零件的参数设计

孙连山　洪　献　曹奕剑

（上海交通大学，上海　200030）

指导教师　周　钢

编者按　本文的建模思路很有条理，模型简洁、正确，并对结果的敏感性作了详尽的分析，在算法上也作了探讨，有一定创造.

摘　要　模型是研究产品各零件参数对产品某一性能影响的连续模型，以生产产品总费用最小为最终目的.主要用非线性规划化的思想建立.因为零件参数为随机变量，所以建模时要用概率论的方法给出非线性规划化问题目标函数.模型形式简洁.因零件加工精度的限制，实际参数标定值的选取是离散的，我们可充分利用计算机的数值计算能力，用各种方法搜索最优值.其中虎克－吉福斯直接搜索法效果最好.

一、问题重述（略）

二、合理的假设

根据零件设计工艺中的一些具体要求，并为达到简化问题的目的，除问题中已给出的假设外，我们进一步做以下假设：

1. 假设组成产品的各个零件在生产过程中互不影响，而且这些零件可以无困难地组装成一件产品.即若视各零件的参数为随机变量，则它们相互独立.

2. 假设问题中的经验公式在给定的零件参数变化范围之中是有效的.

3. 在大批量生产当中，假设整批零件都处在同一等级.本题中可视1000个零件都是A等、B等或C等.

4. 设得到的产品分三个等级：正品、次品、废品.各等级产品性能参数的目标值分别为：正品：$y \in (y_0-0.1, y_0+0.1)$ 次品：$y \in [y_0-0.3, y_0-0.1) \cup [y_0+0.1, y_0+0.3]$；废品：$y \in \{y \mid |y-y_0| \geqslant 0.3\}$

并设生产过程中没有工艺失误造成产品的损坏.

5. 由于制造工艺技术上的限制，标定值只能以某种确定的间隔来选取.例如本问题中，则由于精度的关系，我们可以选取的最小步长为0.001.

三、符号约定

y：	粒子分离器某性能参数；
y_0：	y 的目标值（$y_0=1.50$）；
y_-：	y 的计算值；
$X=(x_1,\cdots,x_7)^T$	其中 $x_i(i=1,\cdots,7)$ 为7个零件参数；
$x\min x_i$：	x_i 的取值下限；
$x\max x_i$：	x_i 的取值上限；

$F(X)$:	y 关于 X 的经验公式;
u_i	参数 x_i 的标定值;($i = 1,\cdots,7$)
Δx_i	:参数 x_i 的容差;
Δy	参数 y 的变化量;
r_i:	容差关于标定值 u_i 的相对系数;
	即 $\Delta x_i = r_i u_i (i = 1,\cdots,7)$;
σ_i:	x_i 的方差($i = 1,\cdots,7$);
σ:	y 的方差;
$C(X)$:	产品的成本函数(单位:元);
$N(\mu,\sigma^2)$:	表示以 μ 为均值,σ^2 为方差的正态分布;
$f(y)$:	y 的分布密度函数;
$W(X)$:	产品质量损失函数(单位/元);
C:	产品的总成本(单位/元);
W:	产品质量总损失(单位/元);
N:	产品数量(单位/个);
C_i:	零件容差等级分类标准值 $j = 1,\cdots,m$

四、问题分析

本问题是一个有条件约束的非线性规划问题.

问题的约束条件由零件参数(包括标定值和容差)变化范围确定.参数标定值的有效取值范围构成问题解的可行域.我们的目标是确定零件参数的可行值,使得我们的产品总费用尽可能低.

问题的目标函数就是总费用函数.总费用由产品参数偏离目标值引起的质量损失费用和产品的成本费用两部分组成.由于零件参数为随机变量,具有不确定性,我们考虑采用概率论方法来生成目标函数.对于值在可行域内的参数变量,利用它们的概率分布通过经验公式得出产品参数的概率分布,从而可以得出产品的质量损失费用函数 $W(X)$,而对应参数向量 X 存在一个成本费用函数 $C(X)$.于是得出我们的产品总费用函数表示 $W(X)+C(X)$.我们的目标就是确定参数向量 X 的值以及各种零件的等级,使目标函数 $W(X)+C(X)$ 达到最小.

本问题的求解过程实际上是一种优解搜索过程,由于参数的标定值容许范围是一个连续域,穷举法显然是不可行的,而各种传统的优解搜索方法都只能得到局部最优解.既然得到全局最优解有困难,从方法的可行性和有效性方面考虑,我们考虑采用混合搜索方法,利用计算机强大的计算能力,由点到面,从多个局部最优解中选取最优的作为近似最优解.具体算法及其实现将在第六小节中详细讨论.

五、原理和建模

因原问题是一个非线性规划问题,我们可设目标函数为 $g(X)$,$X = (x_1,\cdots,x_n)^T$,则一般模型可以写成如下形式:

$$\begin{cases} \min & g(X) \\ s.t. & x\ \min x_i \leqslant u_i \leqslant x\ \max x_i \\ r_i = a_j & i = 1,\cdots,n, j = 1,\cdots,m \end{cases} \tag{1}$$

在本问题中，目标函数受 y 偏移 y_0 造成的损失 $W(X)$ 和 $C(X)$ 选取零件所需成本两方面的影响. 则有 $g(X) = W(X) + C(X)$. 下面分别求出 $W(X)$ 和 $C(X)$ 就可得到本问题的数学模型.

1. 求成本消耗函数 $C(X)$.

$$C(X) = N\sum_{i=1}^{7} C_i \tag{2}$$

2. 求目标 y 值偏离 y_0 造成的损耗 $W(X)$. 因为零件参数是随机变量，u_i 是其标定值，即 $u_i = Ex_i$ 是 x_i 的数学期望. σ_i 是其均方差. 当进行大批量生产时，根据概率论中的大数定律就有服从正态分布. 即 $\Delta x_i = x_i - u_i$ 服从期望为 0、方差为 σ_i^2 的正态分布. 记为 $\Delta x_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$. 又容差通常规定为均方差的 3 倍，则有 $3\sigma_i = u_i r_i$，即 $\sigma_i = u_i r_i/3$. 由 $y = F(X)$ 得

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{7} \Delta x_i \cdot F'_x \tag{3}$$

其中对于一组给定的标定值 $(u_1,\cdots,u_7)$，F'_{x_i} 是确定的数值，记为 F_i. 由概率论中相关的结论就有 $\Delta y \sim N\left(0, \sum_{i=1}^{7} \frac{F_i^2 u_i^2 r_i^2}{9}\right)$. 从而由有服从期望为 $y = y_- + \Delta y$，方差为 $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{7} \frac{F_i^2 u_i^2 r_i^2}{9}$ 的正态分布. 则其密度函数为

$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-y_-)^2}{2\sigma^2}} \tag{4}$$

则由假设 y 为正品的概率为

$$p_1 = \int_{y_0-0.1}^{y_0+0.1} f(y)\mathrm{d}y$$

y 为次品的概率为

$$p_2 = \int_{y_0-0.3}^{y_0-0.1} f(y)\mathrm{d}y + \int_{y_0-0.1}^{y_0-0.3} f(y)\mathrm{d}y$$

y 为废品的概率为

$$p_3 = \int_{y_0+0.3}^{+\infty} f(y)\mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{y_0-0.3} f(y)\mathrm{d}y$$

则总损失为

$$W(X) = N(1000p_2 + 9000p_3) \tag{5}$$

综和上面(1)、(2)、(5) 的结论可得到数学模型如下

$$\begin{cases} \min & N\sum_{i=1}^{7} C_i + N(1000p_2 + 9000p_3) \\ s.t. & x\ \min x_i \leqslant u_i \leqslant x\ \max x_i \\ & r_i = a_j \quad i = 1,\cdots,7, j = 1,\cdots,3 \end{cases} \tag{6}$$

六、模型的计算机解法及框图

对该非线性规划问题，一般只能通过计算机编程，采用可行值比较求解. 我们采用的搜索法中主要的一个单步搜索的步骤如下：

首先，对当前的 X 计算其目标函数值. 然后，对其中的当前搜索的分量加大一个步长. 如果此时新的在允许的变化范围内，同时其目标值优于前值，则沿这个方向（即加大方向）一直往前找，直到 x_i 越界，或者找到一个 x_i 值，使得目标值在该点不优. 此时退回一步得到 x_i^*. 如果原来的 x_i 增加步长后已经超过了允许范围，或者新的目标值并不比旧的优秀，则同样的沿减小方向搜索，类似的获得 x_i^* 这个 x_i^* 所对应的 X^* 就是在其他分量不变的情况下，目标函数沿 x_i 方向上的一个局部最优解.

这样的单步搜索步骤对每个分量都适用. 因此可以循环的对每个 x_i 依次进行搜索，直到目标值逐渐变优. 由于程序是离散的有穷取点，根据题意也应存在一个全局最优值，则程序应在有限步内结束.

给定搜索初值，对于零件等级的各种选取排列方法，依次取得在该排列下的局部最优解，经比较即得在该搜索初值下的局部最优解. 给定更多的初值，则能得到更接近全局最优解的解. 在程序设计中采用了几种改进方法：其一是采用两倍或更多倍最小步长（即能达到精度要求的最大步长）搜索，获得该步长下的局部最优解 X^*. 再修改程序，在 X^* 附近以最小步长或缩短的步长进行搜索，这样可能获得一个更优的解. 其二是当获得一个局部最优解时，把不可能的解域删除，如 x_4 取 A 等的情况，这样可以减少循环次数. 其三建立在对 $F(X)$ 的值的分析上. 注意到 $F(X)$ 不能与 y_0 有太大偏差. 诸如 $F(X)$ 不能大于 $y_0+0.1$，否则至少有一半的产品是次品，单产品损失就超过 $1000\times1000\times\frac{1}{2}=500000$，超过了某些局部最优值.

实际上考察这些局部最优值，可发现其对应 $F(X)$ 值都在 $y_0\pm0.3$ 之间. 因此在搜索前先检验 $F(X)$ 值，对超过这个范围的初值不进行搜索，这样能减少最耗时间的搜索步骤.

该模型的计算机解法中还需要几个对 $F(X)$ 求偏导数后的函数，这个可以采用离散的方法解决. 实际中为了保证偏导函数的精度，我们使用 Mathematica 数学软件包计算出了这几个偏导函数的形式，将其换为 C_{++} 语言认可的形式，直接使用 C 语函数求得精度较高的值.

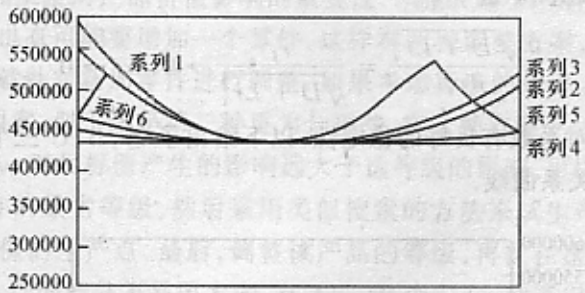
当给定等级方案及初值 X 时的搜索程序框图（略）.

七、结果分析

（一）参数分析

求解模型所得的最优设计方案，主要显示了各参数的综合效果. 为了了解各参数对最优设计方案的影响，以便于在以后的设计中控制这些参数的调整范围. 因此有必要将各参数对优化设计方案的影响进行具体分析.

为了研究某个参数对结果的影响程度，以最优值点为基础，先暂时固定其余的参数，有规律地改变该参数变量值，观察其偏离最优值变化对目标函数的影响. 下面给出了目标函数在最优解附近对七个零件参数的敏感程度曲线图（其中系列 i 对应零件参数 x_i）.



优解对零件参数的敏感性曲线图

根据曲线与零件参数的对应关系，从上图可以看出，参数 x_1 在最优解附近对目标函数影响最大，即目标函数最优点附近对零件参数 x_1 的敏感度大. 相比之下，对零件参数 x_1，x_6，x_7 的敏感度较小，也就是说，在最优点附近改变单零件参数 x_4 或 x_6 或 x_7 的标定值，不会引起目标值即总费用太大变化. 而对于参数 x_5 来说，则是随标定值减少方向敏感而相反方向几乎没有引起目标值的变化. 总之目标值对各个零件参数，在最优点附近的敏感性综合如下：

x_1：敏感性高；x_2：左侧敏感性次高，右侧敏感性低；x_3：左侧不敏感，右侧敏感性低；x_4：不敏感

x_5：左侧敏感性次高，右侧敏感性低；x_6：不敏感；x_7：不敏感

有了以上参数分析的结果，便可在设计实践中指导控制参数. 例如对敏感性高的参数，应尽量保证它在最优值附近；而对那些不敏感的参数可以放宽要求，必要时可作适当调整.

（二）误差分析

零件参数的取值误差均会引起计算结果的误差. 在以上参数分析中我们讨论了各个参数在最优点附近对目标函数的影响，由于关系式

$$x_i = u_i + \Delta x_i, \quad \Delta x_i = r_i u_i, \quad i = 1, \cdots, 7$$

即

$$x_i = u_i + r_i u_i \quad i = 1, \cdots, 7$$

固定 r_i，则 x_i 与 u_i 是线性关系，于是从以上分析结果可以窥得标定值误差对计算结果的影响. 结合误差理论，根据多变量误差传递公式，参数 y 的标准误差为

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{7}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)\sigma_i^2}$$

再由 y 的计算值 y_-，可得它的百分误差为：$\frac{\sigma}{y_-} \times 100\%$

在最优点时有结果

$$\sigma = 0.071864, \quad y_- = 1.49994 \quad \frac{\sigma}{y_-} \times 100\% = 4.79\%$$

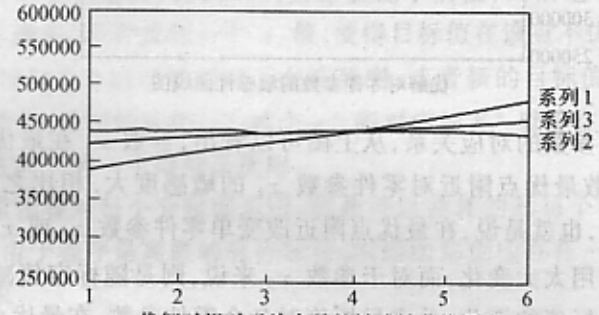
又由建模部分有如下关系式 $\sigma_i = r_i u_i$ 对于固定的一组标定值，标准误差 σ 与某个相对系数 r_i 的关系是

$$\sigma = \sqrt{D + Lr_i^2}$$

其中 D,L 为某一常数值. 于是

$$\frac{\partial\sqrt{D+Lr_i^2}}{\partial r_i}=\frac{r_i}{\sqrt{D+Lr_i^2}}\to 0,\ r_i\to 0$$

这就说明 σ 对单个相对系数有良好的稳定性. 以下给出了 A,B,C 三个等次相对偏差系数分别对最优解的影响关系曲线.



优解对相对零件参数的敏感性曲线图

注 系列1曲线对应 C 等,系列2对应 B 等,横坐标4处为最优值点. 描点步长为各等级最大相对系数的 $\frac{1}{10}$ 即依次为 1%,0.5%,0.1%.

图形表明改变相对系数在最优值点对结果影响不大. 例如把 B 等以 5% 为标准改为以 5.5% 或 4.5% 为标准,其它保持不变,可以看出最优目标值变化很小. 同理 A 等标准从 1% 改为 0.9% 或 1.1%,目标值几乎不变. C 等标准不变引起目标值不变稍微大些,但这也在情理之中. 因为相对系数处于越大值,传递的误差也越大.

八、模型的特点、改进、推广及实际工艺操作

在该模型的建立过程中,我们用了概率论和误差传递的知识,简洁地对实际问题构造了一种数学模型. 该模型可以用于一般的零件设计,其给出的目标函数也可以用于通常的产品生产中以估算成本. 在建模的过程中,我们充分发挥了计算机的功能,行之有效地获得了几组局部最优解. 我们还针对求解灵活地调整程序,从而大大提高了程序运行的效率,并获得了更优的解. 但是或许由于模型自身的问题,或许由于非线性规划的现行解法的问题,我们所得的只能是局部最优解. 并且由于过多的依赖计算机的运算能力,对该模型的数学内涵也讨论偏少. 同时,该搜索方法随着问题所要求的精度的提高,计算时间上将成灾难性的增长.

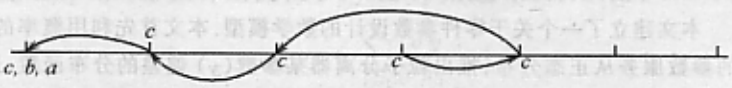
对于该模型的改进,今后可以对函数作一些性质上的分析,以减少搜索的范围. 在搜索方法上,可以采用最优速降法,以加快搜索速度,还可以采用遗传算法. 对染色体的基因组采用浮点编码,通过繁殖交叉从而在大量解空间内很快地接近全局最优解. 如果不考虑工艺加工上的限制,由于函数的连续性,这样的基因编码方式是可行的.

在实际问题中,考虑的因素将更多,模型将相当复杂. 譬如零件标定值的改变可能造成产品不能装配,这样零件间就不是独立相关的了. 还可能在实际生产中,该产品的质量要求远远大于其价格因素(如开发新产品的过程中),那么目标函数可变为

$$\min: g(x)=\text{weight}\times N\sum_{i=1}^{7}C_i+N(1000p_2+9000p_3)$$

其中 weight 表示产品质量对产品价值影响的重要性. weight 越小产品质量越重要, weight 大产品质量不太重要. 也有可能要增加一个零件. 这样有两种调整方案, 一种是对全局的零件都进行调整, 另一种就针对新加零件进行调整. 如果考虑算法的效率、工艺操作的简捷性以及人事诸多方面的因素, 似乎还是第二种更为合理些. 在这种方案下, 如果不使用计算机, 考虑到使 $F(X)$ 接近 y_0 对目标值产生的影响远大于选等级的影响, 可以采用如下方法调整:

首先选用该零件的最劣等级, 然后采用类似搜索的方法来试生产, 步长可以适当拉大些, 直到达到一个优值的生产点. 最后, 调整该产品的等级, 再次在这个标定值下进行试生产. 一般地, 每批试生产的产品不需要太多, 有 3 ~ 50 个左右, 就可以使产品很好地符合正态分布, 满足其内在的数学规律. 如果在标定值范围内共有 $2m+1$ 个生产点的话, 至多试生产 $50(m+4)$ 个产品就可以得到一个尚可的生产点了. 对于 $m=3$ 时, 可以采取如图的试生产步骤:



$m=3$ 时的操作步骤(共7次)

对于需要全局调整的方案, 这种操作合理但不经济. 建议采用计算机求解.

