

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

# 高等数学

第六版 上册

同济大学数学系 编

高等教育出版社

# 目 录

<b>第一章 函数与极限</b> .....	1
<b>第一节 映射与函数</b> .....	1
一、集合(1) 二、映射(5) 三、函数(7) 习题 1-1(21)	
<b>第二节 数列的极限</b> .....	23
一、数列极限的定义(23) 二、收敛数列的性质(28) 习题 1-2(30)	
<b>第三节 函数的极限</b> .....	31
一、函数极限的定义(31) 二、函数极限的性质(36) 习题 1-3(37)	
<b>第四节 无穷小与无穷大</b> .....	39
一、无穷小(39) 二、无穷大(40) 习题 1-4(42)	
<b>第五节 极限运算法则</b> .....	43
习题 1-5(49)	
<b>第六节 极限存在准则 两个重要极限</b> .....	50
习题 1-6(56)	
<b>第七节 无穷小的比较</b> .....	57
习题 1-7(59)	
<b>第八节 函数的连续性与间断点</b> .....	60
一、函数的连续性(60) 二、函数的间断点(62) 习题 1-8(64)	
<b>第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性</b> .....	66
一、连续函数的和、差、积、商的连续性(66) 二、反函数与复合函数的连续性(66) 三、初等函数的连续性(68) 习题 1-9(69)	
<b>第十节 闭区间上连续函数的性质</b> .....	70
一、有界性与最大值最小值定理(70) 二、零点定理与介值定理(71)	
三、一致连续性(72) 习题 1-10(74)	
<b>总习题一</b> .....	74
<b>第二章 导数与微分</b> .....	77
<b>第一节 导数概念</b> .....	77
一、引例(77) 二、导数的定义(79) 三、导数的几何意义(83)	
四、函数可导性与连续性的关系(85) 习题 2-1(86)	
<b>第二节 函数的求导法则</b> .....	88
一、函数的和、差、积、商的求导法则(88) 二、反函数的求导法则(90)	
三、复合函数的求导法则(92) 四、基本求导法则与导数公式(95)	
习题 2-2(97)	

<b>第三节 高阶导数 .....</b>	<b>99</b>
习题 2-3(103)	
<b>第四节 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 相关变化率 .....</b>	<b>104</b>
一、隐函数的导数(104) 二、由参数方程所确定的函数的导数(107)	
三、相关变化率(111) 习题 2-4(111)	
<b>第五节 函数的微分 .....</b>	<b>113</b>
一、微分的定义(113) 二、微分的几何意义(115) 三、基本初等函数的 微分公式与微分运算法则(116) 四、微分在近似计算中的应用(119)	
习题 2-5(123)	
<b>总习题二 .....</b>	<b>125</b>
<b>第三章 微分中值定理与导数的应用 .....</b>	<b>128</b>
<b>第一节 微分中值定理 .....</b>	<b>128</b>
一、罗尔定理(128) 二、拉格朗日中值定理(129) 三、柯西中值定理(132)	
习题 3-1(134)	
<b>第二节 洛必达法则 .....</b>	<b>134</b>
习题 3-2(138)	
<b>第三节 泰勒公式 .....</b>	<b>139</b>
习题 3-3(145)	
<b>第四节 函数的单调性与曲线的凹凸性 .....</b>	<b>145</b>
一、函数单调性的判定法(145) 二、曲线的凹凸性与拐点(149)	
习题 3-4(152)	
<b>第五节 函数的极值与最大值最小值 .....</b>	<b>154</b>
一、函数的极值及其求法(154) 三、最大值最小值问题(158)	
习题 3-5(162)	
<b>第六节 函数图形的描绘 .....</b>	<b>164</b>
习题 3-6(169)	
<b>第七节 曲率 .....</b>	<b>169</b>
一、弧微分(169) 二、曲率及其计算公式(170) 三、曲率圆与曲率 半径(174) 四、曲率中心的计算公式 渐屈线与渐伸线(175)	
习题 3-7(177)	
<b>第八节 方程的近似解 .....</b>	<b>178</b>
一、二分法(178) 二、切线法(179) 习题 3-8(182)	
<b>总习题三 .....</b>	<b>182</b>
<b>第四章 不定积分 .....</b>	<b>184</b>
<b>第一节 不定积分的概念与性质 .....</b>	<b>184</b>
一、原函数与不定积分的概念(184) 二、基本积分表(188) 三、不定积	

