非对角元一般是复数，但它们彼此共轭。（象这种对于所有的 i 和 j 都满足关系式 $J_{ij} = J_{ji}^*$ 的矩阵，称为厄密矩阵）。

用同前面一样的方法（参看 § 10.4(9b) 式），令

$$u_{xy} = |\mu_{xy}| e^{i\beta_{xy}} = \frac{J_{xy}}{\sqrt{J_{xx}} \sqrt{J_{yy}}}, \quad (6)$$

使混合项 J_{xy} 归一化。然后用同 § 10.3(17) 式一样的方法，由薛华兹不等式得出

$$|\mu_{xy}| \leq 1. \quad (7)$$

这个复相关因子 μ_{xy} 与 § 10.4.1 引入的复相干度 μ_{12} 具有类似的含义。它是电矢量在 x 方向上和 y 方向上的分量之间相关性的量度。其绝对值 $|\mu_{xy}|$ 是它们的“相干度”的量度。其位相 β_{xy} 是它

们的“有效位相差”的量度。 J 称为光波的相干矩阵。因 J_{xx} 和 J_{yy} 不能为负值，所以(6)和(7)式意味着相伴的行列式是非负的，即

$$|J| = J_{xx}J_{yy} - J_{xy}J_{yx} \geq 0. \quad (8)$$

如果利用关系式 $J_{yx} = J_{xy}^*$ ，并用 \Re 表示实部，则(3)式变为

$$\begin{aligned} I(\theta, \epsilon) &= J_{xx} \cos^2 \theta + J_{yy} \sin^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta \Re(J_{xy} e^{-i\epsilon}) \\ &= J_{xx} \cos^2 \theta + J_{yy} \sin^2 \theta + 2 \sqrt{J_{xx}} \sqrt{J_{yy}} \cos \theta \sin \theta \\ &\quad \times |\mu_{xy}| \cos [\beta_{xy} - \epsilon], \end{aligned} \quad (9)$$

式中从第一行到第三行已用(6)式代入。如果令 $J_{xx} \cos^2 \theta = I^{(1)}$ ， $J_{yy} \sin^2 \theta = I^{(2)}$ ，则最后的公式变得与准单色波场的基本干涉定律 § 10.4(11)式一致。

同以前考虑过的相干函数一样，一给定波的相干矩阵元可用较简单的实验测定。这可以用许多不同的方法做到。人们只需要对几个不同的 θ 值（起偏振器的取向）和 ϵ 值（由补偿器引入的延迟）测量强度，并求解由(3)式得出的相应关系式即可。设 $\{\theta, \epsilon\}$ 表示与特定的一对 θ, ϵ 对应的一次测量。一组方便的测量如下：

$$\begin{aligned} &\{0^\circ, 0\}, \{45^\circ, 0\}, \{90^\circ, 0\}, \{135^\circ, 0\}, \left\{45^\circ, \frac{\pi}{2}\right\}, \\ &\left\{135^\circ, \frac{\pi}{2}\right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

利用从这六次测量确定的强度，由(3)式得出相干矩阵元为

$$\left. \begin{aligned} J_{xx} &= I(0^\circ, 0), \\ J_{yy} &= I(90^\circ, 0), \\ J_{xy} &= \frac{1}{2} \{I(45^\circ, 0) - I(135^\circ, 0)\} \\ &\quad + \frac{1}{2} i \left\{ I\left(45^\circ, \frac{\pi}{2}\right) - I\left(135^\circ, \frac{\pi}{2}\right) \right\}, \\ J_{yx} &= \frac{1}{2} \{I(45^\circ, 0) - I(135^\circ, 0)\} \\ &\quad - \frac{1}{2} i \left\{ I\left(45^\circ, \frac{\pi}{2}\right) - I\left(135^\circ, \frac{\pi}{2}\right) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

可以看出,要确定 J_{xx} , J_{yy} 以及 J_{xy} (或 J_{yx}) 的实部,只需要一个起偏振器。使起偏振器的取向分别透过在方位角 $\theta=0$ 和 $\theta=90^\circ$ 上的分量,就可测定 J_{xx} 和 J_{yy} 。使起偏振器的取向首先透过在方位角 $\theta = 45^\circ$ 上的分量,然后透过在方位角 $\theta = 135^\circ$ 上的分量,就可测定 J_{xy} 的实部。为了确定 J_{xy} (或 J_{yx}) 的虚部,根据(11)中最后两式,还需要一个补偿器,它在 x 分量和 y 分量之间引入四分之一周期的位相差(例如一块四分之一波片,参看 § 14.4.2);并且再次使用起偏振器,使它的取向首先透过在方位角 $\theta = 45^\circ$ 上的分量,然后透过在方位角 $\theta = 135^\circ$ 上的分量。§ 14.4.2 中将讲到,后两种测量也可用于探测右旋和左旋圆偏振。

由(9)式明显看出,两束光具有相同的相干矩阵,就它们在使用一个起偏振器和一个补偿器的同样实验中产生相同的(时间平均)强度这个意义而言,它们是等效的¹⁾。

现在对于一给定波,当一个自变量(θ 或 ϵ)保持固定而另一个改变时,考查所观察的强度 $I(\theta, \epsilon)$ 如何变化。首先假定 θ 保持不变而 ϵ 改变。由(9)式看出,强度在下述极大值和极小值之间作正弦曲线型变化:

$$\begin{aligned} I_{\text{极大}(\epsilon)} &= J_{xx} \cos^2 \theta + J_{yy} \sin^2 \theta + 2|J_{xy}| \sin \theta \cos \theta, \\ \text{和} \quad I_{\text{极小}(\epsilon)} &= J_{xx} \cos^2 \theta + J_{yy} \sin^2 \theta - 2|J_{xy}| \sin \theta \cos \theta. \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (12)$$

因此

$$\frac{I_{\text{极大}(\epsilon)} - I_{\text{极小}(\epsilon)}}{I_{\text{极大}(\epsilon)} + I_{\text{极小}(\epsilon)}} = \frac{|J_{xy}| \sin 2\theta}{J_{xx} \cos^2 \theta + J_{yy} \sin^2 \theta}. \quad (13)$$

(13) 式指出另一种确定 $|J_{xy}|$ 的绝对值(因此也确定 $|\mu_{xy}|$)的方法。

1) 这种提法只有在准单色理论近似范围内才是正确的,因为只有在此理论有效范围内,强度表达式(9)才成立。当两个正交分量之间所引入的位相延迟 ϵ 与用平均波长 $\bar{\lambda}$ 为单位测量的相干长度相比不可忽略时,两束光可能表现得很不相同。为了更完整地描述光束的可观察的特性,必须引入更普遍的相干矩阵,它表征不同时间以及不同点处的分量之间的相关。参看 E. Wolf, *Nuovo Cimento*, **12** (1954), 884; 以及他所撰稿,载于 *Proc. Symb. Astronom. Optics*, ed. Z. Kopal (Amsterdam, North-Holland Publishing Co., 1956), 177; P. Roman and E. Wolf, *Nuovo Cimento*, **17** (1960), 462, 477; P. Roman, 同上, **20** (1961), 759; 同上, **22** (1961), 1005。

法；它表明 $|J_{xy}|$ 可通过测量 J_{xx} , J_{yy} , $I_{\text{极大}(\varepsilon)}$ 和 $I_{\text{极小}(\varepsilon)}$ 得出， J_{xy} 的位相可通过测量极大或极小值出现时的 ε 值得出。因为，根据(9)式，

$$\left. \begin{aligned} I &= I_{\text{极大}(\varepsilon)}, \text{ 当 } \varepsilon = \beta_{xy} \pm 2m\pi \text{ 时} (m = 0, 1, 2, \dots), \\ I &= I_{\text{极小}(\varepsilon)}, \text{ 当 } \varepsilon = \beta_{xy} \pm (2m + 1)\pi \text{ 时}, (m = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

为了看出当 ε 固定而 θ 改变时强度如何变化，把(9)式改写成稍有不同的形式是方便的。简单计算得出

$$I(\theta, \varepsilon) = \frac{1}{2} (J_{xx} + J_{yy}) + R \cos(2\theta - \alpha), \quad (15)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{1}{2} \sqrt{(J_{xx} - J_{yy})^2 + 4J_{xy}J_{yx} \cos^2(\beta_{xy} - \varepsilon)}, \\ \tan \alpha &= \frac{2|J_{xy}| \cos(\beta_{xy} - \varepsilon)}{J_{xx} - J_{yy}}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

由(15)式看出，当 θ 变化时，强度再次作正弦曲线型变化；其极值为

$$\left. \begin{aligned} I_{\text{极大}(\theta)} &= \frac{1}{2} (J_{xx} + J_{yy}) + R, \\ I_{\text{极小}(\theta)} &= \frac{1}{2} (J_{xx} + J_{yy}) - R. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

在(17)式右边，只有 R 依赖于 ε 。当 $\cos^2(\beta_{xy} - \varepsilon) = 1$ ，即 ε 为(14)式所给的值之一时， R 取最大值，它等于

$$\begin{aligned} R_{\text{极大}(\varepsilon)} &= \frac{1}{2} \sqrt{(J_{xx} - J_{yy})^2 + 4J_{xy}J_{yx}} \\ &= \frac{1}{2} (J_{xx} + J_{yy}) \sqrt{1 - \frac{4|\mathbf{J}|}{(J_{xx} + J_{yy})^2}}, \end{aligned} \quad (18)$$

式中 $|\mathbf{J}|$ 是相干矩阵的行列式(8)。由此得出，强度(相对于 θ 和 ε 两者)的绝对极大值和极小值为

$$\left. \begin{aligned} I_{\text{极大}(\theta, \varepsilon)} &= \frac{1}{2} (J_{xx} + J_{yy}) \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4|\mathbf{J}|}{(J_{xx} + J_{yy})^2}} \right], \\ I_{\text{极小}(\theta, \varepsilon)} &= \frac{1}{2} (J_{xx} + J_{yy}) \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4|\mathbf{J}|}{(J_{xx} + J_{yy})^2}} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

因此

$$\frac{I_{\text{极大}}(\theta, \varepsilon) - I_{\text{极小}}(\theta, \varepsilon)}{I_{\text{极大}}(\theta, \varepsilon) + I_{\text{极小}}(\theta, \varepsilon)} = \sqrt{1 - \frac{4|\mathbf{J}|}{(J_{xx} + J_{yy})^2}}. \quad (20)$$

以后将看到,这个量具有简单的物理意义.

至此,所涉及的是在任意的但却是固定的直角坐标轴 OX , OY 上的电振动. 现在将考虑当选取一套新坐标轴时, 相干矩阵如何变换. 设仍在垂直于传播方向的平面内取新的直角坐标轴 OX' , OY' , 使 OX' 与 OX 的夹角为 Θ (见图 10.17). 电矢量在新坐标轴上的分量用 E_x , E_y 表示为

$$\left. \begin{aligned} E_{x'} &= E_x \cos \Theta + E_y \sin \Theta, \\ E_{y'} &= -E_x \sin \Theta + E_y \cos \Theta. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

变换后的相干矩阵 \mathbf{J}' 的矩阵元为

$$J_{k'l'} = \langle E_{k'} E_{l'}^* \rangle, \quad (22)$$

式中 k' 和 l' 各取 x' 和 y' 值. 由(21)和(22)式得出,

$$\mathbf{J}' = \begin{bmatrix} J_{xx}c^2 + J_{yy}s^2 + (J_{xy} + J_{yx})cs & (J_{yy} - J_{xx})cs + J_{xy}c^2 - J_{yx}s^2 \\ [(J_{yy} - J_{xx})cs + J_{yx}c^2 - J_{xy}s^2] & J_{xx}s^2 + J_{yy}c^2 - (J_{xy} + J_{yx})cs \end{bmatrix}, \quad (23)$$

式中

$$c = \cos \Theta, \quad s = \sin \Theta. \quad (24)$$

可以看出,矩阵的迹经坐标轴旋转是不变的. 简单计算表明,其行列式经此变换也是不变的,由熟知的矩阵代数定理也得到这两个结果.

现在考虑几种特别有意义的情况下相干矩阵的形式.

(a) 完全非偏振光(自然光)

自然界最常见的光具有下述特性: 它在垂直于传播方向的任一方向上的分量强度都相同; 而且, 光可分解成两个直角坐标分量, 其中一个分量相对于另一个分量事先有任何推迟, 都不影响这一强度. 换句话说, 对于所有的 θ 和 ε 值,

$$I(\theta, \varepsilon) = \text{常数} \quad (25)$$

这样的光可称为完全非偏振光，通常也称为自然光。

由(9)式明显看出，当而且仅当

$$\mu_{xy} = 0 \text{ 和 } J_{xx} = J_{yy}, \quad (26a)$$

时， $I(\theta, \varepsilon)$ 才与 ε 和 θ 无关。第一个条件意味着 E_x 和 E_y 互不相干。根据(6)式和关系式 $J_{yx} = J_{xy}^*$ ，(26a) 式也可写为

$$J_{xy} = J_{yx} = 0, \quad J_{xx} = J_{yy}, \quad (26b)$$

由此得出，强度为 $J_{xx} + J_{yy} = I_0$ 的自然光的相干矩阵为

$$\frac{1}{2} I_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

(b) 完全偏振光

首先假定光是严格单色的。于是(1)式中的振幅 a_1 和 a_2 以及位相因子 ϕ_1 和 ϕ_2 都与时间无关，而相干矩阵的形式为

$$\begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 e^{i\delta} \\ a_1 a_2 e^{-i\delta} & a_2^2 \end{bmatrix}, \quad (28)$$

式中¹⁾

$$\delta = \phi_1 - \phi_2. \quad (29)$$

可以看出，在这种情况下

$$|\mathbf{J}| = J_{xx} J_{yy} - J_{xy} J_{yx} = 0, \quad (30)$$

即相干矩阵的行列式为零。这时，分量 E_x 和 E_y 的复相干度为

$$\mu_{xy} = \frac{J_{xy}}{\sqrt{J_{xx}} \sqrt{J_{yy}}} = e^{i\delta}, \quad (31)$$

即它的绝对值为 1（完全相干），而它的位相等于两个分量的位相差。

在线偏振光的特殊情况下，[参看 § 1.4(33) 式]，有 $\delta = m\pi \times (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 。因此，线偏振光的相干矩阵为

$$\begin{bmatrix} a_1^2 & (-1)^m a_1 a_2 \\ (-1)^m a_1 a_2 & a_2^2 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

1) 为了以后应用 § 1.4 的某些结果，注意 ϕ_1 和 ϕ_2 相当于 § 1.4.2 的 $-\delta_1$ 和 $-\delta_2$ ，因此(29)式与早先 § 1.4(16) 式的定义即 $\delta = \delta_2 - \delta_1$ 相同。

电矢量沿 $E_y/E_x = (-1)^m a_2/a_1$ 所给出的方向振动。特别是，矩阵

$$I \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 和 } I \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

各代表电矢量分别在 x 方向 ($a_2 = 0$) 和 y 方向 ($a_1 = 0$) 上强度为 I 的线偏振光；而矩阵

$$\frac{1}{2} I \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ 和 } \frac{1}{2} I \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

各代表电矢量分别在与 x 方向成 45° 和 135° 角的方向上强度为 I 的线偏振光 ($a_1 = a_2, m = 0$ 和 $a_1 = a_2, m = 1$)。

对于圆偏振光，[参看 § 1.4(35), (36) 式]，有 $a_1 = a_2, \delta = m\pi/2 (m = \pm 1, \pm 3, \dots)$ ，因此，相干矩阵为

$$\frac{1}{2} I \begin{bmatrix} 1 & \pm i \\ \mp i & 1 \end{bmatrix}, \quad (35)$$

式中 I 是光的强度。由 § 1.4(38) 和 (40) 式，根据偏振是右旋的还是左旋的，来选取上面的或下面的符号。

如果光不是单色的，条件(30)仍可满足。因为，如果 a_1, a_2, ϕ_1 和 ϕ_2 对时间的依赖关系按照下述方式：其振幅比与位相差均与时间无关，即

$$\frac{a_2(t)}{a_1(t)} = q, \quad \delta = \phi_1(t) - \phi_2(t) = \chi, \quad (36)$$

式中 q 和 χ 均为常数，则

$$\begin{aligned} J_{xx} &= \langle a_1^2 \rangle, & J_{xy} &= q \langle a_1^2 \rangle e^{i\chi}, \\ J_{yx} &= q \langle a_1^2 \rangle e^{-i\chi}, & J_{yy} &= q^2 \langle a_1^2 \rangle, \end{aligned} \quad (37)$$

从而条件(30)成立。矩阵元为(37)式的相干矩阵与分量为

$$E_x = \sqrt{\langle a_1^2 \rangle} e^{i[\alpha - 2\pi\nu t]}, \quad E_y = q \sqrt{\langle a_1^2 \rangle} e^{i[-\chi + \alpha - 2\pi\nu t]} \quad (38)$$

的严格单色光的相干矩阵相同，式中 α 是任一实常数。由此得出，在包含一个起偏振器和一个补偿器的实验中，遵从条件(36)的准单色波的表现，同严格单色从而完全偏振的波(38)正好一样。(当然，已假定补偿器引入的位相差比用平均波长为单位测量的光的

相干长度小得多). 所以条件(30)可以被认为表示完全偏振光波的特征.

§ 10.8.2 某些等价表示. 光波的偏振度

如果把在同一方向上传播的几个独立的光波叠加, 则合成波的相干矩阵等于各个波的相干矩阵之和. 为了证明这一结果, 设 $E_x^{(n)}, E_y^{(n)}$ ($n = 1, 2, \dots, N$) 是各个波的电矢量分量(用通常的复数表示). 合成波的电矢量分量为

$$E_x = \sum_{n=1}^N E_x^{(n)}, \quad E_y = \sum_{n=1}^N E_y^{(n)}, \quad (39)$$

因此, 其相干矩阵元为

$$\begin{aligned} J_{kl} &= \langle E_k E_l^* \rangle = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \langle E_k^{(n)} E_l^{(m)*} \rangle \\ &= \sum_n \langle E_k^{(n)} E_l^{(n)*} \rangle + \sum_{n \neq m} \langle E_k^{(n)} E_l^{(m)*} \rangle. \end{aligned} \quad (40)$$

因假定各个波是独立的, 后一求和号内各项均为零, 由此得出,

$$J_{kl} = \sum_n J_{kl}^{(n)}, \quad (41)$$

式中 $J_{kl}^{(n)} = \langle E_k^{(n)} E_l^{(n)*} \rangle$ 是第 n 个波的相干矩阵元. (41)式表明, 合成波的相干矩阵等于所有各个波的相干矩阵之和.

反之, 任何一个波都可看成是若干个独立的波之和, 它们显然可用许多种不同的方法来选择. 现在扼要地讨论一种具有特殊意义的特定选择.

我们要证明, 任一准单色光波都可看成是一个完全非偏振波和一个完全偏振波之和, 两者是彼此独立的, 并且这种表示是唯一的.

为了确定这一结果, 只需证明任一相干矩阵 \mathbf{J} 可唯一地表示为

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^{(1)} + \mathbf{J}^{(2)}, \quad (42)$$

式中, 根据(27)和(30)式,

$$\mathbf{J}^{(1)} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}^{(2)} = \begin{bmatrix} B & D \\ D^* & C \end{bmatrix}, \quad (43)$$

其中 $A \geq 0$, $B \geq 0$, $C \geq 0$, 并且

$$BC - DD^* = 0. \quad (44)$$

如果 J_{xx} , J_{yy} , \dots 是表征原来光波的相干矩阵元, 则根据(42)和(43)式, 必有

$$\left. \begin{array}{l} A + B = J_{xx}, \quad D = J_{xy}, \\ D^* = J_{yx}, \quad A + C = J_{yy}. \end{array} \right\} \quad (45)$$

将(45)式代入(44)式, 得到 A 的下述方程:

$$(J_{xx} - A)(J_{yy} - A) - J_{xy}J_{yx} = 0; \quad (46)$$

因此, A 是相干矩阵 \mathbf{J} 的特征根(本征值). (46)式的两个根为

$$A = \frac{1}{2}(J_{xx} + J_{yy}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(J_{xx} + J_{yy})^2 - 4|\mathbf{J}|}, \quad (47)$$

式中, 同前, $|\mathbf{J}|$ 是行列式(8). 因 $J_{yx} = J_{xy}^*$, 故乘积 $J_{xy}J_{yx}$ 为非负值, 由(8)式得出,

$$|\mathbf{J}| \leq J_{xx}J_{yy} \leq \frac{1}{4}(J_{xx} + J_{yy})^2,$$

因此, (47)式所示的两个根均为非负的实值. 首先考虑平方根前面带负号的解. 则有

$$A = \frac{1}{2}(J_{xx} + J_{yy}) - \frac{1}{2}\sqrt{(J_{xx} + J_{yy})^2 - 4|\mathbf{J}|}, \quad (48)$$

$$\left. \begin{array}{l} B = \frac{1}{2}(J_{xx} - J_{yy}) + \frac{1}{2}\sqrt{(J_{xx} + J_{yy})^2 - 4|\mathbf{J}|}, \quad D = J_{xy}, \\ D^* = J_{yx}, \quad C = \frac{1}{2}(J_{yy} - J_{xx}) + \frac{1}{2}\sqrt{(J_{xx} + J_{yy})^2 - 4|\mathbf{J}|}. \end{array} \right\} \quad (49)$$

这时

$$\begin{aligned} \sqrt{(J_{xx} + J_{yy})^2 - 4|\mathbf{J}|} &= \sqrt{(J_{xx} - J_{yy})^2 + 4J_{xy}J_{yx}} \\ &\geq |J_{xx} - J_{yy}|. \end{aligned}$$

因此,同所要求的一样, B 和 C 也为非负值. (47)式所示的另一根(平方根前面带正号)导致 B 和 C 为负值, 因此必须舍弃. 于是我们就得出所要求的一种唯一的分解.

波的总强度为

$$I_{\text{总}} = \text{Tr} \mathbf{J} = J_{xx} + J_{yy}; \quad (50)$$

而偏振部分的总强度为

$$I_{\text{偏振}} = \text{Tr} \mathbf{J}^{(2)} = B + C = \sqrt{(J_{xx} + J_{yy})^2 - 4|\mathbf{J}|}. \quad (51)$$

偏振部分的强度与总强度的比值称为波的偏振度 P ; 根据 (50) 和 (51) 式, 它由下式给出:

$$P = \frac{I_{\text{偏振}}}{I_{\text{总}}} = \sqrt{1 - \frac{4|\mathbf{J}|}{(J_{xx} + J_{yy})^2}}. \quad (52)$$

由于这一表达式只包含相干矩阵 \mathbf{J} 的两个转动不变量, 因此不出所料, 偏振度与 OX , OY 轴的特定选择无关. 由(52)式以及(48)式之前的不等式得出,

$$0 \leq P \leq 1. \quad (53)$$

当 $P = 1$ 时, 没有非偏振的分量, 因此, 波是完全偏振的. 在这种情况下, $|\mathbf{J}| = 0$, 因此 $|\mu_{xy}| = 1$, 结果 E_x 和 E_y 是互相干的. 当 $P = 0$ 时, 偏振分量不存在. 因此, 波是完全非偏振的. 在这种情况下, $(J_{xx} + J_{yy})^2 = 4|\mathbf{J}|$, 即

$$(J_{xx} - J_{yy})^2 + 4J_{xy}J_{yx} = 0. \quad (54a)$$

由于 $J_{yx} = J_{xy}^*$, 因此得出两平方之和等于零, 这只可能是两者分别为零, 即

$$J_{xx} = J_{yy} \text{ 和 } J_{xy} = J_{yx} = 0, \quad (54b)$$

与 (26b) 式一致. 于是, E_x 和 E_y 是互不相干的, ($\mu_{xy} = 0$). 在其他所有情况下, ($0 < P < 1$), 我们认为光是部分偏振的. 比较(52)和(20)式, 表明

$(I_{\text{最大}}(\theta, \epsilon) - I_{\text{最小}}(\theta, \epsilon)) / (I_{\text{最大}}(\theta, \epsilon) + I_{\text{最小}}(\theta, \epsilon))$ 这个量正好是偏振度 P .

当 E_x 和 E_y 互不相干(但不一定是自然光)时, 偏振度的表达式有一简单形式. 因这时 $J_{xy} = J_{yx} = 0$, 所以 $|\mathbf{J}| = J_{xx}J_{yy}$, 而

(52)式化为¹⁾

$$P = \left| \frac{J_{xx} - J_{yy}}{J_{xx} + J_{yy}} \right|. \quad (55)$$

这一表达式与自然光经反射引起偏振时使用的公式 § 1.5(42) 一致。

我们要指出自然光的几种有用的表示法。自然光的相干矩阵(27)式总可表示为下列形式：

$$\frac{1}{2} I \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} I \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} I \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (56)$$

根据(33)式，这意味着强度为 I 的自然光波，与两个独立的线偏振波等价，后者的强度各为 $\frac{1}{2} I$ ，其电矢量在垂直于传播方向的两个相互正交的方向上振动。

自然光的另一种有用的表示法为

$$\frac{1}{2} I \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} I \begin{bmatrix} 1 & +i \\ -i & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} I \begin{bmatrix} 1 & -i \\ +i & 1 \end{bmatrix}, \quad (57)$$

根据(35)式，这意味着强度为 I 的自然光波，与两个独立的圆偏振波等价，一个为右旋，另一个为左旋，其强度各为 $\frac{1}{2} I$ 。

回到一般情况(部分偏振光)，应当注意，与偏振度 P 不同，相干度 $|\mu_{xy}|$ 依赖于 x 和 y 方向的选择。然而不难看出， $|\mu_{xy}|$ 不能大于 P 。因为如果在(52)式中把行列式 $|\mathbf{J}|$ 完全写出来，并利用(6)式，则得出

$$1 - P^2 = \frac{J_{xx}J_{yy}}{\left[\frac{1}{2}(J_{xx} + J_{yy}) \right]^2} [1 - |\mu_{xy}|^2]. \quad (58)$$

1) 由于每一厄密矩阵均可通过一么正变换对角化，而且 $|\mathbf{J}|$ 和 $\text{Tr}\mathbf{J}$ 的值经此变换后保持不变，因此偏振度总可表示为下述形式：

$$P = \left| \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \right|,$$

式中 A_1 和 A_2 是[(47)式给出的]两个本征值。然而么正变换一般并不代表诸坐标轴绕波传播方向的真实转动。

注意到本征值 A_1 和 A_2 等于(19)式给出的值 $I_{\text{极大}}(\theta, \epsilon)$ 和 $I_{\text{极小}}(\theta, \epsilon)$ ，这是有意义的。

因为任何两个正数的几何平均不能大于它们的算术平均，由此得出， $1 - P^2 \leq 1 - |\mu_{xy}|^2$ ，即

$$P \geq |\mu_{xy}|. \quad (59)$$

(59)式中的等号，当而且仅当 $J_{xx} = J_{yy}$ 时，即当与 x 和 y 方向相联系的(时间平均)强度相等时才成立。现在要证明总存在一对方向，满足这种情形。

如果 xy 轴在其本身平面内沿反时针方向转过角 θ ，则 J_{xx} 和 J_{yy} 分别变换到 $J_{x'x'}$ 和 $J_{y'y'}$ ，根据(23)式，

$$\left. \begin{aligned} J_{x'x'} &= J_{xx} \cos^2 \theta + J_{yy} \sin^2 \theta + (J_{xy} + J_{yx}) \cos \theta \sin \theta, \\ J_{y'y'} &= J_{xx} \sin^2 \theta + J_{yy} \cos^2 \theta - (J_{xy} + J_{yx}) \cos \theta \sin \theta. \end{aligned} \right\} (60)$$

由(60)式得出，如果 x, y 轴都转过角 $\theta = \Theta$ ，其中

$$\tan 2\Theta = \frac{J_{yy} - J_{xx}}{J_{xy} + J_{yx}}, \quad (61)$$

则 $J_{x'x'} = J_{y'y'}$ 。因 $J_{yx} = J_{xy}^*$ ，而且 J_{xx} 和 J_{yy} 均为实值，所以(61)式对 Θ 总有一实数解。因此，总存在互相正交而强度相等的一对方向。对于这一对方向，电振动的相干度 $|\mu_{xy}|$ 有极大值，并且此值等于波的偏振度 P 。¹⁾

§ 10.8.3 准单色平面波的斯托克斯参量

我们已经看到，为了表示准单色平面波的特征，一般需要四个实量，例如 J_{xx}, J_{yy} 以及 J_{xy} (或 J_{yx}) 的实部和虚部。斯托克斯²⁾

-
- 1) E. Wolf 讨论过这对特殊方向的几何意义，见 *Nuovo Cimento*, **13** (1959), pp. 1180—1181。
 - 2) G. G. Stokes, *Trans. Cambr. Phil. Soc.*, **9** (1852), 399. 转载于他的 *Mathematical and Physical Papers*, Vol. III (Cambridge University Press, 1901), p. 233. 又见 P. Soleillet, *Ann. de Physique* (10), **12** (1929), 23; F. Perrin, *J. Chem. Phys.*, **10** (1942), 415; S. Chandrasekhar, *Radiative Transfer* (Oxford, Clarendon Press, 1950), § 15; M. J. Walker, *Amer. J. Phys.*, **22** (1954), 170; E. Wolf, *Nuovo Cimento*, **12** (1954), 884; S. Pancharatnam, *Proc. Ind. Acad. Sci., A*, **44** (1956), 398; 同上, **57** (1963), 218, 231。

斯托克斯参量也用于基本粒子极化的量子力学处理。参看 U. Fano, *J. Opt. Soc. Amer.*, **39** (1949), 859; 同上, **41** (1951), 58; *Phys. Rev.*, **93** (1954), 121; D. L. Falkoff and J. E. MacDonald, *J. Opt. Soc. Amer.*, **41**

在部分偏振光的研究中，曾引入一种稍有不同的四参量表示法，它与目前这一种有密切关系。在 § 1.4.2 中，我们曾见过它局限于单色光的形式。一般的斯托克斯参量是下述四个量：

$$\left. \begin{aligned} s_0 &= \langle a_1^2 \rangle + \langle a_2^2 \rangle, \\ s_1 &= \langle a_1^2 \rangle - \langle a_2^2 \rangle, \\ s_2 &= 2 \langle a_1 a_2 \cos \delta \rangle, \\ s_3 &= 2 \langle a_1 a_2 \sin \delta \rangle, \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

式中，同前， a_1 和 a_2 是电矢量的两个正交分量 E_x, E_y 的瞬时振幅， $\delta = \phi_1 - \phi_2$ 是它们的位相差。当光是单色光时， a_1, a_2 和 δ 都与时间无关，而(62)式化为 § 1.4(43)式所定义的“单色斯托克斯参量”。

由(62)和(4)式得出，斯托克斯参量和相干矩阵元由下述公式相联系：

$$\left. \begin{aligned} s_0 &= J_{xx} + J_{yy}, \\ s_1 &= J_{xx} - J_{yy}, \\ s_2 &= J_{xy} + J_{yx}, \\ s_3 &= i(J_{yx} - J_{xy}). \end{aligned} \right\} \quad (63a)$$

$$\left. \begin{aligned} J_{xx} &= \frac{1}{2} (s_0 + s_1), \\ J_{yy} &= \frac{1}{2} (s_0 - s_1), \\ J_{xy} &= \frac{1}{2} (s_2 + is_3), \\ J_{yx} &= \frac{1}{2} (s_2 - is_3). \end{aligned} \right\} \quad (63b)$$

同相干矩阵元一样，任一准单色的平面波的斯托克斯参量可由简单的实验确定。同前，设 $I(\theta, \varepsilon)$ 表示 y 分量相对于 x 分量有一推迟量 ε 时光振动在与 OX 成 θ 角的方向上的强度，则根据

(1951), 861; W.H. McMaster, *Amer. J. Phys.*, **22** (1954), 351; J. M. Jauch and F. Rohrlich, *The Theory of Photons and Electrons* (Cambridge, Mass., Addison-Wesley Publ. Co., 1955), § 2.8. 又见 N. Wiener, *Acta Math.*, **55** (1930), § 9, 尤其是 pp. 189—192.

(11)和(63a)式,有

$$\left. \begin{aligned} s_0 &= I(0^\circ, 0) + I(90^\circ, 0), \\ s_1 &= I(0^\circ, 0) - I(90^\circ, 0), \\ s_2 &= I(45^\circ, 0) - I(135^\circ, 0), \\ s_3 &= I\left(45^\circ, \frac{\pi}{2}\right) - I\left(135^\circ, \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

参量 s_0 显然代表总强度。参量 s_1 等于起偏振器接收在方位角 $\theta = 0^\circ$ 上的线偏振时透过的光强度与起偏振器接收在方位角 $\theta = 90^\circ$ 上的线偏振时透过的光强度之差。参量 s_2 对于方位角 $\theta = 45^\circ$ 和 $\theta = 135^\circ$ 来说,也有类似的解释。最后,参量 s_3 等于接收右旋圆偏振的装置所透过的光强度与接收左旋圆偏振的装置所透过的光强度之差。

如果利用(63b)式,就可以用斯托克斯参量而不用相干矩阵来表示以前的结果。特别是,条件(8)即 $J_{xx}J_{yy} - J_{xy}J_{yx} \geq 0$ 变为

$$s_0^2 \geq s_1^2 + s_2^2 + s_3^2. \quad (65)$$

对于单色光,根据(30)式,有 $J_{xx}J_{yy} - J_{xy}J_{yx} = 0$,于是在(65)式中等号成立,与§1.4(44)式一致。

现在讨论利用斯托克斯参量表示法,把一给定的波分解为互相独立的非偏振部分和偏振部分。由(41)和(63)式得出,各个独立波混合的斯托克斯参量是各个波各自的斯托克斯参量之和。由(27)和(63a)式得出,非偏振波(自然光波)由 $s_1 = s_2 = s_3 = 0$ 表征。用单个符号 \mathbf{s} 来表示四个斯托克斯参量 s_0, s_1, s_2, s_3 ,显然,由 \mathbf{s} 表征的波所要求的分解为

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}^{(1)} + \mathbf{s}^{(2)}, \quad (66)$$

式中

$$\mathbf{s}^{(1)} = s_0 - \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad (67a)$$

$$\mathbf{s}^{(2)} = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}, \quad s_1, \quad s_2, \quad s_3. \quad (67b)$$

$\mathbf{s}^{(1)}$ 代表非偏振部分, $\mathbf{s}^{(2)}$ 代表偏振部分。因此,用斯托克斯参量表示,原来的波的偏振度为

$$P = \frac{I_{\text{偏振}}}{I_{\text{总}}} = \frac{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}}{s_0}, \quad (68)$$

把(63)式代入(52)式，同样亦可证实上式。也不难写出关于偏振部分(67b)的偏振椭圆的椭圆率和取向的表达式。同§ 1.4(28)式一样，如果

$$\tan \chi = \pm b/a \quad (-\pi/4 < \chi \leq \pi/4)$$

代表短轴与长轴的比值，以及描绘椭圆采取的方向，($\chi \geq 0$ 取决于偏振是右旋或左旋)，则根据(67b)和§ 1.4(45c)式，

$$\sin 2\chi = \frac{s_3}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}}; \quad (69)$$

并且，根据(67b)和§ 1.4(46)式，长轴与 OX 的夹角 ϕ ($0 \leq \phi < \pi$) 为

$$\tan 2\phi = \frac{s_2}{s_1}. \quad (70)$$

我们看到，斯托克斯参量正如相干矩阵一样，为系统分析准单色波的偏振状态提供了一种有用的方法。

第十一章 严格的衍射理论

§ 11.1 引言

根据麦克斯韦方程以及标准边界条件，电磁辐射经障碍物的散射就成为一个确定的数学边值问题。本章中，根据这个观点发展了单色波衍射理论的某些方面，特别是详尽地给出完全导电半平面的衍射这一经典问题的严格解。

在杨氏，菲涅耳和基尔霍夫的早期理论中，曾假定衍射障碍物是完全“黑”的；这就是说，假定落在障碍物上的全部辐射都被吸收了，而没有任何反射。这是使得绝对“黑度”这一概念不可能合理地精确定义而含糊的根源；这确实是同电磁理论不相容的。

衍射物体具有有限介电常数和有限电导率的一些情况已作过理论探讨，1908年米氏对球散射的讨论是对这种情况最早的综合处理之一，它将在第十三章金属光学中叙述。然而，一般地说，有限电导率的假定导致数学上很复杂，通常希望采纳完全导电（因此完全反射）物体的概念。这显然是理想化的，但它与电磁理论相容；而且，由于某些金属（例如铜）的电导率很大，因此当频率不太高时，它可作为一种良好的近似，不过应当强调这种近似对于光频决不是完全适用的。在大多数基于严谨数学表述的处理中都作了衍射障碍物具有无限大电导率的简化假定，以后的讨论均限于这种情况。

索末菲¹⁾在1896年给出了这类衍射问题的第一个严格解，当时他处理了平面波入射到一个无限薄完全导电平面上的二维情

1) A. Sommerfeld, *Math. Ann.*, **47** (1896), 317.

况。这一成就之所以闻名，部分是依靠求解的技巧，部分是基于下述引人注目的事实：它可以用菲涅耳积分精确而简单地表达，而菲涅耳积分已成为先前的一些近似理论的显著特征。

许多数学家沿着索末菲的方向工作。他的问题的早期变型讨论了线源和点源，以及值得注意地推广到处理一个楔形物而不是半平面，这些工作是与卡斯洛 (Carslaw)¹⁾，麦克唐纳 (Macdonald)²⁾ 和布罗威奇 (Bromwich)³⁾ 的名字联系在一起的。由于受到超短波射电技术进展的刺激，还着手于其他一些问题，并引入了一些更近代的新方法。在开始讨论本章主要内容以前，首先很简要地说明上述某些研究的实质。

如果存在一正交坐标系，如 u_1, u_2, u_3 ，使得衍射物体表面与诸曲面 $u_i = \text{常数}$ 中之一相合，则适宜用分离变量解偏微分方程的经典方法；这正是上述有限电导率的球情况下的米氏方法。边值问题的解一般就作为无穷级数出现，它的有效性取决于能算出有关函数的容易程度及级数收敛的速度。这种方法已用于球以外的各种情况，特别是用于圆盘或圆孔⁴⁾。不过应当指出，某些工作只与严格标量问题有关，例如小振幅声波理论中的一些工作；如后面所述，电磁理论中的二维问题本质上属于这一类型，否则电磁场的矢量性质导致进一步复杂化。

瑞利⁵⁾显然最早考虑过另一种基于积分方程表述的方法。某些问题，最简单的是半平面问题，得出的积分方程可用维纳和霍普夫方法⁶⁾ 严格解出；科普森 (Copson)⁷⁾，施温格 (Schwinger) 和其他

1) H. S. Carslaw, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **30** (1899), 121.

2) H. M. Macdonald, *Electric Waves* (Cambridge University Press, 1902).

3) T. J. I'A. Bromwich, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **14** (1916), 450.

4) C. J. Bouwkamp, *Dissertation*, Groningen, 1941. J. Meixner and W. Andrejewski, *Ann. d. Physik*, **7** (1950), 157.

5) Lord Rayleigh, *Phil. Mag.*, **43** (1897), 259.

6) 对维纳-霍普夫方法的讨论，见 E. C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals* (Oxford, Clarendon Press, 1937), p. 339.

7) E. T. Copson, *Quart. J. Maths.*, **17** (1946), 19.

人对这一事实的评价导致了一些新的闭型解¹⁾。关于这方面还应提到有效的变异方法，虽然有些复杂，但可用来计算通过小孔衍射的功率²⁾。

因篇幅所限，本章的讨论主要限于一种方法³⁾。首先，阐述电磁波被完全导电结构散射的理论中带有相当普遍性的某些方面。其次，引入一种把任何场表示为对平面波谱求积分的方法，并证明这种表示法导致使用“对偶”积分方程⁴⁾表述某些衍射问题。因此索末菲半平面问题就容易处理了，由此得出并且相当详细地讨论了这个问题的解，以及一些衍生的结果。还讨论了几个相近的问题。

§ 11.2 边界条件与面电流

众所周知，电磁场只有很小一部分透入到良导体内。如下文的论证所示，电导率无限大的理想化情况则完全没有透入，结果形成了电流纯粹存在于导体表面上的概念。

麦克斯韦旋度方程的一个结果（见 § 1.1.3）是，在穿过一无限薄的电流层时， \mathbf{E} 的切向分量连续，而 \mathbf{H} 的切向分量不连续；更具

-
- 1) J. F. Carlson and A. E. Heins, *Quart. Appl. Maths.*, **4**(1947), 313; **5**(1947), 82. A. E. Heins, *Quart. Appl. Maths.*, **6** (1948), 157, 215. H. Levine and J. Schwinger, *Phys. Rev.*, **73** (1948), 383. 更广泛的参考文献目录，见 J. W. Miles, *J. Appl. Phys.*, **20** (1949), 760，和 C. J. Bouwkamp, *Rep. Progr. Phys.* (London, Physical Society), **17** (1954), 35.
 - 2) H. Levine and J. Schwinger, *Phys. Rev.*, **74** (1948), 958; **75** (1949), 1423.
 - 3) 对于其他方法的一般介绍，见 G. Wolfsohn 在 *Handbuch der Physik*, Vol. 20 (Berlin, Springer, 1928), p. 263 的论文；B. B. Baker and E. T. Copson, *The Mathematical Theory of Huygens' Principle* (Oxford, Clarendon Press, 1950)，第 4 章和第 5 章，以及 H. Hönl, A. W. Maue 和 K. Westpfahl 在 *Handbuch d. Physik*, Vol. 25/1 (Berlin, Springer, 1961) 中的论文。Bouwkamp 上述的评述，概括给出了各种方法和公式的充分综合的选择。
 - 4) “对偶”积分方程（其定义在后面 746—747 页）的讨论，见 E. C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals* (Oxford, Clarendon Press, 1937), p. 334.

体地讲, \mathbf{H} 的不连续性是在垂直于面电流密度¹⁾ \mathbf{J} 的切向分量中, 其值为 $4\pi\mathbf{J}/c$, 这些方向的相对指向如图 11.1 所示。而且, 跟 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 的切向分量的行为一致, 穿过该电流薄层时, \mathbf{H} 的法向分量连续, 而 \mathbf{E} 的法向分量不连续, 其不连续值等于面电荷密度的 4π 倍。因此, 显然得知, 在一个完全导电物体外部自由空间中的场, 将使得在该导体表面上

- (a) \mathbf{E} 的切向分量为零;
- (b) \mathbf{H} 的切向分量垂直于面电流密度 \mathbf{J} , 其指向如上述, 其值为 $4\pi\mathbf{J}/c$;
- (c) \mathbf{H} 的法向分量为零;
- (d) \mathbf{E} 的外法向分量等于面电荷密度的 4π 倍。

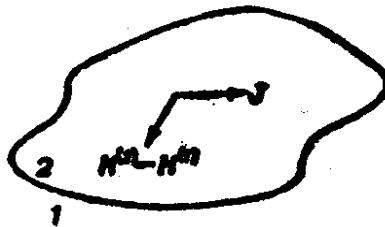


图 11.1 \mathbf{H} 的不连续性与面电流密度 \mathbf{J} 的方向之间的关系的示意。

$\mathbf{H}^{(1)}$ 和 $\mathbf{H}^{(2)}$ 是表面两侧 1 和 2 各自的磁场

辐射落在一完全导电物体上的效应, 利用感生面电流可方便地作出解释。如果 $\mathbf{E}^{(i)}$ 是入射场的电矢量, $\mathbf{E}^{(s)}$ 是由感生电流引起的“散射”场的电矢量, 则总电矢量处处均为 $\mathbf{E}^{(i)} + \mathbf{E}^{(s)}$ 。因此, 衍射问题可表述如下: 给定 $\mathbf{E}^{(i)}$, 寻找这样的一个场 $\mathbf{E}^{(s)}$, 它能由导体表面的电流分布产生, 并且它在该表面的切向分量是 $\mathbf{E}^{(i)}$ 相应切向分量的负值。值得重视的是, 上述边界条件(a)是基本的, 并且单用它就足以用上述形式唯一地确定问题²⁾。至于其他的边界条件, (b)的意义是表示场与感生电流有关, 而(c)和(d)没有特别的意义。

应当注意, 导体内部各点处 $\mathbf{E}^{(s)} = -\mathbf{E}^{(i)}$ 的含义, 是在任一闭曲面 S 上有唯一的电流密度存在, 它在 S 内部所有各点处再生

1) 面电流在 § 1.1.3 中用 j 表示。

2) 唯一性证明的论述, 出现某些困难, 推迟到后面的 § 11.9。

的场是由位于 s 外部的源引起的。同样，考虑辐射落在其上的完全导体界面是一完全无限大平面的情况，由此得出在任一平面上有唯一的电流密度存在，它在该平面一侧再生的场是由位于平面另一侧的源引起的。

在完全导电屏的衍射问题中，需要假定屏是无限薄的；如果不是这样的假定，则数学上的困难将变得很大。当然，仍须保持屏的不透明性，事实上这一概念只是其厚度在极限时趋于零的完全导体的概念。根据上述，这样的一个屏的效应可以用一个电流薄层来解释，现在的差别在于该薄层不再是闭曲面。特别感兴趣的是该薄层为平面时的比较简单的情况；在这种情况下，可立即导出它辐射的场 $E^{(s)}, H^{(s)}$ 所满足的某些重要关系式，它们在下面给出。

设电流薄层占有平面 $y = 0$ 的一部分。则由于对称性，显然有

$$\left. \begin{array}{l} E_x^{(s)}(x, y, z) = E_x^{(s)}(x, -y, z), \\ E_y^{(s)}(x, y, z) = -E_y^{(s)}(x, -y, z), \\ E_z^{(s)}(x, y, z) = E_z^{(s)}(x, -y, z), \\ H_x^{(s)}(x, y, z) = -H_x^{(s)}(x, -y, z), \\ H_y^{(s)}(x, y, z) = H_y^{(s)}(x, -y, z), \\ H_z^{(s)}(x, y, z) = -H_z^{(s)}(x, -y, z). \end{array} \right\} \quad (1)$$

而且，如果薄层内电流密度具有分量 J_x 和 J_z ，显然，在 $y = 0$ 平面上，

$$H_x^{(s)} = \mp \frac{2\pi}{c} J_z, \quad H_z^{(s)} = \pm \frac{2\pi}{c} J_x, \quad (2)$$

取上面或下面的符号随 y 通过正值或通过负值到零而定。如下一节所述，这些简单关系式应用于有兴趣的平面屏衍射问题时，将导出一个有用的公式，特别是，它明显地给出巴俾涅原理的严格的电磁相似形式。

§ 11.3 平面屏的衍射：巴俾涅原理的电磁形式

设电磁场 $E^{(i)}, H^{(i)}$ 入射到位于 $y = 0$ 平面内的一组无限薄

的完全导电的层状体上。设 M 表示金属占有的平面面积, A 表示其余的“开孔”, 因此, M 和 A 一起构成了整个平面。 M 或 A , 或 M 和 A 两者, 都可能具有无限广延性。

如前所述, 寻找一个在 M 上满足某种边界条件的散射场。现在由 § 11.2(1) 式看来, 实际上, 只要明确承认通过 A 的连续性要求, 则仅需考虑在半空间 $y \geq 0$ 或 $y \leq 0$ 内的散射场。因此, 问题可表述如下: 在 $y \geq 0$ (或 $y \leq 0$) 内, 寻找一个能由 $y = 0$ 上的电流产生的电磁场 $\mathbf{E}^{(s)}, \mathbf{H}^{(s)}$, 使得

$$(I) \quad E_x^{(s)} + E_z^{(s)} = E_x^{(i)} + E_z^{(i)} = 0, \quad \text{在 } M \text{ 上},$$

$$(II) \quad H_x^{(s)} = H_z^{(s)} = 0, \quad \text{在 } A \text{ 上}.$$

这里, (I) 是完全导体的基本边界条件, 而由 § 11.2(2) 式得出的 (II) 是表示 A 上没有感生电流的简便方法。如果散射场在 $y \geq 0$ 内满足 (II), 并用 § 11.2(1) 式推导出 $y \leq 0$ 内的散射场, 则得出通过 A 是连续的。

现在可以容易地导出关于电磁波和完全导电屏的巴俾涅原理的一种精确形式¹⁾。同经典的原理(§ 8.3.2)一样, 建立单有屏时存在的场和单有“互补”屏时存在的场之间的关系, 互补屏是把导电的层状体和开孔互换得出的; 二者的差别在于入射到互补屏上的场不再与入射到原来屏上的场相同, 而是通过 $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$ 的变换由后者导出。

于是, 在第一种情况下, 设 $\mathbf{E}_1^{(i)} = \mathbf{F}^{(i)}$ 所定义的场(下标 1)在 $y > 0$ 内入射到上述的屏上。由 (I) 和 (II) 得出,

$$(I') \quad E_{1x}^{(i)} = -F_x^{(i)}, \quad E_{1z}^{(i)} = -F_z^{(i)}, \quad \text{在 } M \text{ 上},$$

$$(II') \quad H_{1x}^{(i)} = H_{1z}^{(i)} = 0, \quad \text{在 } A \text{ 上}.$$

在第二种情况下, 设 $\mathbf{H}_2^{(i)} = \mathbf{F}^{(i)}$ 所定义的场(下标 2) 入射到互补屏上。因此, 这时利用总场写出边界条件, 有

$$(I'') \quad E_{2x} = E_{2z} = 0, \quad \text{在 } A \text{ 上},$$

1) H. G. Booker, *J. Instn. Elect. Engrs.*, **93** Pt. III A (1946), 620. L. G. H. Huxley, *The Principles and Practice of Waveguides* (Cambridge University Press, 1947), p. 284.

(II'') $H_{2x} = F_x^{(i)}$, $H_{2z} = F_z^{(i)}$, 在 M 上.

因为自由空间内的麦克斯韦方程经 $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$, $\mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E}$ 变换后不变, 并且因为在 $y = 0$ 上有唯一的面电流密度, 它可在 $y \leq 0$ 内所有各点处产生入射场, 所以, 分别比较 (I'), (II') 与 (II''), (I''), 就清楚地得出, 在屏后面的半空间内,

$$\mathbf{H}_2 = -\mathbf{E}_1^{(i)}. \quad (1)$$

利用总场 \mathbf{E}_1 , 由(1)式得出,

$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{H}_2 = \mathbf{F}^{(i)}, \quad (2)$$

这就是所要求的巴俾涅原理的电磁形式.

§ 11.4 平面屏的二维衍射

§ 11.4.1 二维电磁场的标量性质

一个完全与某一笛卡儿坐标(如 z)无关的问题, 称为二维问题. 曾经讲过, 电磁理论中这类问题本质上是具有标量性质的, 因为它们可以直接用单个因变量来表示. 现在将证明这一点.

略去时间因子 $\exp(-i\omega t)$, 并写出 $k = \omega/c$, 则自由空间内的麦克斯韦方程为

$$\operatorname{curl} \mathbf{H} = -ik\mathbf{E}, \quad \operatorname{curl} \mathbf{E} = ik\mathbf{H}.$$

使所有对 z 的偏微商都等于零, 上面这些式子可分为相互独立的两组:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = ikH_x, \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = -ikH_y, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = -ikE_z, \quad (1)$$

和

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = -ikE_x, \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = ikE_y, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = ikH_z. \quad (2)$$

第一组只包含 H_x, H_y, E_z , 第二组只包含 E_x, E_y, H_z . 因此把任何一组解分解为这两组解的线性组合, 就能变得简单了, 对于这两组解, 上述两组因变量中总有一组的三个因变量都为零. 为了命名, 我们把这两类场的特征表示如下:

E 偏振

$$E_x = E_y = H_z = 0,$$

$$H_x = \frac{1}{ik} \frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad H_y = -\frac{1}{ik} \frac{\partial E_z}{\partial x},$$

并且, 将 H_x 和 H_y 代入(1)的第三式, 显然得出

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k^2 E_z = 0.$$

这里用 E_z 确定了完全场, 它当然满足二维形式的标准波动方程.

H 偏振

$$H_x = H_y = E_z = 0,$$

和

$$E_x = -\frac{1}{ik} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad E_y = \frac{1}{ik} \frac{\partial H_z}{\partial x}.$$

这里用 H_z 确定了完全场.

§ 11.4.2 平面波的角谱

目前讨论限于二维问题, 对此已证明 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 的笛卡儿分量满足下述方程:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + k^2 V = 0 \quad (3)$$

上式必须在适当的边界条件下求解.

(3)式的基本解是

$$e^{ikr \cos(\theta-\alpha)} = e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}, \quad (4)$$

$r, \theta (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ 是极坐标, 由方程 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 与 x, y 相联系. 如果 α 是实数, 则(4)式代表均匀平面波, 即它的等幅平面与等相平面重合的平面波, α 是传播方向与 x 轴的夹角(图 11.2a). 另一方面, 如果 α 是复数, 则(4)式代表非均匀平面波, 即它的等幅平面与等相平面不重合的平面波. 实际上, 写出 $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, 式中 α_1 和 α_2 都是实数, 则(4)式变为

$$e^{ikr \cosh \alpha_2 \cos(\theta-\alpha_1)} e^{-kr \sinh \alpha_2 \sin(\theta-\alpha_1)}, \quad (5)$$

由此得出, 等幅平面与等相平面相互垂直(图 11.2b): 位相传播方向与 x 轴的夹角为 α_1 , 相速减小到 $1/\operatorname{sech} \alpha_2$, 并且在垂直方向上有指数衰减, 取决于衰减因子 $k \sinh \alpha_2$.

现在可以证明¹⁾, (3)式的任何解都可以通过适当选择积分路线和函数 $f(\alpha)$ 而纳入平面波角谱

$$\int f(\alpha) e^{ikr \cos(\theta - \alpha)} d\alpha$$

的形式. 这种表示法与一个任意函数利用傅里叶积分的表示法有密切联系, 在应用中同样很有效. 可以规定某一条固定的积分路线而没有明显失去一般性, 因此任一问题都变为确定适当的 $f(\alpha)$ 的问题. 我们将首先用这种方法表示由平面电流薄层产生的电磁场, 然后证明这个结果导致使用对偶积分方程来表述平面屏的衍射问题.

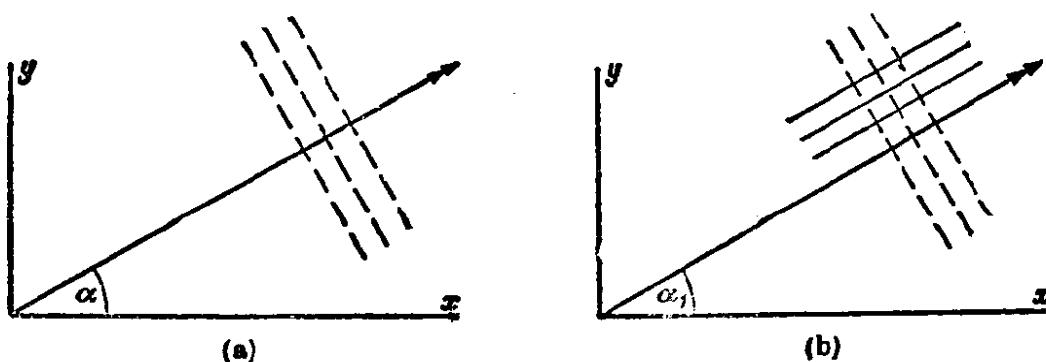


图 11.2

- (a) α 为实数时用(4)式表示的均匀平面波;
虚线表示等幅平面和等相平面两者
- (b) α 为复数时用(4)式表示的非均匀平面波;
实线表示等幅平面, 虚线表示等相平面

考虑在 $y = 0$ 上的二维电流薄层. 前已指出, 分开处理 E 偏振和 H 偏振是方便的. 首先处理前一种情况, 其中电流密度只有一个 z 分量 J_z , 并且从下述提问开始, 即怎样的特定分布会把 E 偏振的平面波

1) E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis* (Cambridge University Press, 1927), p. 397.

$$\mathbf{E} = (0, 0, 1) e^{ikr \cos(\theta - \alpha)}, \mathbf{H} = (\sin \alpha, -\cos \alpha, 0) e^{ikr \cos(\theta - \alpha)} \quad (6)$$

辐射到 $y > 0$ 的半空间中去。实际上,由 § 11.2.(2) 的第 1 式立即看出,在 $(\xi, 0)$ 点处,

$$J_z(\xi) = -\frac{c}{2\pi} e^{ik\xi \cos \alpha} \sin \alpha. \quad (7)$$

当然,这可以用赫兹势的标准方法求出电流分布所产生的场来证实,不过这时需要计算一个很复杂的积分。

现在,概括地说,任何一种电流分布都可以由(7)式取不同的 α 值适当叠加而成,其辐射场则由平面波(6)式相应叠加得出。更确切地说,设电流密度可以用傅里叶积分的形式写为

$$J_z(\xi) = -\frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\mu) e^{ik\xi \mu} d\mu. \quad (8)$$

改换变量 $\mu = \cos \alpha$, 得出

$$J_z(\xi) = -\frac{c}{2\pi} \int_C \sin \alpha P(\cos \alpha) e^{ik\xi \cos \alpha} d\alpha, \quad (9)$$

式中 C 是复 α 平面上的路线,沿着这条路线,从 ∞ 经 $\cos \alpha$ 实值范围到 $-\infty$,如图 11.3 所示。因此,得出的非零场分量为

$$E_z^{(r)} = \int_C P(\cos \alpha) e^{ikr \cos(\theta + \alpha)} d\alpha, \quad (10)$$

$$H_x^{(r)} = \pm \int_C \sin \alpha P(\cos \alpha) e^{ikr \cos(\theta + \alpha)} d\alpha, \quad (11)$$

$$H_y^{(r)} = - \int_C \cos \alpha P(\cos \alpha) e^{ikr \cos(\theta + \alpha)} d\alpha, \quad (12)$$

$y \geq 0$ 时用上面的符号, $y \leq 0$ 时用下面的符号。

(10), (11) 和 (12) 式代表由函数 $P(\cos \alpha)$ 确定的平面波谱形式的场。相应于 C 沿实轴那一段的各个平面波都是均匀的;它们辐射到 $y > 0$ 和 $y < 0$ 的区域内,其传播方向在每个区域内都包含角 π 的范围,如图 11.4 所示。相应于 C 的两臂(其上 $\alpha = i\beta$ 和 $\alpha = \pi - i\beta$, $\beta = 0$ 到 ∞)的平面波都是非均匀的;它们所有的位相传播方向都沿着正或负 x 轴,并且它们在垂直离开 $y = 0$ 平面的方向上按指数衰减。通过考察坡印廷矢量不难证明,平均说来没有能量被任何这些倏逝波(evanescent wave)从 $y = 0$ 平面带

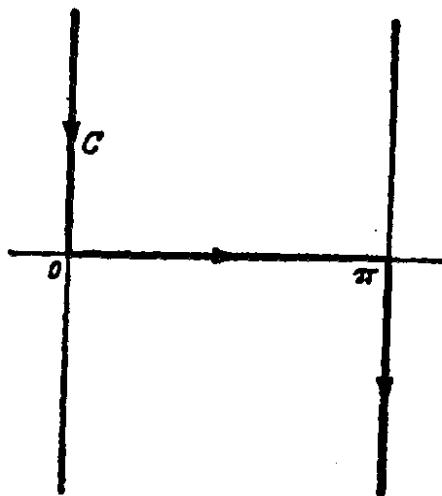


图 11.3 复 α 平面上的路线 C

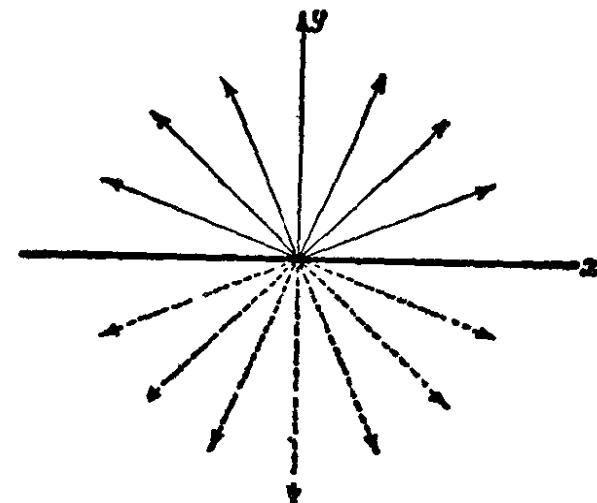


图 11.4 均匀波的传播方向示意，
它们辐射到半空间 $y > 0$ (实线) 和
半空间 $y < 0$ (虚线) 内

走。为了计及比一个波长还精细的电流分布结构，这些倏逝波的存在是必要的。

对于 H 偏振的情况，由 $y = 0$ 上的电流密度 J_x 产生的场同样可写成

$$H_x^{(r)} = \pm \int_C P(\cos \alpha) e^{ikr \cos(\theta \mp \alpha)} d\alpha, \quad (13)$$

$$E_x^{(r)} = - \int_C \sin \alpha P(\cos \alpha) e^{ikr \cos(\theta \mp \alpha)} d\alpha, \quad (14)$$

$$E_y^{(r)} = \pm \int_C \cos \alpha P(\cos \alpha) e^{ikr \cos(\theta \mp \alpha)} d\alpha, \quad (15)$$

$y \geq 0$ 时用上面的符号， $y \leq 0$ 时用下面的符号。此时

$$J_x(\xi) = \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(\mu)}{\sqrt{(1 - \mu^2)}} e^{ik\xi\mu} d\mu. \quad (16)$$

§ 11.4.3 利用对偶积分方程表述

现在可以利用对偶积分方程表述被平面屏衍射的二维问题。

设电磁场 $\mathbf{E}^{(i)}, \mathbf{H}^{(i)}$ 入射到位于 $y = 0$ 的一组无限薄的完全导电的条带上；用 M 标示金属占有的 x 轴范围，用 A 标示内无金属的 x 轴范围。如果散射场 $\mathbf{E}^{(s)}, \mathbf{H}^{(s)}$ 表示为平面波的角谱，其形式为 § 11.4(10), (11), (12) 或 (13), (14), (15) 随偏振而定，则由

§ 11.3 的条件(I)和(II)得出下述积分方程:

E 偏振

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(\mu)}{\sqrt{(1-\mu^2)}} e^{ikx\mu} d\mu = -E_z^{(i)}, \text{ 在 } M \text{ 上}, \quad (17)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(\mu) e^{ikx\mu} d\mu = 0, \quad \text{在 } A \text{ 上}. \quad (18)$$

H 偏振

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(\mu) e^{ikx\mu} d\mu = E_x^{(i)}, \text{ 在 } M \text{ 上}, \quad (19)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(\mu)}{\sqrt{(1-\mu^2)}} e^{ikx\mu} d\mu = 0, \text{ 在 } A \text{ 上}. \quad (20)$$

考虑到把 $\Re \alpha = 0$ 和 $\Re \alpha = \pi$ (\Re 表示实部) 之间的复 α 平面映射入整个复 μ 平面 ($\mu = \cos \alpha$) 的方法, 得知沿实轴的积分路线避开了在 $\mu = \pm 1$ 处的可能支点, 如图 11.5 所示. 这类积分方程, 其中单一未知函数 $P(\mu)$ 对于参量 x 的两个不同区域满足不同方程, 称为“对偶”积分方程¹⁾.

§ 11.1 中提到的科普森, 施温格和其他人所使用的表述与上述稍有不同之处在于前者只包含单一积分方程. 虽然它不是这里需要的, 但仍应指出它与上述方法的联系. 对于 E 偏振的情况, 例如, (16)式的解通过取它的傅里叶变换得出, 可写成下述形式:

$$P(\mu) = -\frac{k}{c} \int_M J_z(\xi) e^{-ik\mu\xi} d\xi, \quad (21)$$

它当然与(8)式以及在 A 上 $J_z(\xi) = 0$ 的事实一致. 把这个 $P(\mu)$

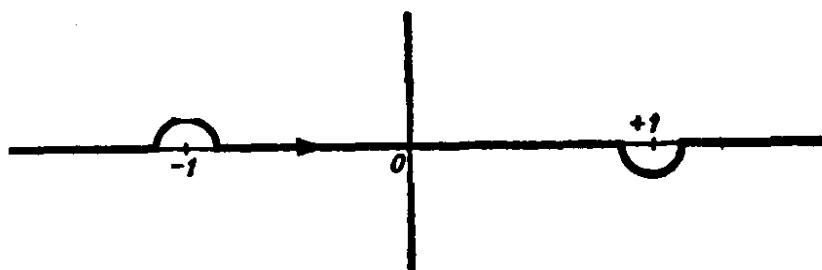


图 11.5 复 μ 平面上从 $-\infty$ 到 ∞ 的积分路线

1) E. C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals* (Oxford, Clarendon Press, 1937), p. 334.

值代入(17)式，并对 μ 积分，就得出对 $J_z(\xi)$ 求解的积分方程：

$$\frac{k}{c} \int_M J_z(\xi) H_0^{(1)}(k|x - \xi|) d\xi = E_z^{(i)}, \text{ 在 } M \text{ 上,} \quad (22)$$

式中含有第一类零阶汉克耳(Hankel)函数 $H_0^{(1)}$ 。显然，(22)式左边可借助于感生电流密度从散射场的直接表达式导出。

§ 11.5 半平面对平面波的二维衍射

§ 11.5.1 E 偏振对偶积分方程的解

在下面几页中，通过得出适当对偶积分方程的简单的显解，严格处理平面波被半无限平面片的衍射。

首先考虑 E 偏振的平面波

$$E_z^{(i)} = e^{-ikr \cos(\theta - \alpha_0)} \quad (1)$$

入射到完全导电的半平面 $y = 0, x > 0$ 上，为了方便起见，上式中已假定 α_0 是实数，且 $0 < \alpha_0 < \pi$ (图11.6)。现在，§ 11.4 的(17)和(18)式为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(\mu)}{\sqrt{(1 - \mu^2)}} e^{ikx\mu} d\mu = -e^{-ikx\mu_0}, \quad x > 0, \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(\mu) e^{ikx\mu} d\mu = 0, \quad x < 0, \quad (3)$$

式中 $\mu_0 = \cos \alpha_0$ 。我们利用围道积分的标准方法着手解这些方程。

在(3)式左边的积分中， x 是负的。因此，由约旦引理¹⁾，只要当 $0 \geq \arg \mu \geq -\pi$ 时，随着 $|\mu| \rightarrow \infty, P(\mu) \rightarrow 0$ ，我们就能够用一个在实轴下方的无限大的半圆来闭合积分路线，而不对积分造成任何附加的贡献。因此为了满足(3)式，仅进一步要求 $P(\mu)$ 应在积分路线下方的半平面内没有奇点，因为这时积分实际上绕一闭合围道，在其内部，被积函数是正则的。

1) E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis* (Cambridge University Press, 1920), p. 115.

同样，在(2)式左边的积分中， x 是正的；假定当 $\pi \geq \arg \mu \geq 0$ 时，随着 $|\mu| \rightarrow \infty$ ， $\frac{P(\mu)}{\sqrt{(1 - \mu^2)}} \rightarrow 0$ ，我们就能够用一个在实轴上方的无限大的半圆来闭合积分路线，而不对积分造成任何附加的贡献。因此，如果 $U(\mu)$ 是在积分路线上方的半平面内无奇点的任一函数，并在 $|\mu| \rightarrow \infty$ 处具有适当的特性，则只要积分路线凹在 $\mu = -\mu_0$ 处的极点之下，如图 11.7 所示，显然

$$\frac{P(\mu)}{\sqrt{(1 - \mu^2)}} = -\frac{1}{2\pi i} \frac{U(\mu)}{U(-\mu_0)} \frac{1}{(\mu + \mu_0)} \quad (4)$$

满足(2)式。因(4)式的右边函数唯一有关的奇点是 $\mu = -\mu_0$ 处的极点，其留数为 $\frac{-1}{(2\pi i)}$ ，根据柯西留数定理，它对(2)式中的积分正好贡献一项 $-\exp(-ikx\mu_0)$ 。

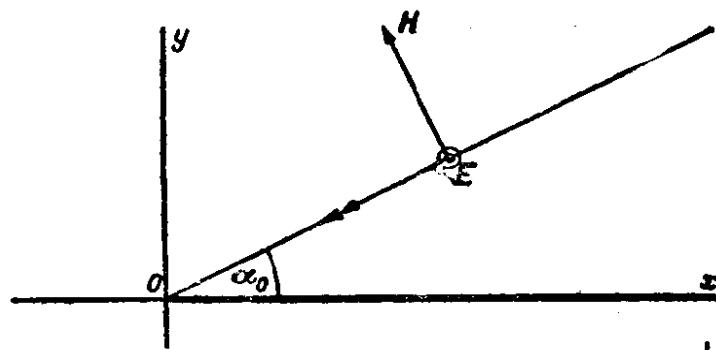


图 11.6 入射在完全导电平面上的平面波

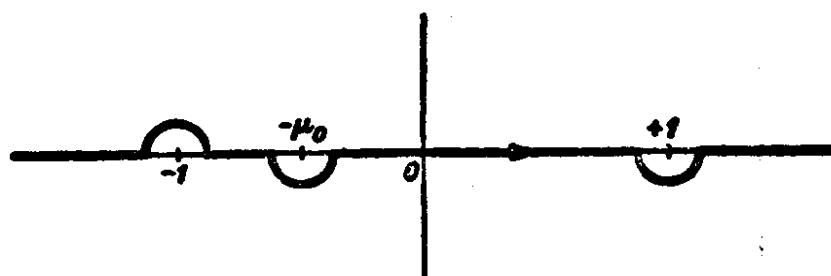


图 11.7 复 μ 平面上的积分路线

如果现在把(4)式改写为

$$\frac{P(\mu)}{\sqrt{(1 - \mu)}} (\mu + \mu_0) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{U(\mu)}{U(-\mu_0)} \sqrt{(1 + \mu)}, \quad (5)$$

则可以证明(5)式两边都是一个常数。因左边在积分路线下方的半平面内无奇点，并且在无穷远处代数增长，而右边在积分路线上方的半平面内也同样如此。所以，在整个复 μ 平面上使两边恒等的函数无奇点，并且在无穷远处代数增长。因此它必定是一个多项式，而且由于对 $\arg\mu$ 的某些值，随着 $|\mu| \rightarrow \infty$, $P(\mu) \rightarrow 0$ ，因此这个多项式只能含有一个常数项。

在(5)式右边令 $\mu = -\mu_0$ ，就直接求出这一常数值，此时

$$P(\mu) = \frac{i}{2\pi} \frac{\sqrt{(1-\mu_0)(1-\mu)}}{\mu + \mu_0}, \quad (6)$$

或

$$P(\cos\alpha) = \frac{i}{\pi} \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha_0 \sin \frac{1}{2}\alpha}{\cos\alpha + \cos\alpha_0}. \quad (7)$$

在§ 11.7.1 最后一段再阐明(7)式对 α 和 α_0 的对称性的含义。

由§ 11.4(10), (11), (12)式以及(7)式的 $P(\cos\alpha)$ 可得出散射场的分量，因此总场由下式给出：

$$E_z = e^{-ikr \cos(\theta - \alpha_0)} - \frac{1}{i\pi} \int_C \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha_0 \sin \frac{1}{2}\alpha}{\cos\alpha + \cos\alpha_0} e^{ikr \cos(\theta + \alpha)} d\alpha, \quad (8)$$

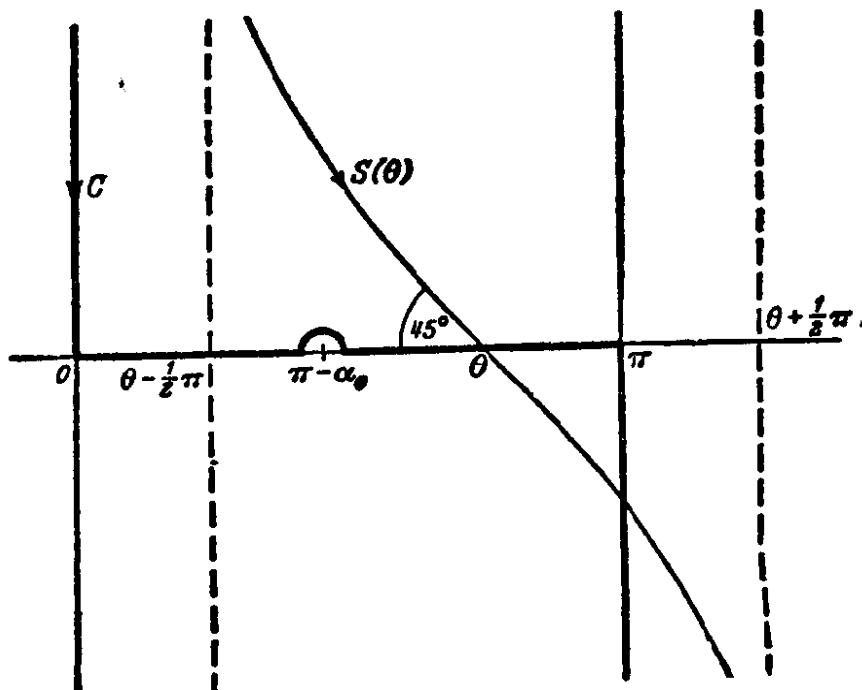


图 11.8 复 α 平面内的最速下降路线 $S(\theta)$

$y > 0$ 时用上面的符号, $y < 0$ 时用下面的符号。这就完成了实际解, 剩下的只是把它整理成更有效的形式。

§ 11.5.2 用菲涅耳积分表示的解

当 kr 较大时, 即离原点的距离大于一个波长左右时, 一般类型的积分

$$\int P(\cos \alpha) e^{ikr \cos(\theta-\alpha)} d\alpha \quad (9)$$

可尝试用最速下降法(见附录 3)计算。这种方法的第一步是把积分路线(正是考虑到被积函数中存在的任何奇点)变形为通过 $\alpha = \theta$ 处鞍点的最速下降路线 $S(\theta)$ 。路线 $S(\theta)$ 如图 11.8 所示; 沿着这条路线, 新变量

$$\tau = \sqrt{2} e^{\frac{1}{4}i\pi} \sin \frac{1}{2}(\alpha - \theta) \quad (10)$$

从 $-\infty$ 经实数值到 ∞ 。于是, 积分(9)表现为下述形式:

$$\sqrt{2} e^{-\frac{1}{4}i\pi} e^{ikr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(\cos \alpha)}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}i\tau^2}} e^{-krr^2} d\tau, \quad (11)$$

由此可得出 $kr \gg 1$ 时的渐近逼近。

实际上, 这种方法应用于(8)式中的特殊积分, 不用取近似, 就能导出它用菲涅耳积分表示的表达式。现在证明这一点。

首先考虑 $0 < \theta < \pi$ 的情况。因(7)式可表示为下述形式:

$$P(\cos \alpha) = \frac{1}{4\pi i} \left\{ \sec \frac{1}{2}(\alpha - \alpha_0) - \sec \frac{1}{2}(\alpha + \alpha_0) \right\}, \quad (12)$$

所以计算

$$\int_{S(\theta)} \sec \frac{1}{2}(\alpha - \alpha_0) e^{ikr \cos(\theta-\alpha)} d\alpha \quad (13)$$

就足够了, 因为改变 α_0 的符号就可以接着写出 $\sec \frac{1}{2}(\alpha + \alpha_0)$ 的

贡献. 现在通过简单变换,(13)式成为

$$\begin{aligned}
 & \int_{S(0)} \sec \frac{1}{2} (\alpha - \alpha_0 + \theta) e^{ikr \cos \alpha} d\alpha \\
 &= \frac{1}{2} \int_{S(0)} \left\{ \sec \frac{1}{2} (\alpha - \alpha_0 + \theta) + \sec \frac{1}{2} (\alpha + \alpha_0 - \theta) \right\} e^{ikr \cos \alpha} d\alpha \\
 &= 2 \int_{S(0)} \frac{\cos \frac{1}{2} (\alpha_0 - \theta) \cos \frac{1}{2} \alpha}{\cos \alpha + \cos (\alpha_0 - \theta)} e^{ikr \cos \alpha} d\alpha,
 \end{aligned} \tag{14}$$

用代换

$$\tau = \sqrt{2} e^{\frac{1}{4} i\pi} \sin \frac{1}{2} \alpha,$$

(14)式变为

$$-2e^{\frac{1}{4} i\pi} e^{ikr} \eta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-krt^2}}{\tau^2 - i\eta^2} d\tau, \tag{15}$$

式中

$$\eta = \sqrt{2} \cos \frac{1}{2} (\theta - \alpha_0).$$

但

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi \tau^2} d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{\xi}},$$

上式乘以 $\exp(i\eta^2 \xi)$, 然后对 ξ 从 kr 到无穷远积分, 得出

$$\begin{aligned}
 e^{ikr\eta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-krt^2}}{\tau^2 - i\eta^2} d\tau &= \sqrt{\pi} \int_{kr}^{\infty} \frac{e^{i\eta^2 \xi}}{\sqrt{\xi}} d\xi \\
 &= \frac{2\sqrt{\pi}}{|\eta|} \int_{|\eta| \sqrt{kr}}^{\infty} e^{i\mu^2} d\mu.
 \end{aligned} \tag{16}$$

或引入记号

$$F(a) = \int_a^{\infty} e^{i\mu^2} d\mu \tag{17}$$

作为复菲涅耳积分的一种形式¹⁾, 则有

$$\eta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-krt^2}}{\tau^2 - i\eta^2} d\tau = \pm 2\sqrt{\pi} e^{-ikr\eta^2} F\left\{\pm \eta \sqrt{kr}\right\}, \tag{18}$$

1) 在这里, 这种形式的菲涅耳积分比 § 8.7(12) 式中定义的更方便; 应注意积分限的改变.

$\eta > 0$ 时用上面的符号, $\eta < 0$ 时用下面的符号.

综合这些结果, 最后得出, 对于 $y \geq 0$,

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{i\pi} \int_{S(\theta)} \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha_0 \sin \frac{1}{2}\alpha}{\cos \alpha + \cos \alpha_0} e^{ikr \cos(\theta-\alpha)} d\alpha \\ & = -\frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}} \left\{ e^{-ikr \cos(\theta-\alpha_0)} F \left[\sqrt{2kr} \cos \frac{1}{2}(\theta - \alpha_0) \right] \right. \\ & \quad \left. \mp e^{-ikr \cos(\theta+\alpha_0)} F \left[\pm \sqrt{2kr} \cos \frac{1}{2}(\theta + \alpha_0) \right] \right\}, \quad (19) \end{aligned}$$

$\theta + \alpha_0 < \pi$ 时用上面的符号, $\theta + \alpha_0 > \pi$ 时用下面的符号.

为了由(8)式得出完全场, 只需考虑 $\alpha = \pi - \alpha_0$ 处的单极点. 当 $0 \leq \theta \leq \pi$ 时, 容易证明, 把路线 C 变形为路线 $S(\theta)$, 无穷远区是不作贡献的, 并且由图 11.8 清楚地看出, 当且仅当 $\pi - \alpha_0 > \theta$ 时, 极点才被俘获. 由留数定理得出, 它的贡献是

$$-e^{-ikr \cos(\theta+\alpha_0)}. \quad (20)$$

换句话说, 它是几何光学的反射波, 其中越过 $\theta = \pi - \alpha_0$ 的不连续性正好抵消了衍射场(19)式中的不连续性. 事实上, 援引下述关系式:

$$F(a) + F(-a) = \sqrt{\pi} e^{\frac{1}{4}i\pi}, \quad (21)$$

完全场(8)可写成下述形式:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}} \left\{ e^{-ikr \cos(\theta-\alpha_0)} F \left[-\sqrt{2kr} \cos \frac{1}{2}(\theta - \alpha_0) \right] \right. \\ & \quad \left. - e^{-ikr \cos(\theta+\alpha_0)} F \left[-\sqrt{2kr} \cos \frac{1}{2}(\theta + \alpha_0) \right] \right\}, \quad (22) \end{aligned}$$

它就是索末菲的著名结果.

当 $y < 0$ 时, 必须计算下述积分:

$$\int_C \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha_0 \sin \frac{1}{2}\alpha}{\cos \alpha + \cos \alpha_0} e^{ikr \cos(\theta+\alpha)} d\alpha.$$

现在, 适当的最速下降路线是 $S(2\pi - \theta)$, 只当 $\theta > \pi + \alpha_0$ 时, $\alpha = \pi - \alpha_0$ 处的极点才被俘获, 由此得出负的入射波. 整个场再

次由(22)式给出。

如§ 11.4.1 所述, 为了得出 \mathbf{H} 的分量的相应表达式, 只须求微商。笛卡儿分量 H_x, H_y 和极坐标分量 H_r, H_θ 两者都是有兴趣的: 鉴于(22)式是用 r, θ 表示的, 因此方便的做法是, 先由麦克斯韦方程

$$H_r = \frac{1}{ikr} \frac{\partial E_z}{\partial \theta}, \quad H_\theta = -\frac{1}{ik} \frac{\partial E_z}{\partial r} \quad (23)$$

导出后者, 再由关系式

$$H_x = \cos \theta H_r - \sin \theta H_\theta, \quad H_y = \sin \theta H_r + \cos \theta H_\theta$$

导出前者。

为使结果更简洁, 引入下述记号:

$$\begin{aligned} u &= -\sqrt{2kr} \cos \frac{1}{2}(\theta - \alpha_0), \\ v &= -\sqrt{2kr} \cos \frac{1}{2}(\theta + \alpha_0), \end{aligned} \quad (24)$$

$$G(a) = e^{-ia^2} F(a). \quad (25)$$

注意到

$$\frac{dG(a)}{da} = -1 - 2iaG(a).$$

因此(22)式表示为下述形式:

$$E_z = \frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}} e^{ikr} \{ G(u) - G(v) \}, \quad (26)$$

由此得出:

$$\left. \begin{aligned} H_r &= \frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}} e^{ikr} \left\{ \sin(\theta - \alpha_0)G(u) - \sin(\theta + \alpha_0)G(v) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - i\sqrt{\frac{2}{kr}} \sin \frac{1}{2}\alpha_0 \cos \frac{1}{2}\theta \right\}, \right. \\ H_\theta &= \frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}} e^{ikr} \left\{ \cos(\theta - \alpha_0)G(u) - \cos(\theta + \alpha_0)G(v) \right. \\ &\quad \left. + i\sqrt{\frac{2}{kr}} \sin \frac{1}{2}\alpha_0 \sin \frac{1}{2}\theta \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned}
 H_x &= -\frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}} e^{ikr} \left\{ \sin \alpha_0 [G(u) + G(v)] \right. \\
 &\quad \left. + i \sqrt{\frac{2}{kr}} \sin \frac{1}{2} \alpha_0 \cos \frac{1}{2} \theta \right\}, \\
 H_y &= \frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}} e^{ikr} \left\{ \cos \alpha_0 [G(u) - G(v)] \right. \\
 &\quad \left. - i \sqrt{\frac{2}{kr}} \sin \frac{1}{2} \alpha_0 \sin \frac{1}{2} \theta \right\}.
 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

§ 11.5.3 解的性质

现在较详细地考察 § 11.5.2 中所给结果的性质。由它们的推导清楚地看出，并能直接证明，对于任一个 α_0 值， $G(u)\exp(ikr)$ 本身是二维波动方程的一个解；值得注意之点是，它具有周期 4π ，因此在屏的两面 $\theta = 0, \theta = 2\pi$ 上， $G(u) - G(v)$ 为零，但在 $\theta = \pi$ 上不为零；索末菲确实是通过寻求周期为 4π 的波动方程的一个适当解，并把它与它的“象”相结合，才得出他的结果(22)式¹⁾。附带地，由(28)式得出，

$$\cos \frac{1}{2} \theta \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}, \quad \sin \frac{1}{2} \theta \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}$$

也是二维波动方程的解，这是一个众所周知的结果。

(26)式需考察的另一方面，是当 $r \rightarrow \infty$ 时它的特性。这是一个简单易懂的问题，也是本节中随后讨论的主题。

半平面问题的一个很吸引人的特性是可以用菲涅耳积分表²⁾计算任何一点的场。而且在特别感兴趣的两种情况下，即 $kr \gg 1$ 和 $kr \ll 1$ ，可利用菲涅耳积分的简单近似(在 § 8.7.2 中已提到)。

1) B. B. Baker and E. T. Copson, *The Mathematical Theory of Huygens' Principle* (Oxford, Clarendon Press, 2nd ed. 1950)，第 4 章中较好的叙述了这种方法。

2) 为此目的，最方便的看来出自下文，见 R. A. Rankin, *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, 241 (1949), 457.

当然,前一种条件在光学实验中总是满足的,其中观察点离衍射棱边很可能有上百万个波长;后一种条件的出现与锐棱边附近场的特性有关,并可以在厘米射电波长下研究(见§ 11.5.6)。

$k r \gg 1$. 在这种情况下,除了 θ 的值分别充分接近 $\pi + \alpha_0$ 和 $\pi - \alpha_0$ 以外, $|u|$ 和 $|v|$ 都比1大得多。确切地说,我们引入五个区域,如图11.9所示。形成区域II和IV的边界的曲线方程分别取为 $u^2 = 1$ 和 $v^2 = 1$,因此这两条曲线都是抛物线,其焦点都在原点处,其轴各为 $\theta = \pi + \alpha_0$ 和 $\theta = \pi - \alpha_0$ 。充分深入区域II的内部(即在抛物线 $u^2 = \varepsilon$ 内侧,式中 $\varepsilon \ll 1$),则 $|u| \ll 1$;充分远离区域II之外,(即在抛物线 $u^2 = \gamma$ 外侧,式中 $\gamma \gg 1$),则 $|u| \gg 1$ 。 $|v|$ 与区域IV有同样的关系。而且,当 $0 < \theta < \pi - \alpha_0$ 时, u 和 v 都是负的; $\pi - \alpha_0 < \theta < \pi + \alpha_0$ 时, u 是负的而 v 是正的; $\pi + \alpha_0 < \theta < 2\pi$ 时, u 和 v 都是正的。

区域I, III 和 V 显然与由几何光学处理得出的那些区域密切有关,按照几何光学处理,光沿直线传播;即,如图11.10所示,在屏后面的阴影扇形区那里完全没有场存在,受照扇形区那里只有入射平面波,反射扇形区那里有入射平面波与适合于在无限大的屏上反射的反射平面波在一起。概括地说,事实上,区域II和IV是精确解从一个扇形区内的几何场到另一个邻近扇形区内的几何场之间实现平滑过渡的区域。为了更详细地了解这一点,我们应暂停推导自变量值较大时的菲涅耳积分的渐近逼近。

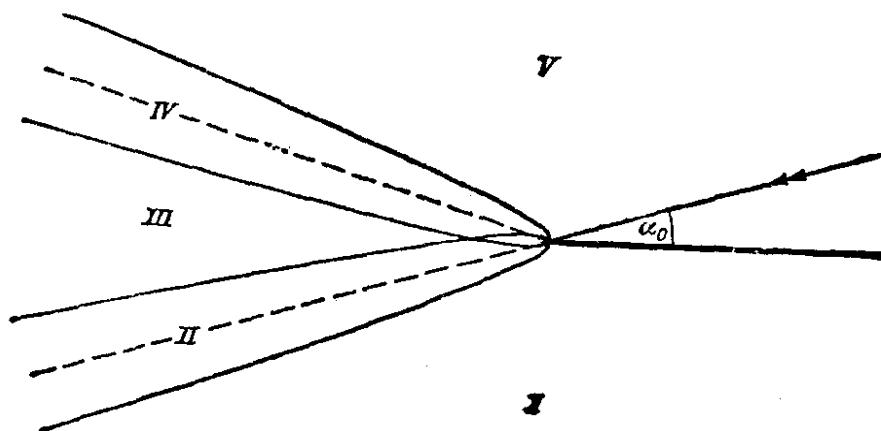


图 11.9 平面波被一完全导电的半平面衍射。可用五个区域来描述场的特性

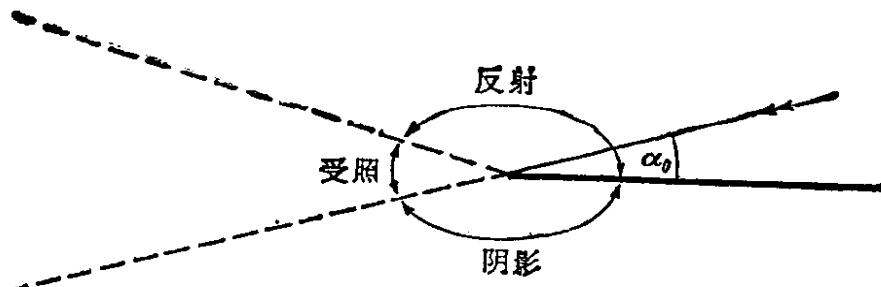


图 11.10 平面波被一完全导电的半平面衍射. 几何光学的三个区域

如果 a 为正值, 写出

$$G(a) = e^{-ia^2} \int_a^\infty \frac{d(e^{i\mu^2})}{2i\mu},$$

分部积分两次, 得出

$$G(a) = \frac{i}{2a} + \frac{1}{4a^3} - \frac{3}{4} e^{-ia^2} \int_a^\infty \frac{e^{i\mu^2}}{\mu^4} d\mu. \quad (29)$$

事实上, 这样继续做下去会得出 $G(a)$ 的完全的渐近展开式, 但为了当前的目的, 我们只注意到(29)式最后一项中的积分的模小于

$$\int_a^\infty \frac{d\mu}{\mu^4} = \frac{1}{3a^3}, \quad (30)$$

由此

$$G(a) = \frac{i}{2a} + O\left(\frac{1}{a^3}\right). \quad (31)$$

值得注意的是, 根据 § 11.5.2 中概述的一般方法, 把(18)式被积函数中的因子 $(\tau^2 - i\eta^2)^{-1}$ 展开成 τ 的幂级数, 然后逐项积分, 也能得出上述结果.

如果 a 为负值, 则(30)式左边发散, 但这种情况利用(21)式以及自变量为正值的结果就可以容易地处理. 这时

$$G(a) = \sqrt{\pi} e^{\frac{i}{4}i\pi} e^{-ia^2} + \frac{i}{2a} + O\left(\frac{1}{a^3}\right). \quad (32)$$

a 为正值时的渐近逼近式(31)与 a 为负值时的渐近逼近式(32)不同, 这一事实是斯托克斯现象¹⁾的一个特例.

1) G. G. Stokes, *Trans. Camb. Phil. Soc.*, **10** (1864), 105.

现在写出

$$E_z = E_z^{(g)} + E_z^{(d)},$$

式中 $E_z^{(g)}$ 是由下式给出的几何光学场:

$$E_z^{(g)} = \begin{cases} e^{-ikr \cos(\theta - \alpha_0)} - e^{-ikr \cos(\theta + \alpha_0)}, & 0 \leq \theta < \pi - \alpha_0, \\ e^{-ikr \cos(\theta - \alpha_0)}, & \pi - \alpha_0 < \theta < \pi + \alpha_0, \\ 0, & \pi + \alpha_0 < \theta \leq 2\pi, \end{cases} \quad (33)$$

$E_z^{(d)}$ 是衍射场, 它单纯是这样一个场, 应与几何光学场相加而给出完全场。因此, 对于 $kr \gg 1$, 把(31)和(32)式用于(26)式, 在上述意义上, 在不太靠近区域 II 和 IV 的那些点处, 得出

$$E_z^{(d)} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{\frac{i}{4}i\pi} \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha_0 \sin \frac{1}{2}\theta}{(\cos \theta + \cos \alpha_0)} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}. \quad (34)$$

由(23)或(27)式, 很容易看出, 按与(34)式同级的近似, $\mathbf{H}^{(d)}$ 的分量为 $H_\theta^{(d)} = -E_z^{(d)}$ 和 $H_r^{(d)} = 0$ 。显然, (34)式意味着, 衍射场的表现就好象它来自一个沿着衍射棱边放置的线光源, 其“极坐标图”按(34)式的规定随角度而变化。这与下述实验事实一致, 即为了对比起见, 从阴影扇形区看去时, 衍射棱边好象被照亮了。

当 $\cos \theta + \cos \alpha_0$ 趋于零时, 近似式(34)不成立, 必须求助于精确解。因为

$$G(0) = \int_0^\infty e^{i\mu^2} d\mu = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{\frac{i}{4}i\pi}, \quad (35)$$

所以由(26)式看出, 在 $\theta = \pi + \alpha_0$ 处,

$$E_z = \frac{1}{2} e^{ikr} + O\left\{\frac{1}{\sqrt{kr}}\right\}, \quad (36)$$

而在 $\theta = \pi - \alpha_0$ 处,

$$E_z = e^{ikr \cos(2\alpha_0)} - \frac{1}{2} e^{ikr} + O\left\{\frac{1}{\sqrt{kr}}\right\}. \quad (37)$$

因此, 靠近 $\theta = \pi + \alpha_0$ 和 $\theta = \pi - \alpha_0$ 处, 衍射场与入射场同一数量级。特别是在无限远处, 两个邻近的扇形区内的几何光学场之间是经由它们的算术平均来过渡的。

在几何光学场与衍射场可比较的那些区域内，这两个场之间的干涉产生条纹。这在图 11.11 中很明显，将在 § 11.5.5 中讨论。

$kr \ll 1$ 。在这种情况下， $|u|$ 和 $|v|$ 比 1 小得多，菲涅耳积分的级数展开是有用的。写出

$$F(a) = \int_0^\infty e^{ia^2} d\mu - \int_0^a e^{ia^2} d\mu,$$

并将第二个积分的被积函数中的指数展开，则有

$$F(a) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{\frac{1}{4}i\pi} - a + O(a^3). \quad (38)$$

因此，由(26)和(28)式，略去 kr 的大于 $1/2$ 的幂次，得出

$$\left. \begin{aligned} E_x &= 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{1}{4}i\pi} \sqrt{kr} \sin \frac{1}{2} \alpha_0 \sin \frac{1}{2} \theta, \\ H_x &= -\sin \alpha_0 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{1}{4}i\pi} \sin \frac{1}{2} \alpha_0 \cos \frac{1}{2} \theta \\ &\quad \times \left\{ \frac{i}{\sqrt{kr}} + (1 + 2 \cos \alpha_0) \sqrt{kr} \right\}, \\ H_y &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{1}{4}i\pi} \sin \frac{1}{2} \alpha_0 \sin \frac{1}{2} \theta \\ &\quad \times \left\{ -\frac{i}{\sqrt{kr}} + (1 + 2 \cos \alpha_0) \sqrt{kr} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

应当注意，在 $r = 0$ 处， E_x 是有限和连续的，但 H_x 和 H_y 象 $r^{-1/2}$ 那样发散，除了在 $\theta = \pi$ 处，此时 $H_x = -\sin \alpha_0 \times \exp(ikr \cos \alpha_0)$ ，以及在 $\theta = 0, 2\pi$ 处，此时 $H_y = 0$ 。物理问题中特有的这种特性，当然是由无限锐的棱边的理想化概念引起的。在这种情况下，表述关于解的唯一性的任何定理都必须考虑到场分量中奇点的存在（见 § 11.9）。

我们通过考察在衍射屏中感生的电流密度来结束这一段对于解的性质的研究。它为 $-c/4\pi$ 乘以 $\theta = 0$ 和 $\theta = 2\pi$ 处的 H_x 之差；即，由(28)式得出，

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{c} J_z = & \sin \alpha_0 e^{-ikx \cos \alpha_0} - \frac{e^{-\frac{i}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}} e^{ikx} \left\{ 2 \sin \alpha_0 \right. \\ & \times G \left[\sqrt{2kx} \cos \frac{1}{2} \alpha_0 \right] - i \sqrt{\frac{2}{kx}} \sin \frac{1}{2} \alpha_0 \left. \right\}. \end{aligned} \quad (40)$$

当 $\sqrt{2kx} \cos \frac{1}{2} \alpha_0 \gg 1$ 时, (40) 式改为

$$J_z = \frac{c}{2\pi} \sin \alpha_0 e^{-ikx \cos \alpha_0} + O\{(kx)^{-3/2}\}. \quad (41)$$

这个结果的意义在于指出了容许假定电流密度为几何光学给出值的可能范围, 这是不能精确求解的问题中的一种标准方法。显然, 这个假定只对于不靠近 π 的 α_0 值才是合理的, 并且它从下述事实中得到好处: 即(41)式中的“修正项”随着 $x \rightarrow \infty$ 按 $x^{-3/2}$ 而不是按 $x^{-1/2}$ 趋于零。

另一方面, 当 $\sqrt{2kx} \cos \frac{1}{2} \alpha_0 \ll 1$ 时,

$$J_z = \frac{c}{\pi \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{i}{4}i\pi} \sin \frac{1}{2} \alpha_0 \left\{ \frac{i}{\sqrt{kx}} + 4 \cos^2 \frac{1}{2} \alpha_0 \sqrt{kx} \right\} e^{ikx}, \quad (42)$$

它在衍射棱边上发散。

§ 11.5.4 H 偏振的解

H 偏振的情况, 即入射场由

$$H_z^{(i)} = e^{-ikr \cos(\theta - \alpha_0)} \quad (43)$$

确定时, 可以用同 E 偏振一样的方法来处理, 事实上, 其分析实际相同。换句话说, 援引 § 11.3 中给出的巴俾涅原理的精确电磁形式, 就能由后者导出前者, 因为与半平面互补的屏本身就是半平面。结果是, 完全场由下式给出:

$$\begin{aligned} H_z = & \frac{e^{-\frac{i}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}} \left\{ e^{-ikr \cos(\theta - \alpha_0)} F \left[-\sqrt{2kr} \cos \frac{1}{2} (\theta - \alpha_0) \right] \right. \\ & \left. + e^{-ikr \cos(\theta + \alpha_0)} F \left[-\sqrt{2kr} \cos \frac{1}{2} (\theta + \alpha_0) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (44)$$

它与 E 偏振场 E_z 的相应表达式(22)的差别只在于第二项的符号。

利用 § 11.5.2 的记号, 非零场分量表示为下述形式:

$$\left. \begin{aligned} H_x &= \frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}} e^{ikr} \{ G(u) + G(v) \}, \\ E_x &= \frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}} e^{ikr} \left\{ \sin \alpha_0 [G(u) - G(v)] \right. \\ &\quad \left. - i \sqrt{\frac{2}{kr}} \cos \frac{1}{2} \alpha_0 \sin \frac{1}{2} \theta \right\}, \\ E_y &= - \frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}} e^{ikr} \left\{ \cos \alpha_0 [G(u) + G(v)] \right. \\ &\quad \left. + i \sqrt{\frac{2}{kr}} \cos \frac{1}{2} \alpha_0 \cos \frac{1}{2} \theta \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

显然, 在 $\theta = 0$ 和 $\theta = 2\pi$ 处, E_x 为零, 而 $kr \gg 1$ 时场的特性, 可再次用看来象是来自一个沿着衍射棱边的线光源对于离 $\theta = \pi - \alpha_0$ 和 $\theta = \pi + \alpha_0$ 充分远的各点的衍射场来解释。随着 $r \rightarrow 0$, H_x 保持有限和连续, 而 E_x 和 E_y 象 $r^{-1/2}$ 那样发散, 除了 $\theta = 0, 2\pi$ 时, $E_x = 0$, 以及 $\theta = \pi$ 时, $E_y = -\cos \alpha_0 \exp(ikr \times \cos \alpha_0)$ 。

电流密度由下式给出:

$$\frac{2\pi}{c} J_z = e^{-ikx \cos \alpha_0} - \frac{2e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}} e^{ikx} G \left\{ \sqrt{2kx} \cos \frac{1}{2} \alpha_0 \right\}. \quad (46)$$

当 $\sqrt{2kx} \cos \frac{1}{2} \alpha_0 \gg 1$ 时,

$$\frac{2\pi}{c} J_z = e^{-ikx \cos \alpha_0} - \frac{e^{\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{2\pi}} \sec \frac{1}{2} \alpha_0 \frac{e^{ikx}}{\sqrt{kx}}, \quad (47)$$

它与 E 偏振的情况相比, 逼近几何光学的电流密度要更慢些。当 $\sqrt{2kx} \cos \frac{1}{2} \alpha_0 \ll 1$ 时,

$$J_z = \frac{c}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{1}{4}i\pi} \cos \frac{1}{2} \alpha_0 \sqrt{kx} e^{ikx}. \quad (48)$$

在 $x = 0$ 处, 它为零, 因此不出所料, 在棱边本身处没有垂直于棱

边的电流。

§ 11.5.5 某些数值计算

由(26)式得出的一条典型的理论曲线如图 11.11 所示。它适用于振幅为 1 的正入射 E 偏振平面波，画出了在屏后方距离三个波长处 ($k_y = -6\pi$) E_z 的振幅对 x 的曲线。它明显地画出受照区内的衍射条纹，以及随着更深地穿入阴影区而单调衰减。

布劳恩贝克 (Braunbek) 和劳基恩 (Laukien)¹⁾ 曾作过一些有意义的计算。对于振幅为 1 的正入射 H 偏振平面波，他们给出了在离衍射棱边大约在一个波长左右的区域内 H_z 的振幅恒值线 (图 11.12) 和位相恒值线 (图 11.13)。他们也给出了与位相恒值线正交的平均能流线 (图 11.14)。很容易证明，对于任何二维 H 偏振场，情况就是这样。写出 $H_z = h e^{i\phi}$ ，式中 h 和 ϕ 均为实值；然后利用关系式

$$E_x = - \frac{1}{ik} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad E_y = \frac{1}{ik} \frac{\partial H_z}{\partial x},$$

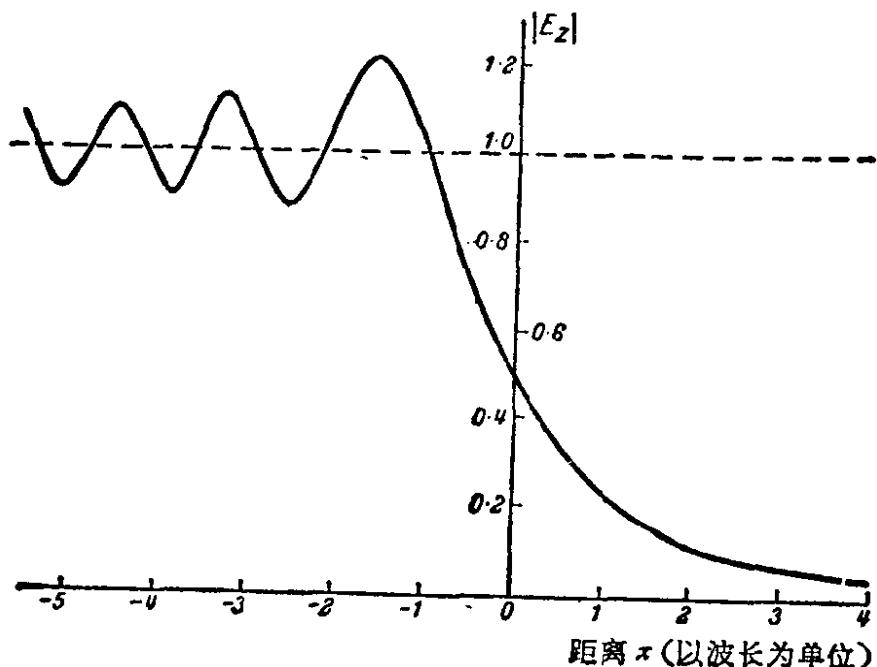


图 11.11 振幅为 1 的正入射 E 偏振平面波被完全导电半平面的衍射。
在屏后方距离三个波长处， $|E_z|$ 随 x 的变化

1) W. Braunbek and Laukien, *Optik*, 9 (1952), 174.