参 考 文 献

[1] 符曦著, 系统最优化及控制.
[2] 詹姆斯恩 - 西多著, 最优工程设计 - 原理及应用.
[3] 陈立周等著, 工程离散变量优化设计方法 - 原理及应用, 复旦大学出版, 上海.
[4] 概率论, 机械工业出版社.
[5] 魏权龄等著, 数学规划与优化设计, 国防工业出版社.

从认识论的观点来看, 人们应该给数学科学以无上的地位。
正是数学的广泛用途, 使它实质上成为基础的科学。

——J. 勒雷

《当代数学大师》, 李心灿编, 航空工业出版社, 1994。

零件参数设计的数学模型

黄　杲　陈旭东　邵　伟

（浙江大学，杭州　310027）

指导教师　数模组

编者按　本文先将粒子分离器参数 y 进行局部线性化处理，并将 $\frac{\Delta y}{\sigma y}$ 化归为标准正态，其中 $\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{7}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\sigma_i\right)^2$，最后把总费用的目标函数归纳为一个标准正态的式子（文中(4)式）．以上结果合理、简洁明确．采用网格法及蒙特卡罗法分别计算，结果吻合、满意，得到的解较优，其中用蒙特卡罗法（取二万个点）计算，在维数不变的情况下，不失为一种快速而有效的算法．

摘　要　本文建立了一个关于零件参数设计的数学模型．本文首先利用概率的理论，假设各零件产品的参数服务从正态分布，推出粒子分离器某参数（y）偏差的分布函数，进而可得一批产品总费用的目标函数，运用龙贝格数值积分将其转化为计算机可求值的函数，然后运用网格搜索法和蒙特卡罗法求出目标函数的全局最优解．

本文将两种方法的结果精度、算法复杂度等进行比较，重点讨论了效果较好的蒙特卡罗法．本文最后分析了模型误差，并对模型进行了评价和推广．

本模型最终得出产品总费用为42.146万元／千件，其设定的零件参数为 $X^T[0.075,0.375,0.123,0.115,1.273,12,0.771]^T$，其容差等级为 $G^T=[B,B,B,C,C,B,B]^T$．

一、问题的分析

要求解的问题是使总费用最低，而总费用包括各零件成本及次、废品损失费，综合考虑两种因素，问题可归纳为总费用的非线性优化问题．

由于待优化的目标函数复杂，无法利用其解析性质求最优解，故可考虑用直接全局搜索法或随机试验点法．

从生产实际考虑，本问题对解的精确度要求很高，但是对求解算法的实时性无明确要求．我们认为，只要求解时间不是太长，都是可接受的．

二、模型的假设及说明

1．假设各零件参数服从参数为 μ_i,σ_i^2 的正态分布，且不同零件的参数相互独立．

2．假设各零件容差的等级与其标定值的比为定值，分别为：A 级 $\pm 1\%$，B 级 $\pm 5\%$，C 级 $\pm 10\%$．

说明　根据概率论知识和工程实际生产的一些测量数据可知，成批生产的零件的参数服从参数为 μ_i,σ_i 的正态分布，其中 μ_i 为各零件参数的期望值（标定值），σ_i 为均方差（即容差的1/3），可推知各零件的偏差 Δx_i 服从参数为 $0,\sigma_i$ 的正态分布．

三、文中用到符号及说明

y：	产品某参数	x_i：	各零件参数
y_0：	y 的目标值（$y_0=1.5$）	μ_i：	各零件参数的标定值

y_x:	各零件标定值确定的零件参数	C_i:	各零件成本
		Δy:	产品的参数的偏差
g_i:	各零件容差等级比	Δx_i:	各件零件参数偏差
x^T:	x_i 标定值向量($i=1,2,\cdots,7$)	p_i:	各零件参数均方差
$X^{(7)}$:	x_T 的取值空间	p_1:	次品概率
G^T:	等级取值向量	p_2:	废品概率
σ_y:	产品参数的均方差		

四、模型的建立和求解

本模型的建立基于概率论与误差的有关理论.

各零件偏差 Δx_i 相对于其标定值较小,y 在 y_x 附近可以表示为:

$$y \approx y_x + \sum_{i=1}^{7} \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \mathrm{d}x_i \tag{2}$$

由于 Δx_i 较小,则可得 $\mathrm{d}x_i \approx \Delta x_i$,由于 $\Delta y = y - y_x$,则

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{7} \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i \tag{3}$$

在此,我们不加证明地引入:

引理 1 x_i 服从参数为 μ_i, σ_i 的正态分布,且彼此相互独立,a_i 为不全为零的常数,若 $X = \sum_{i=1}^{7} x_i$,则

$$X \sim N\left(\sum_{i=1}^{7} a_i^* \mu_i, \sum_{i=1}^{7} a_i^{2*} \sigma_i^2\right)$$

根据公式(3) $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ 对应一组 x_i 为一定值,而与 Δx_i 无关,则由引理 1 可得

$$\Delta y \sim N(0, \sigma_y^2), \quad \left(\sigma_y^2 \triangleq \sum_{i=1}^{7} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \sigma_i\right)^2\right)$$

(以上结论也可由方差合成定理推得,见文献[2]p93).

由概率论知识可得 $\frac{\Delta y}{\partial y} \sim N(0,1)$

目标函数的建立

产品总费用 = 零件总成本 + 次品的损失费 + 废品损失费

即 $W = \sum_{i=1}^{7} C_i + 1000 \times p_1 + 9000 \times p_2$ 可得

$$W = \sum_{i=1}^{7} C_i + 9000 + 1000 \times \left[\Phi\left(\frac{1.4 - y_x}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{1.6 - y_x}{\sigma_y}\right)\right]$$

$$- 8000 \times \left[\Phi\left(\frac{1.8 - y_x}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{1.2 - y_x}{\sigma_y}\right)\right] \tag{4}$$

目标函数为

$$\min \quad W, \quad s.t \quad x^T \in X^{(7)}$$

（一）对于原设计数据的求解

1. 在 Mathematics 2.1 下运行，代入数据 $X^T = [0.1, 0.3, 0.1, 0.1, 1.5, 16, 0.75]$，$G = [B, C, C, C, C, B]$ 可得结果如下：

$y = 1.72559$，$p_1 = 0.6240$，$p_2 = 0.2505$，$W = 307.85$ 万元.

从结果可以看出，$p_1 + p_2 = 0.8745$，即产品大部分为次废品，这是 y_x 偏离 y_0 过大的结果，此时产品总费用主要由次废品损失费决定，由此可知，在进行参数设计时，应尽量先使 y_x 靠近 y_0，同时降低均方差. 这也是本模型降低算法复杂度的一个方向.

（二）对目标函数 min W 的求解及参数的重新设计

1. 将目标函数转化为计算机的可求解模型

由于原目标函数中的积分部分中被积函数为正态分布函数，且其积分限为含有 7 维变量的复杂函数，无法直接求解，所以需将其转化为计算机可求解模型，我们考虑用三种方法进行转化.

对于标准正态分布函数可采用最小二乘拟合法逼近，将其转化为多项式表达，但从其结果来看，误差较大，故不可取. 所以我们采用精度较高的龙贝格数值积分法来转化目标函数[4]. 此方法为本模型高精度求解的出发点.

2. 用直接搜索法求最优解（网格法）

原目标函数为 7 维多峰函数，无法用解析法精确求解，故考虑用直接搜索法. 常用的算法对于一般的多峰函数极值问题只能求出局部最优解，而网格法为求解多峰函数全局最优解的一种较适宜的方法，所以我们首先考虑用网格法求解最优目标.

我们对于每一个 x_i 在其取值范围内均取 6 个步长，分为 6^7 个网格，结合可能的容差等级组合，在 Pentium 120 计算机上运行，搜索约二十分钟后，得到一个最优解，结果是 $X^T = [0.075, 0.345, 0.115, 0.115, 1.275, 12, 0.7875]^T$，$G^T = [B, B, B, C, C, B, B]^T$，$Y_X = 1.497145$，$\sigma_Y = 0.069220$，$\omega = 42.49146$ 万元. 从结果可以看出，在一定精度内已求得一个较好的最优解，我们可以通过降低算法复杂度，使模型得到更好的应用.

但是根据网格法基本原理，其循环次数由步长所决定，而步长又由模型精度所决定，故在一定精度要求下，其算法复杂度不能大幅度降低. 我们可考虑采用蒙特卡罗法进行求解.

3. 蒙特卡罗法

蒙特卡罗法，也就是随机实验点法. 它的基本思想是：在函数的可行域内随机地选取实验点，由于随机取得的点在区域中分配比较均匀，所以对函数的大致形态能较好地体现[3].

模型中的随机点是用以下方法产生的.

设 $m = 2^{16}$，$r_0 = 5$，由迭代式可得 $(0,1)$ 间的 p_i

$$\begin{cases} r_i = \mathrm{mod}(2053 r_{i-1} + 13849; m), & i = 1, 2, \cdots \\ p_i = r_i / m & p_i \text{ 为第 } i \text{ 个随机数} \end{cases}$$

设 q_i 为 a 到 b 间的随机数，则 $q_i = a + (b - a) p_i$. 我们编制了蒙特卡罗算法的程序（略）. 程序的运行时间为 2 分钟，最终的计算结果为 $X^T = [0.0778, 0.374, 0.0979, 0.1067, 1.200, 12, 526, 0.636]^T$，$G^T = [B, B, B, C, C, B, B]^T$；$y_x = 1.499136$，$\sigma_y = 0.069125$；$W = 42.3174$ 万元. 为了降低蒙特卡罗法网格法的复杂度，采用了一些优化的方法：

（1）程序的优化

必要的判断语句应尽量提早进行，以减小循次数或计算量.（如：y_x 应尽量靠近 y_0，因此可将偏离 y_0 过大的 y_x 判断排除，以减少计算次数）.

(2) 数据排除技巧

从粗略的直接搜索法结果可以看出，不同容差等级组合对应的局部最优角相差较大，而 G_1^T 和 G_2^T 因为总成本过大，是不可能取到的.

4. 为进一步比较内最优解的大小，可分别对优化目标在 G_1^T 和 G_2^T 内的最优解附近作探测性移动（类似于直接搜索方法中的 Hooke = Jeeves 方法[3]），进行高精度计算，分别得到 $W'_1 = 43.14865$，$W'_2 = 42.68475$，因此，能够求得具有一定精度的最优解 42.14865 万元. 此时所对应的零件参数为

$$X^T = [0.075, 0.345, 0.123, 0.115, 1.273, 12, 0.771]^T,$$

$$G^T = [B, B, B, C, C, B, B]^T,$$

$$y_x = 1.49683, \quad \sigma_y = 0.068777, \quad W = 42.1463 \text{ 万元}.$$

五、模型的检验及误差分析

(一) 模型的检验

由于我们没有一个确定的标准对本模型的解进行判断检验，只能采取不同的方法，对结果进行比较.

检验模型

在对题目中给定数据的计算结果分析时，我们曾说过，在设计参数时，应尽量使 y_x 靠过 y_0，由此可建立如下模型. 在同一容差等级组合下，令 $y_x = y_0$ 将 x_5 视为

$$174.42 \times \left(\frac{x_1}{y_x}\right) \times \left(\frac{x_3}{(x_2 - x_1)}\right)^{0.85} \times \left[\frac{\left(1 - 2.62 \times \left(1 - 0.36 \times \left(\frac{x_4}{x_2}\right)^{-0.56}\right)^{\frac{1}{16}}\right)}{(x_1 \times x_7)^{0.5}}\right]$$

函数，由概率论知识，当 $y_x = y_0$ 时，若 σ_y，次废品概率越小，总费用越低，因此，可将目标函数变为 $\min \sigma_y$ s.t $y_x = 1.5$，运行最后结果为 $X^T = [0.75, 0.375, 0.075, 0.12, 0.934, 12.8, 0.5625]^T$，$y_x = 1.50000$；$\sigma_y = 0.068901$；$W = 42.1949$ 万元. 比较原模型和检验模型的结果可知，产品的最低总费用应在 42.1 ~ 42.2 万元之间，而且对应最低总费用的零件参数值较合理，这说明原模型的算法是可靠的.

另外，网格法和蒙特卡罗方法所求得的最优解也相互吻合，这也说明此结果是值得依赖的.

对于目标函数本身而言，它虽然不是一个初等函数，却是对于七个自变量的连续函数，由连续函数的介值定理，在全局最优解附近存在一个区域，其内任何一点的值均小于其它鞍点的值，即使这块区域只有整个容许区域的万分之一，在蒙特卡罗方法取二万个点的情况下，落入该区域的概率仍接近 60%（点与点之间相互独立），在多次运用蒙特卡罗求解的情况下，一般是能够求出全局最优解的，当然，我们并不排除得到的只是局部最优解而非全局最优解的可能性.

（二）误差分析

1. 建模误差

根据实际情况分析，可知公式(2)的推导带有一定误差，它实际上舍弃了 Taylor 展开时的七个变量的一阶无穷小量，其依据是$\frac{\Delta x_i}{x_i} \leqslant 0.1$，虽然较小，但仍带有一定误差.

2. 计算机截断误差

计算机在进行求解时字长有限，有一部分数值会被舍弃，但对本模型基本上可忽略.

3. 受网格法的步长限制不能搜索到准确数值，该误差可能较大，但通过模型求解部分的探测性移动方法可使该误差减小；

同时，龙贝格数值积分也会有误差，程序中的积分精度为 10^{-5}.

六、模型的评价(略)

参 考 文 献

[1] 范大茵、陈永华，概率论与数理统计，浙江大学出版社，杭州，1996

[2] 肖明耀，误差理论与应用，计量出版社，北京，1985

[3] 席少霖、赵凤治、最优化计算方法，上海科学技术出版社，上海，1983

[4] 徐士良，C 常用算法程序集(第二版)，清化大学出版社，北京，1996

数学的重要性的非自明性：

作为一种技术的数学科学的作用未被认识到，数学科学作为技术变化以及工业竞争的推动力的作用的极端重要性也未被认识到。

J.G.Glimm ed.,Mathematical sciences, Technology, and Economic Competitiveness, National Academy Press, Washington DC, 1991, p. 7.

零件的参数设计

中国科技大学　何华海　李江滔　束礼宝

指导教师　薛剑耿

编者按　本文深入分析了零件参数设计中的优化问题，将其归结为一个有约束的非线性规划问题，并提出"分两步走"的策略来简化问题．采用了蒙特卡罗方法模拟和线性近似，计算了总体参数的最优解．从实用角度，文章又引入了一个目标函数，使得整个处理大大简化．本文对模型的检验也有特色，一方面用拟合优度检验了 y 是否服从正态分布，另一方面也对分两步走策略的有效性进行了检验．

摘　要　本文对零件参数设计问题提出了有效的算法，零件参数设计可以归结为在一定约束条件下求总费用(成本和质量损失的总和)最小的一个非线性规划问题．我们采用分两步走的策略来简化问题，即首先选定零件参数的标定值，再在此基础上选取零件容差等级．

设计的总费用是由 y 的具体分布所决定的．我们采用了两种方法来计算 y 的概率分布：一种是用蒙特卡罗方法来模拟；另一种是将 y 的经验公式作线性近似，得到 y 近似服从正态分布．我们又引入了函数 $E(y-1.5)^2$，以此作为新的目标函数对问题进行简化．对模型的求解，我们采用了梯度法来搜索目标函数在限定区域内的最优解，得到相 应的总费用(单件产品)为 430 元，远低于原设计方案的 3150 元．

通过检验，我们发现通过线性近似得到 y 服从正态分布的结论是基本可靠的，分两步走策略也是合理、有效的．最后我们还讨论了当质量损失函数为连续(特例为抛物线)时的情形．

一、问题的提出（略）

二、模型的假设

1．各个零件的参数 $x_1,x_2,\cdots,x_7$ 是互相独立的正态分布随机变量；

2．标定值在容许范围内都可以取，并且在此范围内 y 是二阶可导的；

3．产量 1000 是大数，可以用各种概率上的极限定理；

4．所有零件的均方差都是其容差的三分之一；

5．1000 个产品中，每个产品都用相同等级的零件；

6．假设产品当 $1.4<y<1.6$ 时为正品，此时无质量损失；当 $1.2<y\leqslant 1.4$ 或 $1.6\leqslant y<1.8$ 为次品，损失 1000 元；当 $y\leqslant 1.2$ 或 $y\geqslant 1.8$ 时为废品，损失 9000 元．

三、符号约定

$x_i(i=1,2,\cdots,7)$　零件参数，$\vec{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_7)$，

$\mu_i(i=1,2,\cdots,7)$　零件参数的标定值，$\vec{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_7)$，

σ_i 或 $\sigma_{x_i}(i=1,2,\cdots,7)$　零件参数的均方差，

a_i, $b_i(i=1,2,\cdots,7)$ x_i 标定值的上下界,

y 产品性能的参数,

y_0 y 的目标值($y_0=1.5$),

σ 或 σ_y 产品参数的均方差,

$f(y)$ y 的概率密度函数,

$g(y)$ 单件产品 y 偏离 y_0 造成的损失,

$p_i\left(\frac{3\sigma_i}{\mu_i}\right)$ 第 i 个零件选取容差为$\frac{3\sigma_i}{\mu_i}$时的成本.

四、问题的分析

单件产品的费用包括两部分:一是七个零件的总成本,二是由产品性能参数(y)偏离目标值(y_0)而造成的损失. 零件的成本是由零件的容差等级决定的;对于大批产品,y 偏离 y_0 而造成的损失则由 y 的具体分布决定,而 y 的分布又取决于各零件的标定值和容差等级. 因此,原问题归结为在一定约束条件下求某目标函数的最小值的一个非线性规划问题. 这里的目标函数就是零件参数设计的总费用,而约束条件则是各零件标定值的容许范围和可能的容差等级.