分的性质(189) 习题 4-1(192)	第五章 定积分
<b>第二节 换元积分法</b> ..... 193	
一、第一类换元法(194) 二、第二类换元法(200) 习题 4-2(207)	
<b>第三节 分部积分法</b> ..... 208	
习题 4-3(212)	
<b>第四节 有理函数的积分</b> ..... 213	
一、有理函数的积分(213) 二、可化为有理函数的积分举例(215)	
习题 4-4(218)	
<b>第五节 积分表的使用</b> ..... 218	
习题 4-5(221)	
<b>总习题四</b> ..... 221	
<b>第五章 定积分</b> ..... 223	
<b>第一节 定积分的概念与性质</b> ..... 223	
一、定积分问题举例(223) 二、定积分定义(225) 三、定积分的近似计算(228) 四、定积分的性质(231) 习题 5-1(234)	
<b>第二节 微积分基本公式</b> ..... 236	
一、变速直线运动中位置函数与速度函数之间的联系(236) 二、积分上限的函数及其导数(237) 三、牛顿-莱布尼茨公式(239) 习题 5-2(243)	
<b>第三节 定积分的换元法和分部积分法</b> ..... 244	
一、定积分的换元法(244) 二、定积分的分部积分法(251) 习题 5-3(253)	
<b>第四节 反常积分</b> ..... 254	
一、无穷限的反常积分(254) 二、无界函数的反常积分(257) 习题 5-4(260)	
<b>第五节 反常积分的审敛法 <math>\Gamma</math> 函数</b> ..... 261	
一、无穷限反常积分的审敛法(261) 二、无界函数的反常积分的审敛法(264) 三、 $\Gamma$ 函数(266) 习题 5-5(268)	
<b>总习题五</b> ..... 268	
<b>第六章 定积分的应用</b> ..... 272	
<b>第一节 定积分的元素法</b> ..... 272	
<b>第二节 定积分在几何学上的应用</b> ..... 274	
一、平面图形的面积(274) 二、体积(278) 三、平面曲线的弧长(282) 习题 6-2(284)	
<b>第三节 定积分在物理学上的应用</b> ..... 287	
一、变力沿直线所作的功(287) 二、水压力(289) 三、引力(290) 习题 6-3(291)	
<b>总习题六</b> ..... 292	

<b>第七章 微分方程</b>	294
第一节 微分方程的基本概念	294
习题 7-1(298)	
第二节 可分离变量的微分方程	298
习题 7-2(304)	
第三节 齐次方程	305
一、齐次方程(305)   二、可化为齐次的方程(307)   习题 7-3(309)	
第四节 一阶线性微分方程	310
一、线性方程(310)   二、伯努利方程(314)   习题 7-4(315)	
第五节 可降阶的高阶微分方程	316
一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程(316)   二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程(318)   三、 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程(320)   习题 7-5(323)	
第六节 高阶线性微分方程	323
一、二阶线性微分方程举例(323)   二、线性微分方程的解的结构(325)   三、常数变易法(328)   习题 7-6(331)	
第七节 常系数齐次线性微分方程	332
习题 7-7(340)	
第八节 常系数非齐次线性微分方程	341
一、 $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型(341)   二、 $f(x) = e^{\lambda x} [P_l^{(1)}(x) \cos \omega x + P_l^{(2)}(x) \sin \omega x]$ 型(343)   习题 7-8(347)	
第九节 欧拉方程	348
习题 7-9(349)	
第十节 常系数线性微分方程组解法举例	350
习题 7-10(352)	
总习题七	353
附录 I 二阶和三阶行列式简介	355
附录 II 几种常用的曲线	359
附录 III 积分表	362
习题答案与提示	372

# 第一章 函数与极限

初等数学的研究对象基本上是不变的量,而高等数学的研究对象则是变动的量.所谓函数关系就是变量之间的依赖关系,极限方法是研究变量的一种基本方法.本章将介绍映射、函数、极限和函数的连续性等基本概念以及它们的一些性质.