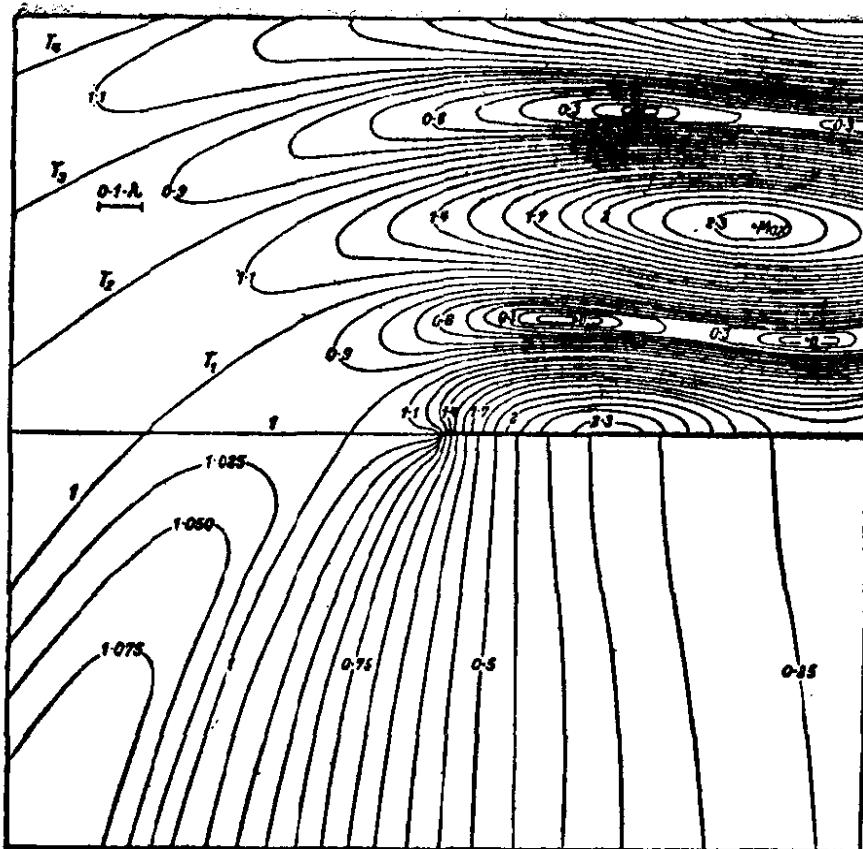


图 11.12 H_x 的振幅恒值线(入射波的振幅取为 1). 正入射 H 偏振平面波被完全导电半平面的衍射 [引自 W. Braunbek and G. Laukien, *Optik* 9 (1952), 174.]

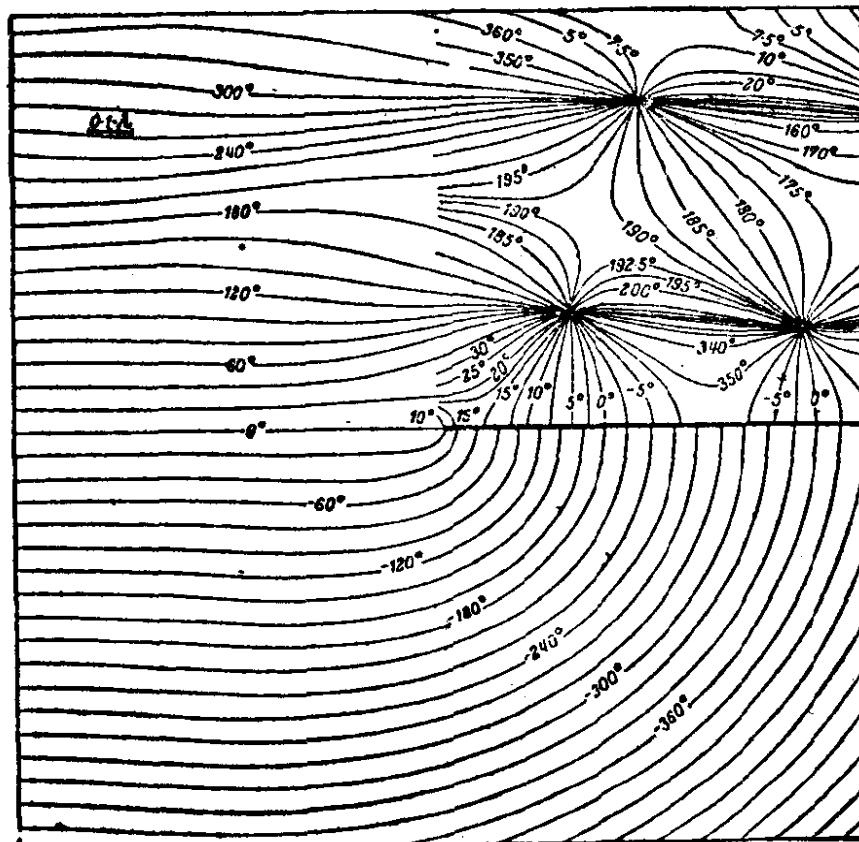


图 11.13 H_x 的位相恒值线. 正入射 H 偏振平面波被完全导电半平面的衍射 [引自 W. Braunbek and G. Laukien, *Optik*, 9 (1952), 174.]

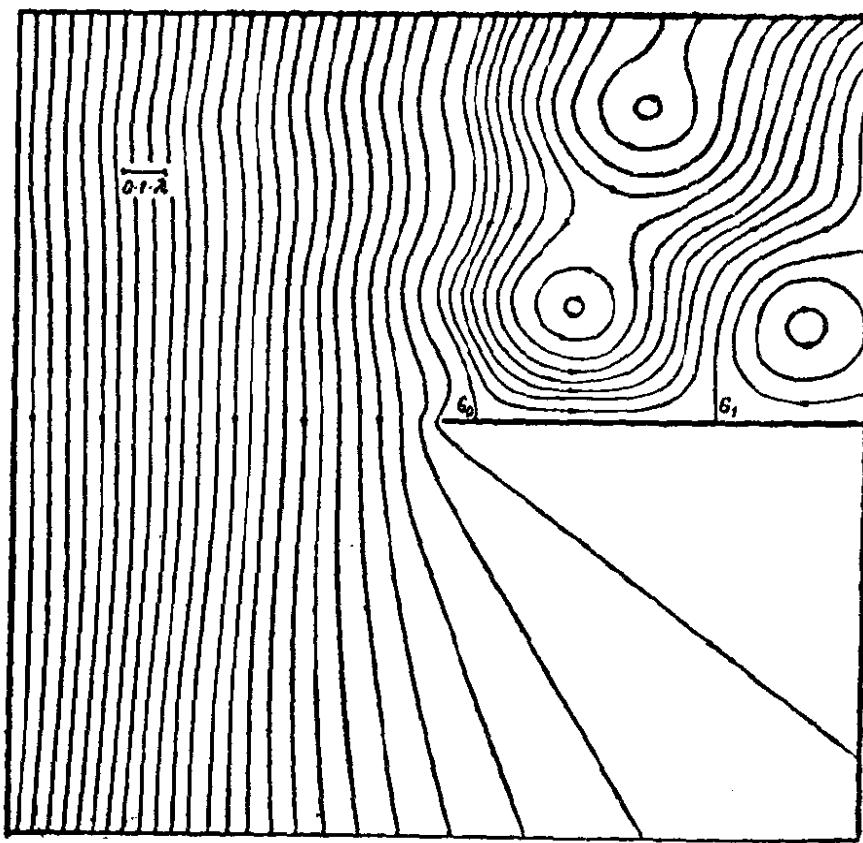


图 11.14 平均能流线

正入射 H 偏振平面波被完全导电半平面的衍射

[引自 W. Braunbek and G. Laukien, *Optik*, 9 (1952), 174.]

则平均坡印廷矢量 [§1.4(56)式]

$$\frac{c}{8\pi} \mathcal{R}(E \times H^*) = \frac{c}{8\pi} \mathcal{R}(E_y H_z^*, -E_z H_y^*, 0)$$

可见就是

$$\frac{c}{8\pi} \frac{h^2}{k} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, 0 \right), \quad (49)$$

它与诸曲面 $\phi = \text{常数}$ 正交。对于任何 E 偏振场，相应的结果成立。

§ 11.5.6 与近似理论及实验结果的比较

对于区域 II 受照部分（见图 11.9，那里有条纹出现）内离衍射边缘很远的那些点，其解(22)和(44)两式中的第二项均可略去，因此， E 偏振和 H 偏振以及非偏振光的强度均为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} + \mathcal{C} \left[2 \sqrt{\frac{2r}{\lambda}} \cos \frac{1}{2}(\theta - \alpha_0) \right] \right\}^2 \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} + \mathcal{S} \left[2 \sqrt{\frac{2r}{\lambda}} \cos \frac{1}{2}(\theta - \alpha_0) \right] \right\}^2, \quad (50) \end{aligned}$$

式中 λ 是波长, \mathcal{C} , \mathcal{S} 是 § 8.7(12) 式所定义的菲涅耳“余弦”和“正弦”积分。这个结果可与菲涅耳-基尔霍夫理论中关于一个黑的半平面的类似结果 § 8.7(28) 式作比较。确实曾经建议¹⁾, 完全导电半平面的精确解第一项可看作是给出了黑的半平面的解。

深入区域 I 阴影区内, E 偏振场由(34)式给出, 即

$$E_z = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{\frac{1}{4}i\pi} \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha_0 \sin \frac{1}{2}\theta}{(\cos \alpha_0 + \cos \theta)} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}. \quad (51)$$

同样可证, 该处的 H 偏振场为

$$H_z = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{\frac{1}{4}i\pi} \frac{\cos \frac{1}{2}\alpha_0 \cos \frac{1}{2}\theta}{(\cos \alpha_0 + \cos \theta)} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}. \quad (52)$$

因此, 相应的场强度²⁾之比为

$$\frac{E \text{ 偏振}}{H \text{ 偏振}} = -\tan \frac{1}{2}\alpha_0 \tan \frac{1}{2}\theta, \quad (53)$$

而非偏振的入射光会因衍射从而变为部分偏振光。这些结果与光学实验一般符合³⁾。

微波射电技术的发展为电磁波衍射的实验研究提供了极好的机会。特别是, 能采用比光学测量中所能做到的更接近于理想化完全导电半平面的衍射屏, 并且能考察衍射棱边附近的场。曾作过一些测量, 主要用约 3 厘米的波长, 结果表明理论与实验符合得

1) 见 B. B. Baker and E. T. Copson, *The Mathematical Theory of Huygen's Principle* (Oxford, Clarendon Press, 2nd ed., 1950), p. 149 及其后的说明。

2) 文中的场强度 (field strength) 其实是指(51)和(52)式的 E_z 和 H_z 。——译者注

3) 见 Wolfsohn 的论文, 载于 *Handbuch der Physik*, Vol. 20 (Berlin, Springer, 1928), 275, 和 J. Savornin, *Ann. de Physique*, 11 (1939), 129.

很好¹⁾。

§ 11.6 半平面对平面波的三维衍射

实际上,我们在 § 11.5 中求解的平面波被半平面衍射问题,除了限制波的传播方向垂直于衍射棱边以外,平面波是任意的。现在将证明,利用简单的方法就能推广以前的结果而得出完全任意的入射平面波的解。

设入射平面波用下述位相因子表征:

$$e^{-ikS} = e^{-ik(x \cos \alpha \cos \beta + y \sin \alpha \cos \beta + z \sin \beta)}, \quad (1)$$

式中,同前,完全导电屏占有 $y = 0, x > 0$ 。角 α 和 β 确定传播方向,如图 11.15 所示。

现在注意到,(1)式是由相应于 $\beta = 0$ 的二维形式先用 $k \cos \beta$ 代替 k 再乘以 $\exp(-ikz \sin \beta)$ 得出的。事实上,这种适用于波动方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + k^2 V = 0 \quad (2)$$

的任何二维解的方法,显然可得出三维波动方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + k^2 V = 0 \quad (3)$$

的解,其中 z 只通过因子 $\exp(-ikz \sin \beta)$ 引入。而且,如果 U 是满足(3)式的一个解,则不难证明满足麦克斯韦方程的两个电磁场为

$$\left. \begin{aligned} E &= \left(-\frac{i \sin \beta}{k} \frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{i \sin \beta}{k} \frac{\partial U}{\partial y}, \cos^2 \beta U \right), \\ H &= \left(-\frac{i}{k} \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{i}{k} \frac{\partial U}{\partial x}, 0 \right), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

1) C. W. Horton and R. B. Watson, *J. Appl. Phys.*, **21** (1950), 16; B. N. Harden, *Proc. Inst. Elec. Engrs.*, **99** Pt. III (1952), 229; R. D. Kodis, *J. Appl. Phys.*, **23** (1952), 249; R. V. Row, *J. Appl. Phys.*, **24** (1953), 1448.

和

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \left(\frac{i}{k} \frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{i}{k} \frac{\partial U}{\partial x}, 0 \right), \\ \mathbf{H} &= \left(-\frac{i \sin \beta}{k} \frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{i \sin \beta}{k} \frac{\partial U}{\partial y}, \cos^2 \beta U \right). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

当 $\beta = 0$ 时, (4) 式给出一个 E 偏振的二维场, (5) 式给出一个 H 偏振的二维场。

如果 U 取表达式(1), 则(4)和(5)式分别得出两个平面波

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= (-\cos \alpha \sin \beta, -\sin \alpha \sin \beta, \cos \beta) e^{-iks}, \\ \mathbf{H} &= (-\sin \alpha, \cos \alpha, 0) e^{-iks}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

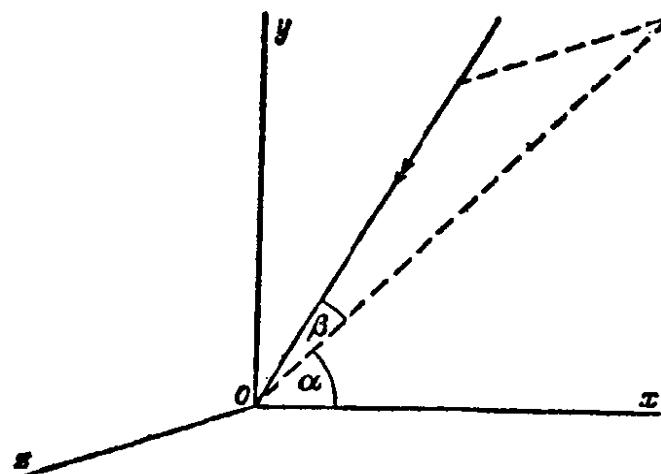


图 11.15 入射平面波的传播方向

和

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= (\sin \alpha, -\cos \alpha, 0) e^{-iks}, \\ \mathbf{H} &= (-\cos \alpha \sin \beta, -\sin \alpha \sin \beta, \cos \beta) e^{-iks}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中已全部去掉因子 $\cos \beta$ 。现在, 任一具有空间变化(1)的平面波由 \mathbf{E} (或 \mathbf{H}) 的两个分量确定, 因第三个分量可由 $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ (或 $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$) 得出。因此, 任一平面波可由(6)和(7)式的适当叠加构成; 其结果是, 在衍射问题中, 可限于注意(6)和(7)式是各自的入射场这两种情况, 而不失去普遍性。

现在很清楚, 以(6)式为入射波的衍射问题的解, 是由(4)式给出的, 式中的 U 由二维情况下先用 $k \cos \beta$ 代替 k 再乘以 $\exp(-ikz \times \sin \beta)$ 而已知的 $E_z \sec \beta$ 表达式得出: 因 $y = 0, x > 0$ 处,

$U = 0$, 这一事实也意味着该处 $\partial U / \partial x = 0$, 由此根据(4)式得出, 在屏上 $E_x = E_z = 0$, 合乎要求。显然, 由 § 11.5(24) 和 § 11.5(26) 式, 有

$$U = \frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}} \sec \beta e^{ik(r \cos \beta - z \sin \beta)} \{ G(p) - G(q) \}, \quad (8)$$

式中

$$\begin{aligned} p &= -\sqrt{2kr \cos \beta} \cos \frac{1}{2}(\theta - \alpha), \\ q &= -\sqrt{2kr \cos \beta} \cos \frac{1}{2}(\theta + \alpha). \end{aligned} \quad (9)$$

因此, 由(4)式得出

$$\left. \begin{aligned} E_z &= \frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}} \cos \beta e^{ik(r \cos \beta - z \sin \beta)} \{ G(p) - G(q) \}, \\ H_x &= -\frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}} e^{ik(r \cos \beta - z \sin \beta)} \left\{ \sin \alpha [G(p) + G(q)] \right. \\ &\quad \left. + i \sqrt{\frac{2}{kr \cos \beta}} \sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\theta \right\}, \\ H_y &= \frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}} e^{ik(r \cos \beta - z \sin \beta)} \left\{ \cos \alpha [G(p) - G(q)] \right. \\ &\quad \left. - i \sqrt{\frac{2}{kr \cos \beta}} \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\theta \right\}, \\ E_x &= -H_y \sin \beta, \quad E_y = H_x \sin \beta, \quad H_z = 0. \end{aligned} \right\} (10)$$

当 $\beta = 0$ 时, (10) 中各式立即化为 § 11.5(26) 和(28) 中相应各式。

对于入射波由(7)式给出的情况, 可同样得到类似的结果, 对于 H 偏振, 适当的二维解就是 § 11.5(44) 式的 H , 表达式。如前所述, 因此可以导出对于一个完全任意的入射平面波的解。而且, 由 § 11.5.2 的论证作简单推广得知, 任一种源分布所辐射的场都能表示为平面波谱。因此, 原则上, 任一种源分布的衍射问题的解都能由各个平面波相应的解构成。两种感兴趣的情况是平行于衍射棱边的线源(二维问题)和点源: 它们均在下一节讨论。

§ 11.7 半平面对局域源的衍射

11.7.1 平行于衍射棱边的线电流

考虑一个位于 T [即点 (r_0, θ_0) , 其中 $0 \leq \theta_0 \leq \pi$] 的线源, 它在自由空间内辐射 E 偏振的柱面波

$$E_z^{(i)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{ikz} H_0^{(1)}(kR) \sim \frac{e^{ikR}}{\sqrt{kR}}, \quad (1)$$

式中 $H_0^{(1)}$ 是第一类零阶汉克耳函数, R 是从 T 测量起的距离(见图 11.16)。

事实上, 此线源是通过 T 平行于 z 轴流动并且处处以相同位相振荡的电流。众所周知, (1)式是代表只依赖于径向距离的发散波的二维波动方程基本解。

为了把(1)式写成平面波的角谱, 我们大体上采用汉克耳函数的索末菲积分表示法¹⁾, 因为要求谱的各个平面波都入射到屏上,

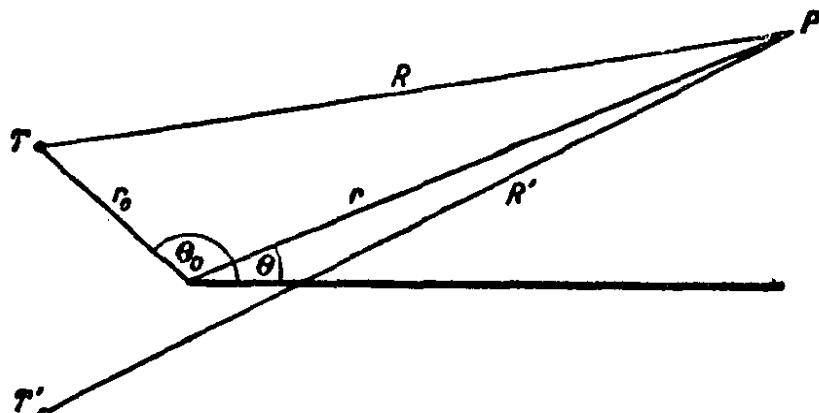


图 11.16 存在衍射的半平面时, 线源 T 的布局

所以考虑在半空间 $y < r_0 \sin \theta_0$ 中的表达式, 即

$$H_0^{(1)}(kR) = \frac{1}{\pi} \int_{S(\frac{1}{2}\pi)} e^{ikr_0 \cos(\theta_0 - \alpha)} e^{-ikr \cos(\theta - \alpha)} d\alpha. \quad (2)$$

这里选择了特殊的路线 $S\left(\frac{1}{2}\pi\right)$, 因为(除了它对于 $y < r_0 \sin \theta_0$

1) 例如, 见 J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory* (New York, McGraw-Hill, 1941), p. 367.

中所有各点都有效以外)它平行于最速下降路线,这在以后的分析中证明是方便的。(2)式的被积函数中出现位相因子 $\exp\{ikr_0 \times \cos(\theta_0 - \alpha)\}$, 是因为谱的各个平面波在 T 处都必须具有零位相。

因此很明显,对于入射场(1)的衍射问题的解,是由对于入射场 $\exp\{-ikr \cos(\theta - \alpha)\}$ 的解乘以因子

$$\frac{e^{\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{2\pi}} e^{ikr_0 \cos(\theta_0 - \alpha)} \quad (3)$$

并对 α 沿路线 $S\left(\frac{1}{2}\pi\right)$ 积分而得出的。

现在,如 § 11.5 所述,对于入射场 $\exp\{-ikr \cos(\theta - \alpha)\}$ 的解,可写成

$$E_z^{(p)} = E_z^{(pg)} + E_z^{(pd)}, \quad (4)$$

(这里引入的附标 p 表示入射波是平面波),式中 $E_z^{(pg)}$ 由 § 11.5 (33) 式给出,并且[见 § 11.5(19) 式]

$$E_z^{(pd)} = \frac{i}{\pi} \int_{S(0)} \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}(\theta + \beta)}{\cos \alpha + \cos(\theta + \beta)} e^{ikr \cos \beta} d\beta. \quad (5)$$

即将看到,采用 $E_z^{(pd)}$ 的这种形式(而不用菲涅耳积分表示)是因为它显示出 α 和 β 之间的对称性。于是,对于入射场(1)的解为

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{e^{\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{2\pi}} \int_{S(\frac{1}{2}\pi)} E_z^{(pg)} e^{ikr_0 \cos(\theta_0 - \alpha)} d\alpha \\ &+ \frac{e^{\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{2\pi}} \int_{S(\frac{1}{2}\pi)} E_z^{(pd)} e^{ikr_0 \cos(\theta_0 - \alpha)} d\alpha. \end{aligned} \quad (6)$$

为了把(6)式分成几何光学项和衍射项,第二个积分中对 α 的积分路线必须换为 $S(\theta_0)$ 。在此路线置换中,必须考虑到 $E_z^{(pd)}$ 的极点,它们作为 α 的函数:由(5)式,对于 $S(0)$ 上所有的 β ,它们出现在 $\cos \alpha = -\cos(\theta + \beta)$ 处,并且不难证明,这些极点留数的贡献与(6)式中第一个式子相结合,就得到几何光学项

$$E_z^{(g)} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2}\pi} e^{\frac{i}{4}i\pi} \{H_0^{(1)}(kR) - H_0^{(1)}(kR')\}, & 0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0, \\ \sqrt{\frac{1}{2}\pi} e^{\frac{i}{4}i\pi} H_0^{(1)}(kR), & \pi - \theta_0 < \theta < \pi + \theta_0, \\ 0, & \pi + \theta_0 < \theta \leq 2\pi, \end{cases} \quad (7)$$

式中 R' 是从 T 在平面 $y = 0$ 上所成的象 T' 测量起的距离(图 11.16). 衍射项可写成

$$E_z^{(d)} = \frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\pi\sqrt{2\pi}} \int_{S(0)} \int_{S(0)} \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \theta_0) \sin \frac{1}{2}(\beta + \theta)}{\cos(\alpha + \theta_0) + \cos(\beta + \theta)} \times e^{ik(r_0 \cos \alpha + r \cos \beta)} d\alpha d\beta. \quad (8)$$

将(8)式表示成

$$E_z^{(d)} = \mathcal{J}(\theta_0) - \mathcal{J}(-\theta_0) \quad (9)$$

是方便的, 式中

$$\mathcal{J}(\theta_0) = -\frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{4\pi\sqrt{2\pi}} \int_{S(0)} \int_{S(0)} \frac{e^{ik(r_0 \cos \alpha + r \cos \beta)}}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \theta_0 + \theta)} d\alpha d\beta. \quad (10)$$

最后一步是把 $\mathcal{J}(\theta_0)$ 化为单个积分. (10)式中被积函数上下各乘以 $4 \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta + \theta_0 + \theta)$, 并弃去 β 的奇函数部分, 则有

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\theta_0) = & -\frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{8\pi\sqrt{2\pi}} \int_{S(0)} \int_{S(0)} \\ & \times \left\{ \frac{1}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \theta_0 + \theta) - \sin \frac{1}{2}\beta} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \theta_0 + \theta) + \sin \frac{1}{2}\beta} \right\} \end{aligned}$$

$$\times \cos \frac{1}{2} \beta e^{ik(r_0 \cos \alpha + r \cos \beta)} d\alpha d\beta. \quad (11)$$

在(11)式被积函数的第二项中把 α 改变为 $-\alpha$ ，再把这两项重新组合，得出

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\theta_0) = & -\frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{2\pi\sqrt{2\pi}} \int_{S(0)} \int_{S(0)} \frac{1}{N} \\ & \times \left\{ \cos \frac{1}{2}(\theta_0 + \theta) \cos \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta e^{ik(r_0 \cos \alpha + r \cos \beta)} \right\} d\alpha d\beta, \quad (12) \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} N = & (\cos \alpha - 1) + (\cos \beta - 1) - 4 \sin \frac{1}{2}(\theta_0 + \theta) \sin \frac{1}{2}\alpha \\ & \times \sin \frac{1}{2}\beta + 2 \cos^2 \frac{1}{2}(\theta_0 + \theta). \end{aligned}$$

在(12)式中作“最速下降”代换，

$$\xi = \sqrt{2} e^{\frac{1}{4}i\pi} \sin \frac{1}{2}\alpha, \quad \eta = \sqrt{2} e^{\frac{1}{4}i\pi} \sin \frac{1}{2}\beta,$$

并写出 $R_1 = r_0 + r$ ，就得到

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\theta_0) = & \frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\pi\sqrt{2\pi}} e^{ikR_1} \cos \frac{1}{2}(\theta_0 + \theta) \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-k(r_0\xi^2 + r\eta^2)} d\xi d\eta}{\xi^2 + \eta^2 + 2 \sin \frac{1}{2}(\theta_0 + \theta) \xi \eta - 2i \cos^2 \frac{1}{2}(\theta_0 + \theta)}. \quad (13) \end{aligned}$$

其次，作极坐标代换

$$\xi = \sqrt{R_1/r_0} \rho \cos \phi, \quad \eta = \sqrt{R_1/r} \rho \sin \phi.$$

因此

$$\mathcal{J}(\theta_0) = \frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\pi\sqrt{2\pi}} e^{ikR_1} \cos \frac{1}{2}(\theta_0 + \theta) \int_0^\infty \rho K(\rho) e^{-kR_1\rho^2} d\rho, \quad (14)$$

式中

$$K(\rho) = \int_0^{2\pi} \left\{ \rho^2 \left[\sqrt{\frac{r}{r_0}} \cos^2 \phi + \sqrt{\frac{r_0}{r}} \sin^2 \phi \right] \right\} d\phi$$

$$+ 2 \sin \frac{1}{2} (\theta_0 + \theta) \sin \phi \cos \phi \Big] \\ - 2i \frac{\sqrt{rr_0}}{R_1} \cos^2 \frac{1}{2} (\theta_0 + \theta) \Big\}^{-1} d\phi. \quad (15)$$

现在 $K(\rho)$ 可利用令 $z = \exp(i\phi)$ 的标准方法计算, 此时积分路线变为单位圆, 并且只需计算被包围的极点的留数。由此求出

$$K(\rho) = 2\pi \left| \sec \frac{1}{2} (\theta_0 + \theta) \right| \\ \times \left\{ \rho^4 - 2i\rho^2 - \frac{4rr_0}{R_1^2} \cos^2 \frac{1}{2} (\theta_0 + \theta) \right\}^{-\frac{1}{2}}, \quad (16)$$

式中平方根的分支位于(对于 ρ 的实值)复平面的第四象限。因此 (10) 式变为

$$\mathcal{I}(\theta_0) = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{1}{4}i\pi} e^{ikR_1} \\ \times \int_0^\infty \frac{\rho e^{-kR_1\rho^2}}{\sqrt{[\rho^2 - i(R_1 - R')/R_1][\rho^2 - i(R_1 + R')/R_1]}} d\rho, \quad (17)$$

$\cos \frac{1}{2} (\theta_0 + \theta) \geq 0$ 时, 相应地用上面或下面的符号。最后作代换

$$\mu^2 = ikR_1\rho^2 + k(R_1 - R'),$$

就给出所要求的结果, 即

$$\mathcal{I}(\theta_0) = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{1}{4}i\pi} e^{ikR'} \int_{\sqrt{k(R_1 - R')}}^\infty \frac{e^{i\mu^2}}{\sqrt{\mu^2 + 2kR'}} d\mu, \quad (18)$$

$\cos \frac{1}{2} (\theta_0 + \theta) \leq 0$ 时, 相应地用上面或下面的符号。

因为入射场(1)可写成下述形式:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{1}{4}i\pi} e^{ikR} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\mu^2}}{\sqrt{\mu^2 + 2kR}} d\mu, \quad (19)$$

几何光学项(7)与衍射项(9)相结合, 得出总场为

$$E_z = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{1}{4}i\pi} \left\{ e^{ikR} \int_m^\infty \frac{e^{i\mu^2}}{\sqrt{\mu^2 + 2kR}} d\mu - e^{ikR'} \right.$$

$$\times \int_{m'}^{\infty} \frac{e^{i\mu^2}}{\sqrt{\mu^2 + 2kR'}} d\mu \Big\}, \quad (20)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} m &= -2 \sqrt{\frac{krr_0}{R_1 + R}} \cos \frac{1}{2}(\theta_0 - \theta) = \mp \sqrt{k(R_1 - R)}, \\ &\quad \cos \frac{1}{2}(\theta_0 - \theta) \geq 0 \text{ 时取+}, \\ m' &= -2 \sqrt{\frac{krr_0}{R_1 + R'}} \cos \frac{1}{2}(\theta_0 + \theta) = \mp \sqrt{k(R_1 - R')}, \\ &\quad \cos \frac{1}{2}(\theta_0 + \theta) \geq 0 \text{ 时取+}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

麦克唐纳¹⁾首次给出了实质上具有(20)式形式的解，他是通过对卡斯洛²⁾的更早的解作变换而得到的。它在型式上很类似于索末菲对于入射平面波的解，确实，把它乘以 $\sqrt{kr_0} \exp(-ikr_0)$ 并令 $r_0 \rightarrow \infty$ ，就立即重新得出后者。 H 偏振的解不同之处仅在于(20)式中两项是相加的而不是相减的。

如果 $kR_1 \gg 1$ ，则在(18)式被积函数的非指数因子中， μ 可用它的下限值代替，而得出近似结果

$$\mathcal{I}(\theta_0) = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{1}{4}i\pi} \frac{e^{ikR'}}{\sqrt{k(R_1 + R')}} F \left[\sqrt{k(R_1 - R')} \right]; \quad (22)$$

于是，再利用 $\mathcal{I}(-\theta_0)$ 的相应近似，衍射场就用菲涅耳积分示出，其精确度为，仅当源和观察点两者距衍射棱边均明显在一个波长以内时才不适用。

此外，如果 $k(R_1 - R') \gg 1$ ，则渐近逼近式 § 11.5(31) 可用于(22)式，得出

$$\mathcal{I}(\theta_0) = \frac{e^{\frac{1}{4}i\pi}}{2\sqrt{2\pi}} \sec \frac{1}{2}(\theta_0 + \theta) \frac{e^{ikr_0}}{\sqrt{kr_0}} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}; \quad (23)$$

1) H. M. Macdonald, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **14** (1915), 410.

2) H. S. Carslaw, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **30** (1899), 121.

同样,如果 $k(R_1 - R) \gg 1$, 则

$$\mathcal{J}(-\theta_0) = \frac{e^{\frac{k}{2}i\pi}}{2\sqrt{2\pi}} \sec \frac{1}{2}(\theta_0 - \theta) \frac{e^{ikr_0}}{\sqrt{kr_0}} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}. \quad (24)$$

因此,对于远离两条双曲线 $k(R_1 - R') = 1$ 和 $k(R_1 - R) = 1$ 之外的所有各点来说,衍射场类似于某个位于衍射棱边的线源的场,这两条双曲线的轴分别为 $\theta + \theta_0 = \pi$ 和 $\theta - \theta_0 = \pi$. 对于入射柱面波,这些双曲线同 § 11.5.3 所讨论的与入射平面波的解有关的抛物线相对应.

最后,应注意下述事实:把 r_0, θ_0 与 r, θ 互换,(20)式不变,在这种意义上说,(20)式这个解是倒易的.当然,这是麦克斯韦方程中隐含的关于倒易性的一般定理¹⁾的一个特例:上述分析表明,§ 11.5(7)式的谱函数对 α 和 α_0 对称这一事实与此有关.

§ 11.7.2 偶极子

局域于一点的最基本的电磁波源是电偶极子或磁偶极子.有半平面存在时,偶极子问题可通过把不受扰的偶极场表示为(三维的)平面波谱并对各个平面波应用 § 11.6 的结果来求解.西尼尔(Senior)²⁾曾用这种方法处理过电偶极子的轴垂直于衍射薄片的情况,这里扼要介绍这种分析.

图 11.17 中,目前,用笛卡儿坐标 x, y, z 和柱极坐标 r, θ, z 表示其布局,其中衍射薄片占有 $y = 0, x > 0$.偶极子在 T 处,即 (x_0, y_0, z_0) 或 (r_0, θ_0, z_0) 处,使它平行于 y 轴; T' 是 T 在平面 $y = 0$ 上所成的象, R, R' 分别是从 T 和 T' 到观察点 P 的距离.

对偶极矩的大小作适当的选择,不受扰的偶极场(参看 § 2.2)就可取作

1) L. G. H. Huxley, *The Principles and Practice of Waveguides* (Cambridge University Press, 1947), §7.17.

2) T. B. A. Senior, *Quart. J. Mech. Appl. Maths.*, **6** (1953), 101. 其他方法见 A. E. Heins, *Trans. Inst. Radio Engrs.*, AP-4 (1956), 294; B. D. Woods, *Quart. J. Mech. Appl. Maths.*, **10** (1957), 90; W. E. Williams, *Quart. J. Mech. Appl. Maths.*, **10** (1957), 210.

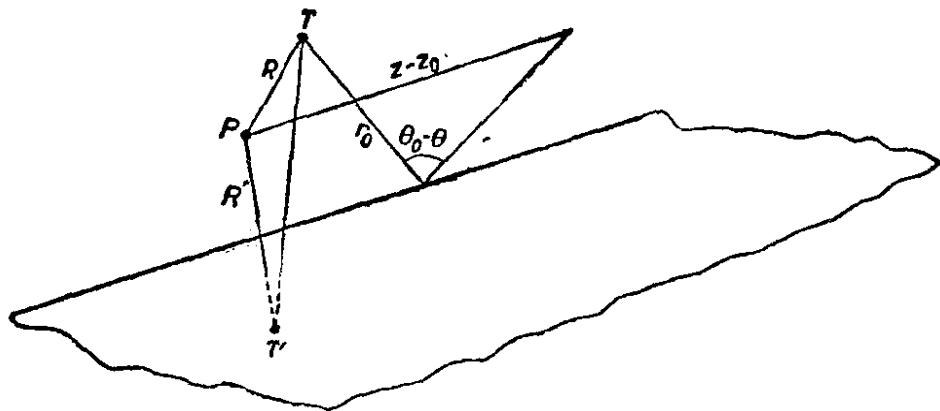


图 11.17 存在衍射的半平面时, T 处偶极子的布局

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} + k^2 \Pi, \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z} \right), \\ \mathbf{H} &= ik \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}, 0, -\frac{\partial \Pi}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (25)$$

式中

$$\Pi = \frac{e^{ikR}}{kR}. \quad (26)$$

然后, 需要将(25)式分解为平面波, 可由下述公式¹⁾得出:

$$\begin{aligned} \frac{e^{ikR}}{kR} &= \frac{i}{2\pi} \int_{S(\frac{1}{2}\pi)} \int_{S(\frac{1}{2}\pi)} \cos \beta \\ &\times e^{-ik[(x-x_0)\cos \alpha \cos \beta + (y-y_0)\sin \alpha \cos \beta - (z-z_0)\sin \beta]} d\alpha d\beta. \end{aligned} \quad (27)$$

所以, 这种方法就是在存在衍射薄片时, 写出由隐含在(27)式被积函数中的每一个平面波入射到衍射薄片上所引起的总场, 然后作积分.

考虑到以后的积分(参看 § 11.7(5) 式), 采用 § 11.5(8) 形式(E 偏振)的入射平面波的基本解与相应形式的 H 偏振的基本解是方便的. 用 § 11.6 中说明过的方法, 修改这些表达式, 以得出(27)式隐含的入射平面波所相应的三维解. 因此, \mathbf{E} 平行于偶极子的分量表示为下述形式:

$$E_y = E_y^{(g)} + E_y^{(d)}, \quad (28)$$

1) 这是对 H. Weyl. *Ann. d. Physik*, **60** (1919), 481 给出的公式的简单修改.

式中 $E_y^{(g)}$ 是几何光学场, 而

$$E_y^{(d)} = \frac{ik}{2\pi} \{ A(\theta_0) + A(-\theta_0) \} - \frac{i}{2\pi k} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial y_0} - k^2 \right) B(\theta_0) \\ + \frac{i}{2\pi k} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial y_0} + k^2 \right) B(-\theta_0), \quad (29)$$

式中

$$A(\theta_0) = \frac{ik}{2\pi} \int_{S(0)} \int_{S(\frac{1}{2}\pi)} \int_{S(0)} \cos \beta \cos \frac{1}{2} (\alpha + \gamma + \theta - \theta_0) \\ \times e^{ik(r \cos \gamma \cos \beta + r_0 \cos \alpha \cos \beta + (z - z_0) \sin \beta)} d\alpha d\beta d\gamma, \quad (30)$$

$$B(\theta_0) = \frac{ik}{2\pi} \int_{S(0)} \int_{S(\frac{1}{2}\pi)} \int_{S(0)} \cos \beta \sec \frac{1}{2} (\alpha + \gamma + \theta - \theta_0) \\ \times e^{ik(r \cos \gamma \cos \beta + r_0 \cos \alpha \cos \beta + (z - z_0) \sin \beta)} d\alpha d\beta d\gamma. \quad (31)$$

借助与卡斯洛¹⁾ 和麦克唐纳²⁾ 类似的分析, 可以证明

$$A(\theta_0) = \frac{\pi}{\sqrt{rr_0}} \cos \frac{1}{2} (\theta - \theta_0) H_0^{(1)}(kR_1), \quad (32)$$

式中

$$R_1^2 = (r + r_0)^2 + (z - z_0)^2; \quad (33)$$

$$B(\theta_0) = \pm \pi k \int_{\pm m}^{\infty} H_1^{(1)}(kR \cosh \mu) d\mu, \quad \theta - \theta_0 \leq \pi \text{ 时取+}, \quad (34)$$

$$B(-\theta_0) = \pm \pi k \int_{\pm m'}^{\infty} H_1^{(1)}(kR' \cosh \mu) d\mu, \quad \theta + \theta_0 \leq \pi \text{ 时取+}, \quad (35)$$

式中

$$m = \sinh^{-1} \left\{ 2 \frac{\sqrt{rr_0}}{R} \cos \frac{1}{2} (\theta - \theta_0) \right\}, \\ m' = \sinh^{-1} \left\{ 2 \frac{\sqrt{rr_0}}{R'} \cos \frac{1}{2} (\theta + \theta_0) \right\}. \quad (36)$$

这些结果与公式

$$\frac{1}{2} i \int_{-\infty}^{\infty} H_1^{(1)}(kR \cosh \mu) d\mu = \frac{e^{ikR}}{kR} \quad (37)$$

1) H. S. Carslaw, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **30** (1899), 121.

2) H. M. Macdonald, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **14** (1915), 410.

一起,使(28)式能写成

$$E_y = \frac{ik}{\sqrt{rr_0}} \cos \frac{1}{2} \theta \cos \frac{1}{2} \theta_0 H_0^{(1)}(kR_1) - \frac{1}{2} i \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial y_0} - k^2 \right) \mathcal{J} + \frac{1}{2} i \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial y_0} + k^2 \right) \mathcal{J}', \quad (38)$$

式中

$$\mathcal{J} = \int_{-m}^{\infty} H_1^{(1)}(kR \cosh \mu) d\mu, \quad \mathcal{J}' = \int_{-m'}^{\infty} H_1^{(1)}(kR' \cosh \mu) d\mu. \quad (39)$$

其余的场分量同样可用 \mathcal{J} 和 \mathcal{J}' 精确地表示如下:

$$E_x = - \frac{ik}{\sqrt{rr_0}} \sin \frac{1}{2} \theta \cos \frac{1}{2} \theta_0 H_0^{(1)}(kR_1) - \frac{1}{2} i \frac{\partial^2 \mathcal{J}}{\partial x \partial y_0} + \frac{1}{2} i \frac{\partial^2 \mathcal{J}'}{\partial x \partial y_0}, \quad (40)$$

$$E_z = - \frac{1}{2} i \frac{\partial^2 \mathcal{J}}{\partial z \partial y_0} + \frac{1}{2} i \frac{\partial^2 \mathcal{J}'}{\partial z \partial y_0}, \quad (41)$$

$$H_x = \frac{k(z - z_0)}{R_1 \sqrt{rr_0}} \cos \frac{1}{2} \theta \cos \frac{1}{2} \theta_0 H_1^{(1)}(kR_1) + \frac{1}{2} k \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial z_0} + \frac{1}{2} k \frac{\partial \mathcal{J}'}{\partial z_0}, \quad (42)$$

$$H_y = \frac{k(z - z_0)}{R_1 \sqrt{rr_0}} \sin \frac{1}{2} \theta \cos \frac{1}{2} \theta_0 H_1^{(1)}(kR_1), \quad (43)$$

$$H_z = - \frac{1}{2} k \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x_0} - \frac{1}{2} k \frac{\partial \mathcal{J}'}{\partial x_0}. \quad (44)$$

人们感兴趣地注意到,在完全场中, \mathbf{H} 的非零分量平行于偶极子,因此这种分析不能用单个分量赫兹矢量 (Single Component Hertz Vector)¹⁾ 表述。

在一较不重要的限制之下,还可用菲涅耳积分表示解。如果 $kR_1 \gg 1$, 则不难建立渐近逼近

1) A. E. Heins, *Quart. Appl. Maths.*, **6** (1948), 157, 和 L. A. Vainstein, *Izvestiya Akad. Nauk SSSR, Ser. Fiz. (Bull. Acad. Sci. USSR)*, **12** (1948), 144 和 166, 利用 *Schwinger* 引入的方法 (§11.1 中提到过), 最早给出了对于入射平面波的解。

$$\mathcal{J} = -\frac{2e^{\frac{1}{4}i\pi}}{k} \sqrt{\frac{2}{\pi R_1(R+R_1)}} e^{ikR} \\ \times F \left\{ -2 \sqrt{\frac{krr_0}{R+R_1}} \cos \frac{1}{2}(\theta - \theta_0) \right\}, \quad (45)$$

对 \mathcal{J}' 有类似的结果。

§ 11.8 其他问题

本节中扼要地评述其他几个衍射问题。

§ 11.8.1 两个平行的半平面

利用本章中用于单个半平面的方法, 两个平行半平面(与通过其棱边的公共平面相垂直)的衍射问题是易于处理的¹⁾.

考虑 E 偏振, 除了衍射障碍物现在由两层薄片组成以外, 其问题同 § 11.5.1 正好一样; 薄片 1 占有 $y = 0, x > 0$; 薄片 2 占有 $y = -a, x > 0$. 引入从薄片 2 的边缘 $(0, -a)$ 测量起的附加坐标 r', θ' 是方便的.

由薄片 1 和 2 中的感生电流引起的散射场可分别写成

$$E_x^{(s1)} = \int_C P_1(\cos \alpha) e^{ikr \cos(\theta \mp \alpha)} d\alpha, \quad y \geq 0 \text{ 时取 } +, \quad (1)$$

$$E_z^{(s2)} = \int_C P_2(\cos \alpha) e^{ikr' \cos(\theta' \mp \alpha)} d\alpha, \quad y \geq -a \text{ 时取 } +, \quad (2)$$

积分路线如图 11.7 所示, 取 $P_1(\mu)$ 和 $P_2(\mu)$ 在积分路线下方没有奇点, 就保证了 $H_x^{(s1)}$ 和 $H_z^{(s2)}$ 分别通过区域 $y = 0, x < 0$ 和 $y = -a, x < 0$ 时的连续性. 而且, E_s 在两块薄片上为零的边界条件导致下述积分方程:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_1(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}} e^{ikx\mu} d\mu \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_2(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}} e^{ikx\sqrt{1-\mu^2}} e^{ikx\mu} d\mu = -e^{-ikx\mu_0}, \end{aligned} \quad (3)$$

1) 参阅第 778 页注解,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_1(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}} e^{ik\mu\sqrt{1-\mu^2}} e^{ikx\mu} d\mu \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_2(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}} e^{ikx\mu} d\mu = -e^{ik\mu\sqrt{1-\mu_0^2}} e^{-ikx\mu_0}, \end{aligned} \quad (4)$$

对于 $x > 0$, 它们必须成立.

如果写成

$$P_1(\mu) + P_2(\mu) = Q_1(\mu), \quad P_1(\mu) - P_2(\mu) = Q_2(\mu), \quad (5)$$

分别将(3)和(4)式相加及相减, 对于 $x > 0$, 给出

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_1(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}} \{1 + e^{ik\mu\sqrt{1-\mu^2}}\} e^{ikx\mu} d\mu \\ & = -\{1 + e^{ik\mu\sqrt{1-\mu_0^2}}\} e^{-ikx\mu_0}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_2(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}} \{1 - e^{ik\mu\sqrt{1-\mu^2}}\} e^{ikx\mu} d\mu \\ & = -\{1 - e^{ik\mu\sqrt{1-\mu_0^2}}\} e^{-ikx\mu_0}. \end{aligned} \quad (7)$$

(6)和(7)式各自的形式都与 § 11.5(2) 式类似, 为了得出类似于 § 11.5(4) 式的解, 积分路线必须用实轴上方的无限大的半圆来闭合. 为此, 选择具有一正虚部的 $\sqrt{1-\mu^2}$ 的分枝. 于是所需的(6)式的解为

$$\begin{aligned} & \frac{Q_1(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}} \{1 + e^{ik\mu\sqrt{1-\mu^2}}\} = \frac{i}{2\pi} \{1 + e^{ik\mu\sqrt{1-\mu_0^2}}\} \\ & \times \frac{U(\mu)}{U(-\mu_0)} \frac{1}{\mu + \mu_0}, \end{aligned} \quad (8)$$

式中 $U(\mu)$ 是 μ 的任意函数, 它在积分路线上方的半平面内没有奇点, 并随着 $|\mu| \rightarrow \infty$, 它趋于零.

尚须了解应如何选择 $Q_1(\mu)$ 和 $U(\mu)$ 使之满足(8)式, 记住 $Q_1(\mu)$ 在积分路线下方没有奇点. 方法是把(8)式中 $Q_1(\mu)$ 的系数分解因子, 使成为下述形式:

$$\frac{1 + e^{ik\mu\sqrt{1-\mu^2}}}{\sqrt{1-\mu^2}} = U_1(\mu) L_1(\mu), \quad (9)$$

式中 $U_1(\mu)$ 在积分路线上方的半平面内没有奇点和零点，并且在无穷远处是代数增长的，而 $L_1(\mu)$ 在积分路线下方的半平面内具有同样特性。从维纳和霍普夫的一般理论¹⁾得知，这种因子分解是可能的，汉斯(Heins)²⁾给出了 $U_1(\mu)$ 和 $L_1(\mu)$ 的显式。因此清楚地得出

$$Q_1(\mu) = \frac{i}{2\pi} \sqrt{1 - \mu_0^2} U_1(\mu_0) \frac{1}{L_1(\mu)(\mu + \mu_0)}, \quad (10)$$

式中已援引隐含在(9)式中的关系式 $U_1(\mu) = L_1(-\mu)$ ，(除了任意常数因子外)。

同样，如果

$$\frac{1 - e^{ik\alpha\sqrt{1-\mu^2}}}{\sqrt{1 - \mu^2}} = U_2(\mu)L_2(\mu), \quad (11)$$

则有

$$Q_2(\mu) = \frac{i}{2\pi} \sqrt{1 - \mu_0^2} U_2(\mu_0) \frac{1}{L_2(\mu)(\mu + \mu_0)}. \quad (12)$$

把(1)和(2)式相加，得出总散射场。因此，例如在 $y > 0$ ，总散射场为

$$\begin{aligned} E_z^{(s)} &= \int_C \{P_1(\cos \alpha) + P_2(\cos \alpha)e^{ik\alpha \sin \alpha}\} e^{ikr \cos(\theta - \alpha)} d\alpha \\ &= \frac{1}{2} \int_C \{Q_1(\cos \alpha)(1 + e^{ik\alpha \sin \alpha}) + Q_2(\cos \alpha)(1 - e^{ik\alpha \sin \alpha})\} \\ &\quad \times e^{ikr \cos(\theta - \alpha)} d\alpha \\ &= \int_C P(\cos \alpha) e^{ikr \cos(\theta - \alpha)} d\alpha, \end{aligned} \quad (13)$$

式中

$$\begin{aligned} P(\mu) &= \frac{1}{2} \sqrt{1 - \mu^2} \{Q_1(\mu)U_1(\mu)L_1(\mu) + Q_2(\mu)U_2(\mu)L_2(\mu)\} \\ &= \frac{i}{4\pi} \frac{\sqrt{1 - \mu_0^2}\sqrt{1 - \mu^2}}{\mu + \mu_0} \{U_1(\mu_0)U_1(\mu) + U_2(\mu_0)U_2(\mu)\}. \end{aligned} \quad (14)$$

1) E. C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals* (Oxford, Clarendon Press, 1937), p. 339.

2) A. E. Heins, *Quart. Appl. Maths.*, 6 (1948), 157.

应再次记住 $P(\mu)$ 对 μ 和 μ_0 的对称性。还有，当 $a = 0$ 时， $U_1(\mu) = \sqrt{2/(1 + \mu)}$, $U_2(\mu) = 0$, 因此(14)式理所当然地化为 § 11.5(6)式。

§ 11.8.2 平行错开的半平面的无限堆垛

在这个问题¹⁾ 中，有一组无限多的衍射薄片，第 n 片占有 $y = na$, $x > nb$, 其中 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

因此，同前，对于 E 偏振的入射平面波，由第 m 块薄片中的感生电流引起的散射场可写为

$$E_z^{(sm)} = \int_C P_m(\cos \alpha) e^{-ikm(a \cos \alpha \pm b \sin \alpha)} e^{ikr \cos(\theta \mp \alpha)} d\alpha, \quad (15)$$

$y > ma$ 时用上面的符号， $y < ma$ 时用下面的符号。所有的 $P_m(\mu)$ 都必须在 $\mu = \cos \alpha$ 平面的积分路线下方没有奇点。

由第 n 块薄片上的边界条件得出下述积分方程：

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_m(\mu)}{\sqrt{1 - \mu^2}} e^{ik|n-m|\sqrt{1-\mu^2}} e^{ik(x-nb)\mu} d\mu \\ = -e^{-ikx\mu_0} e^{-ikna\sqrt{1-\mu_0^2}}, \end{aligned} \quad (16)$$

对于 $x > nb$, 上式必须成立。

根据本问题的周期性，显然

$$P_m(\mu) = P_0(\mu) e^{-ikm(b\mu_0 + a\sqrt{1-\mu_0^2})}, \quad (17)$$

并且令 $n - m = q$, 因此对于 $x > 0$, (16)式变为

$$\begin{aligned} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_0(\mu)}{\sqrt{1 - \mu^2}} e^{ikq(b\mu_0 + a\sqrt{1-\mu_0^2})} e^{ik|q|\sqrt{1-\mu^2}} e^{ik(qb+x)\mu} d\mu \\ = -e^{-ikx\mu_0}. \end{aligned} \quad (18)$$

对 q 的无限求和可写成闭合形式，又剩下的积分方程可利用柯西留数定理求解。同前一个问题一样，需要把某一函数“分解”

1) J. F. Carlson and A. E. Heins, *Quart. Appl. Maths.*, 4 (1947), 313 and 5 (1947), 82.

成一对因子，其中一个因子在上半平面内没有奇点和零点，并且在无穷远处是代数增长的，而另一个因子在下半平面内具有同样特性；在已经引用过的卡耳森（Carlson）和汉斯的论文中给出了这些因子的显式，以及进一步的细节。

§ 11.8.3 窄条

另一个有本质意义的问题是一个容易使人误解的简单问题，其中衍射障碍物是一无限长且两棱边平行的完全导电的平面窄条；或者相当于其互补“屏”为无限大平面内的一条狭缝的问题。曾经给出过不同的求解方法¹⁾ 但没有一个得出闭合形式的结果。对于正入射的平面波，曾利用对偶积分方程的办法²⁾ 按下述方式得出 ka 的幂级数解的前两项，其中 $2a$ 是窄条的宽度。

对于占有 $y = 0, |x| < a$ 的窄条，以及正入射的 H 偏振的平面波，§ 11.4(19) 和 § 11.4(20) 的积分方程为

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(\mu) e^{ikx\mu} d\mu = 1 \quad |x| < a, \quad (19)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(\mu)}{\sqrt{1 - \mu^2}} e^{ikx\mu} d\mu = 0, \quad |x| > a; \quad (20)$$

或者，因本问题的对称性意味着 $P(\mu) = P(-\mu)$ ，所以

- 1) Lord Rayleigh, *Phil. Mag.*, **43** (1897), 259 [又载于 *Scientific Papers*, **4**, 283]; K. Schwarzschild, *Math. Ann.*, **55** (1902), 177; P. M. Morse and P. J. Rubenstein, *Phys. Rev.*, **54** (1938), 895; A. Sommerfeld, *Optics* (New York, Academic Press, 1954), p. 273; B. B. Baker and E. T. Copson, *The Mathematical Theory of Huygens' Principle* (Oxford, Clarendon Press, 2nd ed., 1950), p. 117 及其后; S. Skavlem, *Arch. Math. Naturvid.*, **51** (1951), 61; E. B. Moullin and F. M. Phillips, *Proc. Inst. Elec. Engrs.*, **99** Pt. IV (1952), 137; R. Müller and K. Westpfahl, *Z. f. Phys.*, **134** (1953), 245; P. C. Clemmow, *Trans. Inst. Radio Engrs.*, AP-4 (1956), 282; S. N. Karp and A. Russek, *J. Appl. Phys.*, **27** (1956), 886; R. F. Millar, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **54** (1958), 479, 497.
- 2) E. Groschwitz and H. Hönl, *Z. f. Phys.*, **131** (1952), 305; H. Hönl and E. Zimmer, *Z. f. Phys.*, **135** (1953), 196; C. J. Tranter, *Quart. J. Mech. Appl. Maths.*, **7** (1954), 317.

$$\int_0^\infty P(\mu) \cos(kx\mu) d\mu = \frac{1}{2}, \quad |x| < a, \quad (21)$$

$$\int_0^\infty \frac{P(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}} \cos(kx\mu) d\mu = 0, \quad |x| > a. \quad (22)$$

寻找下述形式的解：

$$\frac{P(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \frac{J_{2m+1}(ka\mu)}{\mu}, \quad (23)$$

这是因为此级数每一项都满足(22)式。代入(21)式得知，待求的 c_m 必须满足

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m \Phi_m = \frac{1}{2}, \quad |x| < a, \quad (24)$$

式中

$$\Phi_m = \int_0^\infty \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu} J_{2m+1}(ka\mu) \cos(kx\mu) d\mu. \quad (25)$$

现在可以证明，对于 $|ka| \ll 1$,

$$\begin{aligned} \Phi_m &= i \int_0^\infty J_{2m+1}(ka\mu) \cos(kx\mu) d\mu + O(ka) \\ &= \frac{i \cos \left[(2m+1) \sin^{-1} \frac{x}{a} \right]}{ka \sqrt{1-x^2/a^2}} + O(ka); \end{aligned} \quad (26)$$

由此，到一级近似，(24)式为

$$\frac{i}{\sqrt{1-x^2/a^2}} \sum_{m=0}^{\infty} c_m \cos \left[(2m+1) \sin^{-1} \frac{x}{a} \right] = \frac{1}{2} ka, \quad (27)$$

给出

$$c_0 = \frac{ka}{2i}, \quad c_m = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (28)$$

因此，到一级近似，有

$$\frac{P(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}} = \frac{ka}{2i} \frac{J_1(ka\mu)}{\mu}, \quad (29)$$

而由 § 11.4(16) 式导出的电流密度为

$$J_x(x) = \frac{ck}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{J_1(ka\mu)}{\mu} \cos(kx\mu) d\mu = \frac{ck}{2\pi i} \sqrt{1 - x^2/a^2}. \quad (30)$$

下一级近似包含 $(ka)^3$ 的项, 更加复杂得多了。几位作者¹⁾ 已独立地得出它的同样表达式。

§ 11.8.4 某些进一步的问题

还有一些其他的感兴趣的问题, 与我们已讨论过的那些类似, 它们能求解, 但这里只能简单提及。

很多年以前²⁾ 已解过二维楔形物的衍射, 当外楔角为 2π 时, 楔就化为半平面。它含有周期为 $2\pi/n$ 的角谱, 其中 π/n 是外楔角。

汉森 (Hanson)³⁾ 最早考虑过位于两种不同的均匀媒质界平面的半平面问题。它用本章的方法是容易处理的, 并已应用于⁴⁾ 地球表面上无线电波传播理论。

在偏离理想化条件下的半平面效应, 已构成两项研究成果。第一项中⁵⁾, 引入有限的然而很大的电导率, 它需要采用近似的边界条件; 第二项中⁶⁾, 假定金属板是完全导电的, 但具有有限的然而很薄的厚度。

§ 11.9 解的唯一性

在 § 11.2 中已经看到, 我们考虑过的一般衍射问题可表述为下述形式: 给定一个入射到完全导电表面 S 上的场 $\mathbf{E}^{(i)}$, 求一个

1) R. Müller and K. Westpfahl, *Z. f. Phys.*, **134** (1953), 245; C. J. Tranter, *Quart. J. Mech. Appl. Maths.*, **7** (1954), 317. 又见 C. J. Bouwkamp, *Rep. Progr. Phys.* (London, Physical Society), **17** (1954), 73.

2) H. M. Macdonald, *Electric Waves* (Cambridge University Press, 1902); H. S. Carslaw, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **18** (1919), 291.

3) E. T. Hanson, *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, **237** (1938), 35.

4) P. C. Clemmow, *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, **246** (1953), 1.

5) T. B. Senior, *Proc. Roy. Soc. A*, **213** (1952), 436.

6) D. S. Jones, *Proc. Roy. Soc. A*, **217** (1953), 153.

能由 S 中电流分布引起的场 $\mathbf{E}^{(s)}$, 并使它在 S 上的切向分量是 $\mathbf{E}^{(i)}$ 相应切向分量的负值.

当然, 用公式表示应得出唯一解¹⁾, 这是不可缺少的, 但证明实际上不能多于一个场 $\mathbf{E}^{(s)}$ 满足上述条件, 决不是一件简单的事情, 特别是考虑到 S 是无限的以及场由许多平面波组成的可能性时更是如此. 仅到了较近代, 看来才满意地建立了这一结果²⁾, 虽然它曾长期被默认.

进一步的困难出现在一类特殊的然而最普通的衍射问题里, 其中障碍物可假定具有无限锐的棱边, 而本章的讨论确实已作此限制. 附加的复杂性的原因在于, 如前所见, 这时解包含一个在棱边处的奇点, 因而违反了刚才提到的唯一性证明所必需的一个假定.

很容易看出, 如果容许一个任意的棱边奇点, 则通过微分法³⁾ 可得出解的无限序列. 例如, 半平面问题的 E 偏振解 § 11.5(22) 式对 x 求微商, 给出一个本质上是新的表达式, 它也满足波动方程, 并且在屏上为零; 或者, 再把 § 11.5(22) 式对 y 求微商得出一个表达式, 它显然满足 H 偏振的解, 但它不同于 § 11.5(44) 式.

每一次微分, 在衍射棱边处引入一个更高阶的奇点, 显然为了保证唯一性, 必须在奇点的性质上规定某种限制. 适当的限制及可能表述这种限制的不同方法曾经是一些论文⁴⁾ 的课题. 读者欲知其详, 须参考这些论文, 但一般可以说, 应取包含可能的最低阶

1) 确定解的存在恐怕较不重要, 因为在任一特殊情况下找到了一个解时, 这个问题就解决了. 但可参看 C. Müller, *Math. Ann.*, **123** (1951), 345, 和 W. K. Saunders, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **38** (1952), 342.

2) F. Rellich, *Jahr. Deut. Math. Ver.*, **53** (1943), 57. 见 A. Sommerfeld, *Partial Differential Equations in Physics* (New York, Academic Press, 1949), § 28 中的说明. W. K. Saunders, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **38** (1952), 342.

3) C. J. Bouwkamp, *Physica*, **12** (1946), 467.

4) J. Meixner, *Ann. d. Physik*, **6** (1949), 1; A. W. Maue, *Z. f. Phys.*, **126** (1949), 601; E. T. Copson, *Proc. Roy. Soc. A*, **202** (1950), 277; D. S. Jones, *Quart. J. Mech. Appl. Maths.*, **3** (1950), 420; A. E. Heins and S. Silver, *Proc Camb. Phil. Soc.*, **51** (1955), 149; 同上, **54** (1958), 131.

奇点的解来代表物理问题的答案，事实上，这就排除了在衍射棱边随着 $r \rightarrow 0$ 有大于 $r^{-\frac{1}{2}}$ 阶的任何奇点。尤其是，可以确定，解是唯一的就意味着感生电流在整个衍射表面上是可积分的，并且它垂直于棱边的分量在棱边处为零。 **E** 和 **H** 各分量在棱边附近的性质可以从这些条件导出。

最后，人们会问，既然已看到无限多个“解”的可能性，为什么本章所用的方法显然只得出唯一解，而且它被上述判据断定为正确的解。答案是因为假定在衍射屏平面内的场分量可表示为收敛的傅里叶积分；这就避免了它们具有过于高阶的奇点。

第十二章 光被超声波衍射

第一章和第二章中曾看到，电磁波的传播既可用麦克斯韦方程并补充以物质方程来研究，也可借助于某些利用媒质偏振性质的积分方程来研究。特别是，这两种方法中任何一种也都可用来研究光通过其密度取决于空间坐标和时间的媒质的传播。虽然前一种方法过去曾广泛地应用，但后一种方法仅在近年来才应用于这类研究。本章中，我们将把积分方程法应用于被超声波通过所扰动的透明均匀媒质对光的衍射问题。不过，首先给出这种衍射现象的定性描述，并在麦克斯韦微分方程的基础上给出关于这个问题的理论工作概要，将是有用的。

§ 12.1 现象的定性描述和基于麦克斯韦 微分方程的理论概要

§ 12.1.1 现象的定性描述

超声波是一种其频率高于人耳正常能听到频率的声波。实验室中产生的超声波角频率约为 10^5 秒 $^{-1}$ 至 3×10^9 秒 $^{-1}$ ，前一值代表人耳能听到的极限。相应波长 Λ 的范围，当然取决于这些波在它们所通过的媒质中的速度 v 。例如，在水中， $v = 1.2 \times 10^5$ 厘米/秒，与上述频率范围相应的波长范围是 $\Lambda = 7.5$ 厘米至 2.5×10^{-4} 厘米¹⁾。

1921 年，布里渊²⁾ 曾预言，有短波长的压缩波横向通过的液体被可见光辐照时，会产生类似于光栅产生的衍射现象。为了理

1) 超声波的产生方法及其多种应用，例如参看 L. Bergmann, *Der Ultraschall* (Zürich, Hirzel, 1954).

2) L. Brillouin, *Ann. de Physique*, 17 (1921), 103.

解这种现象，考虑位于两个无限大的平面 $y = 0$ 和 $y = d$ 之间的液体，并令波长为 Λ 的平面压缩波沿正 x 方向通过它，这就引起了物质沿 x 轴周期性地分层，两个相邻的密度为极大值的平面之间的距离为 Λ 。

设入射的单色平面光波在媒质中的角频率为 ω ，波长为 λ ，其波法线位于 xy 平面并与 y 轴成 $\bar{\theta}$ 角（见图 12.1）。又设 ϕ 表示衍射光线与 y 轴的夹角。因为压缩波的速度 v 总是比光速小得很多，所以作为一级近似，可以认为物质所分层次是稳定的。因此，具有可观强度的方向 ϕ 由下述条件决定，即来自相距为 Λ 的两相邻平面的光线之间的光程差应为 λ 的整数倍。这个条件给出了 $\lambda, \bar{\theta}$ 与衍射光谱中不同序的波传播方向 ϕ_l 之间的关系：

$$BC - AD = \Lambda(\sin \phi_l - \sin \bar{\theta}) = l\lambda (l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (1)$$

AB 和 CD 分别是与折射光线和衍射光线对应的波阵面一部分。用在媒质外部的角 θ 和 ϕ 及波长 λ 来改写(1)式是很方便的。如果在(1)式中应用折射定律

$$\frac{\sin \bar{\theta}}{\sin \theta} = \frac{\sin \phi}{\sin \phi_l} = \frac{\lambda}{\lambda},$$

则得出

$$\Lambda(\sin \phi_l - \sin \theta) = l\lambda \quad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (2)$$

由(2)式，对于相邻两序之间的角分离，有

$$\sin \phi_l - \sin \phi_{l-1} \approx \phi_l - \phi_{l-1} = \frac{\lambda}{\Lambda}.$$

因此，对于给定的 λ ，角分离随着 Λ 的增加而减小。如果 Λ 足够大，则各主线将彼此靠近到一起以致观察仪器分辨不出来，由于这个原因，当普通的声波被可见光辐照时，观察不到衍射效应。

在布里渊预言后约过了十年，德拜和席尔斯 (Sears)¹⁾ 以及卢卡斯 (Lucas) 和比夸特 (Biquard)²⁾ 分别独立地观察到光被超声波衍射。从那时起，很多研究工作者在改变下述一个或多个物理

1) P. Debye and F. W. Sears, *Proc. Nat. Acad. Sci., Wash.*, **18** (1932), 409.

2) R. Lucas and P. Biquard, *J. Phys. Radium*, **3** (1932), 464.

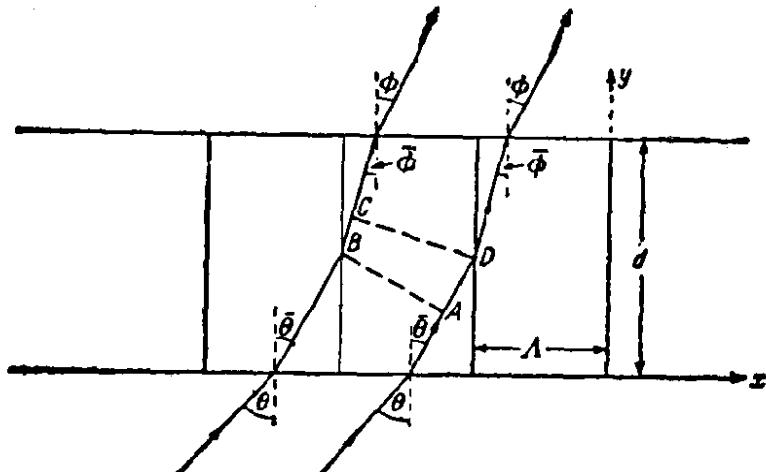


图 12.1 作为衍射光栅的超声波

量而得出的各种实验条件下研究过这种现象: (a) 入射角 θ , (b) 超声波的波长 A , (c) 入射光的波长 λ , (d) 超声波的振幅, (e) 超声束的宽度 d .

当然, 屏上各序的位置及其数目与相对强度, 均取决于这些因子中的一个或多个¹⁾. 图 12.3 (811 页) 示出在一种典型情况下, 对于不同的人射角 θ , 在透射束两侧出现的序数. 通常用于研究衍射光谱的实验装置如图 12.2 所示.

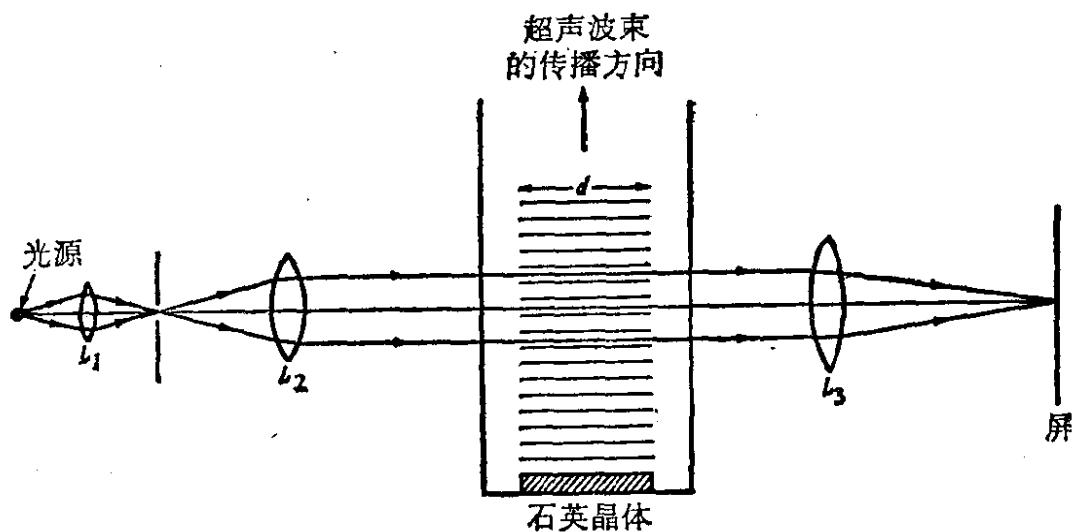


图 12.2 观察光被超声波衍射的实验装置

1) 衍射光谱对这些因子的依赖关系的半定量讨论, 见 G. W. Willard, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 21 (1949), 101.

至此, 定义本章所惯用的某些符号和记号是合宜的.

媒质的分子(原子)数密度用 $N(\mathbf{r}, t)$ 表示. 对于被一个沿正 \mathbf{x} 方向传播的平面压缩波横向通过的各向同性均匀媒质, $N(\mathbf{r}, t)$ 可写成下述形式¹⁾:

$$N(\mathbf{r}, t) = N_0[1 + \Delta \cos(Kx - Qt)], \quad (3)$$

式中 N_0 是媒质的平均分子数密度, $N_0\Delta$ (通常约为 $10^{-4}N_0$) 是压缩波的振幅, $K = 2\pi/\Lambda$ 是它的波数(波矢的大小), $Q = Kv$ 是超声扰动的角频率. 在这样的一种媒质中, 介电常数 ϵ 也是空间和时间坐标的函数; 其依赖关系可假定为下述形式:

$$\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_1 \cos(Kx - Qt). \quad (4)$$

当然, ϵ_1 和 Δ 之间存在关系, 可写成

$$\epsilon_1 = \gamma \Delta. \quad (5)$$

如果我们假定洛伦兹-洛伦茨定律(参看 § 2.3(17) 式)

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \cdot \frac{1}{N} = \text{常数}, \quad (6)$$

对(6)式的对数求微分, 并记住 Δ 和 ϵ_1/ϵ_0 两者都比 1 小很多, 则得出

$$\epsilon_1 \left[\frac{1}{\epsilon_0 - 1} - \frac{1}{\epsilon_0 + 2} \right] - \frac{N_0 \Delta}{N_0} = 0,$$

或

$$\gamma = \frac{1}{3} (\epsilon_0 - 1)(\epsilon_0 + 2); \quad (7)$$

对于大多数液体, γ 的数量级为 1.

又令

1) 为了简单起见, 我们只涉及平面前进超声波. 光被驻波衍射也曾在实验上研究过(参看 Bergmann, 上述引文); 理论的相应推广是简单易懂的.

应当注意, 完全平面超声波在实验上是难以产生的; 不过, 一般地说, 经过线度远远大于 Λ 的区域, 就有可能把波阵面看成是平面.

$$\left. \begin{aligned} n &= \sqrt{\epsilon_0}, & k &= \frac{2\pi}{\lambda}, & \bar{k} &= nk, \\ \delta &= \frac{\Delta\Lambda^2}{\lambda^2}, & \xi &= \frac{\Lambda}{\lambda} \sin \theta, & \beta &= \frac{\pi\lambda}{n\Lambda^2}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

最后, 角 θ, ϕ 等都是从正 y 方向顺时针量度到光前进方向的(参看图 12.1). 可以假定 $0 \leq \theta < \pi/2$.

§ 12.1.2 基于麦克斯韦方程的理论概要

在没有电流和电荷的区域内, 对于一种非磁性, 不导电且其介电常数 ϵ 可能是空间和时间坐标函数的媒质, 麦克斯韦方程为

$$\operatorname{curl} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{curl} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (9a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0. \quad (9b)$$

从(9a)式中消去 \mathbf{H} , 并利用关系式 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$, $\operatorname{curl} \operatorname{curl} = -\nabla^2 + \operatorname{grad} \operatorname{div}$, 得出

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon \mathbf{E}) = \nabla^2 \mathbf{E} + \operatorname{grad} (\mathbf{E} \cdot \operatorname{grad} \log \epsilon). \quad (10)$$

如果现在利用(4)式, 并把 \mathbf{E} 看成是波长 $\bar{\lambda} \sim \lambda/n$ 的若干个平面波的叠加, 则可求出(10)式右边第二项数量级为 $\epsilon_1(\lambda/\Lambda)$ 与第一项的积. 因为在通常的实验条件下, ϵ_1 和 λ/Λ 两者都远小于 1, 所以可略去(10)式中这一项而得出

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon \mathbf{E}) = \nabla^2 \mathbf{E}. \quad (11)$$

现在, 考虑图 12.1 中说明的物理情况, 并设入射的单色平面电磁波是线偏振的, 其电矢量垂直于入射平面(E 偏振), 即沿着 z 轴. 于是, 由上述讨论得出, 在媒质内部, \mathbf{E} 的 E_x 和 E_y 分量都是数量级为 $\epsilon_1(\lambda/\Lambda)$ 与 E_z 的积的很小的量, 因此可以略去. 结果 E_x 和 E_y 在媒质外也可略去.

根据问题的对称性, 显然, E_z 应与 z 坐标无关; 因此, 利用(4)和(11)式得出 E_z 的方程为:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \left[\epsilon_0 + \frac{1}{2} \epsilon_1 \times (e^{i(Kx-\Omega t)} + e^{-i(Kx-\Omega t)}) \right] E_z \right\} = 0. \quad (12)$$

为了解出(12)式,假定 E_z 的形式为

$$E_z = \sum_l V_l(y) e^{i[(k \sin \theta + lK)x - (\omega + l\Omega)t]}, \quad (13)$$

式中求和是对 l 的全部整数(正,负和零)值.

把(13)式代入(12)式,并使各指数的系数等于零,就得出 $V_l(y)$ 的下述递推关系:

$$\begin{aligned} V_l''(y) + \{ \epsilon_0 c^{-2} (\omega + l\Omega)^2 - (k \sin \theta + lK)^2 \} V_l(y) \\ = -\frac{1}{2} \epsilon_1 c^{-2} (\omega + l\Omega)^2 \{ V_{l-1}(y) + V_{l+1}(y) \}, \\ (l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \end{aligned} \quad (14)$$

式中 $V_l(y)$ 上的一撇表示对 y 的微商. 这些方程必须在下述边界条件¹⁾下求解:

$$\left. \begin{array}{l} V_0(0) = B, \quad \text{入射光波的振幅} \\ \text{和} \\ V_l(0) = 0, \quad \text{对所有 } l \neq 0. \end{array} \right\} \quad (15)$$

在解(14)式之前,我们注意到(13)式代表频率 $\omega_l = \omega + l\Omega$ ($l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 的波的叠加. 而且,对于频率为 ω_l 的波,波矢的 x 分量为 $k \sin \theta + lK$. 因此,频率为 ω_l 的波离开散射媒质后与 y 轴夹角 ϕ_l 的正弦由下式给出:

$$\begin{aligned} \sin \phi_l &= \frac{c(k \sin \theta + lK)}{\omega + l\Omega} \\ &\sim \sin \theta + l \frac{\lambda}{\Lambda}, \quad \text{因 } \frac{\Omega}{\omega} \ll 1, \end{aligned} \quad (16)$$

与(2)式相符. 而且,特定的 l 序的强度可取为 $|V_l(d)|^2$.

1) 当然,这些边界条件仅当反射波的强度可略去时才是正确的; 在现在的问题中正是如此,因为要使衍射波的振幅可以看得出来,入射角 θ 至多约为 3° (又见 § 12.2.4).

首先通过假定 $|V_0| \gg |V_{\pm 1}| \gg |V_{\pm 2}| \cdots$ 来解(14)式。记住只须考虑(14)式的那些相应于沿 y 增加方向传播的光波的解，我们可以令(14)式中除 V_0 外所有的 V_l 都等于零，并利用(15)式，则作为一级近似，有

$$V_0^{(0)}(y) = B e^{i \sqrt{\varepsilon_0 - \sin^2 \theta} k y} + O(\delta^2). \quad (17)$$

同样，令(14)式中除 $V_{\pm 1}$ 和 V_0 外所有的 V_l 都等于零，则经简单计算后得出，

$$V_{\pm 1}(y) = \frac{1}{4} \gamma \delta \frac{1 - e^{-2i\beta(\xi \pm \frac{1}{2})y}}{\xi \pm \frac{1}{2}} V_0^{(0)}(y). \quad (18)$$

这里也用到了(5)和(8)式。如果现在对于 $l = 0$ 和 $l = \pm 2$ ，将(18)式代入(14)式，则得出 $V_0^{(0)}(y)$ 的校正项和 $V_{\pm 2}(y)$ 的表达式；在这级近似下，两者都正比于 δ^2 。用这种方法，就得到了任一 l 序强度的具有 δ 的升幂级数形式的表达式。布里渊¹⁾最早导出了用这样的幂级数表示的解，他用了比这里介绍的稍为复杂的分析，而戴维(David)²⁾仿照上述方法，假定更高序的强度可略去而给出了第一序和第二序谱线强度的显式。后者的公式见§ 12.2.5 [(38)式]。

如果 $\delta \ll 1$ 或 $\delta/\xi \ll 1$ ，则布里渊的近似(以及戴维的近似)是合宜的，因为这时逐次逼近法和幂级数都很快地收敛。当满足这些条件时，显然只有前几序具有可觉察的强度。

喇曼和纳斯(Nath)³⁾最早给出了关于许多序同时出现的解

- 1) L. Brillouin, *La Diffraction de la Lumière par des Ultrasons* (Paris, Hermann, 1933).
- 2) E. David, *Phys. Z.*, **38** (1937), 587.
- 3) C. V. Raman and N. S. N. Nath, *Proc. Ind. Acad. Sci. A*, **2** (1935), 406, 413; 同上, **3** (1936), 75, 119.

不妨提及，喇曼和纳斯在他们头两篇论文(上述引文)中，仿照瑞利关于位相光栅的研究工作(*Proc. Roy. Soc. A*, **79** (1907), 399)，发现衍射波的振幅可用贝塞耳函数表示。这种方法只考虑平面光波横向通过超声束时光波位相的变化。

释,以及它们强度的近似表达式. 他们解(14)式的方法如下. 在(14)式中令

$$V_l(y) = e^{\frac{1}{2}il\pi} e^{i\bar{k}(\cos\theta)y} U_l(y), \quad (19)$$

记住 $\Omega/\omega \sim 10^{-5}$ 或更小, $\bar{k} = nk$ 和 $k \sin \theta = \bar{k} \sin \bar{\theta}$, 就得到 $U_l(y)$ 的下述递推关系:

$$\begin{aligned} U_l''(y) + 2i\bar{k} \cos \bar{\theta} U_l'(y) - (2l\bar{k}K \sin \bar{\theta} + l^2 K^2) U_l(y) \\ + \frac{1}{2} i(\bar{k})^2 \varepsilon_1 \varepsilon_0^{-1} [U_{l+1}(y) - U_{l-1}(y)] = 0, \\ (l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned} \quad (20)$$

引入一个新变量

$$\chi = \frac{1}{2} y \bar{k} \varepsilon_1 \varepsilon_0^{-1} \sec \bar{\theta},$$

(20)式变为

$$\begin{aligned} 2U_l'(\chi) + U_{l+1}(\chi) - U_{l-1}(\chi) &= \left(\frac{1}{2} i \varepsilon_0^{-1} \varepsilon_1 \right) \sec^2 \bar{\theta} U_l''(\chi) \\ &- 2i\varepsilon_0 \varepsilon_1^{-1} \{ 2lK(\bar{k})^{-1} \sin \bar{\theta} + l^2 K^2(\bar{k})^{-2} \} U_l(\chi), \end{aligned} \quad (21)$$

式中 U 上的一撇表示对 χ 的微商. 因 $\lambda/d \ll 1$, 所以右边第一项通常约为 $\varepsilon_1 U$, 即 $10^{-4}U$, 从而可以略去. 此外, 如果仿照喇曼和纳斯的方法, 令第二项也等于零, 则所得到的方程组是被整数阶贝塞耳函数满足的递推关系¹⁾. 利用边界条件(15), 第 l 序波的强度的表达式为 $B^2 J_l^2 \left(\frac{1}{2} \varepsilon_1 \varepsilon_0^{-1} \bar{k} d \sec \bar{\theta} \right)$.

注意到喇曼和纳斯所作的近似, 实质上是对所有的 l 都略去 l^2/δ 和 l_5/δ . 因此, 如果 δ 与 1 相比足够大, 则这种近似对于较低序的强度是很好的近似. 然而贝塞耳函数表达式过高估计了较高序的强度. 这已被埃克斯托曼 (Extermann) 和瓦尼耳 (Wannier)²⁾ 对参量 δ 的三个值作强度数值计算证明过. 在这些作者的工作

1) 例如, 见 E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis* (Cambridge University Press, 4th ed., 1946), p. 360.

2) R. Extermann and G. Wannier, *Helv. Phys. Acta*, 9 (1936), 520.

中，(12)式的解最终是由本质上类似于下一节的(18)和(19)这样的方程确定的。

最后讲一下，纳斯¹⁾ 和阿加瓦 (Aggarwal)²⁾ 曾得出(21)式具有 $1/\delta$ 的升幂级数形式的解；这些级数由于收敛很慢，看来只有相当有限的适用范围。瓦格纳 (Wagner)³⁾ 给出了另一种基于麦克斯韦方程的处理方法，其中衍射作为边值问题来处理。

§ 12.2 用积分方程法处理光被超声波衍射

§ 2.4 中曾经指出，有效电场 $\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t)$ 的积分方程 § 2.4(4) 和 \mathbf{H}' 的伴随公式 § 2.4(5)，与各向同性非磁性物质的麦克斯韦方程等效。那里曾假定媒质的密度与时间无关，但不难推广到包括它依赖于时间的更一般的情况。目前，假定媒质为非磁性和不导电的。

记住积分方程法的主要内容是，物质对电磁波传播的影响与真空中放入电偶极子的效果等价，在其线度远小于 λ 的任一物理上无限小的体积元⁴⁾ $d\mathbf{r}'$ 内感生的偶极矩，与作用在其上的场 $\mathbf{E}'(\mathbf{r}', t)$ 以及该体积内的分子(原子)数成正比。与这样一个在 \mathbf{r}' 处的偶极子相联系的赫兹矢量为

$$\mathbf{P}_e = \alpha N \left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c} \right) \frac{\mathbf{E}'(t - R/c, \mathbf{r}')}{R} d\mathbf{r}',$$

时刻 t 在点 \mathbf{r} 处的场可用

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \text{grad div}$$

对上式作运算导出 (参看 § 2.2(43)式)。这里各个符号具有同

1) N. S. N. Nath, *Proc. Ind. Acad. Sci.*, A, 4 (1936), 222; 同上, A, 8 (1938), 499.

2) R. R. Aggarwal, 印度德里大学哲学博士论文 (1954).

3) E. H. Wagner, *Z. f. Phys.*, 141 (1955), 604, 622.

4) 对于光学波长，几乎总可选取这样的体积元，即比单个原子(分子)的体积大很多但其线度却比 λ 小很多的体积元。

§ 2.4 中一样的意义；因此 $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ ，而算符 grad div 作用在变量 $\mathbf{r}(x, y, z)$ 上。然后通过类似于导出 § 2.4(4) 式的论证，就得出媒质内部 \mathbf{E}' 的下述积分方程¹⁾：

$$\begin{aligned}\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = & \mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r}, t) + \alpha \iiint \left\{ -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \text{grad div} \right\} \\ & \left\{ N \left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c} \right) \frac{\mathbf{E}' \left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c} \right)}{R} \right\} d\mathbf{r}'.\end{aligned}\quad (1)$$

同 § 2.4(4) 式中一样，积分遍及全部媒质，除了被观察点 $\mathbf{r}(x, y, z)$ 处的原子占有的一个很小的区域外。

这就是该理论的基本积分方程。当解出媒质内部所有各点处的 \mathbf{E}' 时，媒质之外的场可把入射场 $\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r}, t)$ 和偶极场 $\mathbf{E}^{(d)}(\mathbf{r}, t)$ 加在一起算出，后者由(1)式中的积分给出，但现在积分要扩展到遍及全部媒质。应当注意到，与通常的建立媒质和真空中的麦克斯韦方程的方法不同，这种对于光通过媒质传播的处理避免了明显引入折射表面处的边界条件，而代之以在遍及全部媒质的积分过程中引入媒质的尺寸大小。而且，在麦克斯韦方程中，媒质密度的变化是通过它对介电常数 ϵ 的影响来考虑的，而在积分方程(1)中，密度函数 $N(\mathbf{r}, t)$ 是明显出现的。

(1)式仅在某些限制条件下才成立。首先，每个分子的极化率 α 一般依赖于 \mathbf{E}' 的频率，因此 \mathbf{E}' 应是严格单色的。不过，如果不太靠近色散频率， α 随外场频率的变化是很小的。因此，只要 \mathbf{E}' 的所有成分的频率彼此接近，就仍然可用(1)式。即使入射场 $\mathbf{E}^{(i)}$ 是严格单色的，当 $N(\mathbf{r}, t)$ 由于热骚动或其他某种无序的原因而依赖于时间时，作用于一个分子上并产生偶极子的那个场 \mathbf{E}' 也不一定是单色的；其频率的展开取决于 $N(\mathbf{r}, t)$ 随时间的变化。因

1) (1)式与 § 2.4(4) 式的区别在于后者中的算符 curl curl 已被 $\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \text{grad div} \right)$ 所代替，并且现在依赖于空间和时间坐标的密度 N ，正如 \mathbf{E}' 一样，也必须取在推迟时间 $t - R/c$ 。

此,仅当 N 随时间的变化比 $\mathbf{E}^{(i)}$ 随时间的变化慢得多时,才能安心地应用(1)式¹⁾. 幸而这一限制并不严重,因为所要求的条件在光的散射和衍射问题中几乎总是满足的.

再者,我们已取 α 为标量,这一假定对于原子和具有特殊对称性的分子是完全合理的,而且如 § 2.3 所述,只要分子无规取向时,这一假定也更一般地成立. 最后,这里已假定光被媒质吸收可以忽略;它可以容许 α 为复值来考虑.

现在将仿效巴蒂亚 (Bhatia) 和诺布耳 (Noble)²⁾ 的分析,把积分方程法应用于被超声波横向通过的流体对光的衍射问题.

§ 12.2.1 \mathbf{E} 偏振的积分方程

让我们再次考虑 § 12.1.1 中所描述的物理情况,并假定入射光是线偏振的,其电矢量垂直于入射平面;因此,入射光波的电矢量 $\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r}, t)$ 的各个分量为(实部照常代表物理量),

$$\left. \begin{aligned} E_x^{(i)} &= E_y^{(i)} = 0, \\ E_z^{(i)} &= B e^{i(kx \sin \theta + ky \cos \theta - \omega t)}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

根据 789 页中所作的论证,可以推断,这时在媒质内部的有效场 $\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t)$ 将几乎平行于 z 轴,因此可以假定 $E'_x = E'_y = 0$,而 \mathbf{E}' 的矢量积分方程(1)就化为 E'_z 的单个积分方程. 记住 $N(\mathbf{r}, t)$ 现在是由 § 12.1(3) 式给出的,就可以把 E'_z 的积分方程写成下述形式:

$$\begin{aligned} E'_z(\mathbf{r}, t) = B e^{i(kx \sin \theta + ky \cos \theta - \omega t)} &+ \frac{\tau_0}{4\pi} \iiint \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \\ &\times \left[\frac{1}{R} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \Delta (e^{i[Kx' - Q(t-R/c)]} + e^{-i[Kx' - Q(t-R/c)]}) \right\} \right. \\ &\left. \times E'_z \left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c} \right) \right] d\mathbf{r}', \end{aligned} \quad (3)$$

1) 对于非均匀媒质,在麦克斯韦方程中应用关系式 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, 实际上也仅在与 N 同样的限制下才是合理的.

2) W. J. Noble, 爱丁堡 (Edinburgh) 大学哲学博士论文(1952); A. B. Bhatia and W. J. Noble, Proc. Roy. Soc., A, 220 (1953), 356, 369.

式中,为了方便起见,已引入¹⁾

$$4\pi N_0 \alpha = \tau_0.$$

由 § 2.3(17) 式得出

$$\tau_0 = \frac{3(n^2 - 1)}{n^2 + 2}. \quad (4)$$

§ 12.2.2 积分方程的试探解

因为所有垂直于 z 轴的平面在物理上都是等效的, 所以我们把下式取作积分方程(3)的试探解²⁾:

$$E'_z = \sum_{l,m} N_{lm} e^{-i(\omega_{lm} t - p_l x - q_m y)}, \quad (5)$$

式中 l 和 m 都是整数(正, 负和零). 看来(5)式代表双无限的平面波束; 可以设想这种形式的可能解, 是由于预料到在具有平行平面表面的分层媒质的一无限大的厚层中多次反射和折射的结果. 马上将看到, 各个未知量 N_{lm} , ω_{lm} , p_l 和 q_m 可由(5)式满足积分方程(3)的条件确定.