由于容差等级和零件参数标定值是结合在一起决定总费用,因此,为求得总费用的最小值,必须将两者结合起来考虑. 由于七个零件容差等级选取总共可以有 $1^2\times2^2\times3^3=108$ 种,使问题变得很复杂. 为简便起见,求解这个非线性规划问题时,我们可以分两步来考虑. 首先固定各零件容差等级(对应固定零件参数的方差和成本),选择零件参数标定值使得损失质量最小;然后在此基础上,固定各零件参数标定值,在所有容差等级选取方法(共 108 种)中选取使得成本最小的配置. 这种分两布走的方法虽然并不完全等价于原来的非线性规划,但它却可以使问题大大简化. 实际上,这也是工业上采用的零件参数设计的一般方法.

我们假设了七个零件参数 $x_i(i=1,2,\cdots,7)$ 是互相独立的正态分布随机变量. 产品的性能参数 y 由这些零件参数所决定,但是由于 y 的经验公式很复杂,我们无法解析地给出 y 的具体分布. 一种处理的方法是采用蒙特卡罗方法,通过计算机模拟来获得 y 的分布;另外也可通过对 y 的经验公式作某种近似(如线性化等),以期能解析地给出 y 的近似分布.

五、模型的建立

1. 目标函数

我们的目标函数是总的费用 F,它包含两项:质量损失 L 和零件成本 C,即 $F=L+C$.

对于大批产品的平均质量损失,有 $L=\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)g(y)\,\mathrm{d}y$,其中 $f(y)$ 为 y 的概率密度函数,$g(y)$ 为单件产品参数 y 偏离 y_0 造成的损失函数. 我们假设了 $g(y)$ 呈阶梯状,也就是说产品当 $1.4<y<1.6$ 时为正品,此时无质量损失;当 $1.2<y\leqslant1.4$ 或 $1.6\leqslant y<1.8$ 为次品,损失 1000 元;当 $y\leqslant1.2$ 或 $y\geqslant1.8$ 时为废品,损失 9000 元.

$$L=\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)\,g(y)\,\mathrm{d}y$$

$$= 9000\left(\int_{-\infty}^{1.2} + \int_{1.8}^{+\infty}\right) f(y)\,\mathrm{d}y + 1000\left(\int_{1.2}^{1.4} + \int_{1.6}^{1.8}\right) f(y)\,\mathrm{d}y$$

$$= 9000 - 8000\int_{1.2}^{1.8} f(y)\mathrm{d}y - 1000\int_{1.4}^{1.6} f(y)\mathrm{d}y.$$

单个产品的成本 C 为各个零件的成本总和，$C=\sum_{i=1}^{7} p_i(\sigma_i/\mu_i)$，其中 $p_i(\sigma_i/\mu_i)$ 第 i 种零件容差为$(3\sigma_i/\mu_i)$ 等级对应的成本$(i=1,2,\cdots,7)$.

我们的目标是使总费用最小，即求解如下非线性规划问题：

$$\min \quad F = L + C = F(\mu_1,\cdots,\mu_7;\quad \sigma_1,\cdots,\sigma_7)$$

$$\text{s.t.} \quad a_i \leqslant \mu_i \leqslant b_i$$

$$3\frac{\sigma_i}{\mu_i} = 1\%\ \text{或}\ 5\%\ \text{或}\ 10\%, i = 1,2,\cdots,7.$$

根据我们前面提出的两步走策略，这个问题可以分解为以下两个子问题：

$$P_1: \min L = L(\mu_1,\cdots,\mu_7),$$

$$\text{s.t.} \quad a_i \leqslant \mu_i \leqslant b_i, \frac{\sigma_i}{\mu_i}\ \text{给定}$$

$$P_2: \min F = L + C = F(\sigma_1,\cdots,\sigma_7),$$

$$\text{s.t.} \quad 3\frac{\sigma_i}{\mu_i} = 1\%\ \text{或}\ 5\%\ \text{或}\ 10\%,$$

依次求解 P_1 和 P_2 后，可得到近似的最优解，其中求解 P_1 时给定一组$\frac{\sigma_i}{\mu_i}(i=1,2,\cdots,7)$，而求解 p_2 时则使用 P_1 给出的一组标定值.

2. 目标函数的求值

(1) 蒙特卡罗方法

如果给定 $\mu_1,\cdots,\mu_7;\sigma_1,\cdots,\sigma_7$，则 y 的分布是一定的. 但是，由于 y 的经验公式很复杂，我们难以给出解析形式. 而求目标函数值又必须要用到 $f(y)$ 的函数值. 一种方法是使用蒙特卡罗法，借助于计算机的伪随机数模拟去近似 $f(y)$.

由计算机可直接得到 $U[0,1]$，再用舍取法产生标准正态分布 $N(0,1)$，由 $N(0,1)$ 经过变换即可得到一般正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，从而可模拟 $x_1,x_2,\cdots,x_7$ 这七个两两独立的正态分布的随机变量. 每模拟一次，都可根据 y 的经验公式得到 y 的一个样本. 知道了大量的 y 的样本，自然很容易求出 $f(y)$ 来，从而可以得到目标函数值.

(2) 线性近似

由于每求一次目标函数值都需用蒙特卡罗法模拟 y 的分布，这样运算量便很大. 一种简单的方法是用解析的形式给出 y 的近似分布.

对 y 在$(\mu_1,\cdots,\mu_7)$ 处作泰勒展开，近似到一阶，得到 y 的近似表达式

$$y(x_1,\cdots,x_7) = y(\mu_1,\cdots,\mu_7) + \sum_{i=1}^{7}\frac{\partial y(x_i,\cdots,x_7)}{\partial x_i}\bigg|_{\vec{x}=\vec{\mu}}(x_i-\mu_i),$$

可见 y 已被近似为七个零件参数的线性组合. 由于 x_i 是相互独立的正态分布随机变量，$x_i \sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$，由概率知识容易知道 y 是服从均值为 μ_y，方差为 σ_y^2 的正态分布随机变量，

其中

$$\mu_y = Ey = y(\mu_1, \cdots, \mu_7), \sigma_y^2 = \mathrm{Var}y = \sum_{i=1}^{7}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_{x_i}^2.$$

于是，y 的概率密度函数为

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} exp\left(-\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right),$$

从而质量损失

$$L = 9000 - 1000\left[8\Phi\left(\frac{1.8-\mu}{\sigma}\right) - 8\Phi\left(\frac{1.2-\mu}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{1.6-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{1.4-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

其中

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} \mathrm{d}z.$$

3. 新的目标函数

从总费用的表达式可以看出，只要 y 尽可能地分布于 y_0 周围，则可以使 $P(1.4 < y < 1.6)$ 和 $P(1.2 < y < 1.8)$ 尽可能地大，从而使总费用最低. 基于这种考虑，我们提出了一个新的目标函数：$E\ (y - y_0)^2$，并在原有约束下求此目标函数的最小值.

$$E(y-y_0)^2 = \mathrm{Var}\ (y-y_0)^2 + [E(y-y_0)]^2$$
$$= \mathrm{Var}\ y + (Ey - y_0)^2.$$

类似于线性模型

$$\mathrm{Var}\ y = \sigma_y^2 = \sum\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{\vec{\mu}} \sigma_i\right)^2,$$

$$Ey = f(\vec{\mu}),$$

因此 $E(y-y_0)^2 = \sigma^2 + [f(\vec{\mu}) - y_0)]^2$，这样问题就转化为在给定约束条件下，求上式的最小值.

六、模型求解

1. 子问题 P_1 的求解

我们的目的是使目标函数 $L(\mu_1, \cdots, \mu_7)$ 最小化，这是一个有约束($a_i \leqslant \mu_i \leqslant b_i$，$i = 1, \cdots, 7$) 的非线性规划问题. 我们使用梯度算法[3] 来求得极值. 并假设在约束范围内有极值且可由一组初始值求得.

所谓梯度法就是逐点确定寻优方向，再通过一维寻优确定步长的求解多维无约束非线性规划问题的方法.

为了使 $L(\mu_1, \cdots, \mu_7)$ 最小，我们列出主要步骤如下：

(1) 给定一初始值 $\vec{\mu}^{(0)}$ 与精度 $\varepsilon > 0$，$R > 0$；

(2) 若 $\| \nabla g(\vec{\mu}^{(k)}) \| \leqslant \varepsilon$ 则停止，并求出最小值 $\vec{\mu}^* = \vec{\mu}^{(k)}$；否则转(3)；

(3) 由 $\min(g(\vec{\mu}^{(k)} - \lambda \nabla g(\vec{\mu}^{(k)})))$ 求得 λ_k，并令 $\vec{\mu}^{(k+1)} = \vec{\mu}^{(k)} - \lambda_k \nabla g(\vec{\mu}^{(k)})$，令 $= k + 1$ 转入(2).

对子问题的求解给出的极值点就是我们选择的标定值.

2. 对 P_1 子问题的求解

在选定标定值的基础上，我们从所有可能的容差选择方式(共 108 种)中选取使总费用最低的一种(或几种)作为我们的设计的容差等级.

由于零件的容差也影响 y 的质量. 必须综合考虑零件标定值和容差，并一起调整使之最优. 但是若每次都穷举容差的话，会使计算复杂度大大增加. 可设想先使各零件等级最低，求出 $\mu_1 \sim \mu_7$ 的一组值，分析相应的效益值，然后删除成本过高的等级，再进行穷举.

七、结　果

使用梯度法，代入初值 $x_i \sim x_7$，并遍历零件的各个等级，求出一组局部最优解. 由于 y 的分布是用计算机随机数模拟出来的，所以每次运行结果都不一定相同，目标函数波动为 15.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	等级	费用
初始值	0.1	0.3	0.1	0.1	1.5	16	0.75	*BCCCCCB*	3150
蒙特卡罗法	0.093	0.302	0.096	0.101	1.50	16	0.75	*BBBCCBB*	430
线性近似	0.079	0.305	0.087	0.104	1.401	12.0	0.60	*BBBCCBB*	435
新目标函数	0.093	0.302	0.096	0.101	1.500	16	0.75	*BBBCCBB*	754

八、模型的检验

1. 用正态分布近似 y 的分布的可行性检验

在线性模型中，我们用正态分布 $N(\mu_y, \sigma_y^2)$ 来近似 y 的分布. 对此，我们在最优解处作了拟合优度检验.

i) 由蒙特卡洛法模拟产生 y 的 N 个样本值；

ii) 把 y 的可能取值范围分成 $k(k=14)$ 个区间，并判断样本落在各区间的频数 v_i，(并使 $Np_i \geqslant 5$)；

iii) 计算统计量 $Z = \sum (Np_i - v_i)^2 / N p_i$，其中 p_i 为正态分布 $N(\mu_y, \sigma_y^2)$ 在第 i 个区间内的理论概率；

iv) 拟合优度 $p(Z) = 1 - \chi_{k-1}^2(Z)$.

通过计算，我们得到 $p(Z) = 0.19$，这说明我们用正态分布 $N(\mu_y, \sigma_y^2)$ 来近似 y 的实际分布是可靠的.

2. 模拟的误差

我们用蒙特卡洛法模拟 y 的分布时使用的样本个数是 1000，与成批生产的产量一致. 但是计算机模拟的统计量必然有一定的波动性，我们对同样一组标定值和等级进行多次模拟，发现目标函数的波动程度在 15 元左右. 因此，我们的模型所给出的精度顶多也只能达到这个值.

3. 参数选择分两步走的有效性

若同时对标定值和容差等级求最优解，则计算复杂度过大，为此我们采用了两步走的近似方法：

第一步 使各零件都取最低容差等级，求出各零件标定值的最优解(梯度法)；

第二步 固定标定值，求容差等级的最优解(遍历).

作为对比，在线性模型中，我们同时考虑标定值和容差等级，也用梯度法求得极值，结果为430元，这和分两步走的结果435元非常接近，这说明了我们的分两步策略是十分有效的.

九、讨 论

1. 质量损失 $g(y)$ 的另一种理解

有些产品参数，离目标值越近越好，甚至于突破人为的等级限制，即 $g(y)$ 随 y 连续变化，而不是如假设6所述的阶梯函数一种可能的情况是 $g(y)=k(y-1.5)^2$，其中 $k=10^5$，此时 $L=\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\mathrm{d}y = kE(y-1.5)^2$，这正是我们前面提出的第二个目标函数. 以这种解释求得的目标函数最优解780.

2. 局部最优解和全局最优解

我们的模型给出的都是局部的最优解(区域内的极值)，这不一定就是目标函数在整个区域内的最优解. 但是，如果多取几个初始值求极值的话，可以尽可能缩小我们的结果与最优解的差距，甚至达到最优解.

3. 优缺点分析

(1) 线性模型避免了蒙特卡洛法所需的大量模拟，从而提高了运算速度；

(2) 线性模型在一般的情况下也能给出比较理想的结果；

(3) 分两步走的策略有效地简化了问题，同时也给出了非常接近最优解的结果；

(4) 我们给出的都是局部的最优解，并不能保证它就是问题的全局最优解；

(5) 由于进行蒙特卡洛方法模拟的次数有限(1000)，这使得我们给出的总费用精度有限，误差为 ±15 元.

参考文献

[1] 严颖、成世学，运筹学随机模型，北京：中国人民大学出版社，1995.

[2] 盛昭瀚、曹忻，最优化方法基本教程，南京：东南大学出版社，1993.

[3] 徐士良，C常用算法程序集，北京：清华大学出版社，1994.

[4] 陈希孺，概率论与数理统计，合肥：中国科技大学出版社，1993.

零件参数设计的动态规划模型

高　洁　郭去疾　康俊海
（中国科技大学，合肥　230026）
指导教师　季识卓

编者按　本文按相对误差来定义产品参数 y 对各零件参数的敏感程度，以此为依据进行空间裁剪，尽快地在解最可能出现的区域中搜索到满意的解．文中关于次品率的讨论，以及利用 y 的矩来对结果进行优度评估，也很有特色．

摘　要　对于本零件参数设计问题，我们建立一个动态规划模型，分阶段以不同的目标搜索求优，在每阶段中，必须以继承和保持前面已获得的目标做为约束条件．在实施动态规划前，根据题设经验公式，先把零件参数根据敏感性进行分类，对零件参数的取值空间作裁剪，把求优空间充分缩小．

假设各零件参数独立正态分布，对求优空间中的每组候选值，随机模拟出性能参数 y 的概率密度函数，从而确定它是否满足阶段目标和最终目标．

编制程序实现算法后，我们得到了四百多组满意的设计方案，并给出一组推荐方案．其总费用为 421 元／台．求得原设计方案的总费用为 3202 元／台，费用降低为 2781 元．

当零件参数的分布函数未知时，我们利用矩的方法重建产品性能参数 y 的分布函数，从而可以利用我们的动态规划的模型进行参数设计．我们对模型进行总结，给出了零件设计的一般方法．最后，我们对模型和算法进行了进一步的讨论，并给厂家提出了一些实用的建议．

一、问题的提出（略）

二、合理的假设

1．产品参数 y 与零件参数的关系只由题中所给的经验公式决定，与其他因素无关．

2．对同一种零件，在标定值范围内其成本只由容差等级所决定，与标定值的大小无关．

3．零件的标定值在其允许范围内可连续变化，不考虑有分立的国标值的情况．

4．各个零件的标定值和容差相互独立．

5．零件的参数是随机变量，满足正态分布，标定值是其数学期望．

6．在生产单件产品的过程中，每种零件只用了一个．

7．按照工业生产的惯例，假设 y 偏离目标值造成的损失是阶梯性的，即 y 的偏离值小于 0.1 时损失为 0，y 的偏离值在 0.1 和 0.3 之间损失为 1000 元，y 的偏离值大于 0.3 时损失为 9000 元．

符号说明

η：对产品性能有影响的零件种类，$n = 7$；x_i：第 i 个零件的参数，$i = 1,2,\cdots,n$；

F：生产离子分离器的总费用；N：生产粒子分离器的总数目；

C：零件总成本；L：y 偏离所带来的总损失 L；

L_1, L_2：产品分别为次品和废品时带来的损失；P_1, P_2：产品分别为次品和废品的几率；

q_i^2：产品性能对零件参数的敏感系数，即全系数；σ_i, σ_y：第 i 个零件和 y 的均方差

三、问题的分析

1. 目标函数的建立

生产离子分离器的总费用 F 由两部分组成:零件成本 C 和 y 偏离 y_0 所带来的损失 L,即:

$$F = C + L \tag{1}$$

令 L_1 表示产品为次品时的损失,L_2 表示产品为废品时的损失,P_1,P_2 分别表示次品和废品产生的几率,则总损失可表示为:

$$L = N(L_1 \cdot P_1 + L_2 \cdot P_2) \tag{2}$$

由经验公式,y 是各零件参数的函数,其密度分布函数设为 $f(y)$,则次品和废品产生的几率 P_1,P_2 可表示为:

$$P_1 = \int_{y_0-0.3}^{y_0-0.1} f(y)\mathrm{d}y + \int_{y_0+0.1}^{y_0+0.3} f(y)\mathrm{d}y$$

$$P_2 = \int_{-\infty}^{y_0-0.3} f(y)\mathrm{d}y + \int_{y_0+0.3}^{+\infty} f(y)\mathrm{d}y \tag{3}$$

综合上式,我们的目标函数为:

$$\min\{F\} = \min\{C + N(L_1 \cdot P_1 + L_2 \cdot P_2)\} \tag{4}$$

由于 P_1,P_2 是统计量,因此即使在零件的参数包括标定值和容差确定的情况下,F 也是一个统计量,有一个波动范围,也就是说我们的目标函数应是 $\min\{E(F)\}$,即 F 的期望的最小值.实际上,我们在下文中讨论的多数命题都是在统计意义下成立的.

2. 目标函数与零件参数的关系

直接研究目标函数与 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 之间的关系较为困难,因此,我们分成两个步骤来考虑:一是研究目标函数与 y 的关系,另一个是研究 y 与 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的关系.

(1) 不考虑成本影响时,目标函数是密度函数的区间积分值,因为前者无法得到解析表达,要得到两者严格的数学关系是不可能的,但总体上讲,y 的均值离标定值 1.5 越近,这个积分值越大;y 的方差越大,这个积分值也越大;在均值接近 1.5,方差一定时,y 的分布左右不对称性越大,目标函数值越大.以上三点虽然只是定性的说明,但实际上有概率论中矩的说明作为背景,同时也为后面我们模型的建立提供了重要依据.