## 第一节 映射与函数

### 一、集合

#### 1. 集合概念

集合是数学中的一个基本概念,我们先通过例子来说明这个概念.例如,一个书柜中的书构成一个集合,一间教室里的学生构成一个集合,全体实数构成一个集合等等.一般的,所谓集合(简称集)是指具有某种特定性质的事物的总体,组成这个集合的事物称为该集合的元素(简称元).

通常用大写拉丁字母  $A, B, C, \dots$  表示集合,用小写拉丁字母  $a, b, c, \dots$  表示集合的元素.如果  $a$  是集合  $A$  的元素,就说  $a$  属于  $A$ ,记作  $a \in A$ ;如果  $a$  不是集合  $A$  的元素,就说  $a$  不属于  $A$ ,记作  $a \notin A$  或  $a \not\in A$ .一个集合,若它只含有有限个元素,则称为有限集;不是有限集的集合称为无限集.

表示集合的方法通常有以下两种:一种是列举法,就是把集合的全体元素一一列举出来表示.例如,由元素  $a_1, a_2, \dots, a_n$  组成的集合  $A$ ,可表示成

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\};$$

另一种是描述法,若集合  $M$  是由具有某种性质  $P$  的元素  $x$  的全体所组成的,就可表示成

$$M = \{x \mid x \text{ 具有性质 } P\}.$$

例如,集合  $B$  是方程  $x^2 - 1 = 0$  的解集,就可表示成

$$B = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}.$$

对于数集,有时我们在表示数集的字母的右上角标上“\*”来表示该数集内排除 0 的集,标上“+”来表示该数集内排除 0 与负数的集.

习惯上,全体非负整数即自然数的集合记作  $N$ ,即

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\};$$

全体正整数的集合为

$$\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\};$$

全体整数的集合记作  $\mathbb{Z}$ , 即

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\};$$

全体有理数的集合记作  $\mathbb{Q}$ , 即

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^+ \text{ 且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质} \right\};$$

全体实数的集合记作  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^+$  为排除数 0 的实数集,  $\mathbb{R}^+$  为全体正实数的集.

设  $A$ 、 $B$  是两个集合, 如果集合  $A$  的元素都是集合  $B$  的元素, 则称  $A$  是  $B$  的子集, 记作  $A \subset B$  (读作  $A$  包含于  $B$ ) 或  $B \supset A$  (读作  $B$  包含  $A$ ).

如果集合  $A$  与集合  $B$  互为子集, 即  $A \subset B$  且  $B \subset A$ , 则称集合  $A$  与集合  $B$  相等, 记作  $A = B$ . 例如, 设

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\},$$

则  $A = B$ .

若  $A \subset B$  且  $A \neq B$ , 则称  $A$  是  $B$  的真子集, 记作  $A \subsetneq B$ . 例如,  $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$ .

不含任何元素的集合称为空集. 例如

$$\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ 且 } x^2 + 1 = 0\}$$

是空集, 因为适合条件  $x^2 + 1 = 0$  的实数是不存在的. 空集记作  $\emptyset$ , 且规定空集  $\emptyset$  是任何集合  $A$  的子集, 即  $\emptyset \subset A$ .

## 2. 集合的运算

集合的基本运算有以下几种: 并、交、差.