为了解出(3)式, 必须计算积分 $\mathcal{J}(\omega, p, q)$, 其定义为

$$\begin{aligned} & \mathcal{J}(\omega, p, q) \times e^{-i(\omega t - px - qy)} \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint_{V'} \left[-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \frac{e^{-i[\omega(t-R/c) - px' - qy']}}{R} dx' dy' dz' \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint_{V'} e^{-i(\omega t - px' - qy')} \left\{ \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} \frac{e^{i\omega R/c}}{R} dx' dy' dz', \end{aligned} \quad (6)$$

式中 $\omega^2 > c^2 p^2$. 如果观察点 x, y, z 在散射媒质之外, 则体积 V' 遍及全部媒质 ($-\infty < x' < \infty$, $0 \leq y' \leq d$, $-\infty < z' < \infty$). 如果观察点在散射媒质内部, 则积分遍及同一体积, 除了围绕观察点的半径为 a (最后取极限 $a \rightarrow 0$) 的小球以外. 令

$$x_1 = x' - x, \quad y_1 = y' - y, \quad z_1 = z' - z,$$

1) 宏观量 $\tau(r, t) = 4\pi\alpha N(r, t)$, 有时称为媒质的散射指数 (scattering index).

2) 振幅 N_{lm} 和分子数密度 $N(r, t)$ 之间不会出现混淆, 因为从这里起后一个量不在我们的方程中明显出现.

(6)式两边消去因子 $e^{-i\omega t}$ 以后, 可写成下述形式:

$$\mathcal{J}(\omega, p, q) = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2, \quad (7)$$

式中

$$\mathcal{J}_1 = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_1} \left\{ e^{i(px_1 + qy_1)} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \left(\frac{e^{i\omega R/c}}{R} \right) \right\} dx_1 dy_1 dz_1, \quad (8)$$

$$\mathcal{J}_2 = \frac{1}{4\pi} \frac{\omega^2}{c^2} \iiint_{V_1} \left\{ e^{i(px_1 + qy_1)} \left(\frac{e^{i\omega R/c}}{R} \right) \right\} dx_1 dy_1 dz_1, \quad (9)$$

现在, 散射媒质扩展到遍及体积 V_1 : $-\infty < x_1 < \infty$, $-y \leq y_1 \leq d - y$, $-\infty < z_1 < \infty$. 在附录 9 中计算了这些积分, 给出

(a) 当 (x, y, z) 位于散射媒质内部时¹⁾

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\omega, p, q) = & \frac{1}{\sigma(\omega, p, q)} - \frac{\omega^2}{2c^2} \frac{\exp\{-ig(\omega, p, q)y\}}{g(\omega, p, q)[\omega^2 c^{-2} - p^2]^{1/2}} \\ & + \frac{\omega^2}{2c^2} \frac{\exp\{-ih(\omega, p, q)(y - d)\}}{h(\omega, p, q)[\omega^2 c^{-2} - p^2]^{1/2}}; \end{aligned} \quad (10a)$$

(b) 当 (x, y, z) 位于散射媒质之后时,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\omega, p, q) = & \frac{\omega^2 \exp[-ig(\omega, p, q)y]}{2c^2 g(\omega, p, q)[\omega^2 c^{-2} - p^2]^{1/2}} \\ & \times (\exp[ig(\omega, p, q)d] - 1); \end{aligned} \quad (10b)$$

(c) 当 (x, y, z) 位于散射媒质之前时 (即在入射光同一侧),

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\omega, p, q) = & \frac{\omega^2 \exp[-ih(\omega, p, q)y]}{2c^2 h(\omega, p, q)[\omega^2 c^{-2} - p^2]^{1/2}} \\ & \times (\exp[ih(\omega, p, q)d] - 1). \end{aligned} \quad (10c)$$

在这些表达式中,

$$\left. \begin{aligned} \sigma(\omega, p, q) &= 3(p^2 + q^2 - \omega^2 c^{-2})(p^2 + q^2 + 2\omega^2 c^{-2})^{-1}, \\ g(\omega, p, q) &= q - [\omega^2 c^{-2} - p^2]^{1/2}, \\ h(\omega, p, q) &= q + [\omega^2 c^{-2} - p^2]^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

如果现在把(5)式代入(3)式, 并利用(6)和(10a)式, 则以直接的方式得出

1) 除非另有说明, § 12.2 全节均取表达式的正平方根.

$$\begin{aligned}
& - \sum_{l,m} N_{lm} \exp [(-i)(\omega_{lm} t - p_l x - q_m y)] \\
& + B \exp [(-i)(\omega_l t - kx \sin \theta - ky \cos \theta)] \\
& + \tau_0 \sum_{l,m} N_{lm} \left[\frac{\exp [(-i)(\omega_{lm} t - p_l x - q_m y)]}{\sigma(\omega_{lm}, p_l, q_m)} \right] \\
& + \frac{1}{2} \Delta \sum_{+, -} \frac{\exp [(-i)\{(\omega_{lm} \pm Q)t - (p_l \pm K)x - q_m y\}]}{\sigma(\omega_{lm} \pm Q, p_l \pm K, q_m)} \\
& - \frac{\omega_{lm}^2 \exp [(-i)\{\omega_{lm} t - p_l x - [\omega_{lm}^2 c^{-2} - p_l^2]^{1/2} y\}]}{2c^2 g(\omega_{lm}, p_l, q_m) [\omega_{lm}^2 c^{-2} - p_l^2]^{1/2}} \\
& - \frac{1}{2} \Delta \sum_{+, -} \{(\omega_{lm} \pm Q)^2 \exp [(-i)\{(\omega_{lm} \pm Q)t - (p_l \pm K)x \\
& - [c^{-2}(\omega_{lm} \pm Q)^2 - (p_l \pm K)^2]^{1/2} y\}]\} / \\
& \{2c^2 g(\omega_{lm} \pm Q, p_l \pm K, q_m) [c^{-2}(\omega_{lm} \pm Q)^2 - (p_l \pm K)^2]^{1/2}\} \\
& + \{\omega_{lm}^2 \exp [(-i)\{\omega_{lm} t - p_l x + [\omega_{lm}^2 c^{-2} - p_l^2]^{1/2} y\}]\} \\
& \times \exp [ih(\omega_{lm}, p_l, q_m)d] / \{2c^2 h(\omega_l, p_l, q_m) [\omega_{lm}^2 c^{-2} - p_l^2]^{1/2}\} \\
& + \frac{1}{2} \Delta \sum_{+, -} \{(\omega_{lm} \pm Q)^2 \exp [(-i)\{(\omega_{lm} \pm Q)t - (p_l \pm K)x \\
& + [c^{-2}(\omega_{lm} \pm Q)^2 - (p_l \pm K)^2]^{1/2} y\}]\} / \\
& \{2c^2 h(\omega_{lm} \pm Q, p_l \pm K, q_m)\} \\
& \times \frac{\exp [ih(\omega_{lm} \pm Q, p_l \pm K, q_m)d]}{[c^{-2}(\omega_{lm} \pm Q)^2 - (p_l \pm K)^2]^{1/2}} = 0, \quad (12)
\end{aligned}$$

式中在任一表达式前面的求和号 $\sum_{+, -}$ 应解释如下：

$$\sum_{+, -} F(a \pm b, c \pm d) \equiv F(a + b, c + d) + F(a - b, c - d).$$

为了使(12)式在所有时刻和在散射媒质内部所有各点处都被满足，每一个指数项的系数在任何一个变量 (x, y, t) 上不同于所有其他各项的都必须单独为零。由(12)式看出， ω_{lm} 与 Q 同步地变化，并且总是伴随有 p_l 与 K 同步的变化。然而在各个指数项中 y 的系数，若不是保持不变的 (q_m) ，就总是相应的 ω 和 p 的相同函数。因此，我们可以取 ω_{lm} 只依赖于指标 l 。此外，因为可以

假定 ω_0 为入射光的频率 ω 而不失去普遍性, 所以有

$$\omega_0 = \omega, \quad \omega_l = \omega + l\Omega, \quad \left. \begin{array}{l} \omega_0 = \omega, \quad \omega_l = \omega + l\Omega, \\ p_0 = k \sin \theta, \quad p_l = k \sin \theta + lK \end{array} \right\} (l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (13a)$$

$$p_0 = k \sin \theta, \quad p_l = k \sin \theta + lK \quad (13b)$$

把这些关系式用于(12)式, 并将各项重新组合, (12)式变为

$$\begin{aligned} & \sum_{l,m} \left[N_{lm} (\tau_0/\sigma_{lm} - 1) + \frac{1}{2} \Delta(\tau_0/\sigma_{lm}) (N_{l-1,m} + N_{l+1,m}) \right] \\ & \times \exp [(-i)(\omega_l t - p_l x - q_m y)] \\ & + \sum_l (B\delta_{l,0} - G_l) \exp [(-i)(\omega_l t - p_l x - [\omega_l^2 c^{-2} - p_l^2]^{1/2} y)] \\ & + \sum_l H_l \exp [(-i)(\omega_l t - p_l x + [\omega_l^2 c^{-2} - p_l^2]^{1/2} y)] = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

式中 $\delta_{l,l'}$ 是克朗内克 δ 符号¹⁾ (即当 $l \neq l'$ 时 $\delta_{l,l'} = 0$, 而 $\delta_{ll} = 1$), G_l 和 H_l 由下式给出

$$\begin{aligned} G_l &= \tau_0 \omega_l^2 \sum_m \left[N_{lm} + \frac{1}{2} \Delta(N_{l-1,m} + N_{l+1,m}) \right] \\ &\times \{2c^2 g_{lm} [\omega_l^2 c^{-2} - p_l^2]^{1/2}\}^{-1}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} H_l &= \tau_0 \omega_l^2 \sum_m \left[N_{lm} + \frac{1}{2} \Delta(N_{l-1,m} + N_{l+1,m}) \right] \\ &\times [\exp(ih_{lm}d)] \{2c^2 h_{lm} [\omega_l^2 c^{-2} - p_l^2]^{1/2}\}^{-1}. \end{aligned} \quad (16)$$

这里也已用到下述缩写(参看(11)式)

$$\begin{aligned} \sigma_{lm} &= \sigma(\omega_l, p_l, q_m), \quad g_{lm} = g(\omega_l, p_l, q_m) \\ \text{和 } h_{lm} &= h(\omega_l, p_l, q_m). \end{aligned} \quad (17)$$

使(14)式中每一个指数项的系数为零, 就得到对于 q_m 的容许值和振幅 N_{lm} 的下述方程组:

$$N_{lm}(1 - \sigma_{lm}/\tau_0) + \frac{1}{2} \Delta(N_{l-1,m} + N_{l+1,m}) = 0, \quad (18)$$

对于所有的 l 和 m ,

1) 克朗内克符号 $\delta_{l,l'}$ 和 § 12.1(8) 式中引入的参量 δ 之间不会出现混淆, 因为前者总是带下标出现的。

$$B\delta_{l,0} - G_l = 0, \quad (19)$$

$$H_l = 0, \quad (20)$$

§ 12.2.3 衍射和反射光谱中光波振幅的表达式

在讨论(18)至(20)式的解之前, 我们写下散射媒质后方外部(x, y, z)点处总光扰动的表达式。为此, 必须把(5)式代入(3)式右边的被积函数中, 对整个散射媒质积分, 并把入射场加到这一结果中。再次碰到前一节讨论过的积分 $\mathcal{J}(\omega, p, q)$; 记住对于散射媒质后方外部的一点, $\mathcal{J}(\omega, p, q)$ 由(10b)式给出, 并利用(18)式, 就得出总透射电场唯一不为零的分量的下述表达式:

$$E_z = \sum_l B_l \exp [(-i)\{\omega_l t - p_l x - [\omega_l^2 c^{-2} - p_l^2]^{1/2} y\}], \quad (21)$$

式中

$$B_l = \omega_l^2 \sum_m \sigma_{lm} N_{lm} \{ \exp [ig_{lm}d] \} \times \{ 2c^2 g_{lm} [\omega_l^2 c^{-2} - p_l^2]^{1/2} \}^{-1}. \quad (22)$$

根据(21)和(22)式, 透射波可看作是由许多平面波组成的, 每一个平面波具有不同的频率与不同的传播方向。把(13)式代入(21)式的指数项中, 可以很容易地得出频率 ω_l 和角 ϕ_l 的表达式; 这些表达式同§ 12.1.2 中给出的一样。

借助于(10c)式, 也可同样写出反射光谱中振幅 $B_l^{(r)}$ 的表达式。 $B_l^{(r)}$ 由下式给出:

$$B_l^{(r)} = -\omega_l^2 \sum_m \sigma_{lm} N_{lm} \{ 2c^2 h_{lm} [\omega_l^2 c^{-2} - p_l^2]^{1/2} \}^{-1}. \quad (23)$$

然而, 这里只涉及在散射媒质后方外部的那些点, 因为在目前的问题中, 反射光谱中各序的波强度一般是很小的。

§ 12.2.4 方程用逐次逼近法得出的解

在§ 12.2.4 和§ 12.2.5 中, 根据超声波振幅 Δ 很小这一假定, 将解出(18)–(20)式, 并得到透射光谱中第一序和第二序谱线强度的近似表达式。§ 12.2.6 中将定性地讨论这种近似失效的情况,

最后在 § 12.2.7 中, 将利用本质上等效于喇曼和纳斯近似的方法, 解出(18)—(20)式.

首先考虑方程组(18). 这些方程中的附标 m 用来区别涉及 q 的不同容许值的那些量. 因此可以略去这个附标, 并把(18)式写成下述形式:

$$f_l(q^2)N_l(q^2) - \frac{1}{2} \Delta [N_{l-1}(q^2) + N_{l+1}(q^2)] = 0, \\ (l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (24)$$

其中

$$f_l(q^2) = \frac{\sigma_l(q)}{\tau_0} - 1 = \frac{3(p_l^2 + q^2 - n^2\omega_l^2 c^{-2})}{(n^2 - 1)(p_l^2 + q^2 + 2\omega_l^2 c^{-2})}. \quad (25)$$

方程组(24)构成了振幅 $N_l(q^2)$ 的线性齐次方程的无穷集. 存在一个非平凡解(即对于所有的 l , $N_l \not\equiv 0$)的条件是 N_l 的系数构成的行列式为零. 这个行列式方程的根给出 q^2 的容许值; 它们可表示为 $q_m^2 (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. 当然, 对应于每一个这样的 q^2 值, 有两个 q 值, 即 $+|q|$ 和 $-|q|$, 并且有两组振幅, 即 $N_l(+|q|) = N_l^+(q^2)$ 和 $N_l(-|q|) = N_l^-(q^2), (l = 0, \pm 1, \dots)$. 然后对于一个给定的 q^2 的容许值, 如 q_m^2 , 利用 $N_l^+(q_m^2) (l = 0, \pm 1, \dots)$ 中的一个, 如 $N_m^+(q_m^2)$, 所有的 $N_l^+(q_m^2)$ 就可由递推关系(24)确定了. 用这种方法就可以利用 $N_m^\pm(q_m^2) (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 得出所有的振幅 $N_l^\pm(q^2)$. $N_m^\pm(q_m^2)$ 这一组振幅可由(19)和(20)式确定, 这两式为此目的在数目上刚好足够. [注意, 在(5), (12), (15)等式中, 符号 \sum_m 意指对 $N_{\pm m}^+$ 项和 $N_{\pm m}^-$ 项两者求和].

这里将用微扰法求出(24)式的近似解. 把 Δ 看作一个很小的参量, 仿照通常的微扰方法, 把 $\eta (= q^2)$ 和 N_l 展开为 $(1/2)\Delta$ 的幂级数:

$$N_l(\eta) = N_l^{(0)} + \frac{1}{2} \Delta N_l^{(1)} + \left(\frac{1}{2} \Delta\right)^2 N_l^{(2)} + \dots, \quad (26a)$$

$$\eta = \eta^{(0)} + \frac{1}{2} \Delta \eta^{(1)} + \left(\frac{1}{2} \Delta\right)^2 \eta^{(2)} + \dots \quad (26b)$$

利用(26b)式, $f_l(\eta)$ 可写为

$$\begin{aligned} f_l(\eta) = & f_l(\eta^{(0)}) + \frac{1}{2} \Delta \eta^{(1)} f'_l(\eta^{(0)}) + \left(\frac{1}{2} \Delta\right)^2 [\eta^{(2)} f'_l(\eta^{(0)}) \\ & + \frac{1}{2} (\eta^{(1)})^2 f''_l(\eta^{(0)})] + \cdots, \end{aligned} \quad (27)$$

式中 f 上的一撇表示对 η 的微商。(注意: 对于 η 的每一个正实值, $f'_l(\eta)$, $f''_l(\eta)$ … 都不为零). 把(26)和(27)式代入(24)式, 则有 ($l = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$)

$$\begin{aligned} & \left\{ f_l(\eta^{(0)}) + \frac{1}{2} \Delta \eta^{(1)} f'_l(\eta^{(0)}) + \left(\frac{1}{2} \Delta\right)^2 [\eta^{(2)} f'_l(\eta^{(0)}) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (\eta^{(1)})^2 f''_l(\eta^{(0)})] + \cdots \right\} \\ & \times \left\{ N_l^{(0)} + \frac{1}{2} \Delta N_l^{(1)} + \left(\frac{1}{2} \Delta\right)^2 N_l^{(2)} + \cdots \right\} \\ & - \frac{1}{2} \Delta \left[N_{l-1}^{(0)} + \frac{1}{2} N_{l-1}^{(1)} + \cdots \right. \\ & \left. + N_{l+1}^{(0)} + \frac{1}{2} \Delta N_{l+1}^{(1)} + \cdots \right] = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

首先使(28)式中那些与 Δ 无关的项为零, 就得出零级近似:

$$f_l(\eta^{(0)}) N_l^{(0)} = 0, \quad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \quad (29)$$

(29)式具有与

$$f_l(\eta^{(0)}) = 0, \quad N_l^{(0)} \neq 0 \quad \text{或} \quad N_l^{(0)} = 0, \quad f_l(\eta^{(0)}) \neq 0 \quad (30)$$

相同的解。用 $\eta_l^{(0)}$ 代表由 $f_l(\eta^{(0)}) = 0$ 给出的 $\eta^{(0)}$ 值, 由(30)式得出

$$\eta_l^{(0)} = n^2 \omega_l^2 c^{-2} - p_l^2, \quad N_l^{(0)}(\eta_l^{(0)}) \equiv N_{ll} \neq 0, \quad (31)$$

和

$$N_l^{(0)}(\eta_l^{(0)}) \equiv N_{l'l'}^{(0)} = N_{ll} \delta_{l'l'}. \quad (32)$$

其次使(28)式中 Δ 的系数为零, 得出

$$f_l(\eta_m^{(0)}) N_l^{(1)}(\eta_m^{(0)}) + \eta_m^{(1)} f'_l(\eta_m^{(0)}) N_l^{(0)}(\eta_m^{(0)}) = N_{l-1}^{(0)}(\eta_m^{(0)}) + N_{l+1}^{(0)}(\eta_m^{(0)}). \quad (33)$$

在(33)式中依次令 $l = m, m+1, m-1, m+2, m-2,$

…，并且利用(32)式，得出

$$\eta_m^{(1)} = 0, \quad (34a)$$

$$N_{m\pm 1,m}^{(1)} = \frac{N_{mm}}{f_{m\pm 1}(\eta_m^{(0)})}, \quad (34b)$$

和

$$N_{m\pm j,m}^{(1)} = 0, \text{ 当 } j \geq 2 \text{ 时.} \quad (34c)$$

同样，使(28)式中 Δ^2 的系数为零，就得出直至二级的对 $\eta_m^{(0)}$ 的校正和振幅 N_{lm} 的表达式如下¹⁾:

$$\eta_m^{(2)} = \frac{1}{f'_m(\eta_m^{(0)})} \left[\frac{1}{f_{m+1}(\eta_m^{(0)})} + \frac{1}{f_{m-1}(\eta_m^{(0)})} \right], \quad (35a)$$

$$N_{m\pm 2,m}^{(2)} = \frac{N_{mm}}{f_{m\pm 1}(\eta_m^{(0)})f_{m\pm 2}(\eta_m^{(0)})}, \quad (35b)$$

和

$$N_{m\pm 1,m}^{(2)} = 0, N_{m\pm j,m}^{(2)} = 0, \text{ 当 } j \geq 3 \text{ 时.} \quad (35c)$$

由上述计算可以看出，在零级微扰计算中只有 N_{mm} ($m = 0, \pm 1, \dots$) 各量不为零；在一级计算中 N_{mm} 和 $N_{m\pm 1,m}$ 不为零，而在二级计算中 $N_{m\pm 2,m}$ 也不为零。同样，继续作更高级的微扰计算，得出越来越多的不为零的非对角振幅（即两个附标不等的振幅）。这些计算是冗长的，这里不能给出；但可以假定，只要微扰方法有效，就可忽略更高级项。

一旦已知构成(24)式零级解的对角振幅，(34b)和(35b)式的非对角振幅就完全确定了。我们由(19)和(20)式确定上述对角振幅。然而，首先在 $\Delta = 0$ 的简单情况下考察它们的解是有益的，因为这时很容易得出(18)–(20)式的精确解。在这种情况下，唯一可能的非零振幅是对角振幅 $N_{m,m}^\pm$ ($m = 0, \pm 1, \dots$)。如果令(19)和(20)式中所有的非对角振幅等于零，则发现除 $N_{0,0}^\pm$ 外所有

1) 这里给出的公式仅当 $f_{m\pm 1}(\eta_m^{(0)})$, $f_{m\pm 2}(\eta_m^{(0)})$, … 均不为零时才有效。如果不是这样，必须修改上述微扰方法以计及这种简并性。在直至二级的微扰计算中，当光以角 $\theta = 0$ 和 $\theta = \sin^{-1}(\lambda/2A)$ 入射时，简并性开始起作用。然而这里将不深究此问题，但将在 § 12.2.5 中给出这两种情况的结果。

的振幅 $N_{m,m}^\pm$ 均等于零, $N_{0,0}^\pm$ 由下式给出¹⁾:

$$N_{0,0}^+ = (2B/\sigma_{0,0}) \cos\theta [(n^2 - \sin^2\theta)^{1/2} - \cos\theta] \\ \times (1 + \rho^2 - 2\rho \cos 2q_0 d)^{-1/2} e^{i\phi}, \\ N_{0,0}^- = N_{0,0}^+ (g_{0,0}/h_{0,0}) e^{2iq_0 d},$$

式中

$$\rho = \left| \frac{N_{0,0}^-}{N_{0,0}^+} \right|^2, \quad \phi = \tan^{-1} \left[\frac{\rho \sin 2q_0 d}{1 - \rho \cos 2q_0 d} \right]. \quad (36)$$

对于正入射 ($\theta = 0$), 由(11),(31)和(36)式给出

$$\rho_0 = \left| \frac{N_{0,0}^-}{N_{0,0}^+} \right|_{\theta=0}^2 = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}. \quad (37)$$

利用(36),(27)和(23)式, 很容易得出正入射在一平面平行板上时反射率的表达式:

$$\left| \frac{B_0^{(r)}}{B} \right|^2 = \frac{4\rho_0 \sin^2 q_0 d}{1 + \rho_0^2 - 2\rho_0 \cos 2q_0 d},$$

与 § 7.6(9) 式一致, 因 $\theta = 0$ 时, $q_0 = nk$.

当 Δ 不为零, 但对于所用的微扰法而言仍足够小时, 由上述 $\Delta = 0$ 时的解推知,

$$|N_{0,0}| \gg |N_{\pm 1, \pm 1}| \gg |N_{\pm 2, \pm 2}| \dots$$

因此, 可用逐次逼近法解(19)和(20)式得出对角振幅. 而且, 因为对于正入射或接近正入射 (在超声衍射实验中, θ 至多约为 3°), 一个给定的 N^- 与相应的 N^+ 的比值很小 (参看(37)式), 所以可一概略去 N^- , 而单独由(19)式确定 N^+ ²⁾. 回想起在应用边界条件 § 12.1(15) 式时也暗含同样的近似.

现在把(34b), (34c), (35b) 和 (35c) 式用于(19)式中, 可得出对角振幅 $N_{0,0}^+$, $N_{\pm 1, \pm 1}$ 和 $N_{\pm 2, \pm 2}$ 的表达式. 进而借助于(22)式, 可以很容易地写出透射光谱中第一序和第二序谱线强度的表达式. 这些表达式在下一节中给出.

1) Bhatia 和 Noble (上述引文中) 给出的 $N_{0,0}^+$ 和 $N_{0,0}^-$ 表达式中有某些印刷错误, 这里已改正.

2) 关于这些问题的详细讨论, 见 Bhatia 和 Noble (上述引文). 特别是, 其中指出 N^- 对反射光谱振幅 $B_0^{(r)}$ 的影响一般不可忽略.

§ 12.2.5 某些特殊情况下第一序和第二序谱线强度的表达式

(a) $\delta/\xi \ll 1$ 并且 ξ 比 1 大得多

这是在上一节中详细讨论过的情况。第一序和第二序谱线强度 $I_{\pm 1}$ 和 $I_{\pm 2}$ 分别为

$$I_{\pm 1} = |B_{\pm 1}|^2 = \frac{1}{4} B^2 \gamma^2 \delta^2 \frac{\sin^2 \left[\beta d \left(\xi \pm \frac{1}{2} \right) \right]}{\left(\xi \pm \frac{1}{2} \right)^2}, \quad (38a)$$

和

$$\begin{aligned} I_{\pm 2} = |B_{\pm 2}|^2 &= \frac{1}{64} B^2 \gamma^4 \delta^4 \left\{ \frac{1}{2(\xi \pm 1) \left(\xi \pm \frac{1}{2} \right) \left(\xi \pm \frac{3}{2} \right)} \right. \\ &\times \left[\frac{\sin^2 \left[\beta d \left(\xi \pm \frac{1}{2} \right) \right]}{\left(\xi \pm \frac{1}{2} \right)} + \frac{\sin^2 \left[\beta d \left(\xi \pm \frac{3}{2} \right) \right]}{\left(\xi \pm \frac{3}{2} \right)} \right. \\ &\left. - \frac{\sin^2 [2\beta d(\xi \pm 1)]}{2(\xi \pm 1)} \right]. \end{aligned} \quad (38b)$$

这些方程应理解为或全用上面的正号, 或全用下面的负号。

对于巴蒂亚和诺布耳(上述引文中)考虑过的其他两种情况, 我们引用其强度表达式, 而不证明。

(b) $\xi \sim \frac{1}{2}$, $\delta \ll 1$

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{4} \frac{B^2 \delta^2 \gamma^2}{\left(\xi - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \delta^2 \gamma^2} \\ &\times \left[\frac{\left(\xi - \frac{1}{2} \right)^2}{\frac{1}{4} \delta^2 \gamma^2} + \cos^2 \left[\beta d \left\{ \left(\xi - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \delta^2 \gamma^2 \right\}^{1/2} \right] \right], \end{aligned} \quad (39a)$$

$$I_{-1} = \frac{1}{4} \frac{B^2 \delta^2 \gamma^2}{\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \delta^2 \gamma^2} \times \sin^2 \left[\beta d \left\{ \left(\xi - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \delta^2 \gamma^2 \right\}^{1/2} \right]. \quad (39b)$$

I_1 和 I_{-2} 的表达式更为复杂。然而，对于 $\xi = \frac{1}{2}$ ，它们有简单形式：

$$I_1 = \frac{1}{16} B^2 \delta^2 \gamma^2 \left[- \sin^2 \left(\frac{\pi d \Delta \gamma}{2 \lambda n} \right) + 2 \sum_{+, -} \sin^2 \left\{ \beta d \left(1 \pm \frac{1}{4} \delta \gamma \right) \right\} \right], \quad (39c)$$

和

$$I_{-2} = \frac{1}{16} B^2 \delta^2 \gamma^2 \sin^2 \left(\frac{\pi d \Delta \gamma}{2 \lambda n} \right). \quad (39d)$$

(c) 正入射 ($\xi = 0$), $\delta \ll 1$

$$I_1 = I_{-1} = B^2 \delta^2 \gamma^2 \sin^2 \left[\frac{1}{2} \beta d \left(1 + \frac{1}{8} \delta^2 \gamma^2 \right) \right], \quad (40a)$$

$$I_2 = I_{-2} = \frac{1}{48} B^2 \delta^4 \gamma^4 \left[- \frac{1}{4} \sin^2 2 \beta d + \sin^2 \left\{ \frac{1}{2} \beta d \left(1 + \frac{1}{8} \delta^2 \gamma^2 \right) \right\} + \frac{1}{3} \sin^2 \left\{ \frac{3}{2} \beta d \left(1 - \frac{1}{24} \delta^2 \gamma^2 \right) \right\} \right]. \quad (40b)$$

如果略去 (40) 式正弦函数的自变量中出现的量 $\delta^2 \gamma^2$ ，则所得出的表达式也可由 (38) 式令其中 $\xi = 0$ 而得出。

如前所述，布里渊¹⁾、戴维²⁾ 和赖托夫 (Rytov)³⁾ 用 § 12.1 中介

1) L. Brillouin *La Diffraction de la Lumière par des Ultrasons* (Paris, Hermann, 1933).

2) E. David, *Phys. Z.*, **38** (1937), 587.

3) S. Rytov, *Diffraction de la Lumière par les Ultra-sons* (Paris, Hermann, 1938).

绍的方法导出了第一序和第二序谱线强度的表达式(38). 阿加瓦¹⁾曾由喇曼和纳斯微分方程 § 12.1(21) 导出了(38)式. 法里萧(Phariseau)²⁾曾证明, 当 $\xi \sim \frac{1}{2}$ 时, 第一序和第二序谱线强度的表达式(39)也能由(21)式导出³⁾. 当然理应如此, 因为基于麦克斯韦微分方程的方法与本节的积分方程法是等价的.

§ 12.2.6 某些定性的结果

根据上一节中给出的强度表达式, 显然, 对于满足(a) $\delta \ll 1$ 或(b) $\delta/\xi \ll 1$ 的 δ 和 ξ 值, 只有前几个低序会出现于透射束两侧, 并且它们的强度随着序的增高而迅速减弱. 然而, 当(a)或(b)都不满足时, 即 δ 和 δ/ξ 都比 1 大得多时, 一般会出现很多序. 在这种情况下, (18)–(20)式的求解, 以及各序强度的计算都更加困难了. 通过考察 § 12.2.4 微扰法有效性的条件, 可以看出⁴⁾, 在解(18)–(20)式时, 可以认为只有两个附标 l 和 m 均在数目 M_1 和 M_2 之间的那些振幅 N_{lm} 不为零, M_1 和 M_2 近似定义为($0 \leq \xi < \delta^{2/3}$)

$$\left. \begin{aligned} M_1 &\sim \xi + \delta^{2/3} + 1 \\ M_2 &\sim -\xi + \delta^{2/3} + 1 \end{aligned} \right\}. \quad (41)$$

因为, 一般地说, Δ 不能增加到超过 10^{-4} 太多, 并且, 能观察到衍射现象的 λ/Λ 最大值受到分辨本领实际极限所限制, 等等, 所以 $\delta (= \Delta\Lambda^2/\lambda^2)$ 的可能极大值约为 100. 因此, 即使在极端的实验条件下, 也只需从无限集(18), (19), (20)的每一个中解至多约 20 个线性联立方程. 但即使作了这一简化, 计算仍然是冗长的, 还不曾完成过.

1) R. R. Aggarwal, *Proc. Ind. Acad. Sci., A*, **31** (1950), 417.

2) P. Phariseau, *Proc. Ind. Acad. Sci., A*, **44** (1956), 165.

3) 与本节给出的各个强度表达式有关的实验结果的讨论, 可在 Bhatia 和 Noble 的论文中找到,(上述引文).

4) Bhatia and Noble (上述引文).

表 25 光被超声波衍射：对于不同的入射角 θ 值，观察到的序数
和(括弧内的)理论预期值 ($\lambda/\Delta = 3 \times 10^{-3}$, $\Delta \sim 10^{-4}$)

θ	0	$0^\circ 06'$	$0^\circ 22'$	$0^\circ 39'$	$1^\circ 01'$	$1^\circ 23'$	$1^\circ 45'$	$2^\circ 07'$
ξ	0	0.6	2	4	6	8	10	13
M_1	5(5)	5(6)	6(7)	6(9)	3	2	1	1
M_2	5(5)	5(4)	3(3)	2(2)	2	1	1	1

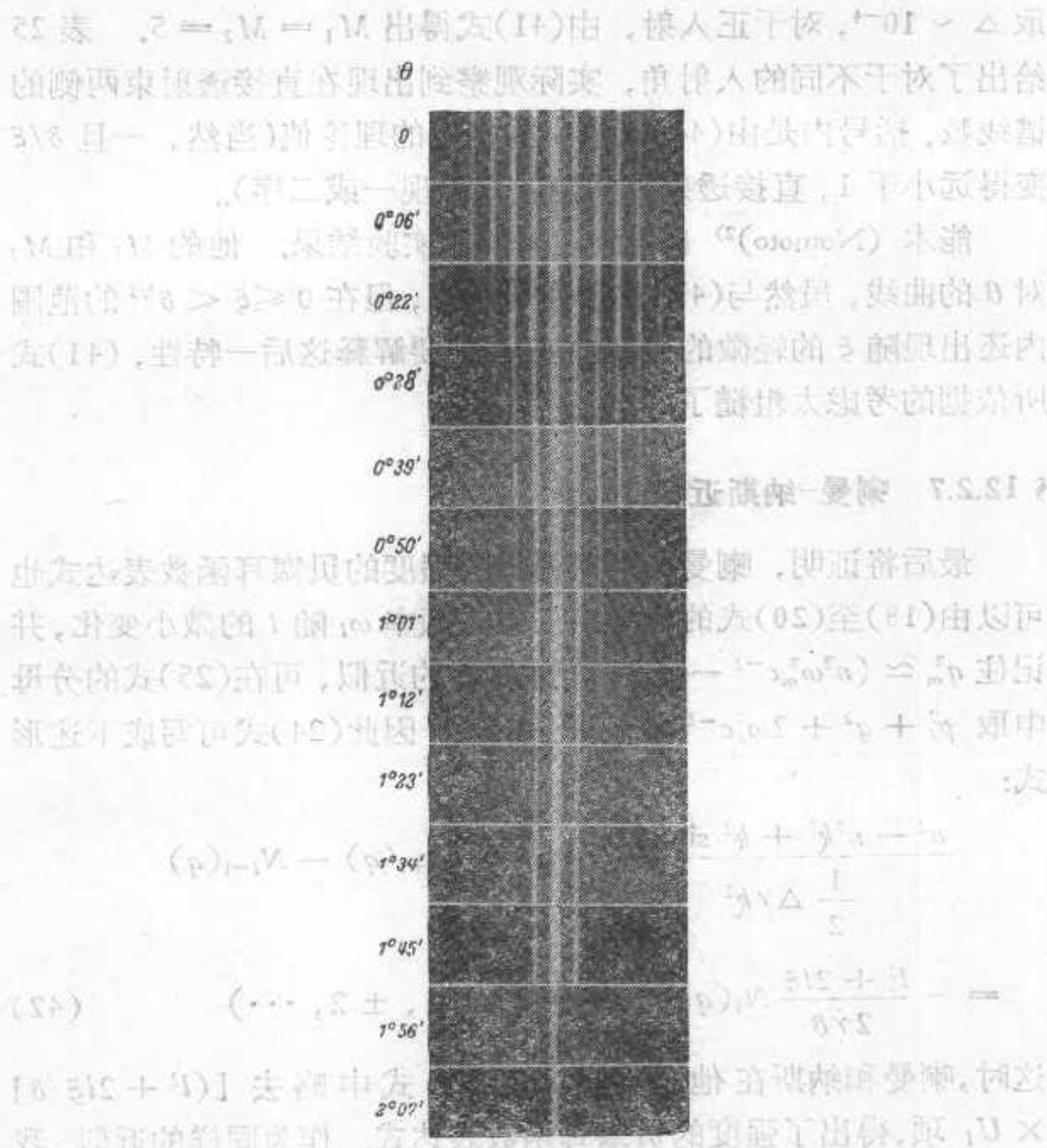


图 12.3 光被超声波衍射：用不同的入射角 θ 观察到的谱

($\lambda/\Delta = 3 \times 10^{-3}$, $\Delta \sim 10^{-4}$) [引自 S. Parthasarathy,

Proc. Ind. Acad. Sci., A, 3 (1936), 442.]

定性地说,数目 M_1 和 M_2 也代表可能出现在直接透射束两侧的序数。根据(41)式,随着 $\xi = (\Lambda \sin \theta)/\lambda$ 从零增大,出现在直接透射束两侧的序数将变得不同了,从超声波波阵面反射的光能够到达的那一侧出现更多的谱线。帕塔萨拉西 (Parthasarathy)¹⁾ 已从实验上研究过衍射光谱随入射角 θ 的变化,我们在图 12.3 复制了他的论文中的一张照片。在这个实验中, $(\lambda/\Lambda) = 3 \times 10^{-3}$; 取 $\Delta \sim 10^{-4}$, 对于正入射, 由(41)式得出 $M_1 = M_2 = 5$ 。表 25 给出了对于不同的入射角, 实际观察到出现在直接透射束两侧的谱线数。括号内是由(41)式给出的相应的理论值(当然,一旦 δ/ξ 变得远小于 1, 直接透射束两侧就只出现一或二序)。

能本 (Nomoto)²⁾ 也得到过类似的实验结果。他的 M_1 和 M_2 对 θ 的曲线, 虽然与(41)式定性地相符, 但在 $0 \leq \xi < \delta^{2/3}$ 的范围内还出现随 ξ 的轻微的周期性变化。要解释这后一特性, (41)式所依据的考虑太粗糙了。

§ 12.2.7 喇曼-纳斯近似

最后将证明, 喇曼和纳斯得出的强度的贝塞耳函数表达式也可以由(18)至(20)式的解导出。忽略频率 ω_l 随 l 的微小变化, 并记住 $q_m^2 \simeq (n^2 \omega_m^2 c^{-2} - p_m^2)$, 作为良好的近似, 可在(25)式的分母中取 $p_l^2 + q^2 + 2\omega_l^2 c^{-2} \simeq k^2(n^2 + 2)$ 。因此(24)式可写成下述形式:

$$\begin{aligned} & \frac{q^2 - n^2 k^2 + k^2 \sin^2 \theta}{\frac{1}{2} \Delta \gamma k^2} N_l(q) - N_{l+1}(q) - N_{l-1}(q) \\ &= -\frac{l^2 + 2l\xi}{2\gamma\delta} N_l(q), \quad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned} \quad (42)$$

这时, 喇曼和纳斯在他们的 § 12.1(21) 式中略去 $[(l^2 + 2l\xi/\delta) \times U_l]$ 项, 得出了强度的贝塞耳函数表达式。作为同样的近似, 我

1) S. Parthasarathy, *Proc. Ind. Acad. Sci., A*, **3** (1936), 442.

2) O. Nomoto, *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan*, **24** (1942), 380, 613.

们也可略去(42)式右边的项。于是，(42)式可写为

$$\frac{q^2 - b^2}{\mu^2} N_l(q) = N_{l+1}(q) + N_{l-1}(q), \quad (l = 0, \pm 1, \dots), \quad (43)$$

式中

$$b^2 = k^2(n^2 - \sin^2 \theta) \text{ 和 } \mu^2 = \frac{1}{2} \Delta \gamma k^2. \quad (44)$$

为了解(43)式¹⁾，设 $N_l(q)$ 为下述形式：

$$N_l(q) = N e^{2\pi i l m / M}, \quad (45)$$

式中 M 是某一很大的整数， m 是另一整数，满足 $0 \leq m < M$ 。(即将看到，最后的结果与 M 无关)。将(45)式代入(43)式，对于 q^2 的容许值，有

$$q_m^2 = b^2 + 2\mu^2 \cos(2\pi m / M), \quad 0 \leq m < M, \quad (46)$$

或者记住 $\mu^2 \ll b^2$ ，

$$\pm |q_m| = \pm [b + (\mu^2/b) \cos(2\pi m / M)]. \quad (47)$$

因此，对于每一个 m ，有两个 q 值，即 $\pm |q_m|$ ；相应的振幅由下式给出：

$$N_l(\pm q_m) = N_{lm}^{\pm} = N^{\pm} e^{2\pi i l m / M}. \quad (48)$$

现在(48)式中的两个常数 N^+ 和 N^- 应由(19)和(20)式确定。如同 § 12.2.4，我们将略去振幅 N_{lm}^- ，并单独由(19)式确定常数 N^+ 。注意到对于不太大的 l 值， $[\sigma_l(q)/g_l(q)] \sim [\sigma_0(q_0^{(0)})/g_0(q_0^{(0)})]$ ，就可以证实，在(48)式中取

$$N^+ = \frac{1}{M} 2B c^2 \omega^{-2} [\omega^2 c^{-2} - p_0^2]^{1/2} (g_{0,0}/\sigma_{0,0}), \quad (49)$$

恒满足(19)式。把(48)和(49)式代入(22)式，并令 $(\omega_l^2 c^{-2} - p_l^2) = (\omega^2 c^{-2} - p_0^2)$ ，则第 l 序衍射波的振幅 B_l 为

$$B_l \simeq \frac{B}{M} \sum_{m=0}^{M-1} e^{i[2\pi l m / M + (\mu^2 d / b) \cos(2\pi m / M)]}. \quad (50)$$

这里已省略与 m 无关的位相因子。因已假设 M 是一个很大的整

1) (43) 式类似于用来确定线性的原子链的振动简正模的关系式 [参看 M. Born 和 Th. V. Kármán, *Phys., Z.*, **13** (1912), 297]。

数, 所以可以用一个积分替换(50)式中的级数。令 $2\pi m/M = \phi'$, 和 $d\phi' = 2\pi/M$, 可将(50)式写成

$$B_l \simeq \frac{B}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i[l\phi' + (\mu^2 d/b) \cos \phi']} d\phi', \quad (51)$$

它与 M 无关。把(51)式中的积分分成两部分,(i)从 0 到 $(3/2)\pi$, 及(ii)从 $(3/2)\pi$ 到 2π , 并在这两部分中分别令 $\phi' = \frac{1}{2}\pi - \phi$ 和 $\phi' = \frac{5}{2}\pi - \phi$, 就得出¹⁾

$$B_l \simeq \frac{B}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i[\frac{1}{2}l\pi - l\phi + (\mu^2 d/b) \sin \phi]} d\phi = B e^{\frac{1}{2}il\pi} J_l(\mu^2 d/b). \quad (52)$$

因此, 强度 $I_l = |B_l|^2$ 正好是 $B^2 J_l^2(\mu^2 d/b)$ 。而且, 借助于(44)式, § 12.1(5) 和 § 12.1(8) 式, 可以看出, 贝塞耳函数 J_l 的自变量 $(\mu^2 d/b)$ 与 795 页中给出的喇曼和纳斯的表达式中出现的自变量相同。

1) H. and B. S. Jeffreys, *Methods of Mathematical Physics* (Cambridge University Press, 1946), p. 547.

第十三章 金 属 光 学

前面一直讨论光在非导电的各向同性媒质中的传播。现在转而研究导电媒质尤其是金属的光学。一块普通金属是由无规取向的小晶体组成的晶态集合体。有一定大小的单晶是罕见的，但可以由人工制备出来；它们的光学性质将在第十四章中研究。无规取向的微晶混合物的性能显然与各向同性物质一样，又因光在导电的各向同性媒质中传播的理论比在晶体中简单得多，所以我们将在那里对它作较详细的讨论。

根据 § 1.1，电导率与焦耳热的出现有关。这是一种不可逆现象，其中电磁能被消耗掉了，或者更确切地说，它已转化为热，结果导体中的电磁波就衰减了。在金属中，由于电导率很高，这种效应如此之大，以致金属几乎是不透明的。尽管这样，金属在光学中仍起着重要的作用。强吸收伴随有高反射率，因此金属表面可作为很好的反射镜。由于光在金属中有部分透入，即使透入深度很小，但仍有可能根据反射光的观测获得关于吸收常数及吸收机制的信息。

我们将首先考虑由于存在电导率而引起的纯形式结果，然后在经典电子论的基础上扼要讨论这个过程的一个简单而有些理想化的物理模型。这个模型只能粗略地解释一些已观测到的效应；更精确的模型只能利用量子力学来得出，这就超出本书的范围了。形式理论将通过对两个有实际意义问题的应用加以阐述，即包含一个吸收层元的分层媒质光学以及光被金属球所衍射。

这个理论有一个特别吸引人的数学特性，那就是只要引入一个复介电常数（或复折射率）来代替实介电常数（或实折射率），就可以计及电导率的存在。在金属中，虚部占有优势。

§ 13.1 波在导体中的传播

考虑介电常数为 ϵ , 磁导率为 μ , 电导率为 σ 的一种均匀各向同性媒质. 利用物质方程 § 1.1(9) 至 (11) 式, 即 $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, 则麦克斯韦方程的形式为

$$\operatorname{curl} \mathbf{H} - \frac{\epsilon}{c} \dot{\mathbf{E}} = \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E}, \quad (1)$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{E} + \frac{\mu}{c} \dot{\mathbf{H}} = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{4\pi}{\epsilon} \rho, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (4)$$

容易看出, 对于从外部入射到导体上的电磁扰动, 可用 $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ 代替(3)式. 如果对(1)式求散度并利用(3)式, 就得出

$$-\frac{\epsilon}{c} \operatorname{div} \dot{\mathbf{E}} = \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{4\pi}{\epsilon} \rho.$$

把(3)式再对时间求微商, 给出

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{E}} = \frac{4\pi}{\epsilon} \dot{\rho}.$$

在最后两个方程中消去 $\operatorname{div} \dot{\mathbf{E}}$, 得出

$$\dot{\rho} + \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} \rho = 0, \quad (5)$$

积分得出

$$\rho = \rho_0 e^{-t/\tau}, \text{ 式中 } \tau = \frac{\epsilon}{4\pi\sigma}. \quad (6)$$

由此可见, 任何电荷密度 ρ 都随时间按指数衰减. 对于任何具有可觉察电导率的媒质, 弛豫时间 τ 非常小. 对于金属, 这个时间 (典型的数量级是 10^{-18} 秒) 比波的振动周期要短很多. 所以可假定金属中的 ρ 实际上总为零. 因此(3)式可写成

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \quad (7)$$

由(1)和(2)式消去 \mathbf{H} 并利用(7)式得出, \mathbf{E} 满足波方程

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\mu\epsilon}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \dot{\mathbf{E}}. \quad (8)$$

$\dot{\mathbf{E}}$ 项意味着波受到阻尼, 即当它通过媒质传播时逐渐衰减.

如果场是严格单色的, 角频率为 ω , 即 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 具有 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \times e^{-i\omega t}$ 这种形式, 则有 $\partial/\partial t = -i\omega$, 因此方程(1)和(2)可改写为

$$\operatorname{curl} \mathbf{H} + \frac{i\omega}{c} \left(\epsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right) \mathbf{E} = 0, \quad (9)$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{E} - \frac{i\omega\mu}{c} \mathbf{H} = 0, \quad (10)$$

而(8)式变为

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \hat{k}^2 \mathbf{E} = 0, \quad (11)$$

式中

$$\hat{k}^2 = \frac{\omega^2\mu}{c^2} \left(\epsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right). \quad (12)$$

这些方程在形式上与非导电媒质的对应方程相同, 只要在后者中把介电常数 ϵ 代换为

$$\hat{\epsilon} = \epsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \quad (13)$$

(已证明, 只要频率 ω 不接近共振, ϵ 在良好的近似程度上是实数——参看 § 2.3.4).

如果除了复波数 \hat{k} 和复介电常数 $\hat{\epsilon}$ 外, 再引入复相速 θ 和复折射率 \hat{n} , 则变得与非导电媒质更加相似了, 与 § 1.2(8), § 1.2(12) 及 § 1.3(21) 式类似, θ 和 \hat{n} 定义为

$$\theta = \frac{c}{\sqrt{\mu\hat{\epsilon}}}, \quad \hat{n} = \frac{c}{\theta} = \sqrt{\mu\hat{\epsilon}} = \frac{c}{\omega} \hat{k}. \quad (14)$$

令

$$\hat{n} = n(1 + ik), \quad (15)$$

式中 n 和 k 是实数, k 称为衰减指数¹⁾. n 和 k 这两个量不难用物

1) 也用“消光系数”这一名称。

质常数 ϵ , μ 和 σ 来表示. 把(15)式平方, 则有

$$\hat{n}^2 = n^2(1 + 2ik - k^2). \quad (15a)$$

又由(14)和(13)式得出

$$\hat{n}^2 = \mu\epsilon = \mu \left(\epsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right). \quad (16)$$

现在 σ 正如 ϵ 那样, 不真是媒质的常数了, 它还依赖于频率. 以后将看到(§ 13.3), 对于足够低的频率(足够长的波长), σ 在良好的近似程度上是实数. 假定 ϵ 也是实数, 在这种情况下, 使(15a)和(16)式中的实部及虚部分别相等, 就得到下列关系式:

$$n^2(1 - k^2) = \mu\epsilon, \quad (16a)$$

$$n^2k = \frac{2\pi\mu\sigma}{\omega} = \frac{\mu\sigma}{\nu}. \quad (16b)$$

由这些方程得出

$$n^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\mu^2\epsilon^2 + \frac{4\mu^2\sigma^2}{\nu^2}} + \mu\epsilon \right\}, \quad (17a)$$

$$n^2k^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\mu^2\epsilon^2 + \frac{4\mu^2\sigma^2}{\nu^2}} - \mu\epsilon \right\}. \quad (17b)$$

这里平方根取正号, 因为 n 和 nk 是实数, 从而 n^2 和 n^2k^2 必定是正数.

方程(11)在形式上与非导电媒质的波方程相同, 但现在波数是复数. 最简单的解是对时间谐和的平面波的解

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i[\hat{k}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}) - \omega t]}. \quad (18)$$

根据(14)和(15)式, 用关系式 $\hat{k} = \omega\hat{n}/c = \omega n(1 + ik)/c$ 代替 \hat{k} , 则(18)式变为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{\omega}{c} nk(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s})} e^{i\omega \left[\frac{n}{c} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}) - t \right]}.$$

上式的实部就是

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{\omega}{c} nk(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s})} \cos \left\{ \omega \left[\frac{n}{c} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}) - t \right] \right\}, \quad (19)$$

它表示电矢量, 这是波长 $\lambda = 2\pi c/\omega n$ 并按给定的指数项衰减的平面波. 因为波的能量密度 ω 与 \mathbf{E}^2 的时间平均值成正比, 由此得

出 w 按下述关系式减少:

$$w = w_0 e^{-\chi(r+s)}, \quad (20)$$

式中

$$\chi = \frac{2\omega}{c} nk = \frac{4\pi\nu}{c} nk = \frac{4\pi}{\lambda_0} nk = \frac{4\pi}{\lambda} \kappa, \quad (21)$$

λ_0 是真空中的波长, λ 是媒质中的波长。常数 χ 称为吸收系数。

波向前传播了距离 d 以后, 能量密度就减少到它原来数值的 $1/e$, 此处

$$d = \frac{1}{\chi} = \frac{\lambda_0}{4\pi nk} = \frac{\lambda}{4\pi\kappa}. \quad (22)$$

这段距离通常与波长之比是很小的(见表 26)¹⁾.

回到方程组(17), 我们看到, 当 $\sigma = 0$ 时, 第一式正好化为麦克斯韦关系式 § 1.2(14), $n^2 = \mu\epsilon$, 而第二式给出 $\kappa = 0$. 对于金属, $\sigma \neq 0$, 并且实际上是如此之大, 以致在(17)式中 ϵ 与 $2\sigma/\nu$ 相比可以忽略. 为了获得有关的数量级概念, 我们注意到, 大多数金属在直至光谱红外区附近的频率范围内 ($\lambda \gtrsim 10^{-3}$ 厘米), 电导率约为 10^{17} 秒⁻¹. 因此, 例如 $\lambda = 10^{-3}$ 厘米 ($\nu \sim 3 \times 10^{13}$ 秒⁻¹), 就有 $\sigma/\nu \sim 3000$. 金属的介电常数 ϵ 不能直接测量, 但正如我们将看到的那样, 它能从光学实验导出. 然而, 由于金属中电极化的机制与电介质的没有根本的差别, 因此可假定 ϵ 具有相同数量级. 所以, 只要波长不太短, 就可以假定

$$\frac{\mu\sigma}{\nu} = n^2\kappa \gg \mu\epsilon. \quad (23)$$

现在(17)和(22)式简化为

$$n \sim nk = \sqrt{\frac{\mu\sigma}{\nu}}. \quad (24)$$

$$d \sim \frac{\lambda_0}{4\pi} \sqrt{\frac{\nu}{\mu\sigma}} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{c\lambda_0}{\mu\sigma}} = \frac{c}{\sqrt{8\pi\mu\sigma\omega}}. \quad (25)$$

1) 这种透入深度仅占波长很小一部分的现象, 在交流电的传导中为大家所熟知, 并被工程师称为“趋肤效应”.

表 26 三个熟悉的波谱区中的辐射对铜的“透入深度” d (按静电导率 $\sigma \sim 5.14 \times 10^{17}$ 秒 $^{-1}$ 和 $\mu = 1$ 计算)

辐射	红外	微波	长无线电波
λ_0	10^{-3} 厘米	10 厘米	1000 米 = 10^5 厘米
d	6.1×10^{-7} 厘米	6.1×10^{-5} 厘米	6.1×10^{-3} 厘米

理想导体的特征是电导率无穷大 ($\sigma \rightarrow \infty$). 因为根据 (16a) 和 (16b) 式得出, $\varepsilon/\sigma = (1 - \kappa^2)/\nu\kappa$, 所以在这种极限情况下有 $\kappa^2 \rightarrow 1$, 或由 (16a) 式, $n \rightarrow \infty$. 这样的一种导体完全不允许电磁波透入到任何深度, 它将反射全部入射光(参看下面 § 13.2).

尽管透明物质的折射率可以不费力地从折射角测出, 但对金属作这种测量是极端困难的, 因为能使人射光有任何可觉察的部分透过的金属样品必定是非常薄的. 尽管如此, 孔特 (Kundt)¹⁾ 还是成功地制造了金属棱镜, 使直接测量复折射率的实部和虚部成为可能. 但通常宁可用反射实验而不愿用折射实验来测定金属的光学常数, 即宁可研究光从金属反射所经历的变化, 而不愿去测量透过金属的光.

§ 13.2 金属表面的折射和反射

我们已经看到, 对时间谐和的平面波在导电媒质中传播的基本方程与在透明电介质中传播的区别, 仅在于实常数 ε 和 κ 被复常数 $\hat{\varepsilon}$ 和 $\hat{\kappa}$ 代换了. 由此得出, 第一章中导出的公式, 就它们只涉及平面单色波的场矢量各分量间的线性关系而言, 也可应用于目前的情况. 尤其是波通过不连续表面传播的边界条件, 以及由此得出的 § 1.5 中关于折射和反射的公式, 都仍然有效.

首先考虑平面波从电介质传播到导体内, 假设这两种媒质范围无限, 二者的接触面是 $z = 0$ 平面. 与 § 1.5(8) 式类似, 折射定律为

1) A. Kundt, *Ann. d. Physik*, **34** (1888). 469.

$$\sin \theta_i = \frac{1}{n} \sin \theta_i. \quad (1)$$

由于 n 是复数, 因此 θ_i 也是复数, 所以这个量不再具有折射角的简单意义.

令入射面为 xz 平面. 导体中波的位相与空间有关的部分由 $\hat{k}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}^{(i)})$ 给出, 其中(参看 § 1.5(4) 式)

$$S_x^{(i)} = \sin \theta_i, \quad S_y^{(i)} = 0, \quad S_z^{(i)} = \cos \theta_i. \quad (2)$$

由(1)和(2)式以及 § 13.1(15) 式得出

$$S_x^{(i)} = \sin \theta_i = \frac{\sin \theta_i}{n(1 + ik)} = \frac{1 - ik}{n(1 + k^2)} \sin \theta_i, \quad (3a)$$

$$\begin{aligned} S_z^{(i)} &= \cos \theta_i = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_i} \\ &= \sqrt{1 - \frac{(1 - k^2)}{n^2(1 + k^2)^2} \sin^2 \theta_i + i \frac{2k}{n^2(1 + k^2)^2} \sin^2 \theta_i}. \end{aligned} \quad (3b)$$

把 $S_z^{(i)}$ 表示为以下的形式是方便的,

$$S_z^{(i)} = \cos \theta_i = q e^{i\gamma} \quad (4)$$

(q 和 γ 是实数). 把(3b)和(4)式平方, 并使其实部和虚部分别相等, 立即得出用 n , k 和 $\sin \theta_i$ 表示的 q 和 γ 的表达式. 即

$$\left. \begin{aligned} q^2 \cos 2\gamma &= 1 - \frac{1 - k^2}{n^2(1 + k^2)^2} \sin^2 \theta_i, \\ q^2 \sin 2\gamma &= \frac{2k}{n^2(1 + k^2)^2} \sin^2 \theta_i. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

由此得出

$$\begin{aligned} \hat{k}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}^{(i)}) &= \frac{\omega}{c} n(1 + ik)(x s_x^{(i)} + z s_z^{(i)}) \\ &= \frac{\omega}{c} n(1 + ik) \left[\frac{x(1 - ik)}{n(1 + k^2)} \sin \theta_i \right. \\ &\quad \left. + z(q \cos \gamma + iq \sin \gamma) \right] \\ &= \frac{\omega}{c} [x \sin \theta_i + z n q (\cos \gamma - k \sin \gamma) \\ &\quad + i n z q (\kappa \cos \gamma + \sin \gamma)]. \end{aligned} \quad (6)$$

鉴于等幅面由

$$z = \text{常数} \quad (7)$$

给出,因此也就是平行于界面的平面。等实相面由

$$x \sin \theta_i + z n q (\cos \gamma - \kappa \sin \gamma) = \text{常数} \quad (8)$$

给出,它们是一些平面,其法线与界面法线成 θ'_i 角,此处

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta'_i &= \frac{nq(\cos \gamma - \kappa \sin \gamma)}{\sqrt{\sin^2 \theta_i + n^2 q^2 (\cos \gamma - \kappa \sin \gamma)^2}}, \\ \sin \theta'_i &= \frac{\sin \theta_i}{\sqrt{\sin^2 \theta_i + n^2 q^2 (\cos \gamma - \kappa \sin \gamma)^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

由于等幅面与等相面一般不互相重合,因此金属中的波是一种
不均匀波。

如果用 n' 表示(9)式中的平方根,则 $\sin \theta'_i$ 的方程可写成 $\sin \theta'_i = \sin \theta_i / n'$ 的形式,即它具有斯涅耳定律的形式。但现在 n' 不仅取决于那些表征媒质的量,而且还取决于入射角 θ_i 。

在菲涅耳公式(§ 1.5.2)中用(1)式给出的复数值代替 θ_i ,还可导出折射波和反射波的振幅和位相的表达式。显式将在关于分层导电媒质理论的 § 13.4.1 中给出。这里将考虑金属的光学常数怎样从反射波的观测结果推导出来。

因已假定第一种媒质是电介质,所以反射波是具有实位相因子的寻常(均匀)波。同 § 1.5(21a)式一样,入射波的振幅分量 A_{\parallel} , A_{\perp} 与反射波的对应分量 R_{\parallel} , R_{\perp} 的关系为

$$\left. \begin{aligned} R_{\parallel} &= \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} A_{\parallel}, \\ R_{\perp} &= -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} A_{\perp}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

因为现在 θ_i 是复数,所以比值 $R_{\parallel}/A_{\parallel}$ 和 R_{\perp}/A_{\perp} 也都是复数,即反射时发生特征位相变化;因而入射的线偏振光在金属表面反射后一般将变为椭圆偏振光。令 ϕ_{\parallel} 和 ϕ_{\perp} 是上述的位相变化, ρ_{\parallel} 和 ρ_{\perp} 是反射系数的绝对值,即

$$r_{\parallel} = \frac{R_{\parallel}}{A_{\parallel}} = \rho_{\parallel} e^{i\phi_{\parallel}}, \quad r_{\perp} = \frac{R_{\perp}}{A_{\perp}} = \rho_{\perp} e^{i\phi_{\perp}}. \quad (11)$$

设入射光在方位角 α_i 上线偏振，即

$$\tan \alpha_i = \frac{A_{\perp}}{A_{\parallel}}, \quad (12)$$

并令 α_r 是反射光的方位角（一般是复数），则¹⁾

$$\tan \alpha_r = \frac{R_{\perp}}{R_{\parallel}} = - \frac{\cos(\theta_i - \theta_r)}{\cos(\theta_i + \theta_r)}, \quad \tan \alpha_i = P e^{-i\Delta} \tan \alpha_i, \quad (13)$$

式中

$$P = \frac{\rho_{\perp}}{\rho_{\parallel}}, \quad \Delta = \phi_{\parallel} - \phi_{\perp}. \quad (14)$$

注意到在下述两种情况下 α_r 是实数：

(1) 对于正入射 ($\theta_i = 0$)；则 $P = 1$ 和 $\Delta = -\pi$ ，因此 $\tan \alpha_r = -\tan \alpha_i$ 。

(2) 对于掠入射 ($\theta_i = \pi/2$)；则 $P = 1$ 和 $\Delta = 0$ ，因此 $\tan \alpha_r = \tan \alpha_i$ 。

应当记住在正入射情况下入射光线和反射光线方向相反；因而负号意味着线偏振光的方位角在空间的绝对方向是不变的。当掠入射时它的绝对方向也是不变的。

在刚考虑过的两种极端情况之间，存在一个角度 $\bar{\theta}_i$ ，称为主入射角，它使得 $\Delta = -\pi/2$ 。以这个角度入射，线偏振光一般被反射成椭圆偏振光，但正如 § 1.4(31b) 式所示（取 $\delta = \pi/2$ ），振动椭圆各轴与入射面平行或垂直。进一步令 $P \tan \alpha_i = 1$ ，则根据(13) 式， $\tan \alpha_r = -i$ ，反射光是圆偏振的。

假定对于线偏振的入射光，用一个适当的补偿器在 R_{\parallel} 和 R_{\perp} 之间引入附加相差 Δ （参看 § 14.4.2）。则总相差为零，根据(13) 式，反射光是在方位角 α'_r 上线偏振的，这里

$$\tan \alpha'_r = P \tan \alpha_i. \quad (15)$$

1) 我们在(13)式右边的指数中写 $-i\Delta$ 而不写 $+i\Delta$ ，以便于与 § 1.5 的某些结果相比较。

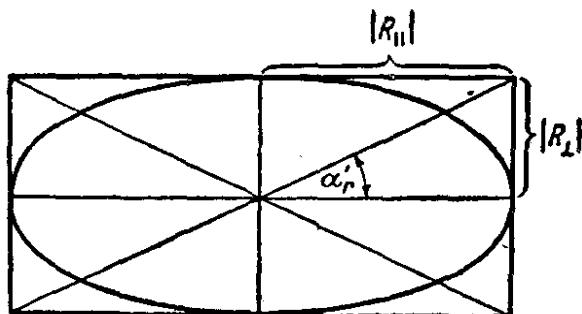


图 13.1 以主人射角从金属上反射的光的振动椭圆

由于明显的原因, 角 α'_r 称为**回复偏振角**, 不过它通常只是对于在方位角 $\alpha_i = 45^\circ$ 上**线偏振**的入射光有定义¹⁾. 与主人射角 $\theta_i = \bar{\theta}_i$ 有关的 α'_r 和 P 的值分别表示为 $\bar{\alpha}'_r$ 和 \bar{P} . 如果我们设想有一个外接于(未经补偿的)反射光振动椭圆的矩形, 反射光来自以主人射角射入的光, 矩形各边与入射面平行或垂直, 则矩形两边的比值为 $\bar{P} \tan \alpha_i$, 矩形对角线与入射面之间的夹角为 $\bar{\alpha}'_r$ (见图 13.1)

为了以后的计算, 有必要引入角 ϕ , 使得

$$\tan \phi = P; \quad (16)$$

相应于主人射角的 ϕ 值表示为 $\bar{\phi}$.

如果金属的常数 n 和 κ 是已知的, 则利用(10)和(1)式就能根据 θ_i 计算两个量 $P (= \tan \phi)$ 和 Δ . 图 13.2(a) 表示在一种典型情况下这两个量对 θ_i 的依赖关系. 为了便于比较, 图 13.2(b) 中画出从透明电介质反射的类似曲线. 光以起偏振角从透明电介质反射时所发生的 Δ 值从 $-\pi$ 到 0 的突然间断, 在光从金属表面反射时并不存在. $\tan \phi$ 变为无穷大的那一尖点同样不存在, 曲线被一条具有比较宽的极大值的平滑曲线代替了. 出现这个极大值的入射角有时称为**准起偏振角**; 它与主人射角 $\bar{\theta}_i$ 差不多相等. 通常假定这个极大值实际上就在 $\bar{\theta}_i$ 处, 如果 $n^2(1 + \kappa^2) \gg 1$, (通常就是这样, 参看表 27), 则几乎确实如此. 但一般说来, 这两个角是不同的; 例如, 银对于紫外波长 3280 埃, $n^2(1 + \kappa^2)$ 这个量很小,

1) 于是, α'_r 等于(16)式中引入的角 ϕ .

则有 $\theta_i = 47.8^\circ$ 和 $\phi = 31.8^\circ$, 而 $\psi_{\text{最大}} = 29.5^\circ$, 并大约出现在 $\theta_i = 40^\circ$ 处.

一般地说, 问题不在于从已知的 n 和 κ 值求 ψ 和 Δ , 而是根据实验观测结果从金属反射的光的振幅和相位来确定 n 和 κ .

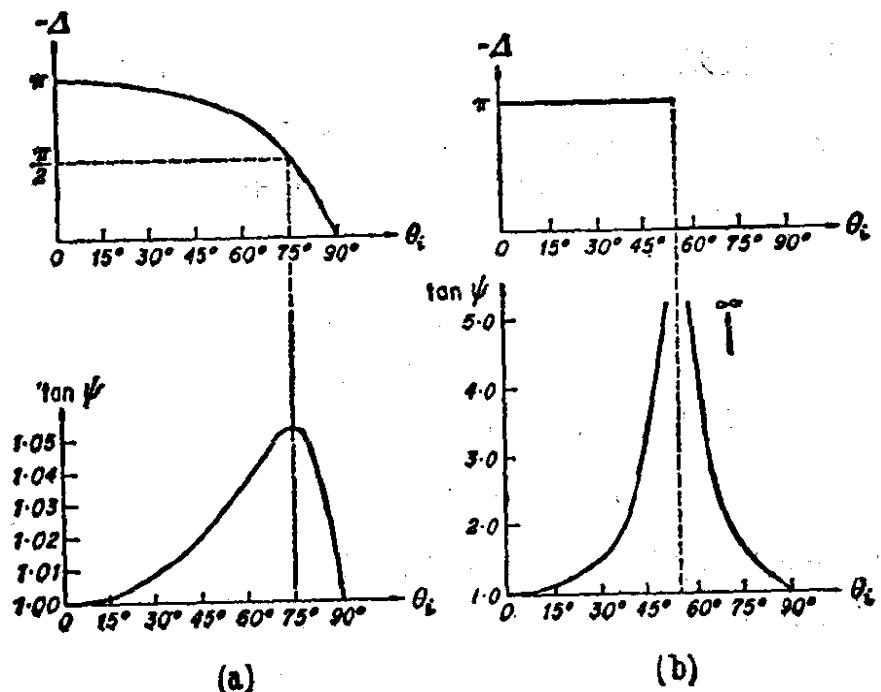


图 13.2 $-\Delta = \phi_L - \phi_i$ 和 $P = \tan \psi = \rho_L / \rho_i$, 这两个量表示从一种典型金属 (a) 或一种透明电介质 (b) 反射的光的偏振状态的变化特征.

由于 R_{\parallel} , R_{\perp} , ϕ_{\parallel} , ϕ_{\perp} , ψ 和 Δ 这些量都是 θ_i 的函数, 从而是 n 和 κ 的函数, 因此对于入射角 θ_i 某一特定值测出这些量中的任何两个量, 一般就能求出 n 和 κ 的值了. 因为在很多实验中都是确定这些量中的最后两个量, 所以我们将导出用 ψ 和 Δ 表示 n 和 κ 的基本表达式. 由(13)和(1)式得出,

$$\frac{1 - Pe^{-i\Delta}}{1 + Pe^{-i\Delta}} = - \frac{\cos \theta_i \cos \theta_i}{\sin \theta_i \sin \theta_i} = - \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}{\sin \theta_i \tan \theta_i}. \quad (17)$$

因 $P = \tan \psi$, 所以(17)式左边可以表示为下述形式

$$\frac{1 - Pe^{-i\Delta}}{1 + Pe^{-i\Delta}} = \frac{1 - e^{-i\Delta} \tan \psi}{1 + e^{-i\Delta} \tan \psi} = \frac{\cos 2\psi + i \sin 2\psi \sin \Delta}{1 + \sin 2\psi \cos \Delta}. \quad (18)$$

由(17)和(18)式得出,

$$\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}{\sin \theta_i \tan \theta_i} = -\frac{\cos 2\phi + i \sin 2\phi \sin \Delta}{1 + \sin 2\phi \cos \Delta}. \quad (19)$$

现在如果有

$$n^2(1 + \kappa^2) \gg 1, \quad (20)$$

通常在可见区就是这样, 则 $\sin^2 \theta_i$ 与 n^2 相比可以忽略, 从而得出

$$\frac{\hat{n}}{\sin \theta_i \tan \theta_i} = \frac{n(1 + i\kappa)}{\sin \theta_i \tan \theta_i} \sim -\frac{\cos 2\phi + i \sin 2\phi \sin \Delta}{1 + \sin 2\phi \cos \Delta}. \quad (21)$$

令两边实部相等, 得出

$$n \sim -\frac{\sin \theta_i \tan \theta_i \cos 2\phi}{1 + \sin 2\phi \cos \Delta}. \quad (22a)$$

令两边虚部相等, 并利用 (22a) 式, 求出

$$\kappa \sim \tan 2\phi \sin \Delta. \quad (22b)$$

根据对任一入射角测出的 ϕ 和 Δ , 就能利用这些表达式计算光学常数 n 和 κ 了。在主入射角 $\bar{\theta}_i$ 处观测的特定情况下, 有 $\Delta = -\pi/2$, $\phi = \bar{\phi}$, 而且 (22a) 和 (22b) 式简化为

$$n \sim -\sin \bar{\theta}_i \tan \bar{\theta}_i \cos 2\bar{\phi}, \quad (23a)$$

$$\kappa \sim -\tan 2\bar{\phi}. \quad (23b)$$

关于 n 和 κ 的其它公式有时也有用处。不用假设 (20) 式, 把 (19) 式平方, 则有

$$\frac{\hat{n}^2 - \sin^2 \theta_i}{\sin^2 \theta_i \tan^2 \theta_i} = \frac{\cos^2 2\phi - \sin^2 2\phi \sin^2 \Delta + i \sin 4\phi \sin \Delta}{(1 + \sin 2\phi \cos \Delta)^2}. \quad (24)$$

如果把 $\hat{n}^2 = n^2(1 - \kappa^2) + 2in^2\kappa$ 代入, 并使实部和虚部分别相等, 就得出

$$n^2(1 - \kappa^2) = \sin^2 \theta_i \left\{ 1 + \frac{\tan^2 \theta_i (\cos^2 2\phi - \sin^2 2\phi \sin^2 \Delta)}{(1 + \sin 2\phi \cos \Delta)^2} \right\}, \quad (25a)$$

$$2n^2\kappa = \frac{\sin^2 \theta_i \tan^2 \theta_i \sin 4\phi \sin \Delta}{(1 + \sin 2\phi \cos \Delta)^2}. \quad (25b)$$

特别是在主人射角处 ($\theta_i = \bar{\theta}_i$, $\Delta = -\pi/2$), 这些方程简化为¹⁾

$$n^2(1 - \kappa^2) = \sin^2 \bar{\theta}_i (1 + \tan^2 \bar{\theta}_i \cos 4\bar{\phi}), \quad (26a)$$

$$2n^2\kappa = -\sin^2 \bar{\theta}_i \tan^2 \bar{\theta}_i \sin 4\bar{\phi}. \quad (26b)$$

公式(25)不直接得出 n 和 κ , 而是得出其组合 $n^2(1 - \kappa^2)$ 和 $n^2\kappa$. 参看 § 13.1(16a) 和 (16b) 式就知道, 这些量具有直接的物理意义. 取 $\mu = 1$, (对于光学波长总是这样), $n^2(1 - \kappa^2)$ 就是介电常数, 而 $n^2\kappa$ 就是电导率与频率的比值. 根据这些量的数值, 特别是根据它们随频率的变化, 就可以得出关于金属结构的信息 (参看下面 § 13.3).

至此, 我们的分析一直集中地围绕着反射光各分量的振幅, 但正如我们即将看到的那样, 比较反射光和入射光的强度, 尤其是在长的波长处, 还可以得出有用的信息. 如果考虑正入射 ($\theta_i = 0$), 则 R_{\parallel} 与 R_{\perp} 之间的区别就消失了, 因而入射面也就不确定了, 我们可以写成

$$\mathcal{R} = \left| \frac{R_{\parallel}}{A_{\parallel}} \right|^2 - \left| \frac{R_{\perp}}{A_{\perp}} \right|^2. \quad (27)$$

如果把(1)和(10)式代入(或者在 § 1.5(23)式中用 \hat{n} 代替 n), 就得出

$$\mathcal{R} = \left| \frac{\hat{n} - 1}{\hat{n} + 1} \right|^2 = \frac{n^2(1 + \kappa^2) + 1 - 2n}{n^2(1 + \kappa^2) + 1 + 2n}. \quad (28)$$

根据反射光的测量, 已确定了很多金属的光学常数. 表 27 中给出了不同的观测者对可见光谱黄区一种波长求出的各常数值. 金属是按照它们的反射率 \mathcal{R} 的次序排列的. 注意到在所有的情况下 $n < n\kappa$, 因此根据 § 13.1(16a)式, $\mu\varepsilon$ 是负的, (因为对于光

1) 象(23)和(26)这类只涉及在主人射角处测量的方程, 比起更一般的表达式(22)或(25)要简单些, 只是由于这个原因, 很多实验工作者都限于在这个角度处测量. 在其它入射角处, 实验准确度可能更高些. 关于方便地选择入射角的讨论, 可参看 P. Drude, *Ann. d. Physik*, **39** (1890), 504; J. R. Collins 和 R. O. Bock, *Rev. Sci. Instr.*, **14** (1943), 135; I. Simon, *J. Opt. Soc. Amer.*, **41** (1951), 336; D. G. Avery, *Proc. Phys. Soc.*, **65** (1952), 425; R. W. Ditchburn, *J. Opt. Soc. Amer.*, **45** (1955), 743.

学波长 $\mu \sim 1$), 结果 ϵ 也是负的.乍看起来似乎负的介电常数没有物理意义可言. 以后将指出并不是这样, 负的 ϵ 值可根据关于电子传导机制的某些简单假设来解释. 从表上看来好象 $n < 1$ 的值¹⁾ 与高反射率有联系, 但一般说来并不是这样.

不能期望表 27 中列出的 n 与 $n\kappa$ 的值与根据近似公式 § 13.1(17)的计算值一致. 这些公式是根据电导率 σ 为实数这一假设导出的, 而在 § 13.3 中将指出, 仅在低频时才在良好的近似程度上满足这个假设. 在 § 13.3 中, 根据一个初级的模型考察了 σ 对频率的依赖关系, 通过这一节的讨论将搞清楚: 对相应于表 27 所用的钠 D 线的高频 ($\omega \sim 3.2 \times 10^5$ 秒⁻¹), σ 是复数, 并且其虚部实际上明显大于其实部. 由实验测定的金属光学常数对波长的依赖关系, 确实显示出比我们的公式所预期的要复杂得多的性质(见图 13.3).

根据哈根 (Hagen) 和鲁本斯 (Rubens)²⁾ 及其后工作者的研究, 利用我们大致讲过的初级理论并取 σ 近似为其静态值计算得出的多种金属反射率, 与实验结果很符合, 只要辐射波长 λ 不短于 10^{-3} 厘米左右. 如果用 § 13.1(24)式代替 n 和 $n\kappa$, 则(28)式变为(取 $\mu = 1$)

$$\mathcal{R} = \frac{2 \frac{\sigma}{\nu} + 1 - 2 \sqrt{\frac{\sigma}{\nu}}}{2 \frac{\sigma}{\nu} + 1 + 2 \sqrt{\frac{\sigma}{\nu}}}. \quad (29)$$

当 ν/σ 足够小时, 与其他项相比, 可略去 1, 并可把(29)式按 $\sqrt{\nu/\sigma}$ 的幂次展开. 由此得出

$$\mathcal{R} \sim 1 - 2 \sqrt{\frac{\nu}{\sigma}} + \dots \quad (30)$$

1) 当 $n < 1$ 时, 实相速 c/n 超过了真空中的光速, 但按 § 13.3 节末的解释, 这与相对论并不矛盾.

2) E. Hagen 和 H. Rubens, *Ann. d. Physik*, (4), 11 (1903), 873.

表27 金属的光学常数,对于波长 $\lambda = 5893$ 埃(钠D线)的光

[摘自 H. H. Landolt 和 R. Börnstein, *Phys. Chem. Tabellen*,
(5 Aufl., Berlin, 1923; 1—3 Ergänzungsb., Berlin, 1927—1936)]

金 属	n	nk	\mathcal{R}	观 测 者	
钠, 固态	0.044	2.42	0.97	Duncan	1913
银, 块状	0.20	3.44	0.94	Oppitz	1917
镁, 块状	0.37	4.42	0.93	Drude	1890
钾, 熔融的	0.081	1.81	0.92	Nathanson	1928
镉, 块状	1.13	5.01 —	0.84	Drude	1890
铝, 块状	1.44	5.23	0.83	Drude	1890
锡, 块状	1.48	5.25	0.83	Drude	1890
金, 电解的	0.47	2.83	0.82	Meier	1910
汞, 液态	1.60	4.80	0.77	Lowery 和 Moore	1932
锌, 块状	1.93	4.66	0.75	Meier	1910
铜, 块状	0.62	2.57	0.73	Oppitz	1917
镓, 单晶	3.69	5.43	0.71	Lange	1935
锑, 块状	3.04	4.94	0.70	Drude	1890
钴, 块状	2.12	4.04	0.68	Minor	1904
镍, 电解的	1.58	3.42	0.66	Meier	1910
锰, 块状	2.41	3.88	0.64	Littleton	1911
铅, 块状	2.01	3.48	0.62	Drude	1890
铂, 电解的	2.63	3.54	0.59	Meier	1910
铼, 块状	3.09	3.41	0.57	Lange	1935
钨, 块状	3.46	3.25	0.54	Littleton	1912
铋, 块状	1.78	2.80	0.54	Meier	1910
铁, 蒸发的	1.51	1.63	0.33	Meier	1910

哈根和鲁本斯得出, 波长 $\lambda = 1.2 \times 10^{-3}$ 厘米时, 铜的 $1 - \mathcal{R} = 1.6 \times 10^{-2}$, 而用电导率静态值代替 σ , 由(30)式得出 $1 - \mathcal{R} = 1.4 \times 10^{-2}$.

当波长进一步增大时, \mathcal{R} 变得如此接近于 1, 使得难以以任何准确度测量 $1 - \mathcal{R}$. 但哈根和鲁本斯利用一种间接的方法得出了有用的估计值. 根据热辐射的基尔霍夫定律¹⁾, 一个物体的发

1) 例如参看 M. Planck, *Theory of Heat* [London, Macmillan, 1932], p. 189; 或 A. Sommerfeld, *Thermodynamics and Statistical Mechanics*, edited by Bopp and J. Meixner (New York, Academic Press, 1956), p. 136.

射本领 E_ν 与吸收本领 A_ν 的比值¹⁾ 只取决于频率 ν 和物体的温度 T , 而与物体的性质无关, 即

$$\frac{E_\nu}{A_\nu} = K(\nu, T), \quad (31)$$

式中 $K(\nu, T)$ 是 ν 和 T 的普适函数. 显然, K 等于吸收本领为 1 的物体(所谓黑体)的发射本领. 现在假定辐射落在这样厚的金属样品上, 使得所有不被反射的入射能量都在它的内部被吸收掉. 则

$$A_\nu = 1 - \mathcal{R}, \quad (32)$$

由(30),(31)和(32)式得出

$$A_\nu = \frac{E_\nu}{K(\nu, T)} = 2 \sqrt{\frac{\nu}{\sigma}}, \quad (33)$$

或

$$\sqrt{\sigma} E_\nu = 2 \sqrt{\nu} K(\nu, T). \quad (34)$$

这个方程的右边与金属的性质无关. 它是众所周知的 ν 和 T 的函数, 函数 $K(\nu, T)$ 从实验和理论两方面都精确地知道了, 并且用普朗克的著名公式²⁾ 来表示.

由此得出, 通过确定电导率 σ 及作为频率和温度函数的发射本领 E_ν , 并检查乘积 $\sqrt{\sigma} E_\nu$ 是否满足(34)式, 即使 \mathcal{R} 非常接近于 1 时, 仍能检验公式(30)有效. 哈根和鲁本斯为此目的利用所谓剩余射线证实了对于长的红外波长确是如此. 剩余射线就是从某些晶体(例如萤石, 岩盐或钾盐)上重复反射以后从一个较宽的光谱范围内剩留下来的射线. 上述物质在 $\lambda = 22.9$ 微米到 63 微米的光谱区内有明显的吸收极大值, 因此[参看(28)式], 对于这些波长有高选择性反射率.

图13.3 中给出了银的曲线, 说明由实验测定的 n 和 nk 对波长

1) 发射本领是指物体在单位时间内发射的辐射能量, 吸收本领是指落在物体上的辐射能量被物体吸收的分数.

2) 例如参看 M. Born, *Atomic Physics* (London and Glasgow, Blackie and Son, 5th ed., 1951), p. 238.

的依赖关系。为了作比较，还画出了由 § 13.1(24) 式算出的理论曲线。标度是对数的，因此理论曲线是直线

$$\log n \sim \log nk \sim \frac{1}{2} \log \lambda + C,$$

式中， $C = \log \sqrt{\mu\sigma/c}$ 。根据 § 13.1(24) 式和本节(30)式，还可以用反射率来表示 n 和 nk （对于长波）：

$$n \sim nk \sim \frac{2}{1 - R}. \quad (35)$$

为了作比较，图中还画出了函数 $2/(1 - R)$ 。我们看到， nk 的实验曲线在 $\lambda = 3000$ 埃附近有一个尖锐的极小值，而 n 的曲线在 $\lambda = 5000$ 埃附近有一个平展得多的极小值。在 $\lambda = 3300$ 埃附

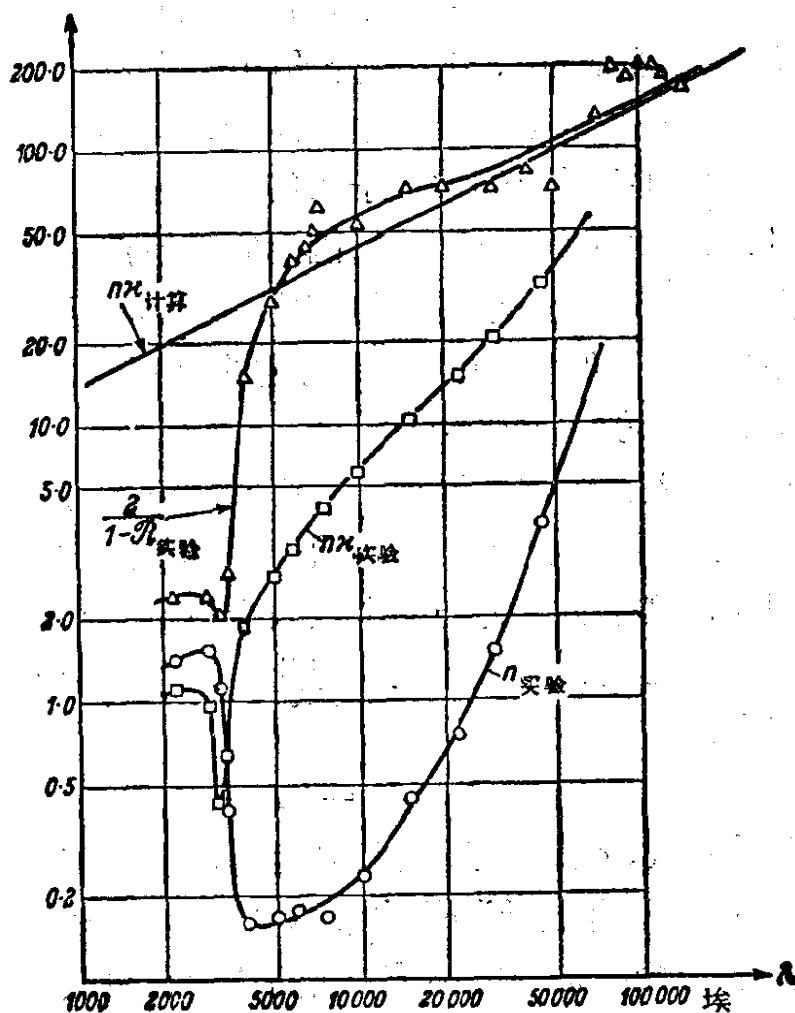


图 13.3 银的光学常数作为波长的函数。下标“实验”指的是由实验得到的数据。标度是对数的

近,看出银的反射率很小。

随着波长的增大,实验曲线就接近由电学测得的电导率所算出的理论曲线了。

§ 13.3 金属光学常数的初等电子理论

在前几节中已指出,电导率 σ 同介电常数 ϵ 与磁导率 μ 一样,不真是媒质的常数,而依赖于场的频率 ω 。现在将介绍一个粗糙和简单的模型 [杜鲁德 (P. Drude) 提出的],由此至少对于足够低的频率可导出 σ 对频率的依赖关系。

让我们首先忆及,电介质对外电磁场的响应主要是由那些靠准弹性力束缚于原子核周围的电子的行为决定的(参看 § 2.3.4)。在导电媒质(例如金属)中,与在电介质中不同,不是全部电子都被原子束缚着。有一些电子在分子之间运动,被称为自由电子,可把它们同其他如电介质中的被原子束缚着的电子区分开。不存在外电磁场时,自由电子作无规运动,因而它们不产生净电流。加上外场时,自由电子获得一个附加的速度,它们的运动变得更为有序,虽然这些电子偶尔仍与(本质上稳定的)原子相碰撞。电子这种更为有序的运动引起感生电流。

我们不能深入讨论这一过程,它必须用气体分子运动论的统计方法来处理。看来很合理的结果是,平均的总效果与一个阻尼力的效果相同,这个阻尼力与一个代表全体电子平均情况的模型电子的速度成正比,而方向相反。因此,这个模型电子在电场 E 中的运动方程为

$$m\ddot{r} + m\beta\dot{r} = eE, \quad (1)$$

式中 m 是电子质量, e 是电子电荷, β 是单位质量的阻尼常数。与等式右方含有一个“有效场” E' 的束缚电子运动方程 [§ 2.3(33)] 不同,(1)式右方含有宏观电场 E ,我们认为它更贴切地表示作用在导体中一个自由电子上的场。

为了理解(1)式中阻尼常数 β 的意义,首先考虑没有电场的情

况。如果 $E = 0$, 则有

$$\ddot{r} + \beta \dot{r} = 0, \quad (2)$$

其解为

$$r = r_0 - \frac{1}{\beta} v_0 e^{-\beta t}, \quad \dot{r} = v = v_0 e^{-\beta t}; \quad (3)$$

可见在这种情况下, 有初速度 v_0 的模型电子按指数方式变慢, β 为其衰变常数。时间 $\tau = 1/\beta$ 称为衰变时间或弛豫时间。它的典型数量级是 10^{-14} 秒。

现在假定有一个时间谐场 $E = E_0 e^{-i\omega t}$ 。则(1)式的解是两项之和, 一项表示衰变运动[齐次方程(2)的解], 另一项表示周期运动

$$r = -\frac{e}{m(\omega^2 + i\beta\omega)} E. \quad (4)$$

这种周期运动在媒质中产生电流。如果每单位体积有 N 个自由电子, 则电流密度 j 由下式给出,

$$j = Ne\dot{r} = \frac{Ne^2}{m(\beta - i\omega)} E. \quad (5)$$

比较(5)式与结构关系式 § 1.1(9), 即 $j = \sigma E$, 可看出

$$\sigma = \frac{Ne^2}{m(\beta - i\omega)}. \quad (6)$$

如前所述, τ 的典型数量级是 10^{-14} 秒, 因此 β 的数量级是 10^{14} 秒⁻¹。于是由(6)式清楚得出, 当 $\omega \ll \beta$ 时, σ 可用其静态值 $\sigma_0 = Ne^2/m\beta$ (当然是实数)作近似。另一方面, 当 $\omega \gg \beta$ 时(在光频区情况通常是这样), σ 的虚部将变得比它的实部大。因此, 显然仅当频率 $\omega \ll \beta$ 时, 才能认为按照导出公式 § 13.1(16) 与 § 13.1(17) 的办法来区分复介电常数的实部与虚部是合理的。

根据 § 13.1(16) 式, 复介电常数 ϵ 与复折射率 n 对频率的依赖关系, 不仅是由于电导率 σ (自由电子的贡献) 依赖于频率引起的, 而且是由于实介电常数 ϵ (束缚电子的贡献) 依赖于频率引起的。对足够低的频率, 可以证明, 束缚电子的贡献比自由电子的贡

献要小得多。既然如此，就可以在 § 13.1(16)式中用 1 替代 ϵ ，用 (6) 式代替 σ 。如果假定导体是非磁性的 ($\mu = 1$)，则可得出 $\hat{\epsilon}$ 的下列表达式：

$$\hat{\epsilon} = \hat{n}^2 = 1 - \frac{4\pi Ne^2}{m} \frac{1}{\omega(\omega + i\beta)}. \quad (7)$$

把(7)式中实部与虚部分开，并应用 § 13.1(15a)式，即 $\hat{n}^2 = n^2(1 + 2i\kappa - \kappa^2)$ ，得出公式

$$\text{Re}\hat{\epsilon} \equiv n^2(1 - \kappa^2) = 1 - \frac{4\pi Ne^2}{m(\omega^2 + \beta^2)}, \quad (8a)$$

$$\frac{1}{2} (\text{Im}\hat{\epsilon}) \equiv n^2\kappa = \frac{2\pi Ne^2\beta}{m\omega(\omega^2 + \beta^2)}. \quad (8b)$$

由(8a)不难导出，如果 β 足够小，则频率足够低时 $\hat{\epsilon}$ 的实部是负的，但 ω 很大时 $\hat{\epsilon}$ 的实部显然是正的。 $\hat{\epsilon}$ 的实部变号所对应的频率临界值 ω_c 由下式给出：

$$\omega_c^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m} - \beta^2. \quad (9)$$

可利用这一临界值改写(8)式，得出

$$\text{Re}\hat{\epsilon} \equiv n^2(1 - \kappa^2) = 1 - \frac{\omega_c^2 + \beta^2}{\omega^2 + \beta^2}, \quad (10a)$$

$$\frac{1}{2} (\text{Im}\hat{\epsilon}) \equiv n^2\kappa = \frac{\beta(\omega_c^2 + \beta^2)}{2\omega(\omega^2 + \beta^2)}. \quad (10b)$$

现在假定 ω_c^2 比 β^2 大很多，因此可用下式代替(9)式，即

$$\omega_c^2 \sim \frac{4\pi Ne^2}{m}. \quad (11)$$

如果再限于讨论足够高的频率 ($\omega^2 \gg \beta^2$)，则可得出更简单的公式代替(10)式，即

$$\text{Re}\hat{\epsilon} \equiv n^2(1 - \kappa^2) \sim 1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2, \quad (12a)$$

$$\frac{1}{2} (\text{Im}\hat{\epsilon}) \equiv n^2\kappa \sim \frac{\beta}{2\omega} \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2. \quad (12b)$$

由(12a)式得出，当 $\omega^2 < \omega_c^2$ (但仍有 $\omega^2 \gg \beta^2$) 时， $\hat{\epsilon}$ 的实部

是负的，并且 $\kappa > 1$ 。 ϵ 的实部为负值反映下述事实，即在此情况下电子振动的位相与激发场差四分之一周期，正如由(5)式明显看到的那样。对于足够低的 ω 值，衰减指数 κ 变得比 1 大，并且不难看出[对于正入射，由 § 13.2(28) 式给出的]反射率具有接近于 1 的值。另一方面，当 $\omega^2 > \omega_c^2$ (但 $\omega^2 \gg \beta^2$) 时， ϵ 的实部显然是正的，因此 $\kappa < 1$ ；当 ω 足够大时， κ 变得比 1 小很多，并且 ϵ 的虚部变得比其实部小很多。这时必预料到金属的性状在本质上象电介质一样。

碱金属正好呈现出这些现象，在长波长区，它们不透明并且高反射，而在可见或紫外区内某一临界波长处，它们变得透明了，并且具有较低的吸收。表 28 第二行给出了由实验确定的发生这一转变的波长。第三行是由近似公式 (11) 确定的这些临界波长 $\lambda_c = 2\pi c/\omega_c$ ，式(11)中取单位体积自由电子数与原子数 N 相同。可以看出，除了钠以外，这两行的数值是不同的。最后一行给出“有效”电子数 $N_{\text{有效}}$ 与原子数的比值，它由公式

$$\frac{N_{\text{有效}}}{N} = \frac{(\lambda_c)^2_{\text{计算}}}{(\lambda_c)^2_{\text{观测}}} \quad (13)$$

确定。可以看出，这个数目是 1 的数量级，但（除了钠以外）都比 1 小得多。因此，初等理论给出各参数的正确数量级，但并不详细描述现象。

表 28 临界波长 λ_c ，低于此值时碱金属变得透明，
高于此值时它们不透明并且高反射

金 属	锂	钠	钾	铷	铯
$(\lambda_c)_{\text{观测}}$	2050 埃	2100 埃	3150 埃	3600 埃	4400 埃
$(\lambda_c)_{\text{计算}}$	1500 埃	2100 埃	2900 埃	3200 埃	3600 埃
$N_{\text{有效}}/N$	0.54	1.00	0.85	0.79	0.67

利用含有衰变常数 β 的更精确的公式(10)来代替粗糙近似式(12)，理论可稍加改进。然而由于高频电磁场与金属相互作用中所涉及的一些物理过程的复杂性，因此不可能通过简单的修改来

显著扩大本节概述的初等经典理论的有效范围。金属光学性质的完全满意的理论只能在量子力学的基础上得出。

§ 13.4 波在分层导电媒质中的传播。金属膜的理论

我们已在 § 1.6 中研究过电磁波在分层电介质中的传播，亦即在其光学性质只依赖于一个笛卡儿坐标的电介质中的传播。现在将扼要讨论把这一理论推广到含有吸收元的分层媒质。因此假定除了 ϵ 和 μ 是单独一个坐标的函数以外，还可以有一个有限的电导率 σ ，它同样只是这一个坐标的函数。

如 § 13.2 开始所述，只要用复介电常数 $\hat{\epsilon} = \epsilon + i4\pi\sigma/\omega$ 与复波数 $\hat{k} = \omega \sqrt{\mu(\epsilon + i4\pi\sigma/\omega)}/c$ 分别代替实介电常数 ϵ 与实波数 k ，则第一章的公式就其只涉及时间谐波的场矢量各分量之间的线性关系而言，对导电媒质仍保持其有效性。因此，只要在适当的公式中作这种形式变换，就可以把 § 1.6 中所发展的分层电介质理论的基本公式接受下来。特别是，由此得出分层吸收媒质可用一个 2×2 矩阵来表征。与分层电介质的情况不同，矩阵元不再是实数或纯虚数，而是既含实部又含虚部的复数。

我们将通过详细研究两种有实际意义的情况来阐明这一理论。

§ 13.4.1 透明衬底上的吸收膜

考虑位于两种电介质之间的一层平面平行吸收膜（图 13.4）。由 § 1.6(55)–(58) 式，用 $\hat{n}_2 = n_2(1 + ik_2)$ 代替 n_2 ，就得到平面单色波被膜反射与透射的公式。令

$$\hat{n}_2 \cos \theta_2 = u_2 + iv_2 \quad (1)$$

是方便的，式中 u_2 与 v_2 是实数。我们可以很容易用入射角及表征第一种与第二种媒质光学性质的一些常数来表示 u_2 与 v_2 。把(1)式平方，并利用折射定律 $\hat{n}_2 \sin \theta_2 = n_1 \sin \theta_1$ ，得出

$$(u_2 + iv_2)^2 = \hat{n}_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1. \quad (2)$$