(2) 敏感性分析

y 对各变量的敏感程度是不同的,为了度量这种敏感程度并作为分组的根据,由误差传递公式得到:

$$\frac{\sigma_y}{y} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} q_i^2 \left(\frac{\sigma_i}{x_i}\right)^2} \tag{5}$$

其中 $q^2 = (q_1^2, q_2^2, \cdots, q_n^2)$ 就是度量敏感程度的量,即权系数.(编者注:此处 $q_i = \frac{x_i}{y}\frac{\partial y}{\partial x_i}$.)

根据经验公式,对 $y(\vec{x})$,$(\vec{x}) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$,求全微分并除以得:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \sum_{i=1}^{7} q_i \frac{\mathrm{d}x_i}{x_i}$$

$$= \frac{x_2 - 0.15x_1 dx_1'}{x_2 - x_1}\frac{dx_1'}{x_1} + \frac{(1.52x_4^{1.16}x_2^{-2.16}a^{\frac{3}{2}} + 0.4x_4^{-1.6}x_2^{-1.6}a^{\frac{1}{2}})\cdot x_2}{1 - 2.62[a]^{\frac{3}{2}}\left(\frac{x_4}{x_2}\right)^{1.16}}\frac{dx_2}{x_2}$$

$$+ 0.85\frac{dx_3}{x_3} - \frac{(1.52x_4^{0.16}x_2^{-1.16}a^{\frac{3}{2}} - 0.4x_4^{-0.4}x_2^{-0.6}a^{\frac{1}{2}})\cdot x_4}{1 - 2.62[a]^{\frac{3}{2}}\left(\frac{x_4}{x_2}\right)^{1.16}}\frac{dx_4}{x_4}$$

$$- \frac{dx_5}{x_5} - 0.5\frac{dx_6}{x_6} - 0.5\frac{dx_7}{x_7} \tag{6}$$

其中 $a = 1 - 0.36\left(\frac{x_4}{x_2}\right)^{-0.56}$.

表 1　各零件权系数表

权系数	1	2	3	4	5	6	7
最大值	4.2539	0.7745	0.7225	0.0197	1	0.25	0.25
最小值	1.4701	0.0037	0.7225	0.0028	1	0.25	0.25

由上表可以看出权系数 q_i^2 在空间$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$中变化范围不大，且 x_1, x_5, x_3 的权系数与 x_2, x_4, x_6, x_7 相比要大得多.

从(6)式中我们还得到信息：x_1, x_2, x_4 的权系数是相互关联的，而 x_3, x_5, x_6, x_7 的权系数为常数.

(3) y 的取值范围的估计

首先 y 关于 $x_1, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ 的单调性都是清楚的，对于 x_2，我们可以对 y 的表达式作适当的化简，但作为估计，我们的关键点是标定值 1.5 是否落在 y 的取值范围中，通过计算得，不考虑 x_i 的方差时，y 的取值区间为[0.50, 8.35]，而且最值在各自变量的端点取到. 因为在给定区间内，y 是 x_i 的连续函数，因此一定存在使 y 等于 1.5 的 x_i 值.

(4) 求解方法选取的分析

本参数问题涉及到一组连续参数(标定值)和一组离散参数(容差)，Y 表达式的复杂性决定了必须用计算机搜索. 我们于是首先把连续参数离散化，并希望借助随机模拟得到 Y 的分布的数值表示，但由于运算自由度多而约束条件少，运算的复杂度很大，我们不采用全遍历. 同时，目标函数关系不简明，静态规划实现有困难，故我们考虑用动态规划，把目标分阶段求解，在每个阶段附加一些约束，减少搜索范围.

容差等级的分布离散化程度高，其阶跃性改变对结果会很大，且其影响在连续的标定值取值区间中有一致性，容易确定最优组合，可以先行搜索. 在小区间中对 y 作多维 Taylor 展开，可以简化目标函数表达，但区间过大时，近似程度太低.

四、空间裁剪和动态规划模型

我们把整个建模过程分为两大步骤：

(1) "空间裁剪"— 排除参数取值空间中不可能出现所需解的区域，确定解最可能出现

的区域.

因为容差等级的取值空间是离散的,裁剪主要对容差等级进行.

(2)"动态规划"— 我们对(1)中确定的区域进行搜索,引入"阶段"的概念,为每阶段的搜索建立一个阶段目标,通过多阶段的搜索求得问题的解.

具体实现步骤如下:

(1)"空间裁剪":首先考虑改变权系数最大(即其值变化对 y 的影响最大)的 x_1, x_5, x_3,保持原设计的 x_2, x_4, x_6, x_7 不变,遍历所有的容差等级,使得目标函数小于某一常数,并对不同的容差等级组合的出现几率进行统计,选择其中出现几率最大的几组.

(2)"动态规划":通过上一步确定的等级选取,我们人为地把搜索空间分为几个阶段:

阶段一、搜索:x_1, x_2, x_4,目标:σ_y^2 最小,

说明:x_3, x_5, x_6, x_7 不影响 σ^2.

阶段二、沿用阶段一中确定的 x_1, x_2, x_4,再对参数:x_3, x_5, x_6, x_7 进行搜索,目标:使 $|y - y_0|$ 小于一个小的正常数 k.

阶段三、对阶段二求得的解进行搜索目标:目标函数 $\min\{F\}$,

说明:因目标函数只是个统计量,目标的数学表达只能是使 F 小于定值 K.

五、模型的结果与分析

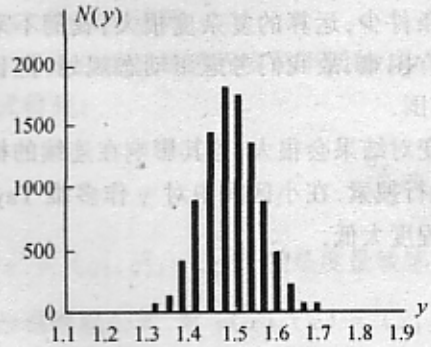
1. 由模拟的结果可知,满意解的容差等级的组合一般固定,但零件标定值的组合有几百种之多,为了给厂家更多的选择,我们列出部分值.

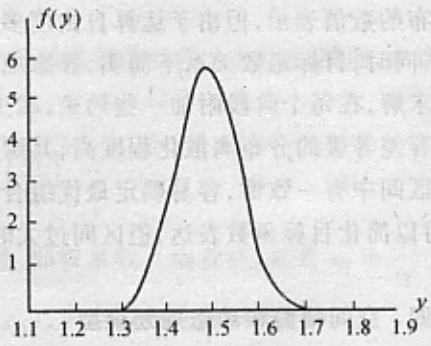
我们推荐一组零件参数如下:

表 2　推荐零件参数值表

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
标定值	0.075	0.375	0.119	0.075	1.29	16	0.584
等级	B	B	B	C	C	B	B

对应的次品率:14.6%;费品率:< 1/100000;总费用:421 元/台 y 的离散模拟分布图和密度函数 $f(y)$ 分别如下图:





由图可知，我们原先对 y 的性状的估计是正确的，它正是一个左右近似对称的"钟型"图形.

2. 若用原题给定的参数设计，我们得到，次品率：62%　废品率：26.47%　总费用：3202 元／台.

两者对比费用降低：3202 − 421 = 2781 元／台

在实际的模拟过程中，平均费用会有一定的起伏. 实验表明，本题中万次模拟的费用值本身就有 ± 4 元的偏差. 而千次模拟该偏差可达到 ± 20 元.

3. 对次品率的分析　在分析中，只考虑成本的降低是不够的，次品和废品不仅仅会带来一些直接的损失，还会导致厂商信誉的下降. 因此我们在降低成本的同时还要兼顾到次品率和废品率. 在我们的结果中次品率为14.6%，但零件都未选 A 等. 若第 i 个零件选取 A 等，而其余的不变，则总的费用和次品率废品率如下表所示.

（由于 x_1, x_2, x_5 无此等级，我们根据题目中零件价格的比例关系，我们设 x_1 的 A 等价格为 100 元，x_2 的 A 等为 200 元，x_5 的 A 等为 500 元）：

表 3　选用 A 等零件的花费表

零件	1	2	3	4	5	6	7
总费用	460	547	555	872	762	490	492
成本	350	425	425	725	725	350	350
损失	110	122	130	147	37	140	142
次品率(%)	11.0	12.2	13.0	14.7	3.7	14.0	14.2

从表上可以看出，除 x_5 以外，选取 A 等的零件次品率虽略有降低，但成本大大提高，说明比起 B 等零件，A 等零件不能大幅度地减少次品率，而且非常昂贵. 因此对除 x_5 以外的零件没有必要选取 A 等级，除非 A 等品的价格有大幅度的降低.

4. 对 x_4 的一些讨论

对 x_5 选取 A 等可以使次品率降为 3.7%，但成本同时大幅度提高，因此选取 A 等也不能降低总费用. 我们假设 x_5 也有 B 等品，价格为 100 元，从而得到次品率为 6.4%，总费用为 389 元／台，每台费用降低 32 元. 这说明，若 x_5 有 B 等品，只要其价格低于 100 + 32 = 132 元／件，则选用 B 等级的 x_5 还是合算的. 而且 x_5 选用 B 等级还可以大大提高 y 的稳定性，使其方差变为原来的一半.

5. 结果的优度评估

由于随机模拟引入的不确定性，无法严格证明解的最优性. 但由概率论，一个随机变量分布的特征可以用矩来描述. 由于有很多组可行解，我们可以通过计算 y 的高阶矩来评估结果，通过模拟，y 的高阶矩的值如下：

表 4　推荐解对应 y 的各阶中心值表

阶数	2 阶	3 阶	4 阶	5 阶	6 阶	7 阶
矩值	0.004782	0.000085	0.000069	0.000003	0.000002	0.000000

由表可见，y 的 2 阶矩远大于各高阶矩，故我们原来的假定成立，即 y 的性状主要由 1,2 阶矩限定，由我们的模型知，我们已使其均值趋于标定值 1.5，且 2 阶矩最小. 同时知道这些条件与目标函数取得最小密切相关.

此外我们计算出 y 的偏度系数小于 $1e-8$. 更重要的是我们在方差最小的情况下，对四变量的搜索是完备的，所以排开随机模拟的不确定性和 3 阶矩的微小影响，我们的解足够好.

六、模型的进一步讨论

(一) 模拟次数的选取

所有的搜索算法都面临同样的问题：速度. 在本问题中，因为参数空间的每一点都需要模拟一个分布，这个问题尤为突出. 而模拟次数的选取是解决运算复杂度也即速度的核心问题之一，为此，我们在算法中引入反馈控制来动态改变模拟次数.

假设我们要确定某组参数取值的损失是否小于定值 L，我们先用较小样本进行模拟(例如：$s_0 = 500$)，得到平均损失 L_0. 若 $L_0 - L > P_0$(P_0 事先取定)，则认为该组选取不是所需解，停止模拟；反之，再进行次数为 S_1 的模拟，有类似定义的 L_1, P_1，以此类推，直至 S_m 模拟后证明该选取是满意解，或中途某次退出模拟.

在实际实现中，次数等级不必太多，取三等已有显著的速度收益，一个经验性的参考等级分级为：$S_0 = 500, S_1 = 2000, S_2 = 10000, P_0 = 100, P_1 = 50, P_2 = 20$.

(二) 空间划分

我们前面的动态规划的模型必须依赖函数形式和参数空间的某些特殊性. 对于一般函数形式和参数空间，是无法断然把目标分成几个阶段目标的，因为常常在较早阶段达到的目标在后来不能保持. 所以，对于一般的情形，就必须对空间进行划分，然后在每个空间分区中再利用特殊性. 例如 *DEC* 公司为配置 400 多项 *VAX* 机部件设计的专家系统就曾成功地采用了空间划分法[4].

(三) 多子空间并行搜索

如果问题需要对空间进行划分，那么很自然的问题就是如何确定这些子区间搜索的顺序，以期较快地得到解. 我们思考的结论是：因为这个问题涉及的因素太多，所以与其去分析这样一个顺序关系，不如提出一种多子空间并行搜索的方法，在不同的子空间同时搜索. 每一时段有唯一的主搜索区，在主搜索区中进行多步搜索，而在其它区域单步搜索. 用评估函数的值不断改变主搜索区，从而及时找到较优解.

七、讨论当 x_i 的分布未知的情形(略)

八、参数设计的一般方法

在一般的情况下，我们给出如下设计步骤：(一) 构造目标函数，确定目标值与条件参数的函数关系. (二) 分析零件参数的变化对目标函数的影响的敏感性. (三) 由各参数的敏感程度确定各零件参数(包括标定值和容差)的分组，确定搜索步骤. (四) 逐步搜索，得到最优解.

此方法的关键在于确定参数分组和搜索的步骤，它同具体的函数关系有关，没有固定的方法，我们推荐以下几种方法：

1. 对目标函数作全微分，对各变量的系数进行排序，据此对变量进行分组.
2. 按变量的相互联系程度分组，把联系紧密的变量分为一组.
3. 先搜索对目标函数影响大的变量组，再搜索对目标函数影响小的变量组.
4. 考察 x_i 和 y 的单调性关系，按此进行分组.

九、模型的优缺点(略)

参 考 文 献

[1] 陈希孺，概率论与数理统计，中国科学技术大学出版社，合肥，1996
[2] D.J.华尔德，C.S.皮特勒著，尤云程译，优选法基础，科学出版社，北京，1978
[3] 孙德敏，工程最优化方法及应用，中国科学技术大学出版社，合肥，1991
[4] 吴秀清，专家系统概论，中国科学技术大学无线电系，合肥，1987
[5] A.V.奥本海姆等著，刘树棠译，信号与系统，西安交通大学出版社，西安，1985
[6] 沈凤麟，钱玉美，信号统计分析基础，中国科技大学出版社，合肥，1989

克林顿总统在国情咨文中说："我作为今后四年的美国总统要优先考虑的问题中的第一优先问题就是要保证美国人民有世界上最好的教育。"他建议 1998 年要花 510 亿美元作为"达到这一目标的前所未有的许诺"。

Notices of AMS, v. 44(1997), no.4, p. 428.

关于零件参数问题的建模

余　辉　　那永林　　肖云翔

（天津大学，天津　300072）

指导教师　　史道济

编者按　本文在合理的假设下取质量损失函数，符合实际情况，说明了 y 近似服从正态分布．给出了单位产品质量损失的表达式和较完整的数学模型．特别是在最优化过程中，探讨了其算法．

摘　要　这是一个如何安排加工次序的组合优化问题，首先建立了一般问题的数学模型，在对其求解过程中我们采取了分枝限界法，保证了所得结果的最优性，且具有很高的时效性．其次针对某部门所采取的贪婪算法给以了评价，在评价中以其近似解与最优解的接近程度、得到最优解的概率为标准，利用计算机模拟对其进行评估，发现对于该问题贪婪算法并不能保证解的最优性，但近似程度较好．而后对调整刀具费用为 0 的情形进行了讨论，首先给出了一个引理，然后给出一个简明的优化准则：当时各切割平面按其厚费比以不升序排列时，所得次序为最优加工次序．最后利用题中所给数据进行了验证，再次表明了所得结论的正确性．

一、问题的背景分析（略）

二、问题的假设

（1）模型的参数

$\cos t$：	总费用函数（单位产品）；
$\cos t_2$：	成本函数（单位产品）；
C_1：	产生一个废品造成的损失；
A_1：	废品的界限；
Y：	表征产品性能的指标；
$x_i = E[x_i]$：	零件参数标定值的期望；
$Y_0 = E[Y]$：	产品性能指标的期望；
$P(y)$：	代表产品性能指标的分布概率 在程序及打印数据中以 dy 代替
$\cos t_1$：	质量损失函数（单位产品）；
Δ_i：	代表零件 i 的容差；
C_2：	产生一个次品造成的损失；
A_2：	次品的界限；
σ_i：	零件参数的方差；
σ_y：	产品性能指标的方差；
Y_0^*：	Y 的目标值 1.50；
N：	产品生产数目；

x_i: 7个零件参数的标定值($i = 1,\cdots,7$);

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{代表第 } i \text{ 个零件中第 } j \text{ 个等级容差;} \\ 0, & \text{代表第 } i \text{ 个零件末选中第 } j \text{ 个等级容差;} \end{cases}$$

其中 $i = 1,\cdots,7, j = 1,\cdots,3$.

(2) 模型的假设

a. 为简化模型只考虑用单参数指标 y 表征产品性能并已知 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$;

b. 容差 Δ_i 近似等于3倍均方差($\Delta_i = 3\sigma_i$),x_i 服从正态分布 $-N\left[x_i, \left(\frac{\Delta_i}{3}\right)^2\right]$,$x_i$ 之间相互独立;

c. Y 的目标值 Y_0^* 已定,(即 $y_0^* = 1.5$);

d. 结合问题并考虑到实际生产,假设已知质量损失函数;

$$Q(y) = \begin{cases} C_1, & Y_0^* - A_1 > y \text{ 或 } y < Y_0^* + A_1, \\ C_2, & Y_0^* - A_1 < y < Y_0^* - A_2 \text{ 或 } Y_0^* + A_2 < y < Y_0^* + A_1, \\ 0, & Y_0^* - A_2 < y < Y_0^* + A_2 \end{cases}$$

e. 由于批量生产,产品性能指标 Y 受到多个设计参数及加工工艺的影响,所以假设 Y 近似服从正态分布.

f. 由于批量生产数目 N 较大(实例中 $N = 1000$),造成一批产品质量的损失,则 $Q(Y)$ 可近似看成为一连续的函数.

三、模型的建立

A 问题的进一步分析

(I) 容差等级选取的精度升高,造成成本 $\cos t_1$ 上升,零件参数标定值 x_i 选取的不同影响 Y 中心值(Y_0^*)变动,它和容差共同影响次废品出现的概率,从而影响质量损失 $\cos t_2$,因此考虑总费用

$$\cos t = \cos t_1 + \cos t_2$$

(II) 容差等级是离散的,即对每一个 Δ_i 只有几个是可选的,考虑用0—1整数规划,表示 $\cos t_2$ 如下:

$$\cos t_2 = \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{3} K_{ij}a_{ij}$$

其中

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij} = 1, \quad a_{ij} \text{ 取 0 或 1}$$

K_{ij} 为第 i 种零件 j 级精度时的单位价格.对于本问题中不存在的等级,其价格 K_{ij} 可取 $+\infty$ 或直接改变 a_{ij} 值进行优化,如本问题中第1组零件只有一个容差等级2(即 B 等),那么在用计算机进行优化时可直接约定 $a_{12} = 1, a_{13} = a_{11} = 0$ 即可.