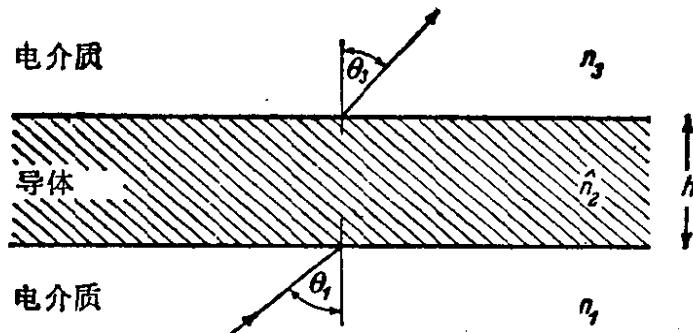


图 13.4 位于两种电介质之间的吸收膜

使实部与虚部分别相等, 给出

$$\left. \begin{aligned} u_2^2 - v_2^2 &= n_2^2(1 - \kappa_2^2) - n_1^2 \sin^2 \theta_1, \\ u_2 v_2 &= n_2^2 \kappa_2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

由(3)式求出

$$\left. \begin{aligned} 2u_2^2 &= n_2^2(1 - \kappa_2^2) - n_1^2 \sin^2 \theta_1 \\ &\quad + \sqrt{[n_2^2(1 - \kappa_2^2) - n_1^2 \sin^2 \theta_1]^2 + 4n_2^4 \kappa_2^2}, \\ 2v_2^2 &= -[n_2^2(1 - \kappa_2^2) - n_1^2 \sin^2 \theta_1] \\ &\quad + \sqrt{[n_2^2(1 - \kappa_2^2) - n_1^2 \sin^2 \theta_1]^2 + 4n_2^4 \kappa_2^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其次, 必须分别计算分界面 1—2 与 2—3 的反射与透射系数, 因为这些系数都出现在膜的反射与透射系数的公式中。我们分别考虑入射波的电矢量垂直或平行于入射面时的情况。

电矢量垂直于入射面 (TE 波)

在这种情况下, 在 § 1.6(55) 式中用 $n_2 \cos \theta_2 = u_2 + i v_2$ 代替 $n_2 \cos \theta_2$, 则有

$$r_{12} = \rho_{12} e^{i \phi_{12}} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - (u_2 + i v_2)}{n_1 \cos \theta_1 + (u_2 + i v_2)}. \quad (5)$$

以后需要振幅 ρ_{12} 与位相变化 ϕ_{12} 的显式。由(5)式得出:

$$\rho_{12}^2 = \frac{(n_1 \cos \theta_1 - u_2)^2 + v_2^2}{(n_1 \cos \theta_1 + u_2)^2 + v_2^2}, \quad \tan \phi_{12} = \frac{2 v_2 n_1 \cos \theta_1}{u_2^2 + v_2^2 - n_1^2 \cos^2 \theta_1}. \quad (6)$$

对于在第一个分界面的透射, 由 § 1.6(56) 式得出

$$t_{12} = \tau_{12} e^{i \chi_{12}} = \frac{2 n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + u_2 + i v_2}, \quad (7)$$

上式给出

$$r_{12}^2 = \frac{(2n_1 \cos \theta_1)^2}{(n_1 \cos \theta_1 + u_2)^2 + v_2^2}, \quad \tan \chi_{12} = -\frac{v_2}{n_1 \cos \theta_1 + u_2}. \quad (8)$$

用严格类似的方法，得出与第二个分界面的反射与透射有关的下列表达式：

$$\rho_{23}^2 = \frac{(n_3 \cos \theta_3 - u_2)^2 + v_2^2}{(n_3 \cos \theta_3 + u_2)^2 + v_2^2}, \quad \tan \phi_{23} = \frac{2v_2 n_3 \cos \theta_3}{u_2^2 + v_2^2 - n_3^2 \cos^2 \theta_3}, \quad (9)$$

$$r_{23}^2 = \frac{4(u_2^2 + v_2^2)}{(n_3 \cos \theta_3 + u_2)^2 + v_2^2}, \quad \tan \chi_{23} = \frac{v_2 n_3 \cos \theta_3}{u_2^2 + v_2^2 + u_2 n_3 \cos \theta_3}. \quad (10)$$

根据折射定律 $n_1 \sin \theta_1 = \hat{n}_2 \sin \theta_2$, $\hat{n}_2 \sin \theta_2 = n_3 \sin \theta_3$, 所以角 θ_3 可用公式

$$n_3 \sin \theta_3 = n_1 \sin \theta_1 \quad (11)$$

由 θ_1 确定。

电矢量平行于入射面(TM 波)

如 § 1.6.3 所述, 假定媒质是非磁性的, 则 TM 波的反射与透射系数的公式可由 TE 波的相应公式简单地用 $q_i = \cos \theta_i / n_i$ 代换 $P_i = n_i \cos \theta_i$ 各量而得出。现在, 量 r 与 ϵ 指的是磁矢量的比值, 而不是电矢量的比值。特别是, 由 § 1.6(55) 式则有

$$\begin{aligned} r_{12} &= \rho_{12} e^{i\phi_{12}} = \frac{\frac{1}{n_1} \cos \theta_1 - \frac{1}{\hat{n}_2} \cos \theta_2}{\frac{1}{n_1} \cos \theta_1 + \frac{1}{\hat{n}_2} \cos \theta_2} = \frac{\hat{n}_2^2 \cos \theta_1 - n_1 \hat{n}_2 \cos \theta_2}{\hat{n}_2^2 \cos \theta_1 + n_1 \hat{n}_2 \cos \theta_2} \\ &= \frac{[n_2^2(1 - \kappa_2^2) + 2in_2^2\kappa_2] \cos \theta_1 - n_1(u_2 + iv_2)}{[n_2^2(1 - \kappa_2^2) + 2in_2^2\kappa_2] \cos \theta_1 + n_1(u_2 + iv_2)}. \end{aligned} \quad (12)$$

由(12)式经简单计算后求出

$$\left. \begin{aligned} \rho_{12}^2 &= \frac{[n_2^2(1 - \kappa_2^2) \cos \theta_1 - n_1 u_2]^2 + [2n_2^2 \kappa_2 \cos \theta_1 - n_1 v_2]^2}{[n_2^2(1 - \kappa_2^2) \cos \theta_1 + n_1 u_2]^2 + [2n_2^2 \kappa_2 \cos \theta_1 + n_1 v_2]^2}, \\ \tan \phi_{12} &= 2n_1 n_2^2 \cos \theta_1 \frac{2\kappa_2 u_2 - (1 - \kappa_2^2) v_2}{n_2^4 (1 + \kappa_2^2)^2 \cos^2 \theta_1 - n_1^2 (u_2^2 + v_2^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

由 § 1.6(56) 式用 $\cos \theta_i / n$ 代换 $n_i \cos \theta_i$ 得到比值 r_{12} ,

$$\begin{aligned}
t_{12} &= \tau_{12} e^{i\chi_{12}} = \frac{\frac{2}{n_1} \cos \theta_1}{\frac{1}{n_1} \cos \theta_1 + \frac{1}{n_2} \cos \theta_2} \\
&= \frac{2[n_2^2(1 - \kappa_2^2) + 2in_2^2\kappa_2] \cos \theta_1}{[n_2^2(1 - \kappa_2^2) + 2in_2^2\kappa_2] \cos \theta_1 + n_1(u_2 + iv_2)}. \quad (14)
\end{aligned}$$

由(14)式求出

$$\left. \begin{aligned}
\tau_{12}^2 &= \frac{4n_2^4(1 + \kappa_2^2)^2 \cos^2 \theta_1}{[n_2^2(1 - \kappa_2^2) \cos \theta_1 + n_1u_2]^2 + [2n_2^2\kappa_2 \cos \theta_1 + n_1v_2]^2}, \\
\tan \chi_{12} &= \frac{n_1[2\kappa_2 u_2 - (1 - \kappa_2^2)v_2]}{n_2^2(1 + \kappa_2^2)^2 \cos \theta_1 + n_1[(1 - \kappa_2^2)u_2 + 2\kappa_2 v_2]}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

用类似的方法得出关于第二个分界面的反射与透射系数的下列公式:

$$\left. \begin{aligned}
\rho_{23}^2 &= \frac{[n_2^2(1 - \kappa_2^2) \cos \theta_3 - n_3u_2]^2 + [2n_2^2\kappa_2 \cos \theta_3 - n_3v_2]^2}{[n_2^2(1 - \kappa_2^2) \cos \theta_3 + n_3u_2]^2 + [2n_2^2\kappa_2 \cos \theta_3 + n_3v_2]^2}, \\
\tan \phi_{23} &= 2n_3n_2^2 \cos \theta_3 \frac{2\kappa_2 u_2 - (1 - \kappa_2^2)v_2}{n_2^4(1 + \kappa_2^2)^2 \cos^2 \theta_3 - n_3^2(u_2^2 + v_2^2)}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

及

$$\left. \begin{aligned}
\tau_{23}^2 &= \frac{4n_3^2(u_2^2 + v_2^2)}{[n_3u_2 + n_2^2(1 - \kappa_2^2) \cos \theta_3]^2 + [n_3v_2 + 2n_2^2\kappa_2 \cos \theta_3]^2}, \\
\tan \chi_{23} &= \frac{n_2^2[(1 - \kappa_2^2)^2 v_2 - 2\kappa_2 u_2] \cos \theta_3}{n_3[u_2^2 + v_2^2] + n_2^2[(1 - \kappa_2^2)^2 u_2 + 2\kappa_2 v_2] \cos \theta_3}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

根据对 ρ_{12} , ϕ_{12} 等量的了解, 可立即算出膜的复反射与透射系数. 令

$$\eta = \frac{2\pi}{\lambda_0} h \quad (18)$$

是有用处的, 因此

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_2 h \cos \theta_2 = (u_2 + iv_2)\eta. \quad (19)$$

现在 § 1.6(57)–(58)式变为

$$r = \rho e^{i\delta_r} = \frac{\rho_{12} e^{i\phi_{12}} + \rho_{23} e^{-2v_2\eta} e^{i(\phi_{23} + 2u_2\eta)}}{1 + \rho_{12}\rho_{23} e^{-2v_2\eta} e^{i(\phi_{12} + \phi_{23} + 2u_2\eta)}}, \quad (20)$$

$$t = \tau e^{i\delta_t} = \frac{\tau_{12}\tau_{23}e^{-\nu_2\eta}e^{i[x_{12}+x_{23}+u_2\eta]}}{1 + \rho_{12}\rho_{23}e^{-2\nu_2\eta}e^{i[\phi_{12}+\phi_{23}+2u_2\eta]}}. \quad (21)$$

由(20)式经简单计算后得出反射率 \mathcal{R} 与反射时位相变化 δ_r 的下列表达式:

$$\mathcal{R} = |t|^2 = \frac{\rho_{12}^2 e^{2\nu_2\eta} + \rho_{23}^2 e^{-2\nu_2\eta} + 2\rho_{12}\rho_{23}\cos[\phi_{23} - \phi_{12} + 2u_2\eta]}{e^{2\nu_2\eta} + \rho_{12}^2\rho_{23}^2 e^{-2\nu_2\eta} + 2\rho_{12}\rho_{23}\cos[\phi_{12} + \phi_{23} + 2u_2\eta]}, \quad (22)$$

$$\tan \delta_r = \frac{\rho_{23}(1 - \rho_{12}^2)\sin(2u_2\eta + \phi_{23}) + \rho_{12}[e^{2\nu_2\eta} - \rho_{23}^2 e^{-2\nu_2\eta}]\sin \phi_{12}}{\rho_{23}(1 + \rho_{12}^2)\cos(2u_2\eta + \phi_{23}) + \rho_{12}[e^{2\nu_2\eta} + \rho_{23}^2 e^{-2\nu_2\eta}]\cos \phi_{12}}. \quad (23)$$

这些公式对 TE 波以及 TM 波都是有效的。在前一种情况下必须以(6)与(9)式给出的值代替 ρ 与 ϕ ，在后一种情况下它们由(13)与(16)式给出。

用类似的方法由(21)式得出透射率 \mathcal{T} 与透射时位相变化 δ_t 的下列表达式:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{n_3 \cos \theta_3}{n_1 \cos \theta_1} |t|^2 = \frac{n_3 \cos \theta_3}{n_1 \cos \theta_1} \\ &\times \frac{\tau_{12}^2 \tau_{23}^2 e^{-2\nu_2\eta}}{1 + \rho_{12}^2 \rho_{23}^2 e^{-4\nu_2\eta} + 2\rho_{12}\rho_{23}e^{-2\nu_2\eta}\cos[\phi_{12} + \phi_{23} + 2u_2\eta]}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} &\tan[\delta_t - \chi_{12} - \chi_{23} + u_2\eta] \\ &= \frac{e^{2\nu_2\eta} \sin 2u_2\eta - \rho_{12}\rho_{23} \sin(\phi_{12} + \phi_{23})}{e^{2\nu_2\eta} \cos 2u_2\eta + \rho_{12}\rho_{23} \cos(\phi_{12} + \phi_{23})}. \end{aligned} \quad (25)$$

对于 TM 波，必须用 $(\cos \theta_3/n_3)/(\cos \theta_1/n_1)$ 代换上式的因子 $n_3 \cos \theta_3/n_1 \cos \theta_1$ 。对于 TE 波，在这些公式中要代入由(6)，(8)，(9)及(10)式给出的值，而对于 TM 波，那些相应的值由(13)，(15)，(16)及(17)式给出。

也许值得重申一遍，反射时的位相变化 (δ_r) 涉及第一个界面 (1—2)，而透射时的位相变化 (δ_t) 涉及第二个界面。

(22)—(25)式可计算用来表征被一已知光学性质及已规定厚度的吸收膜反射与透射的四个基本量。图 13.5 表明，在某些典型

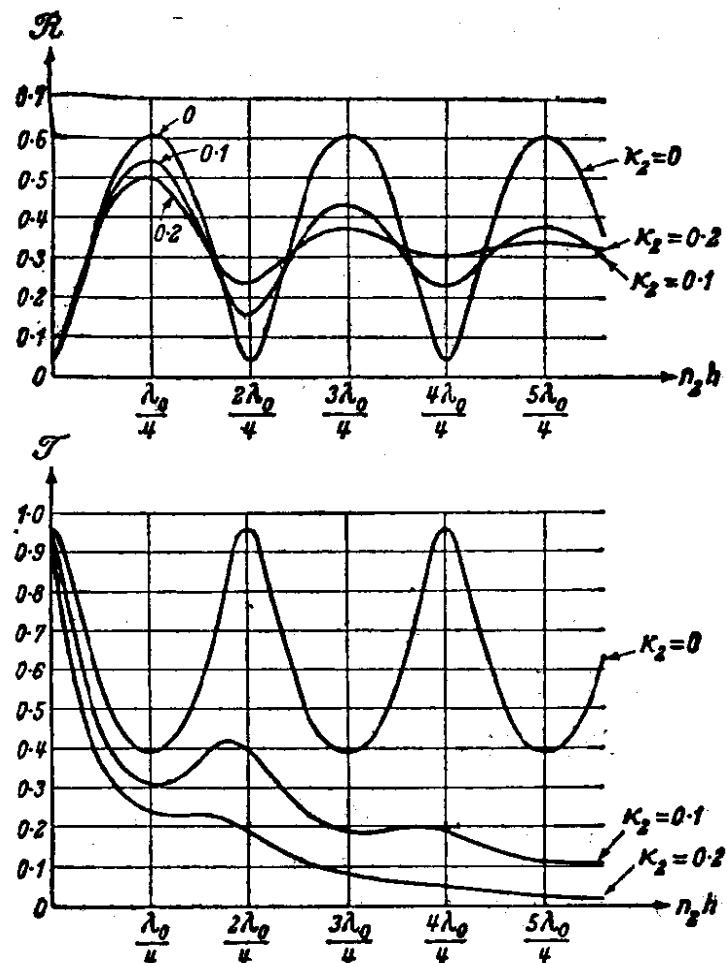


图 13.5 金属膜的反射率 \mathcal{R} 与透射率 \mathcal{T} 作为其光学厚度的函数 ($n_1 = 1, n_2 = 3.5, n_3 = 1.5, \kappa_1 = \kappa_3 = 0; \theta_1 = 0$) [引自 K. Hammer, Z. Tech. Phys., 24 (1943), 169.]

情况下反射率与透射率对于膜的厚度的依赖关系。

对于一个非吸收膜, \mathcal{R} 与 \mathcal{T} 是膜厚度 h 的周期函数, 其周期为一个波长。可以看出, 吸收降低了相继各极大值的振幅, 并引起极大值在厚度较小的方向上有一位移。在光学波长区, 金属的吸收是如此之大, 以致厚度大大低于四分之一波长才有所觉察到的透射¹⁾ (参看表 26, 第 820 页)。因此观测不到透射光的极大值与极小值。

1) 把(22)–(25)式的分子与分母展开为膜厚度的幂级数并且只保留前几项, 就可得出关于这类薄膜的简化公式 [参看 F. Abélès, Rev. d'Optique, 32 (1953), 257]。

金属薄膜在可见及红外光谱区的光学性质, 已被 L. N. Hadley 与 D. M. Dennison 透彻地讨论过, 见 J. Opt. Soc. Amer. 37, (1947), 451; 38 (1948), 483,

金属膜在光学中主要用来获得高反射率,例如用在法布里-珀罗干涉仪中(§ 7.6.2). 这种膜过去常常用化学淀积法制备,但这种方法近来已被高真空蒸发技术所代替¹⁾.

最后让我们扼要讨论一下“厚”膜的反射与透射. 如果厚度 h 以及由它得出的参量 η 都足够大, 则(22)一(25)式中所有不含乘法因子 $\exp(2\nu_2\eta)$ 的各项都可以略去. 例如, 若 $\exp(2\nu_2\eta) \gtrsim 100$, 则这种忽略通常不引起多于百分之几的误差. 对于这种膜, 正入射时得出 $4\pi hn_2\kappa_2/\lambda \geq \log_e 100 = 4.61$, 或(去掉下标 2),

$$\frac{h}{\lambda} \gtrsim \frac{0.37}{n\kappa}. \quad (26)$$

例如对于银膜, 在 $\lambda = 5780$ 埃处, $n\kappa \sim 3.67$, 并且由(26)式给出 $h \gtrsim \lambda/10 \sim 5.8 \times 10^{-6}$ 厘米.

对于厚膜, 由(22)与(24)式得出

$$R \sim \rho_{12}^2, \quad T = \frac{n_3 \cos \theta_3}{n_1 \cos \theta_1} r_{12}^2 r_{23}^2 e^{-4\nu_2\eta}. \quad (27)$$

可见, “厚”膜的反射率几乎就是无限厚时的反射率, 并且它的透射率随着厚度按指数减少. 由(23)与(25)式立即得出位相变化:

$$\delta_r \sim \phi_{12}, \quad \delta_t \sim \chi_{12} + \chi_{23} + u_2\eta. \quad (28)$$

公式(27)与(28)用有点儿更加物理化的语言说明了我们对“厚”膜的定义, 意思是在这样一个膜中多光束干涉效应是可以忽略的.

§ 13.4.2 吸收衬底上的透明膜

作为第二个例子, 考虑从附着在吸收衬底上的一层透明膜的反射(图 13.6).

在这种情况下, r_{12} 是实数, 而 r_{23} 是复数. 振幅比值 ρ_{23} 与位相变化 ϕ_{23} 由(6)式(13)式给出, 其下标 1 与 2 分别用 2 与 3 代

1) 例如参看 S. Tolansky, *Multiple-beam Interferometry of Surfaces and Films* (Oxford University Press, 1948), p. 26; 或 O. S. Heavens, *Optical Properties of Thin Solid Films* (London, Butterworths, 1955).

换。根据 § 1.6(57)式, 现在有

$$r = \frac{r_{12} + \rho_{23} e^{i(\phi_{23} + 2\beta)}}{1 + r_{12} \rho_{23} e^{i(\phi_{23} + 2\beta)}}. \quad (29)$$

如果在 § 1.6 的(57)式中用 $2\beta + \phi_{23}$ 代换 2β , 用 ρ_{23} 代换 r_{23} , 则

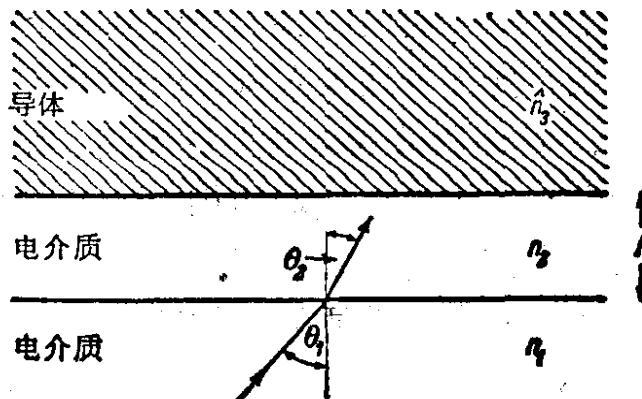


图 13.6 吸收衬底上的一层透明膜

与上式相同。因此在 § 1.6 的(59)与(61)式中简单地作此代换, 不用任何计算, 就可以立即写下反射率与反射时位相变化的表达式, 即

$$\mathcal{R} = \frac{r_{12}^2 + \rho_{23}^2 + 2r_{12}\rho_{23}\cos(\phi_{23} + 2\beta)}{1 + r_{12}^2\rho_{23}^2 + 2r_{12}\rho_{23}\cos(\phi_{23} + 2\beta)}, \quad (30)$$

及

$$\tan \delta = \frac{\rho_{23}(1 - r_{12}^2)\sin(\phi_{23} + 2\beta)}{r_{12}(1 + \rho_{23}^2) + \rho_{23}(1 + r_{12}^2)\cos(\phi_{23} + 2\beta)}. \quad (31)$$

在吸收衬底上的透明薄膜有很多实际应用。例如用来保护金属镜面并增高其反射率。也可以用来减少金属表面的反射率。我们在上册第 94 页中已经提到, 人们可以设计一种起偏振器, 它由电介质衬底上的一层电介质膜构成, 可得到 $\mathcal{R}_{\parallel} = 0$ 而 \mathcal{R}_{\perp} 很大。用金属衬底可得到 $\mathcal{R}_{\parallel} = 0$ 或 $\mathcal{R}_{\perp} = 0$ ¹⁾.

§ 13.5 导体球的衍射; 米氏理论

不仅成块的金属, 而且当把它们分得很细, 如在悬胶体中时,

1) 参看 H. Schopper, *Optik*, 10 (1953), 426.

这些金属也都呈现出明显的光学特征。我们会想起胶状的金在液体或玻璃中明亮的红宝石颜色。这类现象有很大的意义，因为折射，吸收与衍射一起在这里出现了。

假如金属颗粒是理想导体，人们将会讨论一个纯粹衍射的问题。然而在关于衍射的几章中，我们不曾从这个观点讨论过这一课题，因为这是由于光部分地透入颗粒内而引起的效应，它具有特殊的物理意义。此时吸收起着重要的作用，所以更适宜于在本章中讨论这一课题；关于电介质球的相应结果作为一种极限情况 ($\kappa \rightarrow 0$) 也包含在我们的讨论之中了。

早期研究金属颗粒光学性质的工作者中，必须提到麦克斯韦·加涅特 (Maxwell Garnett)¹⁾。他讨论过光通过含有很多小金属球（具有波长线度）的一块电介质。利用洛伦兹-洛伦茨公式 [§ 2.3(17)]，麦克斯韦·加涅特证明了这样一个系集与一种具有某一复折射率 $n' = n'(1 + ik')$ 的媒质等效，他并且求出利用表示金属球特性的折射率 n 与衰减指数 κ 来表示 n' 与 k' 的公式。通过这些讨论，他已能解释一些观测到的特征。

米氏 (G.Mie)²⁾ 在 1908 年发表的一篇论文中，在电磁理论的基础上，对于平面单色波被一个位于均匀媒质中具有任意直径及任意成分的均匀球衍射，得出了一个严格解。其后不久，德拜 (P. Debye)³⁾ 在一篇涉及导体球上光压(即光施加的机械力)的论文中，发表了同一问题的等效解，自此之后，这一课题已被许多作者⁴⁾ 从它的不同方面讨论过了。

虽然米氏的解是对于被单个球衍射而导出的，但也适用于被任意多个球的衍射，只要它们都有同样的直径与成分，而且是无规

1) J. C. Maxwell Garnett, *Phil. Trans. Roy. Soc., A.* **203**, (1904), 385; 同上, **205** (1906), 237.

2) G. Mie, *Ann. d. Physik* (4), **25** (1908), 377.

3) P. Debye, *Ann. d. Physik* (4), **30** (1909), 57.

4) 其后讨论基本理论的研究工作中，也许要特别提到下列文章：T. J. I' A. Bromwich, *Phil. Trans. Roy. Soc., A*, **220** (1920), 175 与 H. C. van de Hulst, *Rech. Astron. Observ. Utrecht*, XI, pt. 1 (1946).

分布的，彼此分开的距离比一个波长大得多即可。在这种情况下，被不同的球散射的光之间没有相干的位相关系，因而总散射能就等于被一个球散射的能量与球总数的乘积。尤其在这一方面，米氏的解有很大的实际价值，并可应用于各种问题中：除了金属悬胶体呈现的颜色问题以外，还可以提到下列应用，例如大气尘埃的研究，星际的粒子或悬胶体，虹的理论，日冕，云和雾对光透射的影响等等。

在导出米氏公式以前，扼要说明所使用的方法是有好处的。我们涉及的是求麦克斯韦方程的解，它描述入射到一个球面上的平面单色波所产生的场，越过该球面时媒质的性质突然变化。引入适当的曲线坐标系（球极坐标系），把场表示为两个“子场”之和；其中一个子场的电矢量没有径向分量，而另一个子场的磁矢量有此性质。在球极坐标中，麦克斯韦方程与边界条件一起分离为一组常微分方程，再对两个子场用无穷级数的形式解出上述方程。13.5.1 节涉及这个解的推导，13.5.2 节中讨论这个解的主要结果。最后一节（§ 13.5.3）涉及到关于被一个任意形状的障碍物散射与吸收的总能量的某些一般结果，并且详细讨论球形障碍物的情况。

§ 13.5.1 问题的数学解

(a) 用德拜势表示场

考虑平面线偏振单色波被浸没在均匀各向同性媒质内的一个半径为 a 的球衍射。假定媒质是非导体，并且这种媒质与球都是非磁性的。

照常假定电矢量与磁矢量对时间的依赖关系为 $\exp(-i\omega t)$ ，则在球外与球内的电矢量与磁矢量同时间无关的部分都满足不含时间的麦克斯韦方程：

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \mathbf{H} &= -k_1 \mathbf{E}, & (a) \\ \operatorname{curl} \mathbf{E} &= k_2 \mathbf{H}, & (b) \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (1)$$

式中，

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{i\omega}{c} \left(\epsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right), \\ k_2 &= \frac{i\omega}{c}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

通常的波数 k (球外是实数, 球内是复数) 的平方为

$$k^2 = -k_1 k_2. \quad (3)$$

凡涉及球周围媒质的各量都用上标 I 表示, 涉及球的那些量则用上标 II 表示. 由于假定球周围的媒质是非导体, 故 $\sigma^{(1)} = 0$.

采取一个直角坐标系, 原点在球心, z 方向沿波传播方向, 而 x 方向沿它的电矢量方向(图 13.7).

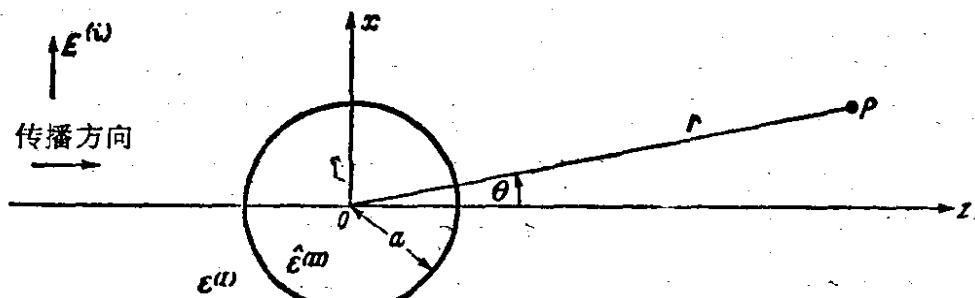


图 13.7 导体球的衍射: 记号

如果入射波的电矢量振幅是归一化的, 即

$$|\mathbf{E}^{(i)}| = |e^{ik^{(1)}z}| = 1,$$

则场矢量的六个分量为

$$\left. \begin{aligned} E_x^{(i)} &= e^{ik^{(1)}z}, \\ H_y^{(i)} &= \frac{ik^{(1)}}{k_2^{(1)}} e^{ik^{(1)}z}, \\ E_y^{(i)} &= E_z^{(i)} = H_x^{(i)} = H_z^{(i)} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

关于边界条件, 根据 § 1.1.3, 我们只要求 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 的切向分量通过球表面时连续:

$$\left. \begin{aligned} E_{\text{切}}^{(I)} &= E_{\text{切}}^{(II)} \\ H_{\text{切}}^{(I)} &= H_{\text{切}}^{(II)} \end{aligned} \right\} \quad \text{当 } r = a \text{ 时.} \quad (5)$$

然后, 由(5)式与麦克斯韦方程得出另一条件: $\epsilon \mathbf{E}$ 和 \mathbf{H} 的径向分量通过该表面时也连续.

为了满足这些边界条件, 必须假定除了入射场 $\mathbf{E}^{(i)}, \mathbf{H}^{(i)}$ 和在球内的场 $\mathbf{E}^{(\omega)}, \mathbf{H}^{(\omega)}$ 外, 还有在球周围媒质内的次级(被散射或衍射的)场 $\mathbf{E}^{(s)}, \mathbf{H}^{(s)}$. 因此, 在这两个区域内的总电场写成

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}^{(i)} + \mathbf{E}^{(s)} \quad \text{球外} \\ &= \mathbf{E}^{(\omega)} \quad \text{球内}\end{aligned}\quad (6)$$

对于磁矢量也有类似的表达式. 场 $\mathbf{E}^{(s)}, \mathbf{H}^{(s)}$ 和 $\mathbf{E}^{(\omega)}, \mathbf{H}^{(\omega)}$ 可认为分别类似于涉及一个界平面传播时的反射场和透射场 (§ 1.5.1); 然而, 仅当球直径比波长大很多时, 这种类似才是恰当的. 因为边界条件必须对于所有时间都成立, 所以所有六个矢量必定具有同样的时间依赖关系 [$\exp(-i\omega t)$].

球极坐标 r, θ 和 ϕ 是对本问题适用的曲线坐标, 其定义为

$$\left. \begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi, \\ y &= r \sin \theta \sin \phi, \\ z &= r \cos \theta.\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

任一矢量 \mathbf{A} 从笛卡儿坐标系变换到该新坐标系可按下列规则¹⁾:

$$\left. \begin{aligned}A_r &= A_x \sin \theta \cos \phi + A_y \sin \theta \sin \phi + A_z \cos \theta, \\ A_\theta &= A_x \cos \theta \cos \phi + A_y \cos \theta \sin \phi - A_z \sin \theta, \\ A_\phi &= -A_x \sin \phi + A_y \cos \phi.\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

把这些公式用于矢量 $\operatorname{curl} \mathbf{A}$, 得到

1) 例如, 见 W. Magnus 和 F. Oberhettinger, *Formulas and Theorems for the Functions of Mathematical Physics* (New York, Chelsea Publishing Company, 1954), P. 146.

这里定义的各分量不是 Ricci 和 Levi-Civita 的绝对微分学中使用的那些量. 在那里, 人们有矢量 \mathbf{A} 的两组不同而等价的分量, 即反变分量 A^i 与共变分量 A_i . 如果 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 和 \mathbf{e}_3 是一般不正交且有不同长度的基矢, 则(相对于这些基矢) 的反变分量可定义为表示式 $\mathbf{A} = A^1 \mathbf{e}_1 + A^2 \mathbf{e}_2 + A^3 \mathbf{e}_3$ 中的系数; 而共变分量可定义为表示式 $\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}^1 + A_2 \mathbf{e}^2 + A_3 \mathbf{e}^3$ 中的系数, 式中 $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2$ 和 \mathbf{e}^3 是倒数矢, 即满足关系式 $\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{ik}$ 的矢量, 式中 δ_{ik} 是克朗内克符号. 在 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 与 \mathbf{e}_3 均正交的特殊情况下, $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2$ 与 \mathbf{e}^3 也都正交, 并且这两组中相应的矢量平行. 因此, 人们可引入一组自然分量 $\bar{A}_i = \sqrt{A_i A^i}$, 它们具有简单的几何解释, 即它们是 \mathbf{A} 在三个方向上的正交射影. 在球极坐标的情况下, 自然分量就是由(8)式给出的那些量.

张量分量可用类似的方法处理.

$$\left. \begin{aligned} (\text{curl } \mathbf{A})_r &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial(r A_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial \phi} \right\}, \\ (\text{curl } \mathbf{A})_\theta &= \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r A_\phi \sin \theta)}{\partial r} \right\}, \\ (\text{curl } \mathbf{A})_\phi &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

在球极坐标中,场方程(1)变为

$$\left. \begin{aligned} -k_1 E_r &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial(r H_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial(r H_\theta)}{\partial \phi} \right\}, \quad (\alpha) \\ -k_1 E_\theta &= \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r H_\phi \sin \theta)}{\partial r} \right\}, \quad (\beta) \\ -k_1 E_\phi &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial(r H_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right\}. \quad (\gamma) \\ k_2 H_r &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial(r E_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial(r E_\theta)}{\partial \phi} \right\}, \quad (\alpha) \\ k_2 H_\theta &= \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial E_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r E_\phi \sin \theta)}{\partial r} \right\}, \quad (\beta) \\ k_2 H_\phi &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial(r E_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right\}. \quad (\gamma) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

现在,边界条件(5)为

$$\left. \begin{aligned} E_\theta^{(I)} &= E_\theta^{(II)}, \quad E_\phi^{(I)} = E_\phi^{(II)}, \\ H_\theta^{(I)} &= H_\theta^{(II)}, \quad H_\phi^{(I)} = H_\phi^{(II)}. \end{aligned} \right\} \text{对于 } r = a. \quad (11)$$

方程(10)与边界条件(11)合起来,是本问题的基本方程.

我们将把这些方程的解表示为两个线性无关的场 (\mathbf{E}' , \mathbf{H}') 和 (\mathbf{E}'' , \mathbf{H}'') 的叠加,这两个场各自满足(10)式,使得

$$\mathbf{E}'_r = E_r, \quad \mathbf{H}'_r = 0, \quad (12a)$$

和

$$\mathbf{E}''_r = 0, \quad \mathbf{H}''_r = H_r. \quad (12b)$$

不难看出,这样一种表示法与我们的方程一致. 利用 $H_r = \mathbf{H}'_r$,

$= 0$, 则 (10a, β) 与 (10a, γ) 式变为

$$\left. \begin{aligned} k_1 \cdot E_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot H_\phi), \\ k_1 \cdot E_\phi &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot H_\theta). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

把这些关系式代入到 (10b, β) 与 (10b, γ) 式中, 得出

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) (r \cdot H_\theta) &= -\frac{k_1}{\sin \theta} \frac{\partial \cdot E_r}{\partial \phi}, \quad (\text{b, } \beta) \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) (r \cdot H_\phi) &= k_1 \frac{\partial \cdot E_r}{\partial \theta}. \quad (\text{b, } \gamma) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

(14) 与 (10a, α) 式合起来, 构成 $\cdot E_r$, $\cdot H_\theta$ 与 $\cdot H_\phi$ 的方程组. 但不是所有这个方程组的解都代表物理场; 只有那些满足附加条件 $\operatorname{div} \cdot \mathbf{H} = 0$ 的解才行. 我们只限于这样的解. 在球极坐标中, 并在上述 $\cdot H_r = 0$ 的假设下, 这个附加条件为

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot H_\theta) + \frac{\partial}{\partial \phi} (\cdot H_\phi) = 0, \quad (15)$$

它保证余下的方程 (10b, α) 被满足. 因为把 (13) 式代入, (10b, α) 式变为

$$0 = \frac{1}{k_1^2 r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta \cdot H_\theta) + \frac{\partial}{\partial \phi} (r \cdot H_\phi) \right],$$

由于 (15) 式, 它同样是满足的. 严格类似的讨论也适用于 $\cdot E_r = 0$ 的互补情况.

径向磁场消失的解称为电波(或横磁波), 而径向电场消失的解称为磁波(或横电波). 现在证明它们各自均可分别由标势 $\cdot \Pi$ 与 $\cdot \Pi$ 导出, 这些标势通称德拜势¹⁾.

1) 如果 r 表示起自原点的径向矢量, 则 $\cdot \Pi r$ 与 $\cdot \Pi r$ 为径向赫兹矢量, 即处处指在径向上的赫兹矢量(见 § 2.2.2), 参看 A. Sommerfeld, 撰稿于 P. Frank and R. V. Mises: *Riemann-Weber's Differentialgleichungen der mathematischen Physik* (Braunschweig, Vieweg, 2nd ed., 1935; also New York, Dover Publ., 1961), 2. 790; C. J. Bouwkamp and H. B. G. Casimir, *Physica*, 20 (1954), 539, 以及 A. Nisbet, *Proc. Roy. Soc., A*, 231 (1955), 260; *Physica*, 21 (1955), 799.

首先由(10b, α)式, 因 ${}^eH_r = 0$, 故得出 ${}^eE_\phi$ 与 ${}^eE_\theta$ 可用一个标量梯度来表示,

$${}^eE_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi}, \quad {}^eE_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}. \quad (16)$$

现在如果令

$$U = \frac{\partial(r^e\Pi)}{\partial r}, \quad (17)$$

则由(16)式得出

$${}^eE_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r^e\Pi)}{\partial r \partial \theta}, \quad {}^eE_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2(r^e\Pi)}{\partial r \partial \phi}. \quad (18)$$

可以看出, 下式可满足方程(13),

$$\left. \begin{aligned} {}^eH_\phi &= k_1 \frac{\partial {}^e\Pi}{\partial \phi} = \frac{k_1}{r} \frac{\partial(r^e\Pi)}{\partial \phi}, \\ {}^eH_\theta &= - \frac{k_1}{\sin \theta} \frac{\partial {}^e\Pi}{\partial \theta} = - \frac{k_1}{r \sin \theta} \frac{\partial(r^e\Pi)}{\partial \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

如果把(19)式代入(10a, α)式, 则得出

$${}^eE_r = - \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial {}^e\Pi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 {}^e\Pi}{\partial \phi^2} \right\}. \quad (20)$$

把(19)和(20)式代入(14)式, 得出两个方程, 其中第一个方程表示一个式子对 ϕ 的导数为零, 第二个方程表示同一个式子对 θ 的导数为零. 所以, 令这个式子等于零, 可以满足这些方程, 由此得出

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r} \frac{\partial^2(r^e\Pi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial {}^e\Pi}{\partial \theta} \right) \\ &+ \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 {}^e\Pi}{\partial \phi^2} + k^2 {}^e\Pi = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

利用这个方程, (20)式可写为

$${}^eE_r = \frac{\partial^2(r^e\Pi)}{\partial r^2} + k^2 r^e\Pi. \quad (22)$$

把(18),(19),(20),(21)和(22)式代入(10)式,可以证实我们已得出本问题的方程组的一个解。

可用类似的方法讨论磁波,并得出磁波可由势 ${}^m\Pi$ 导出,势 ${}^m\Pi$ 象 ${}^e\Pi$ 一样满足同一个微分方程(21). 把这两个场相加,就得到本问题的场方程的完全解;它给出

$$\left. \begin{aligned} E_r &= {}^eE_r + {}^mE_r = \frac{\partial^2(r^e\Pi)}{\partial r^2} + k_1^2r^e\Pi, \\ E_\theta &= {}^eE_\theta + {}^mE_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r^e\Pi)}{\partial r\partial\theta} + k_1 \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial(r^m\Pi)}{\partial\phi}, \\ E_\phi &= {}^eE_\phi + {}^mE_\phi = \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial^2(r^e\Pi)}{\partial r\partial\phi} - k_1 \frac{1}{r} \frac{\partial(r^m\Pi)}{\partial\theta}, \end{aligned} \right\} \quad (23a)$$

$$\left. \begin{aligned} H_r &= {}^mH_r + {}^eH_r = k_1^2r^m\Pi + \frac{\partial^2(r^m\Pi)}{\partial r^2}, \\ H_\theta &= {}^mH_\theta + {}^eH_\theta = -k_1 \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial(r^e\Pi)}{\partial\phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r^m\Pi)}{\partial r\partial\theta}, \\ H_\phi &= {}^mH_\phi + {}^eH_\phi = k_1 \frac{1}{r} \frac{\partial(r^e\Pi)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial^2(r^m\Pi)}{\partial r\partial\phi}. \end{aligned} \right\} \quad (23b)$$

势 ${}^e\Pi$ 与 ${}^m\Pi$ 都是微分方程(21)的解,(21)式只不过是用极坐标写出来的波动方程

$$\nabla^2\Pi + k^2\Pi = 0.$$

为了使分量 E_θ , E_ϕ , H_θ 和 H_ϕ 通过球表面 $r=a$ 时连续,显然使

$$k_1r^e\Pi, k_1r^m\Pi, \frac{\partial}{\partial r}(r^e\Pi), \frac{\partial}{\partial r}(r^m\Pi) \quad (24)$$

这四个量通过该表面时也连续就足够了。因此本问题的边界条件也分开为对 ${}^e\Pi$ 与 ${}^m\Pi$ 的独立的条件。所以,本节的衍射问题就化为寻求波动方程具有既定边界条件时的两个互相独立解的问题了。

(b) 场分量的级数展开

首先,我们把波动方程的解表示为具有待定系数的展开式,每

一项代表一个特解，然后用边界条件来决定系数。

我们寻找的那些特解的形式为

$$\Pi = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi). \quad (25)$$

直接代入(21)式，不难证实，函数 R , Θ 和 Φ 必须满足常微分方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2(rR)}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{\alpha}{r^2} \right) rR &= 0, \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(\alpha - \frac{\beta}{\sin^2 \theta} \right) \Theta &= 0, \\ \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \beta\Phi &= 0, \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} (a) \\ (b) \\ (c) \end{aligned} \quad (26)$$

式中 α 和 β 是积分常数。

因为场 E , H 是位置的单值函数，所以 Π 同样必须是单值的，根据这一要求，对 Θ 和 Φ 就加上了某些条件。

对于(26)中的每一个方程，可写出其通解。对 (c)，其通解是

$$a \cos(\sqrt{\beta}\phi) + b \sin(\sqrt{\beta}\phi).$$

单值性条件要求

$$\beta = m^2, \quad (m = \text{整数}). \quad (27)$$

所以 (26c) 的单值解为

$$\Phi = a_m \cos(m\phi) + b_m \sin(m\phi). \quad (28)$$

方程 (26c) 是熟知的球谐方程。单值解的充要条件是

$$\alpha = l(l+1), \quad (l > |m|, \text{ 整数}). \quad (29)$$

把(27)式的 β 代入(26b)式，并引入新的变量

$$\xi = \cos \theta. \quad (30)$$

于是方程变为¹⁾

$$\frac{d}{d\xi} \left\{ (1 - \xi^2) \frac{d\Theta}{d\xi} \right\} + \left\{ l(l+1) - \frac{m^2}{1 - \xi^2} \right\} \Theta = 0, \quad (31)$$

它的解是缩合勒让德函数

1) 参看 A. Sommerfeld, *Partial Differential Equations of Physics* (New York, Academic Press, 1949), p. 127.

$$\Theta = P_l^{(m)}(\xi) = P_l^{(m)}(\cos \theta). \quad (32)$$

如果 $|m| > l$, 则这些函数恒为零; 因此, 对于每一个 l , 有 $2l + 1$ 个这样的函数, 即

$$m = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l.$$

为了求余下的方程 (26a) 的积分, 令

$$kr = \rho, \quad R(r) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} Z(\rho), \quad (33)$$

得出贝塞耳方程¹⁾

$$\frac{d^2Z}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dZ}{d\rho} + \left\{ 1 - \frac{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2}{\rho^2} \right\} Z = 0. \quad (34)$$

这个方程的解是 $l + \frac{1}{2}$ 阶的一般柱面函数 $Z = Z_{l+\frac{1}{2}}(\rho)$ 因此,

(26a) 式的解为

$$R = \frac{1}{\sqrt{kr}} Z_{l+\frac{1}{2}}(kr). \quad (35)$$

每一个柱面函数可表示为两个标准型柱面函数的线性组合, 例如贝塞耳函数 $J_{l+\frac{1}{2}}(\rho)$ 和诺埃曼函数 $N_{l+\frac{1}{2}}(\rho)$ 的线性组合. 目前, 采用下列函数是方便的²⁾,

$$\phi_l(\rho) = \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(\rho), \quad \chi_l(\rho) = -\sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} N_{l+\frac{1}{2}}(\rho). \quad (36)$$

函数 $\phi_l(\rho)$ 在 ρ 平面上的任一有限域内都是正则的, 包括原点在内; 反之, 函数 $\chi_l(\rho)$ 在原点 $\rho = 0$ 处有奇点, 在该点处函数变为无穷大. 因此, 可以用函数 $\phi_l(\rho)$ 但不能用函数 $\chi_l(\rho)$ 来表示在球内的波.

1) 参看 A. Sommerfeld; 上注所引著作, p. 86.

2) 在文献中, ψ 与 χ 函数有几种稍有不同的定义. 参看 G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* (Cambridge University Press, 2nd ed., 1944), p. 56; 或 A. Sommerfeld, 上注所引著作, pp. 113—114. 在 861—862 页, 我们概述了关于 ψ_l 函数的某些公式.

于是(26a)式的通解可写为

$$rR = c_l \phi_l(kr) + d_l \chi_l(kr). \quad (37)$$

特别是,当 $c_l = 1, d_l = -i$ 时,则有

$$rR = \zeta_l^{(1)}(kr), \quad (38)$$

式中

$$\zeta_l^{(1)}(\rho) = \phi_l(\rho) - i\chi_l(\rho) = \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}(\rho), \quad (39)$$

$H^{(1)}$ 是汉克耳函数的一种¹⁾. 汉克耳函数与其他柱面函数的区别在于前者有一特性: 该函数在复平面内无穷远处为零. 这里所用的带有指标 1 的那一种汉克耳函数在 ρ 的正虚部半平面内为零, 所以适合于表示散射波.

根据(25)式, 把(28),(32)和(37)式给出的函数一起相乘, 就得到特解 $\Pi_l^{(m)}$; 然后得出波动方程下列通解:

$$\begin{aligned} r\Pi &= r \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Pi_l^{(m)} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \{c_l \phi_l(kr) + d_l \chi_l(kr)\} \{P_l^{(m)}(\cos\theta)\} \\ &\quad \cdot \{a_m \cos(m\phi) + b_m \sin(m\phi)\}, \end{aligned} \quad (40)$$

式中 a_m, b_m, c_l 和 d_l 是任意常数.

现在必须使用能满足边界条件的方法来确定这些常数. 要做到这一点, 就必须使得入射波的势 ${}^e\Pi^{(i)}$ 和 ${}^m\Pi^{(i)}$ 都能用形式如(40)式的级数来表示. 为了表明这是能做到的, 首先根据(8)式, 把入射波的表达式(4)变换到球极坐标系:

1) 这个公式是下述熟知的贝塞耳函数, 诺埃曼函数与汉克耳函数间的关系式的直接结果:

$$J_p + iN_p = H_p^{(1)}.$$

有一个类似的关系式涉及另一种汉克耳函数:

$$J_p - iN_p = H_p^{(2)}.$$

这两个公式类似于指数函数 e^{ip} 与 e^{-ip} 用 $\cos p$ 与 $\sin p$ 来表示的式子.

$$\left. \begin{aligned} E_r^{(i)} &= e^{ik^{(1)}r \cos \theta} \sin \theta \cos \phi, \quad H_r^{(i)} = \frac{ik^{(1)}}{k_r^{(1)}} e^{ik^{(1)}r \cos \theta} \sin \theta \sin \phi, \\ E_\theta^{(i)} &= e^{ik^{(1)}r \cos \theta} \cos \theta \cos \phi, \quad H_\theta^{(i)} = \frac{ik^{(1)}}{k_r^{(1)}} e^{ik^{(1)}r \cos \theta} \cos \theta \sin \phi, \\ E_\phi^{(i)} &= -e^{ik^{(1)}r \cos \theta} \sin \phi, \quad H_\phi^{(i)} = \frac{ik^{(1)}}{k_r^{(1)}} e^{ik^{(1)}r \cos \theta} \cos \phi. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

为了确定势 $r^c\Pi^{(i)}$ 或 $r^m\Pi^{(i)}$, 只需要用 (23) 诸式之一即可; 由 (23) 第一式得出:

$$e^{ik^{(1)}r \cos \theta} \sin \theta \cos \phi = \frac{\partial^2(r^c\Pi^{(i)})}{\partial r^2} + k^{(1)2} r^c\Pi^{(i)}. \quad (42)$$

上式左方第一个因子可以用下列的勒让德多项式的可微级数 [包尔公式, § 9.4(9)式] 来表示:

$$e^{ik^{(1)}r \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \frac{\psi_l(k^{(1)}r)}{k_r^{(1)}} P_l(\cos \theta). \quad (43)$$

还有恒等式

$$e^{ik^{(1)}r \cos \theta} \sin \theta = -\frac{1}{ik^{(1)}r} \frac{\partial}{\partial \theta} (e^{ik^{(1)}r \cos \theta}), \quad (44)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta) = -P_l^{(1)}(\cos \theta); P_0^{(1)}(\cos \theta) = 0. \quad (45)$$

利用这些关系式, (42) 式左方可表示为下列形式:

$$\begin{aligned} e^{ik^{(1)}r \cos \theta} \sin \theta \cos \phi &= \frac{1}{(k_r^{(1)})^2} \sum_{l=1}^{\infty} i^{l-1} (2l+1) \psi_l(k^{(1)}r) \\ &\times P_l^{(1)}(\cos \theta) \cos \phi. \end{aligned} \quad (46)$$

因此, 我们取类似形式的级数

$$r^c\Pi^{(i)} = \frac{1}{k^{(1)2}} \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l \psi_l(k^{(1)}r) P_l^{(1)}(\cos \theta) \cos \phi \quad (47)$$

作为 (42) 式的试探解。把 (46) 和 (47) 式代入 (42) 式, 并比较其系数, 就得到关系式

$$\alpha_l \left\{ k^{(1)2} \psi_l(k^{(1)}r) + \frac{\partial^2 \psi_l(k^{(1)}r)}{\partial r^2} \right\} = i^{l-1} (2l+1) \frac{\psi_l(k^{(1)}r)}{r^2}. \quad (48)$$

现在由 (37) 式 ($c_l = 1, d_l = 0$) 得出

$$\psi_l(k^{(1)}r) = r R \quad (49)$$

是(26a)式的解:

$$\frac{d^2\phi_l}{dr^2} + \left(k^{(1)2} - \frac{\alpha}{r^2}\right)\phi_l = 0, \quad (50)$$

只要 $\alpha = l(l+1)$ 成立[见(29)式]. 比较(50)与(48)式, 可看出

$$\alpha_l = i^{l-1} \frac{2l+1}{l(l+1)}. \quad (51)$$

关于磁势 $r^m\Pi^{(i)}$ 的计算是类似的. 因此得出入射波两个势的表达式如下:

$$\left. \begin{aligned} r^e\Pi^{(i)} &= \frac{1}{k^{(1)2}} \sum_{l=1}^{\infty} i^{l-1} \frac{2l+1}{l(l+1)} \phi_l(k^{(1)}r) P_l^{(1)}(\cos\theta) \cos\phi, \\ r^m\Pi^{(i)} &= \frac{1}{k^{(1)2}} \sum_{l=1}^{\infty} i^l \frac{k^{(1)}}{k_2^{(1)}} \frac{2l+1}{l(l+1)} \phi_l(k^{(1)}r) P_l^{(1)}(\cos\theta) \sin\phi. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

我们已经把两个势都表示为形式如(40)的级数, 那些未知常数现在就不难确定了.

更完整地写出边界条件(24)如下:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \{r(e\Pi^{(i)} + e\Pi^{(s)})\}_{r=a} &= \frac{\partial}{\partial r} \{r^e\Pi^{(w)}\}_{r=a}, \\ \frac{\partial}{\partial r} \{r(m\Pi^{(i)} + m\Pi^{(s)})\}_{r=a} &= \frac{\partial}{\partial r} \{r^m\Pi^{(w)}\}_{r=a}, \\ k_1^{(1)} \{r(e\Pi^{(i)} + e\Pi^{(s)})\}_{r=a} &= k_1^{(II)} \{r^e\Pi^{(w)}\}_{r=a}, \\ k_2^{(1)} \{r(m\Pi^{(i)} + m\Pi^{(s)})\}_{r=a} &= k_2^{(II)} \{r^m\Pi^{(w)}\}_{r=a}. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

根据(52)式, 仅当未知势 $\Pi^{(s)}$ 与 $\Pi^{(w)}$ 的展开式(40)中出现的那些项的 $m = 1$, 而且磁势的 $a_1 = 0$, 电势的 $b_1 = 0$, 才能够满足这些方程.

我们已特别提到, 只有 ϕ_l 函数适合于表示 $\Pi^{(w)}$, 因为这些函数在原点处仍是正则的, 而函数 χ_l 在原点处变为无穷大. 所以, 令

$$\left. \begin{aligned} r^e\Pi^{(w)} &= \frac{1}{k^{(II)2}} \sum_{l=1}^{\infty} e A_l \phi_l(k^{(II)}r) P_l^{(1)}(\cos\theta) \cos\phi, \\ r^m\Pi^{(w)} &= \frac{i}{k^{(II)}k_2^{(II)}} \sum_{l=0}^{\infty} m A_l \phi_l(k^{(II)}r) P_l^{(1)}(\cos\theta) \sin\phi. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

我们还看到，用函数 $\zeta_l^{(1)} = \phi_l - i\chi_l$ 表示散射波是适当的， $\zeta_l^{(1)}$ 由汉克耳函数 $H_l^{(1)}$ 乘以 $\sqrt{\pi\rho}/2$ 得出 [见 (39) 式]。对于大的 ρ 值， $H_l^{(1)}$ 的作用如同 $e^{i\rho}/\sqrt{\rho}$ ，即 $\zeta_l^{(1)}$ 的作用如同 $e^{i\rho}$ ，而 $R = \zeta_l^{(1)}(k^{(1)}r)/r$ 如同 $e^{ik^{(1)}r}/r$ 。因此，在离球的距离很远处，散射波是球面波，其中心在原点 $r = 0$ 处。所以，令

$$\left. \begin{aligned} r^e H_l^{(1)} &= \frac{1}{k^{(1)} l} \sum_{l=1}^{\infty} {}^e B_l \zeta_l^{(1)}(k^{(1)}r) P_l^{(1)}(\cos \theta) \cos \phi, \\ r^m H_l^{(1)} &= \frac{i}{k^{(1)} k_2^{(1)}} \sum_{l=1}^{\infty} {}^m B_l \zeta_l^{(1)}(k^{(1)}r) P_l^{(1)}(\cos \theta) \sin \phi. \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} (c) \\ (d) \end{aligned} \quad (55)$$

现在如果把 (52), (54) 和 (55) 等式代入边界条件 (53)，就得到系数 ${}^e A_l$, ${}^m A_l$, ${}^e B_l$ 和 ${}^m B_l$ 之间的线性关系如下¹⁾：

$$\left. \begin{aligned} {}^e B_l &= \frac{1}{k^{(1)}} \zeta_l^{(1)}(k^{(1)}a) + \frac{1}{k^{(1)}} i^{l-1} \frac{2l+1}{l(l+1)} \phi_l'(k^{(1)}a) \\ &= \frac{1}{k^{(1)}} {}^e A_l \phi_l'(k^{(1)}a), \\ {}^m B_l &= \frac{1}{k_2^{(1)}} \zeta_l^{(1)}(k^{(1)}a) + \frac{1}{k_2^{(1)}} i^{l-1} \frac{2l+1}{l(l+1)} \phi_l'(k^{(1)}a) \\ &= \frac{1}{k_2^{(1)}} {}^m A_l \phi_l'(k^{(1)}a), \\ {}^e B_l &= \frac{1}{k_2^{(1)}} \zeta_l^{(1)}(k^{(1)}a) + \frac{1}{k_2^{(1)}} i^{l-1} \frac{2l+1}{l(l+1)} \phi_l(k^{(1)}a) \\ &= \frac{1}{k_2^{(1)}} {}^e A_l \phi_l(k^{(1)}a), \\ {}^m B_l &= \frac{1}{k^{(1)}} \zeta_l^{(1)}(k^{(1)}a) + \frac{1}{k^{(1)}} i^{l-1} \frac{2l+1}{l(l+1)} \phi_l(k^{(1)}a) \\ &= \frac{1}{k^{(1)}} {}^m A_l \phi_l(k^{(1)}a). \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

我们只对表示散射波特征的系数 ${}^e B_l$ 与 ${}^m B_l$ 感兴趣。消去 ${}^e A_l$ 与 ${}^m A_l$ ，可得出这两个系数为

1) 函数 ϕ_l , ζ_l 和 $P_l^{(1)}$ 上加一撇，表示对其自变量求微商。

$$\left. \begin{aligned}
{}^e B_l &= i^{l+1} \frac{2l+1}{l(l+1)} \\
&\times \frac{k_2^{(1)} k^{(II)} \phi'_l(k^{(1)}a) \phi_l(k^{(II)}a) - k_2^{(II)} k^{(1)} \phi'_l(k^{(II)}a) \phi_l(k^{(1)}a)}{k_2^{(1)} k^{(II)} \zeta_l^{(1)'}(k^{(1)}a) \phi_l(k^{(II)}a) - k_2^{(II)} k^{(1)} \phi'_l(k^{(II)}a) \zeta_l^{(1)}(k^{(1)}a)}, \quad (a) \\
{}^m B_l &= i^{l+1} \frac{2l+1}{l(l+1)} \\
&\times \frac{k_2^{(1)} k^{(II)} \phi_l(k^{(1)}a) \phi'_l(k^{(II)}a) - k_2^{(II)} k^{(1)} \phi_l(k^{(II)}a) \phi'_l(k^{(1)}a)}{k_2^{(1)} k^{(II)} \zeta_l^{(1)}(k^{(1)}a) \phi'_l(k^{(II)}a) - k_2^{(II)} k^{(1)} \zeta_l^{(1)'}(k^{(1)}a) \phi_l(k^{(II)}a)}. \quad (b)
\end{aligned} \right\} \quad (57)$$

最后, 把(55)式代入(23)式, 就得出散射波场矢量的各个分量为

$$\left. \begin{aligned}
E_r^{(s)} &= \frac{1}{k^{(1)2}} \frac{\cos \phi}{r^2} \sum_{l=1}^{\infty} l(l+1) {}^e B_l \zeta_l^{(1)}(k^{(1)}r) P_l^{(1)}(\cos \theta), \\
E_{\theta}^{(s)} &= -\frac{1}{k^{(1)}} \frac{\cos \phi}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ {}^e B_l \zeta_l^{(1)'}(k^{(1)}r) P_l^{(1)}(\cos \theta) \sin \theta \right. \\
&\quad \left. - i {}^m B_l \zeta_l^{(1)}(k^{(1)}r) P_l^{(1)}(\cos \theta) \frac{1}{\sin \theta} \right\}, \\
E_{\phi}^{(s)} &= -\frac{1}{k^{(1)}} \frac{\sin \phi}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ {}^e B_l \zeta_l^{(1)'}(k^{(1)}r) P_l^{(1)}(\cos \theta) \frac{1}{\sin \theta} \right. \\
&\quad \left. - i {}^m B_l \zeta_l^{(1)}(k^{(1)}r) P_l^{(1)}(\cos \theta) \sin \theta \right\}, \\
H_r^{(s)} &= \frac{i}{k^{(1)} k_2^{(1)}} \frac{\sin \phi}{r^2} \sum_{l=1}^{\infty} l(l+1) {}^m B_l \zeta_l^{(1)}(k^{(1)}r) P_l^{(1)}(\cos \theta), \\
H_{\theta}^{(s)} &= -\frac{1}{k_2^{(1)}} \frac{\sin \phi}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ {}^e B_l \zeta_l^{(1)}(k^{(1)}r) P_l^{(1)}(\cos \theta) \frac{1}{\sin \theta} \right. \\
&\quad \left. + i {}^m B_l \zeta_l^{(1)'}(k^{(1)}r) P_l^{(1)}(\cos \theta) \sin \theta \right\}, \\
H_{\phi}^{(s)} &= \frac{1}{k_2^{(1)}} \frac{\cos \phi}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ {}^e B_l \zeta_l^{(1)}(k^{(1)}r) P_l^{(1)'}(\cos \theta) \sin \theta \right. \\
&\quad \left. + i {}^m B_l \zeta_l^{(1)'}(k^{(1)}r) P_l^{(1)}(\cos \theta) \frac{1}{\sin \theta} \right\}.
\end{aligned} \right\} \quad (58)$$

这就完成了我们的边界值问题的形式解。我们将不涉及解的存在

及收敛问题。

回顾各个常数的意义是有好处的。因为球周围的媒质假定是非导体，所以 $\sigma^{(1)} = 0$ 。如果把球的电导率 $\sigma^{(II)}$ 改写为 σ ，则由(2)式得出

$$\left. \begin{aligned} k_1^{(I)} &= \frac{i\omega}{c} \varepsilon^{(I)} = i \frac{2\pi}{\lambda_0} \varepsilon^{(I)}, \quad k_2^{(I)} = \frac{i\omega}{c} = i \frac{2\pi}{\lambda_0}, \\ k^{(I)} &= \sqrt{-k_1^{(I)} k_2^{(I)}} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\varepsilon^{(I)}} = \frac{2\pi}{\lambda^{(I)}}, \\ k_1^{(II)} &= \frac{i\omega}{c} \left(\varepsilon^{(II)} + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right) = i \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\varepsilon^{(II)} + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right), \\ k_2^{(II)} &= \frac{i\omega}{c} = i \frac{2\pi}{\lambda_0}, \\ k^{(II)} &= \sqrt{-k_1^{(II)} k_2^{(II)}} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\varepsilon^{(II)} + \frac{4\pi\sigma}{\omega}}, \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

式中 λ_0 是光在真空中的波长，而 $\lambda^{(I)}$ 是光在球周围的媒质中的波长。

为了以后的讨论，引入球相对于周围媒质的复折射率也是方便的。用 \hat{n} 表示这个复折射率，则有

$$\hat{n}^2 = \frac{\hat{n}^{(II)^2}}{\hat{n}^{(I)^2}} = \frac{k^{(II)^2}}{k^{(I)^2}} = \frac{\varepsilon^{(II)}}{\varepsilon^{(I)}} + i \frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon^{(I)}} = \frac{k_1^{(II)}}{k_2^{(I)}}. \quad (60)$$

再引入一个无量纲参数 q ，定义为

$$q = \frac{2\pi}{\lambda^{(I)}} a, \quad (61)$$

即 q 是球半径与光在球外媒质中的波长的比值的 2π 倍。于是，再用关系式

$$\frac{k^{(II)} k_2^{(I)}}{k^{(I)} k_2^{(II)}} = \hat{n},$$

就可以把系数(57)表示为下列形式：

$$\left. \begin{aligned} {}^e B_l &= i^{l+1} \frac{2l+1}{l(l+1)} \frac{\hat{n}\phi'_l(q)\phi_l(\hat{n}q) - \phi_l(q)\phi'_l(\hat{n}q)}{\hat{n}\zeta_l^{(I)}(q)\phi_l(\hat{n}q) - \zeta_l^{(I)}(q)\phi'_l(\hat{n}q)}, \\ {}^m B_l &= i^{l+1} \frac{2l+1}{l(l+1)} \frac{\hat{n}\phi_l(q)\phi'_l(\hat{n}q) - \phi'_l(q)\phi_l(\hat{n}q)}{\hat{n}\zeta_l^{(I)}(q)\phi'_l(\hat{n}q) - \zeta_l^{(I)}(q)\phi_l(\hat{n}q)}. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

当球的介电常数或者球的电导率很高，同时球的半径不太小时，这些公式有特别简单的形式。在这种情况下， $|n| \gg 1$ ， $|\hat{n}q| \gg 1$ ，而(62)式化为

$$\left. \begin{aligned} {}^e B_l &= i^{l+1} \frac{2l+1}{l(l+1)} \frac{\phi'_l(q)}{\zeta_l^{(v)}(q)}, \\ {}^m B_l &= i^{l+1} \frac{2l+1}{l(l+1)} \frac{\phi_l(q)}{\zeta_l^{(v)}(q)}. \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

这个近似式对于光学没有多大意义，但它对无线电波是重要的。由于早期的理论曾涉及这种极限情况¹⁾，它还具有历史意义。

(c) 关于缔合勒让德函数与柱面函数的公式概述

为了便于进一步讨论，我们在这里概括地介绍关于球谐函数与柱面函数的一些公式。

缔合勒让德函数

勒让德多项式是 ($\cos \theta$ 的) 多项式

$$P_l(\cos \theta) = \sum_{m=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} (-1)^m \frac{(2l-2m)!}{2^l m! (l-m)! (l-2m)!} (\cos \theta)^{l-2m}, \quad (64)$$

而第一类缔合勒让德函数由下列公式定义²⁾:

$$P_l^{(m)}(\cos \theta) = (\sin \theta)^m \frac{d^m P_l(\cos \theta)}{d(\cos \theta)^m}. \quad (65)$$

还需要下列关系式:

$$\left. \begin{aligned} P_l^{(1)}(\cos \theta) &= \frac{l}{\sin \theta} \{ P_{l-1}(\cos \theta) - \cos \theta P_l(\cos \theta) \}, \\ P_l^{(1)}(\cos \theta) &= \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \left\{ P_l^{(1)}(\cos \theta) - l(l+1) \frac{P_l(\cos \theta)}{\sin \theta} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

对于大的 l 值，有一渐近逼近式

1) 参看 K. Schwarzschild, *Münch. Akad., Math-phys. Kl.* **31** (1901), 293.

2) 有时采用稍有不同的定义，它与现在这一定义不同之处为乘一个因子 $(-1)^m$ 。

$$P_l(\cos \theta) \sim \sqrt{\frac{2}{l\pi \sin \theta}} \sin \left[\left(l + \frac{1}{2} \right) \theta + \frac{\pi}{4} \right]. \quad (67)$$

柱面函数

I. 自变量 x 的值很小, 则 $\phi_l(x)$ 的级数展开式为

$$\phi_l(x) = \frac{x^{l+1}}{1 \cdot 3 \cdots (2l+1)} f_l(x), \quad (68)$$

式中

$$f_l(x) = 1 - \frac{2}{2l+3} \left(\frac{x}{2} \right)^2 + \cdots \quad (69)$$

$\zeta_l^{(1)}(x)$ 的展开式为

$$\zeta_l^{(1)}(x) = -i \frac{1 \cdot 3 \cdots (2l-1)}{x^l} e^{ix} \{ h_l(x) - ixg_l(x) \}, \quad (70)$$

式中 $h_l(x)$ 与 $g_l(x)$ 是幂级数, 其中第一项为 1, 第二项是 x 的二次项. 函数 $\phi'_l(x)$ 与 $\zeta_l^{(1)'}(x)$ 可用类似的形式表示:

$$\phi'_l(x) = \frac{(l+1)x^l}{1 \cdot 3 \cdots (2l+1)} f_l^+(x), \quad (71)$$

$$\zeta_l^{(1)'}(x) = il \frac{1 \cdot 3 \cdots (2l-1)}{x^{l+1}} e^{ix} \{ h_l^+(x) - ixg_l^+(x) \}, \quad (72)$$

式中 $f_l^+(x)$, $h_l^+(x)$ 与 $g_l^+(x)$ 是与前述同类的幂级数.

II. 自变量 x 的值很大, 只要 l 与 $|x|$ 相比很小, 则可以用下列渐近公式:

$$\phi_l(x) \sim \frac{1}{2} \{ i^{l+1} e^{-ix} + (-i)^{l+1} e^{ix} \}, \quad (73)$$

$$\zeta_l^{(1)}(x) \sim (-i)^{l+1} e^{ix}, \quad (74)$$

及

$$\phi'_l(x) \sim \frac{1}{2} \{ i^l e^{-ix} + (-i)^l e^{ix} \}, \quad (75)$$

$$\zeta_l^{(1)'}(x) \sim (-i)^l e^{ix}. \quad (76)$$

对于 x 的实数值, 函数 $\phi_l(x)$ 与 $\phi'_l(x)$ 本身都是实数:

$$\phi_l(x) \sim \sin \left(x - \frac{l\pi}{2} \right), \quad (77)$$

$$\phi_l(x) \sim \cos\left(x - \frac{l\pi}{2}\right). \quad (78)$$

§ 13.5.2 米氏公式的某些结果

(a) 分波

由(58)式看出，散射波径向分量 $E_r^{(s)}$ 与 $H_r^{(s)}$ 的振幅按离开散射中心的距离的倒数平方衰减，而其他分量的振幅则按此距离的倒数较慢衰减。因此，在足够大的距离处 ($r \gg \lambda$)，在辐射带或波带内，与切向分量相比，径向分量可以忽略，即波在此区域内是横波。

公式表明，散射波是由包括不同阶的球谐函数的贡献组成的。这些贡献可称为分波 (partial wave)，它们的强度由复系数 $'B_l$ 与 $''B_l$ 的绝对值确定。这些系数取决于两种媒质的性质以及球半径与入射光波长的比值。

每一个分波是由一个振幅为 $'B_l$ 的电分波与一个振幅为 $''B_l$ 的磁分波组成的。电分波的磁力线与磁分波的电力线统统位于同心球面上，因为前者 $H_r^{(s)} = 0$ ，而后者 $E_r^{(s)} = 0$ 。

让我们考虑一个典型的分波，例如第 l 个电波。我们看到，在

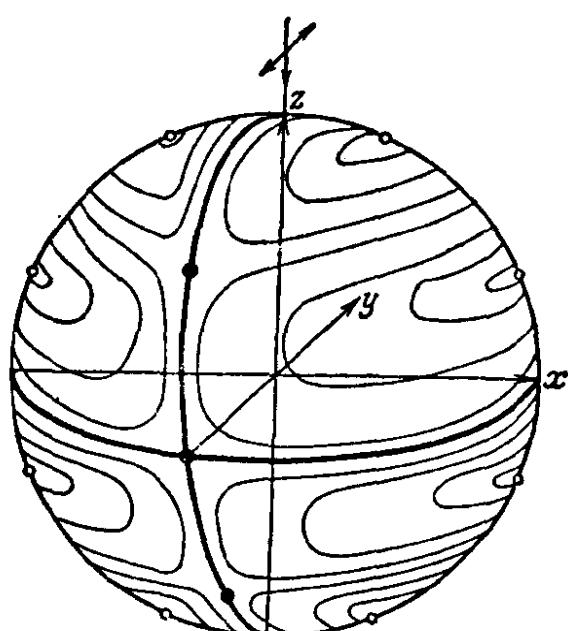


图 13.8 第四个电分波的磁力线

$\cos \phi$ 或 $P_l^{(1)'}(\cos \theta) \sin \theta$ 为零的各点处，相应的分量 $E_\theta^{(s)}$ 与 $H_\phi^{(s)}$ 为零；同样，在 $\sin \phi$ 或 $P_l^{(1)}(\cos \theta)/\sin \theta$ 为零的各点处， $E_\phi^{(s)}$ 与 $H_\theta^{(s)}$ 为零。现在，在区间 $0 \leq \theta \leq \pi$ 内，函数 $P_l^{(1)'}(\cos \theta)$ 有 l 次为零，函数 $P_l^{(1)}(\cos \theta)/\sin \theta$ 有 $(l-1)$ 次为零，但当 $\theta = 0$ 或 π 时不等于零。由此得出， $\phi = \pm \pi/2$ 时，所有的场分量有 $2l$ 次为零，即总共有 $(4l-2)$ 次为

零。由于磁力线必须是闭合曲线，并且如前述，它们统统位于与原点同心的球面上，因而得出，圆 $\phi = 0$ 或 π 上 $2l$ 个零点中每一个都是闭合磁迴线族的中心，反之，位于圆 $\phi = \pm\pi/2$ 上的 $2(l-1)$ 个零点都是中性点。力线避开这些中性点，正如两个具有公共渐近线的等轴双曲线族避开它们的公共中心那样。

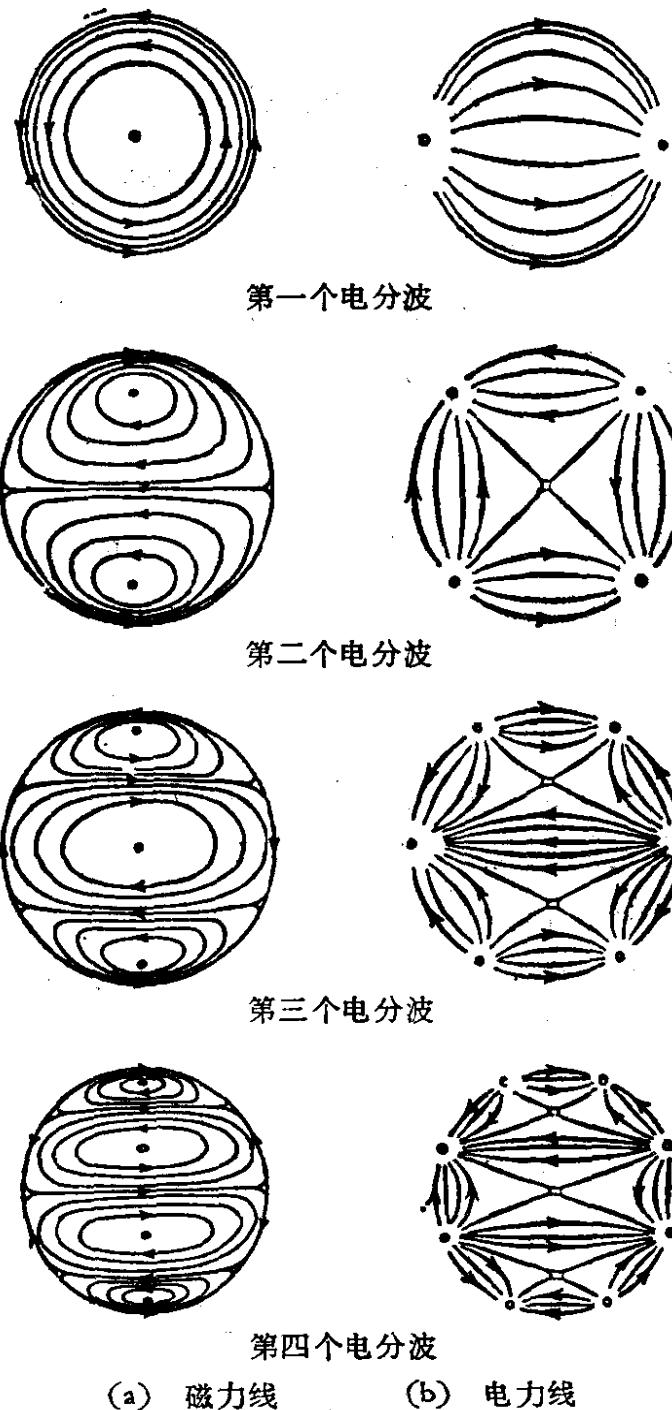


图 13.9 第四个电分波的力线
[引自 G. Mie, *Ann. d. Physik* (4), 25 (1908), 377.]

图 13.8 画出第四个电分波的磁力线。可以清楚地区分两组的点；第一组在 xz 截面（图平面），第二组在 yz 截面。

图 13.9(a) 画出位于 yz 平面任一侧的一个半球上并属于头四个电分波的磁力线在 yz 平面上的投影。在辐射带内，电力线与磁力线正交，因为根据 (58) 式，对每一个（电或磁）分波，都有

$$E_{\theta}^{(s)} H_{\theta}^{(s)} + E_{\phi}^{(s)} H_{\phi}^{(s)} = 0. \quad (79)$$

图 13.9(b) 画出这些线在 xz 平面上的类似投影。

除了 $\cos \phi$ 与 $\sin \phi$ 要互换外，类似的结果对于磁分波也成立。只要把图形绕 z 轴转 90° 角，就可以得出位于一个球面上的磁分波的电力线的相应投影。

(b) 极限情况

现在我们研究各个分波的相对贡献。一般情况 (\hat{a} 与 q 任意) 不能作简单的解析处理，因此只详细考虑两种极限情况，即球半径比波长大得多 ($q \gg 1$) 时的情况，和球半径比波长小得多 ($q \ll 1$) 时的情况。

I. $q \gg 1$. 对于这种情况，必须期望我们的解实质上给出与惠更斯-基尔霍夫衍射理论相同的结果，或者甚至（当 $q \rightarrow \infty$ 时）给出与几何光学相同的结果。

如果限于讨论远小于 q 与 $|\hat{a}q|$ 的那些序数 l ，则可以用渐近逼近式(73)至(76)，得

$$\begin{aligned} \frac{\psi_l(\hat{a}q)}{\psi'_l(\hat{a}q)} &\sim \frac{i^{l+1} e^{-i\hat{a}q} + (-i)^{l+1} e^{i\hat{a}q}}{i^l e^{-i\hat{a}q} + (-i)^l e^{i\hat{a}q}} \\ &= \frac{\cos \left[\hat{a}q - (l+1) \frac{\pi}{2} \right]}{\cos \left[\hat{a}q - l \frac{\pi}{2} \right]} = \tan \left[\hat{a}q - l \frac{\pi}{2} \right], \end{aligned} \quad (80)$$

并且，系数(62)变为

$$\left. \begin{aligned}
 {}^*B_l &= (-1)^{l+1} \frac{2l+1}{l(l+1)} e^{-iq} \\
 &\times \frac{\sin \left[q - l \frac{\pi}{2} \right] - \hat{n} \cos \left[q - l \frac{\pi}{2} \right] \tan \left[\hat{n}q - l \frac{\pi}{2} \right]}{1 - i\hat{n} \tan \left[\hat{n}q - l \frac{\pi}{2} \right]}, \\
 {}^m B_l &= (-1)^{l+1} \frac{2l+1}{l(l+1)} e^{-iq} \\
 &\times \frac{\hat{n} \sin \left[q - l \frac{\pi}{2} \right] - \cos \left[q - l \frac{\pi}{2} \right] \tan \left[\hat{n}q - l \frac{\pi}{2} \right]}{\hat{n} - i \tan \left[\hat{n}q - l \frac{\pi}{2} \right]}
 \end{aligned} \right\} (81)$$

我们注意到这些系数是 q 与 l 两者的快速振荡函数, 因此, q 或 l 的微小改变都会引起 *B_l 与 ${}^m B_l$ 的很大变化. 我们还观察到 ${}^m B_{l+1}$ 与 *B_l 具有相同数量级, 即序数 l 的电分波的振幅与高一序的磁分波的振幅具有相同数量级.

因为公式(81)是根据 l 远小于 q 的假设导出的, 所以由这些近似式不能确定对散射场有可观贡献的分波的数目。德拜¹⁾导出了对所有序数都成立的渐近逼近式, 并证明了一旦 $l + \frac{1}{2}$ 超过 q , 分波的振幅就迅速下降到零, 因此只需要包括前 q 项即可.

当球的介电常数或电导率很大 ($|\hat{n}| \rightarrow \infty$) 时, *B_l 与 ${}^m B_l$ 的表达式化为:

$$\left. \begin{aligned}
 {}^*B_l &= i(-1)^{l+1} \frac{2l+1}{l(l+1)} e^{-iq} \cos \left(q - l \frac{\pi}{2} \right), \\
 {}^m B_l &= (-1)^{l+1} \frac{2l+1}{l(l+1)} e^{-iq} \sin \left(q - l \frac{\pi}{2} \right),
 \end{aligned} \right\} (82)$$

由(63)式并利用渐近逼近式(73)至(76), 就非常简单地导出上式.

本节 ($q \gg 1$) 的近似式可应用于虹霓理论²⁾ 方面; 由雨滴大

1) P. Debye, Ann. d. Physik (4), 30 (1909), 118; Mat. Ann., 67 (1909), 535; Sitzungsb. Münch. Akad. Wiss., Math. Phys. Kl., 5 Abh. (1910).

2) 参看 B. van der Pol and H. Bremmer, Phil. Mag., (7) 24 (1937), 857; H. Bucerius, Optik, 1 (1946), 188.

小决定的参量 q 具有 10^4 的数量级.

II. $q \ll 1$. 这种情况对于胶体溶液中的微观及亚微观粒子有很大的实际重要性. 现在我们可以利用柱面函数的幂级数展开式(68)至(72), 得出(限于主要项),

$$\left. \begin{aligned} {}^e B_l &\sim i^l \frac{q^{2l+1}}{l^2[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2l-1)]^2} \frac{\hat{n}^2 - 1}{\hat{n}^2 + \frac{l+1}{l}}, \\ {}^m B_l &\sim i^l \frac{q^{2l+3}}{l(l+1)(2l+1)(2l+3)[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2l-1)]^2} (\hat{n}^2 - 1). \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

当电导率或介电常数很大时, 由(63)式得出¹⁾

$$\left. \begin{aligned} {}^e B_l &= i^l \frac{q^{2l+1}}{l^2[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2l-1)]^2}, \\ {}^m B_l &= -i^l \frac{q^{2l+1}}{l(l+1)[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2l-1)]^2}. \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

只要电导率保持有限值[公式(83)], 则 ${}^e B_{l+1}$ 与 ${}^m B_l$ 都与 q 的同一幂次成正比, 即第 $(l+1)$ 个电分波的振幅与第 l 个磁分波的振幅具有相同数量级, 正如 $q \gg 1$ 时的情况一样. 如果球半径是这样小, 以致 q^2 与 1 相比可以忽略, 则只需要考虑第一个电分波, 其强度(与位相)由复振幅

$${}^e B_1 = iq^3 \frac{\hat{n}^2 - 1}{\hat{n}^2 + 2} = i \left(\frac{2\pi a}{\lambda^{(1)}} \right)^3 \frac{\hat{n}^2 - 1}{\hat{n}^2 + 2} \quad (85)$$

给出. 因为 ${}^e B_1$ 是复数, 所以在入射初级场与散射次级场之间有一个位相差.

另一方面, 在 $|\hat{n}| \rightarrow \infty$ 的极限情况下, 由(84)式看出, 第 l 个电分波的振幅与第 l 个磁分波的振幅具有相同数量级.

现在让我们考虑 $|\hat{n}|$ 为有限值时, 在离球很远的距离处($r \gg \lambda$) 第一个电分波的场. 在(58)式中, 利用渐近逼近式

$$\zeta_1^{(1)}(x) = -e^{ix}, \quad \zeta_1^{(1)\prime}(x) = -ie^{ix}, \quad (86)$$

1) 从(83)式直接过渡到(84)式并不简单; 必须注意到, 当 $|\hat{n}| \rightarrow \infty$ 时, $q \rightarrow 0$, 是通过使 $q^2 |\hat{n}|^2$ 趋近于一个有限值而得出的.

以及关系式

$$\begin{aligned} P_1(\cos\theta) &= \cos\theta, & P_1^{(1)}(\cos\theta) &= \sin\theta, \\ P_1^{(1)'}(\cos\theta)\sin\theta &= -\cos\theta, \end{aligned} \quad (87)$$

式中，一撇表示对 $\cos\theta$ 求微商，就得出

$$\left. \begin{aligned} E_\theta^{(s)} &= -\frac{i}{k^{(1)}} \cos\phi \cos\theta e B_1 \frac{e^{ik^{(1)}r}}{r} \\ &= \left(\frac{2\pi}{\lambda^{(1)}}\right)^2 a^3 \frac{\hat{n}^2 - 1}{\hat{n}^2 + 2} \cos\phi \cos\theta \frac{e^{ik^{(1)}r}}{r}, \\ E_\phi^{(s)} &= \frac{i}{k^{(1)}} \sin\phi e B_1 \frac{e^{ik^{(1)}r}}{r} \\ &= -\left(\frac{2\pi}{\lambda^{(1)}}\right)^2 a^3 \frac{\hat{n}^2 - 1}{\hat{n}^2 + 2} \sin\phi \frac{e^{ik^{(1)}r}}{r}, \\ H_\theta^{(s)} &= \frac{1}{k_2^{(1)}} \sin\phi e B_1 \frac{e^{ik^{(1)}r}}{r} \\ &= \left(\frac{2\pi}{\lambda^{(1)}}\right)^2 \sqrt{\epsilon^{(1)}} a^3 \frac{\hat{n}^2 - 1}{\hat{n}^2 + 2} \sin\phi \frac{e^{ik^{(1)}r}}{r}, \\ H_\phi^{(s)} &= \frac{1}{k_2^{(1)}} \cos\phi \cos\theta e B_1 \frac{e^{ik^{(1)}r}}{r} \\ &= \left(\frac{2\pi}{\lambda^{(1)}}\right)^2 \sqrt{\epsilon^{(1)}} a^3 \frac{\hat{n}^2 - 1}{\hat{n}^2 + 2} \cos\phi \cos\theta \frac{e^{ik^{(1)}r}}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

不难看出，(88)式与一个在 O 点处平行于 x 轴振荡的电偶极矩的辐射带 ($r \gg \lambda$) 的方程相同，即平行于初级入射场的电矢量，并具有矩 $p = p_0 e^{-i\omega t}$ ，其中

$$p_0 = a^3 \left| \frac{\hat{n}^2 - 1}{\hat{n}^2 + 2} \right|. \quad (89)$$

为了证明这一点，首先假定外部媒质为真空 ($\epsilon^{(1)} = 1$)，并回到 § 2.2 的(53)和(54)式。根据这些方程，一个具有矩 $p_0 e^{-i\omega t}$ 的线性电偶极子在真空中的辐射场由下式给出，

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_0), \\ \mathbf{H} &= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{1}{r^2} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_0), \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

式中已略去时间谐波因子 $e^{-i\omega t}$, \mathbf{r} 是观察点相对于原点的位置矢量. 由(90)式得出, 如果 \mathbf{p}_0 为 x 轴方向, 则 \mathbf{E} 与 \mathbf{H} 的分量由下式给出,

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p_0 (\sin^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \theta) \frac{e^{ikr}}{r}, \\ E_y &= -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p_0 (\sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi) \frac{e^{ikr}}{r}, \\ E_z &= -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p_0 \sin \theta \cos \theta \cos \phi \frac{e^{ikr}}{r}, \\ H_x &= 0, \\ H_y &= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p_0 \cos \theta \frac{e^{ikr}}{r}, \\ H_z &= -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p_0 \sin \theta \sin \phi \frac{e^{ikr}}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

如果现在应用变换到球极坐标的(8)式, 并且用(89)式代替 p_0 , 则上式变换为(88)式 ($\epsilon^{(1)} = 1$). 在更一般的情况下, 当 $\epsilon^{(1)} \neq 1$ 时, 我们必须考虑用一个偶极子在电介质中的辐射场的相应表达式来代替(91)式. 这些表达式可以用类似于(91)式的方法得出, 当它们变换到球极坐标时, 就变换为(88)式. 我们注意到, 球的折射率只以 $(n^2 - 1)/(n^2 + 2)$ 的组合在等效偶极矩的表达式(89)中出现; 对于电介质(n 为实数), 我们已经在分子折射度理论中碰到过这个式子了(参看 § 2.3(17)式).

因为, 根据(88)式, 振幅与波长平方成反比, 所以散射光的强度与波长的四次方成反比. 在这样一种情形所谈的是瑞利散射¹⁾.

第一个磁分波可以类似地利用一个振动磁偶极子来描述. 更高序的分波可认为是由于振动多极子引起的, 但我们在那里不研

1) 如上册第 136 页所指出, 瑞利在关于天空蓝色的著名论文中证明了这类散射亦由均匀媒质的密度自发涨落而引起 [Lord Rayleigh, *Phil. Mag.*, (4) **XLI** (1871), 274, 447; (5) **XLVII** (1899), 375. 重印于他的 *Scientific Papers*, 1 (1899), 87, 104; 4 (1903), 397].

究它。

(c) 散射光的强度和偏振

现在让我们回到一般情况，扼要地考察一下散射光的强度和偏振。因为我们只对强度的相对值感兴趣，所以可以取电矢量实振幅的平方作为强度的量度。我们只考虑远场 ($r \gg \lambda$)，所以可以把(58)式中的函数 $\zeta_l^{(1)}$ 与 $\zeta_l^{(1)'} \zeta_l^{(1)''}$ 用它们的渐近逼近式来代替。又令

$$\left. \begin{aligned} I_{\parallel}^{(s)} &= \frac{\lambda^{(1)2}}{4\pi^2 r^2} \left| \sum_{l=1}^{\infty} (-i)^l \left({}^e B_l P_l^{(1)'}(\cos \theta) \sin \theta \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - {}^m B_l \frac{P_l^{(1)}(\cos \theta)}{\sin \theta} \right) \right|^2, \\ I_{\perp}^{(s)} &= \frac{\lambda^{(1)2}}{4\pi^2 r^2} \left| \sum_{l=1}^{\infty} (-i)^l \left({}^e B_l \frac{P_l^{(1)}(\cos \theta)}{\sin \theta} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - {}^m B_l P_l^{(1)''}(\cos \theta) \sin \theta \right) \right|^2. \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

则

$$|E_{\theta}^{(s)}|^2 = I_{\parallel}^{(s)} \cos^2 \phi, \quad |E_{\phi}^{(s)}|^2 = I_{\perp}^{(s)} \sin^2 \phi. \quad (93)$$

我们把观测平面定义为包含入射光传播方向与观测方向 (θ, ϕ) 的平面。根据(4)和(7)式， ϕ 代表这个平面与入射波电矢量振动方向之间的夹角。因为根据(93)式，当 $\phi = 0$ 或 $\phi = \pi/2$ 时， $E_{\theta}^{(s)}$ 或 $E_{\phi}^{(s)}$ 为零，所以当观测平面平行或垂直于初级振动时，散射光是线偏振的。对于任何其他方向 (θ, ϕ)，因为比值 $E_{\theta}^{(s)}/E_{\phi}^{(s)}$ 是复数，所以光一般是椭圆偏振的。然而，在由(88)式表示的瑞利散射的特殊情况下，比值 $E_{\theta}^{(s)}/E_{\phi}^{(s)}$ 总是实数，因此散射光对于所有观测方向都是线偏振的。

实际上，通常涉及自然光的散射。如 § 1.5，由偏振光那些公式对所有偏振方向求平均，就可以得出适当的公式¹⁾。用一横表示

1) 另一种办法是采用 § 10.8.2 的结果，据此，可以把一列自然光波看作是由两列等振幅的、传播方向相同而偏振方向互相垂直的不相干波组成的。可分别确定每一列波的散射，对这两部分的波的强度求和就得到总强度。这又导至(94)式。

这种平均,因为 $\overline{\cos^2 \phi} = \overline{\sin^2 \phi} = \frac{1}{2}$, 所以,代替(93)式,得出

$$\overline{|E_\theta^{(s)}|^2} = \frac{1}{2} I_{\parallel}^{(s)}, \quad \overline{|E_\phi^{(s)}|^2} = \frac{1}{2} I_{\perp}^{(s)}. \quad (94)$$

$I_{\parallel}^{(s)}$ 与 $I_{\perp}^{(s)}$ 一般都不为零,因此散射光是部分偏振的。和 § 1.5(42) 式类似,可以定义散射光的偏振度 P 为

$$P = \left| \frac{I_{\perp}^{(s)} - I_{\parallel}^{(s)}}{I_{\perp}^{(s)} + I_{\parallel}^{(s)}} \right|. \quad (95)$$

于是散射光的非偏振比例(unpolarized proportion) 为

$$\begin{aligned} (I_{\perp}^{(s)} + I_{\parallel}^{(s)}) (1 - P) &= 2I_{\parallel}^{(s)}, \text{ 当 } I_{\parallel}^{(s)} < I_{\perp}^{(s)} \text{ 时,} \\ &= 2I_{\perp}^{(s)}, \text{ 当 } I_{\parallel}^{(s)} > I_{\perp}^{(s)} \text{ 时.} \end{aligned} \quad \} \quad (96)$$

散射光的强度与偏振对散射方向以及对物理参量 (λ, a, \hat{n}) 的依赖关系,曾经被很多作者¹⁾ 在米氏理论的基础上研究过了,我们在这里扼要概括已得出的某些主要结果,而不能做比这更多的事情了。

图 13.10 和 13.11 中,对于不同大小的电介质球和金属球,散射光的强度与非偏振比例均表示为观测角 θ 的函数。外曲线的矢径长度与强度 $I^{(s)} = I_{\parallel}^{(s)} + I_{\perp}^{(s)}$ 成正比,而内曲线的矢径长度,若不另作说明,则与 $I_{\perp}^{(s)}$ 成正比。单位是任意的,而且在各图中也

1) 除了已引用过的米氏论文外,可参考下列论文:

R. Gans, *Ann. d. Physik* (4), **76** (1925), 29; H. Senglleben and E. Benedict, *Ann. d. Physik* (4), **60** (1919), 297; H. Blumer, *Z. f. Phys.*, **32** (1925), 119; **38** (1926), 304, 920; **39** (1926), 195; C. Schalén, *Uppsala Astr. Obs. Ann.*, **1**, No. 2 (1939); 同上, **1**, No. 9 (1945); G. R. Paranjpe, Y. G. Naik, and P. B. Vaidya, *Proc. Indian Acad.*, A. **9** (1939), 333, 352; H. Holl, *Optik*, **1** (1946), 213; 同上, **4** (1948/49), 173. 对很多作者所得结果的很全面的概括评述,见 H. C. van de Hulst 的论文, *Rech. Astr. Observ. Utrecht*, **11**, Pt. I (1946) 以及他的书 *Light Scattering by Small Particles* (New York, John Wiley and Sons; London, Chapman and Hall, 1957). 也见于 G. Oster, *Chem. Rev.*, **43** (1948), 319.

Tables of scattering functions for spherical particles, National Bureau of Standards (Washington, D. C. 1949), Applied Mathematics Series, 4; R. O. Gumprecht and C. M. Slepcevich, *Light-Scattering Functions for Spherical Particles* (Ann Arbor, University of Michigan Press, 1951).

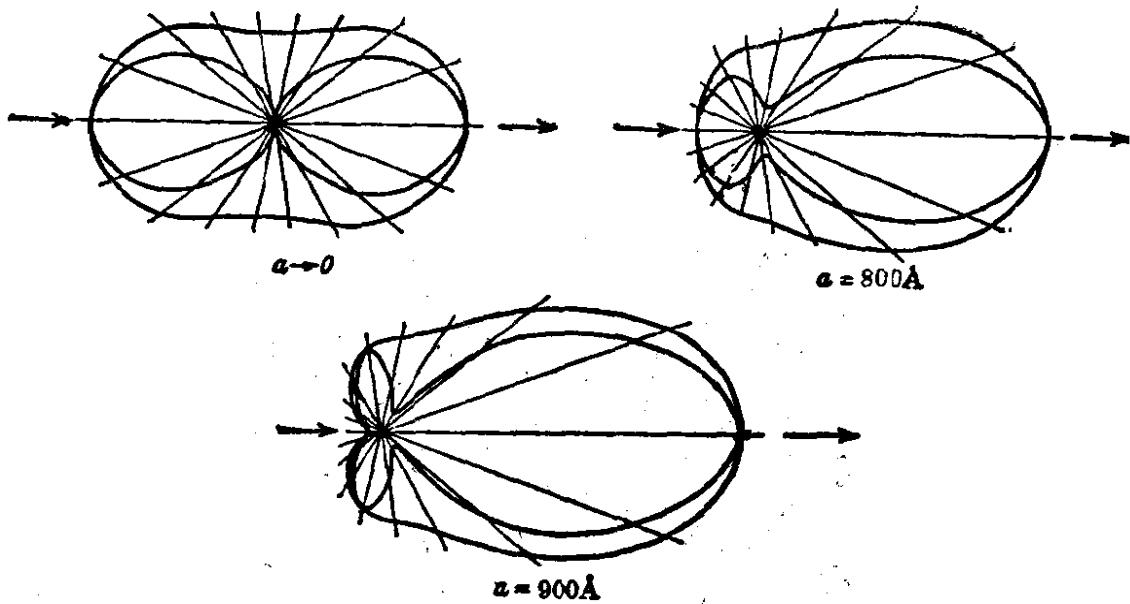


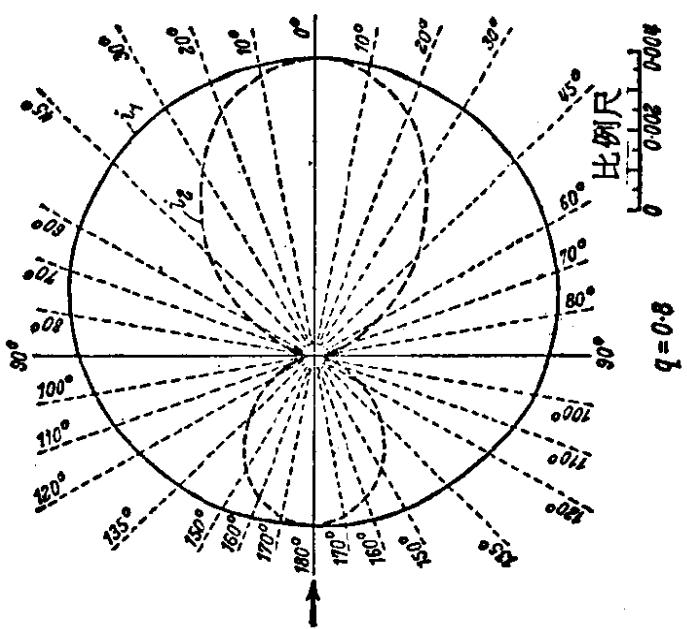
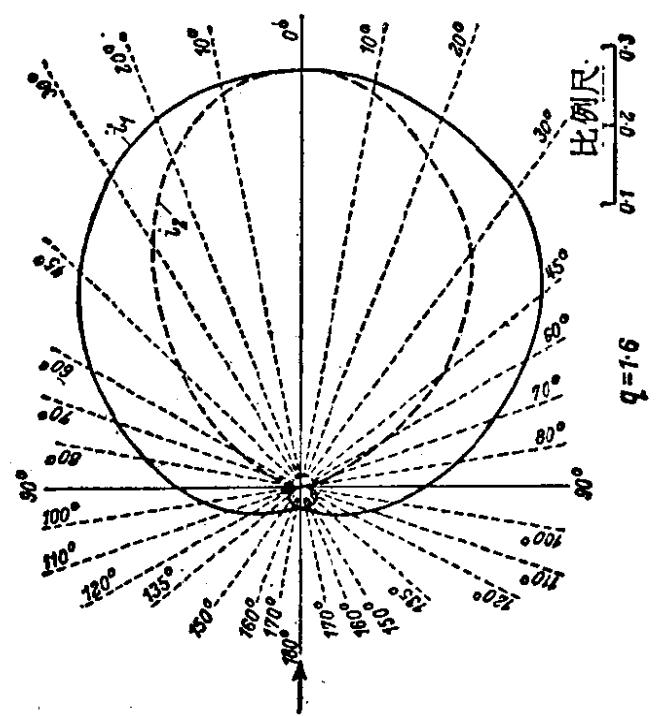
图 13.10 线偏振光被球状金粒散射的极坐标图
($\lambda_0 = 5500$ 埃, $n^{(I)} = 1.33$, $n^{(II)} = 0.57 + 2.45i$)

[引自 G. Mie, *Ann. d. Physik*, (4) 25 (1908), 429.]