(III) 由于单位产品的质量损失可视为连续函数,而且设计中心值 Y_0^* 和废次品范围已定($y < 1.2$ 或 $y > 1.8$ 为废品,y 在[1.2,1.4]或[1.6,1.8]范围可视为次品),所以

$$\cos t_1 = 9000\left(\int_{-\infty}^{1.2} P(y)\mathrm{d}y + \int_{1.8}^{+\infty} P(y)\mathrm{d}y\right) + 1000\left(\int_{1.2}^{1.4} P(y)\mathrm{d}y + \int_{1.6}^{1.8} P(y)\mathrm{d}y\right)$$

其中

$$P(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y}}e^{\frac{-(y-y_0)^2}{2\sigma_y^2}},\quad \sigma_y^2=\sum_{i=1}^{7}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2\sigma_{x_i}^2$$

$$\sigma_{x_i}^2=\left(\frac{\Delta_i}{3}\right)[0.01^2\cdot a_{i1}^2+0.05^2\cdot a_{i2}^2+0.1\cdot a_{i3}^2]$$

B 综合上述分析,完整模型表示如下:

$$\min(\cos t=\cos t_1+\cos t_2),\quad \cos t_2=\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{3}K_{ij}a_{ij}$$

其中

$$\sum_{j=1}^{3}a_{ij}=1,\quad a_{ij}\text{ 取 0 或 1}$$

$$\cos t_1=9000\left(\int_{-\infty}^{1.2}P(y)\mathrm{d}y+\int_{1.8}^{+\infty}P(y)\mathrm{d}y\right)+1000\left(\int_{1.2}^{1.4}P(y)\mathrm{d}y+\int_{1.6}^{1.8}P(y)\mathrm{d}y\right)$$

其中

$$P(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y}}e^{\frac{-(y-y_0)^2}{2\sigma_y^2}},\quad \sigma_y^2=\sum_{i=1}^{7}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2\sigma_{x_i}^2$$

$$Y=f(x_1,x_2,\cdots,x_7)\quad \sigma_{x_i}^2=\left(\frac{\Delta_i}{3}\right)[0.01^2\cdot a_{i1}^2+0.05^2\cdot a_{i2}^2+0.1\cdot a_{i3}^2]$$

四、模型算法的探讨

(一) 本模型可以归为运筹学中的非线性规划问题.目前非线性规划还没有适用于各种问题的一般算法.我们知道线性规划问题最优解只能在其可行域的边界上达到(特别是在可行域的顶点上到达).而非线性规划问题最优解(如果存在)则可能在其可行域中任一点达到,所以从理论上各种算法寻找的均为局部最优极值点,从现实角度考虑要求算法收敛快,稳定性好,寻到的极值接近最优值.

(二) 采用问题所给的数据我们先用 Mathcad 软件作出 $\cos t_1-(y_0,\sigma)$ 的三维关系图(彩色附图略),通过做等值线分析可知:

i) 当 y_0 偏离 1.5 较远时,$\cos t_1$ 对 y_0 取值敏感性要远大于对 σ_y 取值敏感性.

ii) 当 y_0 很接近 1.5 时,$\cos t_1$ 对 σ_y 敏感性较大.

结论 考虑本身变动范围较小,综合 i)、ii) 分析所得,并结合 Mathcad 软件粗略运算得到 $\cos t_1=300$ 时有 $\left|\frac{\partial \cos t_1}{\partial y_0}\right|=10\left|\frac{\mathrm{d}\cos t_1}{\sigma y}\right|$,所以 $\cos t_1>300$ 时(σ_y 动范围为 0.09 ~ 0.100),y_0 的领域在首次搜索时定为[1.48,1.52].

(三) 程序算法分析:

在编程计算时,考虑到程序执行时间因素,故采用三分算法进行计算,这样可使程序执行效率提高上千倍甚至更高(试验证明,此种方法比穷举法效率提高几万倍).具体算法步骤如下:

首先将各参量所允许区间分为四等分,取其三个分点进行计算(取点如下)

参量	下界	分点一	分点二	分点三	上界	步长
x_1	0.075	0.0875	0.1	0.1125	0.125	0.0125
x_2	0.225	0.2625	0.3	0.3375	0.375	0.0375
x_3	0.075	0.0875	0.1	0.1125	0.125	0.0125
x_4	0.075	0.0875	0.1	0.1125	0.125	0.0125
x_5	1.125	1.3125	1.5	1.6875	1.875	0.1875
x_6	12	14	16	18	20	2
x_7	0.5625	0.6625	0.75	0.85	0.935	0.1

如上，算出各分点(共 3^7 个)各自的质量损失，经过比较得到 $\cos t_1$ 最低的几个点.

其次，在所得到的点的小领域内继续采取相同的算法，计算步长逐步缩小，并对 0 所得点的质量损失函数值进行比较，逐步筛选.

再将上述过程重复数次，直至质量函数值变化不大为止，取其最小进行容差设计.

最后，在最优点的很小领域内进行最后选优，容差选取考虑采用穷举法. 经过比较总费用 $\cos t$ 计算得出几组最优解，数据结果附下.

结果数据

x_1		x_2		x_3		x_4		x_5		x_6		x_7		cost	Y	DY
值	等	值	等	值	等	值	等	值	等	值	等	值	等			
0.075	B	.29	B	.108	B	.095	C	1.33	C	19.3	B	.64	B	427.72	1.4952	.091308
0.075	B	.29	B	.109	B	.095	C	1.31	C	19.6	B	.65	B	427.68	1.4954	.091315
0.075	B	.30	B	.108	B	.095	C	1.252	C	19.2	B	.65	B	426.21	1.4954	.091199
0.075	B	.30	B	.108	B	.095	C	1.298	C	19.1	B	.60	B	426.17	1.4966	.091272

注：其中，"值"代表标定值，"等"代表等级；$\cos t$ 的单位为(元/个)

(四) 算法程序(具体程序略)

其中　程序一的功能为完成数据点的初次搜索；

程序二的功能为在初选点的基础上通过调整容差使结果进一步优化；

(五) 实例问题的求解

在原设计中，一个零件参数的标定值为：$x_1 = 0.1, x_2 = 0.3, x_3 = 0.1, x_4 = 0.1, x_5 = 1.5, x_6 = 16, x_7 = 0.75$；

$$a_{ij} = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$\cos t_2 = 9000\left(\int_{-\infty}^{1.2} P(y)\mathrm{d}y + \int_{1.8}^{+\infty} P(y)\mathrm{d}y\right) + 1000\left(\int_{1.2}^{1.4} P(y)\mathrm{d}y + \int_{1.6}^{1.8} P(y)\mathrm{d}y\right)$$

$$=2887\text{ 元 / 个}$$

$$\cos t_2 = 200\text{ 元 / 个} \quad \cos t = 3087\text{ 元 / 个}$$

采用我们的算法程序求得

x_1		x_2		x_3		x_4		x_5		x_6		x_7		$\cos t$	Y	DY
值	等	值	等	值	等	值	等	值	等	值	等	值	等			
0.75	B	.30	B	.108	B	.095	C	1.298	C	19.1	B	.60	B	426.17	1.4966	.091272

与原设计比较，总费用降低了 2660.83(元 / 个) × 1000 个 ~ 26 万元

五、一般零件的参数设计(略)

六、模型的评价

本模型的成功之处在于使一个多因素的问题，以极简便的方法快速得到结论. 采用本模型辅以一台 PC 机，可以在十几分钟之内寻找出问题的优化答案，而采用普通的算法通常在十几小时都难于找出答案. 这就为解决涉及多因素的问题提出了一条捷径，另外此模型并不涉及许多深奥的数学理论，可以很方便地推广到实际生产中. 模型的不足之处在于模型求解需要依靠计算机进行，离开计算机进行求解会有一定困难.

优点为当具体问题中影响产品性能指标的零件数目减少时，用网格法搜索时，计算量呈指数下降，所以可以考虑直接寻优.

七、模型的推广

本模型可广泛用于实际生产中的诸多领域，对受多种困难影响的具体问题可以很方便地求出优化解，而且也可用于理论分析和科学实验中，其特点在于用一般简单的程序就可将一复杂问题解决.

参 考 文 献

[1] 叶其孝主编，大学生数学建模竞赛辅导教材，湖南教育出版社，长沙.
[2] 裘光定，应用概率统计 —MATHCAD 数理分析图形软件，北京师范大学出版社，北京.
[3] 盛昭瀚、雷忻、最优的方法教程，东南大学出版社，南京.
[4] 傅家良、周仲良、魏国华，运筹学，复旦大学出版社，北京.
[5] 叶其孝，卢树铭，数学建模教育与国际数学建模竞赛，中国工业与应用数学学会，工科数学杂志社.
[6] 谭浩强编，C 程序设计，清华大学出版社，北京.
[7] 姬振豫，正交设计，天津科技翻译出版公司，天津.
[8] 可计算理论目的三次设计，中国现场统计研究会三次设计组编著.

程序图 1　　程序图 2

数学的重要性不是不言自明的，何况许多对此看法游移不定的人并没有严肃认真地思考过。

E.E.David, Jr.,（曾任尼克松总统科学顾问），Notices of American Mathematical Society (AMS), v. 31 (1988), no.2, p. 145.

零件的参数设计

叶庆春　侯小虎　刘淑君

（四川联合大学（四川大学），成都　610064）

指导教师　甘湘华

编者按　本文针对参数最优设计问题的实际背景提出综合考虑损失函数与元件成本的概率统计量优化模型，并用模拟退火法寻求最优解，较好地解决了最优参数设计问题，论文还用统计实验及泰劳展开论证了参数 y 近似服从正态分布的结论．论文叙述简洁、语言流畅、有一定的参考价值．

摘　要　本文解决的问题是一个零件参数优化设计问题．

首先我们利用统计抽样方法绘出了频率直方图，估计参数 y 应当服从正态分布，进一步利用经验公式作多元一阶 Taylor 展开，得到一个正态随机变量的线性组合式，确定 y 近似正态分布，且用 χ^2 拟合优度加以检验，然后可直接求出原设计的生产总费用为3,074,790元，接着对第二个问题建立了一个优化模型，用模拟退火全局优化算法，得到第二个问题的解：标定值依次为0.0829，0.3223，0.1195，0.0881，1.8097，12.9960，0.6297，总费用合为434,681.2352元，与原设计相比总费用减少：2,639,109.7648元．

一、问题的重述与背景分析（略）

二、模型的基本假设及符号说明

1．假设零件参数的标定值代表期望值，在生产部门无特殊要求时，容差为均方差的3倍；

2．假设粒子分离器参数 y 偏离 $y_0 \pm 0.1$，产品为次品，质量损失为1000元；当 y 偏离参数 $y_0 \pm 0.3$ 时，产品为废品，损失为9000元；

3．零件参数的标定值有一定的容许范围；

4．容差分为 A、B、C 三个等级，用与标定值的相对值表示，A 等为 $\pm 1\%$，B 等为 $\pm 5\%$，C 等为 $\pm 10\%$；

5．假设7个零件随机误差都符合正态分布．

文中所用符号说明

$A = (a_{ij})_{7\times 3}$	成本矩阵；	D_i	第 i 种零件的容差行向量；
$B = (b_{ij})_{7\times 2}$	容差设计矩阵；	X_2	标定值的上界；
y_0	y 的目标值；	δ_i	x_i 的均方差；
δ	y 的均方差；	X_1	标定值的下界；
B_i	第 i 行向量；	C_1	一件产品的生产成本；
P_2	产品是废品的概率；	$\bar{y}$	y 的期望值；
P_1	产品是次品的概率；	C_2	一件产品的质量损失的期望值；
value	生产总费用；		

$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 标定值的向量；$f(x_1, \cdots, x_n)$ 经验函数；

$$b_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当 } i \text{ 的容差为 } j \text{ 时},\\ 0 & \text{否则}.\end{cases}$$

三、模型的分析与建立

(一) 确定 y 的分布函数

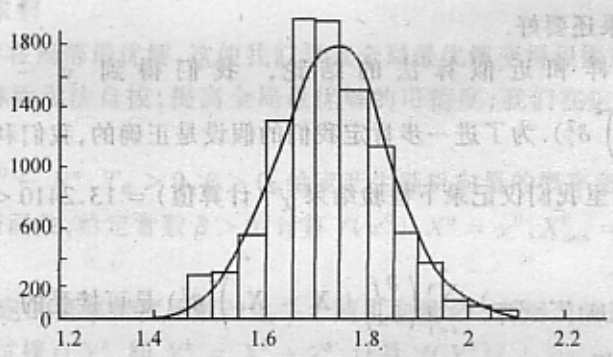
a) 利用统计抽样来估计 y 的分布

由经验公式不能直接看出参数 y 的分布，于是为了对 y 的分布有一个直观上的了解，我们采用统计抽样的方法绘出 y 的频率直方图.

直方图的画法：为随机数落入各区间 $[t_{i-j},t_i]$ 内的个数，$f_i=\frac{v_i}{n}$.

在 xy 平面上对每一个 i，以 $[t_{i-j},t_i]$ 为底，$y_i=\frac{f_i}{\Delta}$ 为高画小长形即为直方图，容易看出，样本容量越大，分组越细，则直方图越接近密度函数曲线下的曲边梯形，教学软件 Maplev3 统计包中画直方图即根据上面原理.

为了得到较直观、准确的直方图，取了 500 个样本点即 y 值，直方图如下：



由图可以估计，y 的分布近似于正态分布.

b) 受 a) 的启发，我们更想从经验公式出发推导出 y 的概率密度函数.

方法 1 从理论上严格推导 y 的概率密度函数. 我们实践后发现，即使利用概率密度函数的和、差、商能算出 y 的分布，其表达式也是相当复杂且得不到一个确定的表达式，因此，此方法在理论上可行，在实际中则要视具体情况而定.

方法 2 由经验方程及 x_i 所容许的范围，我们知道 y 对 x_i 任意的 n 阶偏导连续则可将其在标定值 $z_0=(x_{i0})$，$i=1\cdots7$ 作 Taylor 展开式：

$$y=f(x_{10},x_{20},\cdots,x_{70})+\frac{\partial f}{\partial x_1}\mid x_0(x-x_{10})+\frac{\partial f}{\partial x_2}\mid x_0(x_2-x_{20})$$

$$+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_7}\mid x_0(x_7-x_{70})+R_n,\quad \text{其中 } R_n \text{ 为余项}$$

这里 x_i-x_{i0} 有明显的物理意义，即 x_i-x_{i0} 是零件 i 的随机误差，有 $x_i-x_{i0}\sim(0,\delta_i^2)$，对随机变量 $x_i\sim(x_i,\delta_i^2)$.

我们认为展开式忽略 2 阶小后能够很好地逼近 y 值，理由主要有：

1. 就本问题我们可以求出：$\delta_{\max}=\delta_6=\frac{20\times10\%}{3}=0.667$，可见 x_i 的方差不大，$i=$

1,…,7;

2. 当 x_i 与 x_{i0} 相差很小时，$x_i \sim N(x_i, \delta_i^2)$，$P(|x_i - x_{i0}| < \varepsilon)$ 很大，则在 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的领域内，近似值已很接近真实值.

当 x_i 与 x_{i0} 相差很大时，$P(|x_i - x_{i0}| < \varepsilon)$ 很小，可以忽略其对真实值的影响，所以在这个近似计算下：$y - f(x_{10}, x_{20}, \sim x_{70})$ 是 x_i 的随机误差 $x_i - x_{i0}$ 的线性组合函数，$x_i - x_{i0} \sim N(0, \delta_i^2)$ 且 $x_i - x_{i0}$ 互不相关.

定理 2个独立正态随机变量 $\xi_k \sim N(\mu_k, \delta_k^2)$，$(k = 1,2)$ 的任意线性组合 $\sum_{i=1}^{2} \alpha_i \xi_i$ 为正态变量且 $\sum_{i=1}^{2} \alpha_i \xi_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{2} \alpha_i \mu_i, \sum_{i=1}^{2} \alpha_i^2 \delta_i^2\right)$.

由此我们知道 $y - f(x_{10}, \cdots, x_{70})$ 服从正态分布，由定理 $y = f(x_{10}, \cdots, x_{70}) + \sum_{i=1}^{7} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i - x_{i0})$ 服从正态分布，且

$$\bar{y} = E(y) = f(x_{10}, \cdots, x_{70}), \quad \delta^2 = D(y) = \sum_{i=1}^{7} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \mid X = X_0\right)^2 \delta_i^2$$

这比我们期望的结果还要好.

基于统计抽样和近似算法的结论，我们得到 $y \sim N(f(x_{10}, \cdots, x_{70}), \sum_{i=1}^{7} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \mid X = X_0\right)^2 \delta_i^2)$. 为了进一步肯定我们的假设是正确的，我们利用样本数据作了 χ^2 拟合优度检验，在这里我们仅记录下检验结果 χ^2(计算值) $= 13.2410 < \chi^2_{(0.05)}(11-2-1) = 15.507$.

即 $y \sim N(f(x_{10}, \cdots, x_{70}), \sum_{i=1}^{7} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \mid X = X_0\right)^2 \delta_i^2)$ 是可接受的.