不相同。由这些极坐标图以及其他已发表的计算结果，可引出下列的一般结论：

排除电导率或介电常数很大的情况（在这种情况下，入射光大部分向后辐射，即“反射”），在球缩小至零的极限情况下 ($a \rightarrow 0$)，极坐标图对于通过球心并与入射光传播方向成直角的平面是对称的。在前进方向 ($\theta = 0$) 和相反方向 ($\theta = 180^\circ$) 上都有一个强度极大值，在对称平面 ($\theta = 90^\circ$) 上则有极小值。随着球半径的增大，就偏离了对称性，在前进方向上散射的光要比在相反方向上散射的多。这种现象通常称为米氏效应。随着半径更进一步增大，实际上所有散射光都出现在前进方向 $\theta = 0$ 的周围；同样，对于一个导体球，有更多的光集中于这个方向上。然而当球半径比波长大很多时，入射光大部分被反射，如同按几何光学得出的那样。

表 29 中阐明了散射光强度对球半径的依赖关系。比较第一行和第三行，就可以清楚地看到米氏效应。表中指出，强度随着球增大而很快增加；为了真实比较，表中的数值必须乘以因子 $\lambda^{(I)^2} / 4\pi^2 a^2 = 1/q^2$ 。



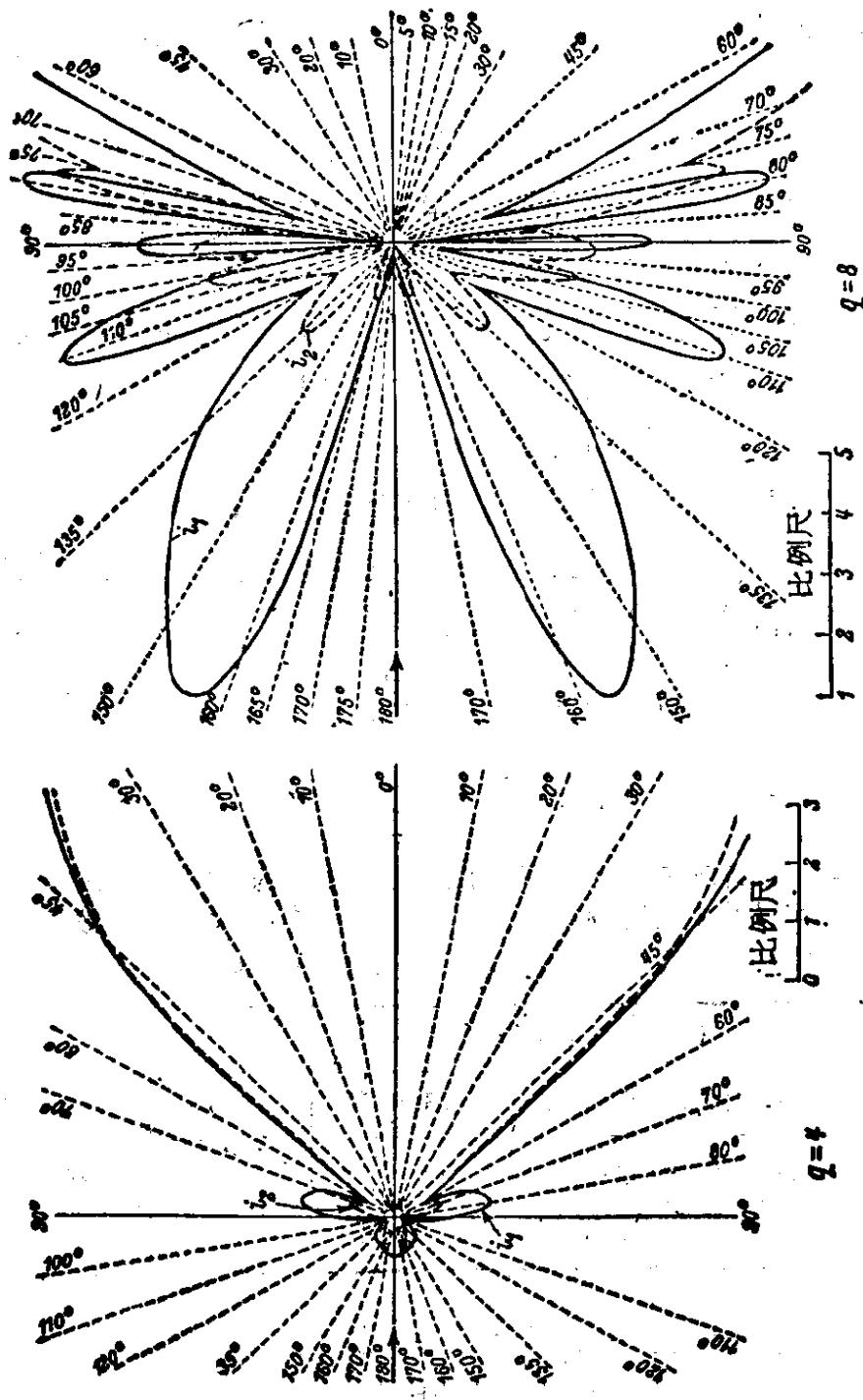


图 13.11 线偏振光被折射率 $n = 1.25$ 的电介质球散射的极坐标图。 $i_1 = q^2 I_L$, $i_2 = q^2 I_s$
[引自 H. Blumer, Z. f. Phys., 32 (1925), 119.]

当 q 超过 1, 即球直径 $2a$ 大于 $\lambda^{(1)}/\pi$ 时, 出现一系列极大值与极小值, 它们最初是不规则分布的. 当 q 很大时, 一系列极大值与极小值的出现就与惠更斯-基尔霍夫理论一致.

关于散射光的偏振, 取决于 $|a|$ 是否很大, 其结果又是不同的.

对于高电导 ($\sigma \rightarrow \infty$) 或有很高介电常数 ($\epsilon \rightarrow \infty$) 的很小的球, 当 $\theta = 60^\circ$ (汤姆孙角) 时, 偏振最大. 随着半径增大, 极大值移到 θ 增大的方向上.

对于有限电导率和有限介电常数的球, 在两种典型情况下, 偏振对观测角 θ 的依赖关系如图 13.10 与 13.11 所示. 当球半径很小 ($q \rightarrow 0$) 时, 偏振图同强度图一样是对于 xy 平面对称的, 当 $\theta = 90^\circ$ 时, 偏振图有一极大值, 在该处是完全偏振的. 在这种情况下(瑞利散射), 偏振度可以用单一的分析表达式来表示, 它是由 (88) 和 (93) 式代入 (95) 式得出的, 即

$$P(\theta) = \frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta}. \quad (97)$$

这个公式曾被瑞利利用一个不同的方法导出.

表 29 折射率 $n = 1.25$ 的电介质球散射的光的归一化强度

$4\pi^2 a^2 (I_{\perp}^{(s)} + I_{\parallel}^{(s)}) / \lambda^{(1)2}$, 作为参量 $q = 2\pi a / \lambda^{(1)}$ 的函数

(根据 H. Blumer 的计算编制, Z. f. Phys., 38 (1926), 304)

θ	$q = 0.01$	$q = 0.1$	$q = 0.5$	$q = 1$	$q = 2$	$q = 5$	$q = 8$
0	5.0×10^{-14}	5.0×10^{-8}	1.2×10^{-3}	2.3×10^{-1}	4.3	9.8×10^2	7.5×10^3
90°	2.5×10^{-14}	2.5×10^{-8}	5.0×10^{-4}	3.6×10^{-2}	2.5×10^{-1}	2.7	7.1
180°	5.0×10^{-14}	4.9×10^{-8}	7.8×10^{-4}	1.9×10^{-3}	2.0×10^{-2}	1.3	0.9

随着球半径增大, 直到大约 $a = \lambda^{(1)}/\pi$, 极大值发生移动; 在大多数曾经研究过的情况下, 对于电介质球, 移动到 θ 较大的方向上, 而对于吸收球, 则移动到 θ 较小的方向上. 当球半径更进一步增大时, 就出现偏振极大的不规则序列.

在 $\theta = 90^\circ$ 的方向上, 当 $q < 1$ 时, 光几乎是完全偏振的, 其

电矢量垂直于观测平面；当 q 值较大时，不再是这种情况，其行为变得不规则了。

至此，我们一直限于讨论单色光。人们常常要涉及多色光的散射，所以我们也必须考虑由于存在不同波长成分而引起的效应。我们注意到，波长仅通过参量 q 及折射率 n 而出现于我们的公式中。在一个足够小的波长范围内，如果在(60)式中，含电导率 σ 的项比另一项小很多，即对于一个不良导体球，则 n 实际上与波长无关。另一方面，在电导率无限高的极限情况下， n 完全不出现于公式中。在这些情况下，光谱成分的强度只取决于 $a/\lambda^{(1)}$ 。因此，改变波长引起的效应，实质上等效于适量改变球半径所引起的效应。因为对于不同波长，偏振极大值在不同的观测角上出现，所以通过一个起偏振棱镜观测散射光时，就看到复杂颜色变化。这种效应称为多向色性 (polychroism)。散射光的偏振对波长的依赖关系通常称为偏振的色散，它对于理论提供很精确的检验¹⁾。

§ 13.5.3 总散射与消光

(a) 某些一般的考虑

确定被球散射或吸收的光的总量具有很大实际意义。这可以通过求出坡印廷矢量的值并把它对所有方向作积分而计算出来。利用缩合的勒让德函数之间存在的正交关系，就有可能用系数 ' B_1 ' 和 '' B_1 ' 来表示上述积分。这些计算稍觉冗长，在米氏的论文²⁾ 中已全部完成了。

入射波失去的总能量，即被散射与被吸收能量的总和，可用另一种方法根据适用于无论何种形状障碍物的某些一般考虑来确定。这些考虑表明，能量损失与前进方向 ($\theta = 0$) 上散射波振幅之间有密切的联系。根据我们即将确立的这一结果，以及米氏的散射波公式，就可以很容易地确定被球散射与吸收而失去的总

1) 偏振的色散与多向色性已被 M. A. Schirrmann 研究过，见 *Ann. d. Physik*, (4), 59 (1919), 493.

2) G. Mie, 见上述引文, pp. 432—436.

能量.

考虑平面单色波入射到一个放在电介质媒质内的任意形状的障碍物上. 障碍物周围媒质内任一点处的场, 可再次表示为人射场与散射场的和,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(i)} + \mathbf{E}^{(s)}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^{(i)} + \mathbf{H}^{(s)}. \quad (98)$$

照例, 略去时间因子 $\exp(-i\omega t)$. 时间平均的能流用坡印廷矢量平均值表示, 根据(98)式与 § 1.4 的公式(56), 它由下式给出,

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \langle \mathbf{S}^{(i)} \rangle + \langle \mathbf{S}^{(s)} \rangle + \langle \mathbf{S}' \rangle, \quad (99)$$

式中(\mathcal{R} 表示实部)

$$\langle \mathbf{S}^{(i)} \rangle = \frac{c}{8\pi} \mathcal{R}(\mathbf{E}^{(i)} \times \mathbf{H}^{(i)*}), \quad (100a)$$

$$\langle \mathbf{S}^{(s)} \rangle = \frac{c}{8\pi} \mathcal{R}(\mathbf{E}^{(s)} \times \mathbf{H}^{(s)*}), \quad (100b)$$

$$\langle \mathbf{S}' \rangle = \frac{c}{8\pi} \mathcal{R}(\mathbf{E}^{(i)} \times \mathbf{H}^{(s)*} + \mathbf{E}^{(s)} \times \mathbf{H}^{(i)*}). \quad (100c)$$

考慮通过一个半径为 R 的大球表面的平均向外能流, 该球心在障碍物所占有区域内某点处. 每秒净能流用 $\langle \mathbf{S} \rangle$ 的径向分量 $\langle \mathbf{S} \rangle_r$ 在整个球面上的积分表示, 当障碍物是电介质时, 此值显然为零. 但如果障碍物是导体, 则有些入射能就被它吸收了, 并且, 通过球面向外的净能流在数值上等于其上出现吸收的速率. 令 $\mathcal{W}^{(a)}$ 为障碍物吸收能量的速率. 则由(99)式,

$$-\mathcal{W}^{(a)} = \mathcal{W}^{(i)} + \mathcal{W}^{(s)} + \mathcal{W}', \quad (101)$$

式中 $\mathcal{W}^{(i)}$, $\mathcal{W}^{(s)}$ 和 \mathcal{W}' 是径向分量 $\langle \mathbf{S}^{(i)} \rangle_r$, $\langle \mathbf{S}^{(s)} \rangle_r$, 和 $\langle \mathbf{S}' \rangle_r$ 在整个球面上的积分. 现因假定障碍物周围的媒质是非导体, 故 $\mathcal{W}^{(i)} = 0$, 所以

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(a)} + \mathcal{W}^{(s)} &= -\mathcal{W}' = -\frac{c}{8\pi} \\ &\times \mathcal{R} \iint_s (\mathbf{E}^{(i)} \times \mathbf{H}^{(s)*} + \mathbf{E}^{(s)} \times \mathbf{H}^{(i)*}) \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (102)$$

s 表示大球面, \mathbf{n} 表示向外的单位法线. 因此(102)式右方的表达

式表示发热和散射耗散能量的速率。

令 \mathbf{n}_0 为入射波传播方向上的单位矢量, 因此

$$\mathbf{E}^{(i)} = \mathbf{e} e^{i k^{(1)} (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r})}, \quad \mathbf{H}^{(i)} = \mathbf{h} e^{i k^{(1)} (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r})}. \quad (103)$$

假定这个波是线偏振的, 因此 \mathbf{e} 和 \mathbf{h} 可假定为实数常矢量。在离障碍物很远的距离处, 可假定散射波是球面波:

$$\mathbf{E}^{(s)} = \mathbf{a}(\mathbf{n}) \frac{e^{i k^{(1)} r}}{r}, \quad \mathbf{H}^{(s)} = \mathbf{b}(\mathbf{n}) \frac{e^{i k^{(1)} r}}{r}. \quad (104)$$

矢量 $\mathbf{a}(\mathbf{n})$ 和 $\mathbf{b}(\mathbf{n})$ 表征在 \mathbf{n} 方向上散射的辐射强度。因为入射波和散射波都服从麦克斯韦方程, 所以有[参看 § 1.4 的(4), (5) 式]

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{h} &= \sqrt{\epsilon^{(1)}} \mathbf{n}_0 \times \mathbf{e}, & \mathbf{b} &= \sqrt{\epsilon^{(1)}} \mathbf{n} \times \mathbf{a}, \\ \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{e} &= \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{h} = 0, & \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

式中 $\epsilon^{(1)}$ 是外部媒质的介电常数, 假定它是非磁性的 ($\mu = 1$)。由这些关系式得出, 在大球面 S 上,

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{E}^{(i)} \times \mathbf{H}^{(i)*}) \cdot \mathbf{n} &= \sqrt{\epsilon^{(1)}} \mathbf{e} \cdot \mathbf{a}^* e^{i k^{(1)} R (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n})} \frac{e^{-i k^{(1)} R}}{R}, \\ (\mathbf{E}^{(s)} \times \mathbf{H}^{(i)*}) \cdot \mathbf{n} &= \sqrt{\epsilon^{(1)}} [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_0)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}) \\ &\quad - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e})(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{a})] e^{-i k^{(1)} R (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n})} \frac{e^{i k^{(1)} R}}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

把这些式子代入(102)式。为了求出结果的积分值, 我们利用下述数学引理¹⁾: 当 R 很大, 并且 f 是 \mathbf{n} 的任意函数时, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \iint_S f(\mathbf{n}) e^{-i k^{(1)} R (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n})} dS \\ \sim \frac{2\pi i}{k^{(1)}} [f(\mathbf{n}_0) e^{-i k^{(1)} R} - f(-\mathbf{n}_0) e^{i k^{(1)} R}]. \end{aligned} \quad (107)$$

于是得出

1) 应用稳相原理, 经明显的变量变换后, 可证明这个引理 (参看附录 3, 第 1002 页)。又见 D. S. Jones, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **48** (1952), 736.

$$\left. \begin{aligned} & \iint_S (\mathbf{E}^{(I)} \times \mathbf{H}^{(s)*}) \cdot \mathbf{n} dS \\ & \sim -\frac{2\pi i}{k^{(I)}} \sqrt{\epsilon^{(I)}} [\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}^*(\mathbf{n}_0) - \mathbf{e} \cdot \mathbf{a}^*(-\mathbf{n}_0) e^{-2ik^{(I)}R}], \\ & \iint_S (\mathbf{E}^{(s)} \times \mathbf{H}^{(I)*}) \cdot \mathbf{n} dS \\ & \sim \frac{2\pi i}{k^{(I)}} \sqrt{\epsilon^{(I)}} [\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{n}_0) + \mathbf{e} \cdot \mathbf{a}(-\mathbf{n}_0) e^{2ik^{(I)}R}], \end{aligned} \right\} \quad (108)$$

并且, (102)式变为

$$\mathcal{W}^{(s)} + \mathcal{W}^{(a)} = \frac{c \sqrt{\epsilon^{(I)}}}{2k^{(I)}} \mathcal{J}[\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{n}_0)], \quad (109)$$

式中 \mathcal{J} 表示虚部.

(109)式的意思是: 对于线偏振的入射光, 能量消耗的速率与散射波某一振幅分量成正比; 这个振幅相应于向前的散射 ($\mathbf{n} = \mathbf{n}_0$), 而该分量是在入射波电矢量方向上.

能量消耗的速率 ($\mathcal{W}^{(a)} + \mathcal{W}^{(s)}$) 与能量入射到障碍物单位截面积上的速率 ($|\langle \mathbf{S}^{(I)} \rangle|$) 的比值 Q , 称为障碍物的消光截面 (extinction cross-section). 由(100a),(103)和(105)式得出, $|\langle \mathbf{S}^{(I)} \rangle| = c \sqrt{\epsilon^{(I)}} \mathbf{e}^2 / 8\pi$, 因此, 根据(109)式, 有

$$Q = \frac{\mathcal{W}^{(s)} + \mathcal{W}^{(a)}}{|\langle \mathbf{S}^{(I)} \rangle|} = 2\lambda^{(I)} \mathcal{J}\left(\frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{n}_0)}{\mathbf{e}^2}\right). \quad (110)$$

这个公式是由范德哈耳斯特 (van de Hulst)¹⁾ 提出的.

人们可以用类似的方法来定义障碍物的散射截面 $Q^{(s)}$ 与吸收截面 $Q^{(a)}$:

$$Q^{(s)} = \frac{\mathcal{W}^{(s)}}{|\langle \mathbf{S}^{(I)} \rangle|}, \quad Q^{(a)} = \frac{\mathcal{W}^{(a)}}{|\langle \mathbf{S}^{(I)} \rangle|}, \quad (111)$$

显然, $Q = Q^{(s)} + Q^{(a)}$. 对于无吸收的障碍物, $Q^{(a)} = 0$, 因而消

1) H. C. van de Hulst, *Physica*, **15** (1949), 740. 这里所用的证明方法出自 D. C. Jones, *Phil. Mag.*, **46** (1955), 957. 对于原子碰撞, 有一个类似的定理 [参看 E. Feenberg, *Phys. Rev.*, **40** (1932), 48; M. Lax, *Phys. Rev.*, (2), **78** (1950), 306].

光截面等于散射截面。

在把(110)式应用于球形障碍物以前,让我们考虑一个觉察不到有入射光透过的障碍物的 Ω 值。还假定该障碍物的线度比波长大得多。在这种情况下,惠更斯-基尔霍夫理论适用,并且对向前散射的主要贡献来自夫琅和费衍射。令 \mathcal{A} 是入射到该障碍物上的线偏振波的平面波阵面的“阴影区”, \mathcal{A}' 是其无障碍区(图13.12),并考虑远离该障碍物的一点 P 处的散射场 $E^{(s)}$ 。根据惠更斯-菲涅耳原理和巴俾涅原理[§ 8.3(21)式],如果衍射角很小,则

$$E^{(s)} = \frac{i}{\lambda^{(1)}} e \iint_{\mathcal{A}} \frac{e^{ik^{(1)}r}}{r} dS, \quad (112)$$

如果 P 在入射波传播方向(向前的方向)上离该障碍物很远,则 r 可取作常数,由(112)式得出

$$E^{(s)}(\mathbf{n}_0) = \frac{i}{\lambda^{(1)}} D e \frac{e^{ik^{(1)}r}}{r}, \quad (113)$$

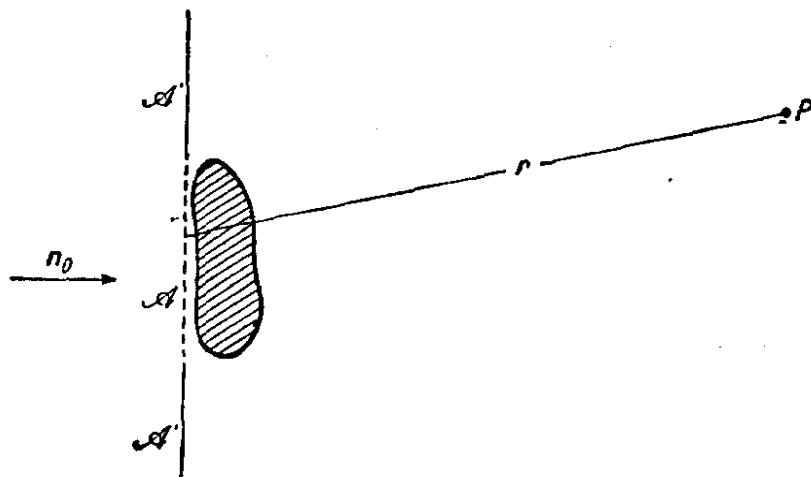


图 13.12 关于一个大障碍物消光截面的定理(114)式的图示

式中 D 是该障碍物的几何截面(面积 \mathcal{A})。因此在这种情况下,(104)式中的矢量 $a(\mathbf{n}_0)$ 由 $iDe/\lambda^{(1)}$ 给出,并由(110)式得知,

$$Q = 2D. \quad (114)$$

因而一个大的不透明障碍物的消光截面等于其几何截面的两倍。乍看起来,这个结果显得有点不合常理,因为人们也许曾预料,对于一个大的障碍物,几何光学近似可能适用,在这种近似中,消光

截面等于 D . 这一表观矛盾¹⁾ 的解释是,无论障碍物多么大,也无论所考虑的场离障碍物多么远,总有一个窄区——几何阴影边缘附近——在那里,几何光学近似是不成立的. 除了被截面为 D 的障碍物挡住(由反射和吸收而失去)的光以外,还有由阴影边缘附近引起的对于消光的附加贡献,显然,这个贡献也等于 D . 为了用实验证实(114)式,人们必须在足够宽阔的面积上且离障碍物足够远处把光收集起来²⁾.

现在,把一般公式(110)应用于一球形障碍物. 根据(58)式,对于向前散射 ($\theta = 0$),散射波在入射波的电矢量方向 ($\phi = 0$) 上的振幅分量由下式给出:

$$(E_{\theta}^{(s)})_{\theta=\phi=0} = -\frac{1}{k^{(1)}} \frac{1}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ eB_l \zeta_l^{(1)*}(k^{(1)}r) [P_l^{(1)*}(\cos \theta) \sin \theta]_{\theta=0} - i^m B_l \zeta_l^{(1)}(k^{(1)}r) \left[P_l^{(1)}(\cos \theta) \frac{1}{\sin \theta} \right]_{\theta=0} \right\}. \quad (115)$$

包含缩合勒让德函数的两项,不难由下述展开式算出³⁾:

$$P_l^{(m)}(x) = \frac{1}{2^m m!} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} (1-x^2)^{m/2} \times \left\{ 1 + c_1 \left(\frac{1-x}{2} \right) + c_2 \left(\frac{1-x}{2} \right)^2 + \dots \right\}, \quad (116)$$

式中 c_1, c_2, \dots 只取决于 l 和 m . 由(116)式和该式的微商,求出

- 1) 在量子力学的散射问题中,有一个类似的表观佯谬,首先由 H. S. W. Massey 和 C. B. O. Mohr 提出,见 *Proc. Roy. Soc., A*, **141** (1933), 434.
- 2) 由导出引理(107)式的仔细分析得知, S 对 Q 有可观贡献的部分,在 S 的中心张一数量级为 $(kR)^{-\beta}$ 的立体角,其中 $1 > \beta > 4/5$ [参看 D. S. Jones, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **48** (1952), 736].更详尽地讨论大障碍物的消光截面以及几何阴影区所起的作用,见 D. Sinclair, *J. Opt. Soc. Amer.*, **37** (1947), 475 和 L. Brillouin, *J. Appl. Phys.*, **20** (1949), 1110.
- 3) 参看 W. Magnus and F. Oberhettinger, *Formulas and Theorems for the Functions of Mathematical Physics* (New York, Chelsea Publishing Company, 1954), p. 54. 这些作者给出的公式与(116)式不同之处在于一个相乘因子 $(-1)^m$. 这种区别是由于他们使用了稍有不同的缩合勒让德多项式的定义(参看 860 页的脚注).

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{P_l^{(1)}(\cos\theta)}{\sin\theta} \right)_{\theta=0} &= \frac{1}{2} l(l+1), \\ (P_l^{(1)\prime}(\cos\theta)\sin\theta)_{\theta=0} &= -\frac{1}{2} l(l+1). \end{aligned} \right\} \quad (117)$$

把(117)代入(115)式，并对 $\zeta_l^{(1)}$ 和 $\zeta_l^{(1)\prime}$ 应用渐近逼近式(74)和(76)，得出

$$(E_\theta^{(1)})_{\theta=\phi=0} = \frac{1}{2k^{(1)}} \frac{e^{ik^{(1)}r}}{r} \sum_{l=1}^{\infty} (-i)^l l(l+1) [{}^e B_l + {}^m B_l]. \quad (118)$$

记住已取入射场是具有单位振幅的($e^2 = 1$)，因此所要求的量 $e \cdot a(n_0)/e^2$ 就是上式中 $e^{ik^{(1)}r}/r$ 所乘的式子；把它代入(110)式，并利用对任一复数 z 均成立的恒等式 $\mathcal{I}(z) = \Re(-iz)$ ，最后就得到用(62)式给出的系数 ${}^e B_l$ 和 ${}^m B_l$ 表示的球的消光截面的下述表达式：

$$Q = \frac{\lambda^{(1)2}}{2\pi} \Re \sum_{l=1}^{\infty} (-i)^{l+1} l(l+1) [{}^e B_l + {}^m B_l], \quad (119)$$

式中 \Re 表示实部。

(b) 计算结果

现在扼要介绍关于球的总散射，总吸收和消光的主要计算结果。

§ 13.5.2 中已看到，当球远小于波长(瑞利散射)时，只需考虑第一个电分波。于是散射波的振幅与 $1/\lambda^{(1)2}$ 成正比，因此总散射与波长的四次方成反比。如果计及更高的项，它们依赖于半径和物质常数，则总散射变成波长的一个很复杂的函数，并显出选择性¹⁾。例如，在金的情况下，甚至很小的球也给出一个在 $\lambda = 5500$ 埃附近的极大值(见图 13.13)。

1) 1950 年 9 月观察到的现象提供了一个选择散射的有趣的例子，当时在欧洲很大一部分地区，太阳(还有月亮)看来是深蓝色的。对“蓝”的和正常的太阳作光谱测量给出了引起这个现象的那一层的消光曲线，由此推断出蓝色是由烟雾的选择散射引起的，烟雾大概是由大小非常均匀的小油滴组成的，它们被风从阿耳伯塔(Alberta)燃烧的森林大火处带到上层大气中[参看 R. Wilson, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.*, 111 (1951), 478]。

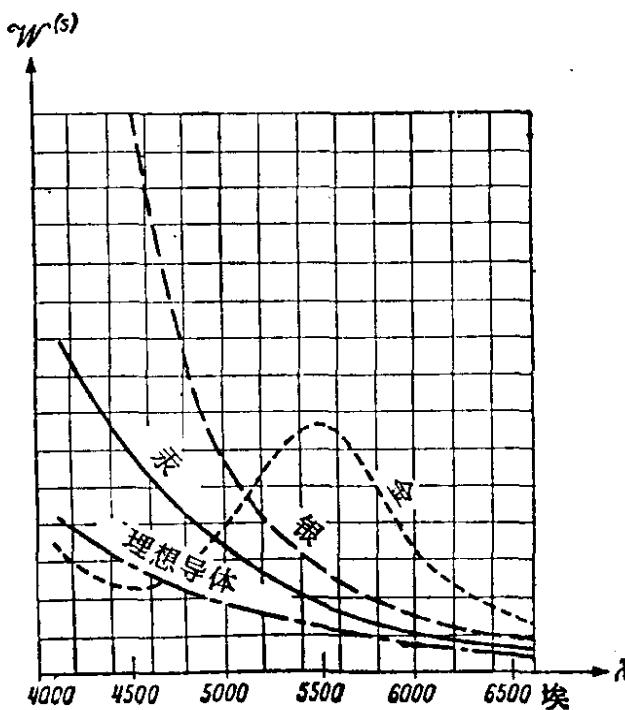


图 13.13 很小粒子 ($a \rightarrow 0$) 的总散射作为波长的函数

[引自 R. Feick, *Ann. d. Physik*, (4) 77 (1925), 582.]

这种极大值可解释为一种共振现象。设球不受入射光束场的影响，而作自由的电磁振荡。这种自由振动的频率和阻尼常数，根据理论在(56)式中略去那些不含系数 $'B_1$ 和 $''B_1$ 的项而得出。所得到的方程是线性和齐次的，并且只当满足相容性条件时才具有非平凡解。相容性方程的每一个解相应于一种有阻尼的固有振动，并且这些振动的频率与某些散射的分波所具有的强度极大值时的频率很贴切地符合¹⁾。

许多作者已对一些折射率值经过选择的有限半径的球的散射和消光进行过计算。大部分的计算与电介质球(n 为实数)和轻微吸收的球有关。图 13.14 中示出折射率 $n = 1.33$ 的球的典型曲线，引自戈德伯格 (B. Goldberg)²⁾。这是水的折射率，这个结果对于

1) R. W. Wood [*Phil. Mag.*, (6), 3 (1902), 396] 从碱金属的粒状膜和雾中观察过光的共振。

P. Debye, *Ann. d. Physik*, (4), 30 (1909), 73, 研究过球的固有振动。

2) H. Holl, *Optik*, 4 (1948), 173 和 H. G. Houghton and W. R. Chalker, *J. Opt. Soc. Amer.*, 39 (1949), 955 也研究过这种情况。许多作者已发表过关于其他折射率值的类似曲线，例如：M. D. Barnes and V. K. La Mer, *J.*

光透过霭、云和雾，以及对于威耳孙云室理论等，都是有意义的。可以看出，曲线具有一系列的极大值和极小值，并且随着半径的增大，消光截面趋近于几何截面的两倍，与(114)式符合。曲线还具有精细结构，即一些小的辅极大和极小。当然，如果散射是由许多大小不尽相同的球粒引起的，则这些微小涨落就被消除掉了。

对于具有其他折射率的电介质球，消光曲线显示出类似特性。可以证明，如果 n 与 1 相差不太大，则所有的曲线在由 $2q(n - 1) \sim 4$ 给出的 q 值处¹⁾ 都具有第一极大值，其中 Q 可与 $4\pi a^2$ 一样大。

对于完全反射的球²⁾ ($n \rightarrow \infty$)，求出消光曲线第一极大值在 $q = 1.2$ 处，其中 $Q = 2.29\pi a^2$ ，而第一极小值在 $q = 1.6$ 处，其中 $Q = 2.12\pi a^2$ 。此后稍有振荡，并且当 $q \rightarrow \infty$ 时，曲线趋于 $2\pi a^2$ 。

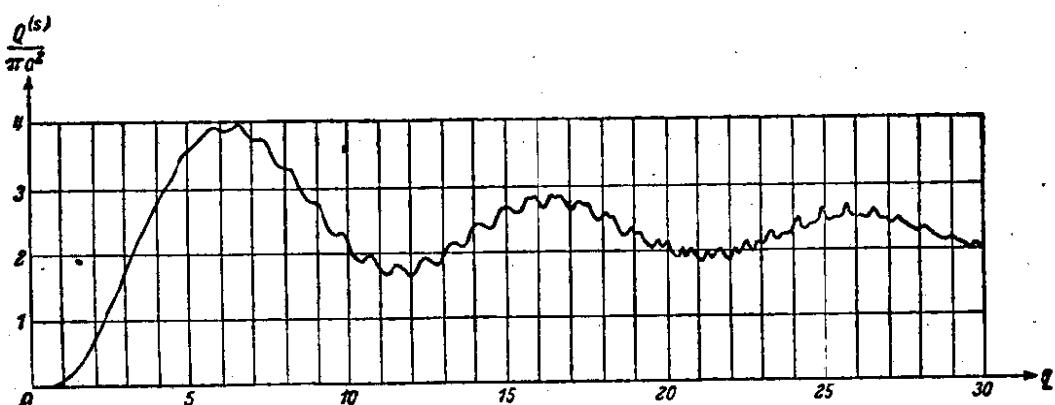


图 13.14 折射率 $n = 1.33$ 的电介质球的散射
截面作为参量 $q = 2\pi a/\lambda^{(1)}$ 的函数 [引自 B.
Goldberg, J. Opt. Soc. Amer., 43 (1953), 1221.]

Col. Sci., 1 (1946), 79; M. D. Barnes, A. S. Kenyon, E. M. Zaiser, and V. K. La Mer 同上, 2 (1947), 349; J. L. Greenstein (Harvard circ., 1937, No. 422); H. C. van de Hulst, *Rech. Astr. Observ. Utrecht*, 11 Pt. 1 (1946), 43-51 和他的书 *Light Scattering by Small Particles* (New York, J. Wiley and Sons; London, Chapman and Hall, 1957), 第 13 章; R. Pendorf, *J. Opt. Soc. Amer.*, 46 (1956), 1001.

1) 量 $2q(n - 1)$ 表示一条光线沿直径穿过球时所经受的位相移动。这是一个有用的参量，并且，如果 n 与 1 相差不太大，则以它为自变量画出的消光曲线彼此很类似。

2) F. W. P. Götz, *Astr. Nachr.*, 255 (1935), 63 和 J. L. Greenstein (上述引文)。

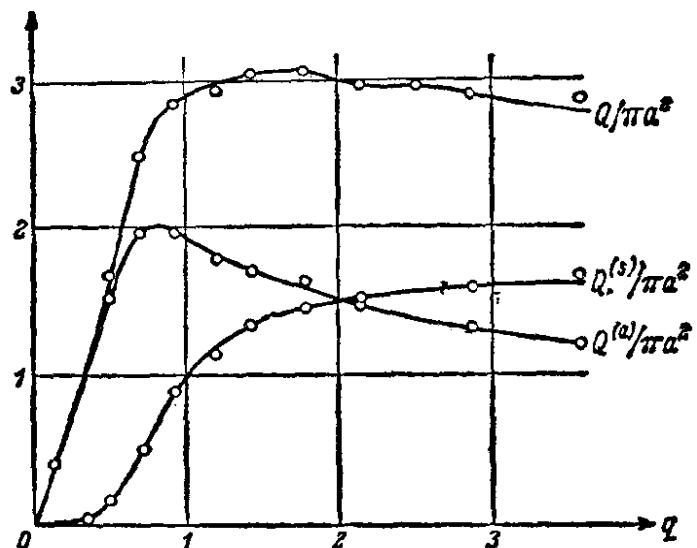


图 13.15 不同半径的铁球的吸收截面 ($Q^{(a)}$)，散射截面 ($Q^{(s)}$)，和消光截面 (Q)。 $\hat{n} = 1.27 + 1.37i$, $\lambda^{(1)} = 4200$ 埃 [根据 C. Schalén 的计算, *Uppsala Astr. Observ. Ann.*, 1 No. 9 (1945).]

关于吸收球的计算要艰巨得多，只有几种特殊情况曾详细研究过。图 13.15 中画出很小的铁球散射、吸收和消光的曲线。对于较大的球，可以用乔布斯特 (Jobst)¹⁾ 提出的渐近公式来计算，这个公式根据米氏理论和柱函数的德拜渐近展开式得出。范德哈耳斯特²⁾ 曾研究过弱吸收的球，我们在图 13.16 中画出他的计算结果。在后面这一种情况下，可以看出消光曲线的一般特性与电介质球类似，但甚至很小的电导率就足以把小的起伏完全消除掉。随着电导率再进一步增大，第一极小完全消失，并且消光曲线从原点渐近地上升到 2；吸收曲线从原点渐近地上升到此值之半。

借助于观察被单一球粒或许多粒子(云状媒质，胶体溶液)散射的光，可以从实验上检验米氏理论。当粒子较大时，这种检验较容易实现，但当每个粒子的直径具有波长的数量级或更小时，就相当困难了。拉梅 (La Mer) 及其合作者³⁾ 根据来自水中的硫溶胶

1) G. Jobst, *Ann. d. Physik*, (4), 76 (1925), 863.

2) H. C. van de Hulst, *Rech. Ast. Observ. Utrecht*, 11 Part 2 (1949), 27.

3) M. D. Barnes and V. K. La Mer, *J. Col. Sci.*, 1 (1945), 79; M. D. Barnes, A. S. Kenyon, E. M. Zaiser, and V. K. La Mer, 同上, 2 (1947), 349; I. Johnson and V. K. La Mer, *J. Amer. Chem. Soc.*, 69 (1947), 1184.

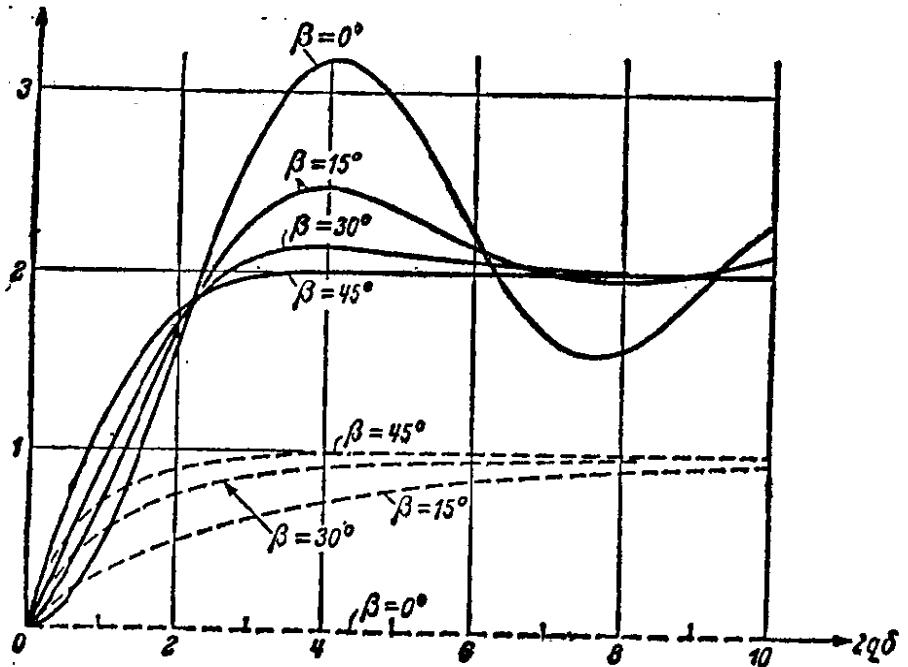


图 13.16 折射率 $\hat{n} = (1 + \delta) + i\delta \tan \beta$ 的弱吸收球的消光曲线 $Q/\pi a^2$ (实线) 和吸收曲线 $Q^{(a)}/\pi a^2$ (虚线), 其中 δ 是实数并且比 1 小得多 [引自 H. C. van de Hulst, *Rech. Astr. Obs. Utrecht*, 11 Part 2(1949), 28.]

(粒子直径为 3000 埃到 5000 埃) 的散射光角分布以及总散射的测量, 成功地检验了此理论。使用了真空波长范围从 2850 埃到 10000 埃的光, 发现了与米氏理论预期结果相当一致。在某些情况下, 甚至观察到消光曲线的微小涨落 (精细结构), (见图 13.14)。

某些作者曾考虑过光被非球状粒子散射, 但一般地说, 相应的波函数的解析性质复杂得多, 因此严格解只有有限的实际值¹⁾。甘斯(Gans)²⁾和其他工作者讨论过电磁波被尺度明显小于波长的椭球散射; 默格利希(Möglich)³⁾ 曾发表对任意大小的椭球的严格解。

1) 几位作者发展了近似方法。例如, 见 R. W. Hart and E. W. Montroll, *J. Appl. Phys.*, 22 (1951), 376; E. W. Montroll and R. W. Hart, 同上, 22 (1951), 1278; E. W. Montroll and J. M. Greenberg, *Phys. Rev.*, 86 (1952), 889。

又见 C. J. Bouwkamp 的评述文章, *Rep. Progr. Phys.* (London, Physical Society), 17 (1954), 35。

2) R. Gans, *Ann. d. Physik*, (4), 37 (1912), 881; 同上, 47 (1915), 270。

3) F. Möglich, *Ann. d. Physik*, (4), 83 (1927), 609。

早在 1905 年, 赛兹 (Seitz)¹⁾ 和伊格纳托夫斯基 (Ignatowsky)²⁾ 就研究过从导电的长圆柱的散射, 他们得到的公式类似于米氏关于球散射的那些公式。夏弗 (Schaeffer) 和格罗斯曼 (Grossmann)³⁾ 研究过被电介质长圆柱散射和被高反射柱散射。

1) W. Seitz, *Ann. d. Physik*, (4), **16** (1905), 746; 同上, **19** (1906), 554.

2) W. v. Ignatowsky, *Ann. d. Physik*, (4), **18** (1905), 495.

3) C. Schaeffer and F. Grossmann, *Ann. d. Physik*, (4), **31** (1910), 455; 又见 H. C. van de Hulst, *Astrophys. J.*, **112** (1950), 1.

第十四章 晶体光学

§ 14.1 各向异性媒质的介电张量

记住我们的光学理论是建立在两个明显不同的基础上的，一方面是麦克斯韦方程 § 1.1(1) 和 (2) 式，另一方面是物质方程，在各向同性媒质情况下，后者已由 § 1.1(9) — (11) 式给出。研究晶体时，必须推广这后一个方程组，以便将各向异性考虑在内。在本章大部分内容中，假定媒质是均匀的，不导电 ($\sigma = 0$) 的和磁各向同性的¹⁾，但允许是电各向异性的，即所考虑的物质的电激发依赖于电场方向。因此，矢量 D 一般不再在矢量 E 的方向上。代替 § 1.1(10) 式，假定 D 和 E 之间的关系式具有能说明各向异性情况的最简单形式，即其中 D 的各个分量与 E 的各个分量有线性关系：

$$\left. \begin{aligned} D_x &= \epsilon_{xx}E_x + \epsilon_{xy}E_y + \epsilon_{xz}E_z, \\ D_y &= \epsilon_{yx}E_x + \epsilon_{yy}E_y + \epsilon_{yz}E_z, \\ D_z &= \epsilon_{zx}E_x + \epsilon_{zy}E_y + \epsilon_{zz}E_z. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ... 等九个量都是媒质常数，组成介电张量；因此，矢量 D 是这个张量与 E 的积。

将(1)式写成较简短的形式如下：

$$D_k = \sum_l \epsilon_{kl} E_l, \quad (2)$$

式中 k 代表三个指标 x , y 和 z 之一， l 代表在求和时依次为 x , y

1) 也有磁晶体，但因磁化对于光学现象(快速振荡)的影响很小，所以磁各向异性可以忽略。然而，仍保留磁导率并用标量 μ 表示，以便在公式中保持某种对称性，并且包括弱磁晶体；此外，保留 μ 可简化在真空里 μ 不等于 1 的单位系中的方程表述。

和 z . 在形式张量记号法中将省略求和号, 积中两处出现指标 l 应理解为对所有的 l 求和. 然而, 我们将保留求和号, 因这将有助于不熟悉张量计算的读者避免任何模糊之处.

假定电能密度和磁能密度的表达式 § 1.1(31)仍然有效. 因而

$$w_e = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{8\pi} \sum_{kl} E_k \epsilon_{kl} E_l, \quad (3)$$

和

$$w_m = \frac{1}{8\pi} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{8\pi} \mu H^2. \quad (4)$$

我们也保留坡印廷矢量或称“光线矢量”的定义 § 1.1(38)式:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}), \quad (5)$$

并研究这些定义是否与能量守恒原理相符.

同 § 1.1.4 中一样, 把麦克斯韦方程第一式乘 \mathbf{E} , 第二式乘 \mathbf{H} , 并利用矢量恒等式 § 1.1(27), 则有

$$\begin{aligned} -c \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) &= \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} \\ &= \sum_{kl} E_k \epsilon_{kl} \dot{E}_l + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mu H^2). \end{aligned} \quad (6)$$

如果在这个方程两边都除以 4π , 则右边第二项代表每单位体积的磁能变化率, 但第一项并不代表电能密度的变化率, 除非

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{kl} E_k \epsilon_{kl} \dot{E}_l = \frac{d w_e}{dt} = \frac{1}{8\pi} \sum_{kl} \epsilon_{kl} (E_k \dot{E}_l + E_l \dot{E}_k), \quad (7)$$

即

$$\sum_{kl} \epsilon_{kl} (E_k \dot{E}_l - E_l \dot{E}_k) = 0$$

成立. 附标 k 和 l 都是傀标; 二者遍取同样的 (x, y, z) 值. 因此, 当第二项中交换 k 和 l 时, 表达式不改变. 这就导至

$$\sum_{kl} (\epsilon_{kl} - \epsilon_{lk}) E_k \dot{E}_l = 0.$$

因不论场的数值如何, 此式必成立, 由此得出

$$\epsilon_{kl} = \epsilon_{lk}. \quad (8)$$

这意味着介电张量必定是对称的；它只有六个而不是九个独立的分量。反之，条件(8)足以保证(7)式有效，并得出微分形式的能量定理[“流体动力学连续性方程”§ 1.1(43)式]：

$$-\operatorname{div} \mathbf{S} = \frac{d\omega}{dt}, \quad (\omega = \omega_e + \omega_m). \quad (9)$$

张量 ϵ 的对称性使得它有可能把电能 ω_e 的表达式简化为只含场各分量的平方而不含它们的积的形式。在 x, y, z 空间中，考虑二次曲面

$$\epsilon_{xx}x^2 + \epsilon_{yy}y^2 + \epsilon_{zz}z^2 + 2\epsilon_{yz}yz + 2\epsilon_{xz}xz + 2\epsilon_{xy}xy = \text{常数}. \quad (10)$$

因为如果用 \mathbf{E} 的分量代替 x, y 和 z ，则上式变成等于 $8\pi\omega_e$ ，并且能量 ω_e 对于任何场矢量值都必为正值，所以(10)式左边必为正定二次型。因此(10)式代表一个椭球。椭球总能变换到它的主轴上；因而存在一个固定于晶体中的坐标系，使得椭球方程为

$$\epsilon_x x^2 + \epsilon_y y^2 + \epsilon_z z^2 = \text{常数}. \quad (11)$$

在这个主介电轴系中，物质方程和电能表达式取下述简单形式：

$$D_x = \epsilon_x E_x, \quad D_y = \epsilon_y E_y, \quad D_z = \epsilon_z E_z, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \omega_e &= \frac{1}{8\pi} (\epsilon_x E_x^2 + \epsilon_y E_y^2 + \epsilon_z E_z^2) \\ &= \frac{1}{8\pi} \left(\frac{D_x^2}{\epsilon_x} + \frac{D_y^2}{\epsilon_y} + \frac{D_z^2}{\epsilon_z} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ 称为主介电常数（或主电容率）。由这些公式立即可看出 \mathbf{D} 和 \mathbf{E} 将具有不同的方向，除非 \mathbf{E} 与主轴之一的方向重合，或主介电常数都相等；在后一种情况 ($\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z$) 中，椭球退化为球。

这里必须加上关于色散效应的一段注解。正如各向同性物质的情况中介电常数不是物质常数而依赖于频率一样，各向异性媒质中也如此，介电张量的六个分量 ϵ_{kl} 也将随频率而变。结果不

仅主介电常数 ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z 的数值而且主轴的方向都会改变。这种现象称为轴色散。然而它只能在这样的晶体中出现，其中结构的对称性不能确定三个一组优先的正交方向，即它只能在单斜系和三斜系中才观察到(参看 § 14.3.1)¹⁾。

如果限于单色波，则可以不考虑色散；因此 ϵ_{kl} 各量是只取决于媒质的常数。

§ 14.2 在各向异性媒质中单色平面波的结构

§ 14.2.1 相速度和光线速度

在角频率 $\omega = 2\pi\nu$ 并以速度 c/n 沿单位波法线 s 方向传播的单色平面波中，矢量 E , D , H 和 B 都按复数表示法与 $\exp \left[i\omega \left(\frac{n}{c} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}) - t \right) \right]$ 成正比。后面即将谈到，除了相(或波法线)速度 c/n 外，还必须引入光线(或能量)速度，因为将会看到，在各向异性媒质中，能量一般是以一个不同的速度沿着一个不同于波法线的方向传播的。

在这种振荡场中，算符 ∂/∂_t 总是等价于乘以 $-i\omega$ ，而算符 ∂/∂_x 等价于乘以 $i\omega n s_x/c$ 。特别是

$$\dot{E} = -i\omega E, \quad \operatorname{curl} E = i\omega \frac{n}{c} s \times E. \quad (1)$$

对于不含电流的区域，麦克斯韦方程

$$\operatorname{curl} H - \frac{1}{c} \dot{D} = 0, \quad \operatorname{curl} E + \frac{1}{c} \dot{B} = 0, \quad (2)$$

变为

$$ns \times H = -D, \quad ns \times E = \mu H, \quad (3)$$

式中已用到关系式 $B = \mu H$ 。在(3)的两式之间消去 H ，并利用

1) 这种色散现象在红外特别显著：参看 Th. Liebisch and H. Rubens, *Sitzber. preuss. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl.* (1919), 198, 876. H. Rubens, 同上, 976.

熟知的矢量恒等式,得出

$$\mathbf{D} = -\frac{n^2}{\mu} \mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{E}) = \frac{n^2}{\mu} [\mathbf{E} - \mathbf{s}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{E})] = \frac{n^2}{\mu} \mathbf{E}_\perp, \quad (4)$$

式中 \mathbf{E}_\perp 表示在 \mathbf{E} 和 \mathbf{s} 的平面内 \mathbf{E} 垂直于 \mathbf{s} 的矢量分量(见图 14.1)。

由(3)式看出,矢量 \mathbf{H} (因而还有 \mathbf{B})与 \mathbf{E} , \mathbf{D} 和 \mathbf{s} 均垂直,因此后三者必共面。又看到 \mathbf{D} 与 \mathbf{s} 正交。因而同前, \mathbf{H} 和 \mathbf{D} 横截传播方向 \mathbf{s} ,但 \mathbf{E} 不然。图 14.1 示出这些矢量的相对方向,此外还有在光线矢量 \mathbf{S} 方向上的单位矢量,用 \mathbf{t} 表示,它垂直于 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 。 \mathbf{E} 和 \mathbf{D} 之间的夹角与 \mathbf{s} 和 \mathbf{t} 之间的夹角相同,用 α 表

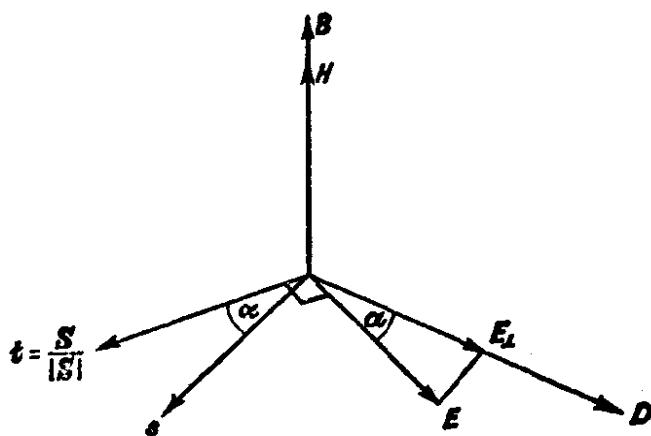


图 14.1 在电各向异性媒质中,波法线,场矢量和能流的方向

示。我们看到,一方面 \mathbf{D} , \mathbf{H} 和 \mathbf{s} ,另一方面 \mathbf{E} , \mathbf{H} 和 \mathbf{t} ,都构成三个一组的正交矢量,这两组有一个共同的矢量 \mathbf{H} ,彼此相对转过角度 α 。一个重要的结论是,在晶体中,能量一般不沿波法线方向传播。另一方面,电能密度等于磁能密度的定理仍然有效。这是由(3)式得出的,因为¹⁾

$$\left. \begin{aligned} w_e &= \frac{1}{8\pi} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = -\frac{n}{8\pi} \mathbf{E} \cdot (\mathbf{s} \times \mathbf{H}), \\ w_m &= \frac{1}{8\pi} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \frac{n}{8\pi} (\mathbf{s} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

1) 因现在讨论场变量的二次函数,所以在(5)和(6)式中的是场的实矢量,而不是相伴的复矢量(参看上册 § 1.3, 33—34 页)。

根据熟知的成标三重积的特性，这些方程的右边彼此相等。而且它们都等于 $n(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{s}/8\pi$ ，因此总能密度 $w = w_e + w_m$ 为

$$w = \frac{n}{c} \mathbf{S} \cdot \mathbf{s}. \quad (6)$$

我们必须区别相速度和能量输运速度。前者，相速度是在单位矢量 \mathbf{s} 的方向上的，其数值为

$$v_s = \frac{c}{n}. \quad (7)$$

后者，光线速度是在与坡印廷矢量 \mathbf{S} 同一方向上的，即在单位矢量 \mathbf{t} 的方向上。它的数值 v_r 等于单位时间内通过垂直于能流方向的面积的能量除以每单位体积的能量。按照能量定理 § 14.1(9) 式， v_r 由下式给出，

$$v_r = \frac{\mathbf{S}}{w}. \quad (8)$$

由(6),(7)和(8)式得出，

$$v_s = v_r \mathbf{t} \cdot \mathbf{s} = v_r \cos \alpha. \quad (9)$$

即相速度是光线速度在波法线方向上的投影。

应当注意，由坡印廷矢量导出的光线速度，也同坡印廷矢量一样带有一定程度的任意性（参看上册 § 1.1, 24 页）。然而它还是一个有用的概念，尽管它象相速度一样没有可直接检验的物理意义。

如果 \mathbf{E} 和 \mathbf{D} 是已知的 [例如规定 \mathbf{E} ，而 \mathbf{D} 通过 § 14.1(1) 式由 \mathbf{E} 确定]，则折射率 n 和波法线 \mathbf{s} 由此也确定了。首先，因 \mathbf{E}_\perp 是 \mathbf{E} 在 \mathbf{D} 方向的矢量分量，

$$\mathbf{E}_\perp = (\mathbf{E} \cdot \frac{\mathbf{D}}{D}) \frac{\mathbf{D}}{D}, \quad (10)$$

所以由(4)式给出

$$n^2 = \frac{\mu \mathbf{D}}{\mathbf{E}_\perp} = \frac{\mu \mathbf{D}^2}{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})}. \quad (11)$$

再者，因单位矢量 \mathbf{s} 垂直于 \mathbf{D} ，且与 \mathbf{D} 及 \mathbf{E} 共面，所以它可表示为下述形式：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s} &= \frac{\mathbf{E} - \mathbf{E}_\perp}{|\mathbf{E} - \mathbf{E}_\perp|} = \frac{\mathbf{E} - \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})\mathbf{D}}{\mathbf{D}^2}}{\sqrt{\mathbf{E}^2 - \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})^2}{\mathbf{D}^2}}} \\
 &= \frac{\mathbf{D}^2\mathbf{E} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})\mathbf{D}}{\sqrt{\mathbf{D}^2[\mathbf{E}^2\mathbf{D}^2 - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})^2]}}. \tag{12}
 \end{aligned}$$

从折射率 (refractive index) n 类推, 也可利用下式定义光线折射率 (ray index) 或能量折射率 (energy index) n_r :

$$n_r = \frac{c}{v_r}. \tag{13}$$

利用(7)和(9)式, 则有

$$n_r = n \cos \alpha. \tag{14}$$

现在将证明光线折射率 n_r 和能量传播方向上的单位矢量 \mathbf{t} 由类似于(11)和(12)的公式给出。由(14), (11)和关系式 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = ED \cos \alpha$, 得出

$$n_r^2 = \frac{\mu(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})}{\mathbf{E}^2}. \tag{15}$$

单位矢量 \mathbf{t} 垂直于 \mathbf{E} , 且与 \mathbf{E} 及 \mathbf{D} 共面, 因此它必由(12)式中交换 \mathbf{E} 和 \mathbf{D} 所得的公式给出(或许除了符号以外)。所以

$$-\mathbf{t} = \frac{\mathbf{E}^2\mathbf{D} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})\mathbf{E}}{\sqrt{\mathbf{E}^2[\mathbf{E}^2\mathbf{D}^2 - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})^2]}}. \tag{16}$$

左边的负号保证 \mathbf{s} 和 \mathbf{t} 指向 \mathbf{E} 和 \mathbf{D} 的同一侧, 如图 14.1 所示。

当 \mathbf{E} 和 \mathbf{D} 的方向重合, 即 \mathbf{E} 在晶体主轴之一的方向上时, (12)和(16)式都化为 0/0。这是可以预料到的, 因为这时 \mathbf{s} 和 \mathbf{t} 的方向除了必须垂直于 \mathbf{E} 外, 并未确定。

也可以用 \mathbf{E} 和 \mathbf{D} 表示坡印廷矢量的大小。根据(8), (13)和(15)式, 又记住对于平面波, $w = 2w_e$, 得出

$$S = v_r w = \frac{c}{n_r} \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{4\pi} = \frac{c}{4\pi \sqrt{\mu}} E \sqrt{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}, \tag{17}$$

可以看出, 在各向同性媒质的情况下, 上式与 § 1.4(8)和(9)式一致。

§ 14.2.2 光在晶体中传播的菲涅耳公式

§ 14.2.1 导出的公式只是麦克斯韦方程的结果,因此与媒质的特性无关。现在将这些公式与物质方程 § 14.1(1)式结合起来。

我们将采用坐标轴与主介电轴重合的坐标系。于是§ 14.1(1)式化为较简单的 § 14.1(12) 式,用此式代替(4)式中的 \mathbf{D} , 得出

$$\mu\epsilon_k E_k = n^2 [E_k - s_k(\mathbf{E} \cdot \mathbf{s})], \quad (k = x, y, z). \quad (18)$$

(18)式是 E_x , E_y 和 E_z 的三个齐次线性方程,仅当相伴的行列式为零时,这些分量的非零值才能满足(18)式。这意味着折射率 n , 矢量 $\mathbf{s}(s_x, s_y, s_z)$ 和主介电常数 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ 必须满足某个关系式。把(18)式写成下述形式

$$E_k = \frac{n^2 s_k (\mathbf{E} \cdot \mathbf{s})}{n^2 - \mu\epsilon_k}, \quad (19)$$

再乘以 s_k , 然后把得到的三个方程相加,就可导出上述关系式; 把此式除以公因子 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{s}$, 得出

$$\frac{s_x^2}{n^2 - \mu\epsilon_x} + \frac{s_y^2}{n^2 - \mu\epsilon_y} + \frac{s_z^2}{n^2 - \mu\epsilon_z} = \frac{1}{n^2}. \quad (20)$$

这个公式可表示成稍有不同的形式。把(20)式两边都乘以 n^2 , 并减去 $s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = 1$ 。然后把所得表达式乘以 $-n^2$, 得出

$$\frac{s_x^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\mu\epsilon_x}} + \frac{s_y^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\mu\epsilon_y}} + \frac{s_z^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\mu\epsilon_z}} = 0. \quad (21)$$

我们用下式定义三个主传播速度¹⁾

$$v_x = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon_x}}, \quad v_y = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon_y}}, \quad v_z = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon_z}}. \quad (22)$$

相速度 v_p 用(7)式时,(19)和(21)式取下述形式:

$$E_k = \frac{v_k^2}{v_k^2 - v_p^2} s_k (\mathbf{E} \cdot \mathbf{s}), \quad (k = x, y, z), \quad (23)$$

1) 注意: v_x, v_y, v_z 不是一个矢量的各个分量, 它们只是根据主轴来定义的。

$$\frac{s_x^2}{v_p^2 - v_x^2} + \frac{s_y^2}{v_p^2 - v_y^2} + \frac{s_z^2}{v_p^2 - v_z^2} = 0. \quad (24)$$

(20), (21)和(24)式是波法线的菲涅耳方程的几种等价形式。这是 v_p^2 的二次方程，把(24)式乘以式中各分母的积即可看出。因而，相应于每一个方向 s ，有两个相速度 v_p （与任一 v_p^2 值相应的两个值 $\pm v_p$ 算作一个，因为此负值显然属于相反的传播方向 $-s$ ）。对于这两个 v_p 值中的每一个，由(23)式就可解出比值 $E_x : E_y : E_z$ ；关于 D 矢量的相应比值可接着由§ 14.1(12)式得出。因为这些比值为实数，所以 E 和 D 场都是线偏振的。因此得出下述重要结果：各向异性媒质的结构容许两个单色平面波在任一给定方向上传播，它们具有两种不同的线偏振和两个不同的速度。后面将证明，相应于一个给定的传播方向 s ，电位移矢量 D 的两个方向是互相垂直的。

现在证明对于光线速度 v_r 也有一个类似的公式。首先证明有一个与(4)式类似的关系式，其中 D 和 E 以及 s 和 t 的地位互换，就最容易完成此任务。方便的做法是引入矢量 D_{\perp} ，定义为在 D 和 t 的平面内 D 垂直于 t 的矢量分量。它显然由下式给出：

$$D_{\perp} = D - t(D \cdot t). \quad (25)$$

因电矢量也垂直于 t ，且与 D 及 t 共面（见图 14.1），所以 D_{\perp} 平行于 E ，因此还可以表示成下述形式：

$$D_{\perp} = \left(D \cdot \frac{E}{E} \right) \frac{E}{E} = \frac{n_r^2}{\mu} E, \quad (26)$$

式中已用到(15)式。由(25)和(26)式得出

$$E = \frac{\mu}{n_r^2} [D - t(D \cdot t)] = \frac{\mu}{n_r^2} D_{\perp}. \quad (27)$$

此式类似于(4)式，它可以形式上由(4)式互换 E 和 D ， n 和 $\frac{1}{n_r}$ ，

μ 和 $\frac{1}{\mu}$ ，以及 s 和 $-t$ 的地位而得出。由基本方程得出下述很普遍的对偶规则，把各个变量排成两行如下：

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{E}, \quad D, \quad \mathbf{s}, \quad \mathbf{t}, \quad c, \quad \mu, \quad v_p, \quad n, \quad \varepsilon_x, \quad \varepsilon_y, \\
 & \mathbf{D}, \quad E, \quad -\mathbf{t}, \quad -\mathbf{s}, \quad \frac{1}{c}, \quad \frac{1}{\mu}, \quad \frac{1}{v_r}, \quad \frac{1}{n_r}, \quad \frac{1}{\varepsilon_x}, \quad \frac{1}{\varepsilon_y}, \quad \rightarrow \\
 & \quad \varepsilon_x, \quad v_x, \quad v_y, \quad v_z, \\
 & \rightarrow \frac{1}{\varepsilon_x}, \quad \frac{1}{v_x}, \quad \frac{1}{v_y}, \quad \frac{1}{v_z}. \quad \left. \right\} \quad (28)
 \end{aligned}$$

如果任一关系式在某一行的诸量间成立，式中各量用另一行中相应的量代替，则可得出另一个有效的关系式。

把这个规则应用于波法线的菲涅耳方程(24)，就立即得出所要求的光线方程

$$\frac{\frac{t_x^2}{v_r^2} - \frac{1}{v_x^2}}{\frac{1}{v_r^2} - \frac{1}{v_x^2}} + \frac{\frac{t_y^2}{v_r^2} - \frac{1}{v_y^2}}{\frac{1}{v_r^2} - \frac{1}{v_y^2}} + \frac{\frac{t_z^2}{v_r^2} - \frac{1}{v_z^2}}{\frac{1}{v_r^2} - \frac{1}{v_z^2}} = 0. \quad (29)$$

当然，也可以把这个方程表示为类似于(20)和(21)式的形式。象(24)式一样，这也是一个二次方程，它对于每一个光线方向 $\mathbf{t}(t_x, t_y, t_z)$ ，给出两个可能的光线速度 v_r 。以适当的 v_r 值解与(23)式对偶的方程，即

$$D_k = -\frac{v_r^2}{v_k^2 - v_r^2} t_k (\mathbf{D} \cdot \mathbf{t}), \quad (k = x, y, z), \quad (30)$$

就可以得出相应的 \mathbf{D} 方向。然后，利用 § 1.4.1(12)式就可以得出两个 \mathbf{E} 矢量的方向(如前所述，它们都与 \mathbf{t} 正交)。

通常只给出矢量 \mathbf{s} 或 \mathbf{t} 中的一个，因此希望导出可直接计算另一个的关系式。由图 14.1，有

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{s} = E_{\perp} \tan \alpha, \quad \mathbf{D} \cdot \mathbf{t} = -D \sin \alpha. \quad (31)$$

而由(4)式， $D = n^2 E_{\perp} / \mu$ 。因此

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{t} = -\frac{n^2}{\mu} E_{\perp} \sin \alpha = -\frac{n^2}{\mu} \mathbf{E} \cdot \mathbf{s} \cos \alpha = -\frac{1}{\mu} \frac{c^2}{v_p v_r} \mathbf{E} \cdot \mathbf{s}, \quad (32)$$

式中已用到(9)和(7)式。把(32)式代入(30)式，给出

$$D_k = \varepsilon_k E_k = \frac{1}{\mu} \frac{c^2 v_r}{v_p (v_k^2 - v_r^2)} t_k (\mathbf{E} \cdot \mathbf{s}). \quad (33)$$

比较(33)和(23)式，并记住 $\mu\varepsilon_k v_k^2 = c^2$ ，得出

$$\frac{v_p s_k}{v_k^2 - v_p^2} = \frac{v_r t_k}{v_k^2 - v_r^2}. \quad (34)$$

对 t_k 求解

$$t_k = \frac{v_p}{v_r} \frac{v_k^2 - v_r^2}{v_k^2 - v_p^2} s_k, \quad (35)$$

因此

$$v_r t_k - v_p s_k = v_p s_k \frac{v_r^2 - v_p^2}{v_p^2 - v_k^2}. \quad (36)$$

把(36)的三个方程平方并相加，利用 § 14.2 (9) 式，即 $s \cdot t = v_p / v_r$ ，得出

$$\begin{aligned} v_r^2 - v_p^2 &= v_p^2(v_r^2 - v_p^2)^2 \left[\left(\frac{s_x}{v_p^2 - v_x^2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{s_y}{v_p^2 - v_y^2} \right)^2 + \left(\frac{s_z}{v_p^2 - v_z^2} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

因此可以定义

$$g^2 \equiv v_p^2(v_r^2 - v_p^2) = \frac{1}{\left(\frac{s_x}{v_p^2 - v_x^2} \right)^2 + \left(\frac{s_y}{v_p^2 - v_y^2} \right)^2 + \left(\frac{s_z}{v_p^2 - v_z^2} \right)^2}. \quad (38)$$

此式用 s 表示 v_r ，因根据菲涅耳方程(24)， v_p 已通过 s 得知。这样确定 v_r ，于是(35)式就给出单位光线矢量 t 作为 s 的函数。利用 g 的表达式，(35)式可写成

$$t_k = \frac{s_k}{v_p v_r} \left(v_p^2 + \frac{g^2}{v_p^2 - v_k^2} \right), \quad (k = x, y, z). \quad (39)$$

因为相应于每一个 s 一般有两个相速度 v_p ，所以对于每一个波法线方向，一般也有两个光线方向¹⁾。然而在某些晶体(双轴晶体——参看 § 14.3.1)中有两个奇异方向是由于(39)式中分母为零引起的，相应于其中每一个方向都有数目无限的光线；还有两个奇

1) M. Born, *Optik* (Berlin, Springer, 1933), pp. 235—237 中，对于双轴晶体情况，详细研究过相应于一条给定波法线的诸光线的位置。

异光线方向，相应于其中每一个都有数目无限的波法线方向。这些特殊情况产生一种有趣的现象（锥形折射），将在 § 14.3.4 中研究。

§ 14.2.3 确定传播速度和振动方向的几何作图

关于相速度、光线速度和振动方向的很多结果都可利用某些几何作图来说明。

(a) 波法线椭球

根据 § 14.1(13)式，在一给定的能量密度 $\omega = 2\omega_e$ 处，矢量 \mathbf{D} 的各个分量满足下述关系式：

$$\frac{D_x^2}{\epsilon_x} + \frac{D_y^2}{\epsilon_y} + \frac{D_z^2}{\epsilon_z} = C, \quad (C = 8\pi\omega_e = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}). \quad (40)$$

用 x, y, z 代替 $D_x/\sqrt{C}, D_y/\sqrt{C}, D_z/\sqrt{C}$ ，并把它们看作空间的笛卡儿坐标。于是

$$\frac{x^2}{\epsilon_x} + \frac{y^2}{\epsilon_y} + \frac{z^2}{\epsilon_z} = 1. \quad (41)$$

这个方程代表一个椭球，它的半轴等于主介电常数的平方根，并与主介电轴的方向重合。我们称这个椭球为波法线椭球，它比广泛使用但颇为含糊的术语“光折射椭球”(optical indicatrix)（也称为折射率椭球或倒易椭球）要优越。

利用波法线椭球，可求出属于一个给定的波法线方向 \mathbf{s} 的两个相速度 v_p 和两个 \mathbf{D} 振动方向如下：画一个过原点垂直于 \mathbf{s} 的平面。这个平面与椭球的截线是一个椭圆；这个椭圆的主半轴与相速度的倒数 $1/v_p$ 成正比，它们的方向与矢量 \mathbf{D} 相应的振动方向重合（图 14.2）。

为了得出这个结果，考虑用来规定此椭圆的两个方程：

$$xs_x + ys_y + zs_z = 0, \quad (42)$$

$$\frac{x^2}{\epsilon_x} + \frac{y^2}{\epsilon_y} + \frac{z^2}{\epsilon_z} = 1. \quad (43)$$

因为根据定义，椭圆的主轴就是它的最短和最长的直径，所以在(42)和(43)式的条件下求出

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (44)$$

的极值就能确定这两个主轴。我们利用拉格朗日待定因子法¹⁾来做到这一点。引入两个因子 $2\lambda_1$ 和 λ_2 ，并作函数

$$\begin{aligned} F = & x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda_1(xs_x + ys_y + zs_z) \\ & + \lambda_2\left(\frac{x^2}{\varepsilon_x} + \frac{y^2}{\varepsilon_y} + \frac{z^2}{\varepsilon_z} - 1\right). \end{aligned} \quad (45)$$

于是我们的问题等价于无附加条件求 F 的极值。 F 的极值必要条件是它对 x, y 和 z 的微商均为零，即

$$\begin{aligned} x + \lambda_1 s_x + \frac{\lambda_2 x}{\varepsilon_x} = 0, \quad y + \lambda_1 s_y + \frac{\lambda_2 y}{\varepsilon_y} = 0, \\ z + \lambda_1 s_z + \frac{\lambda_2 z}{\varepsilon_z} = 0. \end{aligned} \quad (46)$$

将这些方程分别乘以 x, y ，和 z ，再相加，由(42)和(43)式，得出：

$$r^2 + \lambda_2 = 0. \quad (47)$$

其次，将(46)各方程分别乘以 s_x, s_y 和 s_z ，再相加，又用到(42)式。由此得出

$$\lambda_1 + \lambda_2 \left(\frac{xs_x}{\varepsilon_x} + \frac{ys_y}{\varepsilon_y} + \frac{zs_z}{\varepsilon_z} \right) = 0. \quad (48)$$

把(47)和(48)式求出的 λ_1 和 λ_2 代入(46)式，给出

$$x \left(1 - \frac{r^2}{\varepsilon_x} \right) + s_x r^2 \left(\frac{xs_x}{\varepsilon_x} + \frac{ys_y}{\varepsilon_y} + \frac{zs_z}{\varepsilon_z} \right) = 0, \quad (49)$$

以及两个类似的方程。对于一个给定的 s ，它们是三个 x, y, z 的齐次方程。它们仅当相伴行列式为零时才相容；这个条件给出 r^2

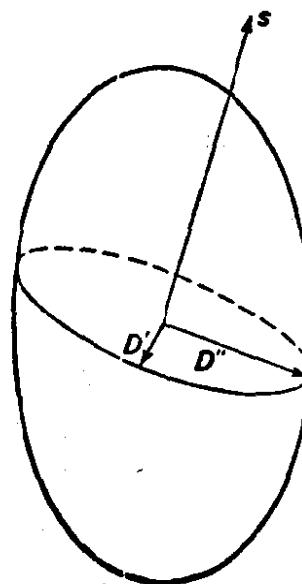


图 14.2 波法线椭球。
属于一条波法线 s 的 D
矢量振动方向的作图法

1) 这种方法的充分阐述，例如见 R. Courant, *Differential and Integral Calculus*, Vol. II (London, Blackie & Son, Ltd., 1942), pp. 188—199.

的一个代数方程。现在马上可以看出，(49)式与(18)式不同之处仅在于记法。因为如果用 D_z/\sqrt{c} 代替 z ，用 E_z/\sqrt{c} 代替 z/ϵ_z ，用 $\mathbf{D}^2/C = \mathbf{D}^2/\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = n^2/\mu$ 代替 r^2 [根据(11)式]，则(49)式变为

$$\mu D_z = n^2 [E_z - s_z (\mathbf{E} \cdot \mathbf{s})], \quad (50)$$

上式与两个类似的方程合在一起，与(18)式相同。

因此，我们求出 $n = c/v_p$ 的行列式方程的根（已看到 n 为二次）与垂直于 \mathbf{s} 的椭圆截面半轴长度 r 成正比，而且矢量 \mathbf{D} 的两个可能方向 $x: y: z$ 与这些轴的方向重合。

因为椭圆两轴相互垂直，所以得出重要结果：相应于一个给定的传播方向 \mathbf{s} 的两个矢量 \mathbf{D} 的振动方向是相互垂直的。下面将用 \mathbf{D}' 和 \mathbf{D}'' 来表示相应于一个特定的波法线方向 \mathbf{s} 的两个 \mathbf{D} 方向；这样， \mathbf{s}, \mathbf{D}' 和 \mathbf{D}'' 就构成三个一组相互正交矢量。

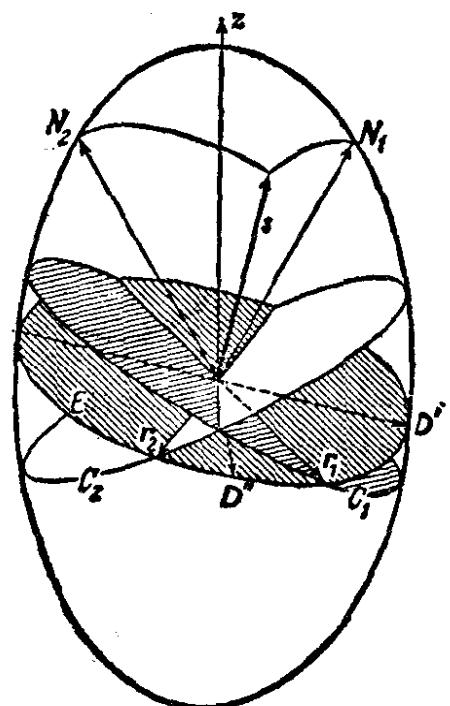


图 14.3 确定振动平面 (\mathbf{s}, \mathbf{D}) 和 $(\mathbf{s}, \mathbf{D}'')$ 的作图法

在传播方向与波法线椭球的主轴之一例如 x 轴重合的特殊情况下，根据我们的作图法， r 的极值等于另外两个半轴的长度，即等于 $\sqrt{\epsilon_x}$ 和 $\sqrt{\epsilon_z}$ 。但我们已知 r 的极值也等于 $n/\sqrt{\mu} = c/v_p \sqrt{\mu}$ 。因此，沿主介电轴 x 方向传播的波的相速度等于 $c/\sqrt{\mu\epsilon}$ 和 $c/\sqrt{\mu\epsilon_z}$ ，即等于由(22)式形式上引入的主传播速度 v_y 和 v_z 。当然，对于沿另外两个轴的方向传播，相应的结果也成立。

还有另一种作图法，可确定振动的方向。大家知道，椭球有两个通过中心的圆截面 C_1 和 C_2 ，并且这些截面的法线 N_1 和 N_2 与椭球最长和最短的主轴 (z 和 x) 共面。这两个方向 N_1 和 N_2 称为

光轴 (optic axis)¹⁾, 以后 (§ 14.3.3) 将详加讨论。因为截面 C_1 和 C_2 是圆 (半径也相同), 所以 N_1 和 N_2 方向具有下述特性: 沿着它们传播的速度只有一个, 因此 D 可取垂直于 s 的任何方向。设 E 是通过中心并与任意的单位法线 s 垂直的椭圆截面。这个平面与圆 C_1 和 C_2 相交于两个径向矢量 r_1 和 r_2 处, 它们长度相等, 因此应与 E 的主轴夹角相等 (见图 14.3 和 14.4)。所以, 所要求的振动方向是 r_1 和 r_2 方向的等分线。但 r_1 垂直于 N_1 和 s , 因此垂直于含 N_1 和 s 的平面; 同样, r_2 垂直于含 N_2 和 s 的平面。如果这些平面与椭圆 E 相交于矢量 r'_1 和 r'_2 处, 则椭圆的主轴也应是 r'_1 和 r'_2 方向的等分线。由此得出, 电位移的振动平面, 即含 s 和 D' 或 D'' 的平面, 是 (N_1, s) 和 (N_2, s) 平面²⁾ 之间夹角的内或外等分面。正如所料, 当 s 与 N_1 或 N_2 的方向重合时, 这种作图就变得不确定了。

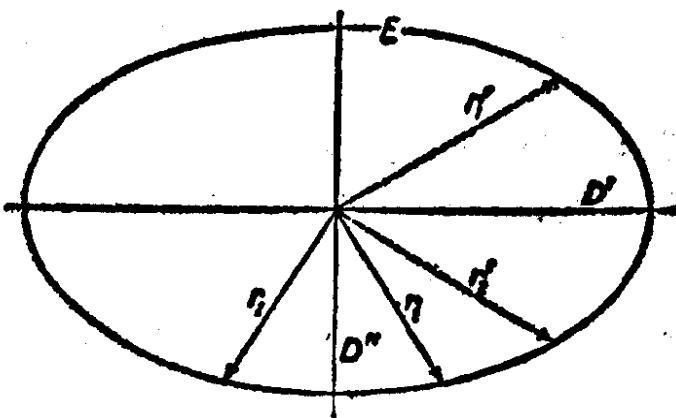


图 14.4 图 14.3 的平面 E

(b) 光线椭球

如果按照对偶规则 (28), 从光线椭球

$$\varepsilon_x x^2 + \varepsilon_y y^2 + \varepsilon_z z^2 = 1 \quad (51)$$

出发, 就可以用同波法线一样的方法处理光线。特别是, 这个椭球垂直于光线方向 t 的中央截面是一个椭圆, 它的半轴长度正比于

1) 更确切地说, 应称为波法线的光轴。光线椭球 [见本页(b)] 的相应方向定义为光线光轴。

2) 本章全用 (a, b) 来表示含矢量 a 和 b 的平面。

两个相应的光线速度 v_r , 并取在电矢量的两个容许的方向 \mathbf{E}' 和 \mathbf{E}'' 上. 因此, \mathbf{t} , \mathbf{E}' 和 \mathbf{E}'' 构成三个一组相互正交的矢量.

(c) 法线面和光线面

设想以晶体内部一固定点 O 作为原点, 在同一方向 \mathbf{s} 上画两个矢量, 其长度与两个相应的相速度成正比. 随着 \mathbf{s} 取所有可能的方向, 上述矢量的端点就形成一个有两层外壳的曲面, 称为波法线面, 或简称法线面.

同样, 从一固定原点画出在所有的方向 \mathbf{t} 上长度正比于相应光线速度的位置矢量, 其端点就形成一个双叶的曲面, 称为光线面.

这两种曲面比我们刚讨论过的椭球更为复杂. 由(24)和(29)式可以证明, 光线面是四次曲面, 法线面是六次曲面¹⁾. 这两个曲面之间存在一个重要的关系, 现在将把它推导出来.

已经看到, 如果 \mathbf{E} 或 \mathbf{D} 是已知的, 就可以确定 \mathbf{s} 和 \mathbf{t} 的方向以及相应的速度 v_p 和 v_r , 因此也就确定在这两个曲面上的相应点(图 14.5 中的 P 和 P'). 设 \mathbf{r} 和 \mathbf{r}' 是表示这些点的矢量:

$$\mathbf{r} = v_p \mathbf{t}, \quad \mathbf{r}' = v_r \mathbf{s}. \quad (52)$$

我们将证明, \mathbf{E} 或 \mathbf{D} 的微小变化引起矢量 \mathbf{r} 的变化与 \mathbf{r}' 相垂直.

我们从(27)式开始,

$$\frac{1}{\mu} \mathbf{E} = \frac{1}{n_r^2} [\mathbf{D} - \mathbf{t}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{t})]. \quad (53)$$

用(52)第一式代入上式的 \mathbf{t} , 又令 $n_r = c/v_r$, 得出:

$$\frac{c^2}{\mu} \mathbf{E} = \mathbf{r}^2 \mathbf{D} - \mathbf{r}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{r}). \quad (54)$$

现在设 \mathbf{E} 改变一微小量 $\delta \mathbf{E}$. 如果 $\delta \mathbf{D}$ 和 $\delta \mathbf{r}$ 分别是 \mathbf{D} 和 \mathbf{r} 相应的变化, 则根据(54)式, 有

1) 不能指望法线面和光线面会有同次的方程, 因为它们不是彼此对偶的. 为了作出法线面的对偶的图, 必须根据对偶规则(28), 画出长度为 $1/v_r$ (而不是 v_r) 的矢量.

$$\frac{c^2}{\mu} \delta E = 2(\mathbf{r} \cdot \delta \mathbf{r}) \mathbf{D} + \mathbf{r}^2 \delta \mathbf{D} - \delta \mathbf{r} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{r}) \\ - \mathbf{r} (\delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{D}) - \mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \delta \mathbf{D}). \quad (55)$$

如果用 \mathbf{D} 标乘此式两边，并利用下述关系式：

$$\mathbf{D} \cdot \delta \mathbf{E} = \epsilon_x E_x \delta E_x + \epsilon_y E_y \delta E_y + \epsilon_z E_z \delta E_z = \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D}, \quad (56)$$

则得出

$$\frac{c^2}{\mu} \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} = \delta \mathbf{D} \cdot [\mathbf{r}^2 \mathbf{D} - \mathbf{r} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{r})] \\ + 2 \delta \mathbf{r} \cdot [\mathbf{r} \mathbf{D}^2 - \mathbf{D} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{r})]. \quad (57)$$

由于(54)式，有 $\delta \mathbf{D}$ 作因子的项可消去，而乘以 $\delta \mathbf{r}$ 的项可写成 $2 \delta \mathbf{r} \cdot [(\mathbf{D} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{D}]$ 。因此，由于 $\mathbf{r} = v_t \mathbf{t}$ ，有

$$\delta \mathbf{r} \cdot [(\mathbf{D} \times \mathbf{t}) \times \mathbf{D}] = 0. \quad (58)$$

现在，矢量 $\mathbf{D} \times \mathbf{t}$ 垂直于 \mathbf{D} 和 \mathbf{t} 两者，因此 $(\mathbf{D} \times \mathbf{t}) \times \mathbf{D}$ 在 \mathbf{D} 和 \mathbf{t} 的平面内并与 \mathbf{D} 成直角；所以它平行于 \mathbf{s} （见 § 14.1）。因此

$$\mathbf{s} \cdot \delta \mathbf{r} = 0, \quad (59)$$

即 $\delta \mathbf{r}$ 垂直于 \mathbf{s} ，这样就证明了我们的论断。这个结果意味着，光线面的切面总是垂直于相应的波法线。图 14.5 在平面截面上说明这个关系。因为由(9)式，从原点到这个平面的垂直距离等于 $v_t \mathbf{t} \cdot \mathbf{s} = v_t \cos \alpha = v_p$ ，由此得出，法线面是光线面的垂足曲面，反之，光线面是通过法线面上的点并与从原点到这些点的径向矢量成直角而画出的那些平面的包络。如果知道这两个曲面之一的形状，则另一个曲面可由这种关系确定。

我们可以用更为物理化的术语来解释这个结果。考虑不是单个波而是由相同频率但传播方向稍有不同的多个平面波组成的波群。其中各分波的波法线 \mathbf{s} 充满了在“平均

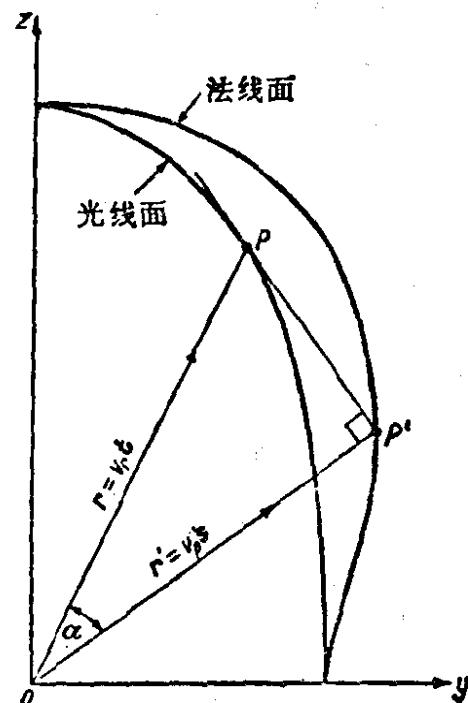


图 14.5 法线面和光
线面之间的关系

“波法线” s_0 附近的一个立体角，并假定只有那些法线紧靠 s_0 的波才具有可观的振幅。设在时间 $t = 0$ 时所有这些波在 O 点处同位相；因此在这一点处扰动为极大值。现在考察这个极大值是怎样传播的。

考虑在时间 $t = 0$ 时通过 O 处的所有波阵面。经过一个单位时间以后，以速度 v_p 沿 s 方向传播的波阵面 W 将到达 W' 的位置，使得从 O 到其上的垂足为位置矢量 $v_p s$ ；因此， W' 是垂直于法线面相应的径向矢量的平面。在波群互相增强的区域内，即这个平面与具有邻近波法线的那些平面相交的区域内，波群的振幅最大。而这正好是在这些平面的包络附近的区域，即在光线面上相应点 $v_p t$ 邻近的区域。上述考虑证实，波群携带的能量以速度 v_p 沿单位矢量 t 的方向传播。

§14.3 单轴晶体和双轴晶体的光学性质

§ 14.3.1 晶体的光学分类

透明晶体按其光学性质分成不同的三类：

第一类晶体，可以在其中选择三个结晶学上等价的互相正交的方向。它们是所谓立方晶系的晶体。这些等价方向显然与主介电轴重合，且有 $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z (= \epsilon)$ ；因此 $D = \epsilon E$ ，晶体是光学上各向同性的，并与非晶体等价。

第二类晶体，不属于第一类，可在其中一个平面内选择两个或多个结晶学上等价的方向。它们是三角晶系，四方晶系和六角晶系的晶体，含各等价方向的平面垂直于三重，四重或六重对称轴。有一个主介电轴必须与这个特定方向重合，而另外两个主介电轴可选择为与它垂直的某一对正交线。如果取这个特定方向作为 z 轴，则有 $\epsilon_x = \epsilon_y \neq \epsilon_z$ 。这样的晶体称为光学上是单轴的。

第三类晶体，其中没有两个结晶学上等价的方向可供选择。它们是属于所谓斜方晶系，单斜晶系和三斜晶系的晶体。其中 $\epsilon_x \neq \epsilon_y \neq \epsilon_z$ ，并且介电轴的方向或能或不能由对称性确定（见

表 30), 因此可能依赖于波长。这类晶体称为光学上是双轴的。

所有的晶体按其光学性质分成这三类, 可通过研究有关的椭球之一, 例如波法线椭球, 清楚地看出来。显然, 保持晶体结构不变的对称操作不可能改变椭球¹⁾。现在椭球退化为球只有两步: 一个椭球或 (a) 所有的轴都不等长, 或 (b) 两个轴相等而一个轴不等(回转椭球), 或 (c) 所有的轴相等(球); 它们相应于刚讨论过的三类[顺序是 (III), (II), (I)]。术语单轴和双轴指的是椭球具有的光轴数, 即具有下述性质的直径数, 通过椭球中心垂直于这些直径的平面截面是圆。一般的椭球有两个这样的直径(双轴晶体), 回转椭球有一个(单轴晶体), 球有无限多个(各向同性晶体)。

表 30 给出所有可能情况的概况。可依赖于颜色的主介电轴用两条彼此夹一小角的细线示出(表示对于两个波长的位置), 固

表 30

晶系	介电轴	波法线椭球	光学分类
三斜	CCC		一般椭球
单斜	CCF		一般椭球
斜方	FFF		一般椭球
三角,四方,六角	FRR		回转椭球
立方	RRR		球

C = 有色散的轴

F = 方向固定的轴

R = 可自由转动的或不确定的轴

1) 例如, 单斜系晶体可用与晶轴之一平行的二重轴, 或与此晶轴垂直的镜平面, 或此二者来表征。在上述任一情况下, 椭球显然必有一个轴与此晶轴平行, 以便经对称操作后保持不变。

关于晶体分类和对称操作的详细说明, 我们可引用 C. W. Bunn, *Chemical Crystallography* (Oxford, Clarendon Press, 1945), Chapter 2.

定轴用粗线,而可自由转动的(或不确定的)轴用虚线,其末端在一个圆或一个球上.

§ 14.3.2 光在单轴晶体中的传播

我们从波法线的菲涅耳方程 § 14.2(24) 式出发, 把它写成下述形式:

$$s_x^2(v_p^2 - v_y^2)(v_p^2 - v_z^2) + s_y^2(v_p^2 - v_z^2)(v_p^2 - v_x^2) + s_z^2(v_p^2 - v_x^2)(v_p^2 - v_y^2) = 0. \quad (1)$$

对于光学上的单轴晶体, 光轴在 z 方向, 则 $v_x = v_y$. 用¹⁾ v_o 代替这个共同的速度, 并用 v_e 代替 v_z , (1)式化为

$$(v_p^2 - v_o^2)[(s_x^2 + s_y^2)(v_p^2 - v_e^2) + s_z^2(v_p^2 - v_o^2)] = 0. \quad (2)$$

设 θ 表示波法线 s 与 z 轴的夹角; 则

$$s_x^2 + s_y^2 = \sin^2 \theta, \quad s_z^2 = \cos^2 \theta,$$

(2)式变为

$$(v_p^2 - v_o^2)[(v_p^2 - v_e^2) \sin^2 \theta + (v_p^2 - v_o^2) \cos^2 \theta] = 0. \quad (3)$$

这个方程的两个根(记作 v'_p 和 v''_p)由下式给出:

$$\left. \begin{aligned} v'^2_p &= v_o^2, \\ v''^2_p &= v_o^2 \cos^2 \theta + v_e^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(4) 式表明, 法线面的两个壳是一个半径 $v'_p = v_o$ 的球面和一个(四次)回转曲面即卵形面. 这样, 相应于任一特定的波法线方向的两个波之一是寻常波, 其速度与传播方向无关, 另一个是非常波, 其速度依赖于波法线方向与光轴之间的夹角. 仅当 $\theta = 0$ 即波法线在光轴方向时, 这两个速度才相等.

当 $v_o > v_e$ 时[见图 14.6(a)], 寻常波传播比非常波快(除了 $\theta = 0$, 此时两者相等); 这种晶体称为正单轴晶体(例如石英). 如果 $v_o < v_e$, [见图 14.6(b)], 寻常波传播比非常波慢, 则称为负单轴晶体(例如长石).

利用有两个主轴相等的波法线椭球, 可以方便地找出振动方

1) 这里, 下标 o 和 e 代表寻常的和非常的, 这些术语将在以后阐明.

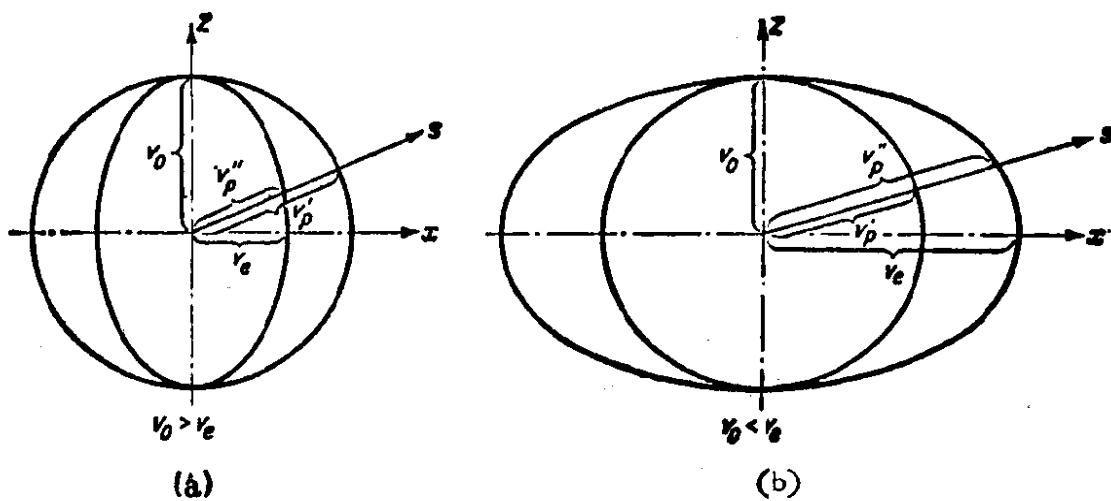


图 14.6 单轴晶体的法线面
(a) 正单轴晶体, (b)负单轴晶体

向。含波法线 s 和光轴 OZ 的平面称为主平面(图 14.7 中用阴影线表示)。椭球对于这个平面是对称的。由此得出,通过 O 点并垂直于 s 的平面所截出的椭圆截面对于主平面是对称的,因此,如图 14.7 所示,椭圆的两个主轴垂直和平行于主平面。垂直于主平面的半轴等于椭球体的赤道圆半径,即它与寻常波的速度 v_0 成反比。我们看到,寻常波的矢量 D (图 14.7 中的 D') 垂直于主平面振动,而非非常波的矢量 D (D'') 在主平面内振动。

在光学史中关于“光矢量”是垂直还是平行于偏振面振动的问题上,单轴晶体中的光学现象曾起过重要的作用。(偏振面定义为以这样的人射角从空气-电介质界平面反射时的人射面,在此入射角下,任一入射波都变成线偏振波,用电磁理论的语言,偏振面即 (H, s) 平面;参看上册 47 页和 67 页)。今天不再详细讨论这个问题了¹⁾,因为我们知道不存在单一物理实

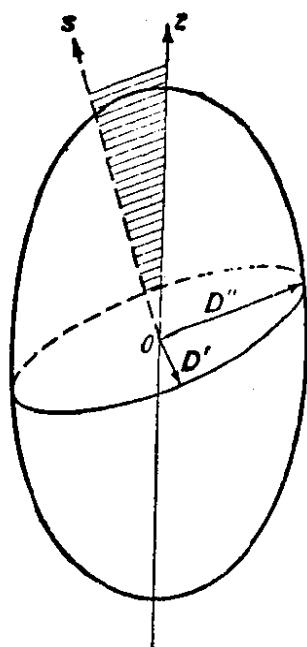


图 14.7 单轴晶体
中的振动方向

1) 关于历史背景的叙述,见 E. T. Whittaker, *History of the Theories of Aether and Electricity, Vol. I: The Classical Theories* (London, T. Nelson, 1951), p. 116.

体能与“光矢量”等同。

§ 14.3.3 光在双轴晶体中的传播

现在研究在双轴晶体的一般情况下基本方程(1)的主要结果。如果首先考虑法线面被我们选定的参照系(主介电轴)的三个坐标平面 $x = 0$, $y = 0$ 和 $z = 0$ 截出的截线, 将有助于想象这个法线面。为了唯一地确定各交线的形状, 将标明这三个轴满足

$$\epsilon_x < \epsilon_y < \epsilon_z, \quad (v_z > v_y > v_x). \quad (5)$$

如果在(1)式中令 $s_x = 0$, 则方程分成两个因子, 得出

$$\left. \begin{aligned} v_p'^2 &= v_x^2, \\ v_p''^2 &= v_z^2 s_y^2 + v_y^2 s_z^2. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

令 $v_p s_y = y$, $v_p s_z = z$; 则 $v_p^2 = y^2 + z^2$, 方程变为

$$y^2 + z^2 = v_x^2, \quad (y^2 + z^2)^2 = v_z^2 y^2 + v_y^2 z^2. \quad (6a)$$

因此, 法线面被坐标平面 $x = 0$ 截出的截线是一个圆和一条卵形线。法线面分别被另外两个坐标平面截出的截线同样由一个圆和一条卵形线组成, 唯一的差别在于这两条曲线的相对位置。按(5)

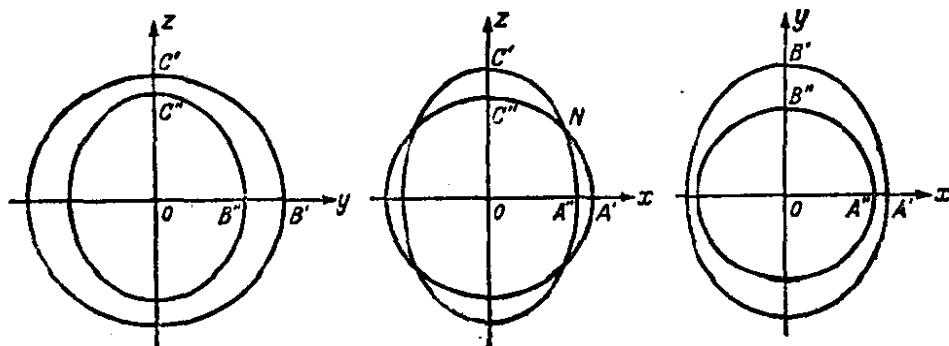


图 14.8 双轴晶体的法线面的截线

式所示选择各轴, 则在 yz 平面内圆完全在卵形线之外; 在 xy 平面内圆完全在卵形线之内; 在 zx 平面内圆和卵形线相交于四点(图 14.8)。法线面的一个卦限的透视如图 14.9 所示, 图中两条曲线 $A'B'C'N$ 和 $A''B''C''N$ 都被一光滑曲面跨过。一般地说, 两个曲面相交于一条曲线, 但在这种情况下, 这两个曲面只有四点是

共同的，即点 N 和在其他象限中的相应各点。连接原点与这些点的两条直线是波法线的两个光轴。根据 900 页提到的关于椭球中心圆截面数的几何定理得出，没有其他的这类点，所以也没有其他的波法线光轴。现在将通过直接的计算证实这一点，同时建立以后需用到的一个不等式。

设

$$v_x^2 = v_y^2 + q_x, \quad v_z^2 = v_y^2 - q_z, \quad v_p^2 = v_y^2 + q, \quad (7)$$

由于(5)式，上式中 q_x 和 q_z 都是正的。作此代换，(1)式变为

$$s_x^2 q (q + q_x) + s_y^2 (q + q_z) (q - q_x) + s_z^2 (q - q_z) q = 0, \quad (8a)$$

或

$$q^2 + [s_x^2 q_z + s_y^2 (q_z - q_x) - s_z^2 q_x] q - s_y^2 q_x q_z = 0. \quad (8b)$$

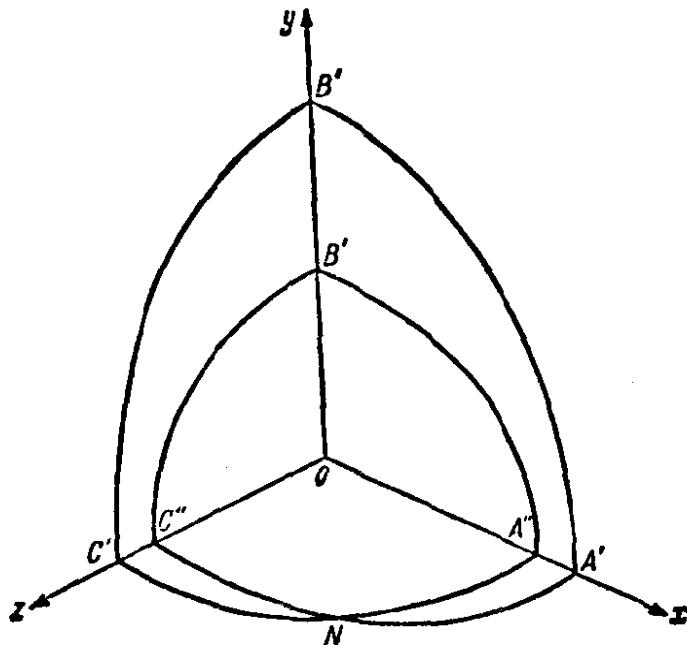


图 14.9 双轴晶体的法线面

因常数项 $-s_y^2 q_x q_z$ 不能是正的，所以这个方程的根必为实值。如果用 q' 和 q'' 表示这个方程的根，则

$$q' q'' = -s_y^2 q_x q_z \leq 0.$$

因此 q' 和 q'' 必有相反的符号，设 $q' \geq 0$ 和 $q'' \leq 0$ 。

如果 $q > q_x$ 或 $q < -q_z$ ，则 (8a) 式左边各项都是正值。因此 q 必位于 $-q_z \leq q \leq q_x$ 的区域内，由此，

$$-q_z \leq q'' \leq 0 \leq q' \leq q_x. \quad (9)$$

所以仅当 q' 和 q'' 两根都为零时它们才能相等；对于这种情况，根据(8b)式，必同时有

$$s_y^2 = 0, \quad s_x^2 q_z = s_z^2 q_x. \quad (10)$$

因此得出两个 \mathbf{s} 方向，对其中每一个 \mathbf{s} 方向，相应的两个速度相等，这就证实了存在两个波法线的光轴。如前所述，这些光轴位于 xz 平面内。如果 β 是光轴之一与 z 方向的夹角，则 $s_x = \sin \beta$, $s_z = \cos \beta$ ，根据(10)式，

$$\tan \beta = \frac{s_x}{s_z} = \pm \sqrt{\frac{q_x}{q_z}} = \pm \sqrt{\frac{v_x^2 - v_y^2}{v_y^2 - v_z^2}}; \quad (11)$$

因此光轴的位置相对于 z 轴是对称的。

用速度表示，不等式(9)变为

$$v_z^2 \leq v_p''^2 \leq v_y^2 \leq v_p'^2 \leq v_x^2, \quad (12)$$

这是以后需用到的一个关系式。我们看到，不论波法线的方向如何，两个相速度都是实值；当然，由利用波法线椭球对相速度几何作图看来，这个结论也是显然的。

如果 \mathbf{s} 是用它与波法线两光轴的夹角 θ_1 和 θ_2 来规定的，则相应于一个给定的波法线方向 \mathbf{s} 的两个相速度的表达式有一很简单形式。因为光轴的方向余弦为 $\pm \sin \beta, 0, \cos \beta$ ，所以角 θ_1 和 θ_2 由下式给出：

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta_1 &= s_x \sin \beta + s_z \cos \beta, \\ \cos \theta_2 &= -s_x \sin \beta + s_z \cos \beta. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

(8b)式的两个根用 s_x 和 s_z 表示为

$$q = -\frac{1}{2} P \pm \frac{1}{2} \sqrt{\Delta}, \quad (14)$$

式中，如果又利用恒等式 $s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = 1$ ，则

$$P = s_x^2 q_z - s_z^2 q_x + q_z - q_x, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \Delta &= P^2 + 4s_y^2 q_x q_z \\ &= (q_x + q_z)^2 - 2(q_x + q_z)(s_x^2 q_z + s_z^2 q_x) + (s_z^2 q_x - s_x^2 q_z)^2. \end{aligned} \quad (16)$$

现在由(13)和(11)式,

$$\cos \theta_1 \cos \theta_2 = \frac{q_z s_x^2 - q_x s_x^2}{q_x + q_z}, \cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 = 2 \frac{q_x s_x^2 + q_z s_x^2}{q_x + q_z}. \quad (17)$$

因此,用 θ_1 和 θ_2 表示,(15)和(16)式变为

$$P = q_z - q_x - (q_z + q_x) \cos \theta_1 \cos \theta_2, \quad (15a)$$

$$\Delta = [(q_z + q_x) \sin \theta_1 \sin \theta_2]^2, \quad (16a)$$

把(15a)和(16a)式代入(14)式,并用(7)式代替 q , q_x 和 q_z ,最后得出:

$$v_p^2 = \frac{1}{2} [v_x^2 + v_z^2 + (v_x^2 - v_z^2) \cos(\theta_1 \pm \theta_2)]. \quad (18)$$

虽然 v , 在这个方程中不出现,但它隐含在 θ_1 和 θ_2 中,因为这些角都依赖于 β ,而它是所有三个主速度的函数.

在单轴晶体的特殊情况下, θ_1 和 θ_2 相等;很容易证实此时(18)式正好化为(4)式.

类似的分析也适用于光线.从光线方程 § 14.2(29) 式出发,求出光线面与坐标平面 $x = 0$ 的截线由下述两条曲线组成:

$$v_r'^2 = v_x^2, \quad \frac{1}{v_r'^2} = \frac{t_y^2}{v_x^2} + \frac{t_z^2}{v_y^2}. \quad (19)$$

如果令 $v_r t_y = y$, $v_r t_z = z$, 则 $v_r^2 = y^2 + z^2$, 并且(19)式变为

$$y^2 + z^2 = v_x^2, \quad \frac{y^2}{v_x^2} + \frac{z^2}{v_y^2} = 1, \quad (19a)$$

即光线面与平面 $x = 0$ 的截线是一个圆和一个椭圆 [而不是象(6a)式中那样的更一般的卵形线类型]. 分别被其他两个坐标平面截出的截线同样是一个圆和一个椭圆. 由于不等式(5),在 yz 平面内圆包围着椭圆;反之在 xy 平面内椭圆包围着圆;而在 xz 平面内圆和椭圆相交于四点. 这四点确定了光线轴 R_1 和 R_2 的位置,它们的方向由(10)式的对偶给出:

$$t_y^2 = 0, \quad t_x^2 \left(\frac{1}{v_y^2} - \frac{1}{v_x^2} \right) = t_z^2 \left(\frac{1}{v_x^2} - \frac{1}{v_y^2} \right). \quad (20)$$

因此这两个轴分别与 z 轴的夹角 γ 由下式给出:

$$\tan \gamma = \frac{t_x}{t_z} = \pm \frac{v_z}{v_x} \sqrt{\frac{v_x^2 - v_y^2}{v_y^2 - v_z^2}} = \pm \frac{v_z}{v_x} \tan \beta. \quad (21)$$

如果 $v_z < v_x$, 则光线轴与 z 轴的夹角比法线轴与 z 轴的夹角小。

§ 14.3.4 晶体中的折射

(a) 双折射

考虑一平面波从真空入射到各向异性媒质的表面 Σ 平面上。它将产生一透射场和一反射场。我们将用与各向同性媒质情况 (§ 1.5.1) 中实质上相同的论证扼要地讨论一下透射场的性质。我们将把注意力限于找出在晶体内部扰动的传播方向，而不研究振幅比值的表达式(相应于菲涅耳公式)¹⁾。

设 s 是入射波的单位波法线, s' 是透射波的单位波法线。我们即将看到一般有^{两个}透射波, 因此有两个可能的 s' 值。入射波和透射波的场矢量分别是 $(t - \mathbf{r} \cdot s/c)$ 和 $(t - \mathbf{r} \cdot s'/v')$ 的函数。场通过边界的连续性要求对于平面 Σ 上任一点 \mathbf{r} 和所有时间 t 都有

$$t - \frac{\mathbf{r} \cdot s}{c} = t - \frac{\mathbf{r} \cdot s'}{v'},$$

即

$$\mathbf{r} \cdot \left(\frac{s'}{v'} - \frac{s}{c} \right) = 0. \quad (22)$$

因此, 矢量 $s'/v' - s/c$ 必垂直于边界。

容许的波法线 s' 可确定如下: 取 Σ 上任一点 O 作为原点, 画出在所有方向 s' 上长度各为 $1/v'$ 的矢量, 其中 v' 是根据菲涅耳方程 § 14.2(24) 式相应于每个 s' 的相速度。端点的轨迹是一个双叶曲面, 它与法线面的区别在于每个径向矢量的长度是 $1/v'$ 而

1) 例如在 G. Szivessy, *Hdb. d. Phys.*, Vol. 20 (Berlin, Springer, 1928), 715 中讨论了这些内容。

不是 v' . 我们把这个曲面称为波法线的反曲面；它是光线面的对偶，因此同光线面本身一样也是四次曲面。因为所要求的矢量 s'/v' 必须使得 $s'/v' - s/c$ 垂直于 Σ ，所以它的端点 Q' 一定在通过矢量 s/c 端点 P 的 Σ 的法线上。一般地说， Σ 的法线与反曲面相交于四点，其中两点位于与晶体相同的边界一侧。因此有两个这样的点（图 14.10 中的 Q' 和 Q'' ），从而有两个可能的波法线方向，使得每个人射波一般将产生两个折射波；每一个折射波对应于一个光线方向和一个光线速度，这二者描述晶体内部能量的传播¹⁾。这就是双折射现象。它可由下述熟悉的效应显示出来，即通过一片方解石观察一个小物体时看到两个象。

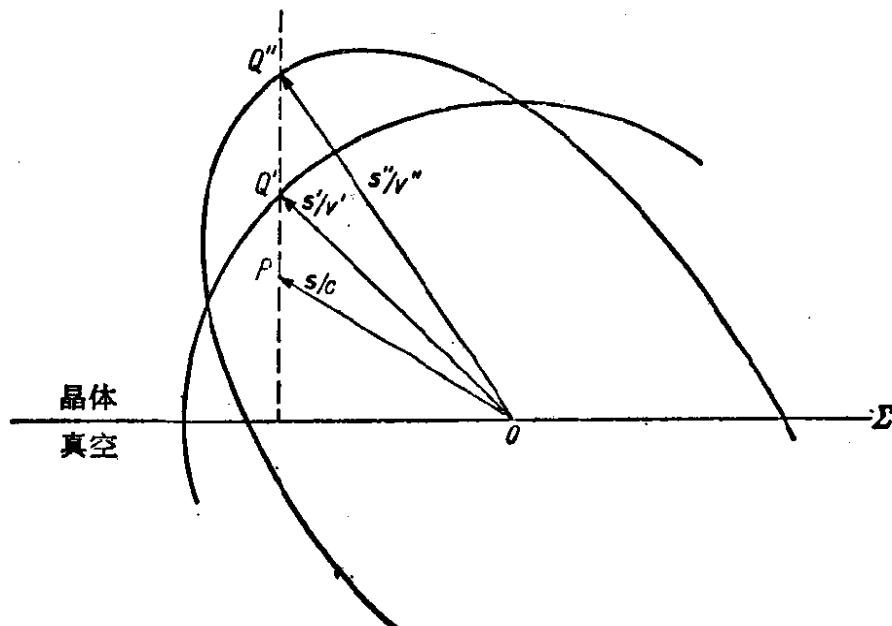


图 14.10 双折射：容许的波法线的作图法

取边界面 Σ 为平面 $z = 0$ ，(22)式变为

$$\frac{xs_x + ys_y}{c} = \frac{xs'_x + ys'_y}{v'} = \frac{xs''_x + ys''_y}{v''}, \quad (23)$$

1) 双折射的起因也可利用把惠更斯作图法（§ 3.3.3）推广到各向异性媒质来说明。然而这种方法的适当表述决不象教科书中通常给出的那样简单，因为惠更斯作图法是用发自点光源的子波而不是用独立的平面波运算的，它的传播规律通常未加证明而接受下来。这种方法中所固有的某些困难已被 M. G. Lamé 在他的 *Leçons Sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides* (Paris, Gauthier-Villars, 2nd ed., 1866) 和 V. Volterra, *Acta Math.*, 16 (1892), 153 讨论过。

它对于所有的 x 和 y 值都必须满足。这意味着，首先， $s'_x/s_x = s'_y/s_y$ ，和 $s''_x/s_x = s''_y/s_y$ ，因此两条折射光线均位于入射面内。而且，如果 θ_i , θ'_i 和 θ''_i 分别是入射波和两个透射波与轴的夹角，则由(23)式，有

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta'_i} = \frac{c}{v'}, \quad \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta''_i} = \frac{c}{v''}. \quad (24)$$

因而每一个透射波看来遵从与各向同性媒质情况相同的折射定律。然而现在速度 v 依赖于 θ_i ，因此晶体中传播方向的确定是更复杂的。在单轴晶体中，反波法线面的一叶是一个球面，因此有一个透射波的相速度与 θ_i 无关，这就是寻常波。

在正入射的特殊情况下 ($\theta_i = 0$)，有 $\theta'_i = \theta''_i = 0$ ，因此晶体中两波法线重合，并在 Σ 的法线方向。另一种有很大理论意义的特殊情况是沿着双轴晶体光轴之一的方向传播的波的情况。它产生通称锥形折射的现象，现在将对它作讨论。

(b) 锥形折射

前面提到过，当 s 与双轴晶体中波法线的光轴之一重合时， s 和 t 之间的关系有一奇异性。在讨论与沿这个特殊方向传播有联系的折射现象之前，必须研究这种奇异性。

§ 14.2.3 中已说明，与一波法线方向 s 相联系的电位移矢量 D 平行于通过波法线椭球并与 s 垂直的椭圆截面的主轴。如今在矢量 s 沿波法线光轴方向的特殊情况下，截面为圆形，因此所有与 s 垂直的 D 方向都是容许的；结果在这种情况下可能有(由 § 14.1(1) 式对每一个 D 算出的)电矢量 E 的无限多个方向，以及(如图 14.1 中确定的)无限多个光线方向 t 。现在将证明所有这些 t 矢量都位于一个锥面上。

设 $s'(s'_x, 0, s'_z)$ 是在不等式(5)的条件下以主介电轴为参照系沿波法线光轴之一的单位矢量。则 s'_x 和 s'_z 由(11)式相联系，并且垂直于 s' 的容许的 D 矢量满足下列关系式：

$$s'_x D_x + s'_z D_z = 0.$$

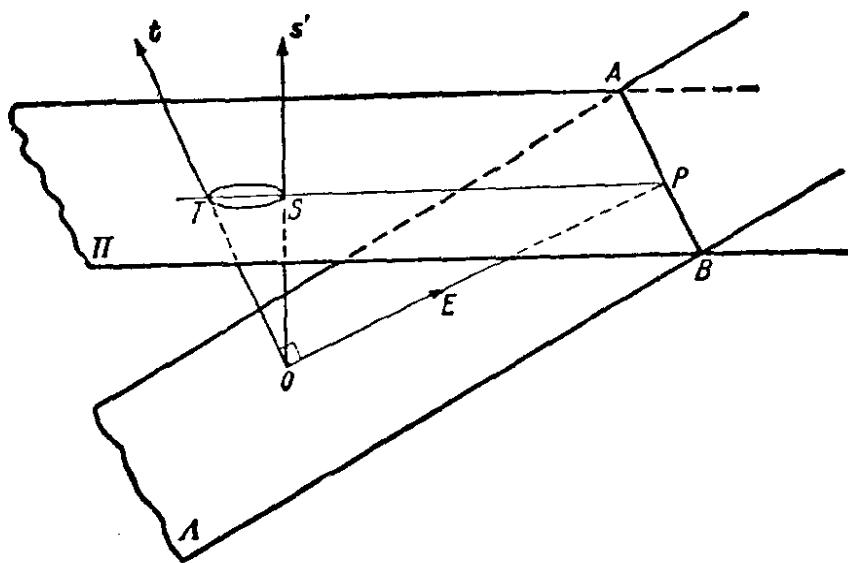


图 14.11 与双轴晶体中波法线的一个光轴相应的光线位置的图示

用相应的 \mathbf{E} 矢量分量来表示,这个关系式可写成

$$s'_x \varepsilon_x E_x + s'_z \varepsilon_z E_z = 0. \quad (25)$$

图 14.11 中, 设 Π 为垂直于 s' 的任一平面, 并设电矢量 \mathbf{E} 所在的直线与该平面相交于 P . 因按(25)式, 所有的 \mathbf{E} 矢量必位于与分量为 $(s'_x \varepsilon_x, 0, s'_z \varepsilon_z)$ 的矢量垂直的平面 A 内, 所以所有可能的点 P 必位于直线 AB 上, AB 是平面 Π 和 A 的交线. 现在光线矢量 \mathbf{t} 与 \mathbf{E} 和 s' 共面, 并垂直于 \mathbf{E} . 设 \mathbf{t} 和 s' 分别与平面 Π 交于点 T 和 S . 则根据相似三角形, 有

$$TS \cdot SP = OS^2 = \text{常数}. \quad (26)$$

因为 P 的轨迹是直线 AB , 所以 T 的轨迹与 AB 相反, 即为¹⁾通过反演中心 S 并且在 S 处的切线平行于 AB 的圆. 因此相应于波法线一个光轴有无限多的光线, 这些光线构成一个锥面. 这个锥面不是圆锥面, 因为圆的中心不是由 O 到平面 Π 的垂足.

如果 \mathbf{E} , s' 和 \mathbf{t}' 都在 xz 平面内, 则 \mathbf{t}' 的方向必为方向 $(s'_x \varepsilon_x, 0, s'_z \varepsilon_z)$, 并且 \mathbf{E} 总与它垂直. 如果这个方向与 z 轴的夹角为 ϕ , 则在此平面内锥的孔径角 χ 由下式给出:

1) 例如见 D. M. Y. Sommerville, *Analytical Conics* (London, Bell and Sons, 1941), p. 92.

$$\begin{aligned}\tan \chi = \tan(\beta - \phi) &= \frac{\frac{s'_x}{s'_z} - \frac{s'_x \varepsilon_x}{s'_z \varepsilon_z}}{1 + \frac{\varepsilon_x s'^2_x}{\varepsilon_z s'^2_z}} \\ &= \frac{1}{v_y^2} \sqrt{(v_x^2 - v_y^2)(v_y^2 - v_z^2)},\end{aligned}\quad (27)$$

式中已用到(11)式。通常 $(v_x^2 - v_y^2)/v_y^2 \ll 1$, $(v_y^2 - v_z^2)/v_y^2 \ll 1$, 因此, 这个锥很接近于圆锥, 孔径角为 χ .

用严格类似的方法可以证明, 相应于一个光线轴有无限多的波法线, 这些波法线构成一个锥面。这个锥的孔径角 ϕ 由(27)式的对偶即下式给出:

$$\tan \phi = \frac{1}{v_x v_z} \sqrt{(v_x^2 - v_z^2)(v_y^2 - v_z^2)} = \frac{v_y^2}{v_x v_z} \tan \chi. \quad (28)$$

利用 § 14.2.3 导出的法线面是光线面的垂足曲面这一性质, 就可以方便地用法线面和光线面来说明这种情况。这些曲面与 xz 平面的交线如图 14.12 所示。法线面与这个平面相交于一个半径 $v'_p = v_y$ 的圆以及一条极半径为 v''_p 的卵形线, 而光线面与这个平面相交于同一个圆 $v_r = v_y$ 和一个椭圆 v''_r 。如果圆与卵形线相交于 N , 则直线 ON 在波法线的光轴方向上, 并且通过 N 垂直于 ON 的平面必与光线面在容许光线方向的锥与此曲面相割的所有各点处相切。因而光线面具有下述不寻常的特性, 即某些切平面与它在无限多点相切¹⁾。

光线光轴用 OR 表示, 其中 R 是光线面两叶的交点; 两叶的交点 R 处有无限多个切平面, 它们的法线位于一锥面上。从 O 到这些平面的法线构成相应于光线方向 OR 的波法线方向的锥。这两个锥的孔径角 χ 和 ϕ 也在图中示出。根据即将搞清楚的理由, 属于 N 的即由 OA 这样的光线构成的锥, 称为内锥形折射的锥; 属于 R 的即由 OB 这样的波法线构成的锥, 称为外锥形折射的锥。

1) 这个曲面特性的详细讨论, 见 G. Salmon, *Analytical Geometry of Three Dimensions*, 由 R. A. P. Rogers 修订, Vol. 2 (London, Longmans, Green & Co., 1915, 5th ed.), Chapter IV.

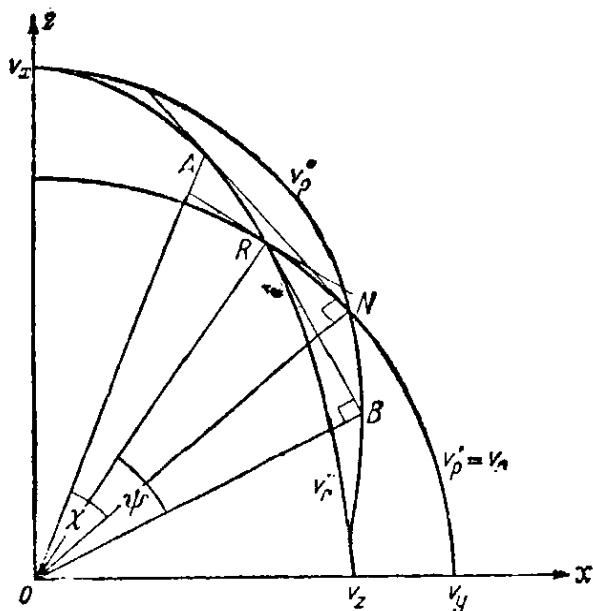


图 14.12 锥形折射：锥的作图法

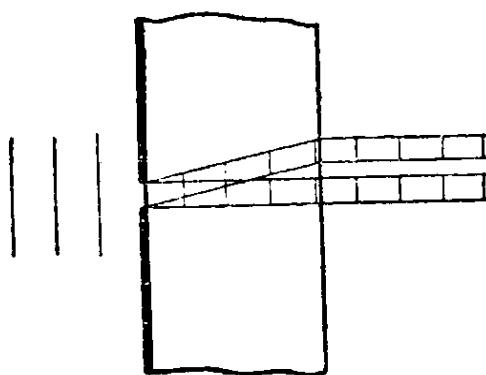


图 14.13 内锥形折射

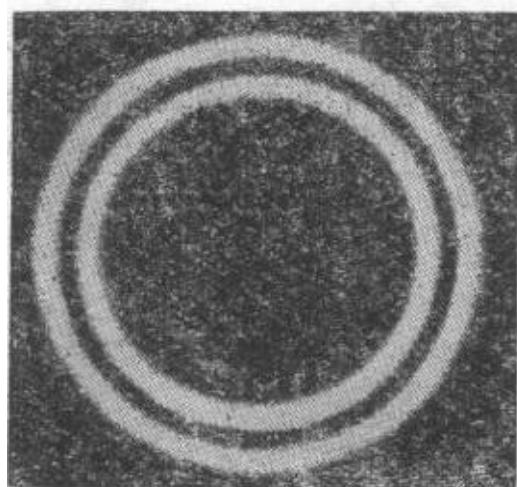


图 14.14 锥形折射引起的光分布

现在考虑一片双轴晶体，例如霰石，切成使它的两个平行表面垂直于波法线的光轴。如果它被正入射到其中一个表面上的一束窄的单色光照明，则在这片晶体内能量将分布在一个空心锥内，即在内锥形折射的锥内，并在另一侧出射时，它将形成一个空心柱，如图 14.13 所示。因而将预期在平行于晶体表面的屏上会看到一个亮圆环。1832 年哈密顿曾预言这种值得注意的现象，一年以后为洛埃所证实，他在哈密顿的鼓励下在霰石中研究了这种现象。这个实验的成功，作为菲涅耳的光的波动理论最惊人的证实之一，对此理论被普遍承认有很大的贡献（见历史引言，上册第 6 页）。

实际上,对锥形折射现象的论证不象刚才指出的那样简单,因为本来不可能获得严格平行的单色光束。在实验中总不得不用有限角孔径的光束,在这种情况下,波根道夫 (Poggendorff)¹⁾ 和海定格 (Haidinger)²⁾ 最早表明,人们观察到的是两个亮圆被一个细的暗圆分开,如图 14.14 所示。在洛埃的首次实验中,观察不到这种结构,是因为限制其光束宽度的孔径太大,所以这两个亮圆模糊成为一个圆了。在这一发现以后很长时间内仍未得到解释,直至沃依格特 (Voigt)³⁾ 对此作出一种解释,它可概述如下:

我们必须考虑其法线对光轴稍有倾斜的波的传播。每一波法线将在晶体内部产生两条光线,我们料想这些光线的方向与内锥形折射的锥的母线方向仅稍有不同。为了求出透射光线是如何分布的,必须考虑与图 14.12 中的切平面 AN 相切的圆附近的那一部分光线面。光线面的这一部分可比拟为汽车轮胎的充气内胎的一部分,切平面可比拟为位于胎上的平板。图 14.15 示出与 xz 平面的截面。现在光线面上代表相应于波法线方向 s 的两条光线方

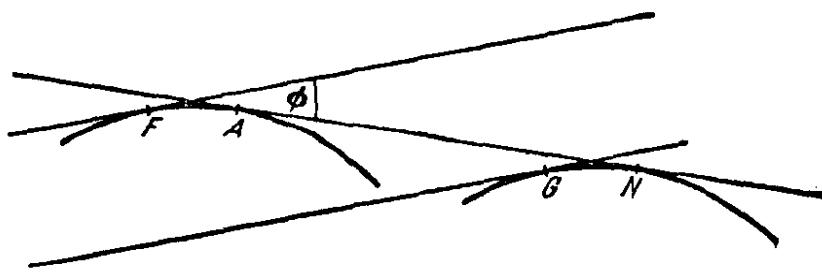


图 14.15 属于对波法线光轴倾角很小的波法线的光线位置图示

向的那些点,就是垂直于 s 的两个切平面与光线面的切点,如图 14.5 所示。当波法线 ON 稍偏离光轴时,切平面分成两个平行平面,其中一个平面在曲面上滚动,使得它的切点从相切圆的中心移到 F ,而第二个平面(它不能在我们的模型中表示,因为它必须割

1) J. C. Poggendorff, *Pogg. Ann.*, **48** (1839), 461.

2) W. V. Haidinger, *Wiener Ber.* (2), **16** (1854), 129; *Pogg. Ann.* (4), **96** (1855), 486.

3) W. Voigt, *Phys. Z.* **6** (1905), 672, 818.

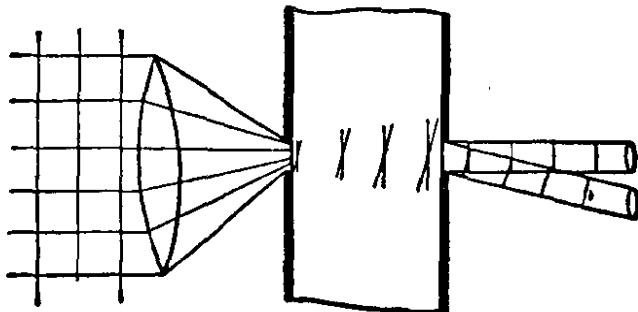


图 14.16 外锥形折射

穿内胎) 滚动使得它的切点从中心移到 G . 图 14.15 示出上述对于 xz 平面内的波法线位移的情况, 但对于任何方向的位移也会发生同样情况.

由上述得知, 其波法线对光轴有一小倾角 ϕ 的所有入射光线, 将产生对内锥形折射的锥中轴倾角为 $\frac{1}{2}\chi + a\phi$ 和 $\frac{1}{2}\chi - a\phi$ 的光线对, 其中 a 是某一常数. 因而与入射光束中角范围在 ϕ 和 $\phi + d\phi$ 之间相应的所有能量将出现在半角孔径为 $\frac{1}{2}\chi \pm a\phi$ 而夹角为 $ad\phi$ 的两个锥内, 但是入射光束中相应的能量正比于 $\phi d\phi$, 直至 ϕ 的极大值. 由此得出, 在角 $\frac{1}{2}\chi \pm a\phi$ 处, 光线锥内的强度正比于 ϕ , 特别是在 $\phi = 0$ 处它为零. 因而必料到出现两个亮圆, 当中有一暗圆, 同观察到的一样.

外锥形折射说明了先前确定的事实, 相应于一个给定的光线方向有由波法线方向构成的整锥. 利用一块晶片切割后使其表面垂直于光线轴, 可观察到这种现象. 在两个表面上放上彼此精确相对的小孔, 其中一个孔用会聚光照明, 如图 14.16 中所示. 只有那些方向很靠近光线轴方向的光线才到达第二个孔, 因此到达第二个孔的波的法线全都在外锥形折射的锥附近, 所以将从晶体射出一锥光. 由于是从晶体射出的折射, 所以这个光锥的角孔径将大于外锥形折射的真正角度 ϕ . 在平行于晶体表面的屏上再次观察到光的两个同心圆, 这个双重圆的解释与内锥形折射情况所作的解释是类似的.

§14.4 晶体光学测量

本节中将扼要地叙述确定晶体的特征(即单轴还是双轴), 它的光轴位置和它的主折射率数值的方法. 我们将看到, 通过观察晶片上的干涉条纹可以确定光轴的位置; 干涉图样的结构清楚地指出光轴与晶片表面的交点. 利用晶体棱镜, 通过测量偏向角或全反射角, 可以确定主折射率.

作为准备知识, 必须讨论偏振光的产生并进行分析.

§ 14.4.1 尼科耳棱镜

产生线偏振光的最常用的器件之一是尼科耳棱镜¹⁾. 它是由自然的菱形方解石(单轴晶体)沿对角平面(图 14.17 中用 AC 表示)切成两个相等部分, 再用加拿大树胶把这两部分胶合在一起构成的. 菱形的长约为宽的三倍, 其主截面在 B 和 D 处的角度都等于 71° ; 研磨端面 AD 和 BC 使这个角度减小到 68° .

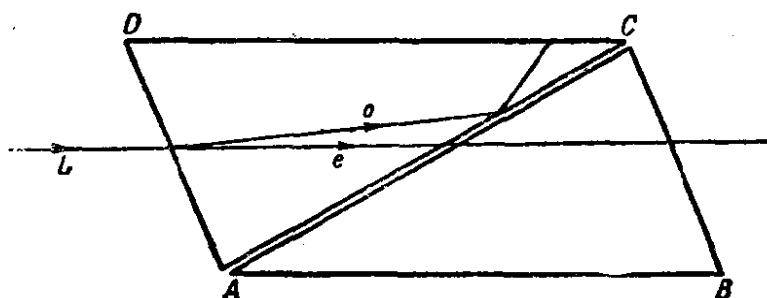


图 14.17 尼科耳棱镜

沿平行于长边的方向 L 入射的一条光线被分成一条寻常光线和一条非常光线. 对于寻常光线, 加拿大树胶的光密度较低, 对于非常光线, 加拿大树胶的光密度较高(方解石晶体: 寻常折射率 $n_o = 1.66$, 非常折射率 $n_e = 1.49$; 加拿大树胶 $n = 1.53$), 由 § 1.5.4 的公式很容易证实, 寻常光线在加拿大树胶界面上满足全反射条件; 这条光线向着涂黑的面 DC 全反射, 因此被此面吸收.

1) W. Nicol, *Edinburah New Philos. Journ.*, 6 (1829), 83.

非常光线穿过棱镜，实际上没有横向位移，它是线偏振的，它的 D 矢量在主截面内（见 § 14.3.2）。因此尼科耳棱镜产生线偏振光，它的振动方向是已知的。

如果入射光线向着菱形的边缘倾斜，只要寻常光线在加拿大树胶上的入射角不小于临界角，则尼科耳棱镜仍可作为起偏振器。这限制了空气中入射光线锥的角度，因此棱镜有效的张角约为¹⁾ 30° 。

令自然光通过一片对两个振动方向的吸收系数显著不同的晶状吸收物质，也可以得到相当纯的线偏振光。§ 14.6.3 中将讨论这种“偏振片”。

象尼科耳棱镜这样一类从其他偏振状态的光产生线偏振光的装置，称为起偏振器。这类装置也可以用作检偏振器，即作为线偏振光及其振动方向的检测器。要用尼科耳棱镜检测线偏振光，我们只须绕棱镜的纵轴转动棱镜，并注意是否有一个没有光通过的位置，如果有这样一个位置，则光是线偏振的，它的 D 矢量的振动方向垂直于主截面。

§ 14.4.2 补偿器

晶状物质也可以用来研究椭圆偏振光，即研究它的两轴方向及其长度比。为此，使用适当的物质和厚度的晶片，用它在两个方向互相正交的振动之间引入一个程差。特别是，可以引入这样的程差，使得椭圆偏振光转换为线偏振光，根据线偏振光的分析就得出了所需要的关于椭圆偏振光的信息。这种装置称为补偿器，因为它的作用是补偿一个位相差²⁾。

- 1) 有几种改进型的尼科耳棱镜，可用于更大的角场。对于这些的描述，例如见 L. C. Martin, *An Introduction to Applied Optics*, Vol. 1 (London, Pitman, 1930), p. 204, 或 R. W. Wood, *Physical Optics* (New York, Macmillan, 3rd ed., 1934), pp. 337—8.
- 2) 对于补偿器的详细论述，见 H. G. Jerrard, *J. Opt. Soc. Amer.*, **38** (1948). 35. M. Richartz 和 Hsien-Yü Hsü, 同上, **39** (1949), 136 页的文章中给出了可用于偏振光分析的方法概述。

§ 10.8 中讨论过的相干矩阵或斯托克斯参量，提供了完全偏振光或部分偏振光理论分析的系统方法。

(a) 四分之一波片

考虑一块厚为 h 的平面平行晶片。设 z 轴垂直于晶片， x 和 y 轴沿相应的 \mathbf{D} 振动方向。可以假定，绕法线转动晶片直至 x 和 y 轴平行于入射光振动椭圆的主轴。则入射光的 \mathbf{D} 矢量各分量可用下式表示：

$$\left. \begin{aligned} D_x^{(i)} &= a \cos \omega t, \\ D_y^{(i)} &= b \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

横过晶片时，因为两条光线的速度不同，所以这两个分量的位相有不同的变化。忽略反射损失，则从晶片出射的光的 \mathbf{D} 矢量各分量由下式给出：

$$\left. \begin{aligned} D_x^{(r)} &= a \cos (\omega t + \delta'), \\ D_y^{(r)} &= b \sin (\omega t + \delta''), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中

$$\delta' = \frac{2\pi}{\lambda} n' h, \quad \delta'' = \frac{2\pi}{\lambda} n'' h, \quad (3)$$

λ 是真空波长¹⁾。因此，晶片引入的位相差为

$$\delta'' - \delta' = \frac{2\pi}{\lambda} (n'' - n') h. \quad (4)$$

特别是，如果出射光要求是线偏振的，则必有 $\delta'' - \delta' = \pm \frac{1}{2}\pi$ ，

或更一般地说，必有 $\delta'' - \delta' = (2m + 1)\pi/2$ ，其中 m 是任一整数，因此，晶片的厚度必为

$$h = \left| \frac{2m + 1}{n'' - n'} \right| \frac{\lambda}{4}. \quad (5)$$

用了这个补偿器，透射光的线振方向由下式给出：

$$\frac{D_y^{(r)}}{D_x^{(r)}} = \pm \frac{b}{a}. \quad (6)$$

1) 与 § 1.3 不同，这里写 λ 而不写 λ_0 ，因为下标“0”在整个这一节中均指寻常光线。

引入位相差 $|\delta'' - \delta'| = \pi/2$, 即两个光学厚度之差为四分之一波长的补偿器, 称为四分之一波片¹⁾. 它可以很方便地用撕成厚度 $h = \lambda/4 |n'' - n'|$ 的云母箔(双轴晶体)制成.

椭圆偏振光可用它按上述方法分析: 使光通过四分之一波片, 再通过尼科耳棱镜, 使两者独立地转动, 直至通过尼科耳棱镜的视场变得全暗为止. 这个位置是云母箔的轴平行于入射光振动椭圆的轴的位置, 并且根据(6)式, 尼科耳棱镜处于这个位置时使得其电矢量与 x 轴倾角为 $\tan^{-1} b/a$ 的线偏振光消光.

如果入射光是圆偏振的, 则 $b = +a$ 或 $b = -a$, 并且透射光的 D 矢量在与轴 OX 夹角分别为 45° 或 135° 的方向上线偏振. 前者相应于左旋偏振, 后者相应于右旋偏振.

因为四分之一波片的厚度依赖于 λ , 所以精确的补偿只对于一个特定波长的单色光才是可能的. 为了对于任一给定波长的光都得到补偿, 必须用楔形片或楔形片的组合来代替单个平行面箔. 我们接着讨论某些这种类型的补偿器.

(b) 巴俾涅补偿器

巴俾涅²⁾的补偿器能实现所有的位相差(包括零). 它是由两块有相等锐角的石英楔(正单轴晶体)组成的. 如图 14.18 所示, 两块楔彼此对放, 并且可以沿着它们的接触平面移动, 因而形成可变厚度的平行片. 在一楔中光轴平行于棱, 在另一楔中光轴垂直于棱.

设 n_o 和 n_e 是石英的寻常折射率和非常折射率, h_1 和 h_2 是在某一特定点处两楔的厚度. 通过这两楔后, 两条光线之间的位相差为

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (n_e - n_o)(h_1 - h_2). \quad (7)$$

1) G. Airy, *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 4 (1833), 313.

2) J. Babinet, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 29 (1849), 514. J. Jamin, *Ann. Chim. (Phys.)*, (3), 29 (1850), 274.

式中两楔的贡献是带有相反符号的，因为其矢量垂直于主轴振动的光线(寻常光线)是传播较快的一条光线，结果在一楔中沿平行于棱的方向振动的分量将超过另一分量，而在另一楔中将落后于另一分量。现在，随着入射点横过晶片移动， h_1 和 h_2 以及 δ 都连续地变化，在中央 δ 为零。结果将有一系列直线，沿着这些直线，透射光是线偏振的，因而可以用一个适当取向的尼科耳棱镜消光。

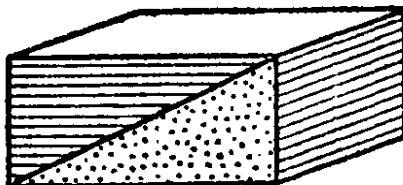


图 14.18 巴俾涅补偿器

取 x 轴平行于棱，椭圆偏振的入射光可表示为

$$\left. \begin{aligned} D_x^{(i)} &= a_1 \cos(\omega t + \delta'_0), \\ D_y^{(i)} &= a_2 \cos(\omega t + \delta''_0). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

透过补偿器的光表示为

$$\left. \begin{aligned} D_x^{(r)} &= a_1 \cos(\omega t + \delta'), \\ D_y^{(r)} &= a_2 \cos(\omega t + \delta''). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \delta' &= \delta'_0 + \frac{2\pi}{\lambda} n_o (h_1 - h_2), \\ \delta'' &= \delta''_0 + \frac{2\pi}{\lambda} n_e (h_1 - h_2). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

出射光为线偏振时，必有 $\delta'' - \delta' = m\pi$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)，即

$$\delta''_0 - \delta'_0 = -\frac{2\pi}{\lambda} (n_e - n_o) (h_1 - h_2) + m\pi. \quad (11)$$

线振方向由下式给出：

$$\frac{D_y^{(r)}}{D_x^{(r)}} = \pm \frac{a_2}{a_1}. \quad (12)$$

首先，设在补偿器前面放上一个尼科耳棱镜，使得补偿器接收线偏振光。于是 $\delta''_0 = \delta'_0$ ，如果补偿器后面有一检偏振器，与起

偏振的尼科耳棱镜正交，则会出现平行于棱的一些暗带，在暗带通过的各点，(11)式右边是 π 的倍数。这些暗带确定了零位置。如果接着只用补偿器和检偏振棱镜来检查椭圆偏振光，则由零位置到暗带的位移即可确定入射光的位相差 $\delta_0'' - \delta_0'$ ；并且平行和垂直于棱的 $D^{(i)}$ 分量的振幅比值可以由检偏振器的取向用 (12) 式确定。根据这些数据，应用 § 1.4.2 的公式就可以求出振动椭圆的主轴位置及其比值。

(c) 索累补偿器

在某些场合，需要产生在整个视场内恒定的位相差(正，负，或零)。这可以用索累¹⁾ 补偿器来做到。它包括两块石英楔 A 和 A' ，构成如巴俾涅补偿器那样的平面平行片，但不同的是现在两楔中

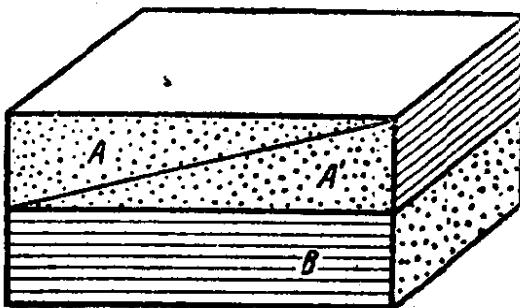


图 14.19 索累补偿器

的光轴都平行于棱。下面的楔与一平面平行石英片 B 粘合， B 的光轴与棱成直角(见图 14.19)。显然，这个补偿器对两条光线引入的有效程差为 $h_B - (h_A + h_{A'})$ 。在此程差为零的零位置处，整个视场可以用一适当取向的检偏振器弄暗。移动上面的楔可以改变有效程差，但对于每个位置，程差在整个视场内保持恒定。椭圆偏振光的分析与巴俾涅补偿器类似。

(d) 伯列克补偿器

伯列克²⁾ 补偿器在生物显微术中很有用(例如测量一些丝状

1) H. Soleil, *C. R. Acad. Sci., Paris*, 21 (1845), 426; 24 (1847), 973; 26 (1848), 162. J. Duboscq and H. Soleil, 同上, 31 (1850), 248.

2) M. Berek, *Zbl. Miner. Paläont.* (1913), 388, 427, 464, 580.

双折射物质中的程差). 它是由一厚片单轴晶状媒质组成的, 其光轴垂直于厚片的表面. 寻常光线和非常光线之间的位相差是通过倾斜此厚片而引入的. 把它安装成使其能被一分度轮转动, 分度轮可校准到直接示出所引入的程差.

§ 14.4.3 有晶片时的干涉

如前所述, 光轴的方向可以利用晶片上的干涉现象来确定. 所观察到的优美的干涉效应明显地证明了晶体光学中理论与实验之间的一致, 就其本身而言, 这些干涉效应就值得加以研究.

首先考虑从起偏振器出射的一束线偏振光正入射到厚度为 h 的平面平行晶片上. 进入晶片后, 每一条光线分成具有不同传播速度的两条光线, 其 D 矢量在垂直于晶片法线方向的两个相互正交的方向上振动. 它们从晶片出射时具有某一位相差 δ . 如果在晶片后面放一个检偏振的尼科耳棱镜, 就能选出这两个振动在某一方向上的分量, 并可导至二者在检偏振器后面的透镜的焦平面内干涉.

图 14.20 中, 图面平行于晶面. D' 和 D'' 表示晶体内两个互

相正交的振动方向, OP 和 OA 分别是通过起偏振器和检偏振器的振动方向. 设 ϕ 是 OP 与 D' 的夹角, χ 是 OA 与 OP 的夹角. 入射到晶片上的光的振幅用矢量 OE (平行于 OP) 表示; 它在 D' 和 D'' 方向上的分量是

$$OB = E \cos \phi, \\ OC = E \sin \phi. \quad (13)$$

检偏振器只透过平行于 OA 的分量, 由图及(13)式可知, 这些分量的振幅为

$$OF = E \cos \phi \cos(\phi - \chi), \\ OG = E \sin \phi \sin(\phi - \chi). \quad (14)$$

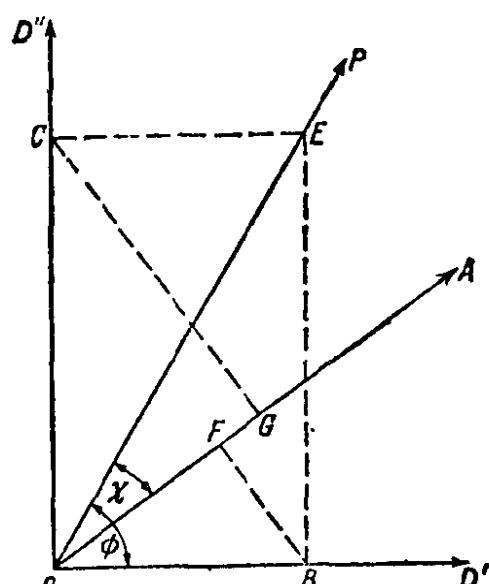


图 14.20 透过起偏振器和检偏振器的振动分量的作图

离开晶片后,这两个分量的位相差为

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (n'' - n') h. \quad (15)$$

根据 § 7.2(15)式, 位相差为 δ 的两个单色波干涉得到的强度由下式给出:

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \delta,$$

式中 I_1 和 I_2 是这两个波的强度(振幅平方). 用(14)式给出的振幅, 则有

$$I = E^2 \left\{ \cos^2 \chi - \sin 2\phi \sin 2(\phi - \chi) \sin^2 \frac{\delta}{2} \right\}, \quad (16)$$

式中已用到恒等式 $\cos \delta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\delta}{2}$.

如果去掉晶片 ($\delta = 0$), 则强度应为 $I = E^2 \cos^2 \chi$; 因而(16)式中的第二项表示晶片的影响.

现在考虑两种重要的特殊情况:

(a) 检偏振器和起偏振器平行 ($\chi = 0$). 在这种情况下, (16)式化为

$$I_{\parallel} = E^2 \left(1 - \sin^2 2\phi \sin^2 \frac{\delta}{2} \right). \quad (17)$$

当

$$\phi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \dots, \quad (18)$$

即通过检偏振器的振动方向与晶片中的振动方向之一重合时, 有透射极大值. (18)式的位置被透射极小值的位置隔开, 后者由 $\sin 2\phi = \pm 1$ 即

$$\phi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \dots \quad (19)$$

给出, 极小值为

$$I_{\parallel \text{极小}} = E^2 \left(1 - \sin^2 \frac{\delta}{2} \right) = E^2 \cos^2 \frac{\delta}{2}. \quad (20)$$

这些极小值不完全暗, 除非 δ 是 π 的奇数倍, 即除非晶片厚度为一系列依赖于光的波长的容许值之一.

(b) 检偏振器和起偏振器垂直 ($\chi = \pi/2$). 在这种情况下, (16)式给出

$$I_{\perp} = E^2 \sin^2 2\phi \sin^2 \frac{\delta}{2}. \quad (21)$$

上式与(17)式比较表明, 此时干涉现象是互补的. 当 ϕ 为(18)式给出的数值之一时, 有完全暗的极小值. 在这些极小值的中间位置, 即(19)式的位置, 有相对的极大值, 它们的数值为

$$I_{\text{极大}} = E^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}. \quad (22)$$

这些现象可用来产生精确互补的颜色; 只须将一束平行白光通过被一块晶片隔开的两个尼科耳棱镜, 先使两个棱镜平行 ($\chi = 0$) 再使两个棱镜正交 ($\chi = \pi/2$) 即可. 为了得到均匀场, 必须具有足够好的准直光束, 以保证不引入有影响的位相差.

如果入射到第一个起偏振器上的光来自位于透镜焦平面上的扩展不相干光源, 则光源中每一点将在其共轭点上产生强度分布, 与光源中所有其他各点无关. 因此在象平面内观察到光的分布, 它可以用等强度曲线来描绘, 形成所谓晶片的干涉图. 象平面内每一点对应一个进入和离开晶体的平行光线方向, 因此必须考虑位相差 δ 随此方向的变化. 只考虑起偏振器和检偏振器正交 (即 $\chi = \pi/2$) 的情况就足够了; 因为当二者平行时图同样是互补的, 而其他情况给出的干涉图较不明显.

相应于给定入射方向的强度依赖于 ϕ 和 δ , 分别考虑 ϕ 或 δ 变化的影响是有用的. ϕ 为常数的曲线称为同消色线 (或刷形线), δ 为常数的曲线称为等色线. 同消色线依赖于晶片中光轴的取向, 而与晶片厚度和波长无关, 除非有轴的色散. 等色线依赖于波法线方向和晶片厚度, 之所以这样命名是因为采用白光时它们是一些颜色相同的线. 这些曲线族中强度为零的一些曲线分别称为主同消色线和主等色线, 它们分别按(21)式由 $\sin 2\phi = 0$ 和 $\sin \frac{1}{2}\delta = 0$ 给出. 在这些曲线上, 光的偏振状态与通过晶体前

相同。这是因为在主同消色线上，通过检偏振器的振动方向与晶体中振动方向之一重合，而在主等色线上，两个出射光束之间的位相差是 2π 的整数倍。这两组曲线是重叠的，但可以分别研究。

在研究这些曲线的形状以前，必须考虑位相差 δ 是怎样依赖于入射角的。设 SA , AB' , AB'' 分别代表 A 处的入射波和两个折

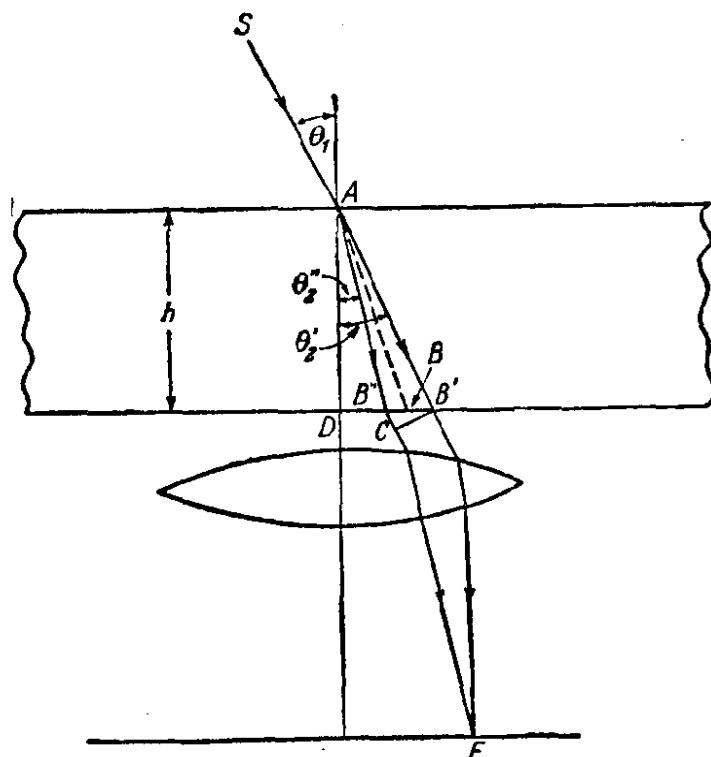


图 14.21 透过晶片的两个波之间的位相差的测定

射波的波法线，设 θ_1 , θ'_2 , θ''_2 分别是入射角和两个折射角（见图 14.21）。又设 λ 是第一种媒质（空气）中的波长， $\lambda' = \lambda/n'$ 和 $\lambda'' = \lambda/n''$ 是两个折射波的波长。从晶片出射的两条光线将互相平行，并且与入射波法线平行（见图 14.21），二者的位相差为

$$\delta = 2\pi \left[\frac{AB''}{\lambda''} + \frac{B''C}{\lambda} - \frac{AB'}{\lambda'} \right], \quad (23)$$

式中

$$AB' = \frac{h}{\cos \theta'_2}, \quad AB'' = \frac{h}{\cos \theta''_2}, \quad (24)$$

及

$$B''C = B''B' \sin \theta_1 = h \sin \theta_1 (\tan \theta'_2 - \tan \theta''_2). \quad (25)$$

把(24)和(25)式代入(23)式,得出

$$\delta = 2\pi h \left[\frac{1}{\cos \theta_2''} \left(\frac{1}{\lambda''} - \frac{\sin \theta_1 \sin \theta_2''}{\lambda} \right) - \frac{1}{\cos \theta_2'} \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{\sin \theta_1 \sin \theta_2'}{\lambda} \right) \right]. \quad (26)$$

应用折射定律,可在第一个括弧中用 $\sin \theta_2''/\lambda''$ 代替 $\sin \theta_1/\lambda$, 在第二个括弧中用 $\sin \theta_2'/\lambda'$ 代替 $\sin \theta_1/\lambda$, 得出

$$\delta = 2\pi h \left[\frac{\cos \theta_2''}{\lambda''} - \frac{\cos \theta_2'}{\lambda'} \right] = \frac{2\pi h}{\lambda} (n'' \cos \theta_2'' - n' \cos \theta_2'). \quad (27)$$

由于 $n'' - n'$ 这一差值总比 n' 与 n'' 小很多, 因此可以用一个近似表达式来代替(27)式. 取一级近似, 则有

$$\begin{aligned} n'' \cos \theta_2'' - n' \cos \theta_2' &= (n'' - n') \frac{d}{dn} (n \cos \theta_2) \\ &= (n'' - n') \left[\cos \theta_2 - n \sin \theta_2 \frac{d\theta_2}{dn} \right], \end{aligned} \quad (28)$$

式中 n 是 n' 和 n'' 的平均值, θ_2 是相应的 θ_2' 和 θ_2'' 的平均值. 对折射定律 $\sin \theta_1 = n \sin \theta_2$ 求微商, 保持 θ_1 不变, 又有

$$0 = \sin \theta_2 + n \cos \theta_2 \frac{d\theta_2}{dn}. \quad (29)$$

因此(28)式可写成

$$n'' \cos \theta_2'' - n' \cos \theta_2' = \frac{1}{\cos \theta_2} (n'' - n'), \quad (30)$$

把(30)式代入(27)式, (27)式变为

$$\delta = \frac{2\pi h}{\lambda \cos \theta_2} (n'' - n'). \quad (31)$$

$h/\cos \theta_2$ 这个量表示两条光线在晶片中的平均几何路程, 它乘以 $(n'' - n')$ 给出了相应的光程差.

回到扩展光源的情况, 就必须考虑不同传播方向的波的透射. 假定这些方向与晶片法线的夹角很小. 每一个入射波用它通过图 14.21 中固定点 A 的波法线来表示. 这些波经透镜会聚到焦点 F 上, 这些 F 点同透射波法线 AB (AB' 和 AB'' 的平均值) 与晶片下

表面交点 B 一一对应。因为 AB 对晶片法线 AD 的倾角很小，所以这些 F 点将构成这些 B 点的稍有畸变的象(投影)。因此，等色线的形状实质上是由 δ 为常数的 B 点轨迹给出的。特别是，对于主等色线，这个常数是 2π 的整数倍。如果想要看到改变晶片厚度的影响，只须把含有这些 B 点的平面平行它本身移动即可。

由此得出，绕某一点 A 作 $\delta(h, \theta_2) = \text{常数}$ 的等位相差曲面，亦称为等色曲面，并找出它们与 $h = \text{常数}$ 的平面的交线，就可以看到所有的等色线。在确定上述曲面时，必须记住在 δ 的表达式(31)中折射率 n' 和 n'' 也是 θ_2 的函数。

我们将分别讨论由单轴晶片和双轴晶片得出的干涉图的形状。用极距

$$\rho = AB = \frac{h}{\cos \theta_2} \quad (32)$$

和 AB 对晶体媒质波法线的一条(或两条)光轴方向的夹角 θ (或夹角 θ_1 和 θ_2)来确定这些 B 点将是方便的(图 14.22)。

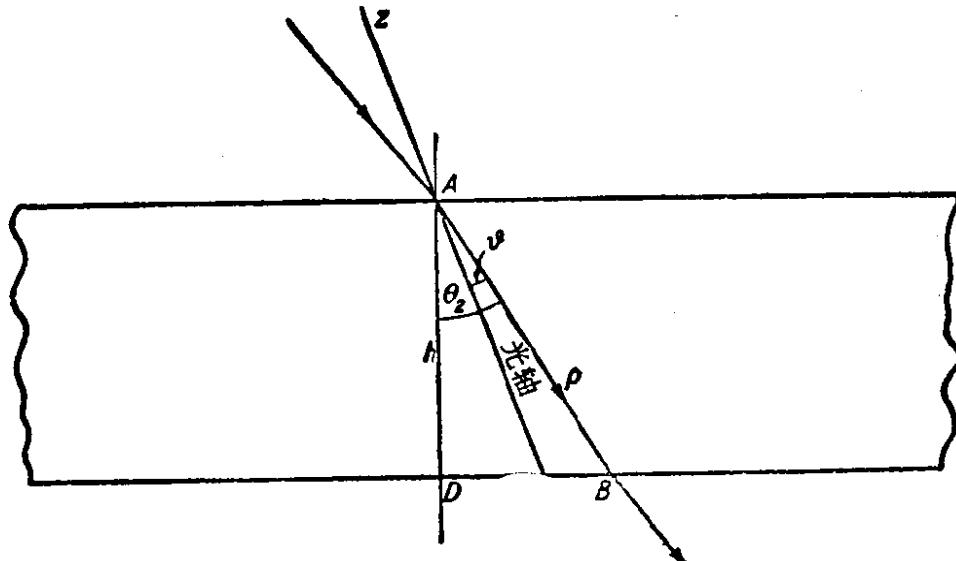


图 14.22 晶片的干涉图理论图示

§ 14.4.4 单轴晶片的干涉图

在单轴晶体中，根据 § 14.3(4) 式，与光轴成 θ 角的波法线方

向所对应的相速度之间有下述关系:

$$v_p'^2 - v_p''^2 = (v_o^2 - v_e^2) \sin^2 \theta. \quad (33)$$

因为 $v_p = c/n$, 其他的速度也有同样的关系, 所以由(33)式得出:

$$\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n''^2} = \left(\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2} \right) \sin^2 \theta. \quad (34)$$

这些折射率之差通常比它们的数值小很多, 因此(34)式可以写成下述近似形式:

$$n'' - n' = (n_e - n_o) \sin^2 \theta. \quad (35)$$

将此式代入(31)式, 并用(32)式, 得出

$$\delta = \frac{2\pi\rho}{\lambda} (n_e - n_o) \sin^2 \theta. \quad (36)$$

因此, 等位相差曲面由下式给出:

$$\rho \sin^2 \theta = C, \quad (C = \text{常数}). \quad (37)$$

为了设想这些曲面的形状, 取 z 轴沿光轴的笛卡儿坐标系. 则

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \rho^2 \sin^2 \theta = x^2 + y^2, \quad (38)$$

根据(37)式, 等位相差曲面由下式给出:

$$(x^2 + y^2)^2 = C^2(x^2 + y^2 + z^2). \quad (39)$$

这些曲面可通过绕 z 轴旋转曲线

$$x^4 = C^2(x^2 + z^2) \quad (40)$$

而产生, 上式的一条典型曲线如图 14.23 所示. 离原点很远时 ($z^2 \gg x^2$), 曲线渐近逼近于抛物线

$$x^2 = \pm Cz. \quad (41)$$

在 x 轴附近,

$$C^2 = \frac{x^4}{x^2 + z^2} = \frac{x^2}{1 + \frac{z^2}{x^2}} = x^2 \left(1 - \frac{z^2}{x^2} + \dots \right), \quad (42)$$

因此, 曲线在该处近似为双曲线

$$x^2 - z^2 = C^2. \quad (43)$$

图 14.23 中用虚线画出了抛物线和双曲线.

现在只要取(39)式的曲面与离原点不同距离 h 处代表晶片出射面的那些平面的截线，就能确定所有的等色线。由图 14.23 显然得知，可以出现形状很不相同的等色线，它们取决于晶体该面相对于光轴的取向。如果晶片表面垂直于光轴，则等色线显然为圆；如果表面的法线与光轴夹角很小，则等色线为近似于椭圆的闭合线；但如果法线与光轴夹角很大，则等色线近似于双曲线。

主同消色线(在这些曲线上 $\sin 2\phi = 0$) 表现为一暗而模糊的十字，它的臂平行于起偏振器和检偏振器的方向，它的中心相应于与光轴平行的波法线方向。这是由下述事实得出的：对于晶体任一给定的波法线方向，振动方向平行或垂直于含此波法线及光轴的主平面。因而视场内相应于主平面与通过起偏振或检偏振尼科耳棱镜的振动方向平行的所有各点处都是暗的。

图 14.24 是单轴晶体的典型干涉图，主同消色线和主等色线清晰可见。

平面平行晶片的干涉图在偏振光镜方面有一重要的实际应用，偏振光镜是用来在大部分是非偏振的光束中检测小部分偏振光的仪器。萨伐尔 (Savart) 晶片¹⁾ 就是一个例子。它是由两块石英晶片组成的，每一片切成使其光轴与晶片法线成 45° ，再粘合在一起，使含晶片法线与光轴的平面相互垂直。因而在一块晶片中的寻常振动方向是另一块晶片中的非常振动方向，并且位相差符

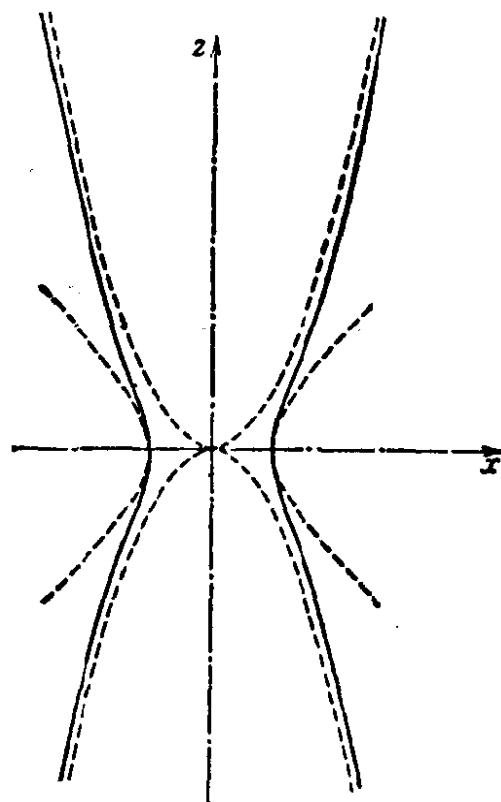


图 14.23 光学单轴晶体的等位相差曲面的子午曲线

1) 参看 *Ann. d. Physik*, 49 (1840), 292.

号相反；当波垂直通过晶片时，位相差正好相互抵消。这种装置保证了接近正入射时位相差随波长的变化很小，因此可得到白光条纹。如果萨伐尔晶片放在两个正交的尼科耳棱镜之间，其主平面与两个尼科耳棱镜的方向成 45° ，则干涉图样由几乎是直线的亮暗条纹组成。如果去掉起偏振的尼科耳棱镜，使部分偏振光通过此系统，则将在非偏振分量所产生的均匀背景上叠加偏振分量所产生的条纹，甚至偏振光的比例很低时仍能测得这些条纹。当入射光的振动平面与萨伐尔晶片的主平面成 45° 时，这些条纹具有最大的对比。

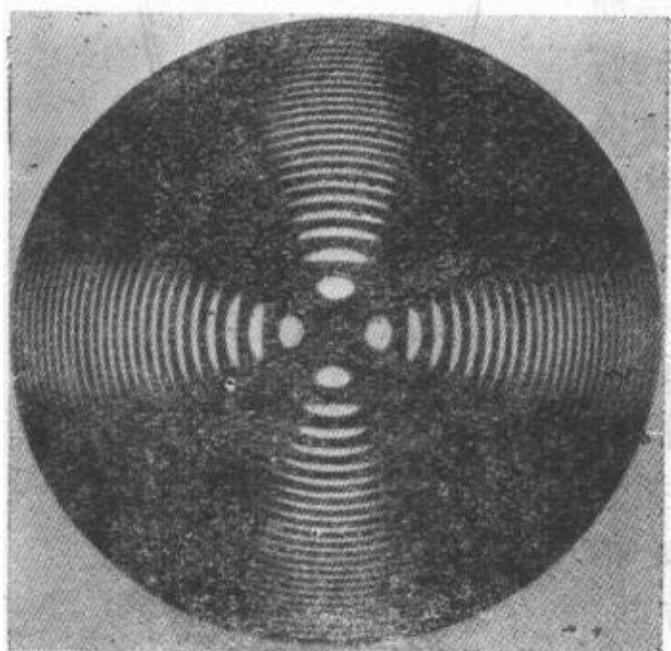


图 14.24 萤石的干涉图。垂直于光轴切割，放在两个正交的尼科耳棱镜之间

§ 14.4.5 双轴晶片的干涉图

对于平面平行双轴晶片，代替(33)式，有更一般的关系式：

$$v_p'^2 - v_p''^2 = (v_x^2 - v_z^2) \sin \theta_1 \sin \theta_2, \quad (44)$$

它是由 § 14.3(18) 式得出的。这里 θ_1 和 θ_2 是波法线方向 AB 与两个波法线光轴的夹角。因为 $v_p = c/n$, $v_x = c/n_x$, 等等，所以由(44)式得出

$$\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n''^2} \right) = \left(\frac{1}{n_x^2} - \frac{1}{n_z^2} \right) \sin \theta_1 \sin \theta_2, \quad (45)$$

因为各折射率之差比各折射率的数值小得多，所以近似得出

$$n'' - n' = (n_z - n_x) \sin \theta_1 \sin \theta_2. \quad (46)$$

把(46)式代入(31)式，再令 $h/\cos \theta_2 = \rho$ ，得出位相差 δ 的表达式为

$$\delta = \frac{2\pi\rho}{\lambda} (n_z - n_x) \sin \theta_1 \sin \theta_2. \quad (47)$$

可见现在等位相差曲面由下式给出：

$$\rho \sin \theta_1 \sin \theta_2 = C, \quad (C = \text{常数}). \quad (48)$$

在每一个光轴方向 ($\theta_1 = 0$ 或 $\theta_2 = 0$) 上, ρ 趋于无穷, 因此这些曲面渐近逼近于围绕光轴的柱面. 当 θ_1 很小时, θ_2 近似等于两光轴夹角 2β , 于是(48)式变为

$$\rho \sin \theta_1 = \frac{C}{\sin 2\beta}. \quad (49)$$

而 $\rho \sin \theta_1$ 是从光轴 $\theta_1 = 0$ 到曲面上一点的距离; $\rho \sin \theta_2$ 与此类似. 因此“渐近的柱面”是圆柱面. 等位相差曲面的一般形状如图 14.25 所示. 显然, 在光轴附近, 等色线是闭合曲线, 近似于椭圆, 并围绕着焦平面内与光轴对应的那两点.

同前, 找出所有使晶体中振动方向与通过尼科耳棱镜的方向重合的波法线方向, 就得出主同消色线. 我们可用 § 14.2.3(a) 的作图, 那里已证明过振动平面等分 (N_1, s) 和 (N_2, s) 两平面之间的夹角, N_1 和 N_2 是光轴方向. 因而如果晶体垂直 z 轴, 透过两个尼科耳棱镜的振动方向平行于 x 和 y 轴, 则主同消色线将位于 xz 平面和 yz 平面内, 而干涉图将表现为一暗十字, 它的一对臂通过与光轴对应的那些点.

更一般地说, 如果晶体位于相对于两个尼科耳棱镜方向的其他任一取向, 则主同消色线的形状将是等轴双曲线, 其渐近线在透过尼科耳棱镜的振动方向上, 其臂通过与光轴对应的那些点. 如果固定两个尼科耳棱镜, 使晶片在它本身的平面内转动, 则同消色线的图样将改变, 但等色线除了转动以外仍保持不变; 因为等色线是按与尼科耳棱镜方向

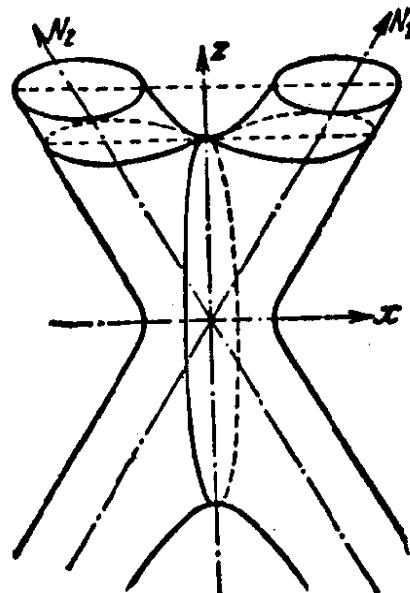


图 14.25 光学双轴晶体的等位相差曲面

无关的条件定义的。双轴晶片的典型干涉图如图 14.26 所示。

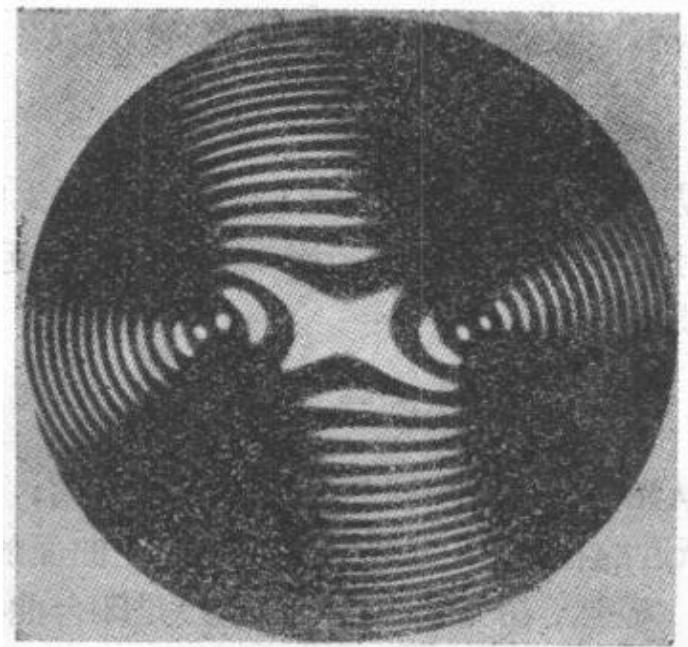


图 14.26 巴西黄玉的干涉图

§ 14.4.6 晶体媒质的光轴定位及其主折射率的测定

因为等色线是围绕一条(或两条)光轴的闭合曲线，所以干涉图的观测提供了确定晶体是单轴的还是双轴的以及光轴定位的现成方法。在配有两个尼科耳棱镜的显微镜(称为偏光显微镜)中，或者去掉目镜把眼睛聚焦在物镜后焦平面上(因而再现图 14.21 的条件)，或者在显微镜主体内插入一个附加透镜，使得通过目镜可以观察到物镜的后焦平面，就可观察到干涉图。第二种方法的好处是看到干涉图较大的象，并可用目镜中已校准的标度在干涉图上作测量。因而可测出双轴晶体光轴之间的夹角(当然必须计及光射出晶体时被折射这一事实)。用这些方法，即使很小的晶体碎片，例如在薄的矿物切片中可能出现的碎片，也足以确定光轴的位置和测量它们的倾角。

晶体的主折射率 n_x , n_y , n_z 既可以通过测量棱镜中的偏向角或全反射角来确定，也可以浸没在一系列有递级折射率的液体中来确定。

棱镜法对单轴晶体比对双轴晶体更为方便。棱镜切成使它的

折射棱平行于波法线的光轴。于是寻常波和非常波的 \mathbf{D} 矢量分别与此棱垂直和平行。当一束非偏振光入射到棱镜一个表面上时，根据从棱镜出射的两条光线的偏离就能求出这两个折射率。利用一个尼科耳棱镜可区别寻常光线和非常光线。

浸没法依赖于下述事实：当透明物体浸没在折射率相同的液体中时它是看不见的。因为对于任一给定的传播方向，晶体有两个折射率，如果用非偏振光观察，它在任何液体中都是看得见的。然而，如果用偏振光，其 \mathbf{D} 矢量沿晶体中振动方向之一，则晶体将在适当的折射率 n' 或 n'' 的液体中看不见。如果主介电轴的方向是已知的，则晶体可以这样取向，使得光依次平行于每一个轴通过，而 n' 和 n'' 可依次使之等于 n_x , n_y 和 n_z 中的两个。

如果主介电轴的方向是未知的，则把所研究的那种类型的大量晶体按随机的取向浸没在一系列有递级折射率的液体中就能得出很好的折射率估计值。对于入射光的两个振动方向，每一个晶体将在两个不同的折射率值时变得看不见。设这两个折射率为 n' 和 n'' ，由 § 14.3(12) 不等式，有

$$n_x \leq n' \leq n_y \leq n'' \leq n_z. \quad (50)$$

因而 n_x 等于 n' 值的下限， n_z 等于 n'' 值的上限， n_y 既等于 n' 的上限又等于 n'' 的下限；如果已作足够多次测量，这些限应一致。

如果晶体是单轴的，则每一个晶体的折射率之一为 n_o ，另一将在 n_o 和 n_e 之间的范围内。

§14.5 应力双折射和形式双折射

§ 14.5.1 应力双折射

当透明的各向同性媒质受到机械应力时，它会变为光学各向异性的。这种现象通称应力双折射或光弹性效应，它最早被布儒斯特¹⁾注意到，并得到有益的实际应用。我们将扼要说明如何用

1) D. Brewster, *Phil. Trans.* (1815), 60; (1816), 156. *Trans. Roy. Soc. Ed.*, 8 (1818), 369.

光学方法得出关于起初各向同性物质中应力状态的信息。作为准备，我们必须讨论物质的弹性常数和光学常数之间存在的关系。

弹性固体中的应力状态和应变状态是用二阶张量即应力张量 P_{kl} 和应变张量 ϵ_{kl} 来表征的，二者的分量相互有线性关系。这两个张量总是对称的，但它们的主轴一般不同于介电张量的主轴，如 § 14.1 中所述，后者确定物体的光学性质。

当施加应力于物体时，介电张量改变，可以假定，在一级近似下，介电张量各分量的变化与六个应力分量有线性关系，因而也与六个应变分量有线性关系。于是可引入两组新的系数即应力-光学常数和应变-光学常数来表征这些关系。

如果以未受应力的物质的主介电轴为参考坐标系，则波法线椭球的方程为

$$\frac{x^2}{\varepsilon_x} + \frac{y^2}{\varepsilon_y} + \frac{z^2}{\varepsilon_z} = 1. \quad (1)$$

加上其分量为 P_{xx}, P_{xy}, \dots 的应力时，这个椭球改变为另一个椭球，其方程可写为

$$a_{xx}x^2 + a_{yy}y^2 + a_{zz}z^2 + a_{yz}yz + a_{zx}zx + a_{xy}xy = 1. \quad (2)$$

根据我们的假定，每一个系数 a_{kl} 与(1)式中相应的系数相差一个 P 的线性函数。因此有六个关系式，其中两个典型的关系式为

$$\left. \begin{aligned} a_{xx} - \frac{1}{\varepsilon_x} &= q_{11}P_{xx} + q_{12}P_{yy} + q_{13}P_{zz} + q_{14}P_{yx} \\ &\quad + q_{15}P_{zx} + q_{16}P_{xy}, \\ a_{yz} &= q_{41}P_{xx} + q_{42}P_{yy} + q_{43}P_{zz} \\ &\quad + q_{44}P_{yz} + q_{45}P_{zx} + q_{46}P_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

在这些记号中，下标中每个数字 1—6 指的是一对轴，如：
 $1 = xx, 2 = yy, 3 = zz, 4 = yz, 5 = zx, 6 = xy$ 。

系数 a_{kl} 与应变分量之间有一组类似的方程。应力的光学效应也可以用光线椭球的形变来描述，因而得到进一步的两组具有 36 个系数的线性方程。这些系数与波法线椭球的系数有关，因为这两个椭球的主轴总在相同的方向上，并且一个椭球的半轴是另

一个椭球的半轴的倒数。

如果在结构中存在对称元素，则(3)式取更简单的形式。对于立方晶系的晶体，三个主轴 x , y , 和 z 是等价的，结果在应力-光学常数之间下述关系成立¹⁾：

$$\left. \begin{array}{l} q_{11} = q_{22} = q_{33}, \\ q_{12} = q_{21} = q_{23} = q_{32} = q_{31} = q_{13}, \\ q_{44} = q_{55} = q_{66}, \end{array} \right\} \quad (4)$$

所有其余系数均为零。

对于各向同性物质，(3)式在轴有任何变化时必保持不变。这只有当应力-光学常数满足立方对称条件而且下述关系式

$$2q_{44} = q_{11} - q_{12} \quad (5)$$

成立时才有可能。因此在这种情况下只有两个独立的常数。因为现在所有的轴系统都是等价的，所以可以用任一组的轴，特别是用应力张量的主轴；因此 $P_{yx} = P_{zy} = P_{xz} = 0$ ，并且代替(3)式有更简单的关系式：

$$\left. \begin{array}{l} a_{xx} - \frac{1}{\epsilon} = q_{11}P_{xx} + q_{12}P_{yy} + q_{12}P_{zz}, \\ a_{yy} - \frac{1}{\epsilon} = q_{12}P_{xx} + q_{11}P_{yy} + q_{12}P_{zz}, \\ a_{zz} - \frac{1}{\epsilon} = q_{12}P_{xx} + q_{12}P_{yy} + q_{11}P_{zz}, \\ a_{yz} = a_{zx} = a_{xy} = 0. \end{array} \right\} \quad (6)$$

因而在这种情况下应力张量的主轴与波法线椭球的主轴相同，同根据对称考虑所预料的一样。

虽然象岩盐那样的立方晶体在无应变时是光学各向同性的，但在有应变时它们的行为就不同于象玻璃那样的真正各向同性物

1) 每一种晶系的应力-光学系数之间存在的关系的讨论，见 F. Pockels, *Ann. d. Physik*, 37 (1889), 158. 以及他的 *Lehrbuch der Kristalloptik*, (Leipzig, 1906), pp. 469—74. 它们的概述见 G. Szivessy, *Handbuch der Physik*, Vol. 21 (Berlin, Springer, 1929), 840.

质了。通过观察放在两个正交的尼科耳棱镜(或其他起偏振装置,例如偏振片,参看 § 14.6.3)之间的物体,就可以方便地观察到应力的效果。考虑一片厚度为 h 的物质,使光正入射到它上面。设此片受到应力,使得应力张量的两个主轴,如 x 和 y ,以及介电张量的两个主轴位于此片平面内,并与起偏振器和检偏振器的方向夹角为 ϕ 和 $\phi + \pi/2$,如 § 14.4.3 中一样。法线椭球与 xy 平面的截线为椭圆

$$a_{xx}x^2 + a_{yy}y^2 = 1, \quad (7)$$

式中 a_{xx} 和 a_{yy} 由(6)式给出。对于在此片中传播的两个波,折射率 n' 和 n'' 由下式给出:

$$n' = \frac{1}{\sqrt{a_{xx}}}, \quad n'' = \frac{1}{\sqrt{a_{yy}}}. \quad (8)$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n''^2} &= a_{xx} - a_{yy} \\ &= (q_{11} - q_{12})(P_{xx} - P_{yy}). \end{aligned} \quad (9)$$

实际上, n' 和 n'' 通常只与 n_x 稍有不同,因此近似地有

$$n'' - n' = \frac{1}{2} n_x^3 (q_{11} - q_{12})(P_{xx} - P_{yy}). \quad (10)$$

代入 § 14.4(31) 式,得出从此片出射的两个波之间的位相差 δ :

$$\delta = \frac{\pi h}{\lambda} n_x^3 (q_{11} - q_{12})(P_{xx} - P_{yy}). \quad (11)$$

因而位相差正比于 $P_{xx} - P_{yy}$, 它表示在对 x 和 y 方向倾斜 45° 的平面上的切应力的两倍。在这种情况下,只有一个有关的应力-光学常数,即 $q_{11} - q_{12}$ 。

由此得出,如果观察放在两个正交的尼科耳棱镜之间的受到应力的玻璃片或透明塑料片,则会看到亮暗条纹,这些条纹是切应力等值线。这类“应力图样”如图 14.27 所示。只有当图样任一给定区域中应力系统的主轴与透过尼科耳棱镜的振动方向成 45° 时,才看到该区域中极大强度的条纹。当应力主轴与透过尼科耳

棱镜的方向平行时，条纹消失，视场变黑；因而应力系统的轴方向可以通过旋转两个正交尼科耳棱镜来确定，而切应力的数值可以从条纹的序得出。这种方法可用来研究工程结构中的应力；结构的模型用适当的塑料制成，用刚才描述过的方法直接观察压力效应。用这种方法常常避免了冗长的计算¹⁾。

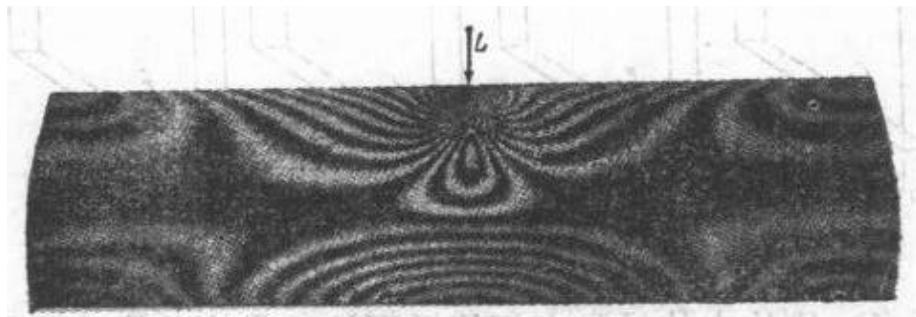


图 14.27 在集中负荷的作用下横梁的应力图样。负荷的位置用 L 表示，两端(未示出)被夹紧

§ 14.5.2 形式双折射

晶体的双折射性质可以用组成晶体分子的电各向异性来说明。然而，双折射可以由尺度上比分子大得多的各向异性产生，即此时有同样的光学各向同性物质颗粒有序排列，它们的大小比分子大很多而比波长小很多。于是我们谈到了形式双折射 (form birefringence)。

根据光学测量常常可得到产生形式双折射的亚微观颗粒的信息。我们将通过研究形状为薄平行片的有规则的颗粒集合这种有些理想化的情况来说明这种方法的原理。设 t_1 是每一片的厚度， t_2 是相邻两片间隔的宽度(图 14.28)。又设 ϵ_1 是每一片的介电常数， ϵ_2 是这些片浸没在其中的媒质的介电常数。

设一平面单色波入射到此集合上，首先假定它的电矢量与这些片垂直，如果设片表面的线度比波长大得多而厚度 t_1 和 t_2 比波

1) 对于这种方法的充分论述，例如见 E. G. Coker and L. N. G. Filon, *A Treatise On Photoelasticity* (Cambridge University Press, 1931)，或 M. M. Frocht, *Photoelasticity*, Vol. I (1941), Vol. II (1948), (New York, John Wiley)。

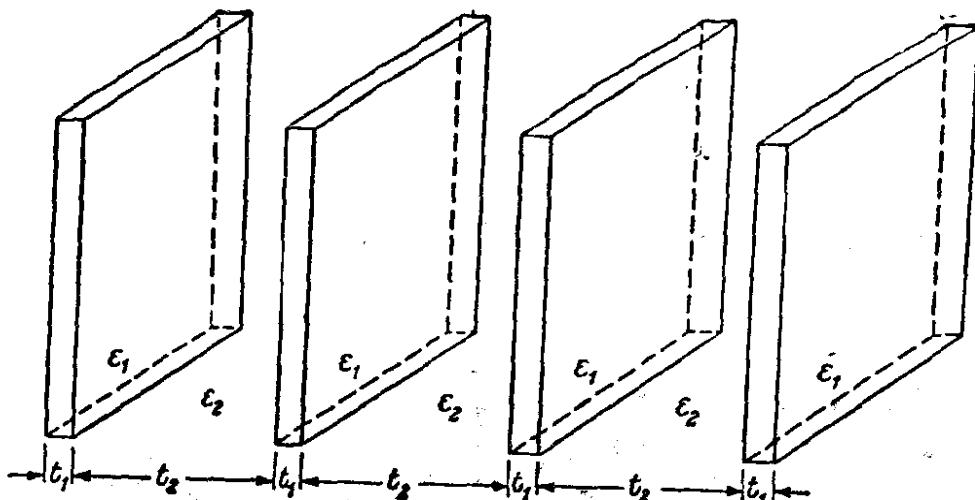


图 14.28 薄平行片的有规则集合

长小得多，则片内的场和空间的场可认为是均匀的。而且，根据 § 1.1.3，电位移的法向分量经过表面时必连续，在表面处，媒质的特性突然改变。因而电位移在片内和在空间必有相同的 \mathbf{D} 值。如果 \mathbf{E}_1 和 \mathbf{E}_2 是相应的电场，则

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_1}, \quad \mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_2}, \quad (12)$$

总体积内的平均场 \mathbf{E} 为

$$\mathbf{E} = \frac{t_1 \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_1} + t_2 \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_2}}{t_1 + t_2}. \quad (13)$$

因此，有效介电常数 ϵ_{\perp} 为

$$\epsilon_{\perp} = \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{E}} = \frac{(t_1 + t_2)\epsilon_1\epsilon_2}{t_1\epsilon_2 + t_2\epsilon_1} = \frac{\epsilon_1\epsilon_2}{f_1\epsilon_2 + f_2\epsilon_1}, \quad (14)$$

式中 $f_1 = t_1/(t_1 + t_2)$, $f_2 = t_2/(t_1 + t_2) = 1 - f_1$ 分别是这些片和周围媒质所占体积与总体积之比。

其次，设入射场的电矢量与这些片平行。根据 § 1.1.3，电矢量的切向分量经过不连续表面时是连续的，因此在这种情况下电场在片内和在空间将有相同的 \mathbf{E} 值。在这两个区域内的电位移为

$$\mathbf{D}_1 = \epsilon_1 \mathbf{E}, \quad \mathbf{D}_2 = \epsilon_2 \mathbf{E}, \quad (15)$$

因此,平均电位移 D 为

$$D = \frac{t_1 \epsilon_1 E + t_2 \epsilon_2 E}{t_1 + t_2}. \quad (16)$$

所以现在有效介电常数由下式给出:

$$\epsilon_{\parallel} = \frac{D}{E} = \frac{t_1 \epsilon_1 + t_2 \epsilon_2}{t_1 + t_2} = f_1 \epsilon_1 + f_2 \epsilon_2. \quad (17)$$

因为有效介电常数对于所有平行于这些片的方向都相同,但对于垂直于这些片的方向则有所不同,所以此集合的表现如同光轴垂直于片的平面的单轴晶体。 $\epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp}$ 这一差值总是正的,因为根据(14)和(17)式,

$$\epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp} = \frac{f_1 f_2 (\epsilon_1 - \epsilon_2)^2}{f_1 \epsilon_2 + f_2 \epsilon_1} \geq 0. \quad (18)$$

寻常波的电矢量垂直于光轴,即平行于片平面。(18)式意味着此集合的表现总是如同一个负单轴晶体(参看 § 14.3.2)。利用折射率表示,(18)式可写成

$$n_e^2 - n_o^2 = - \frac{f_1 f_2 (n_1^2 - n_2^2)^2}{f_1 n_2^2 + f_2 n_1^2}. \quad (19)$$

对于形状较不理想化的颗粒集合,计算自然更加复杂¹⁾。

一种有重要实际意义的情况是平行同类细圆杆的集合。维纳²⁾已证明,如果这些杆占总体积的很小部分($f_1 \ll 1$),则代替(19)式,有

$$n_e^2 - n_o^2 = \frac{f_1 f_2 (n_1^2 - n_2^2)^2}{(1 + f_1) n_2^2 + f_2 n_1^2}. \quad (20)$$

因此,这种集合的表现如同一个正单轴晶体,其光轴与杆轴平行。

形式双折射的观察在生物显微术中是有用的。观察所得差值的符号表明颗粒的形状更接近于杆还是更接近于片,如果 n_1 和 n_2

1) 一般的论述见 O. Wiener, *Abh. Sächs. Ges. Akad. Wiss., Math.-Phys. Kl.* No. 6. 32 (1912), 575. 与椭球颗粒有关的公式也见于 W. L. Bragg and A. B. Pippard, *Acta Cryst.*, 6 (1953), 865.

2) 上述引文中 581 页,瑞利也计算过平行圆柱长方阵列的主介电常数,见 *Phil. Mag.*, (5), 34 (1892), 481, 只要折射率 n_1 与 n_2 之差很小,即使 f_1 的值不比 1 小很多,(20)式与他的结果仍然一致。

是已知的，则有可能根据(19)式(20)式估计颗粒所占体积百分比。为了区别颗粒物质中的形式双折射和固有双折射，可改变媒质的折射率 n_2 ；当 $n_2 = n_1$ 时形式双折射将消失，而固有双折射不受 n_2 变化的影响。如果两种双折射都存在，则 $|n_e^2 - n_o^2|$ 随 n_2 变化的图形将在 $n_2 = n_1$ 处有一极小值，但不为零。

产生形式双折射的颗粒有序化可以是永久的或半永久的，例如在烟草斑纹病毒晶体中¹⁾，或者，它也可以是悬浮在液体中的同类颗粒的暂时有序化。如果颗粒是无规取向的，则液体中同类颗粒的悬浮呈现光学各向同性，当液体稳定时通常是这种情况；然而，如果使液体流动，则颗粒有排列在一特定方向上的趋势，因此这种集合的表现如同一个晶体。把悬浮液放在两同轴圆筒之间，其一旋转而另一固定，光沿着平行于圆筒轴的方向传播，观察放在两个正交的尼科耳棱镜之间的液体，就可以看到这种效应²⁾。这种现象最早被麦克斯韦³⁾观察到，它有助于研究液体越过障碍物的流动，给出关于速度梯度的方向和大小的信息。

§ 14.6 吸 收 晶 体

§ 14.6.1 光在吸收的各向异性媒质中的传播

到此为止已讨论过的晶状媒质的光学性质都是用介电张量 ϵ_{kl} 表征的。为了描述不仅是各向异性的而且是有吸收的媒质，必须另外再引入电导率张量 σ_{kl} 。这两个张量的主轴方向一般不相同，因此光在这种媒质中传播的理论相当复杂。然而对于较高对称类（至少是斜方对称），这两个张量的主轴方向重合，我们将限于

1) 参看 M. H. F. Wilkins, A. R. Stokes, W. E. Seeds, and G. Oster, *Nature*, **166** (1950), 127—9.

2) 根据这种测量确定颗粒取向的讨论，见 P. Boeder, *Z. f. Phys.*, **75** (1932), 258，和 J. T. Edsall, *Advances in Colloidal Science*, Vol. I, edited by E. O. Kraemer (New York, Interscience Publishers Inc., 1942), p. 269.

3) J. C. Maxwell, *Proc. Roy. Soc.*, **22** (1873), 46. 也见于他的 *Collected Papers*, Vol. 2 (Cambridge University Press, 1890), 379.