(二) 模型及分析

零件参数的优化设计：

目标函数：$\min(C_1 + C_2)$，s.t.：$X_1 \leqslant X \leqslant X_2$，

一件产品成本费用：$C_1 \sum_{i=1}^{7} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} b_{ij}$，

一件产品质量损失费用的期望值：$C_2 = P_1 \times 1000 + 9000 \times P_2$，

产品是次品的概率：

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta}\left[\int_{y_0-0.3}^{y_0-0.1} e^{\frac{-(1-y)^2}{2\delta^2}} \mathrm{d}t + \int_{y_0+0.1}^{y_0+0.3} e^{\frac{-(1-y)^2}{2\delta^2}} \mathrm{d}t\right]$$

产品是废品的概率：

$$P_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta}\left[\int_{-\infty}^{y_0-0.3} e^{\frac{-(1-y)^2}{2\delta^2}} \mathrm{d}t + \int_{y_0+0.3}^{+\infty} e^{\frac{-(1-y)^2}{2\delta^2}} \mathrm{d}t\right],$$

$$\delta_i = \frac{\sum_{j=1}^{3} x_i B_i \times D_i'}{3}, \quad \delta^2 = \sum_{i=1}^{7}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\Big|_{x_0} \delta_i\right]^2, \quad \overline{Y} = f(x_1, x_2, \cdots, x_7).$$

四、模型的求解

1）原设计的生产费用：

由原设计知：$x = (0.1, 0.3, 0.1, 0.1, 1.5, 16, 0.75)$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

取得：

$$\bar{y} = 1.725589262, \quad \delta = 0.1103719239,$$

$$C_1 = 200, \quad C_2 = 2874.79,$$

生产总费用

$$\text{value} = (2874.79 + 200) \times 1000 = 3{,}074{,}790(\text{元})$$

2）优化模型的求解

目标函数可能存在局部最优解，这使我们寻找全局最优解变得很困难，为了避免搜索过程因陷于局部最优解而无法自拔，提高全局最优解的可信度，我们在这里采用模拟退火算法，其算法如下：

Step 1 给定 $x^0 \in R^n$，$T_0 > 0$，$\beta > 0$，给定产生随机向量的概率密度函数和控制温度下降过程的温度更新函数，给定常数 $\beta > 0$，计算 $f(x^0)$，$X^0 = x^0$，$X^0_{\min} = x_0$，$f_{\min} = f(x^0)$，$k = 0$；

Step 2 根据给定的概率密度函数产生一个随机向量 Z^k，利用当前迭代点 X^k 和随机向量 Z^k 产生一个新的试探点 Y^k，即 $Y^k = X^k + Z^k$，计算 $f(Y^k)$；

Step 3 产生一个在(0,1)上均匀分布的随机数 n，计算在给定当前迭代点 x^k 和温度 T_k 下接受试探点 Y^k 的概率 $P_a[Y^k \mid X^k, T_k)$ 即

$$P_a[Y^k \mid X^k, T_k] = \min\left\{1, \exp\left(\frac{f(X^k) - f(Y^k)}{\beta T^k}\right)\right\}$$

如果 $\eta \leqslant (P_a[Y^k \mid X^k, T_k])$，则置 $X^{k+1} = Y^k$，$f(X^{k+1}) = f(Y^k)$；

否则置 $X^{k+1} = X^k$，$f(X^{k+1}) = f(X^k)$.

Step 4 如果 $f(X^{k+1}) = f_{\min}$ 则置 $X_{\min} = X^{k+1}$，$f_{\min} = f(X^{k+1})$；

Step 5 如果迭代终止条件满足，则算法结束，$X_{\min}$ 就作为近似的全局最优解，$f_{\min}$ 为相应的最优值；否则继续 Step 6.

Step 6 根据给定的温度更新函数产生一个新的温度 T_{k+1}，置 $k = k + 1$ 转至 Step 2.

考虑到容差的组合，我们第一个想法就是对容差进行穷举，然后利用退火法来搜索最优解，但上机时，计算机内存不够，只能计算少数几组值；并且将均匀分布的随机数发生器换以不同的种子后，X 的"最优解"的波动较大，即在我们现在计算机此法不合适，于是想到一个折中的算法.

第一步 我们确定零件的容差，然后利用退火算法多次循环计算总费用值，取最小值.

记为 f_1^*，以及对应的最优解 X_1^*，转入第二步.

第二步 固定 X_{k-1}^*，将零件的容差的所有组合进行穷举，计算得此时对应的最优容差组合记为 B_k^*，产生新 f^*，最小值记为 f_k^*.

第三步 若 $f_{k+1}^* - f_k < \varepsilon$（$\varepsilon$ 是任意事先指定的常数），终止，否则转入第一步.

利用上面的思想通过编程我们最后得到：

一批零件的总生产费用的最优解为 434.6812 * 1000 = 434681.2 元. 容差向量为[2,2,2,1,1,2,2]

五、模型结果的分析

在分析我们得到的最优解和最优值时，注意到在我们建模时是用正态分布函数代替经验分布函数的，在这里会产生误差.

我们在这个最优值上，进行随机抽样实验，共抽样 10 次，每次抽样 500 个随机数据计算每次抽样的质量损失费，然后求平均值算出在此点的平均质量损失费为 149.0，即总生产成本为 149.6 + 275 = 424.6，则实际成本较之可能还要小. 可见我们的最优值较大.

这个误差一般来说是由于对经验分布函数进行估计所带来的，如果允许一定的误差，我们这种以模型的简练换精度还是值得的.

六、模型优缺点和改进方向(略)

七、附　录(略)

参 考 文 献

[1] 叶其孝，数学模型.
[2] 系统工程理论与实践，1997,5
[3] 耿素云，张立昂，概率统计，北京大学出版社，北京.
[4] 概率统计与随机过程，武汉大学出版社，武汉.
[5] 叶其孝主编，数学建模教育与国际数学建模竞赛.

零件参数的优化设计

初昀辉　刘晓曦　虞朝阳
（西北工业大学，西安　710072）
指导教师　王命宇

编者按　本文使用田口玄一的三次设计思想，在离散的损失函数条件下找到了最优，对问题的分析条理清楚、文字表述简洁.

摘　要　本文讨论了零件参数的最优设计问题.假定标志产品性能的某个参数 y 由零件参数的标定值和容差决定.本文首先给出了零件参数和产品性能参数的统计模型，然后根据三次设计的思想和方法进行标定值和容差设计，先利用直积法做正交试验，得到不同试验条件下的信噪比和 y 值，综合考虑这两项指标，找出较优的零件参数水平，并通过方差分析，确定显著和不显著因素.通过对显著因素的调整，使 y 值更接近于目标值，同时使其均方差保持在较小的值上，这样就兼顾了 y 值的准确性和稳定性，然后再作容差设计.

模型求解用 C 语言编程实现，并用随机模拟法对结果进行了验证.结果表明，本文所建模型是稳定、准确、可靠的.最后得到的零件参数设计与原设计相比，使单位产品总费用由 3165 元降低到 422 元.

一、问题的提出（略）

二、问题的分析

1. 要减少质量损失，就必须使次品和废品尽量少，因此应使 y 值接近目标值 y_0，同时应使 y 值的波动尽量小.也就是说，要同时考虑 y 的准确性与稳定性.

2. 当零件参数的容差固定时，y 的准确性与稳定性取决于零件参数的标定值.若标定值不合适，减小零件容差有可能使质量损失增大，同时成本亦会增大.因此，应首先确定标定值的最优解或较优解，然后再调整容差.

3. 各零件参数对 y 值影响的显著性是不同的，对标定值或容差作调整时，应首先考虑显著性大的零件参数.

三、符号说明

大写字母表示随机变量

$X_i(i=1,2,\cdots,7)$：零件参数；Y：产品参数；F：单位产品费用；L：单位产品质量损失；

小写字母表示确定量

y：产品参数期望值；y_0：产品参数目标值；f：单位产品费用期望值；

l：单位产品质量损失期望值；c：单位产品成本；$x_i(i=1,2,\cdots,7)$：零件参数标定值；

$\bar{y}$：产品参数的随机数；$\delta x_i(i=1,2,\cdots,7)$：零件参数容差；$x_i$：零件参数的随机数；

$\sigma x_i(i=1,2,\cdots,7)$：零件参数均方差；

四、模型建立

基本假设：大量产品的零件参数视为相互独立的随机变量，且服从正态分布.产品性能

取决于零件参数的标定值和容差.

根据题述条件,有

$$Y = 174.42\left(\frac{X_1}{X_5}\right)\left(\frac{X_3}{X_2 - X_1}\right)^{0.85} \cdot \sqrt{\frac{1 - 2.62\left[1 - 0.36\left(\frac{X_4}{X_2}\right)^{-0.56}\right]^{\frac{3}{2}}\left(\frac{X_4}{X_2}\right)^{1.16}}{X_6 X_7}} \tag{1}$$

$$F = c + L \tag{2}$$

要使费用最小,也就是使 F 的期望值最小.由式(2)得

$$\dot{f} = c + l = c + P\{|Y - 1.5| > 0.3\} \times 9000 + P\{0.1 < |Y - 1.5| < 0.3\} \times 1000$$

因 Y 是 $X_1, X_2, \cdots, X_7$ 的函数,且 $X_1, X_2, \cdots, X_7$ 相互独立且均服从正态分布,故 Y 的分布由 $x_1, x_2, \cdots, x_7$ 的均值和方差决定,即由标定值和容差决定.而成本 c 是容差的函数.我们称一组零件参数标定值 $x_1, x_2, \cdots, x_7$,容差 $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_7$ 为一个设计方案,需要做的是在给定范围内找到一个设计方案,使 f 取得最小值.

五、模型求解及结果分析

1. 对给定的设计方案,求解费用期望值 f

成本 c 容易由零件容差求出,下面讨论如何求质量损失期望值 l.

困难在于确定 Y 的分布,我们用随机模拟法求 l.正态随机数的产生方法为:先采用贝斯 - 德拉姆洗牌技术产生均匀分布随机数,再用反变换法产生正态随机数[1].

每次试验,产生 7 个相互独立的正态随机数 $\bar{x}_i$,$\bar{x}_i$ 是服从 $N(x_i, \frac{1}{9}\Delta x_i^2)$ 分布的一个随机数,$i = 1, 2, \cdots, 7$.由式(1)可得一个 $\bar{y}$.重复试验 m 次,统计其中的次品数 n_1,废品数 n_2,可得

$$l = \frac{1000 n_1 + 9000 n_2}{m}$$

于是可进一步求出 f,根据 f 值可评价给定设计方案的优劣.

用原设计的给定值:

$$x_1 = 0.1, \quad x_2 = 0.3, \quad x_3 = 0.1, \quad x_4 = 0.1,$$
$$x_5 = 1.5, \quad x_6 = 16, \quad x_7 = 0.75,$$

容差均取最便宜等级.进行 2 万次随机试验,得到 $f = 3165$,$y = 1.7256$,次品率 63.22%,废品率 25.92%.

由以上数据看出,由于 y 值偏离 y_0 太多,使废品率和次品率很高,导致费用很高,因而这是一个较差的设计方案.

2. 用三次设计法寻求最优设计方案[2]

所谓"三次设计",指系统设计、参数设计(标定值设计)、容差设计,现在 y 与 $x_1, x_2, \cdots, x_7$ 的关系式已给出,故不需作系统设计.下面给出参数设计和容差设计的过程和数据.

(1) 参数设计

我们以 y 值和信噪比 η 为指标用直积法作正交试验,y 和 η 分别反映了 Y 的准确性和稳定性,综合考虑这两个指标,定出最优方案的大致范围,以及各因素对 y 和 η 影响的显著性大小(由方差分析得到).然后调整标定值的区间,再进行试验,重复 2 ~ 3 次即可得到标定

值的最优解(使用该方法所能得到的最优解).限于篇幅,下面只列出主要数据[2].

(a) 内外表设计(见图 1)

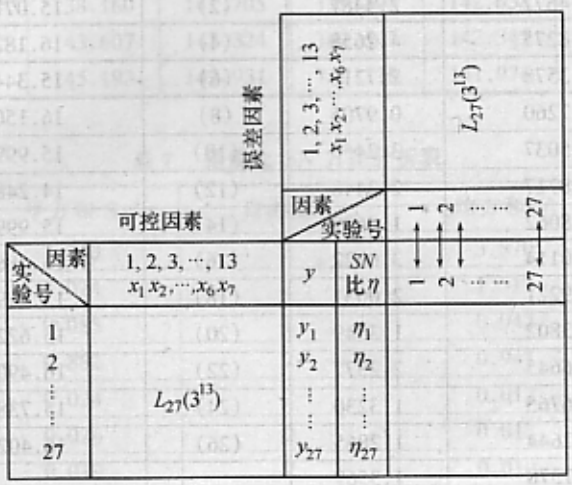


图 1

可控因素水平表和误差因素水平表如下列两表所示.

表 1　可控因素水平表

水平\因素	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
1	0.0750	0.2250	0.0750	0.0750	1.1250	12.0	0.56250
2	0.1000	0.3000	0.1000	0.1000	1.5000	16.0	0.74875
3	0.1250	0.3750	0.1250	0.1250	1.8750	20.0	0.93500

表 2　误差因素水平表

水平\因素	ΔX_1	ΔX_2	ΔX_3	ΔX_4	ΔX_5	ΔX_6	ΔX_7
1	$0.95X_1$	$0.9X_2$	$0.9X_3$	$0.9X_4$	$0.9X_5$	$0.9X_6$	$0.95X_7$
2	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
3	$1.05X_1$	$1.1X_2$	$1.1X_3$	$1.1X_4$	$1.1X_5$	$1.1X_6$	$1.05X_7$

(b) 内表数据及信噪比数据的分析

表内数据及信噪比(SN 值)η 如表 3 所示.只列出试验号,每次试验所对应的各因素水平值可参照 $L_{27}(3^{13})$ 正交表.

从下表数据中,综合考虑信噪比和 y 值,完成:

(i) 通过对信噪比和 y 值分别作方差分析,得到各因素对信噪比和 y 值影响的显著性大小.

(ii) 根据(i) 所得出的结果,选择出各因素的最优水平.上述(i),(ii) 两项可参看表 4 – 7.

表 3 信噪比与 Y 值

条件号	信噪比 $SN(dB)$	Y	条件号	信噪比 $SN(dB)$	Y
(1)	16.4677	2.4487	(2)	15.0777	2.8423
(3)	14.8275	4.2658	(4)	16.1826	1.6680
(5)	16.3578	2.7210	(6)	15.3444	2.6606
(7)	16.7260	0.9705	(8)	16.1507	1.9220
(9)	15.5037	3.2459	(10)	15.9997	1.0543
(11)	15.8717	2.3448	(12)	14.2480	5.0711
(13)	16.8062	1.0699	(14)	15.9997	1.5868
(15)	15.0114	3.0022	(16)	16.4864	0.7763
(17)	15.9221	2.0031	(18)	15.9997	1.6421
(19)	16.3802	1.3849	(20)	15.6225	2.0571
(21)	13.6645	2.2577	(22)	16.4902	0.9919
(23)	15.6765	1.3230	(24)	15.7382	1.9875
(25)	16.2644	1.2865	(26)	16.4027	0.7490
(27)	15.7370	1.3569			

表 4 Y 值方差分析辅助表

水平\因素	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
(1)	1.2946	2.6363	1.6395	2.0759	2.5272	2.3182	2.1967
(2)	1.9499	1.8901	2.0049	2.0968	2.0612	1.8471	2.1035
(3)	2.8322	1.5503	2.4323	1.9040	1.4883	1.9113	1.7764

表 4 元素由表 3 对应列中同水平条件的 y 值相加并除以水平重复数得到.

表 5 Y 值方差分析表

因素	平方和 S	自由度 f	均方和 V	F
X_1	10.717	2	5.358	32.177
X_2	5.555	2	2.778	16.680
X_3	2.834	2	1.417	8.510
X_4	0.202	2	0.101	0.605
X_5	4.874	2	2.437	14.635
X_6	1.175	2	0.587	3.528
X_7	0.877	2	0.438	2.633
e	1.998	12	0.167	0.000
T	28.233	26	0.000	0.000

由于 $a = 0.05$ 时, $F(2,12) = 3.89$, $a = 0.01$ 时, $F(2,12) = 6.93$, 从表 5 可得: 对 Y 值影响最显著的因素是 X_1, X_2, X_5, X_3.

表 6 信噪比 SN 方差分析辅助表

水平\因素	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
(1)	147.804	138.160	141.705	139.303	142.638	141.980	142.604
(2)	143.081	143.607	142.324	142.547	142.345	142.310	142.337
(3)	136.074	145.193	142.931	145.110	141.976	142.670	142.018

表 7 信噪比 SN 方差分析表

因素	平方和 S	自由度 f	均方和 V	F
X_1	7.740	2	3.870	30.893
X_2	3.024	2	1.512	12.071
X_3	0.083	2	0.042	0.331
X_4	0.882	2	0.941	7.513
X_5	0.024	2	0.012	0.098
X_6	0.026	2	0.013	0.106
X_7	0.019	2	0.010	0.076
e	1.503	12	0.125	0.000
T	14.303	26	0.000	0.000

由表 7 的 F 值可得：对信噪比影响最显著的因素是 X_1, X_2, X_3, X_4，因素 $X_i(i = 1,2,\cdots,7)$ 最优水平的选择依据以下原则进行：

(i) 若 X_i 对 Y 影响显著，则从表 4 第 i 列中，选取值最接近目标值 $y_0 = 1.5$ 的水平作为最优水平.

(ii) 若 X_i 对信噪比影响显著，则从表 6 第 i 列中，选取数值最大的水平作为最优水平.

(iii) 若 X_i 对信噪比和 Y 值影响都显著或都不显著，则按表 4 选择.

采用上述原则的理由是：

(i) 当 X_i 只对一个指标显著时，显然应根据该指标选择最优水平.

(ii) 当 X_i 对两指标都显著或都不显著时，应优先考虑使 y 接近 1.5，因为准确性比稳定性更重要一些.

对最后结果的验证也表明了上述原则的合理性.

按照上述步骤可得到一组较优的水平，以该组值作为中心值，将搜索区间长度变为原来的一半，重复上述步骤，共进行 3 次之后，得到一组认为是最佳的标定值：

$$x_1 = 0.0975,\quad x_2 = 0.3000,\quad x_3 = 0.1000,\quad x_4 = 0.1000,$$
$$x_5 = 1.5500,\quad x_6 = 16.400,\quad x_7 = 0.8431$$

(2) 容差设计

我们以上述最优标定值为基础，对各零件参数的容差等级进行穷举搜索(共 108 种)，得到了一组使费用最少的组合为

$$x_1:B,\quad x_2:B\quad x_3:B, x_4:C$$
$$x_5:C,\quad x_6:B\quad x_7:B.$$

这样就得到了完整的零件参数设计.

(3) 结果验证

用2000次随机试验对上述最优设计方案的验证结果为：$y = 1.5009$，$f = 422$，次品率为16.52%，废品率0.01%，显然大大优于原设计.

五、模型优缺点分析及改进措施

1. 优点：

该模型人为假设少，因而能比较准确地反映实际情况，模型求解时充分考虑了准确性和稳定性，采用了合理的择优原则，因而该模型可靠性好.