注意这类晶体,因为它们能说明一般理论具有的基本特征。于是,只须用复介电常数 $\hat{\epsilon}_x$, $\hat{\epsilon}_y$ 和 $\hat{\epsilon}_z$ 代替实介电常数 ϵ_x , ϵ_y 和 ϵ_z 。我们将看到,只要所有依赖于 $\hat{\epsilon}_x$, $\hat{\epsilon}_y$ 和 $\hat{\epsilon}_z$ 的量都假定是复数,前面所有的晶体光学公式在形式上都保留下来。

从导电媒质的麦克斯韦方程即

$$\operatorname{curl} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \operatorname{curl} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}} \quad (1)$$

出发,并考虑一个平面阻尼波的传播。用复数表示,矢量 \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{H} 和 \mathbf{j} 都各自正比于

$$\exp \left[i\omega \left(\frac{\hat{n}}{c} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}) - t \right) \right].$$

与 § 14.2(3)式类似,得出下述方程:

$$\hat{n}\mathbf{s} \times \mathbf{H} = -\mathbf{D} + \frac{4\pi}{i\omega} \mathbf{j}, \quad \hat{n}\mathbf{s} \times \mathbf{E} = \mathbf{B}. \quad (2)$$

令 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, 并在这两个方程中消去 \mathbf{H} , 得出

$$\mu \left[\mathbf{D} + \frac{4\pi i}{\omega} \mathbf{j} \right] = \hat{n}^2 [\mathbf{E} - \mathbf{s}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{E})]. \quad (3)$$

如果取坐标轴在主介电张量的方向上(根据我们的假定,它们与电导率张量的方向重合),则有

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_x E_x, & D_y &= \epsilon_y E_y, & D_z &= \epsilon_z E_z, \\ j_x &= \sigma_x E_x, & j_y &= \sigma_y E_y, & j_z &= \sigma_z E_z. \end{aligned} \quad \} \quad (4)$$

把(4)式代入(3)式,并引入复介电常数

$$\hat{\epsilon}_k = \epsilon_k + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_k, \quad (k = x, y, z) \quad (5)$$

(3)式变为

$$\mu \hat{\epsilon}_k E_k = \hat{n}^2 [E_k - s_k (\mathbf{E} \cdot \mathbf{s})]. \quad (6)$$

此式与 § 14.2(18)式形式上相同,其中实常数 ϵ_k 和 n 用复常数 $\hat{\epsilon}_k$ 和 \hat{n}_k 代替。把(6)式重写为下述形式:

$$E_k = \frac{\hat{n}^2 s_k (\mathbf{E} \cdot \mathbf{s})}{\hat{n}^2 - \mu \hat{\epsilon}_k}, \quad (7)$$

通过与 § 14.2 中同样的论证(或简单地利用形式替换 $\epsilon_k \rightarrow \hat{\epsilon}_k$,

$n \rightarrow \hat{n}$), 得出菲涅耳方程

$$\frac{s_x^2}{\hat{n}^2 - \frac{1}{\mu\hat{\epsilon}_x}} + \frac{s_y^2}{\hat{n}^2 - \frac{1}{\mu\hat{\epsilon}_y}} + \frac{s_z^2}{\hat{n}^2 - \frac{1}{\mu\hat{\epsilon}_z}} = 0. \quad (8)$$

引入复速度

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{\mu\hat{\epsilon}}} = \frac{c}{\hat{n}}, \quad v_x = \frac{c}{\sqrt{\mu\hat{\epsilon}_x}} = \frac{c}{\hat{n}_x}, \quad (9)$$

等等, 可再次把菲涅耳方程写成 § 14.2(24)式的形式:

$$\frac{s_x^2}{v_p^2 - v_x^2} + \frac{s_y^2}{v_p^2 - v_y^2} + \frac{s_z^2}{v_p^2 - v_z^2} = 0. \quad (10)$$

这些关系式严格类似于无吸收晶体那些关系式, 然而它们的物理解释稍有不同. 由(8)式或(10)式, 再次得出 $\hat{n}(s)$ 的二次方程, 即得出相应于每个传播方向 s 的两个折射率和两个主振动 D' 和 D'' . 由(7)式看出, 比值 $D_x:D_y:D_z$ 是复数, 因此主振动一般不再是线振动, 而是椭圆振动. 还有一个差别是电位移矢量不再垂直于波法线 s . 因为用 s 点乘(2)式第一式得出

$$s \cdot D = \frac{4\pi}{i\omega} s \cdot j = \frac{4\pi}{i\omega} \left[\frac{\sigma_x}{\epsilon_x} s_x D_x + \frac{\sigma_y}{\epsilon_y} s_y D_y + \frac{\sigma_z}{\epsilon_z} s_z D_z \right], \quad (11)$$

(11)式右边一般不为零. 然而, 如果比值 $4\pi\sigma_k/\omega\epsilon_k$ 比 1 小很多, 则 D 在 s 方向上的分量将比 D 本身小很多.

如果假定吸收很小, 即不包括金属而只考虑某种程度上透明的物质, 则进一步的分析就相当简化了. 我们将限于讨论这种情况. 形式上说, 弱吸收意味着衰减指数 κ 的二次幂与 1 相比可以忽略. 因此利用(9)式可以写出

$$\left. \begin{aligned} \hat{n} &= n(1 + i\kappa), \quad \hat{n}^2 = n^2(1 + 2i\kappa), \\ v_p &= \frac{c}{n(1 + i\kappa)} = v_p(1 - i\kappa), \quad v_p^2 = v_p^2(1 - 2i\kappa), \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

以及带下标 x , y 和 z 的类似表达式, 例如

$$\hat{n}_x = n_x(1 + i\kappa_x), \quad v_x = c/\hat{n}_x = v_x(1 - i\kappa_x), \text{ 等等.}$$

又

$$\mu\hat{\epsilon}_k = \hat{n}_k^2 = n_k^2(1 + 2i\kappa_k) = \mu\epsilon_k(1 + 2i\kappa_k), \quad (k = x, y, z) \quad (13)$$

与(5)式比较,得出

$$\kappa_k = \frac{2\pi}{\omega} \frac{\sigma_k}{\epsilon_k}. \quad (14)$$

回到菲涅耳方程(10)式,把实部和虚部分开。(10)式的一个典型项为

$$\begin{aligned} \frac{s_x^2}{\theta_p^2 - \theta_x^2} &= \frac{s_x^2}{v_p^2 - v_x^2 - 2i[\kappa v_p^2 - \kappa_x v_x^2]} \\ &= \frac{s_x^2}{v_p^2 - v_x^2} \left[1 + 2i \frac{\kappa v_p^2 - \kappa_x v_x^2}{v_p^2 - v_x^2} \right], \end{aligned} \quad (15)$$

由此得出(10)式的实部就是早先§14.2(24)式形式的菲涅耳方程。虚部给出下述方程:

$$\begin{aligned} \kappa v_p^2 \left\{ \frac{s_x^2}{(v_p^2 - v_x^2)^2} + \frac{s_y^2}{(v_p^2 - v_y^2)^2} + \frac{s_z^2}{(v_p^2 - v_z^2)^2} \right\} \\ = \frac{\kappa_x v_x^2 s_x^2}{(v_p^2 - v_x^2)^2} + \frac{\kappa_y v_y^2 s_y^2}{(v_p^2 - v_y^2)^2} + \frac{\kappa_z v_z^2 s_z^2}{(v_p^2 - v_z^2)^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

同前,对于任一给定的波法线方向 \mathbf{s} , 菲涅耳方程一般给出两个相速度 v_p 。现在这两个波携带的能量一部分被吸收了,(16)式给出了两个衰减指数的近似值。

我们可以把 κ 的公式表示为不同的形式。由(7), (4), (9)和(13)式,

$$\begin{aligned} D_k &= \frac{c^2}{\mu} \frac{\epsilon_k s_k (\mathbf{E} \cdot \mathbf{s})}{\hat{\epsilon}_k \theta_k^2 - \theta_p^2} \\ &= -\frac{c^2}{\mu} \frac{s_k (\mathbf{E} \cdot \mathbf{s})}{v_p^2 - v_k^2} \left[1 + 2i \frac{(\kappa - \kappa_k) v_p^2}{v_p^2 - v_k^2} \right], \quad (k = x, y, z), \end{aligned} \quad (17)$$

式中再次只保留到衰减指数的一次幂项。现在(17)式中的虚数项包含两个 κ 的差,在许多情况下可以忽略,这意味着忽略振动的椭圆性。在这种近似中,属于任一给定波法线 \mathbf{s} 的两个 \mathbf{D} 矢量的方向与具有同一(实)主介电常数的无吸收晶体相同。因此有

$$\frac{s_k^2}{(v_p^2 - v_k^2)^2} = \left(\frac{\mu}{c^2} \right)^2 \frac{D_k^2}{(\mathbf{s} \cdot \mathbf{E})^2}, \quad (18)$$

并且(16)式可写为

$$\kappa v_p^2 = \frac{\kappa_x v_x^2 D_x^2 + \kappa_y v_y^2 D_y^2 + \kappa_z v_z^2 D_z^2}{D^2}. \quad (19)$$

随着 v_p 趋近于主速度 v_k 之一，这个公式显然会不成立，因为我们所忽略的(17)式中的虚部在分母中包含差值 $v_p^2 - v_k^2$ (参看 § 14.6.3 末的评论).

因为属于一给定波法线方向 s 的两个系数 κ' 和 κ'' 一般是不同的，所以这两个波被吸收的强度不同. 这两个系数可能依赖于频率，并且按不同的方式随频率变化，因此，如果白光入射到晶体上，则晶体一般将出现颜色，并且这颜色将取决于入射光的振动方向. 这种现象通称为多向色性；在单轴晶体的情况下，也称为二向色性；在双轴晶体的情况下称为三向色性¹⁾.

对于单轴晶体 [$\hat{\epsilon}_x = \hat{\epsilon}_y = \hat{\epsilon}_o, \hat{\epsilon}_z = \hat{\epsilon}_e$ ；又 $\kappa_x = \kappa_y = \kappa_o, \kappa_z = \kappa_e$]，关系式采取更简单形式. 与无吸收的单轴晶体的情况一样，菲涅耳方程分解为两个因子(参看 § 14.3.2)，给出

$$\left. \begin{aligned} \delta_p'^2 &= \delta_o^2, \\ \delta_p''^2 &= \delta_o^2 \cos^2 \theta + \delta_e^2 \sin^2 \theta, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

同前，式中 θ 是波法线 s 与光轴的夹角. 将实部和虚部分开，第一个方程给出

$$v'_p = v_o, \quad \kappa'_p = \kappa_o, \quad (21a)$$

第二个方程给出

$$v''_p^2 = v_o^2 \cos^2 \theta + v_e^2 \sin^2 \theta, \quad \kappa_p'' v''_p^2 = \kappa_o v_o^2 \cos^2 \theta + \kappa_e v_e^2 \sin^2 \theta, \quad (21b)$$

式中再次忽略了包含衰减指数二次幂的项. 我们看到，寻常波的吸收对于所有的传播方向都是相同的.

对于双轴晶体，关系式复杂得多了. 我们将限于注意有意义的特殊情况. 如同 § 14.3.3，首先考虑 $s_x = 0$ 的那些传播方向. 于是与 § 14.3(6) 式类似，由菲涅耳方程(10)给出下述方程：

1) 这种术语是由下述事实得出的，对于单轴晶体有两个特征颜色，对于双轴晶体有三个特征颜色. 但有些作者把二向色物质指为吸收系数依赖于入射光偏振状态的任何物质.

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_p'^2 &= \vartheta_x^2, \\ \vartheta_p''^2 &= \vartheta_z^2 s_y^2 + \vartheta_y^2 s_z^2. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

将实部和虚部分开, 得出相应于波法线方向 $\mathbf{s}(o, s_y, s_z)$ 的两个速度和两个衰减指数:

$$v_p'^2 = v_x^2, \quad \kappa_p' = \kappa_x, \quad (23a)$$

和

$$v_p''^2 = v_z^2 s_y^2 + v_y^2 s_z^2, \quad \kappa_p'' v_p''^2 = \kappa_z v_z^2 s_y^2 + \kappa_y v_y^2 s_z^2. \quad (23b)$$

当然, 对于垂直于 y 和 z 方向的传播, 类似的关系式也成立.

一般不存在使两根 ϑ_p' 和 ϑ_p'' 相等的实值 s_y 和 s_z . 可找出实相速度 v_p' 和 v_p'' 相等的方向, 但相应的衰减指数 (κ' 和 κ'') 一般是不同的.

其次考虑沿与波法线光轴偏离不太大的方向的传播. 为了应用(19)式, 必须确定 \mathbf{D}' 和 \mathbf{D}'' 的方向. 利用 § 14.2.3 中确定的结果可以做到这一点, 根据那里的结果, 两个振动平面 $(\mathbf{D}', \mathbf{s})$ 和 $(\mathbf{D}'', \mathbf{s})$ 等分平面 $(\mathbf{N}_1, \mathbf{s})$ 和 $(\mathbf{N}_2, \mathbf{s})$ 之间的夹角, 其中 \mathbf{N}_1 和 \mathbf{N}_2 是波法线的轴. 设 ϕ 是平面 $(\mathbf{N}_1, \mathbf{s})$ 与 xz 平面(它含两个光轴)的夹角. 因为平面 $(\mathbf{N}_2, \mathbf{s})$ 近似平行于 xz 平面, 由刚引用过的定理得出, \mathbf{D}' 与 xz 平面的夹角近似为 $\phi/2$ (见图 14.29). 因此 \mathbf{D}' 在 xz 平面内的分量为 $D' \cos(\phi/2)$. 为了得出 x 分量, 必须把这个矢量投影于 x 轴上. 因为 \mathbf{s} 和 \mathbf{N}_1 近似地重合, 所以投影角近似地等于光轴 \mathbf{N}_1 与 z 轴的夹角, 结果(见图 14.30) $D'_x = D' \cos \beta \times \cos(\phi/2)$. 用类似的方法可得出其他分量. 因此

$$\left. \begin{aligned} D'_x &= D' \cos \frac{\phi}{2} \cos \beta, \\ D'_y &= D' \sin \frac{\phi}{2}, \\ D'_z &= -D' \cos \frac{\phi}{2} \sin \beta. \end{aligned} \right\} \quad (24a)$$

矢量 \mathbf{D}'' 与 \mathbf{s} 和 \mathbf{D}' 正交; 在(24a)式中用 $\phi/2 + \pi/2$ 代替 $\phi/2$, 即

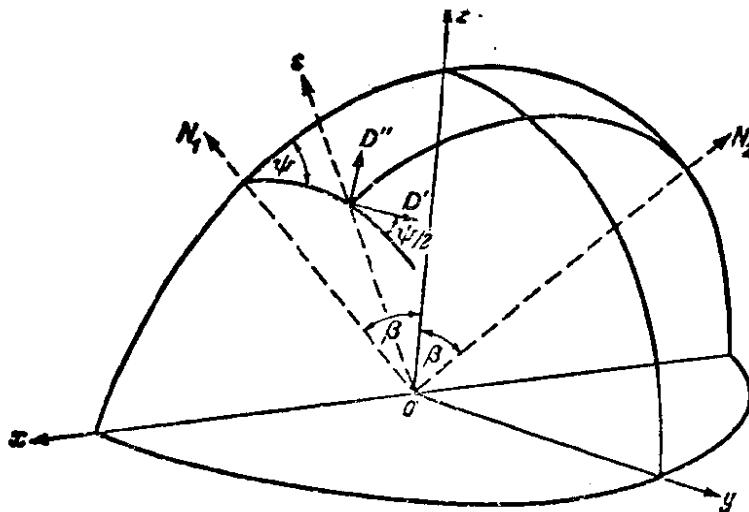


图 14.29 吸收晶体的理论图示

可得出它的分量为

$$D''_x = -D'' \sin \frac{\phi}{2} \cos \beta, \quad D''_y = D'' \cos \frac{\phi}{2}, \\ D''_z = D'' \sin \frac{\phi}{2} \sin \beta. \quad (24b)$$

把(24a)和(24b)式代入(19)式，又利用近似式 $\nu'_p = \nu''_p = \nu_y (\nu_x > \nu_y > \nu_z)$ ，因为我们限于讨论与光轴偏离不太远的方向，所以上述近似式可认为是合理的。因此得出所要求的衰减指数 κ' 和 κ'' ：

$$\left. \begin{aligned} \kappa' \nu_y^2 &= (\kappa_x \nu_x^2 \cos^2 \beta + \kappa_z \nu_z^2 \sin^2 \beta) \cos^2 \frac{\phi}{2} + \kappa_y \nu_y^2 \sin^2 \frac{\phi}{2}, \\ \kappa'' \nu_y^2 &= (\kappa_x \nu_x^2 \cos^2 \beta + \kappa_z \nu_z^2 \sin^2 \beta) \sin^2 \frac{\phi}{2} + \kappa_y \nu_y^2 \cos^2 \frac{\phi}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

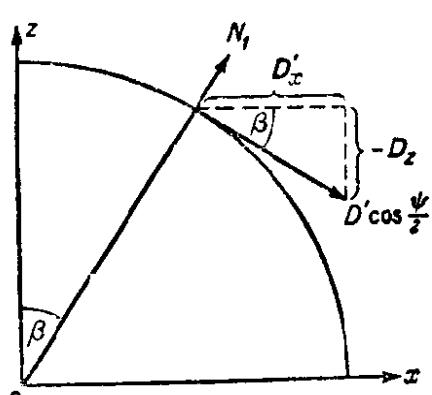


图 14.30 吸收晶体的理论图示

鉴于(19)式中包含的近似，当 s 紧密靠近光轴时，不能指望这些公式仍然有效。在波法线沿着光轴的极限情况下，角度 ϕ 是不确定的；为了得出相应的衰减指数，要回到菲涅耳方程。对于 xz 平面内 ($s_y = 0$) 的任一 s 方向，同(23)式一样，使实部和虚部分别相等，得出

$$\left. \begin{aligned} v_p'^2 &= v_y^2, \quad \kappa'_p = \kappa_y, \\ v_p''^2 &= v_x^2 s_z^2 + v_z^2 s_x^2, \quad \kappa'_p v_p''^2 = \kappa_x v_x^2 s_z^2 + \kappa_z v_z^2 s_x^2. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

特别是,对于光轴 $s_x = \sin \beta$, $s_z = \cos \beta$, 式中 β 是由 § 14.3(11) 式给出的两光轴之一与 z 轴的夹角. 又 $v_p' = v_p'' = v_y$, 如果又用 κ_{\perp} 代替 κ' , κ_{\parallel} 代替 κ'' , 则(26)式右边两个方程变为:

$$\left. \begin{aligned} \kappa_{\perp} &= \kappa_y, \\ \kappa_{\parallel} v_y^2 &= \kappa_x v_x^2 \cos^2 \beta + \kappa_z v_z^2 \sin^2 \beta. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

κ_{\perp} 是垂直于光轴平面偏振的 **D** 波的衰减指数, κ_{\parallel} 是在光轴平面内偏振的 **D** 波的衰减指数. 因而沿光轴方向传播的波的吸收依赖于它的振动方向.

把(27)式代入(25)式, 用衰减指数 κ_{\parallel} 和 κ_{\perp} 以及偏振方位角 ϕ 来表示 κ' 和 κ'' 是很方便的. 这就得出

$$\left. \begin{aligned} \kappa' &= \kappa_{\parallel} \cos^2 \frac{\phi}{2} + \kappa_{\perp} \sin^2 \frac{\phi}{2} = \frac{\kappa_{\parallel} + \kappa_{\perp}}{2} + \frac{\kappa_{\parallel} - \kappa_{\perp}}{2} \cos \phi, \\ \kappa'' &= \kappa_{\parallel} \sin^2 \frac{\phi}{2} + \kappa_{\perp} \cos^2 \frac{\phi}{2} = \frac{\kappa_{\parallel} + \kappa_{\perp}}{2} - \frac{\kappa_{\parallel} - \kappa_{\perp}}{2} \cos \phi. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

§ 14.6.2 吸收晶片的干涉图

现在扼要地讨论垂直于波法线光轴切成的吸收晶片的干涉效应. 其理论与无吸收晶片差别不很大, 唯一的重要区别是两条干涉光线被吸收的强度不同, 结果条纹可见度降低. 其他的结论尤其是位相差的表达式在我们的近似中保持不变, 因为传播的几何定律同以前一样.

在吸收媒质中传播距离 l 后, 根据 § 13.1(19)式, 平面波的振幅按因子 $\exp\{-\omega n k l / c\}$ 减小. 因此采用与 § 14.4.3 中相同的安排和记号(参看图 14.20), 由晶片出射的主振动振幅由下式给出[参看 § 14.4(13)式]

$$OB = E e^{-\frac{\omega \kappa'}{v'} l} \cos \phi, \quad OC = E e^{-\frac{\omega \kappa''}{v'} l} \sin \phi. \quad (29)$$

这里 $l = h / \cos \theta_2$, h 是晶片的厚度, θ_2 是晶片中的波法线与轴的夹角, 假定两个波在晶片中的两条路程相同; 如果限于讨论接近

光轴的波法线方向,就这样近似。在同样的近似下,可取(29)式中的 $\nu' = \nu'' = \nu_y$ 。令

$$u = \frac{\omega l}{\nu_y} \sim \frac{\omega l}{\nu'} \sim \frac{\omega l}{\nu''} \quad (30)$$

是方便的。以此替换,则

$$OB = E e^{-\kappa' u} \cos \phi, OC = E e^{-\kappa'' u} \sin \phi. \quad (31)$$

代替§14.4(14)式,现在得出,通过起偏振器和检偏振器后,波振幅的表达式为(参看图14.20)

$$\begin{aligned} OF &= E e^{-\kappa' u} \cos \phi \cos(\phi - \chi), \\ OG &= E e^{-\kappa'' u} \sin \phi \sin(\phi - \chi). \end{aligned} \quad (32)$$

引至干涉的光的总强度为

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \delta, \quad (33)$$

式中,除去非必要的比例因子外, $I_1 = OF^2$, $I_2 = OG^2$, 位相差 δ 的计算同前。

现在考察某些有意义的特殊情况。

(a) 单轴晶体

在这种情况下,有

$$\left. \begin{array}{l} \nu_x = \nu_y = \nu_o, \quad \nu_z = \nu_e, \\ \kappa_x = \kappa_y = \kappa_o, \quad \kappa_z = \kappa_e. \end{array} \right\} \quad (34)$$

非常光线的振动方向在主平面内,即在含波法线与光轴的平面内。因此,可以使非常波的 D 矢量与起偏振器的方向 OP 的夹角与(32)式中的角 ϕ 等同。然而,为了与(21a)和(21b)式保持一致,必须将 κ' 和 κ'' 互换。因两个尼科耳棱镜正交($\chi = \pi/2$),由(32)式,有

$$OF = E e^{-\kappa' u} \cos \phi \sin \phi, \quad OG = -E e^{-\kappa'' u} \sin \phi \cos \phi, \quad (35)$$

由(33)式得出

$$I = \frac{E^2}{4} \sin^2 2\phi \{e^{-2\kappa' u} + e^{-2\kappa'' u} - 2e^{-(\kappa' + \kappa'')u} \cos \delta\}. \quad (36a)$$

对于光轴, $\kappa' = \kappa''$, $\delta = 0$, (36a)式化为

$$I_0 = 0; \quad (36b)$$

因此干涉图样中央(相应于光轴的一点)是暗的。由 $\sin 2\phi = 0$ 即 $\phi = 0$ 和 $\phi = \pi/2$ 给出的暗的同消色线横跨视场。因而同消色线具有十字形，它的臂平行于起偏振器和检偏振器的方向(参看 § 14.4.4)。强度的极小值和极大值为

$$\left. \begin{aligned} I_{\text{极小}} &= \frac{E^2}{4} \sin^2 2\phi \{ e^{-2\kappa' u} + e^{-2\kappa'' u} - 2e^{-(\kappa' + \kappa'')u} \}, \\ I_{\text{极大}} &= \frac{E^2}{4} \sin^2 2\phi \{ e^{-2\kappa' u} + e^{-2\kappa'' u} + 2e^{-(\kappa' + \kappa'')u} \}, \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

因此，条纹可见度 \mathcal{V} 为

$$\mathcal{V} = \frac{I_{\text{极大}} - I_{\text{极小}}}{I_{\text{极大}} + I_{\text{极小}}} = \frac{2e^{-(\kappa' + \kappa'')u}}{e^{-2\kappa' u} + e^{-2\kappa'' u}} = \frac{1}{\cosh\{(\kappa' - \kappa'')u\}}. \quad (38)$$

因而 κ' 与 κ'' 之差越小，可见度越大。因为对于接近光轴的波法线方向(θ 很小)， κ' 和 κ'' 接近相等，所以只要有足够的光透过晶片，在这个区域内条纹将清晰可见。如果 κ_o 比 κ_e 小得多(例如镁铂氯化物)，则在接近光轴处将有相对地小的吸收，中央条纹将是亮的。如果 κ_o 比 κ_e 大得多(例如电气石)，则在接近光轴处的吸收相对将是最弱的，中央条纹是暗的。在这两种情况下，可见度从场的中央向边缘下降。如果 κ_o 和 κ_e 接近相等，干涉图除了可见度随着与中央处的距离增加而下降以外，与无吸收晶体的干涉图类似。

(b) 双轴晶体

我们再一次限于两个尼科耳棱镜正交的情况($\chi = \pi/2$)，并假定晶片表面垂直于光轴之一(N_1)。只考虑传播方向接近这个轴的波。

设 N_1, N_2 和 Q 是两光轴和波法线与晶片出射表面的交点。又设 ψ 是直线 N_1Q 与 N_1N_2 的夹角， α 是光轴平面与透过起偏振器 P 的振动平面之间的夹角。

如果 $N_1Q \ll N_1N_2$ ，则 D' 振动方向与 N_1N_2 的夹角近似为

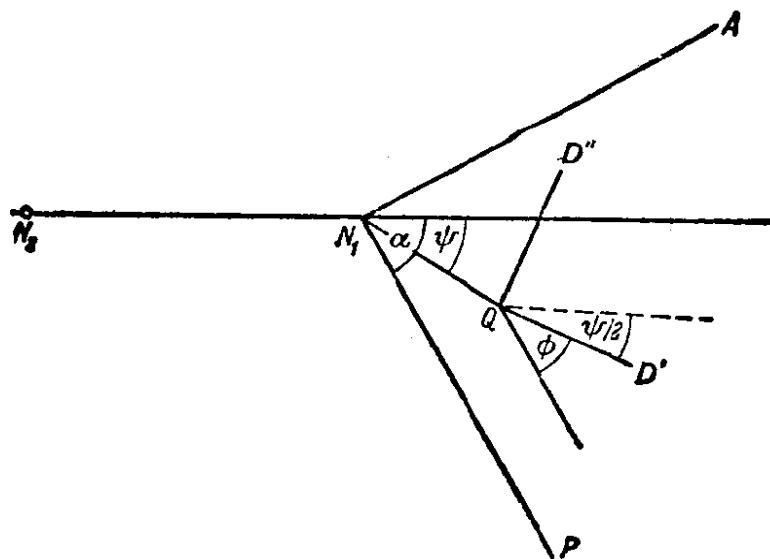


图 14.31 吸收的双轴晶片上干涉理论的图示

$\psi/2$, 因此 D' 与方向 OP 之间的夹角 ϕ 近似为(见图 14.31)

$$\phi = \alpha - \frac{\psi}{2}. \quad (39)$$

所以, 导至干涉的波的振幅(32)式为

$$OF = E \cos \left(\alpha - \frac{\psi}{2} \right) \sin \left(\alpha - \frac{\psi}{2} \right) e^{-\kappa' u},$$

$$OG = -E \sin \left(\alpha - \frac{\psi}{2} \right) \cos \left(\alpha - \frac{\psi}{2} \right) e^{-\kappa'' u}. \quad (40)$$

因此强度为

$$I = \frac{E^2}{4} \sin^2 (2\alpha - \psi) \{ e^{-2\kappa' u} + e^{-2\kappa'' u} - 2e^{-(\kappa' + \kappa'')u} \cos \delta \}. \quad (41a)$$

对于沿光轴方向传播的波, ψ 是不确定的。在这种特殊情况下, 我们把振动分解为平行和垂直于含光轴平面的分量, 即令 $\psi = 0$, 并用 κ_{\parallel} 和 κ_{\perp} 代替(41a)式中的 κ' 和 κ'' , [参看(28)式]。又 $\delta = 0$, 因此代替(41a)式, 得出

$$I_0 = \frac{E^2}{4} \sin^2 2\alpha \{ e^{-\kappa_{\parallel} u} - e^{-\kappa_{\perp} u} \}^2. \quad (41b)$$

(41a) 式表明, 沿着 $\sin (2\alpha - \psi) = 0$ 的一条线, 强度为零, 这是主同消色线。而在无吸收晶体情况下同消色线通过相应于光轴的点, 现在情况不再是这样了, 除非如(41b)式所示, $\alpha = 0$ 或

$\alpha = \pi/2$, 即除非起偏振器的平面平行或垂直于含两光轴的平面.

由 $\cos \delta = 1$ 即 $\delta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ 给出的暗等色线是围绕相应于光轴的点的环. 仅当 κ' 和 κ'' 接近相等时, 由(38)式给出的条纹可见度才是看得见的. 根据(28)式, 当 ϕ 接近 $\pi/2$ 或 $-\pi/2$ 时就是如此.

让我们考虑当 δ 保持不变时强度如何随 ϕ 而变化. 如果把(28)式代入, 则(41a)式可写成下述形式:

$$I = \frac{E^2}{2} e^{-(\kappa_{\parallel} + \kappa_{\perp})u} \sin^2(2\alpha - \phi) \{ \cosh[(\kappa_{\parallel} - \kappa_{\perp})u \cos \phi] - \cos \delta \}. \quad (42)$$

当 $|\cos \phi|$ 最大时, 大括号中的项最大, 当 $|\cos \phi|$ 最小时, 大括号中的项最小. 因此, 当 $\phi = 0$ 和 $\phi = \pi$ 时, 强度极大, 当 $\phi = \pi/2$ 和 $-\pi/2$ 时, 强度极小. 因而除了暗同消色线 $\phi = 2\alpha$ 外, 视场还被一暗“刷”形跨过, 它的臂垂直于含光轴的平面¹⁾.

§ 14.6.3 二向色的起偏振器

前一节中已经讨论过偏振光通过吸收晶片的传播. 这里将讨论这种晶片对自然(非偏振)光的影响.

再次假定晶片表面垂直于波法线的光轴(如果是双轴晶片则垂直于光轴之一), 考虑在一个接近于光轴的方向上的传播. 一个自然光的平行光束可看作是由在垂直于传播方向的任何两个相互正交方向上偏振的两个互不相干的等振幅光束组成的[参看 § 10.8(56)式]. 选择晶体中主振动方向作为这两部分光束的振动方向. 如果 E 是进入晶片的两个部分光束中每一个的振幅, 则在晶片中传播距离 l 后, 它们的振幅为

$$E' = E e^{-\kappa' u}, \quad E'' = E e^{-\kappa'' u}, \quad (43)$$

同前, 式中 $u = \omega l / v_y$, 已假定光是准单色的, 平均频率为 ω , 因此

1) 利用(28)式, (44)式可写成

$$I = 2E^2 e^{-(\kappa_{\parallel} + \kappa_{\perp})u} \cosh \{(\kappa_{\parallel} - \kappa_{\perp})u \cos \phi\},$$

由上式看出, 当自然光通过晶片时, 不存在起偏振器和检偏振器, 暗刷形也出现.

总强度由下式给出：

$$I = I' + I'', \quad (44)$$

式中

$$I' = I_0 e^{-2\kappa' u}, \quad I'' = I_0 e^{-2\kappa'' u}, \quad (45)$$

以及 $I_0 = E^2$. 对于光轴方向, κ' 和 κ'' 必须用 κ_{\parallel} 和 κ_{\perp} 来代替.

我们看到, 当光在媒质中传播了距离 l 后, 这两个分量的振幅之比为 $\exp\{-(\kappa' - \kappa'')u\}$, 因此光已变为部分偏振的. 如果两个衰减指数差别很大, 则相当薄的一片物质就足以把入射的非偏振光束变换为接近线偏振的光束; 即晶片起着起偏振器的作用. 能起这类起偏振器作用的自然晶体的一个例子是电气石, 它对寻常光线的抑制比对非常光线强烈得多. 然而对于大部分波长来说, 它也吸收了非常光线相当大的一部分(见图 14.32), 因此它不适合于实际应用. 主要是由于兰特 (Land) (约 1932 年) 及其合

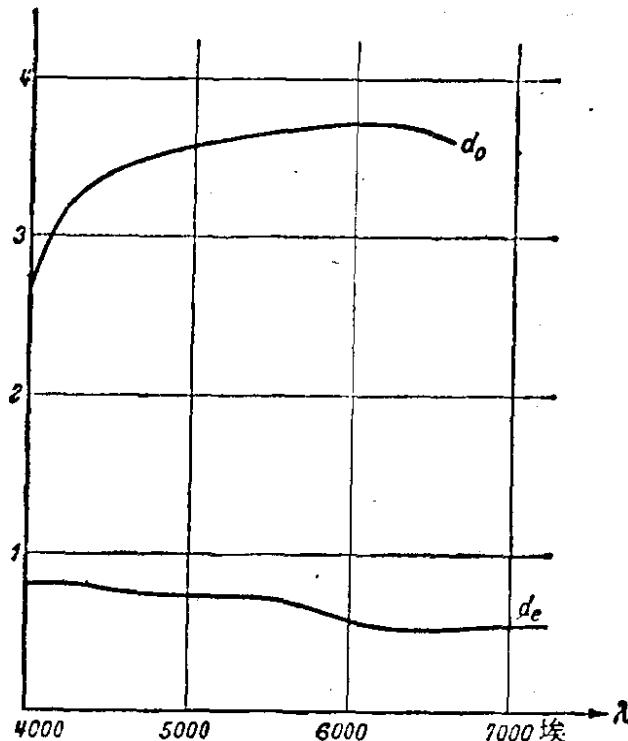


图 14.32 约 0.2 毫米厚与光轴平行方向成 24° 切开的黑电气石的二向色性, 光垂直于光轴入射

$$d = 4\pi(\log_{10}e)(n\kappa l/\lambda) \sim 5.5n\kappa l/\lambda.$$

[引自 E. H. Land and C. D. West 的论文, 发表在 *Colloid Chemistry*, Vol. 6, ed. J. Alexander (New York, Reinhold Publishing Corporation, 1946), 167.]

作者的研究成果,有可能制成人造的二向色物质,它们起着优良的起偏振器的作用。这些物质商业上通称为偏振片,它们不是单晶,而是有长链分子的有机聚合物片,经延伸或其他某种处理使这些分子几乎完全排成行¹⁾,并且有时染色。特别适合于这种用途的聚合物是人工制造的聚乙醇乙烯($-\text{CH}_2-\text{CHOH}-$)。²⁾图 14.33 中示出在定向的聚乙醇乙烯上碘的二向色性作为波长的函数。

良好的二向色起偏振器的吸收系数之比可高达 100:1。它可以使在某一方向上偏振的光约 80% 透过,而使在垂直于上述方向上偏振的光少于 1% 透过。可得到大片的这种起偏振的物质,工厂生产中使用机器制成宽 30 英寸而长度不定的片。在这方面,这些“偏振片”比尼科耳棱镜好,后者的尺寸因缺少大片光学质量良

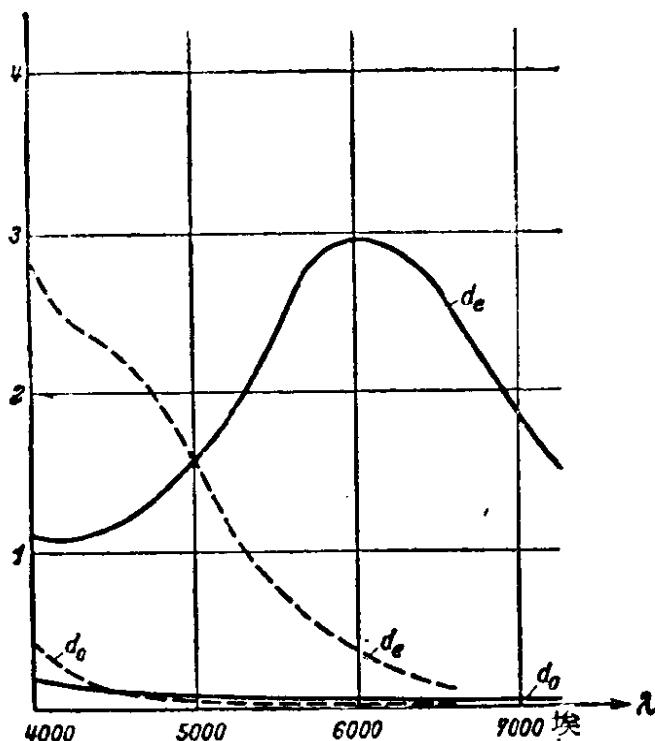


图 14.33 蓝(实线)和棕(虚线)的定向聚乙醇乙烯上碘的二向色性

$$d = 4\pi(\log_{10} e)(n\kappa l/\lambda) \sim 5.5 n\kappa l/\lambda$$

[引自 E. H. Land and C. D. West 的论文,发表在 *Colloid Chemistry*, Vol. 6, ed. J. Alexander (New York, Reinhold Publishing Corporation, 1946), 177.]

1) 关于二向色的起偏振器更充分的讨论,见图 14.32 和图 14.33 说明中所引论文,或 E. Land, *J. Opt. Soc. Amer.*, 41 (1951), 957.

好的方解石而受到限制。

最后，记住在本章的主要部分曾假定晶体中光的主振动的椭圆性可以忽略。这个假定当然不总是正确的。例如，可以证明，在每一个吸收晶体中存在四个方向，成对地位于光轴附近，它们均为圆偏振。然而，吸收越来越弱时，有明显椭圆性的区域就越来越限于这些特殊方向附近，这些方向本身趋于与光轴重合。考虑及此，有关现象的一般特征仍然保留，因此不需要深入讨论。自然，我们的分析没有揭示吸收晶体光学理论某些更细致的方面，对于这些方面的讨论必须参考其他著作¹⁾。

1) 例如，见 G. Szivessy, *Handbuch der Physik*, Vol. 20 (Berlin, Springer, 1928), 861—904.

附录1 变 分 法

经典物理学方程的一个普遍特征是它们可由变分原理导出。两个早期的例子是光学中的费马原理(1657年)和力学中的莫培督原理(1744年)。弹性方程,流体动力学方程和电动力学方程也可用这种方法表示。

然而,处理通常包含四个或更多个独立变量 $x, y, z, t \dots$ 的场方程时,由于偏微分方程很复杂,因此很少利用将解表示为某些积分的平稳值这一特性。在这些情况下,变分法唯一的根本优点在于导出一些守恒定律——例如能量守恒定律。在包含一个独立变量(力学中是时间,而几何光学中是光线长度)的一些问题中,情况很不相同。由此人们研究常微分方程组,结果弄清楚用变分法研究解的性质是很方便的。事实上,这种方法在每一个细节上都是通常几何光学的直接推广。它的近代表示法主要归功于希耳伯特(Hilbert),我们以1903年前后他在哥廷根(Göttingen)所作的未发表的讲义作为以下各节讨论的依据。这里仅介绍三维空间(x, y, z)的理论,但不难推广到更多维的情况。

§ 1 作为极值必要条件的欧勒方程

设 $F(u, v, x, y, z)$ 是对于所有五个变量都有直至二阶连续偏微商的一个给定函数。又设 C 是 x, y, z 空间内的任一曲线 $x = x(z), y = y(z)$ 。 x 和 y 的微商也假定直至二阶都连续。如果令

$$u = x', \quad v = y',$$

(撇号表示对 z 求微商),则积分

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x', y', x, y, z) dz \quad (1)$$

是曲线 C 的函数, 即两个函数 $x(z)$, $y(z)$ 的函数, 换句话说, 它是一个泛函. 变分法的基本问题是:

确定两个给定点 $P_1[x_1 = x(z_1), y_1 = y(z_1), z_1]$ 和 $P_2[x_2 = x(z_2), y_2 = y(z_2), z_2]$ 之间的曲线 C , 使沿这条曲线的积分为极值 (极小值或极大值).

这种曲线 C 称为致极曲线, 它必须满足的必要条件可通过简单的线性变分过程确定. 为此, 选择一个具有连续的一阶微商的函数 $\xi(z)$, 它在端点为零,

$$\xi(z_1) = \xi(z_2) = 0; \quad (2)$$

并且用 $x + \varepsilon\xi$ 代替致极曲线的 x 坐标而构成“变”曲线 C' , 其中 ε 是一个小的参量. 于是(1)式变为 ε 的函数,

$$I(\varepsilon) = \int_{z_1}^{z_2} F(x' + \varepsilon\xi', y', x + \varepsilon\xi, y, z) dz. \quad (3)$$

下面这个量

$$(\delta I)_x = \left(\frac{\partial I}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \xi' + \frac{\partial F}{\partial x} \xi \right) dz \quad (4)$$

称为对 x 的初级变分. 显然, 初级变分为零

$$(\delta I)_x = 0 \quad (5)$$

是极值的必要条件.

现在, 如果对(4)式的第一项作分部积分, 并用边界条件(2)式, 则得出

$$(\delta I)_x = \int_{z_1}^{z_2} \left(F_x - \frac{d}{dz} F_{x'} \right) \xi dz, \quad (6a)$$

式中 F_x 代表 $\partial F / \partial x$, 等等. 同样, 用 $y + \varepsilon\eta$ 代替 y 求出

$$(\delta I)_y = \int_{z_1}^{z_2} \left(F_y - \frac{d}{dz} F_{y'} \right) \eta dz. \quad (6b)$$

因 ξ 和 η 可在区间 $z_1 \leq z \leq z_2$ 内任意选择, 由(6a)和(6b)式得出, 条件 $(\delta I)_x = 0$ 和 $(\delta I)_y = 0$ 可以用两个微分方程的形式表示, 后者通称欧勒方程,

$$F_x - \frac{d}{dz} F_{x'} = 0, \quad (7a)$$

$$F_y - \frac{d}{dz} F_{y'} = 0. \quad (7b)$$

(7a)和(7b)是 $x(z)$ 和 $y(z)$ 的两个二阶微分方程。首项，即那些具有最高阶微商的项，完全写出如下：

$$F_{x'x''} + F_{x'y'}y'' + \dots = 0, \quad (8a)$$

$$F_{y'x''} + F_{y'y'}y'' + \dots = 0. \quad (8b)$$

只要相伴的行列式不为零，即

$$F_{uu}F_{vv} - F_{uv}^2 \neq 0, \quad (9)$$

则可对 x'' 和 y'' 解(8a)和(8b)式。我们假定这一条件在所涉及的整个五维区域内都成立。

两个二阶微分方程的解包含四个任意积分常数，因此，致极曲线构成一个四参数曲线族(∞^4 致极曲线)。

§ 2 希耳伯特独立积分与哈密顿-雅科毕方程

为了讨论这些致极曲线的特性，考虑另一个有关问题是方便的。将变量 u 和 v 看作 x, y, z 空间内的函数，

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z). \quad (10)$$

因此 $F[u(x, y, z), v(x, y, z), x, y, z]$ 以及它的偏微商 F_u, F_v 都是 x, y, z 的函数。现在选择一条曲线 $C[x = x(z), y = y(z)]$ ，并构成积分

$$S = \int_{z_1}^{z_2} \{F + (x' - u)F_u + (y' - v)F_v\} dz. \quad (11)$$

问题是这样的：找出保证 S 与曲线 C 的选择无关的函数 u, v ：因此 S 只是端点 P_1 和 P_2 的函数，其中 P_1 的坐标是 $x_1 = x(z_1)$, $y_1 = y(z_1)$, z_1 , P_2 的坐标是 $x_2 = x(z_2)$, $y = y(z_2)$, z_2 。 S 称为希耳伯特独立积分。

为了确定 u 和 v ，首先把(11)式改写为

$$S = \int_{P_1}^{P_2} (U dx + V dy + W dz), \quad (12)$$

式中

$$U = F_u, \quad V = F_v, \quad W = F - uF_u - vF_v. \quad (13)$$

众所周知, (12)式与曲线无关的必要且充分条件是分量为 U, V, W 的矢量 \mathbf{A} 的旋度分量均为零, 即

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0. \quad (14)$$

这是一组三个 $u(x, y, z)$ 和 $v(x, y, z)$ 的偏微分方程; 然而这些方程不完全独立, 因为对于任意的 U, V 和 W , 恒等式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

成立(对于任一矢量 \mathbf{A} , $\operatorname{div} \operatorname{curl} \mathbf{A} = 0$). 如果(14)式满足, 则 $Udx + Vdy + Wdz$ 是全微分,

$$dS = Udx + Vdy + Wdz, \quad (16)$$

因此 S 只是 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 的函数. 把 x_2, y_2, z_2 简写为 x, y, z , 则有

$$U = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad V = \frac{\partial S}{\partial y}, \quad W = \frac{\partial S}{\partial z}. \quad (17)$$

现在取一个任意曲面 $T(x, y, z) = 0$, 并在曲面的每一点 P_1 处选择矢量 (U, V, W) 垂直于曲面. 于是, 由(16)式, $dS = 0$, 所以

$$S(x, y, z) = S_1 \quad (18)$$

在曲面上为常数. 由(13)式中两个(相容的)方程可解出 u 和 v , 作为曲面上的函数,

$$u = u(U, V, x, y, z), \quad v = v(U, V, x, y, z). \quad (19)$$

其次, 如果解出带有这些边界值的微分方程(14), 则得到本问题的一个特解, 即在选定的曲面 $T(x, y, z) = 0$ 上 S 有一常数值 S_1 的一个解. 这个解可由函数 S 的单一偏微分方程确定. 将(19)式代入(13)式中余下的那个方程, 得到

$$W = W(U, V, x, y, z), \quad (20)$$

利用(17)式,上式变为

$$\frac{\partial S}{\partial z} = W \left(\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}, x, y, z \right); \quad (21)$$

这通称为本问题的哈密顿-雅科毕方程.

在曲面 $T(x, y, z) = 0$ 上有一给定值并满足(21)式的函数 $S(x, y, z)$ 代表本问题的一个解. 解出由(13)和(17)式结合得到的以下任意两个(相容的)方程,

$$F_u = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad F_v = \frac{\partial S}{\partial y}, \quad F - uF_u - vF_v = \frac{\partial S}{\partial z}, \quad (22)$$

就能找出使积分与路线无关的两个函数 u, v .

§ 3 致极曲线场

现在我们在 § 1 和 § 2 讨论过的两个问题之间建立联系. 这就是:

如果 $u(x, y, z)$ 和 $v(x, y, z)$ 是使得(11)式所定义的希耳伯特积分 S 与路线无关的两个函数, 则微分方程

$$x' = u(x, y, z), \quad y' = v(x, y, z) \quad (23)$$

具有二参量(∞^2)致极曲线集作为它们的解, 即它们是满足“横截”曲面 $S(x, y, z) = S_1$ 这一条件的致极曲线. 这里, 根据“横截性”, 意味着满足关系式

$$Udx + Vdy + Wdz = 0; \quad (24)$$

它表明由(13)式通过 u 和 v 定义的矢量 (U, V, W) 与曲面任一线元 dx, dy, dz 正交.

考虑 x, y, z 空间内的一个区域, 这个区域的每一点都有一个连续的并有连续一阶偏微商的矢量 (u, v) . 在这个给定区域上定义的这些矢量的集, 称为场. 在本文中谈及的是致极曲线场, 因而 $u(x, y, z), v(x, y, z)$ 称为场的斜率函数.

刚才阐述的定理的下述逆定理也成立: 如果 ∞^2 致极曲线场是按它横截给定曲面 $T(x, y, z) = 0$ 而构成的, 并且 u 和 v 是(23)式所定义的该场斜率函数, 则(11)式给出的希耳伯特积分 S

与路线无关.

在证明这些定理之前, 我们注意到下述推论:

设(11)式中的曲线 C 是场的一条致极曲线; 则希耳伯特积分(11)式化为变分积分 $I = \int_{z_1}^{z_2} F dz$. 因此, 在曲面 $S(x, y, z) = S_1$ 和 $S(x, y, z) = S_2$ 上每一对“对应点”之间(即同一条致极曲线横截 S_1 和 S_2 的点之间)得出的这个积分的值, 对于所有这样的点对都是相同的(见图 1). 曲面 $S(x, y, z) =$ 常数与 ∞^2 横截线可看作波阵面与几何光学光线的推广.

为了证明第一个定理, 考虑一条满足 (23) 式并且横截曲面 $S(x, y, z) = S_1$ 的固定曲线 C , 对它运用线性变分, 即用 $x + a\xi$ 代替 x , 用 $y + b\eta$ 代替 y , 其中 a 和 b 是很小的参量, ξ 和 η 是 z 的任意而确定的可微函数, 对于 z_1 和 z_2 , ξ 和 η 为零. 现在根据前提, 因 S 与路线无关, 所以

$$\left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial b}\right)_0 = 0, \quad (25)$$

式中下标 0 表示求微商后以 $a = b = 0$ 代入.

对 $F[u(x, y, z), v(x, y, z), x, y, z]$ 求微商, 得出

$$\frac{\partial F}{\partial a} = (F_u u_x + F_v v_x + F_z) \xi. \quad (26)$$

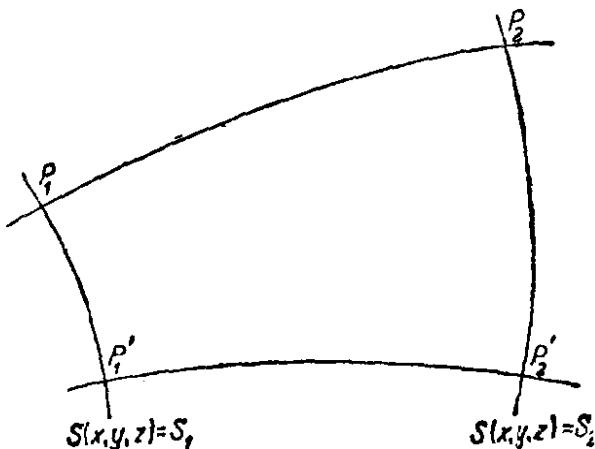


图 1 波阵面与几何光学光线概念的推广图示. 对于所有横截曲面 S_1 和 S_2 的致极曲线, 例如 $P_1P_2, P'_1P'_2, \dots$ 变分积分(1)式都具有一常数值

利用(26)式,由(11)式得出,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)_0 &= \int_{z_1}^{z_2} \left\{ (F_u u_x + F_v v_x + F_z) \xi + (\xi' - u_x \xi) F_u - v_x \xi F_v \right. \\ &\quad \left. + (x' - u) \frac{\partial F_u}{\partial a} + (y' - v) \frac{\partial F_v}{\partial a} \right\}_0 dz. \end{aligned} \quad (27)$$

因假定曲线满足(23)式,所以上式第二行中各项为零. 第一行中有些项相消了,得出

$$\left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)_0 = \int_{z_1}^{z_2} (F_z \xi + F_u \xi') dz, \quad (28)$$

或者作分部积分,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)_0 = \int_{z_1}^{z_2} \left(F_z - \frac{d}{dz} F_u \right) \xi dz, \quad (28a)$$

同样,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial b}\right)_0 = \int_{z_1}^{z_2} \left(F_y - \frac{d}{dz} F_v \right) \eta dz. \quad (28b)$$

(28a)和(28b)式右方是 I 的初级变分 [参看(6a)和(6b)式]. (25)式指出它们为零. 因此, 曲线 C 满足欧勒方程, 即它是一条致极曲线, 此定理就证明了.

为了证实逆定理, 我们组成一个横截一给定曲面 $T(x, y, z) = 0$ 的 ∞^2 致极曲线场 f_1 , 将它与另一个 ∞^2 致极曲线场 f_2 相比较. 后一个场按下述方法构成. 解哈密顿-雅科毕方程(21), 其边界条件是 $S(x, y, z)$ 在 $T(x, y, z) = 0$ 上为常数. 如果 u 和 v 由(22)式确定, 则其解可用积分(11)式表示. 因此, 根据刚才证实的定理, (23)式定义了一个横截 $T = 0$ 的致极曲线场 f_2 . 然而, 这两个场 f_1 和 f_2 必相同, 因为它们满足同样的微分方程及在 $T = 0$ 上同样的边界条件. 所以, 对于给定的场 f_1 , 积分 S 与路线无关.

§ 4 从哈密顿-雅科毕方程的解确定全部致极曲线

到目前为止, 我们只考虑了哈密顿-雅科毕方程一个 ∞^1 组解 $S(x, y, z) = \text{常数}$, 它们对应于一个 ∞^2 横截致极曲线集. 为了

得到全部 ∞^4 致极曲线, 必须考虑更大的一组解 S , 即 ∞^2 ; 这可通过绕一点转动曲面 $T = 0$ 并在每一种情形中取 $S(x, y, z) = S_1$ 得到。假定已经找到(21)式的包含两个参数 α 和 β 的“完全”解 $S(x, y, z, \alpha, \beta)$ 。与任一对 α 和 β 值相应的函数 S 可用(11)形式的积分表示, 适当选择两个函数 u 和 v : $u = u(x, y, z, \alpha, \beta)$, $v = v(x, y, z, \alpha, \beta)$, 则该积分与路线无关。因此, 不仅 S 而且 $\partial S / \partial \alpha$ 和 $\partial S / \partial \beta$ 也都与路线无关。现在, 因 $F = F[u(x, y, z, \alpha, \beta), v(x, y, z, \alpha, \beta), x, y, z]$, 所以

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = F_u u_\alpha + F_v v_\alpha, \quad (29)$$

由(11)式得出,

$$\left. \begin{aligned} S_\alpha &= \int_{z_1}^{z_2} \left\{ (x' - u) \frac{\partial F_u}{\partial \alpha} + (y' - v) \frac{\partial F_v}{\partial \alpha} \right\} dz, \\ S_\beta &= \int_{z_1}^{z_2} \left\{ (x' - u) \frac{\partial F_u}{\partial \beta} + (y' - v) \frac{\partial F_v}{\partial \beta} \right\} dz, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_u}{\partial \alpha} &= F_{uu} u_\alpha + F_{uv} v_\alpha, \\ \frac{\partial F_v}{\partial \alpha} &= F_{vu} u_\alpha + F_{vv} v_\alpha, \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

对于其他两个微商, 也有类似的表达式。

因积分(30)与路线无关, 由此得出表达式

$$\left. \begin{aligned} dS_\alpha &= \left[(x' - u) \frac{\partial F_u}{\partial \alpha} + (y' - v) \frac{\partial F_v}{\partial \alpha} \right] dz, \\ dS_\beta &= \left[(x' - u) \frac{\partial F_u}{\partial \beta} + (y' - v) \frac{\partial F_v}{\partial \beta} \right] dz \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

是全微分; 于是 S_α 和 S_β 只是端点 P_1 和 P_2 的函数, 因此, 由常数值 S_α 和 S_β 决定的那些曲面存在, 即

$$\frac{\partial S(x, y, z, \alpha, \beta)}{\partial \alpha} = A, \quad \frac{\partial S(x, y, z, \alpha, \beta)}{\partial \beta} = B, \quad (33)$$

A, B 是常数。所以这些方程必然代表下列微分方程

$$x' = u(x, y, z, \alpha, \beta), \quad y' = v(x, y, z, \alpha, \beta) \quad (34)$$

的解. 因在(33)式所确定的曲面上, $dS_\alpha = 0$, $dS_\beta = 0$, 由(32)式, 只要相伴的行列式不为零, 这就意味着(34)式成立. 这时根据(31)式, 该行列式可写成以下的形式:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_u}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_v}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial F_u}{\partial \beta} & \frac{\partial F_v}{\partial \beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_{uu} & F_{uv} \\ F_{vu} & F_{vv} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_\alpha & u_\beta \\ v_\alpha & v_\beta \end{vmatrix}. \quad (35)$$

上式右方第一个因子就是(9)式, 已假定它不为零. 而只有在(34)式对 α 和 β 无解的那些点处, 换句话说只有场在空间内不唯一的那些点处, 第二项才能为零. 如果除去这些情况, (34)式就代表 ∞^2 组微分方程, 每一组有 ∞^2 解; 因此所有这些合在一起必定与全部 ∞^4 致极曲线相同. 我们已证明了(33)式的解

$$x = x(z, \alpha, \beta, A, B), \quad y = y(z, \alpha, \beta, A, B) \quad (36)$$

正是这 ∞^4 致极曲线的全集; 因此, 根据(33)和(36)式, 只用微分法和消元法就能由哈密顿-雅科毕方程的完全解 $S(x, y, z, \alpha, \beta)$ 得出 ∞^4 致极曲线的全集.

§ 5 哈密顿正则方程

每一个欧勒方程(7a)和(7b)都是二阶微分方程. 通常用四个一阶微分方程代替这两个二阶方程是方便的. 这可以用多种方法办到. 最对称的方法是给出所谓哈密顿正则方程, 求法如下:

将(13)式看作是勒让德变换(见上册 181 页), 它用 U, V 代替变量 u, v (保留 x, y, z), 用 $W(U, V, x, y, z)$ 代替函数 $F(u, v, x, y, z)$. 我们可把(13)式中最后一式写成

$$W = F - uU - vV, \quad (37)$$

因此

$$dW = dF - udU - vdV - Udu - Vdv.$$

现在

$$\begin{aligned} dF &= F_u du + F_v dv + F_x dx + F_y dy + F_z dz \\ &= Udu + Vdv + F_x dx + F_y dy + F_z dz, \end{aligned}$$

所以

$$dW = -udU - vdV + F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

因 W 可看作 U, V, x, y, z 的函数, 由此得出

$$W_u = -u, W_v = -v, W_x = F_x, W_y = F_y, W_z = F_z. \quad (38)$$

这时如果考虑一条曲线 $x = x(z), y = y(z)$, 它满足下式:

$$x' = u(x, y, z), \quad y' = v(x, y, z), \quad (39)$$

则这两个方程, 连同欧勒方程(7), 可写成以下的形式:

$$\left. \begin{array}{l} x' = -W_u, \quad y' = -W_v, \\ U' = W_x, \quad V' = W_y. \end{array} \right\} \quad (40)$$

(40) 式是 x, y, U, V 作为 z 的函数的四个一阶微分方程, 称为 哈密顿正则方程. 它们可看作用函数 $W(U, V, x, y, z)$ 表示的变分积分的欧勒方程. 如果把(37)和(39)式代入(1)式, 则积分变成

$$I = \int_{z_1}^{z_2} \{W(U, V, x, y, z) + x'U + y'V\} dz. \quad (41)$$

如果这里把 U, V, x, y 看作 z 的四个未知函数, 并且作出它们各自的欧勒方程, 则立即得出(40)式.

§ 6 被积函数中不显含独立变量时的特殊情况

F 不明显依赖于 z 时的情况值得特别考虑.

对于 $F(x', y', x, y, z)$, 一般有

$$\frac{dF}{dz} = F_{x'}x'' + F_{y'}y'' + F_x x' + F_y y' + F_z.$$

现在假定 $F_z = 0$, 并以欧勒方程(7)代替 F_x, F_y . 这就得出

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dz} &= F_{x'}x'' + F_{y'}y'' + x' \frac{d}{dz} F_{x'} + y' \frac{d}{dz} F_{y'} \\ &= \frac{d}{dz} (x'F_{x'} + y'F_{y'}). \end{aligned}$$

所以

$$\frac{d}{dz} (F - x'F_{x'} - y'F_{y'}) = 0,$$

因此

$$F - x'F_{x'} - y'F_{y'} = \text{常数}. \quad (42)$$

这个表达式正是致极曲线上的量 W , 它与 z 无关; W 是一个积分常数. 由正则方程(40)可直接看出同样的结果, 因若 F 不明显依赖于 z , 则 W 也与 z 无关, $W_z = 0$, 并且

$$\frac{dW}{dz} = W_u U' + W_v V' + W_x x' + W_y y';$$

根据(40)式, 上式为零.

在这种情况下, 可将变分问题从三维化为二维. 把 y 看作 x 的函数; 则 $y' = (dy/dx)x'$, $F(x', y', x, y) = F(x', dy/dx, x, y)$. 用同样的方法, $F_{x'}$, $F_{y'}$ 以及 $F - x'F_{x'} - y'F_{y'}$ 都可看作 $x', dy/dx, x, y$ 的函数. 这时方程

$$F - x'F_{x'} - y'F_{y'} = W \quad (43)$$

可对 x' 求解:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \Phi\left(\frac{dy}{dx}, x, y, W\right), \\ y' &= \frac{dy}{dx} \Phi\left(\frac{dy}{dx}, x, y, W\right). \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

考虑 W 具有某一给定值的所有曲线; 因此积分(1)可以用两个积分之差来代替, 或者

$$\begin{aligned} J &= \int_{z_1}^{z_2} (F - W) dz = \int_{z_1}^{z_2} (x'F_{x'} + y'F_{y'}) dz \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(F_{x'} + \frac{dy}{dx} F_{y'} \right) dx. \end{aligned}$$

如果这时用缩写符号

$$F_{x'} + \frac{dy}{dx} F_{y'} = f, \quad (45)$$

并且利用(44)式消去 x' , y' , 则 f 变为 $dy/dx, x, y, W$ 的函数, 并且

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f\left(\frac{dy}{dx}, x, y, W\right) dx. \quad (46)$$

因此,对于每一个 W 值,都有一个少了一维的变分积分[这一简化相当于力学中从哈密顿原理过渡到莫培督原理: 见下面(88)式]. 如果由与(46)式相应的欧勒方程求出 $y(x)$, 则对(44)式积分就得到全部致极曲线.

§ 7 不连续性

可能出现函数 $F(u, v, x, y, z)$ 并不处处连续的情形. 最重要的情形(光学中经常出现)是, 对于所有 u, v 值, F 沿一曲面 $\sigma(x, y, z) = 0$ 具有有限的不连续性.

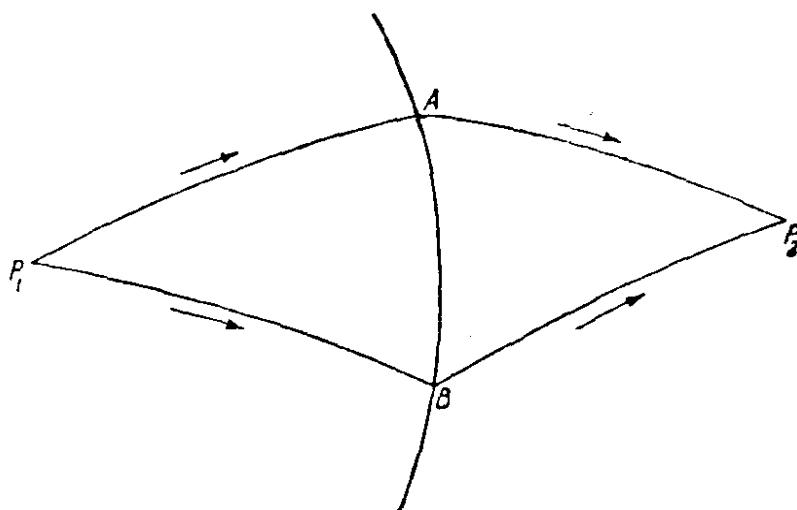


图 2 光学折射定律的变分模拟图示

显然,在曲面外,致极曲线仍是欧勒方程(7)的解;但如果致极曲线穿过曲面,它将具有方向的不连续性(折射). 让我们用附标 1 和 2 区分曲面左方和右方的空间(图 2).

为了求出“折射定律”, 必须确立保证按(11)式定义的希耳伯特积分 S 从曲面左方一点 P_1 延伸到曲面右方一点 P_2 与路线无关的条件. 考虑两条路线 P_1AP_2 和 P_1BP_2 , A 和 B 是曲面上的两点. 因此(用明显的记号),要求 $S(P_1AP_2) = S(P_1BP_2)$, 即

$$S_1(P_1A) + S_2(AP_2) = S_1(P_1B) + S_2(BP_2). \quad (47)$$

这时在曲面左方的闭合路线 P_1ABP_1 上,

$$S_1(P_1A) + S_1(AB) + S_1(BP_1) = 0; \quad (48)$$

在曲面右方的闭合路线上，

$$S_2(P_2B) + S_2(BA) + S_2(AP_2) = 0. \quad (49)$$

如果将(48)和(49)式相加，并且用(47)式和关系式 $S(XY) = -S(YX)$ ，由此得出

$$S_1(AB) = S_2(AB). \quad (50)$$

所以，不管 u, v 取曲面左方的值 u_1, v_1 还是取右方的值 u_2, v_2 ，沿曲面 $\sigma = 0$ 上任一路线求出的积分(11)都有同一数值。因此，在这两种情形中被积函数必须相等，而折射定律与表达式

$$F + (x' - u)F_u + (y' - v)F_v \quad (51)$$

在曲面 $\sigma = 0$ 上连续这一论断是等效的。根据(13)式，这一条件可表示为以下的形式：

$$(Ux' + Vy' + W)_1 = (Ux' + Vy' + W)_2, \quad (52)$$

式中 x', y' 是曲面上任一曲线 $x(z), y(z)$ 的微商。这还可以表述为矢量 $U_2 - U_1, V_2 - V_1, W_2 - W_1$ 与不连续曲面垂直：

$$(U_2 - U_1)dx + (V_2 - V_1)dy + (W_2 - W_1)dz = 0. \quad (53)$$

反射致极曲线的问题与折射致极曲线的问题很类似。这时必须用一条在一给定曲面 $\sigma(x, y, z) = 0$ 上 A 点处有方向不连续性的曲线 P_1AP_2 ，连接位于 F 是 x, y, z 的连续函数的一个区域内的两点 P_1 和 P_2 ，这两点 P_1 和 P_2 在 $\sigma = 0$ 的同一侧(图 3)。

显然， P_1A 部分和 AP_2 部分都必须是致极曲线，根据与导出折射定律(53)类似的考虑，得出对入射场(下标 1)和反射场(下标 2)独立定理有效的条件是反射定律

$$(U_1 + U_2)dx + (V_1 + V_2)dy + (W_1 + W_2)dz = 0. \quad (54)$$

独立定理对具有有限次折射或反射不连续的任意场也成立。下一节将表明，在所有这些情况下，不管连接 P_1 和 P_2 的致极曲线是连续的

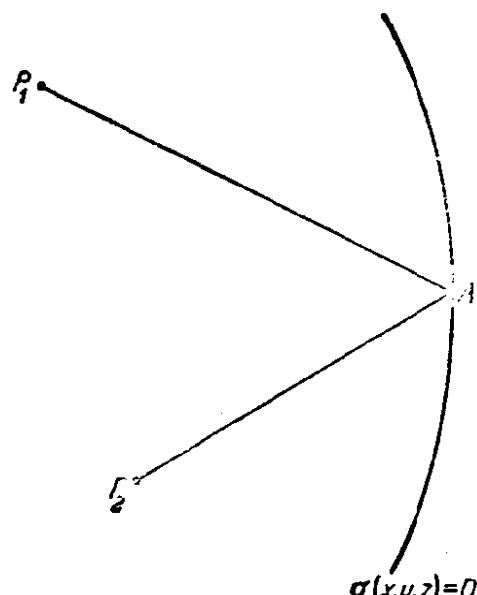


图 3 光学反射定律的变分模拟图示

还是具有(方向)不连续性,只要沿此曲线函数 F 满足某些简单条件,都将导致积分(1)有极小值.

§ 8 维尔斯特拉斯 (Weierstrass) 条件和勒让德条件(极值的充分条件)

到目前为止,不曾对极大值和极小值加以区别;所考虑的(光滑的或有一“扭折”的)致极曲线甚至可相应于不是真正极值的平稳情况.现在将推导真实极小值的必要条件.

设 $\bar{x}(z), \bar{y}(z)$ 是嵌入场 $u(x, y, z), v(x, y, z)$ 内的一条固定的致极曲线 \bar{C} , $x(z), y(z)$ 是与 \bar{C} 有相同端点 P_1 和 P_2 也完全嵌入场内的任一邻近曲线 C (图 4). 如果

$$\int_C F(x', y', x, y, z) dz - \int_{\bar{C}} F(\bar{x}', \bar{y}', \bar{x}, \bar{y}, z) dz > 0, \quad (55)$$

则极值是真实的极小值.

根据第 2 节和第 3 节,可将第二个积分替换为一个不沿 \bar{C} 而沿 C 的积分,即

$$\int_C \{F(u, v, x, y, z) + (x' - u)F_u + (y' - v)F_v\} dz;$$

这个积分与路线无关,并且化为 $\int_{\bar{C}} F dz$,只要所取路线与 \bar{C} 一致.

因此(55)式变为

$$\int_C F dz - \int_{\bar{C}} F dz = \int_C \mathcal{E}(x', y', u, v, x, y, z) dz > 0, \quad (56)$$

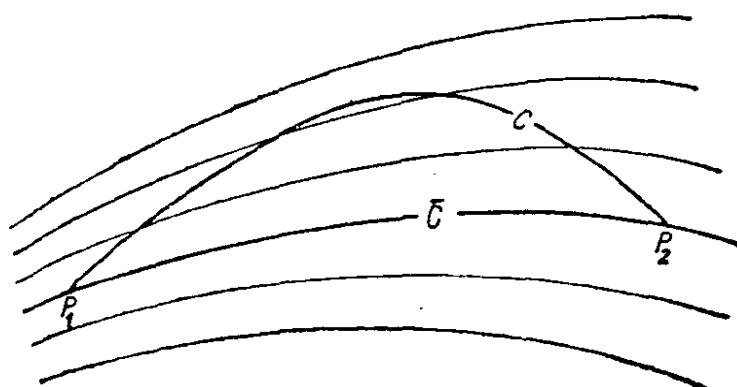


图 4 维尔斯特拉斯 \mathcal{E} 函数定义图示

式中

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(x', y', u, v, x, y, z) &= F(x', y', x, y, z) \\ &- F(u, v, x, y, z) - (x' - u)F_u - (y' - v)F_v,\end{aligned}\quad (57)$$

并且 F_u, F_v 中的自变量与 $F(u, v, x, y, z)$ 中的相同. (57)式所定义的函数称为维尔斯特拉斯 \mathcal{E} 函数(或盈函数, excess function);自变量 x, y, z, x', y' 指的是曲线 C 上的一点以及它的方向, 而 u, v 指的是通过 x, y, z 点的场致极曲线的方向.

可以看出, 在 C 与场致极曲线重合的任何部分, \mathcal{E} 为零. 我们可以把场选择为通过 P_1 的全部 ∞^2 致极曲线的集. 然后作一条特殊的曲线 C , 使得在 P_1 与 A 点之间, 曲线与场的一条致极曲线重合; 从 A 到给定的致极曲线上的 B 点, 它是直线; 从 B 到 P_2 , 它与给定的致极曲线重合(图 5). 因此在 P_1A 部分和 BP_2 部分, \mathcal{E} 为零, 而剩下

$$\int_A^B \mathcal{E} dz > 0.$$

令 A 逼近 B , 可以看出, 只当

$$\mathcal{E}(x', y', \bar{x}', \bar{y}', \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) > 0, \quad (58)$$

上述不等式才可能成立; 这里 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 指的是给定的致极曲线 \bar{C} 上一代表点 (B), x', y' 指的是完全任意的 AB 方向. 公式(58)是强极小值的维尔斯特拉斯条件; 它无疑是一个必要条件. 但根据函数 F 对它的所有五个自变量连续(因此 \mathcal{E} 对它的七个自变量连续)这一假设得出, 如果(58)式对于给定的致极曲线上所有各点及任意方向 x', y' 都满足, 则

对于 \bar{C} 周围某一区域内有任意方向的任一邻近曲线 C , 不等式(56)必成立. 因此, 条件(58)也是强极小值的充分条件. 当然, 这个极小值只是相对的, 因为可能有几条致极曲线都具有这样

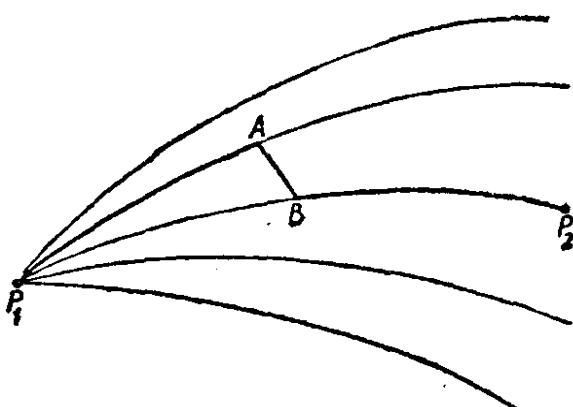


图 5 强极小值的维尔斯特拉斯条件的推导

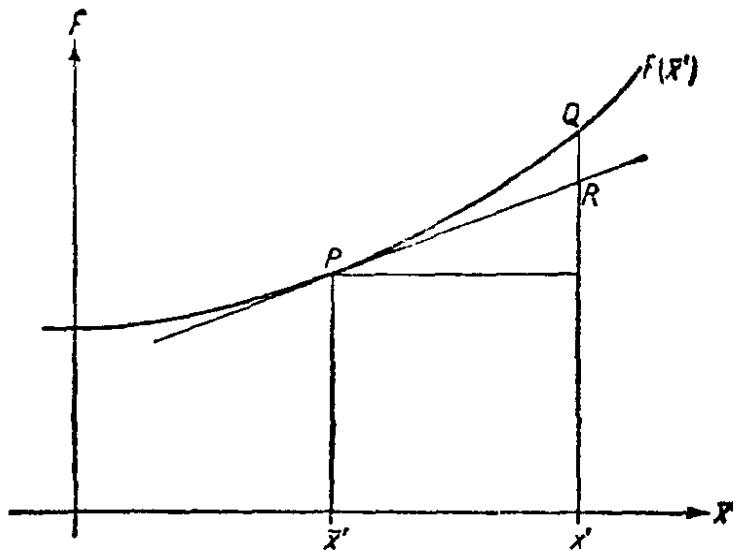


图 6 强极小值的维尔斯特拉斯条件的几何解释

的特性，即与所有邻近曲线相比，给出积分(1)的极小值。因此用这种方法不能决定其中那一条曲线给出绝对极小值。

不等式(58)有一种简单的几何解释。对于空间内一固定点 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, F 只是 \bar{x}', \bar{y}' 的函数；这个函数 $F(\bar{x}', \bar{y}')$ 可用三维 \bar{x}', \bar{y}' , F 空间内一个曲面来表示(图 6 中画出二维 $\bar{x}'F$ 截线)。因此，

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(x', y', \bar{x}', \bar{y}') &= F(x', y') - [F(\bar{x}', \bar{y}') \\ &\quad + (x' - \bar{x}')F_{\bar{x}'} + (y' - \bar{y}')F_{\bar{y}'}]\end{aligned}\quad (59)$$

显然这是沿 x', y' 的纵坐标在曲面 $F = F(\bar{x}', \bar{y}')$ 上 Q 点，与 $P(\bar{x}', \bar{y}')$ 的切平面同这个纵坐标交点 R 之间的距离 QR (见图 6)。所以，如果曲面 F 在 P 点切平面的上方，则 $\mathcal{E}(x', y', \bar{x}', \bar{y}') > 0$ 。如果这对于所有的 x', y' 都成立，则有一**强极小值**。

然而，如果(58)式只对 $\xi = x' - \bar{x}'$, $\eta = y' - \bar{y}'$ 的小区间成立，则有一弱极小值；在这种情况下，可将 \mathcal{E} 展开为 ξ, η 的幂级数(如果仍省略自变量 x, y, z)，得出

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(x', y', \bar{x}', \bar{y}') &= F(x', y') - F(\bar{x}', \bar{y}') - \xi F_{\bar{x}'} - \eta F_{\bar{y}'} \\ &\quad + \frac{1}{2} [F_{\bar{x}'\bar{x}'}\xi^2 + 2F_{\bar{x}'\bar{y}'}\xi\eta + F_{\bar{y}'\bar{y}'}\eta^2] + \dots\end{aligned}$$

对于小的 ξ 和 η 值，这些二次项是决定性的，并且对于一极小值，它们显然必是正的。因此，我们得到**弱极小值的**(必要且充分的)

勒让德条件:¹⁾

$$F_{\bar{x}'\bar{x}'} > 0, \quad F_{\bar{x}'\bar{x}'\bar{y}'\bar{y}'} - F_{\bar{x}'\bar{y}'}^2 > 0. \quad (60)$$

§ 9 一个端点约束在一曲面时变分积分的极小值

对于所有具有一公共端点 P_1 而另一端点约束在一给定曲面 $\sigma(x, y, z) = 0$ 的曲线， \mathcal{E} 函数提供了一种求其变分积分 (1) 的极小值问题的简单解法。

这条曲线显然必是通过 P_1 的 ∞^2 致极曲线之一，问题是“其中那一条？”这时在这些 ∞^2 致极曲线中正好有一条²⁾ 横截曲面 $\sigma = 0$ ，不难看出它代表这个问题的解。为了说明这一点，设 P_2 是这条致极曲线与曲面 $\sigma=0$ 的交点，它被所有横截此曲面的致极曲线的场围绕着。设 P_1Q 是通过 P_1 的任一致极曲线， Q 是它与此曲面的交点(图 7)。于是希耳伯特积分 $S(P_2, Q)$ 为零。因此，沿路线 P_1QP_2 所得的积分 S 等于变分积分 $I(P_1, Q)$ 。这时，差值 $I(P_1, Q) - I(P_1, P_2)$ 可以按前面一样的方法利用 \mathcal{E} 函数来表示，而且如果满足(58)式，则只要 Q 与 P_1 不重合，这个差值总是正的。

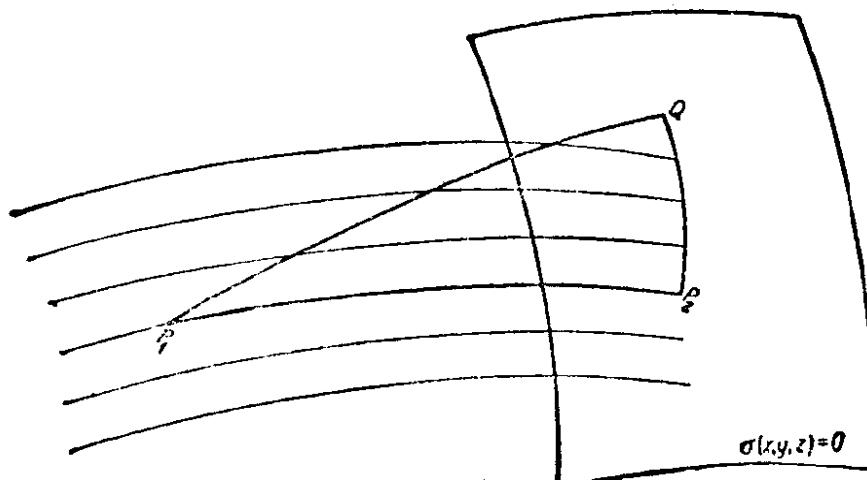


图 7 对于所有具有一固定端点而另一端点约束在一曲面的曲线，确定其变分积分的极小值

1) 当不是讨论两个而是讨论更多个(譬如 n 个)变量时，这个条件有直接推广。为了有一极小值， n 个变量的二次型必是正定的；这意味着相伴的行列式和它的主子式必全是正的。

2) 假定 P_1 离曲面足够近，因此排除了有几条这样的致极曲线的情况。

§ 10 极小值的雅科毕判据

如果在一个场中可以嵌入一条致极曲线，并且对于此曲线在 P_1 和 P_2 之间所有各点，都满足勒让德条件，则(1)式所定义的积分 I 无疑是一(弱)极小值。但还要找出这种场存在的判据。

设所有通过 P_1 的 ∞^2 致极曲线由下式给出：

$$x = x(z, \alpha, \beta), \quad y = y(z, \alpha, \beta), \quad (61)$$

并且设给定的致极曲线 C 由 $\alpha = 0, \beta = 0$ 的值表征：

$$x = x(z, 0, 0), \quad y = y(z, 0, 0). \quad (62)$$

只要(61)式各曲线中有一条通过一给定点 $P(x, y)$ 并任意地接近 C ，即只要 α, β 作为 x, y 的函数时(61)式有唯一的解，则(61)式各曲线构成一个场，其条件为

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_\alpha & x_\beta \\ y_\alpha & y_\beta \end{vmatrix} \neq 0. \quad (63)$$

这就是极小值的雅科毕判据。

行列式 Δ 是沿给定致极曲线(62)的 z 的函数。 $\Delta = 0$ 的第一个点 \bar{P} 称为 P_1 的共轭点；对于 P_2 位于 P_1 和 \bar{P} 之间的每一个区间 $P_1 P_2$ ，都有一真实的极小值。

在 \bar{P} 点，给定的致极曲线与一条(无限靠近它的)邻近致极曲线相交，它是线集(61)包络的一点。因此，场的界限由致极曲线集(61)的包络确定。在光学中，这些包络就是焦散面。

§ 11 例一：光学

现在用很少的几个例子说明一般理论。第一个例子是关于通常几何学中的最短线和几何光学中的最短光学长度。

欧几里得几何学以毕达哥拉斯定理为基础，根据这一定理，线元 ds 与它在直角坐标系各轴上的投影 dx, dy, dz 通过下式相联系：

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2. \quad (64)$$

因此，两点之间的最短线由变分积分

$$s = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + 1} dz \quad (65)$$

的极小值给出。几何光学可以建立在这一变分积分问题的推广，即费马最短光程原理的基础上(见 § 3.3.2)，光程

$$\int_{P_1}^{P_2} n ds = \int_{x_1}^{x_2} n(x, y, z) \sqrt{x'^2 + y'^2 + 1} dz, \quad (66)$$

式中 $n(x, y, z)$ 是折射率。我们只讨论光学情况，因为(65)式是(66)式 $n = 1$ 的特殊情况。

现在有

$$F(x', y', x, y, z) = n(x, y, z) \sqrt{x'^2 + y'^2 + 1}. \quad (67)$$

因为 $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + 1} dz$ ，所以

$$\left. \begin{aligned} U &= F_{x'} = \frac{nx'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + 1}} = n \frac{dx}{ds} = ns_x, \\ V &= F_{y'} = \frac{ny'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + 1}} = n \frac{dy}{ds} = ns_y, \\ W &= F - F_{x'}x' - F_{y'}y' = \frac{n}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + 1}} \\ &= n \frac{dz}{ds} = ns_z. \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

式中 s_x, s_y 和 s_z 是曲线 $x = x(z), y = y(z)$ 切向单位矢量 \mathbf{s} 的分量。根据(53)式，在 $n(x, y, z)$ 不连续曲面上折射定律可表示为以下的形式：

$$(n_2 \mathbf{s}_2 - n_1 \mathbf{s}_1) \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad (69a)$$

式中 $d\mathbf{l}(dx, dy, dz)$ 是曲面的任一线元。这个方程意味着 $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ 与曲面法线共面，并且 \mathbf{s}_1 和 \mathbf{s}_2 与曲面法线的夹角 θ_1 和 θ_2 有下述关系：

$$n_2 \sin \theta_2 = n_1 \sin \theta_1, \quad (69b)$$

与折射定律[§ 3.2(19)]一致。

与(66)式相联系的欧勒方程(7)为

$$\frac{\partial n}{\partial x} \sqrt{x'^2 + y'^2 + 1} - \frac{d}{dz} \frac{nx'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + 1}} = 0,$$

$$\frac{\partial n}{\partial y} \sqrt{x'^2 + y'^2 + 1} - \frac{d}{dz} \frac{ny'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + 1}} = 0.$$

或者

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{dx}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial x}, \quad \frac{d}{ds} \left(n \frac{dy}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial y}. \quad (70a)$$

z 的相应方程, 即

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{dz}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial z}, \quad (70b)$$

是一个恒等式, 因为它由

$$\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = 1 \quad (71)$$

得出. (70b)式的推导可进行如下: 首先把(71)式对 s 求微商. 其次用 dn/ds 乘(71)式, 用 n 乘求微商后的方程, 然后两式相加. 最后, 利用(70a)式¹⁾. 三个标量微分方程(70)与光线的矢量方程 § 3.2(2)一致.

因为 U, V 和 W 这时表示光线矢量的分量 [参看 § 4.1(4) 式], 由(12)式看出, 属于几何光学场的 S 函数正是哈密顿点特征函数 [参看 § 4.1(1)式]. 而且, 按照导出(21)式的步骤, 得出本变分问题的哈密顿-雅科毕方程就是程函方程.

为了研究勒让德条件(60), 必须确定微商 $F_{x'x'}$ 等等. 在目前情况下, 有

$$F_{x'x'} = n \frac{1 + y'^2}{(1 + x'^2 + y'^2)^{3/2}},$$

$$F_{y'y'} = n \frac{1 + x'^2}{(1 + x'^2 + y'^2)^{3/2}},$$

$$F_{x'y'} = -n \frac{x'y'}{(1 + x'^2 + y'^2)^{3/2}},$$

1) (70b)式可用更对称的方法得出, 不过这种方法引入多余的欧勒方程. 把 x, y 和 z 看作一个参量 λ 的函数; 于是有三个欧勒方程, 由一个恒等式相联系, 参量 λ 最终与 S 等同.

因此

$$F_{x'x'} \cdot F_{y'y'} - F_{x'y'}^2 = \frac{n^2}{(1 + x'^n + y'^n)^2} > 0. \quad (72)$$

所以,如果满足雅科毕条件(63),则每一条致极曲线给出一弱极小值(976页).但因对给定的 x, y, z , 即对给定的 n , 函数 F 对所有的 x', y' 值是凸向下方的, 由维尔斯特拉斯条件的几何解释得出, 极小值是强的.

还要考虑雅科毕判据. 当 $n =$ 常数时, 即在通常的欧几里得几何学中, 致极曲线显然是直线; 因为过一点 P_1 的一束直线决不会有包络, 所以每一条直线任意两点间都给出距离的强极小值. 另一方面, 在几何光学中, n 一般依赖于 x, y, z (连续或不连续), 来自 P_1 的一束光线产生包络(焦散面). 为了确定极值的性质, 必须分别在每一种特定情况中考察这些曲面.

§ 12 例二: 质点系力学

作为第二个例子, 考虑质点系力学. 这里, 独立变量是时间 t , 未知函数是拉格朗日坐标 $q_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, n)$ 和它们的微商即速度 $u_\alpha = \dot{q}_\alpha$.

变分问题由哈密顿原理

$$\int_{t_1}^{t_2} L(u_1, u_2, \dots, q_1, q_2, \dots) dt = \text{极值} \quad (73)$$

给出, 式中 L 是拉格朗日函数. 在通常的非相对论力学中, 有 $L = T - \Phi$, 式中 T 是动能, 是 u_α 的二次型, Φ 是势能; 但在更普遍的情况下, 有磁力作用时以及考虑到质量的相对论性变化时, (73)式仍成立.

这里, 用 $L(u, q, t)$ 代替函数 $F(u, v, x, y, z)$, 因此[参看(13)式], 这时 U, V 相当于动量

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial u_\alpha}, \quad (74)$$

W 相当于 $-H$, 此处的 H 是哈密顿函数

$$H = \sum_{\alpha} u_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial u_{\alpha}} - L = \sum_{\alpha} u_{\alpha} p_{\alpha} - L. \quad (75)$$

如果 $L = T - \Phi$, 则(75)式变为

$$H = \sum_{\alpha} u_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial u_{\alpha}} - T + \Phi.$$

由齐次函数的欧勒定理¹⁾得出

$$2T = \sum_{\alpha} u_{\alpha} \frac{\partial T}{\partial u_{\alpha}} \left(= \sum_{\alpha} u_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial u_{\alpha}} \right),$$

H 化为总能

$$H = T + \Phi. \quad (76)$$

欧勒方程(7)变为拉格朗日运动方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial u_{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} = 0; \quad (77)$$

这时, 正则方程(40)为

$$\frac{dq_{\alpha}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}}, \quad \frac{dp_{\alpha}}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}}, \quad (78)$$

式中 H 可看作 p_{α} , q_{α} 和 t 的函数. 如果 H 与时间 t 无关, 则公式(42)表示能量守恒定律,

$$H = \sum_{\alpha} u_{\alpha} p_{\alpha} - L = \text{常数} = E. \quad (79)$$

在这种情况下, 哈密顿-雅科毕微分方程(21)变为

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H \left(\frac{\partial S}{\partial q_{\alpha}}, q_{\alpha} \right) = 0. \quad (80)$$

积分得出,

$$S = -E t + S_1(q_{\alpha}), \quad (81)$$

由于(80)式, 上式中 S_1 满足方程

$$H \left(\frac{\partial S_1}{\partial q_{\alpha}}, q_{\alpha} \right) = E. \quad (82)$$

1) 例如, 见 R. Courant, *Differential and Integral Calculus*. Vol. II (Glasgow, Blackie and Son, 1936), p. 109.

由哈密顿-雅科毕方程的解,得出的动量与(17)式一致:

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial S_1}{\partial q_\alpha}. \quad (83)$$

由此得出线积分

$$\int_{P_1}^{P_2} \sum_\alpha p_\alpha dq_\alpha \quad (84)$$

与连接 P_1 和 P_2 的路线无关,所以在单连通区域内取一闭合路线时,线积分为零,

$$\oint p_\alpha dq_\alpha = 0. \quad (85)$$

如果函数 p_α 是多值的,就有可能得出沿一闭合路线积分不为零,而是某一常数周期的倍数。这个结果是拉格朗日光学不变式(§ 3.3.1)的推广,是一个庞加莱不变式。它也可表示为以下的形式:

$$\frac{\partial p_\alpha}{\partial q_\beta} - \frac{\partial p_\beta}{\partial q_\alpha} = 0. \quad (86)$$

如果 H 与时间无关,则可按照(45)和(46)式所示的一般方法根据极小值原理消去 t 。因此有

$$J = \int_{t_1}^{t_2} (L + E) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_\alpha \dot{q}_\alpha p_\alpha dt = \int_{P_1}^{P_2} \sum_\alpha p_\alpha dq_\alpha = \text{极值.} \quad (87)$$

这就是推广到任意 L 的莫培督最小作用原理。它必须通过下述途径来理解:利用纯几何微商(比如说 $dq_\alpha/dq_1, \alpha = 2, \dots, n$, 以 q_1 为独立变量)表示时间微商 $u_\alpha = \dot{q}_\alpha$, (79)式就可消去这些时间微商。(87)式代表描述轨道而不是描述运动的纯几何原理,后者可随后由(78)式得出。

如果 $L = T - \Phi$, 则 $E = T + \Phi$, 并且得出莫培督原来的表达式

$$J = 2 \int_{t_1}^{t_2} T dt, \quad (88)$$

它可以用同样的方法来理解。由哈密顿原理变为莫培督原理而把

运动问题化为轨道问题的一个例子是附录 2 第 2 节中给出的关于电子光学的讨论.

只能对一给定的 L 研究勒让德条件. 如果 $L = T - \Phi$, 并且 T 是 u_α 的二次型, 则该条件显然与 T 为正定的这一公设等效. 于是也满足维尔斯特拉斯条件, 并且只要雅科毕条件成立, 就有一强极小值. 后者导至动力学的焦点和焦散线的研究, 但在实际上没有多大重要性.

对于相对论性电子, 其拉格朗日函数(参看附录 2)为

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2} + e\left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{A} - \phi\right), \quad (89)$$

由勒让德条件导出矢量 $\rho(\xi, \eta, \zeta)$ 诸分量中的二次型

$$\frac{m}{\left[1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2\right]^{3/2}} \left\{ \rho^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \left(\frac{\rho \cdot \mathbf{v}}{c}\right)^2 \right\}, \quad (90)$$

所以勒让德条件总是满足的.

附录2 光学,电子光学和波动力学

1831年哈密顿发现了势场中质点轨线与折射率连续变化的媒质中光线路程二者的类似。“哈密顿类似”由于它在数学上极为优美,在动力学教科书中幸存了差不多一百年,但没有引起任何实际应用,直至1925年,那时布什(Busch)首先用光学术语解释了电磁场对电子束的聚焦效应。几乎同时,薛定谔由于以他的波方程从粒子的几何光学过渡到粒子的波动光学而将哈密顿类似推进了一步,他在其波动方程中加入了德布罗意在1923年首先想到的粒子波长。

从1928年起,实用的电子光学迅速发展。到此时,哈密顿类似已广为人知,并促进了发明与光学仪器对应的一些电子光学仪器,例如电子显微镜。虽然二者数学表述一般类似,但这两种技术并不严格类似。某些电子光学仪器,例如阴极射线管和具有弯曲光轴的系统,没有重要的光学对应仪器。在这可资利用的篇幅中,我们将只考虑其光学模拟已在本书前面各章中详细论述过的那些电子光学问题,因此几乎可全部移植其结果,而只作很少修正。可以提起注意,这特别适用于电子光学最难懂的章节:透镜象差的波动理论。

§ 1 基本形式的哈密顿类似

首先将证明,带电粒子轨线的确定,可通过引入逐点变化的适当折射率而化为一个光学问题。

考虑一个电荷为 e 、质量为 m 的粒子(为了简单起见,把它当作一个电子)在稳定静电势场 $\phi(x, y, z)$ 中运动。根据牛顿运动定律,

$$\frac{dp}{dt} = eE = -e \operatorname{grad} \phi, \quad (1)$$

式中 \mathbf{p} 是动量矢量。如果动量的牛顿定义 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ 被爱因斯坦定义

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (\beta = \frac{v}{c}) \quad (2)$$

代替, c 是真空光速, 则上述定律对所有的速度 \mathbf{v} 都有效。

将运动方程(1)分解为两个方程是方便的, 其中一个是轨线方程, 而另一个规定电子沿轨线运动所依据的“时间表”。为此, 写出 $\mathbf{v} = v\mathbf{s}$, $\mathbf{p} = p\mathbf{s}$, \mathbf{s} 是运动方向上的单位矢量。于是

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{dp}{dt}\mathbf{s} + p \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{dp}{dt}\mathbf{s} + p \frac{d\mathbf{s}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dp}{dt}\mathbf{s} + p v \frac{d\mathbf{s}}{ds}.$$

现由微分几何, 已熟知 $d\mathbf{s}/ds$ 是单位主法线 \mathbf{v} 方向上的矢量, 其绝对值等于轨线的曲率 $1/\rho$ 。因此

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{dp}{dt}\mathbf{s} + \frac{pv}{\rho}\mathbf{v}.$$

由此式和(1)式得出, 瞬时曲率中心位于过切线 \mathbf{s} 与电矢量 $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$ 的平面内。将 $\text{grad } \phi$ 分解在两个方向上, 得出

$$\frac{dp}{dt}\mathbf{s} + \frac{pv}{\rho}\mathbf{v} = -e[(\mathbf{s} \cdot \text{grad } \phi)\mathbf{s} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad } \phi)\mathbf{v}]. \quad (3)$$

使两边第一项相等, 得一标量方程, 它可称为“时间表”, 因为它最终导至电子在轨线上的位置作为时间的函数。乘以 $v = ds/dt$ 后, 它可积分得出

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = -e\phi + \text{常数}. \quad (4)$$

这是爱因斯坦能量积分。对于慢运动粒子 ($\beta \ll 1$), 它过渡到牛顿积分, $\frac{1}{2}mv^2 + e\phi = \text{常数}$ 。

为了方便起见, 现在把问题局限于只考虑具有相同积分常数即具有相同总能量的电子。如果所有电子已在某一势曲面 ϕ_0 处以零速始发, 就是这种情况。在许多实际问题中, 这个曲面可认为与阴极等同。写出

$$V = \phi - \phi_0,$$

即测量以 ϕ_0 为基准的电势 V , 这时能量积分表示为以下的形式:

$$mc^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right] = -eV. \quad (4a)$$

将此式与(2)式结合起来, 可将这两个式子表示为有用的双方程的形式,

$$\left(1 - \frac{eV}{mc^2} \right)^2 = 1 + \left(\frac{p}{mc} \right)^2 = \frac{1}{1 - \beta^2}. \quad (5)$$

因此由

$$mc^2 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc} \right)^2} - 1 \right] = -eV(x, y, z) \quad (6)$$

确定这些粒子的动量标量值 p 为位置 x, y, z 的函数.

现在考虑(3)式的第二部分, 即垂直于运动方向的分量:

$$\frac{pv}{\rho} = -e[\nu \cdot \text{grad } V]. \quad (7)$$

通过(2)和(6)式用 p 表示 ν 和 V , 得出简单的定律

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\nu \cdot \text{grad } p}{p} = \nu \cdot \text{grad}(\log p). \quad (8)$$

(8)式与关于折射率 n 与 p 成正比的媒质中光线曲率的 § 3.2 (14) 式一致, 因此我们得出电子与光的路线在形式上类似.

必须强调, 仅对有一固定总能量的电子, 动量绝对值 p 才只是位置的函数; 对有一不同能量的电子, 它是另一函数, 由(6)式给出. 因此折射率取决于电子能量. 这在光学中也有它的模拟, 即折射率取决于光的颜色. 下面将看到, 这是很恰当的比拟, 因为在这两种情况下折射率原来都是波长的函数.

对于慢电子, p 与速度成正比, 而这又与 \sqrt{V} 成正比. 我们已用过的相对论性方程的优点在于它们清楚表明, 特征量是动量而不是速度. 此外, 这些结果立刻使人联想到对一般静电磁场情况的推广. 相对论中已熟知, 有磁场存在时, 必须用“总”动量

$$\mathbf{p}_a = \mathbf{p}_m + e\mathbf{A} \quad (9)$$

代替机械动量 \mathbf{p} (现在把它写成 \mathbf{p}_m), 式中 \mathbf{A} 是矢势¹⁾. 这使人联想到, 在静电情况下, 折射率是 \mathbf{p}_m 在运动方向上的分量; 而在一般情况下, 它必须用 \mathbf{p}_m 在同一方向上的分量来代替. 这个推断经证明是正确的, 但现在更可取的是把电磁场中的电子光学建立在一个更加坚实和普遍的基础上.