2. 不足：

在容差设计中，我们采用了穷举法，这是考虑到容差等级少，穷举法必定能找到最佳组合，且运算量也不大. 但作为一种一般方法，若容差等级增多，则运算量会急剧增大.

3. 改进措施：

当容差等级较多时，容差设计可采用正交试验法，亦可进行方差分析，找到对误差影响最大的因素，进行有针对性的调整，这样虽然不一定能找到最佳值，但总可以找到比较优的解，当运算量很大时，这是实际可行的方法.

参考文献

[1] 杨惠中，汪蕙编著，数值计算方法与C语言工程函数库，科学出版社，北京，1996

[2] 中国现场统计研究会三次设计组，全国总工会电教中心编著，正交法和三次设计，科学出版社，北京，1985

[3] 陈兆能，邱泽麟，余经洪编著，试验分析与设计，上海交通大学出版社，上海，1991

[4] 谭浩强编著C程序设计，清华大学出版社，北京，1995

作为具有许多多种多样应用的一个广阔领域，数据采掘可以描述为以从大规模数据集中提取信息为目标的研究领域。

Thomas Manteuffel and James Crowley, Today's Challenge: keeping up with Demand For Mathematics, SIAM NEWS, v. 34(2001), no. 5, pp. 1 – 2.

零件的参数设计

闽令建　黄　毅　汪细敏
（兰州铁道学院，兰州　730070）
指导教师　丁旺才

编者按　本文用田口玄一的三次设计方法解决零件的参数设计问题．通过统计分析调整参数值，基本达到较优解．文字清晰．

摘　要　本文对零件的参数设计问题进行了分析，提出了质量特性的全微分形式，从而根据零件参数的分布函数求得质量特性的分布函数，并求出了总质量损失，这种方法也适用于质量损失函数为不连续分段函数形式的情况．本文对零件参数的设计方法做了进一步探讨，本模型为望目特性的参数设计，对于模型的求解首先进行改善信噪比的设计，然后进行目标值的修正，最后进行容差设计，使总费用达到最小．对题中的分离器参数进行的再设计，使总费用从原设计的 3,085,700 元降低到 468,800 元．所用方法基于数理统计理论，得到的结果合理．本文还讨论了模型的优缺点，并给出了一般的零件参数设计方法．

一、问题重述（略）

二、符号说明

$x_i, i = 1,2,\cdots,7$	零件参数变量；	Q	质量损失；
$X_i, i = 1,2,\cdots,7$	零件参数标定值；	C	成本；
$\Delta_i, i = 1,2,\cdots,7$	零件参数容差；	y	产品参数（即产品质量特性）；
F	总费用；	y_0	产品质量特性目标值（1.50）；

三、问题分析

参数设计是产品设计的核心，它在系统设计之后进行，该问题目的是要选择系统中所有参数的最佳水平组合，从而尽量减少各种干扰的影响，使所设计的产品质量特性 y 波动小，稳定性好．

1．统计特性

该问题是针对批量生产的产品进行分析．由于 $X_i(i = 1,2,\cdots,7)$ 的随机波动，使 y 产生波动，从而偏离目标值，产生质量损失．所以该问题要用概率统计的理论方法进行分析设计．

2．非线性效应与参数标定值设计

通常产品质量特性 y 与零件参数的水平（标定值）之间是非线性关系．本问题亦然．

例如在图一中，若参数 x 取水平 X_1，由于波动 ΔX，引起 y 的波动范围为 ΔY_1，通过参数设计，若将水平 X_1 移到水平 X_2，此时对于同样的波动范围 ΔX，Y 的波动范围缩小为 ΔY_2，显见 $\Delta Y_2 \ll \Delta Y_1$．可见，只要合理地选择参数的水平，在参数的波动范围不变的条件下（因素不增加成本），就可大大减少质量特性的波动范围，提高了产品的稳定性．若按照传统的设计方法，单纯提高零件的质量，把 C 等品改为 A 等品，此时参数 X 的波动范围由 ΔX 缩小为 ΔX，而质量特性 Y 在水平 X_1 处相应的波动范围变为 ΔY_3，虽然 $\Delta Y_3 \gg \Delta Y_2$．

所以并非由 A 等品组装起来的产品就一定是一级产品，参数设计就是要利用这种非线性效应，寻找参数的最佳水平（标定值）组合.

3. 容差设计

容差大小对质量特性 Y 的影响可在图1中表明，若缩小 ΔX，则 ΔY 也缩小.

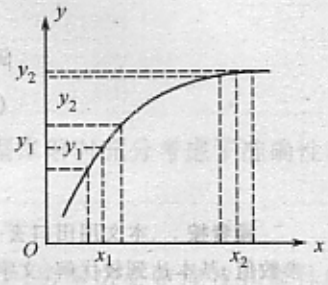


图 1

容差设计的思路是：根据各参数的波动对产品质量特性影响的大小，从经济角度考虑有无必要对影响大的参数给予较小的容差，以便进一步减少质量特性的波动，减少质量扣失，但这样会使产品的成本有所提高. 因此，要寻找使总费用最小的容差设计方案，使所设计的产品质量特性 y 波动小，稳定性好.

四、模型的建立及求解

根据对本题的分析，我们的设计目标是设计一组参数标定值 $X_i(i=1,2,\cdots,7)$ 及其容差 $\Delta_i\ i=1,2,\cdots,7$ 使得：

$$E(y)=y_0,\quad v(y)=\sigma^2 \text{ 越小越好}$$

以上即为望目特性的参数设计.

1. 质量特性 y 的全微分及质量损失

要计算质量损失需知道 y 的分布函数. 由于本题 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_7)$ 是一较复杂的经验公式. 所以尽管已知 $x_i(i=1,2,\cdots,7)$ 的分布函数，但无法直接推出 y 的分布函数.

如果各偏导数存在且连续，则我们用全微分原理能够得到

$$\delta y=\sum_{i=1}^{7}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i \tag{1}$$

这些偏导数，我们可利用 Mathematica 软件包进行求解，从上式可知各偏导数的值影响了 $X_1,X_2,\cdots,X_7$ 各自波动时对 y 值波动的贡献系数，当一组标定值 $X_i(i=1,2,\cdots,7)$ 确定以后，我们近似地认为这些贡献系数是一些常数. 则 δy 与 $\Delta x_i(i=1,2,\cdots,7)$ 有关，由于后者为正态分布，则也可认为 δy 是正态分布，这样也从另一方面说明了假设4的合理性. 我们可以由 $\Delta x_i(i=1,2,\cdots,7)$ 的方差求得 δy 的方差

$$\sigma^2=\sum_{i=1}^{7}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2\sigma_i^2 \tag{2}$$

于是，对于正态分布的 y

$$E(y)=Y=f(X_1,X_2,\cdots,X_7) \tag{3}$$

$$D(y)=\sigma^2 \tag{4}$$

即 y 的概率密度函数为

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(y-y_0)^2}{2\sigma^2}} \tag{5}$$

由于质量损失函数

$$Q(y)=\begin{cases}0, & |y-y_0|<0.1\\ 1000, & 0.1\leqslant|y-y_0|<0.3\\ 9000, & |y-y_0|\geqslant 0.3\end{cases} \tag{6}$$

求得总的质量损失：

$$\widetilde{Q} = \int Q(y)f(y)\mathrm{d}y = 1000 \int_{0.1\leqslant|y-y_0|\leqslant 0.3} f(y)\mathrm{d}y + 9000 \int_{|y-y_0|\geqslant 0.3} f(y)\mathrm{d}y \tag{7}$$

若总成本为 C，则总费用 F 为

$$F = \widetilde{Q} + C \tag{8}$$

根据以上算法求得的原设计值下的结果为：正品率：12.55%，次品率：62.31% 费品率：25.14%，总的质量损失：$\widetilde{Q}$ = 2,885,700(元)；总成本：C = 200,000(元)；总费用：F = 3,085,700(元)；

2. 标定值 $X_i(i = 1,2,3,\cdots,7)$ 选优设计

标定值选择的好坏，直接影响了 Y 的受力大小. 为了反映各零件参数对质量特性 Y 的影响，我们引入信噪比和灵敏度这两个统计指标进行了分析，分两段进行

(a) 信噪比分析：寻找使信噪比达到最大，即稳定性最好的最佳水平组合.

(b) 灵敏度分析：寻找与信噪比无关，灵敏度显著的可控因素 — 称为调整因素. 并进行调整作业，使最佳条件下质量特性的期望值趋近目标值 y_0.

我们利用正交表的内外表直积法进行求解.

(1) 可控因素及误差因素

所谓可控因素，系指在技术上已指定，并且能够进行选择和控制的质量因素，我们构成经验公式的变量，可控因素有 7 个

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7.$$

所谓误差因素，系指使系统质量产生波动的原因的总和，即所有波动的原因，有时也称之为干扰. 为了区分可控因素和误差因素，我们利用在英文字母的右边加 ′，来表示误差因素，如 X_1'，表示 X_1 因素是误差因素.

误差因素有 7 个，$\Delta x_i(i = 1,2,\cdots,7)$

(2) 确定可控因素水平

我们考虑用原设计的参数值作为可控因素的第二水平，第一、第三水平采用等差数列来确定，并且其差尽量取得大些，以便使研究的范围更广些.

我们所确定的第二水平为：$x_1 = 0.1, x_2 = 0.3, x_3 = 0.1, x_4 = 0.1, x_5 = 1.5, x_6 = 16, x_7 = 0.75$

按等差数列来确定第一、三水平，得到可控因素水平表(见表 2)，此为 7 因素水平.

表 1　可控因素水平

水平	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
水平 1	0.075	0.225	0.075	0.075	1.125	12	0.565
水平 2	0.1	0.3	0.1	0.1	1.5	16	0.75
水平 3	0.125	0.375	0.125	0.125	1.875	20	0.935

(3) 内设计

安排可控因素的正交表称为内表，相应的设计称为内设计，我们选用正交表 $L56(3^{13})$ 作为内表进行内设计.

表头设计为

列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
因素	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7						

空列作为误差列，内表见表 2

(4) 外设计

安排误差因素和信号因素的正交表称为外表，相应的设计称为外设计. 对于外设计，我们仍选用 $L36(3^{13})$ 正交表进行. 为不失一般性，我们把 $\Delta x_1, \cdots, \Delta x_7$ 共 7 个误差因素依次排列在正交表 $L36(3^{13})$ 中的第一列，…，第七列，其余为空列.

(5) 计算信噪比

信噪比的计算公式(附录略).

(6) 内表的统计分析

表 2　内表及信噪比数据

编号	$\eta(DB)$	编号	$\eta(DB)$	编号	$\eta(DB)$	编号	$\eta(DB)$
1	7.293358	2	− 0.667325	3	− 7.809498	4	− 0.944386
5	6.0723015	6	12.018950	7	− 15.599517	8	6.791221
9	− 4.632693	10	6.534921	11	− 1.063730	12	0.042895
13	− 6.152885	14	0.025610	15	9.569289	16	4.319945
17	4.369740	18	7.67204	19	17.752659	20	6.314679
21	10.42688	22	10.32445	23	4.981981	24	8.3599532
25	15.421156	26	9.988859	27	7.414917	28	0.945912
29	3.442791	30	5.141854	31	10.770247	32	− 3.260096
33	11.27773	34	21.635672	35	9.260098	36	10.731010

内表的统计分析对象是信噪比，它是衡量内表中方案稳健性的指标. 我们首先计算出每个因素($x_1 \sim x_7$ 共 7 个因素)各水平(三个水平)下信噪比的合计值及平均值，结果见表 5. 然后计算各种波动平方和与自由度.

总波动 S

$$S_r = \sum_{i=1}^{36}(\eta_i - \bar{\eta})^2 = \sum_{i=1}^{36}\eta_i^2 - \frac{1}{36}\left(\sum_{i=1}^{36}\eta_i\right)^2$$

表 3　外表

编号	$y - y_0$	编号	$y - y_0$	编号	$y - y_0$	编号	$y - y_0$
1	0.013199	2	− 0.205808	3	372261	4	− 0.240722
5	− 0.405250	6	0.102015	7	− 0.047623	8	− 0.096853
9	− 0.401065	10	0.038727	11	− 0.312656	12	− 0.39549
13	− 0.255442	14	− 0.364351	15	0.050741	16	− 0.007782
17	− 0.421923	18	− 0.112883	19	− 0.545118	20	− 0.12668
21	0.14699	22	− 0.374668	23	− 0.097154	24	− 0.107961
25	− 0.464484	26	0.040643	27	− 0.124105	28	− 0.317290
29	− 0.184350	30	− 0.158516	31	− 0.391648	32	− 0.229455
33	0.082814	34	− 0.612884	35	0.021405	36	0.122002

然后，将上述结果整理为方差分析表(见表5). 从方差分析表可以看出，X_6高度显著，因素 X_1, X_7 显著，X_2, X_3, X_4, X_5 不显著.

表 4　方差分析辅助表

T_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
T_1	12.1290	8.8695	10.4274	9.0850	9.8308	10.4250	13.6580
T_2	7.8174	12.0985	10.2146	9.8887	12.5296	6.2090	9.5773
T_3	11.7023	10.6808	11.0067	12.675	9.2884	15.0148	8.4134
T		189.892					

表 5　参数设计表内表的方差分析

来源	S	f	V	F
X_1	33.863	2	16.932	0.442
X_2	15.71	2	7.858	
X_3	1.008	2	0.504	
X_4	21.297	2	10.649	
X_5	14.125	2	7.063	
X_6	116.384	2	58.192	1.516
X_7	45.565	2	22.782	0.594
l	1640.955	21	50.522	
$\bar{l}$	1193.103	(29)	38.383	
T	189.422	35		

(7) 确定参数组合：

(a) 本题中 x_2, x_3, x_4, x_5 因素不显著，所以其水平可自由选取；显著因素和高度显著因素 x_1, x_7 和 x_6 的水平必须由信噪比来选择. 从而得到一组满足稳健性的参数(见表 6).

将这一组满足稳健性的参数标定值代入经验公式得到 $Y = 0.71$

(b) 再利用不显著因素求(一致性)参数组合. 用于满足稳健性的参数组合对应的输出特性与目标值相差太大(偏移过多)，我们必须进行校正. 通过调整对信噪比影响不显著，但对灵敏度影响显著的因素的参数值，使输出特性接近目标值.

表 6

参数	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
水平	1	2	1	3	3	3	1

(c) 为了确定具体的调整因素，我们需要求出灵敏度. 所谓灵敏度，是反映平均特性的指标. 计作 $s = \hat{\mu}^2\mu$ 的无偏估计为 $\hat{\mu}^2 = (S_m - V_e)/n$

因此，我们利用类似求信噪比的方法，得到灵敏度的估计公式如下：

$$S = 10\log\left[\frac{1}{n}(S_m - V_e)\right]$$

从而得到灵敏度的值(如表 7).

表 7

0	1	2	3	4	5	6	7	8
- 1.6064	- 12.0466	- 21.1154	- 14.8225	- 8.5211	7.556130	- 28.1167	- 1.978	- 17.9564
9	10	11	12	13	14	15	16	17
- 3.2513	- 15.161	- 10.73	- 19.741	- 14.115	4.6633	- 6.447	- 10.6314	2.753
18	19	20	21	22	23	24	25	26
- 2.088	- 3.046	7.7046	- 6.4040	- 4.94	3.089	- 3.0788	3.844	- 0.9729
27	28	29	30	31	32	33	34	35
- 13.575	- 6.61	- 3.515	- 6.10	- 14.052	7.18	- 0.385	2.2595	6.5231

通过以上的两阶段设计，我们把可控因素分成以下几个类(见表 8)

表 8

	信噪比	灵敏度	因素名称
X_1	显著	显著	确定因素
X_2	不显著	显著	可调因素
X_3	不显著	显著	可调因素
X_4	不显著	不显著	次要因素
X_5	不显著	显著	可调因素
X_6	显著	不显著	确定因素
X_7	显著	显著	确定因素

表 9

X_2 增大	Y 减小
X_3 增大	Y 增大
X_5 增大	Y 减小

由于通过参数设计得到的一组水平组合代入 y 的表达式所得 Y 值与目标值相差过大，我们应该通过调整可调因素 X_2, X_3, X_5 来调整 y 值使其更接近于目标值 1.50，易推知 Y 随 X_2, X_3, X_5 的变化关系如表 9.

我们也利用 Mathematica 软件画出 y 值随 X_2, X_3, X_5 的变化关系曲线(如图 2 - 4).

3. 容差设计

通过以上调整得到一组最佳组合下的 $x_i(i = 1,2,\cdots,7)$ 的标定值，在此标定值上 $E(y) = y_0$. 我们应该找到一组零件质量等级的组合使总的费用最小. 因随零件质量等级的不同，生产成本也不同，所以提高零件质量未必能减少总费用. 而应该提高那些对产品质量波动影响较显著的零件的质量等级，即给这些零件以较小的容差范围. 而对那些对产品影响甚小的零件，给以较大的容差范围，以降低生产成本.

通过上面的分析我们知道，应当首先确定 $X_i, (i = 1,2,\cdots,7)$ 中哪些零件的容差对产品影响较大，这就是容差设计.

因此我们应使 X_2, X_5 的值减小，X_3 的值增大，从而使 y 值增大.

通过计算我们得到了一组标定值 X_i 的最佳水平组合 $X_1 = 0.075, X_2 = 0.225, X_3 = 0.125, X_4 = 0.125, X_5 = 1.621, X_6 = 20, X_7 = 0.565$

(1) 给出误差因素水平表

以最佳条件 $x_1 = 0.075, x_2 = 0.225, x_3 = 0.125, x_4 = 0.125, x_5 = 1.62067, x_6 = 20, x_7 = 0.565$ 为标定值，按各零件的最低等级作为零件质量特性的波动范围，可得到如下的误差因素水平表(表 10).

表 10 容差设计水平表

水平	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
水平 1	0.07125	0.2025	0.1125	0.1125	1.4586	18	0.53675
水平 2	0.075	0.225	0.125	0.125	1.62067	20	0.565
水平 3	0.07875	0.2475	0.1375	0.1375	1.78273	22	0.59325

(2) 我们选用 $L36(3^{13})$ 的正交表进行容差设计. 把误差因素依次排在正交表的 1—7 列,由 y 的经验公式 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_7)$ 计算出输出特性 y 及 $\Delta y = y - y_0$, y 及 Δy 的计算可用 C 语言编程实现. 其结果见表 11.

(3) 方差分析

因该设计中误差水平等间隔,故可用正交多项式的回归理论进行方差分析.

根据波动平方和的分析公式

$$S'_T = \sum_{i=1}^{36}(y_i - y_0)^2 = n(bary - y_0)^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$$

该式说明总波动来自两个方面:

第一是均值偏移波动 n;

第二是以 $\bar{y}$ 为中心的随机波动 $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$,若 S_m 表示第一波动. S_i 表示因素波动,则

$$S'_T = S_m + \sum_{i=1}^{7} S_{x_i} + S_e$$

另外,我们将因素的波动还可以分解为一次波动 S_e 和二次波动 S_q.

下面我们给出计算各自波动的平方和及自由度的公式总波动: $S'_T = \sum_{i=1}^{7}(y_i - 1.5)^2$;均值偏移波动: S_m · X_i 因素的一次项波动

$$Sx_ie = \frac{(-1 \times T_1 + 0 \times T_2 + 1 \times T_3)^2}{r\lambda^2 s}, \quad (r = 12, \lambda^2 s = 2)$$

$$Fx_ie = 1,$$

X_i 因素的二次项波动

$$Sx_iq = \frac{(1 \times T_1 - 2 \times T_2 + 1 \times T_3)^2}{r\lambda^2 s}, \quad (r = 12, \lambda^2 s = 6)$$

$$Fx_iq = 1$$

对以上调整方案总成本的计算和模型前面部分给定标定值时的求解方法完全相同. 通过对以下调整方案的比较我们得出了此问题的最优解.

调整方案为: X_3(B 等) x_4(B 等) X_5(B 等)

综上,我们得出再设计后的结果如下:

标定值 $X_1 = 0.075, X_2 = 0.025, X_3 = 0.125, X_4 = 0.125, X_5 = 1.621, X_6 = 20, X_7 = 0.565$. 容差等级分别取 B, C, B, B, C, B, B 得出正品率:82.62%,次品率:17.38%,总成本:295000 元,损失费:1738000 元,总费用:468800 元.

表 11 最佳条件下的输出特性值

编号	$y-y_0$	编号	$y-y_0$	编号	$y-y_0$	编号	$y-y_0$
1	0.2538301	2	-0.000000	3	-0.192927	4	-0.0404470
5	-0.231161	6	0.356770	7	-0.047099	8	-0.221959
9	-0.157628	10	70.139081	11	-0.222314	12	-0.017327
13	-0.027336	14	-0.112780	15	-0.037419	16	-0.229514
17	-0.250485	18	-0.107690	19	-0.4728657	20	-0.281010
21	0.254411	22	-0.288519	23	0.288041	24	-0.017174
25	-0.180150	26	0.141121	27	-0.01997	28	-0.055204
29	-0.2591450	30	0.146285	31	-0.215396	32	-0.027410
33	0.334515	34	-0.416369	35	-0.005087	36	0.4490659

为了进行方差分析我们首先给出方差分析的辅助表

表 12 容差的方差分析的辅助表

T_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
T_1	-0.9732	0.4965	-1.3379	1.5861	1.8783	0.9626	0.4920
T_2	-0.2368	0.2139	-0.0710	0.1553	-0.0522	0.244	-0.0765
T_3	1.2825	-0.6379	1.4814	-1.8669	-1.7540	-1.1317	-0.3429
T		0.07258					

方差分析表见表 13,由表可知道误差因素 X_3, X_4, X_5 显著

表 13 容差的方差分析表

来源		S	f	V	F	S'	$\rho(\%)$
m		0.000146	1				
x_1	x_{11}	0.21201	1	0.21201	1.72411	0.089	8.43
	x_{1q}	0.008511	1				
x_2	x_{21}	0.05362	1				
	x_{2q}	0.0045	1				
x_3	x_{31}	0.28497	1	0.28497	2.31743	0.162	15.34
	x_{3q}	0.001132	1				
x_4	x_{41}	0.44146	1	0.44146	3.59002	0.3185	30.16
	x_{4q}	0.00215	1				
x_5	x_{51}	0.54959	1	0.54959	4.46936	0.4266	40.40
	x_{5q}	0.000729	1				
x_6	x_{61}	0.18278	1	0.18278	1.48644	0.05982	5.56
	x_{6q}	0.005898	1				
x_7	x_{71}	0.02904	1				
	x_{7q}	0.00127	1				
e		3.7052	21				
$\bar{e}$		3.8120	(31)	0.12297			
T		5.4829	36	0.15230			

(4) 容差的确定

由方差分析表上看出,只有 X_1, X_3, X_4, X_5, X_6 的容差对质量损失有影响.又 X_1, X_5 的容差是不可调的,因此只有调整 X_3, X_4, X_6 的容差.其可行的调整方法有如下几种(表 14).

表 14

		等级	
	X_3, X_4, X_6		
未调整	C	C	C
调整方案	C	B	C
	C	A	C
	B	B	C
	A	B	C
	B	B	B
	B	B	A

五、模型优缺点及一般零件参数设计步骤

(1) 模型的建立及求解依据数理统计的原理与方法,结果合理可靠;

(2) 模型引入质量特性的全微分近似求解的偏差,可得到它的分布函数,解决了质量损失函数分段不连续的问题;

(3) 零件的参数设计采用"新概念"设计,即设计阶段采用波动大,价格低廉的零件,通过调整寻找它们最佳水平组合,设计出稳定可靠的产品.因此对象我国这样的发展中国家来说,这是一个重要的质量管理方法;

(4) 设计中采用正交设计方法,这种多因素选优法能够从代表性强的少数几次试验,选取最优设计方案;

(5) 本文所采用的方法可以大规模地在我国各行各业的参数设计中采用.

一般零件参数设计步骤(略)

参 考 文 献

[1] 韩之俊等,质量工程学一线外,线内质量管理,科学出版社,北京,1991

[2] 韩之俊等,质量工程学,北京理工大学出版社,北京,1991

[3] 盛骤等编,概率论与数理统计,高等教育出版社,北京,1989

[4] 邹应,数学分析,高等教育出版社,北京,1995

“零件的参数设计”模型和评述

清华大学

姜启源

1997年大学生数学建模竞赛题目“零件的参数设计”的素材，是美国明尼苏达大学运筹与管理科学系助理教授李文连提供的.他在美国取得博士学位后，曾在福特汽车公司工作过一段时间，这个问题是他亲自遇到并研究过的，题目中的经验公式、参数标定值范围和容差等级都是真实的，在形成赛题过程中只对质量损失费用和零件成本等作了一些加工和简化.

零件的参数设计是机械工业设计工作中的重要步骤之一，确定零件参数的标定值和容差又是参数设计的基本内容.在批量生产过程中，标志产品质量的指标(在本题中表示为产品某参数偏离目标值的大小)取决于零件参数的标定值和容差.从经济角度考虑，标定值设计不合理或容差设计得太大，会使产品参数远离目标值，造成质量损失；而容差设计得太小，又会增加零件制造(或订购)成本.综合考虑产品质量和零件成本，设计时必须作出某种折中.

工程上进行零件参数设计的一种现成方法，是近年来我国某些专家提倡和推广的、日本学者田口玄一提出的所谓“三次设计”，简称田口方法.这次有一些参赛队查到了相关资料如[1]，用该方法解决这个问题，本刊选登了几篇用得较好的论文，供大家参考，本文不再涉及田口方法.但是要指出的是，田口方法存在一些缺点(特别是用于本题).首先，它是先对标定值后对容差分别选优，又没有迭代过程，所以一般说来得不到总体最优解.其次，它采用正交试验设计方法，标定值和容差必须离散化，对于像本题标定值有连续变化范围的问题，这是不方便和不够精确的.下面结合参赛队的一些作法给出这一问题的基本模型和解法.

一、关于质量损失函数

题目说：“如果产品参数偏离预先设定的目标值，就会造成质量损失，偏离越大，损失越大”.这个损失是对整个社会而言的，意思是只要$|y-y_0|$不等于零(y和y_0分别表示产品参数和它的目标值)，就有损失，于是质量损失函数$L(y)$应该是$(y-y_0)$的连续函数.考虑到题目所给条件：y偏离$y_0\pm0.1$时损失1000元；偏离±0.3时损失9000元，可以合理地假设质量损失函数为$(y-y_0)$的二次函数

$$L(y)=k(y-y_0)^2,\quad k=10^5. \tag{1}$$

不少参赛队将损失理解为仅对工厂而言，又注意到“y偏离$y_0\pm0.1$时产品为次品，偏离±0.3时产品为废品”的叙述，认为这里的产品就是工厂出售的最终产品，于是正品没有损失；只要是次品，损失都一样；废品损失也一样.所以设质量损失函数为

$$L(y)=\begin{cases}0, & |y-y_0|\leqslant 0.1,\\ 1000, & 0.1<|y-y_0|\leqslant 0.3,\\ 9000, & |y-y_0|>0.3.\end{cases} \tag{2}$$

其实仅对工厂而言，如果认为这里的产品仅是最终产品的某一部件，y对y_0的偏离会“连续地”影响最终产品的质量，损失函数用(1)式似乎更合理些.

在全国评阅中，这两种形式的损失函数都认为是合理的.

二、基本模型

显然这是一个优化问题，目标函数应为成批生产时(平均每件)产品的质量损失与零件成本之和，决策变量是零件参数的标定值和容差.

可以合理地假设零件参数为相互独立的随机变量 $x_1, x_2, \cdots x_n$，期望(平均值)和均方差分别记作 x_{i0} 和 σ_i，(绝对)容差记为 $r_i = 3\sigma_i$，相对容差记为 $t_i = r_i / x_{i0}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，再记 $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{n0})$，$t = (t_1, t_2, \cdots, t_n)$.

由于产品参数 y 是由零件参数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 决定的，记作 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，显然 y 也是随机变量，大量生产时(平均每件)产品的质量损失费用应该用损失函数 $L(y)$ 的期望来度量，它取决于零件参数标定值 x_0 和容差 t，我们记为

$$Q(x_0, t) = E[L(y)]. \tag{3}$$

零件成本只取决于容差，第 i 种零件的成本记作 $c_i(t_i)$，则零件总成本为

$$C(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t_i). \tag{4}$$

于是该优化问题的目标函数可表示为

$$Z(x_0, t) = E[L(y)] + C(t). \tag{5}$$

下面分别就(1)和(2)式定义的损失函数 $L(y)$，讨论目标函数 $Z(x_0, t)$ 的表达式.

对于(1)式我们有

$$Q(x_0, t) = 10^5 E(y - y_0)^2 = 10^5[(Ey - y_0)^2 + \sigma_y^2], \tag{6}$$

其中 σ_y^2 是 y 的方差. 为了得到 Ey 和 σ_y^2 的简单表达式，在 x_0 处对 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 作 Taylor 展开，并略去二阶及二阶以上诸项，有

$$y = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i - x_{i0}), \quad d_i = \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x_0}. \tag{7}$$

于是

$$Ey = f(x_0),$$

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \sigma_y^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{n}(d_i x_{i0} t_i)^2. \tag{8}$$

目标函数为

$$Z(x_0, t) = 10^5[f(x_0) - y_0]^2 + \frac{10^5}{9}\sum_{i=1}^{n}(d_i x_{i0} t_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} c_i(t_i). \tag{9}$$

注意：在推导(9)式的过程中我们只用到随机变量 x_i 的期望和方差，与它的概率分布无关，这里的误差来源于(7)式中忽略的高阶项.

当损失函数取(2)式时，计算期望需要随机变量 y 的概率分布，于是必须知道 x_i 的概率分布. 可以合理地假定 x_i 服从正态分布 $N(x_{i0}, \sigma_i)$，则在近似式(7)下，y 也服从正态分布 $N(f(x_0), \sigma_y)$，σ_y 由(8)式确定. 若记概率

$$P_1 = P(0.1 < |y - y_0| \leqslant 0.3),$$

$$P_2 = P(|y - y_0| > 0.3), \tag{10}$$

则目标函数为

$$Z(x_0, t) = 1000P_1 + 9000P_2 + \sum_{i=1}^{n} c_i(t_i). \tag{11}$$

为了计算 P_1, P_2,令

$$z_1 = [y_0 - 0.3 - f(x^0)]/\sigma_y,$$
$$z_2 = [y_0 - 0.1 - f(x_0)]/\sigma_y,$$
$$z_3 = [y_0 + 0.1 - f(x_0)]/\sigma_y,$$
$$z_4 = [y_0 + 0.3 - f(x_0)]/\sigma_y, \tag{12}$$

则

$$P_1 = \Phi(z_4) - \Phi(z_3) + \Phi(z_2) - \Phi(z_1),$$
$$P_2 = 1 - \Phi(z_4) + \Phi(z_1), \tag{13}$$

其中

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{14}$$

可以作近似计算或由标准正态分布表查出.

本题的基本模型为在条件

$$a_i \leqslant x_{i0} \leqslant b_i,\ t_i = 0.01,\ 0.05,\ 0.1,\ i = 1, 2, \cdots, n \tag{15}$$

下(a_i, b_i 由题目数据给出)求零件参数标定值 x_0 和容差 t,使(9)或(11)式表示的目标函数 $Z(x_0, t)$ 达到最小.

有一些参赛队认为,要使 $Z(x_0, t)$最小,首先必须选 x_0满足

$$f(x_0) = y_0, \tag{16}$$

然后再确定容差.这是不对的,因为这样固然可以使(9)式右端的第一项消失,但是第二项也与 x_0 有关,满足(16)式的 x_0 不一定能使两项之和最小.

还有的参赛队先选 x_0,使之满足

$$|f(x_0) - y_0| < \epsilon. \tag{17}$$

譬如给定 $\epsilon = 0.01$,然后再对于这样一些 x_0 确定容差,经过比较得到最终的解.这样做虽然可以得到相当不错的数字结果,但从理论上说是有缺陷的,因为满足(17)式的 x_0 位于一个非常复杂的多维区域内,不可能对所有的 x_0 进行比较.

三、基本解法

注意到在基本模型(9)(或(11))和(15)式中,决策变量 x_0 是连续的,t 是离散的,而且 t 的取值仅 $2\times3\times3\times3\times2 = 108$ 种,可以先固定 t,求解如下一系列子问题

$$\min Z_1(x_0) = 10^5[f(x_0) - y_0]^2 + \frac{10^5}{9}\sum_{i=1}^{n}(d_i x_{i0} t_i)^2, \tag{18}$$

$$\text{s.t. } a_i \leqslant x_{i0} \leqslant b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{19}$$

得到最优解 x_0^* 和最优值 Z_1^*,然后对 108 个 t 比较

$$Z(x_0^*, t) = Z_1^* + C(t), \tag{20}$$

得到全局最优解 x_0^* 和最优值 Z^*.对于(11)式表示的目标函数,求解思路一样.

子问题(18),(19)是非线性规划模型,可以选用现成的软件包(如 LINDO)求解.而(7)式中导数 d_i 应事先算出(如用 Mathematica 软件).

可以设计某种减少子问题数目的程序,例如按照 $C(t)$的数值由小到大排序,依次计

算.每解出一个子问题,立即由(20)式算出当前的最优值 Z_c^*,对待求解的子问题,先判断 $C(t) > Z_c^*$ 是否成立,若成立,则该子问题不必再解.

也可以设计一种迭代程序,x_0 和 t 一个固定,另一个优选,反复进行直到它们不再变化为止,参看[2].

下面给出一组计算结果,供参考.

对于模型(9),(15),参数标定值为 $x_0^{**}=(0.075,0.375,0.125,0.1185,1.1616,19.96,0.5625)$,容差为 $t^*=(0.05,0.05,0.05,0.1,0.1,0.05,0.05)$,即容差等级为$(B,B,B,C,C,B,B)$,(平均每件)产品的总费用为 $Z^*=748.7$ 元.

对于模型(11),(15),在上面的 x_0^{**} 和 t^* 下也得到最小的总费用 421.2 元(最优解可能不唯一).

四、关于随机模拟

有一些参赛队利用了随机模拟(Monte Carlo 模拟)方法,基本步骤为,设 x_i 服从正态分布 $N(x_{i0},\sigma_i)$,对每一组选定的 x_0,t,随机产生 N 个数据(向量)$x^{(j)}$,然后根据(3)式作模拟计算:y 以 $f(x^{(j)})$ 代替,对(1)式表示的 $L(y)$ 有

$$Q(x_0,t)=\frac{10^5}{N}\sum_{j=1}^{N}[f(x^{(j)})-y_0]^2. \tag{21}$$

最后,对不同的 x_0,t,从 $Z=Q+C$ 中选优.对(2)式表示的 $L(y)$ 可作类似的处理.

这种方法虽然不需要算出 f 的导数、y 的方差等,但是要想得到满意的结果,必须进行更大量的计算,不仅 N 要很大,而且 x_0 要在给定范围内离散地布点(须相当稠密).

一般地说,仅当一个问题无法解析地求解时,才利用随机模拟,否则这个方法只是用作结果的检验.所以本题还是应该用前面讨论的方法做,仅用随机模拟不能认为是好的答卷.

五、其他

在评阅中我们发现,除了上述的基本模型和基本解法外,还有一些值得提出的,如:

有的队作了 7 个参数标定值的变化对费用的敏感性分析,找出其中最敏感的如 x_1,x_2,这不仅对问题的求解有用(搜索时对敏感的参数步长缩小),而且对实际应用有一定的指导意义.

有的队对 y 的分布作了统计检验,他们先用正态分布的 x_i 模拟产生 y,作 y 的直方图,用 χ^2 拟合正态分布,然后再在线性近似下证明 y 确为正态分布,这种作法是符合认识规律的.

许多队在求解时都采用了多种方法,如西南石油学院队考虑到 x_0 连续取值而 t 离散取值,采用因素交替法、一维搜索法和穷举法,他们还研制了 Windows 环境下的参数优化设计软件,又如四川联合大学队为克服陷入局部极小的缺点,采用了模拟退火方法.

评阅中还发现有的队不够严肃认真,如他们给出的最低费用甚至小于 420 元(对模型(11),(15)),但是用他们给出的最优解校核,根本得不到这个费用.

参考文献

[1] 韩之俊,章谓基.质量工程学.北京:科学出版社,1991

[2] Chan, L. K. and Xiao, P. H., Combined Robust Design. Quality Engineering 8(1), 1995.47~56