§ 2 变分形式的哈密顿类似

几何光学的一些定律可由费马原理导出 (§ 3.3.2), 根据费马原理, 光在 P_1 和 P_2 两点之间的路程使得光学长度为一极小值,

$$\int_{P_1}^{P_2} n ds = \text{极小.} \quad (10)$$

可以回想起, 只有当两个端点彼此充分靠近, 即在连接这两点 P_1 和 P_2 的光线上在这两点之间没有 P_1 或 P_2 的象时, 费马原理的这一强式才有效. 如果 P_2 是 P_1 的象, 则(10)式不是确定连接这两点的一条光线, 而是确定连接这两点的一个无限小的光线锥, 其中每一条都有相等的光学长度. 如果 P_1 和 P_2 相隔更远, 以致在这两点之间出现一个象, 则弱式

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} n ds = 0 \quad (10a)$$

仍确定一条光线, 但这不是如有时说错了那样代表一极大值, 而是代表积分的一个平稳值, 它既不是极小值, 也不是极大值.

附录 1 第 11 节中用变分法讨论过费马原理的某些推论. 附录 1 第 12 节中已指出, 根据哈密顿原理, 质点系的运动可用类似的变分形式来描述, 对于单个质点的特殊情况, 哈密顿原理由下述条件

$$\int_{t_1}^{t_2} L(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z) dt = \text{极小} \quad (11)$$

表示. 这一表述在任一坐标系中都是有效的, 但用笛卡儿坐标 x ,

1) 值得注意的是, 在相对论出现前三年, K. Schwarzschild (*Königl. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl.*, 3 (1903), 126) 已发现这个基本结果.

y, z 就足以说明了。 $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ 是速度分量， L 是拉格朗日函数。起点和终点是在四维空时中规定的，并假定在变分过程中是固定的。附录 1 中已说明，拉格朗日形式和哈密顿形式的运动方程如何从哈密顿原理(11)的结果推导出来[附录 1, (77), (78)式]。

对于一个具有电荷 e 和静止质量 m 的相对论性电子，拉格朗日函数为

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} - e\left(\phi - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}\right). \quad (12)$$

这里， $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ 是速度矢量， ϕ 是静电势， \mathbf{A} 是磁势或矢势¹⁾。将(12)式代入拉格朗日运动方程[附录 1(77)式]，并利用电磁关系式 § 2.1(7)和 § 2.1(5)，

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}} - \text{grad } \phi, \quad \mathbf{B} = \text{curl } \mathbf{A},$$

就能证实拉格朗日函数(12)式。因此拉格朗日方程表示为下述形式：

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right), \quad (13)$$

它是运动方程的牛顿-洛伦兹形式。

对于电子光学来说，(11)式所表述的哈密顿原理是很普遍的。它含有时间，如果场是稳定的，则对此没有兴趣。此外，它代表 ∞^5 致极曲线；其中 ∞^4 是因为给定总能量时， P_1 和 P_2 两点可在任意两个给定曲面上自由选择，还有一个无穷大是因为总能量是未定的。为了减少繁冗的维数，在电子光学中采取与光学中类似的步骤。

首先，固定能量常数，亦即限于讨论单色光或单能电子。如附录 1(87)式所示，这使得本问题的维数减去一维。现在把哈密顿原理(11)替换为最小作用原理，

$$J = \int_{P_1, t_1}^{P_2, t_2} (L + E) dt = \text{极小}, \quad (14)$$

1) 没有相对论性改正的拉格朗日函数(12)已在 1903 年由 K. Schwarzschild 在上述引文中得出。

式中 E 是总能量

$$E = \sum \dot{x} p_x - L.$$

(14) 式中, 时间 t 只是形式上出现, 因为代入 E , 得出

$$J = \int_{P_1, t_1}^{P_2, t_2} \sum p_x \dot{x} dt = \int_{P_1}^{P_2} \sum p_x dx = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} = \text{极小.} \quad (15)$$

在上式的第二和第三个式子中已去掉 t_1, t_2 , 因为我们只讨论时间不变场(否则总能量不会保持恒定), 在这种场中, 起始时间 t_1 不重要, 而经过的时间 $t_2 - t_1$ 完全由路程和能量常数确定.

因此, 最小作用原理(14)与费马原理(10)完全类似. 如果把电子光学折射率定义为动量在轨线方向上的分量, 则电子运动的研究就化为一个光学问题. 对于纯静电场, 看出这一结果与上一节由更基本的考虑得到的结果等效. 在这种情况下, 动量是纯机械的, 并与轨线平行, 其值由(2)式给出:

$$p_m = \frac{mv}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

有磁场存在时, 必须用动量分量的一般定义 [附录 1, (74) 式], 即作为拉格朗日函数对速度分量的微商. 对于具有拉格朗日函数(12)的单个粒子, 动量分量为

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{e}{c} A_x,$$

等等. 写成矢量形式,

$$\mathbf{p} = \frac{mv}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A}. \quad (16)$$

因此, 除了一任意常数因子外, 一般的电子光学折射率为

$$n = \frac{mv}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{s}, \quad (17)$$

式中 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{s}$ 是矢势在运动方向上的分量. 再一次得知, 它必须解释为具有一给定总能量的电子的位置函数.

看来一般情况和纯电场特殊情况之间存在一个重要差别. 在电场中, 折射率与机械动量成正比, 后者是一个可测的物理量.

在一般表达式(17)中，第二项是矢势分量，它不是一个物理量(physical quantity)，而是一个函数，其旋度等于磁感应强度 \mathbf{B} 。由此可见，一般的电子光学折射率本身不是一个物理量，而是一个拉格朗日函数¹⁾。但这对纯电场特殊折射率同样成立。在这两种情况下，都可以加上一个任意位置函数的梯度在运动方向上的分量，而不改变任何物理结果。

上述特殊情况和一般情况之间还有一个更重要的差别，如果进一步仿照光学的简化方法，把轨线场的 ∞^4 簇简化为 ∞^2 簇，则最能说明这一差别。为此，选择一些从某一曲面 $\mathcal{S}(x, y, z) = \mathcal{S}_0$ 垂直地出发的轨线。在几何光学中，这一曲面可看作一波阵面，于是可以证明这一锥轨线将处处与曲面族 $\mathcal{S}(x, y, z) = \text{常数}$ 垂直；这就是马吕斯和杜平定理(§ 3.3.3)。

如附录 1 第 2 节和第 3 节所述，在一般情况中还存在某种“横截”性，但它的含义不如马吕斯-杜平定理中那样简单。这时与曲面族 $\mathcal{S} = \text{常数}$ 保持垂直的不是轨线方向上的单位矢量 s ，而是动量 p 。由于只规定矢势适于规范变换，因此存在无限多个横向曲面族，但有磁场存在时，它们用任何规范归一化步骤都不能横截轨线。

用几何学的语言来说，垂直于一曲面族的那些二维曲线锥构成一“法线汇”，不然的话则构成一“斜线汇”(参看 § 3.2.3)。在光学和静电电子光学中，轨线可排成一些法线汇，其横截曲面与“波阵面”等同。在磁场中，一些通常称为“束”的二维轨线锥构成斜线汇，横截波阵面的概念对此不能适用。这是电子光学和光学之间的一个相当本质的差别。

§ 3 自由电子的波动力学

爱因斯坦在 1905 年首先推测光有二象性。光传播时好象它

1) W. Ehrenberg 和 R. E. Siday 在 *Proc. Phys. Soc., B*, **62** (1949), 8 中已特别强调这一点，他们还指出了下述有趣的事，如果磁场不处处为零，就不可能用一规范变换把 \mathbf{A} 归一化，使得磁场为零时它随着也为零。

是电磁波，而光与物质相互作用时好象它的能量集中于光子，每个光子有一个能量子。其后不久，光电过程和光化学过程的观察辉煌地证实了爱因斯坦的推测。

实物粒子的二象性概念来自德布罗意，他在 1923 年指出，如果存在一个以相对论性不变的方式与一个具有机械动量 p_m 的粒子相联系的波长，则它只能有下述形式：

$$\lambda = \frac{h}{p_m}, \quad (13)$$

式中 h 是一个具有作用量纲的普适常数，德布罗意使它等同于普朗克常数。

其后不久，海森伯，玻恩和约旦完全不依赖于德布罗意而发展了量子力学的第一个完整的数学表述，但他们的方法对于讨论自由粒子不如薛定谔的波动力学那样方便，现将简述后者。

薛定谔把德布罗意的概念与哈密顿的概念结合起来，得出了粒子运动的波动描述问题，它与质点动力学的关系就象波动光学与几何光学的关系一样。薛定谔的历史性探讨当然含有某些猜测成分，正如我们现在所知道的，它只在一定程度上才是正确的，因为尽管几何光学在逻辑上是包含在波动光学之中的，但逆命题不正确。

假定存在一个波场，其强度表示电子密度，就象电磁场强度表示光子密度一样。而且假定这是一个标量场，其振幅用某一标量函数 $\Psi(x, y, z, t)$ 表示；为了计算它可能具有的类波性，假定它满足波动方程

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{u^2} \ddot{\Psi},$$

“ u ”是波速，一般是位置的函数。这当然是一个有高度约束性的假设，因为通常具有恒定传播速度的波动方程可用多种不同方法加以推广，这只是其中最简单的一种方法。

用“单色”波代替 Ψ ，

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) e^{-i\omega t},$$

得到与时间无关的方程

$$\begin{aligned}\nabla^2\psi &= -\left(\frac{\omega}{u}\right)^2\psi \\ &= -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\psi,\end{aligned}\quad (19)$$

其中只出现波长 λ , 而不出现波速。现在假定, 如果动量 p_m 用一个粒子根据经典力学在点 x, y, z 所具有的值来代替, 该值可由(6)式计算, 则 λ 与德布罗意波长相同。为了简单起见, 考虑静电场中的一个慢电子。在这种情况下, 由德布罗意关系式(18)与(6)式结合得出

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m(E - e\phi)}}. \quad (20)$$

将上式代入(19)式得出

$$\nabla^2\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - e\phi)\psi = 0. \quad (21)$$

这是自由粒子在一标量势场中的薛定谔波动方程。因它是与时间无关的方程, 所以可把它解释为描述定态, 例如粒子在力场中的周期运动。但我们可以把它同样应用于电子光学所处理的稳定束, 其中许多粒子一个接着一个全都在同样条件下出现。在上述任一种情况下, 按照玻恩的统计诠释, 看来有理由假定, 振幅绝对值平方 $|\psi|^2 = \psi\psi^*$ 与 x, y, z 点处经过长时间测得的粒子密度成正比; 或者在这种情况下, 同样地, 它与任一时刻在这一点处观察到一个粒子的几率成正比。

(21)式的首次证实是由薛定谔作出的, 他证明了如果假定电子束缚在一个与卢瑟福和玻尔的旧原子模型相同的力场中, 则(21)式可解释原子光谱。对目前的场合更有关系的是, 在自由电子情况下, 由戴维孙和革末以及由汤姆孙独立地在 1927 至 1928 年间发现电子衍射而对(21)式的证实。

对于动能等于 eV 电子伏特的慢电子, 德布罗意关系式(18)给出波长近似为

$$\lambda = \sqrt{\frac{150}{V}} \text{ 埃.}$$

因此在实验室作实验时不难处理的电子波长约为几分之一埃，与X射线有相同的数量级。所以自由电子的波动性最容易用类似于晶体点阵中X射线衍射的实验来阐明。

X射线分析的术语也适用于电子，这些术语与光学术语稍有区别。所谓X射线或电子衍射实际上是点阵上或多或少有规则地排列的原子所发射的相干次级子波的干涉。由比较大的障碍物（其原子结构不起作用）引起的在光学意义上的电子衍射，结果形成非常小的衍射角，1940年博意什（H. Boersch）在电子显微镜中首次观测到这种衍射¹⁾。

§ 4 光学原理应用于电子光学

对于电子光学几乎所有实际用途来说，波动力学这一段初步和不完整的概述就足够了。甚至不必把波动力学推广到磁场，因为在电子光学中，从来不必超过衍射问题的基尔霍夫近似。这种近似所依据的假定在电子光学中完全得到证实。除了在原子核内部和紧靠原子核近旁的场外，在电子光学所用的电子波长范围内有明显变化的陡变电场是不存在的。这对于磁场更为真实，可由克莱因-戈登或狄喇克波动方程推知的特殊的磁衍射效应都太小，以致不能用自由电子的实验测出。因此，记住下面将说明的注意事项，就可放心地应用基尔霍夫衍射理论（§ 8.3），它的略加推广的形式可概括如下：

I. 按几何光学法则的计算，从光源到障碍物或物体沿光线度量等光学长度作出波阵面。

II. 如果障碍物是一暗屏，则认为波阵面不受阻挡的部分在位相和振幅上都不受干扰，而其余部分被挡掉了。在部分透明物

1) H. Boersch, *Naturwissenschaften*, **28** (1940), 709. Boersch 的衍射照片
复制于 W. Glaser, *Grundlagen der Elektronenoptik* (Wien, Springer,
1952), p. 548.

体的情况下，由几何光学定律描绘出通过物体的光线，位相和强度的变化由它的复折射率确定。这在所有实际情况中都证明是正确的，因为，例如在显微镜中，所考虑的物体厚度是这样小，以致物体内部的衍射效应可放心地忽略。

III. 为了计算距离很远的某一点处的衍射效应，例如在光学象中，则由几何光学法则计算由物体或障碍物处露出的波阵面上每一面元到这一点的透射，并且计及倾斜因子，对复振幅求和。

如果只存在电场，包括固态物质的原子结构引起的强微观场，它主要也是电场，则如上所概述的基尔霍夫方法可不加修正地运用到电子光学中。然而，如果存在磁场，就不再能通过沿着轨线画出相等数目的德布罗意波长来确定波阵面。正如本附录第3节末所指出的，磁场中的波阵面不再与轨线正交，而与总动量线即“ p 线”正交，后者没有简单的几何光学解释。从某一给定的波阵面出发，沿 p 线画出光学长度，原则上能确定各波阵面。实际上这种方法几乎毫无用处，因为它给出位相而不给出振幅。巧妙地用等效电透镜代替磁透镜成象，除了象的整体有一转动以及象有某种转动畸变外，两种透镜产生同样的象场，这样就能实际上避免上述的复杂性。忽略在传播过程中这些特殊磁效应，只在最后把它们加上去，就能放心地应用基尔霍夫方法，得出满足所有实际用途的结果。

虽然电子光学与光学有同样的一般数学基础，但其实际结构很不相同。实际的光学是在把透明或起反射作用的固体媒质研磨和抛光成适当形状表面的技术基础上发展起来的。在电子光学中只有一种媒质，即电磁场。当它涉及校正象差时，尤其是当空间电荷和空间电流由于实际原因不能用时，它就存在一些限制。在电子光学的发展中早已发现，只要人们仅考虑旋转对称场，就不可能作成无球面象差或无色差的发散透镜和系统。这就导致发展无旋转对称的系统，其中上述这些限制不成立，还导致发展具有弯曲光轴的系统，这种系统在光学中几乎不为人们所知。因此，光学仪器

和设计原理的知识，在电子光学中只就其能提出问题并促进创新而言才是有益的，要付诸实现则必须迥然不同。另一方面，同电子光学在第一个四分之一世纪时一样，基于这两个领域基本类似，光学的思想在今后很可能仍是有益的。

附录 3 一些积分的渐近逼近

本附录的目的是给正文中所涉及的一些带普遍性的方法提供数学背景,以便得出光学中经常出现的某些类型积分的渐近逼近.

§ 1 最速下降法

这是求下述类型复积分对于大的 k 值的渐近逼近的方法¹⁾:

$$\int g(z) e^{kf(z)} dz, \quad (1)$$

式中 $g(z)$ 和 $f(z)$ 与 k 无关.

现在, k 可看作是正实数, 下面的讨论中就是这样假定的. 然而事实上所给出的结果对于 k 的复值一般也是正确的, 这就需要对一个复变量(如 ζ) 函数的渐近展开作几点引述.

首先, 根据庞加莱的工作²⁾, 渐近展开的定义可陈述如下: 如果

$$F(\zeta) = \sum_{m=0}^n \frac{a_m}{\zeta^m} + R_n(\zeta), \quad (2)$$

式中, 对于一个给定区间内的 $\arg \zeta$, 当 $\zeta \rightarrow \infty$ 时, 对所有的 n , $\zeta^n R_n(\zeta) \rightarrow 0$, a_0, a_1, \dots, a_n 是常数, 则可写成

$$F(\zeta) \sim a_0 + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \dots, \quad (3)$$

(3)式右方称为对于该 $\arg \zeta$ 给定范围的 $F(\zeta)$ 的渐近展开.

如果 $F(\zeta)$ 是两个函数如 $G(\zeta)$ 与 $H(\zeta)$ 的商, 则可写成

$$G(\zeta) \sim H(\zeta) \left(a_0 + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \dots \right). \quad (4)$$

1) 原出自 P. Debye, *Math. Ann.*, **67** (1909), 535.

2) H. Poincaré, *Acta Math.*, **8** (1886), 295.

事实上,应着重指出,进一步讨论时,所考虑的展开是按(4)式右方的形式, $H(\zeta)$ 是 $\exp(a\zeta)$, 其中 a 是某一常数。

现在扼要陈述渐近展开的某些主要性质¹⁾。如果 $|\zeta|$ 充分大时,(3)式的级数停止或收敛,则该级数是渐近的;但对于 $|\zeta|$ 的任意值,它常常未能收敛。一般地说,对于给定的 $F(\zeta)$,一种特殊的展开只对 $\arg \zeta$ 的一个特定范围成立;如果它对所有的 $\arg \zeta$ 都成立,则它是收敛的。还有,对于给定的 $F(\zeta)$,在 $\arg \zeta$ 的适当范围内,渐近展开是唯一的,其意义是(3)式中各系数都是唯一的;另一方面,任一函数的渐近展开也属于无穷多个其他函数,例如对于

$$-\frac{1}{2}\pi < \arg \zeta < \frac{1}{2}\pi, F(\zeta) + e^{-\zeta} \text{ 与 } F(\zeta) \text{ 二者的渐近展开相同。}$$

两个函数乘积的渐近展开由它们各自的渐近展开相乘得出。最后,(3)式可逐项积分,从而无条件地得出 $F(\zeta)$ 积分的渐近展开;它也可以逐项微分,只要它存在,就得出 $F(\zeta)$ 微分的渐近展开。

一般地说,对于一个给定的(充分大的) $|\zeta|$ 值,(3)式各项的模开头逐项减小到一极小值,随后又增大。粗略地说,如果对展开式求和到最小项前任何项,则误差具有第一个省略项的数量级²⁾。显然, $|\zeta|$ 越大,可用的准确度就越高。在物理应用中,通常只用第一项就足够了;借用电磁理论的一个例子来说明,一个有限源分布的辐射场就是完全场按与源距离的逆幂渐近展开的第一项。

得出(1)式按 k 的逆幂渐近展开的方法的根据是将它与下述形式的积分联系起来³⁾,

$$\int_0^\infty h(\mu) e^{-k\mu^2} d\mu. \quad (5)$$

1) 例如参看 H. and B. S. Jeffreys, *Methods of Mathematical Physics* (Cambridge University Press, 1946), 第 17 章; 或 A. Erdélyi, *Asymptotic Expansions* (New York, Dover Publications, 1956)。

2) 估算误差的方法见 H. and B. S. Jeffreys, 上述引著, 第 17 章。

3) 被积函数的指数中选择 μ^2 而不选择 μ 的一次幂(或其他次幂)并没有很大意义;选偶次幂是方便的,因为常会碰到(1)式的积分路线起点和终点都在无穷远处,这时用 $-\infty$ 代替下限,就可将(1)式变换为(5)式。

为了能容易地导出(5)式的渐近展开，办法是把 $h(\mu)$ 展开为 μ 的升幂级数，并逐项积分。

最后这一段论述实际上就是沃森 (Watson) 引理¹⁾。它可陈述为下述形式，设

$$h(\mu) = \frac{1}{\mu^\alpha} \sum_{s=0}^{\infty} c_s \mu^{\beta s}, \quad (6)$$

其收敛半径为 ρ ，式中 β 是正实数，并且 α 的实部小于 1。设存在一个实数 d ，使得对于所有大于 ρ 的实数值 μ ， $\mu^\alpha e^{-d\mu^2} h(\mu)$ 有界。则(用 Γ 表示伽玛函数)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2k^{\frac{1}{2}(1-\alpha)}} \left\{ c_0 \Gamma\left(\frac{-\alpha+1}{2}\right) + c_1 \Gamma\left(\frac{\beta-\alpha+1}{2}\right) \frac{1}{k^{\frac{1}{2}\beta}} \right. \\ & \left. + c_2 \Gamma\left(\frac{2\beta-\alpha+1}{2}\right) \frac{1}{k^\beta} + c_3 \Gamma\left(\frac{3\beta-\alpha+1}{2}\right) \frac{1}{k^{\frac{3}{2}\beta}} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

是(5)式的渐近展开。

在物理上感兴趣的情形中，很可能是 α 为零而 β 为 1。正如前已提出的，(7)式第一项也常提供了足够的近似。

为了能改变积分变量，以便用一个或多个(5)式类型的积分来表示(1)式，这就必须用一些线段组成积分路线，沿着其中每一线段， $f(z)$ 的虚部为常数，而 $f(z)$ 的实部单调下降到 $-\infty$ 。如果情况不是这样，则第一步要适当改变路线。当然，路线的改变由复平面内积分的基本规则所支配；这里将只是说明，怎样才能利用一些具有所需性质的线段使路线闭合，并已假定可尝试用标准方法对任何余下的围道积分求值。

对于下述路线，可作出某些一般性的评述，沿着这些路线， $f(z)$ 的虚部为常数，而不管特定函数的性质如何。它们足以说明复平面内的两点怎样按所要求的方式相连接，尽管当 $f(z)$ 有奇点时，这种方法或许失效。就目前而论，满足

$$\frac{df}{dz} = 0 \quad (8)$$

1) G. N. Watson, *Theory of Bessel Functions* (Cambridge University Press, 2nd ed., 1948), 第 8 章。也见于 H. and B. S. Jeffreys, 上述引著, 第 17 章。

的那些点起着尤其重要的作用。这些点称为鞍点，因为在这些点处， $f(z)$ 的实部和虚部对于复平面中的位置是平稳的，不是绝对极大或极小¹⁾。

现在，如果

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y), \quad (9)$$

则由柯西-黎曼关系不难证明，沿任一 $v(x, y) = \text{常数}$ 的路线， $u(x, y)$ 的变化率只能在鞍点处为零。换句话说，在不通过鞍点的路线 $v(x, y) = \text{常数}$ 上， $u(x, y)$ 始终严格单调；而在通过一个或多个鞍点的路线 $v(x, y) = \text{常数}$ 上， $u(x, y)$ 在相邻的鞍点之间以及从始末两头的鞍点到相应的路线端点之间都严格单调。事实上，从任何一点出发， $u(x, y)$ 下降最快的方向就是沿着 $v(x, y) = \text{常数}$ 的方向，在这个意义上说，这些路线就是最速下降路线。只要 $f(z)$ 是单值的，或者经分支切割而成为单值的，就可得出，从任一点 (x_0, y_0) 出发，可以选取一条路线 $v(x, y) = v(x_0, y_0)$ ，它在 $u(x, y)$ 减小的方向上总是连续的，并终止于无穷远或奇点处。不难看出，除了那些奇点以外，只有可以被一条路线 $v(x, y) = \text{常数}$ 从多于一个方向通过的那些点处，才有 $df/dz = 0$ ；因此，一旦路线 $v(x, y) = v(x_0, y_0)$ 已正确地始发，随着 $u(x, y)$ 减小，如果不遇到鞍点，就不发生改变路线的问题，在遇到鞍点的情况下，至少有一个减小 $u(x, y)$ 的方向可以利用。

现在假定(1)式中给定积分路线的两个端点是 A 和 B ，并假定有可能找到由 A 和 B 分别到无穷远的最速下降路线。如果这两条路线在无穷远的终端是在同一积分收敛区域内，则步骤是完备的；但如果无穷远的终端是在不同的收敛区域内，则必须用一条路线 $v(x, y) = \text{常数}$ 把它们连接起来，沿着这条路线， $u(x, y)$ 的变化率只改变符号一次（在鞍点处），或者如有必要，就用几条这样的路线经过无穷远处的一些中间区域。对于所涉及的每一条不同的路线，都可得出在(4)式广义上的一个渐近展开，但原来积分真正的

1) 解析函数的实部和虚部在复平面内没有绝对极大或极小。

渐近展开只不过是在 $u(x, y)$ 达到其最大值的路线上得出的¹⁾. 当最速下降路线终止于奇点时, 类似的说法也适用.

应当指出, 有些情形超出了刚才所述方法的精度范围, 不过略加修正仍可处理. 作为第一步, 注意到用任一正数(与 k 无关)来替换(5)式中的上限, 渐近展开式(7)保持不变. 因此, 可以处理这种情况, 其中含有一条最速下降路线, 沿着这条路线, $u(x, y)$ 趋向下降到一有限值而不是 $-\infty$. 还有, 可以用一条路线 $v(x, y)$ = 常数通过多个点, 在这些点处, $u(x, y)$ 的变化率改变符号.

最速下降法适用的也许是最普通的情况, 是其中积分路线 $v(x, y)$ = 常数从一个鞍点到无穷远而 $u(x, y)$ 一路上单调下降的情况²⁾. 这时不难导出渐近展开第一项的熟知公式. 因假定鞍点在 z_0 处, 并用变换

$$f(z) = f(z_0) - \mu^2 \quad (10)$$

改变(1)式中的积分变量, 所以(1)式变为

$$-2e^{kf(z_0)} \int_0^\infty \frac{g(z)}{f'(z)} \mu e^{-k\mu^2} d\mu. \quad (11)$$

为了得到(11)式的渐近展开的第一项, 需要求出 $\mu = 0 (z = z_0)$ 处的 $\mu g(z)/f'(z)$ 的值. 只要 $f''(z_0)$ 不为零, 并且 $g(z_0)$ 不为无穷大, 不难看出它等于 $g(z_0)/\sqrt{-2f''(z_0)}$, 其中平方根的符号必须由考察每一特定情况来确定. 因此, 所要求的近似为

$$\sqrt{-\frac{\pi}{2f''(z_0)}} \cdot g(z_0) \frac{e^{kf(z_0)}}{\sqrt{k}}. \quad (12)$$

关于近似式(12)需要补充或无效的情况, 应加上几点说明. 当然, 把 $\mu g(z)/f'(z)$ 展开成 μ 的幂级数, 并对(11)式逐项积分,

1) 当然, 可能在多于一条路线上, $u(x, y)$ 达到最大值.

2) 严格地说, 最普通的情况是其中路线起点和终点都在无穷远处, 而 $u(x, y)$ 从 $-\infty$ 单调上升到鞍点处的极大值再从这一极大值单调下降到 $-\infty$ 的情况. 在这种情况下, 只要乘以 2, (12)式仍成立; 但对于其后的讨论, 更方便的是取一条从鞍点开始的路线. 因为安排积分路线从鞍点开始或通过鞍点的情况是这样寻常, 以致最速下降法有时称为鞍点法.

就得出完全的渐近展开。如(7)式所示，渐近展开第一项中出现的 k 的幂是由 $\mu g(z)/f'(z)$ 级数展开第一项 μ 的幂决定的。如果这一级数展开的第一项是 $A\mu^{-p}$ ，为了积分收敛，其中 p 必须小于 1，则渐近展开的第一项为

$$-A\Gamma\left(\frac{-p+1}{2}\right)\frac{e^{kf(z_0)}}{k^{\frac{1}{2}(1-p)}}. \quad (13)$$

因此，如果 $g(z_0)$ 为无穷大或 $f''(z_0)$ 为零，则(12)式无效，必须用(13)式代替。在这些情况下，当 k 趋于无穷大时，因子乘以 $\exp\{kf(z_0)\}$ 趋于零比 $k^{-\frac{1}{2}}$ 趋于零更慢。如果 $g(z_0) = 0$ 或 $f''(z_0)$ 为无穷大，(12)式并非不正确，而只是表明，当 k 趋于无穷大时，因子乘以 $\exp\{kf(z_0)\}$ 趋于零比 $k^{-\frac{1}{2}}$ 趋于零更快。

如果积分路线是一条最速下降路线，同前面一样伸到无穷远处，但从不是鞍点的一点开始，则不难看出，渐近展开第一项的非指数部分一般与 k^{-1} 成正比，与(12)式的因子 $k^{-1/2}$ 不同。还有，如果 $g(z)/f'(z)$ 在端点是奇点或零点，则 k 的幂是不同的，取决于奇点或零点的阶。

迄今所述已相当全面地包括了在严格的数学意义上由渐近展开的最速下降法得出的结果，其中允许 k 变得无限大，并假定其他参量具有与 k 无关的规定值。但已证明，渐近逼近的形式取决于特定的条件，例如，最速下降路线是否从鞍点开始。也就是说，它可在下述意义上取决于除 k 以外的一些参量，即这些参量取某些临界值时，它突然变化¹⁾。因此对于任一给定的 k 值，无论它有多大，只要其他参量的值充分接近于渐近形式将会不同的那些值，则上述公式显然不能提供良好的数值近似。所以对于进一步的表达式有一实际要求，这些表达式要给出从一种渐近形式到另一种渐近形式的光滑过渡。它们自然是比(13)式更复杂的 k 的函数，而值得提到的是三种可满意地处理的情况。在下面扼要的叙述中不言而喻地假定，每一种情况下，唯一的复杂性就是在讨论中具体规

1) 这在本质上是一个非一致收敛的问题。举一个寻常的例子来说明，当 $k \rightarrow \infty$ 时，对于 $a \neq 0$ ， $1/(1+ka) \sim 1/ka$ ，而对于 $a = 0$ ， $1/(1+ka) \sim 1$ 。

定的复杂性。

首先，假定 $f''(z_0)$ 接近于零。因此(12)式只对于增到很大的 k 值才是良好的近似；并要求有一个表达式，以实现从(12)式过渡到 $f''(z_0) = 0$ 时适用的不同形式。因为 $f''(z_0)$ 几乎为零，所以必须有第二个鞍点，如 z_1 ，靠近 z_0 。因此，作下述变换：

$$f(z) = \alpha - \beta\mu + \frac{1}{3}\mu^3,$$

式中

$$\alpha = \frac{1}{2}[f(z_1) + f(z_0)], \quad \frac{2}{3}\beta^{3/2} = \frac{1}{2}[f(z_1) - f(z_0)],$$

就可得出所要求的表达式。这一变换给出在 z_0 和 z_1 的近旁 z 是 μ 的正则函数，并导致用爱里积分及其对自变量 $k\beta$ 的一阶微商表示的渐近展开¹⁾。

其次，假定 $\mu g(z)/f'(z)$ 作为 μ 的幂级数的展开式有一收敛半径，因为 $g(z)$ 有一个一阶极点靠近鞍点，所以收敛半径接近于零。还有，(12)式只对于增到很大的 k 值才是良好的近似，并要求有一个表达式，以实现从(12)式过渡到极点在鞍点时适用的不同形式。这种情况已被不同作者讨论过²⁾。想法是把被积函数的非指数部分写成两项之和，一项只含极点，另一项是正则的。因此，后者可用通常的方法处理，而前者得出一般带有一个复自变量的菲涅耳积分或误差积分。

最后，假定最速下降路线的起点不是鞍点，但很接近鞍点。在这种情况下，显然仍能用误差积分来连接两种渐近形式³⁾。

1) 爱里积分在这类一致逼近中的作用早已被承认（例如参看 H. and B. S. Jeffreys, 同上引著, 第 17 章），但只在较近的时期才充分探讨过这里概述的一种满意的方法 [见 C. Chester, B. Friedman, and F. Ursell, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **53** (1957), 599].

2) W. Pauli, *Phys. Rev.*, **54** (1938), 925. H. Ott, *Ann. d. Physik* (5), **43** (1943), 393. P. C. Clemmow, *Quart. J. Mech. Appl. Maths.*, **3** (1950), 241; *Proc. Roy. Soc., A*, **205** (1951), 286. B. L. van der Waerden, *Appl. Sci. Res., Hague*, **B**, **2** (1952), 33.

3) P. C. Clemmow, *Quart. J. Mech. Appl. Maths.*, **3** (1950), 241.

§ 2 稳相法

这是不同于最速下降法的另一种方法，虽然二者很类似。尽管这种方法也许不大常见，在解析上不易立即使人信服，但它常有与物理问题密切联系的长处。所考虑的积分写成

$$\int g(z) e^{ikf(z)} dz \quad (14)$$

比写成(1)的形式更恰当，在实际问题中，指数部分通常代表行波。

保留(9)式的记法，所用的积分路线为 $v(x, y) = \text{常数}$ ；但在(14)式中，这意味着指数的振幅部分沿着此路线为一常数，而位相部分变化极迅速，情况与最速下降法相反。仍然可以确定，只有邻近鞍点或端点的那些部分路线才对积分有重要的贡献，但现在是用“位相干涉”（参看上册，§ 8.3, 505 页）而不是振幅衰变来对产生这种情况的机制作物理解释。

稳相法首先由开耳芬¹⁾明确引入。其后，沃森²⁾作出严格的数学处理以证明上面所述；这种处理基于下述事实：如果 $0 < m < 1$, α 是一个正常数，并且在 $x \geq 0$ 的区域内， $F(x)$ 的总涨落有界，则当 $k \rightarrow \infty$ 时³⁾，

$$k^m \int_0^a x^{m-1} F(x) e^{ikx} dx \rightarrow F(0) \Gamma(m) e^{\frac{1}{2} i m \pi}.$$

然而沃森的讨论在范围上颇受限制。特别是看来它不能得出完全的渐近展开。对于其中 $f(z)$ 是实函数以及积分路线限制在实轴上的情况，这已相当详细地由福克⁴⁾给出。福克利用中和函数，这是范德考普特 (van der Corput)⁵⁾较早就提出过的方法。

1) W. Thomson, *Proc. Roy. Soc., A*, **42** (1887), 80.

2) G. N. Watson, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **19** (1918), 49.

3) T. J. I'A. Bromwich, *An Introduction to the Theory of Infinite Series* (London, Macmillan, 1908), p. 447 给出的结果。

4) J. Focke, *Ber. Sächs. Ges. (Ak'd.) Wiss.*, **101** (1954), Heft 3.

5) J. G. van der Corput, *Indag. Math.*, **10** (1948), 201,

稳相法的推论几乎完全仿照最速下降法的推论。例如，在(14)式中积分路线从 z_0 处一鞍点出发，沿 $v(x, y)$ —常数伸至无穷远，且没有遇到其他鞍点的情况下，与(12)式对应的近似式为

$$\sqrt{-\frac{\pi}{2f''(z_0)}} g(z_0) e^{-\frac{1}{4}I_n} \frac{e^{ikf(z_0)}}{\sqrt{k}}. \quad (15)$$

但应注意两种方法存在某种区别的这一方面。利用从一鞍点出发而不伸至无穷远的最速下降路线，路线端点对严格渐近展开的贡献与鞍点的贡献相比为零，因它含有附加的指数因子。另一方面，利用同一类型的稳相路线，路线端点的贡献一般与鞍点的贡献同一数量级，仅除以 $k^{1/2}$ ；所以，仅当单独保留渐近展开的第一项时，它才被排除在渐近逼近之外。

总之，不管最速下降法和稳相法的数学表达式如何，二者均取决于积分路线的选择，使得由于被积函数的指数因子的缘故，除了在某些临界点近旁外，被积函数对积分的贡献可忽略，这些临界点就是积分路线的鞍点或端点。

§ 3 二重积分

§ 8.3 和 § 9.1 中已表明，场经一开孔衍射的问题导致下述形式的二重积分：

$$\iint g(x, y) e^{ikf(x, y)} dx dy, \quad (16)$$

式中 $g(x, y)$ 和 $f(x, y)$ 与 k 无关，积分域由该孔确定。显然，(16)式与(14)式相似，渐近展开同样可提供对于大的 k 值的近似式。

二重积分的渐近展开理论比单重积分自然更为复杂。复平面上的积分方法只能方便地用于单重积分，因此对于二重积分，看来似乎必须基于与本附录前几页所述稍有不同的方法来着手处理。

福克¹⁾广泛地讨论了 $f(x, y)$ 是实函数的情况，他用到中和函

1) J. Focke (上述引文)。又见 D. S. Jones and M. Kline, *J. Math. Phys.*, **37** (1958), 1; N. Chako, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **247** (1958), 436, 580, 637; M. Kline and I. W. Kay, *Electromagnetic Theory and Geometrical Optics* (New York, Interscience Publishers, 1965)，第12章。

数的概念，在前面引过的论文中已涉及这一概念对单重积分的应用。分析再次表明，对渐近展开的贡献仅来自某些临界点的邻近区域，而不同类的临界点在其各自贡献的首项中引起 k 的不同幂¹⁾。

有三类临界点。现在扼要讨论它们各自对渐近展开所作贡献的首项，不考虑一个临界点属于不止一类的情况。

第一类临界点是在积分域内的点，在这些点处，

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (17)$$

因此在临界点 (x_0, y_0) 附近，

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \alpha(x - x_0)^2 + \frac{1}{2} \beta(y - y_0)^2 + \gamma(x - x_0)(y - y_0) + \dots, \quad (18)$$

式中 $\alpha = \partial^2 f / \partial x^2$, $\beta = \partial^2 f / \partial y^2$, $\gamma = \partial^2 f / \partial x \partial y$, 所有的偏微商都在 (x_0, y_0) 处计值。现在选择两个新的积分变量 ξ, η , 使得

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \alpha \xi^2 + \frac{1}{2} \beta \eta^2 + \gamma \xi \eta. \quad (19)$$

因此(16)式所要求的渐近逼近为

$$g(x_0, y_0) e^{ikf(x_0, y_0)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2} ik(\alpha \xi^2 + \beta \eta^2 + 2\gamma \xi \eta)} d\xi d\eta \\ = \frac{2\pi i \sigma}{\sqrt{|\alpha \beta - \gamma^2|}} g(x_0, y_0) \frac{e^{ikf(x_0, y_0)}}{k}. \quad (20)$$

式中取正的平方根²⁾，并且

1) J. G. van der Corput 在 *Indag. Math.*, **10** (1948), 201 中，曾扼要提到二重积分的临界点；N. G. van Kampen 在 *Physica*, **14** (1949), 575 中，曾指出它们对光学的定性意义。

2) 平方根号内的项有一种简单的几何解释。考虑曲面 $z = f(x, y)$ 。设 R_1 和 R_2 是主曲率半径， $K = 1/R_1 R_2$ 是曲面上一个代表点处的高斯曲率。则[例如见 G. Salmon, *Analytic Geometry of Three Dimensions*, Vol. I, 由 R. A. P. Rogers 修订 (London, Longmans, Green & Co., 5th ed., 1912), p. 411]，

$$K = \frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2},$$

$$\sigma = \begin{cases} +1, & \text{对于 } \alpha\beta > \gamma^2, \alpha > 0, \\ -1, & \text{对于 } \alpha\beta > \gamma^2, \alpha < 0, \\ -i, & \text{对于 } \alpha\beta < \gamma^2. \end{cases} \quad (21)$$

(20) 式是与单重积分渐近逼近式(15)类似的二重积分渐近逼近式。

第二类临界点是积分域周界曲线上的点，在这些点处， $\partial f / \partial s = 0$ ，式中 ds 是周界曲线的弧元。对渐近展开作相应贡献的首项非指数部分中 k 的幂是 $k^{-3/2}$ ，而不是(20)式的因子 k^{-1} 。

最后，第三类临界点是积分域周界曲线上的隅角点，即该曲线上斜率不连续的点。在这种情况下，相应的因子是 k^{-2} 。

式中 $f_x = \partial f / \partial x$, $f_{xx} = \partial^2 f / \partial x^2$, 等等。在第一类临界点处， $f_x = f_{xx} = 0$.
 $f_{xx} = \alpha$, 等等。此式化为

$$K = \alpha\beta - \gamma^2.$$

附录4 狄喇克 δ 函数

本附录的目的是概述 δ 函数¹⁾的主要性质，已发现它可用来代表点源，点电荷等。这个函数广泛用于量子力学以及经典应用数学中，它可由下式定义：

$$\left. \begin{array}{l} \delta(x) = 0, \text{ 当 } x \neq 0, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1. \end{array} \right\} \quad (1)$$

显然， $\delta(x)$ 不是寻常数学意义下的函数²⁾，因为如果一个函数除在一点外处处为零，而且这个函数的积分存在，则积分值也必然为零。更为恰当的是把 $\delta(x)$ 看作具有某种符号意义的量。

考虑一个函数集 $\delta(x, \mu)$ ，随着 μ 的增大，它们仅在原点周围越来越小的 x 区间上明显不等于零，并且使得对于所有的 μ 值，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x, \mu) dx = 1. \quad (2)$$

函数[见图 8]

$$\delta(x, \mu) = \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} e^{-\mu^2 x^2} \quad (3)$$

就是一个例子。

1) 亦通称脉冲函数。它因 P. 狄喇克 *The Principles of Quantum Mechanics* (Oxford, Clarendon Press, 1930) 一书而引起重视，但更早得多主要通过 O. Heaviside 的著作已被数学家和物理学家得知。参看 B. van der Pol and H. Bremmer, *Operational Calculus based on the two-sided Laplace Integral* (Cambridge University Press, 1950), pp. 62—66.

2) δ 函数理论可用分布的概念从数学上严格得出，如 L. Schwartz 在其 *Théorie des distributions* [Paris, Hermann et Cie., Vol. I (1950), Vol. II (1951)] 中所述。Schwartz 理论的简化形式由 G. Temple, *Proc. Roy. Soc., A*, 228 (1955), 175 一文导出，其充分阐述见 M. J. Lighthill, *An Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions* (Cambridge University Press, 1958)。

把狄喇克 δ 函数解释为这样的一个函数集当 $\mu \rightarrow \infty$ 时的极限, 这种尝试是很吸引人的, 但必须注意到 $\delta(x, \mu)$ 的极限不必对所有的 x 都存在. 然而

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x, \mu) dx \quad (4)$$

一定存在, 并等于 1. 我们把任何涉及 $\delta(x)$ 的运算理解为: 利用适当选择如(3)式那样的集内一个函数 $\delta(x, \mu)$, 就可进行这种运算, 并在计算之末取极限 $\mu \rightarrow \infty$. 利用这种解释, (1b) 式显然成立. 只要函数 $\delta(x, \mu)$ 在原点附近的振荡 (即使有也) 不太激烈, 则 $\delta(x, \mu)$ 的严格选择并不重要.

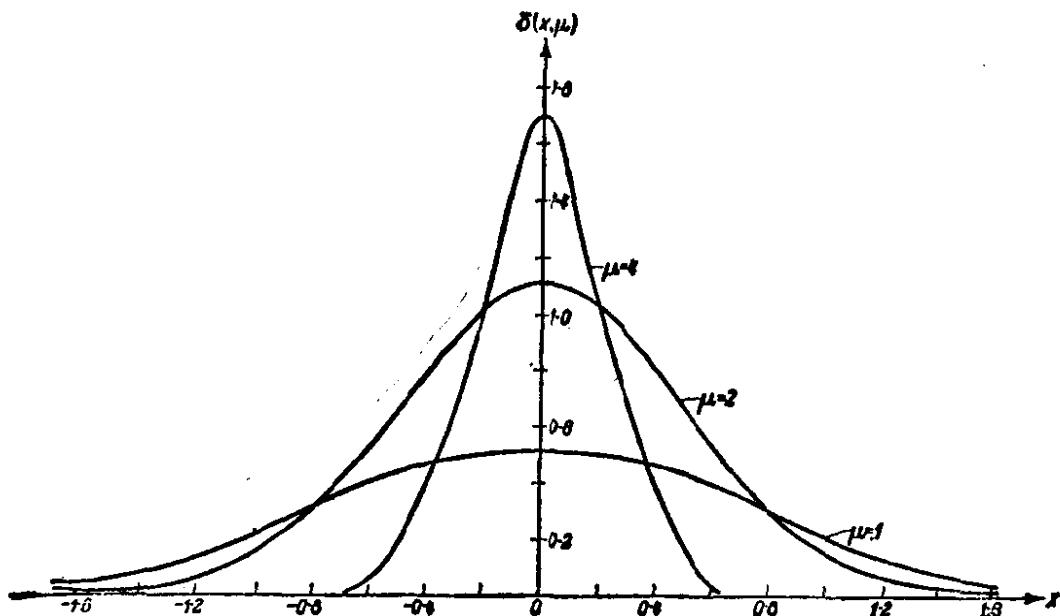


图 8 狄喇克 δ 函数意义的图示 函数 $\delta(x, \mu) = \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} e^{-\mu^2 x^2}$,

对于 $\mu = 1, 2, 4$. 每一条曲线下方总面积为 1

狄喇克 δ 函数的一个重要性质是所谓筛选性, 由下式表示:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a). \quad (5)$$

式中 $f(x)$ 是 x 的任一连续函数. 如果用 $\delta(x - a, \mu)$ 代替 $\delta(x - a)$, 并对大的 μ 值考察积分的特性, 就可立即看出(5)式是正确的. 显然, 当 μ 很大时,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - a, \mu) dx \quad (6)$$

本质上只取决于 $f(x)$ 在最靠近 $x = a$ 点处的值, 取 μ 充分大, 用 $f(a)$ 代替 $f(x)$ 的误差就可忽略。利用(1b)式就得出(5)式。这个结果意味着, 用 $\delta(x - a)$ 乘一个连续函数并对所有的 x 值积分这一步骤与用 a 代替这个函数的自变量这一步骤等价。实际上, 为了使这个结果成立, 积分范围不必取从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 。只需把点 $x = a$ 包含在积分域内即可。这个结果也可记作

$$f(x)\delta(x - a) = f(a)\delta(x - a), \quad (7)$$

上式的含义是, 当用作积分中的因子时, 等式两边给出相同的结果。特别是 $f(x) = x$, $a = 0$ 时, (7)式给出

$$x\delta(x) = 0. \quad (8)$$

利用类似的解释, 不难证明下列关系式:

$$\delta(-x) = \delta(x), \quad (9)$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x), \quad (10)$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} \{\delta(x - a) + \delta(x + a)\}, \quad (11)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(a - x)\delta(x - b)dx = \delta(a - b). \quad (12)$$

例如, 为了证明(10)式, 我们比较 $f(x)\delta(ax)$ 和 $f(x)\frac{1}{|a|}\delta(x)$ 的积分。则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(ax)dx = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{y}{a}\right)\delta(y)\frac{1}{a}dy = \frac{1}{|a|}f(0),$$

式中第二个积分前面取正或负号取决于 $a \geq 0$ 。由于(5)式, 还有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{1}{|a|}\delta(x)dx = \frac{1}{|a|}f(0).$$

可见两个积分相等, 这就是(10)式的含义。同样地, (12)式意味着, 如果等式两边分别乘以一个 a 或 b 的连续函数并对所有的 a 或 b 值积分, 则得到一个恒等式。

其次, 考虑对于 δ 函数的微商可给以什么解释。利用“近似函

数 $\delta(x, \mu)$ 并分部积分, 则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta'(x, \mu) dx = f(\infty) \delta(\infty, \mu) - f(-\infty) \delta(-\infty, \mu) \\ - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \delta(x, \mu) dx.$$

当 $\mu \rightarrow \infty$ 时求极限, 右方前两项为零, 得出

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta'(x) dx = -f'(0). \quad (13)$$

重复这一步骤, 求得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta^{(n)}(x) dx = (-1)^n f^{(n)}(0). \quad (14)$$

不难证明下列关系式:

$$\delta'(-x) = -\delta'(x), \quad (15)$$

$$x\delta'(x) = -\delta(x). \quad (16)$$

利用亥维塞单位函数(又称阶跃函数) $U(x)$ 来表示狄喇克 δ 函数, 常常是方便的(例如, 参看附录 6), 函数 $U(x)$ 定义为

$$\begin{cases} U(x) = 0, & \text{当 } x < 0 \text{ 时,} \\ & \\ & = 1, \quad \text{当 } x > 0 \text{ 时.} \end{cases} \quad (17)$$

如果同前面一样, 用撇号表示对自变量 x 的微商, 则由分部积分($x_1 > 0, x_2 > 0$), 形式上得出,

$$\begin{aligned} \int_{-x_1}^{x_2} f(x) U'(x) dx &= [f(x) U(x)]_{-x_1}^{x_2} - \int_{-x_1}^{x_2} f'(x) U(x) dx \\ &= f(x_2) - \int_0^{x_2} f'(x) dx \\ &= f(x_2) - f(x_2) + f(0) \\ &= f(0). \end{aligned}$$

如果令 $x = y - a$, $f(x) = f(y - a) = F(y)$, 并取极限 $x_1 \rightarrow \infty$, $x_2 \rightarrow \infty$, 则上式变为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(y) U'(y - a) dy = F(a),$$

因此 U' 具有筛选性. 特别是令 $F \equiv 1, a = 0$, 这个关系式变为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U'(y) dy = 1,$$

它表明 U' 满足 (1b) 形式的关系。而且当 $x \neq 0$ 时, $U'(x) = 0$ 。因此可认为单位函数的微商与 δ 函数等同:

$$\delta(x) = \frac{d}{dx} U(x). \quad (18)$$

δ 函数也可利用下述傅里叶积分定理引入:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ik(x-a)} dx. \quad (19)$$

如果令

$$K(x-a, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\mu}^{\mu} e^{-ik(x-a)} dk = \frac{\sin \mu(x-a)}{\pi(x-a)}, \quad (20)$$

并颠倒积分次序, 则(19)式可形式上写成

$$f(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) K(x-a) dx, \quad (21)$$

式中 $K(x-a)$ 看作 $\mu \rightarrow \infty$ 时 $K(x-a, \mu)$ 的极限。严格地说, 当 $x-a \neq 0$ 时, 这个极限在通常意义下是不存在的¹⁾, 但(21)式具有与前面所讨论的积分类似的符号意义, 即它应理解为

$$f(a) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) K(x-a, \mu) dx. \quad (22)$$

因此 K 具有筛选性。如果在(21)式中令 $f(x) = 1$, 则得知 $K(x)$ 对所有的 x 积分等于 1。因此, 得到狄喇克 δ 函数的另一种表示法, 即

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} dk, \quad (23)$$

即 $\delta(x)$ 可看作是 1 的傅里叶变换。令 $f(x) = e^{ikx}$, $a = 0$, 由(21)式得出逆关系式:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{ikx} dx = 1. \quad (24)$$

至此, 我们只考虑了一维空间, 但上述定义不难推广到多维空间。特别是, 考虑三维空间。则函数

$$\delta(x, y, z) = \delta(x)\delta(y)\delta(z), \quad (25)$$

1) 如果按 Cesàro 极限的意义解释, 则此极限存在, 并具有零值 [参看 B. van der Pol 和 H. Bremmer, 上述引著, pp. 100—104]。

它通常也表示为 $\delta(\mathbf{r})$, 其中 \mathbf{r} 是分量为 x, y, z 的矢量, 显然, 它满足类似于(1)式的关系式, 即

$$\left. \begin{aligned} \delta(x, y, z) &= 0, \text{ 当 } x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0, \\ \iiint_{-\infty}^{+\infty} \delta(x, y, z) dx dy dz &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

筛选性现在用下式表示:

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z) \delta(x - a, y - b, z - c) dx dy dz = f(a, b, c), \quad (27)$$

并且 $\delta(x, y, z)$ 满足下列傅里叶互逆关系式:

$$\delta(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)} dk_x dk_y dk_z, \quad (28)$$

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} \delta(x, y, z) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} dx dy dz = 1. \quad (29)$$

附录 5 严格推导洛伦兹-洛伦茨定律 用到的一个数学引理(§2.4.2)

本附录将建立 § 2.4 中用到的一个引理, 根据这一引理, 当 $a \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \operatorname{curl} \int_{\sigma}^{\Sigma} \mathbf{Q}(\mathbf{r}') G(R) dV' &\rightarrow \int_{\sigma}^{\Sigma} \operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{Q}(\mathbf{r}') G(R) dV' \\ &+ \frac{8\pi}{3} \mathbf{Q}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (1)$$

式中 $\mathbf{Q}(\mathbf{r})$ 是位置的任一矢量函数, $G(R) = e^{ikR}/R$. 积分遍及外界面为曲面 Σ 而内界面为球面 σ 之间的全部体积, 该球的半径为 a , 其中心在位置矢量 $\mathbf{r}(x, y, z)$ 所规定的 P 点. R 表示距离 $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, 其中矢量 $\mathbf{r}'(x', y', z')$ 用来规定某一体积元 dV' 的位置.

设 \mathbf{A} 为位置的任一矢量函数. $\operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{A}$ 的分量为

$$(\operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{A})_x = \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2},$$

等等, 因此,

$$\begin{aligned} &\left(\operatorname{curl} \operatorname{curl} \int_{\sigma}^{\Sigma} \mathbf{Q} G dV' \right)_x \\ &= -\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \int_{\sigma}^{\Sigma} Q_y G dV' + \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \int_{\sigma}^{\Sigma} Q_z G dV' \\ &- \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \int_{\sigma}^{\Sigma} Q_x G dV'. \end{aligned} \quad (2)$$

现在, 对于任一可微标量函数 $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, 有

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma}^{\Sigma} F dV' = \int_{\sigma}^{\Sigma} \frac{\partial F}{\partial x} dV' + \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\delta x} \left[\int_{\sigma'}^{\Sigma} F dV' - \int_{\sigma}^{\Sigma} F dV' \right], \quad (3)$$

式中 σ' 表示半径为 a 而中心在 $T(x + \delta x, y, z)$ 点的小球面. 为了求出(3)式中极限的值, 注意到两个积分的差代表图 9 中用阴影

示出的两个区域的贡献。体积元可表示为 $\delta V' = -\delta S' \cdot \delta x \cdot \rho_x$ 的形式，式中 $\delta S'$ 是面元， ρ_x 是从点 P 指向外方的单位径向矢量 ρ 的 x 分量。因此

$$\lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\delta x} \left[\int_{\sigma'}^{\Sigma} F dV' - \int_{\sigma}^{\Sigma} F dV' \right] = - \int_{\sigma} F \rho_x dS'. \quad (4)$$

由(3)和(4)式，如果令 $F = Q_i(\mathbf{r})G(R)$ ，其中 $Q_i(j = x, y \text{ 或 } z)$ 是 \mathbf{Q} 的任一笛卡儿分量，则有

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma}^{\Sigma} (Q_i G) dV' = \int_{\sigma}^{\Sigma} \frac{\partial}{\partial x} (Q_i G) dV' - \int_{\sigma} (Q_i G) \rho_x dS'. \quad (5)$$

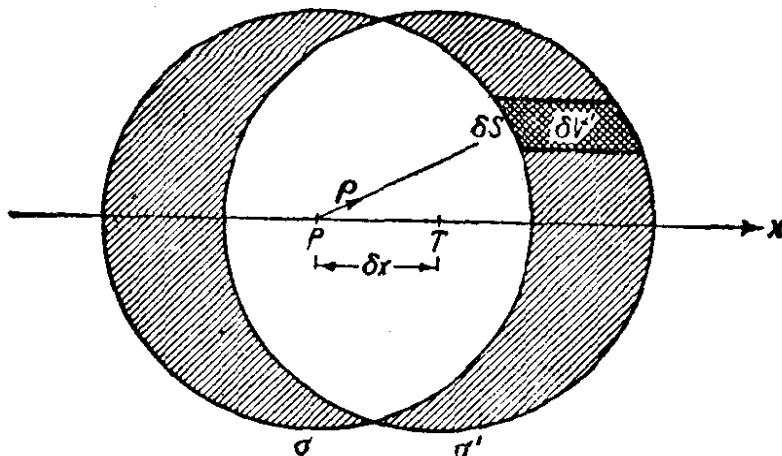


图9 $\lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\delta x} \left[\int_{\sigma'}^{\Sigma} F dV' - \int_{\sigma}^{\Sigma} F dV' \right]$ 的求值。

σ 的中心在 $P(x, y, z)$, σ' 的中心在 $T(x + \delta x, y, z)$

其次，考虑二阶偏微商。(5)式对 x 求微分并再次用到(5)式，得出

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{\sigma}^{\Sigma} (Q_i G) dV' &= \int_{\sigma}^{\Sigma} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (Q_i G) dV' - \int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial x} (Q_i G) \rho_x dS' \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} (Q_i G) \rho_x dS'. \end{aligned} \quad (6)$$

因为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x} &= \frac{dG}{dR} \frac{\partial R}{\partial x} = -\rho_x \frac{d}{dR} \frac{e^{ikR}}{R} = \rho_x \left(\frac{1}{R} - ik \right) \frac{e^{ikR}}{R}, \\ dS' &= a^2 d\Omega, \end{aligned} \right\} (7)$$

和

$$dS' = a^2 d\Omega,$$

式中 dQ 是立体角元,由此得出

$$\int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial x} (Q_i G) \rho_x dS' = \int_{\sigma} \rho_x Q_i \frac{\partial G}{\partial x} dS' = \int_Q \rho_x^2 Q_i e^{ikx} (1 - iak) dQ \\ \rightarrow \frac{4\pi}{3} Q_i(\mathbf{r}), \text{ 当 } a \rightarrow 0 \text{ 时}, \quad (8)$$

Ω 表示单位球的表面. (6)式中最后一个积分随 a 趋于零, 因此, 当 $a \rightarrow 0$ 时, 有

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{\sigma}^{\Sigma} (Q_i G) dV' \rightarrow \int_{\sigma}^{\Sigma} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (Q_i G) dV' = \frac{4\pi}{3} Q_i(\mathbf{r}). \quad (9)$$

混合二阶偏微商可用同样的方法求值, 例如有

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \int_{\sigma}^{\Sigma} (Q_i G) dV' \rightarrow \int_{\sigma}^{\Sigma} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} (Q_i G) dV'. \quad (10)$$

现在 $-\frac{4\pi}{3} Q_i(\mathbf{r})$ 项不存在, 这是因为对应于(8)式的积分为

$$\int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial x} (Q_i G) \rho_y dS' = \int_Q \rho_x \rho_y Q_i (1 - iak) dQ,$$

而它随 a 趋于零.

将(9)和(10)类型的式子代入(2)式, 当 $a \rightarrow 0$ 时, 求得

$$\left[\operatorname{curl} \operatorname{curl} \int_{\sigma}^{\Sigma} (\mathbf{Q} G) dV' \right]_x \rightarrow \left[\int_{\sigma}^{\Sigma} \operatorname{curl} \operatorname{curl} (\mathbf{Q} G) dV' \right]_x + \frac{8\pi}{3} Q_x. \quad (11)$$

对于 y 和 z 分量也得出类似的表达式. 将这三个表达式合成矢量形式, 就得到(1)式.

附录 6 电磁场中不连续性的传播(§3.1.1)

§ 3.1.1 中曾提到, 几何光学的程函方程与严格描述电磁场中不连续性传播的方程是等同的. 更普遍地说, 可以证明, 支配着与几何光线有关的电磁场性质的四个方程 § 3.1(11a)–(14a), 与联系着一运动的不连续曲面上各个场矢量的方程是等同的. 本附录的目的是论证这种数学上的等价性.

§ 1 联系各个场矢量不连续变化的关系式

§ 1.1.3 中研究过, 例如在透镜表面处, 由物质参量 ϵ 和 μ 突变而引起的场矢量的不连续性. 不连续场也可以是由完全不同的原因, 即由于光源突然开始辐射而引起的. 于是, 场传播到光源周围的空间内, 并且随着时间增加, 充满到越来越大的区域. 在这区域的界面上, 场具有不连续性: 在这区域内场矢量一般是有限的, 而在这区域外则为零. 首先, 我们将建立一些在场不连续的任一曲面上均成立的一般关系式. 为了简化起见, 假定在时间 $t > 0$ 的任一时刻只有一个这样的曲面, 而推广到几个不连续曲面(例如, 它们可以是由媒质中存在的障碍物上反射引起的)也是不难的.

设 $F(x, y, z, t) = 0$ 是至少有一个场矢量在其上不连续的任一曲面. 如果这个曲面在空间是固定的, 则 F 当然与 t 无关. 曲面两边的点可分别用不等式 $F < 0$ 和 $F > 0$ 加以区别. 设 E 是电矢量, 并且设

$$\left. \begin{aligned} E(x, y, z, t) &= E^{(1)}(x, y, z, t), & \text{当 } F(x, y, z, t) < 0, \\ &= E^{(2)}(x, y, z, t), & \text{当 } F(x, y, z, t) > 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

于是 E 可写成下述形式:

$$E = E^{(1)}U(-F) + E^{(2)}U(F), \quad (2)$$

式中 U 是亥维赛单位函数[参看附录 4 (17)式].

采用(2)式表示,推导麦克斯韦方程中 $\operatorname{curl} \mathbf{E}$, $\operatorname{div} \mathbf{E}$, $\partial \mathbf{E} / \partial t$ 等量的表达式。为了对含有一个不连续因子的和或积求微分, 我们使用通常的微分规则, 并利用附录 4 (18) 式,

$$\frac{d}{dx} U(x) = \delta(x), \quad (3)$$

式中 δ 是狄喇克 δ 函数。因此, 由(2)式得出, 例如,

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \mathbf{E} &= U(-F) \operatorname{curl} \mathbf{E}^{(1)} + U(F) \operatorname{curl} \mathbf{E}^{(2)} \\ &\quad + [\operatorname{grad} U(-F)] \times \mathbf{E}^{(1)} + [\operatorname{grad} U(F)] \times \mathbf{E}^{(2)}. \end{aligned} \quad (4)$$

现在

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} U(-F) &= -\operatorname{grad} U(F) = -\frac{dU(F)}{dF} \operatorname{grad} F \\ &= -\delta(F) \operatorname{grad} F, \end{aligned} \quad (5)$$

由(4)和(5)式得出,

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \mathbf{E} &= U(-F) \operatorname{curl} \mathbf{E}^{(1)} + U(F) \operatorname{curl} \mathbf{E}^{(2)} \\ &\quad + \delta(F) \operatorname{grad} F \times (\Delta \mathbf{E}), \end{aligned} \quad (6)$$

式中

$$\Delta \mathbf{E} = \mathbf{E}^{(2)} - \mathbf{E}^{(1)}. \quad (7)$$

用类似的方法求得

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= U(-F) \operatorname{div} \mathbf{E}^{(1)} + U(F) \operatorname{div} \mathbf{E}^{(2)} \\ &\quad + \delta(F) \operatorname{grad} F \cdot \Delta \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = U(-F) \frac{\partial \mathbf{E}^{(1)}}{\partial t} + U(F) \frac{\partial \mathbf{E}^{(2)}}{\partial t} + \delta(F) \frac{\partial F}{\partial t} \Delta \mathbf{E}. \quad (9)$$

电流和电荷可用与场矢量类似的形式表示, 但如果物质参量 ϵ 和 μ 在曲面 $F = 0$ 处不连续, 则应存在表示面电流密度 \mathbf{j} 和面电荷密度 ρ 的附加项。它们的贡献由 § 1.1 (17a) 和 (18a) 式给出, 总共有

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}^{(1)} U(-F) + \mathbf{j}^{(2)} U(F) + \mathbf{j} | \operatorname{grad} F | \delta(F), \quad (10)$$

$$\rho = \rho^{(1)} U(-F) + \rho^{(2)} U(F) + \hat{\rho} | \operatorname{grad} F | \delta(F). \quad (11)$$

现在把(6), (8), (9), (10), (11)和含有其他场矢量的类似表达式代入麦克斯韦方程 § 1.1(1)–(4)。带上标(1)的项抵消了,

带上标(2)的项也抵消了,这是因为不连续曲面两边的场分别满足麦克斯韦方程,剩余各项给出下列联系各个场矢量不连续变化的关系式:

$$\text{grad } F \times \Delta \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial F}{\partial t} \Delta \mathbf{D} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} |\text{grad } F|, \quad (12)$$

$$\text{grad } F \times \Delta \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial F}{\partial t} \Delta \mathbf{B} = 0, \quad (13)$$

$$\text{grad } F \cdot \Delta \mathbf{D} = 4\pi \hat{\rho} |\text{grad } F|, \quad (14)$$

$$\text{grad } F \cdot \Delta \mathbf{B} = 0. \quad (15)$$

注意到下述结果是有趣的:用差值 $\Delta \mathbf{E}$, $\Delta \mathbf{H}$, $\Delta \mathbf{D}$, $\Delta \mathbf{B}$ 代替矢量 \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , 用 \mathbf{j} 和 $\hat{\rho}$ 代替 \mathbf{j} 和 ρ , 以及用乘法算符 $\frac{1}{|\text{grad } F|}$
 $\times \frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{1}{|\text{grad } F|} \frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{1}{|\text{grad } F|} \frac{\partial F}{\partial z}$, $\frac{1}{|\text{grad } F|} \frac{\partial F}{\partial t}$ 代替微分算符
 $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial t}$, 就可在形式上由麦克斯韦方程得出上述这些方程.

设 \mathbf{n}_{12} 是垂直于不连续曲面并由 $F < 0$ 区(下标 1)指向 $F > 0$ 区(下标 2)的单位矢量,

$$\mathbf{n}_{12} = \frac{\text{grad } F}{|\text{grad } F|}. \quad (16)$$

又引入不连续曲面前进的速率 v . 对于从不连续曲面 $F(x, y, z, t) = 0$ 上一点到邻近的不连续曲面上一点的微小位移 $\delta \mathbf{r}(\delta x, \delta y, \delta z)$, 相应的时间变化为 δt , 于是

$$\text{grad } F \cdot \delta \mathbf{r} + \frac{\partial F}{\partial t} \delta t = 0. \quad (17)$$

特别是对于沿着法线的位移, $\delta \mathbf{r} = \delta s \mathbf{n}_{12}$, 因此速率 v 为

$$v = \frac{ds}{dt} = - \frac{1}{|\text{grad } F|} \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (18)$$

由此得出,(12)一(15)式也可以写成下列形式¹⁾

$$\mathbf{n}_{12} \times \Delta \mathbf{H} + \frac{\nu}{c} \Delta \mathbf{D} = \frac{4\pi}{c} \hat{\mathbf{j}}, \quad (12a)$$

$$\mathbf{n}_{12} \times \Delta \mathbf{E} - \frac{\nu}{c} \Delta \mathbf{B} = 0, \quad (13a)$$

$$\mathbf{n}_{12} \cdot \Delta \mathbf{D} = 4\pi \hat{\rho}, \quad (14a)$$

$$\mathbf{n}_{12} \cdot \Delta \mathbf{B} = 0. \quad (15a)$$

如果场矢量的不连续性是由在空间固定的曲面 $F(x, y, z) = 0$ 上物质参量 ϵ 和 μ 的突变引起的, 则 $\nu = 0$, 并且 (12a) — (15a) 化为 § 1.1(25),(23),(19) 和 (15) 式.

§ 2 运动的不连续曲面上的场

考虑一个由于存在突然开始辐射的光源而引起的运动的不连续曲面. 把这个曲面表示为下述形式:

$$F(x, y, z, t) = \mathcal{S}(x, y, z) - ct = 0, \quad (19)$$

式中 c 是真空光速. 这个不连续曲面上的场矢量将用小写字母表示,

$$\mathbf{e}(x, y, z) = \mathbf{E} \left[x, y, z, \frac{1}{c} \mathcal{S}(x, y, z) \right], \quad (20)$$

对于其他的场矢量也有类似的表达式. 现在, 在运动曲面之外的

1) 这些方程是看来早已为亥维赛所知的一组不连续关系式的推广. 也见于 A. E. H. Love, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 1 (1904), 56; H. Bateman, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics* (Cambridge University Press, 1932), p. 196; T. Levi-Civita, *Caractéristiques des Systèmes Différentiels et Propagation des Ondes* (Paris, Librairie Félix Alcan, 1932), § 10; R. K. Luneburg, *Mathematical Theory of Optics*, 油印文稿, Brown University, 1944; 印刷的改写本, 出版于 University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1964, § 6 and § 7; M. Kline, *Comm. Pure and Appl. Math.* 4 (1951), 239; A. Rubinowicz, *Acta Phys. Polonica*, 14 (1955), 209; M. Kline and I. W. Kay, *Electromagnetic Theory and Geometrical Optics* (New York, Interscience Publishers, 1965), pp. 37—51. 这里采用的推导方法出自 H. Bremmer, *Comm. Pure and Appl. Math.*, 4 (1951), 419.

区域(假定说, $F(x, y, z, t) > 0$), 场不存在, 因此根据(1)和(7)式, $\Delta \mathbf{E} = -\mathbf{E}^{(1)} = -\mathbf{e}$, 等等. 物质方程 § 1.1(10), (11)给出 $\mathbf{d} = \epsilon \mathbf{e}$, $\mathbf{b} = \mu \mathbf{h}$, 如果还令 $\mathbf{j} = 0$, $\rho = 0$, 则(12)–(15)式给出

$$\operatorname{grad} \mathcal{S} \times \mathbf{h} + \epsilon \mathbf{e} = 0, \quad (21)$$

$$\operatorname{grad} \mathcal{S} \times \mathbf{e} - \mu \mathbf{h} = 0, \quad (22)$$

$$\operatorname{grad} \mathcal{S} \cdot \mathbf{e} = 0, \quad (23)$$

$$\operatorname{grad} \mathcal{S} \cdot \mathbf{h} = 0. \quad (24)$$

这些方程在形式上与几何光学的基本方程 [§ 3.1(11a)–(14a)式]相同. 因此, 在一个运动的不连续曲面上的场矢量与对时谐场作几何光学近似有关的场矢量都严格遵守相同的方程, 这个运动的不连续曲面相应于几何波阵面¹⁾.

显然, 运动的不连续曲面必须遵守程函方程

$$\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial z}\right)^2 = n^2, \quad (25)$$

式中 $n^2 = \epsilon \mu$. 这个方程可象以前那样导出. 它是(21)和(22)式之间的相容条件, 由(21)和(22)式消去 \mathbf{h} 或 \mathbf{e} 并利用(23)或(24)式就得出此式. 根据(18), (19)和(25)式, 不连续曲面以速度 $v = c/n$ 传播.

1) 还可证明, \mathbf{e} 和 \mathbf{h} 遵守与几何光学场的复振幅矢量相同的输运方程 [§ 3.1 (41)和(42)式]. 这个结果首先由 R. K. Luneburg 得到, 上述引著, 1944, p. 46; 上述引著, 1964, p. 44. 又见 E. T. Copson, *Comm. Pure and Appl. Math.*, 4 (1951), 427; M. Kline and I. W. Kay, 上述引著, p. 162.

附录 7 泽尼克圆多项式(§9.2.1)

在本附录中，将更充分地研究 § 9.2.1 中曾扼要讨论过的圆多项式。泽尼克¹⁾在他的关于刀口检验和相衬法的重要论文中引入并最早研究过这些多项式；他和布林克曼（Brinkman）²⁾，以及奈波尔³⁾又进一步加以研究。其后巴蒂亚和沃耳夫⁴⁾只根据正交性和不变性的要求就导出了这些多项式；我们将大体上仿照他们的处理。

§ 1 某些一般考虑

不难证明，存在无限多个带两个实变量 x, y 的多项式的全集，这些多项式在单位圆内相互正交，即它们满足正交条件

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} V_{(\alpha)}^*(x, y) V_{(\beta)}(x, y) dx dy = A_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta}. \quad (1)$$

式中 $V_{(\alpha)}$ 和 $V_{(\beta)}$ 表示该集内两个典型多项式，星号表示复共轭， δ 是克朗内克符号， $A_{\alpha\beta}$ 是以后选择的归一化常数。利用某些简单的不变性可以把泽尼克圆多项式与其他多项式集区分开，这些不变性用群论最能说明。然而，利用一种归一化，有可能避免群论的抽象形式。首先认为这样的集是相对于各轴绕原点的转动“形式不变”的。这种不变性的意思是，作任意转动

$$\left. \begin{array}{l} x' = x \cos \phi + y \sin \phi, \\ y' = -x \sin \phi + y \cos \phi, \end{array} \right\} \quad (2)$$

1) F. Zernike, *Physica*, **1** (1934), 689.

2) F. Zernike and H. C. Brinkman, *Verh. Akad. Wet. Amst. (Proc. Sec. Sci.)*, **38** (1935), 11.

3) B. R. A. Nijboer, 论文 (University of Groningen, 1942).

4) A. B. Bhatia and E. Wolf, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **50** (1954), 40.

时,每一个多项式 $V(x, y)$ 变换为相同形式的多项式,即 V 经变换(2)后满足下述关系式:

$$V(x, y) = G(\phi)V(x', y'), \quad (3)$$

式中 $G(\phi)$ 是转角 ϕ 具有周期 2π 的连续函数, 并且 $G(0) = 1$.

现在, 两次接连转过角 ϕ_1 和 ϕ_2 与一次转过角 $\phi_1 + \phi_2$ 等效. 因此, 由(3)式得出, G 必须满足函数方程

$$G(\phi_1)G(\phi_2) = G(\phi_1 + \phi_2). \quad (4)$$

这个方程具有周期 2π 的通解是熟知的, 就是¹⁾

$$G(\phi) = e^{il\phi}. \quad (5)$$

式中 l 是任何正、负或零整数. 把(5)式代入(3)式, 取 $x' = \rho$, $y' = 0$, 并用(2)式, 得出 V 必为下述形式:

$$V(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) = R(\rho)e^{il\phi}, \quad (6)$$

式中 $R(\rho) = V(\rho, 0)$ 只是 ρ 的函数. 其次, 把 $e^{il\phi}$ 按 $\cos \phi$ 和 $\sin \phi$ 的幂展开. 假设 V 是变量 $x = \rho \cos \phi$ 和 $y = \rho \sin \phi$ 的 n 次多项式; 则由(6)式得出, $R(\rho)$ 是 ρ 的 n 次多项式, 其中不含 ρ 低于 $|l|$ 次的幂. 而且显然, $R(\rho)$ 是偶或奇多项式随 l 是偶数或奇数而定. 泽尼克圆多项式集与所有其他这样的集的区别是由于下述性质: 对于每一对 n (次) 和 l (依赖于角) 的允许值, 即对于 n 和 l 的整数值, 满足 $n \geq 0, l \geq 0, n \geq |l|$, 并且 $n - |l|$ 为偶数时, 该集中都有一个多项式. 这个集的典型多项式用

$$V_n^l(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) = R_n^l(\rho)e^{il\phi} \quad (7)$$

表示.

由(1)和(7)式得出, 径向多项式 $R_n^l(\rho)$ 满足关系式

$$\int_0^1 R_n^l(\rho)R_{n'}^l(\rho)\rho d\rho = a_n^l \delta_{nn'}, \quad (8)$$

式中

$$a_n^l = \frac{A_n^l}{2\pi}. \quad (9)$$

对于任一给定的 l 值, 下标 n 只能取值 $|l|, |l| + 2, |l| + 4,$

1) 例如, 见 M. Born, *Natural Philosophy of Cause and Chance* (Oxford, Clarendon Press, 1949, p. 153; Dover Publications, New York, 1964), p. 153.

… 相应的序列 $R_{11}^l(\rho), R_{11+2}^l(\rho), R_{11+4}^l(\rho) \dots$, 可通过在区间 $0 \leq \rho \leq 1$ 上带有权重因子 ρ 将幂

$$\rho^{|l|}, \rho^{|l|+2}, \rho^{|l|+4}, \dots \quad (10)$$

正交化而得出。而且, 因为(10)中只出现 $|l|$ 的绝对值, 所以

$$R_n^{-l}(\rho) = \beta_n^l R_n^l(\rho), \quad (11)$$

式中 β_n^l 是一个只取决于两个多项式 R_n^{-l} 和 R_n^l 归一化的常数。特别是, 对于所有的 l 和 n , 可令 $\beta_n^l = 1$ 以归一化, 则

$$V_n^{\pm m}(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) = R_n^m(\rho) e^{\pm i m \phi}, \quad (12)$$

式中 $m = |l|$ 是非负的整数。

这个圆多项式集含有 $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ 个线性无关的次数 $\leq n$ 的多项式。因此, 每个单项 $x^i y^j$ ($i \geq 0, j \geq 0$, 均为整数), 以及每个 x, y 的多项式, 都可以表示为有限多个圆多项式 V_n^l 的线性组合。因此, 由维尔斯拉斯近似定理¹⁾ 得出, 这个集是完备的。

§ 2 径向多项式 $R_n^{\pm m}(\rho)$ 的显式

因为 $R_n^{\pm m}(\rho)$ 是 ρ 的 n 次多项式, 其中不含 ρ 低于 m 次的幂, 而且它是偶或奇多项式随 n 是偶数或奇数而定, 由此得出, R 可表示为下述形式:

$$R_n^{\pm m}(\rho) = t^{\frac{m}{2}} Q_{\frac{n-m}{2}}(t), \quad (13)$$

式中 $t = \rho^2$, $Q_{\frac{n-m}{2}}(t)$ 是 t 的 $\frac{1}{2}(n-m)$ 次多项式。根据(8)

式, Q 多项式必须满足关系式

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 t^m Q_k(t) Q_{k'}(t) dt &= a_n^{\pm m} \delta_{kk'}, \\ k = \frac{1}{2}(n-m), \quad k' = \frac{1}{2}(n'-m). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中

$$k = \frac{1}{2}(n-m), \quad k' = \frac{1}{2}(n'-m).$$

1) 例如, 见 R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 1 (New York, Interscience Publishers, 1st English edition, 1953), p. 65.

由此得知,多项式 $Q_0(t), Q_1(t), \dots, Q_k(t), \dots$ 可通过在区间 $0 \leq t \leq 1$ 上带有权重因子 $w(t) = t^m$ 将自然幂序列

$$1, t, t^2, \dots, t^k, \dots \quad (15)$$

正交化而得出. 现在,人们熟知的雅科毕(或超几何)多项式¹⁾

$$\begin{aligned} G_k(p, q, t) &= \frac{(q-1)!}{(q+k-1)!} t^{1-q} (1-t)^{q-p} \\ &\times \frac{d^k}{dt^k} [t^{q-1+k} (1-t)^{p-q+k}] \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{k! (q-1)!}{(p+k-1)!} \sum_{s=0}^k (-1)^s \\ &\times \frac{(p+k+s-1)!}{(k-s)! s! (q+s-1)!} t^s, \end{aligned} \quad (17)$$

($k \geq 0, q > 0, p - q > -1$), 可定义为通过在区间 $0 \leq t \leq 1$ 上带有更为一般的权重函数

$$w(t) = t^{q-1} (1-t)^{p-q}$$

将(15)正交化而得出的函数. 它们的正交和归一化性质由下式给出²⁾

$$\int_0^1 t^{q-1} (1-t)^{p-q} G_k(p, q, t) G_{k'}(p, q, t) dt = b_k(p, q) \delta_{kk'}, \quad (18)$$

式中

$$b_k(p, q) = \frac{k! [(q-1)!]^2 [p-q+k]!}{[q-1+k]! [p-1+k]! [p+2k]!}. \quad (19)$$

[按 b_k 的这种选择, 对于所有的 k , $G_k(p, q, 0) = 1$]. 比较(18)和(14)式, 得出³⁾

$$Q_k(t) = \sqrt{\frac{2a_m^{\pm m}}{b_k(m+1, m+1)}} G_k(m+1, m+1, t). \quad (20)$$

由(13)和(20)式得出用雅科毕多项式表示的径向多项式的下述表达式:

1) R. Courant and D. Hilbert, 上述引著, Vol. I, p. 90.

2) E. Kemble, *The Fundamental Principles of Quantum Mechanics* (New York, McGraw-Hill, 1937), p. 594.

3) (20)式右边平方根的符号由后面(26)式确定.

$$R_n^{\pm m}(\rho) = \sqrt{\frac{2a_n^{\pm m}}{b_k(m+1, m+1)}} \rho^m G_k(m+1, m+1, \rho^2),$$

$$\left[k = \frac{1}{2}(n-m) \right]. \quad (21)$$

仿照泽尼克, 选择归一化使得对于所有的 n 和 m , 有

$$R_n^{\pm m}(1) = 1. \quad (22)$$

因此, 由(21)和(22)式得出,

$$\sqrt{\frac{b_k(m+1, m+1)}{2a_n^{\pm m}}} = G_k(m+1, m+1, 1). \quad (23)$$

$G_k(m+1, m+1, 1)$ 的值可由雅科毕多项式的生成函数得出¹⁾. 我们有

$$\begin{aligned} & \frac{[z - 1 + \sqrt{1 - 2z(1 - 2\rho^2) + z^2}]^m}{(2z\rho^2)^m \sqrt{1 - 2z(1 - 2\rho^2) + z^2}} \\ &= \sum_{s=0}^m \binom{m+s}{s} G_s(m+1, m+1, \rho^2) z^s. \end{aligned} \quad (24)$$

对于 $\rho = 1$, 左边化为 $(1+z)^{-1}$, 将它展开为幂级数, 并与右边比较, 得出:

$$G_s(m+1, m+1, 1) = \frac{(-1)^s}{\binom{m+s}{s}}. \quad (25)$$

由(25)和(23)式得出,

$$\sqrt{\frac{2a_n^{\pm m}}{b_k(m+1, m+1)}} = (-1)^{\frac{n-m}{2}} \binom{\frac{1}{2}(n+m)}{\frac{1}{2}(n-m)}, \quad (26)$$

并且利用(16),(17)和(26)式, 最后由(21)式得到径向多项式的下述表达式:

1) 参看 R. Courant and D. Hilbert, 上述引著, Vol. I, p. 91.

$$R_n^{\pm m}(\rho) = \frac{1}{\left(\frac{n-m}{2}\right)! \rho^m} \left\{ \frac{d}{d(\rho^2)} \right\}^{\frac{n-m}{2}} \left\{ (\rho^2)^{\frac{n+m}{2}} (\rho^2 - 1)^{\frac{n-m}{2}} \right\} \\ (27)$$

$$= \sum_{s=0}^{\frac{1}{2}(n-m)} (-1)^s \frac{(n-s)!}{s! \left(\frac{n+m}{2}-s\right)! \left(\frac{n-m}{2}-s\right)!} \\ \times \rho^{n-2s}. \quad (28)$$

头几个多项式的显式已在 612 页的表 21 中给出。

由(26)和(19)式得出归一化常数 $a_n^{\pm m}$:

$$a_n^{\pm m} = \frac{1}{2n+2}. \quad (29)$$

为了得到径向多项式的生成函数，在(21)和(26)式中用 s 代替 $k = (n-m)/2$ ，用 $m+2s$ 代替 n ，再代入(24)式，由此得出

$$\frac{[1+z-\sqrt{1+2z(1-2\rho^2)+z^2}]^m}{(2z\rho)^m \sqrt{1+2z(1-2\rho^2)+z^2}} = \sum_{s=0}^{\infty} z^s R_{m+2s}^{\pm m}(\rho). \quad (30)$$

最后计算积分

$$\int_0^1 R_n^m(\rho) J_m(\nu\rho) \rho d\rho$$

的值，如第九章所示，它在泽尼克-奈波尔象差衍射理论中起着重要的作用。 $R_n^m(\rho)$ 用(27)式代入，贝塞耳函数 J_m 用它的级数展开代入¹⁾。所得的表达式可写成

$$\int_0^1 R_n^m(\rho) J_m(\nu\rho) \rho d\rho \\ = \frac{1}{2 \left(\frac{n-m}{2}\right)!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(s+m)!} \left(\frac{\nu}{2}\right)^{m+2s} \\ \times f \left(s, \frac{n-m}{2}, \frac{n+m}{2}, \frac{n-m}{2}\right), \quad (31)$$

1) R. Courant and D. Hilbert, 上述引著, Vol. I. P. 484.

式中

$$f(s, p, q, r) = \int_0^1 u^s \left(\frac{d}{du} \right)^{p-1} \{ u^q (u-1)^r \} du, \quad (32)$$

p, q, r, s 都是非负的整数。对(32)式分部积分，由此得出，

$$\begin{aligned} f(s, p, q, r) &= \left\{ u^s \left(\frac{d}{du} \right)^{p-1} [u^q (u-1)^r] \right\}_0^1 \\ &\quad - s \int_0^1 u^{s-1} \left(\frac{d}{du} \right)^{p-1} \{ u^q (u-1)^r \} du. \end{aligned} \quad (33)$$

现在，如果 $r \geq p$ 和 $s + q - p \geq 0$ ，则右方第一项为零，因此

$$f(s, p, q, r) = -s f(s-1, p-1, q, r). \quad (34)$$

我们分别考虑 $s \geq p$ 和 $s < p$ 的情况。

当 $s \geq p$ 时，应用(34)式 p 次，则有

$$\begin{aligned} f(s, p, q, r) &= (-1)^p s(s-1)(s-2)\cdots \\ &\quad \times (s-p+1)f(s-p, 0, q, r) \\ &= \frac{(-1)^{p+r}s!}{(s-p)!} \int_0^1 u^{s+q-p}(1-u)^r du. \end{aligned} \quad (35)$$

(35) 式中的积分是第一类欧勒积分(β 函数)，其值为¹⁾ $(s+q-p)!r!/(s+q+r-p+1)!$ 。因此，对于 $s \geq p$ ，

$$f(s, p, q, r) = (-1)^{p+r} \frac{s!(s+q-p)!r!}{(s-p)!(s+q+r-p+1)!}. \quad (36)$$

其次，考虑 $s < p$ 的情况。应用(34)式 s 次，得出

$$\begin{aligned} f(s, p, q, r) &= (-1)^s s(s-1)\cdots f(0, p-s, q, r) \\ &= (-1)^s s! \left\{ \left(\frac{d}{du} \right)^{p-s-1} [u^q (u-1)^r] \right\}_0^1 \\ &= 0. \end{aligned} \quad (37)$$

现在把(36)和(37)式代入(31)式，引入一个新变量 l ，使得 $s = \frac{1}{2}(n-m)+l$ 。由此得出

1) R. Courant and D. Hilbert, 上述引著, Vol. I, p. 483.

$$\int_0^1 R_n^m(\rho) J_m(\nu \rho) \rho d\rho = \frac{(-1)^{(n-m)/2}}{\nu} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(n+l+1)!} \\ \times \left(\frac{\nu}{2} \right)^{n+2l+1}. \quad (38)$$

认出右方的级数就是 $J_{n+1}(\nu)$ 的展开. 因为 $n - m$ 是偶数, 因子 $(-1)^{(n-m)/2}$ 可用 $(-1)^{(n-m)/2}$ 代替, 最后得出

$$\int_0^1 R_n^m(\rho) J_m(\nu \rho) \rho d\rho = (-1)^{\frac{n-m}{2}} \frac{J_{n+1}(\nu)}{\nu}. \quad (39)$$

附录 8 一个不等式的证明(§10.7.3)

设 $f(\tau)$ 和 $g(\tau)$ 是实变量 τ 的任意两个(一般是复的)函数, 并设 λ 是一个实参量. 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f + \lambda g^*|^2 d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} (f + \lambda g^*)(f^* + \lambda g) d\tau \geq 0, \quad (1)$$

或

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ff^* d\tau + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} (fg + f^* g^*) d\tau + \lambda^2 \int_{-\infty}^{+\infty} gg^* d\tau \geq 0. \quad (2)$$

这个 λ 的二次式的极小值由微分得出:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (fg + f^* g^*) d\tau + 2\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} gg^* d\tau = 0. \quad (3)$$

此式的根 $\lambda = \lambda_{\text{极小}}$ 为

$$\lambda_{\text{极小}} = -\frac{1}{2} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (fg + f^* g^*) d\tau}{\int_{-\infty}^{+\infty} gg^* d\tau}. \quad (4)$$

如果将此值代入(2)式, 则得

$$4 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} ff^* d\tau \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} gg^* d\tau \right) \geq \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (fg + f^* g^*) d\tau \right]^2. \quad (5)$$

设

$$f = \tau \psi(\tau), \quad g = \frac{d\psi^*(\tau)}{d\tau}. \quad (6)$$

则

$$fg + f^* g^* = \tau \left(\psi \frac{d\psi^*}{d\tau} + \psi^* \frac{d\psi}{d\tau} \right) = \tau \frac{d}{d\tau} (\psi \psi^*), \quad (7)$$

如果把(7)式代入(5)式右方再分部积分, 并假定¹⁾ $\tau \rightarrow \pm\infty$ 时,

1) 事实上, 每当(8)式左方各个积分收敛时, 这个条件就满足[参看 H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, 译自德文 (London, Methuen, 1931; 又, New York, Dover Publications, Inc.), pp. 393—394].

$\tau\phi\phi^* \rightarrow 0$, 则(5)式变为

$$4 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \tau^2 \phi \phi^* d\tau \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\phi^*}{d\tau} d\tau \right) \geq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \phi \phi^* d\tau \right)^2. \quad (8)$$

这就是所要求的不等式

仅当(1)式中等号成立时,(8)式中的等号才能成立;这只有在 $f = -\lambda g^*$ 时,或者利用(6)式,只有在

$$\frac{d\phi}{d\tau} = -\frac{1}{\lambda} \tau\phi \quad (9)$$

时,才是可能的.这个微分方程的通解为

$$\phi(\tau) = A e^{-\tau^2/2\lambda}, \quad (10)$$

式中 A 是一个常数.只有 $\lambda \geq 0$ 的解才适用,因为不然的话, $\phi(\tau)$ 在无穷大处不为零.所以,当且仅当 ϕ 是高斯函数时,(8)式才变成等式.

附录 9 计算两个积分的值(§12.2.2)¹⁾

在本附录中,我们将计算 § 12.2(8)和(9)式两个积分

$$\mathcal{J}_1 = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_1} \left\{ e^{i(pz_1 + qy_1)} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \left(\frac{e^{i\omega R/c}}{R} \right) \right\} dx_1 dy_1 dz_1, \quad (1)$$

$$\mathcal{J}_2 = \frac{1}{4\pi} \frac{\omega^2}{c^2} \iiint_{V_1} \left\{ e^{i(pz_1 + qy_1)} \left(\frac{e^{i\omega R/c}}{R} \right) \right\} dx_1 dy_1 dz_1 \quad (2)$$

的值,式中

$$R = + \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \quad (3)$$

并且 $\omega^2 > c^2 p^2$. 我们对两种情况感兴趣,即:

(a) $0 < y < d$, 式中 y 和 d 都是常数, 积分体积 V_1 是 $-\infty < x_1 < \infty$, $-y \leq y_1 \leq d - y$, $-\infty < z_1 < \infty$ 的平板, 除去在原点 $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ 周围半径趋于零的小球以外.

(b) $y > d$ 或 $y < 0$, 现在积分体积 V_1 是 $-\infty < x_1 < \infty$, $-y \leq y_1 \leq d - y$, $-\infty < z_1 < \infty$ 的全部区域.

为了计算 \mathcal{J}_1 的值, 应用高斯定理, 其形式为

$$\iiint_{V_1} \operatorname{div} \mathbf{G} dV_1 = \iint_{S_1} \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} dS_1, \quad (4)$$

式中 \mathbf{G} 是位置的任意矢量函数, $\mathbf{n}(n_x, n_y, n_z)$ 是包围体积 V_1 的曲面 S_1 的单位外向法线. 取

$$G_{x_1} = G_{y_1} = 0, \quad G_{z_1} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z_1} \left[\frac{e^{i(pz_1 + qy_1 + \omega R/c)}}{R} \right], \quad (5)$$

由(1)和(4)式得出

$$\mathcal{J}_1 = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} n_{z_1} \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{e^{i(pz_1 + qy_1 + \omega R/c)}}{R} \right) dS_1. \quad (6)$$

1) 引自 C. G. Darwin, *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 23 (1924), §§ 6 和 8.

因 n_s 在平板两个面 ($y_1 = -y$ 和 $y_1 = d - y$) 上为零, 所以在情况 (b) 中, 积分 \mathcal{J}_1 为零¹⁾. 在情况 (a) 中, 还必须包括在原点周围的小球面 σ_1 的贡献. 如果 a 是该小球的半径, 则有 $n_s = -z_1/a$, 并且其贡献为

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma_1} \left(\frac{z_1}{a}\right)^2 e^{i(pz_1+qy_1+\omega a/c)} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{i\omega}{ac}\right) d\sigma_1 \rightarrow \frac{1}{3}, \text{ 当 } a \rightarrow 0 \text{ 时, (7)}$$

因此, 总共有

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= \frac{1}{3}, \text{ 当 } 0 < y < d \text{ 时,} \\ &= 0, \text{ 当 } y < 0 \text{ 或 } y > d \text{ 时.} \end{aligned} \quad \} \quad (8)$$

在计算 \mathcal{J}_2 以前, 我们注意到, 因为被积函数只含有一个 $1/R$ 阶的奇点, 所以对整个在原点周围小到趋于零的球上积分将不作出贡献. 因此现在情况 (a) 同情况 (b) 一样, 可对平板的全部体积积分:

$$\mathcal{J}_2 = \frac{\omega^2}{4\pi c^2} \int_{-y}^{d-y} e^{iqy_1} \mathcal{L}(y_1) dy_1, \quad (9)$$

式中

$$\mathcal{L}(y_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(pz_1+\omega R/c)}}{R} dx_1 dz_1. \quad (10)$$

在(10)式中, 采用由下式定义的新变量 ρ 和 χ ,

$$px_1 + \frac{\omega}{c} R = \rho \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - p^2}, \quad (11a)$$

$$z_1 = \sqrt{\rho^2 - y_1^2} \sin \chi, \quad (11b)$$

在每一种情况中均取正平方根. 在 $x_1 z_1$ 平面上, ρ 恒定的曲线为椭圆, χ 作为偏心角. $\rho = |y_1|$ 时, 椭圆退化为一点. 因此, 如果 ρ 和 χ 遍取 $|y_1| \leq \rho \leq \infty$, $0 \leq \chi \leq 2\pi$ 的值, 则整个 $x_1 z_1$ 平面被覆盖. 所以

1) 严格地说, 曲面 σ_1 应当是闭合的, 因此也应当考虑遥远边缘的贡献. 不过, 这些贡献根据物理上的理由可舍去, 因为它们需要无限长的时间才到达正考虑其影响的点.

$$\mathcal{L}(y_1) = \int_0^{2\pi} \int_{|y_1|}^{\infty} \frac{e^{i\rho\sqrt{(\omega/c)^2 - p^2}}}{R} \frac{\partial(x_1, z_1)}{\partial(\rho, \chi)} d\rho d\chi, \quad (12)$$

式中

$$\frac{\partial(x_1, z_1)}{\partial(\rho, \chi)} = \frac{\partial x_1}{\partial \rho} \frac{\partial z_1}{\partial \chi} - \frac{\partial x_1}{\partial \chi} \frac{\partial z_1}{\partial \rho} \quad (13)$$

是上述变换的雅科毕式。由(11a)和(3)式得出，

$$\frac{\partial x_1}{\partial \rho} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - p^2}}{p + \frac{\omega}{c} \frac{x_1}{R}}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial \chi} = 0, \quad (14a)$$

由(11b)式得出，

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z_1}{\partial \rho} &= \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - y_1^2}} \sin \chi, \\ \frac{\partial z_1}{\partial \chi} &= \sqrt{\rho^2 - y_1^2} \cos \chi = \sqrt{\rho^2 - y_1^2 - z_1^2}. \end{aligned} \right\} \quad (14b)$$

还有一个恒等式，

$$\left(pR + \frac{\omega}{c} x_1 \right)^2 - \left(px_1 + \frac{\omega}{c} R \right)^2 = \left[\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - p^2 \right] [x_1^2 - R^2],$$

或用(3)和(11a)式，

$$\left(pR + \frac{\omega}{c} x_1 \right) = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - p^2} \cdot \sqrt{\rho^2 - y_1^2 - z_1^2}. \quad (15)$$

由(13),(14)和(15)式得出，

$$\frac{\partial(x_1, z_1)}{\partial(\rho, \chi)} = R. \quad (16)$$

把(16)式代入(12)式。对 χ 的积分直接得出值为 2π 。对 ρ 的积分也简单，由此得出，

$$\mathcal{L}(y_1) = \frac{2\pi i e^{i|y_1| \sqrt{(\omega/c)^2 - p^2}}}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - p^2}}, \quad (17)$$

式中，根据同前面一样的物理论证，已舍去无穷远处的振荡贡献。

现在把(17)式代入(9)式，并计算其结果的积分值，得出：

$$\left. \begin{aligned}
 \mathcal{J}_2 &= \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \frac{e^{-igy}}{2g \sqrt{\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - p^2}} \{ e^{igd} - 1 \}, \text{ 当 } y > d \text{ 时,} \\
 &= \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \frac{e^{-ihy}}{2h \sqrt{\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - p^2}} \{ e^{ihd} - 1 \}, \text{ 当 } y < 0 \text{ 时,} \\
 &= \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \left\{ \frac{1}{gh} - \frac{e^{-igy}}{2g \sqrt{\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - p^2}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{e^{-ih(y-d)}}{2h \sqrt{\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - p^2}} \right\}, \text{ 当 } 0 < y < d \text{ 时,}
 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

式中

$$g = q - \sqrt{\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - p^2}, \quad h = q + \sqrt{\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - p^2}. \quad (19)$$