设  $A$ 、 $B$  是两个集合, 由所有属于  $A$  或者属于  $B$  的元素组成的集合, 称为  $A$  与  $B$  的并集(简称并), 记作  $A \cup B$ , 即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\};$$

由所有既属于  $A$  又属于  $B$  的元素组成的集合, 称为  $A$  与  $B$  的交集(简称交), 记作  $A \cap B$ , 即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\};$$

由所有属于  $A$  而不属于  $B$  的元素组成的集合, 称为  $A$  与  $B$  的差集(简称差), 记作  $A \setminus B$ , 即

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

有时, 我们研究某个问题限定在一个大的集合  $I$  中进行, 所研究的其他集合  $A$  都是  $I$  的子集. 此时, 我们称集合  $I$  为全集或基本集, 称  $I \setminus A$  为  $A$  的余集或补集, 记作  $A^c$ . 例如, 在实数集  $\mathbb{R}$  中, 集合  $A = \{x \mid 0 < x \leq 1\}$  的余集就是

$$A^c = \{x \mid x \leq 0 \text{ 或 } x > 1\}.$$

集合的并、交、余运算满足下列法则.

设  $A, B, C$  为任意三个集合, 则有下列法则成立:

(1) 交换律  $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A;$

(2) 结合律  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

(3) 分配律  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$$

(4) 对偶律  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c,$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

以上这些法则都可根据集合相等的定义验证. 现就对偶律的第一个等式: “两个集合的并集的余集等于它们的余集的交集”证明如下: 因为

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c &\Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A \text{ 且 } x \notin B \Rightarrow x \in A^c \text{ 且 } x \in B^c \\ &\Rightarrow x \in A^c \cap B^c, \end{aligned}$$

所以  $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c;$

反之, 因为

$$\begin{aligned} x \in A^c \cap B^c &\Rightarrow x \in A^c \text{ 且 } x \in B^c \Rightarrow x \notin A \text{ 且 } x \notin B \Rightarrow x \notin A \cup B \\ &\Rightarrow x \in (A \cup B)^c, \end{aligned}$$

所以  $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c.$

于是  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$

注 以上证明中, 符号“ $\Rightarrow$ ”表示“推出”(或“蕴含”). 如果在证明的第一段中, 将符号“ $\Rightarrow$ ”改用符号“ $\Leftrightarrow$ ”(表示“等价”), 则证明的第二段可省略.

在两个集合之间还可以定义直积或笛卡儿(Descartes)乘积. 设  $A, B$  是任意两个集合, 在集合  $A$  中任意取一个元素  $x$ , 在集合  $B$  中任意取一个元素  $y$ , 组成一个有序对  $(x, y)$ , 把这样的有序对作为新的元素, 它们全体组成的集合称为集合  $A$  与集合  $B$  的直积, 记为  $A \times B$ , 即

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ 且 } y \in B\}.$$

例如,  $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$  即为  $xOy$  面上全体点的集合,  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$  常记作  $\mathbf{R}^2$ .

### 3. 区间和邻域

区间是用得较多的一类数集. 设  $a$  和  $b$  都是实数, 且  $a < b$ . 数集

$$\{x \mid a < x < b\}$$

称为开区间, 记作  $(a, b)$ , 即

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

$a$  和  $b$  称为开区间  $(a, b)$  的端点, 这里  $a \notin (a, b), b \notin (a, b)$ . 数集

$$\{x \mid a \leq x \leq b\}$$

称为闭区间,记作 $[a, b]$ ,即

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}.$$

$a$ 和 $b$ 也称为闭区间 $[a, b]$ 的端点,这里 $a \in [a, b], b \in [a, b]$ .

类似地可说明:

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\},$$

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}.$$

$[a, b)$ 和 $(a, b]$ 都称为半开区间.

以上这些区间都称为有限区间.数 $b - a$ 称为这些区间的长度.从数轴上看,这些有限区间是长度为有限的线段.闭区间 $[a, b]$ 与开区间 $(a, b)$ 在数轴上表示出来,分别如图1-1(a)与(b)所示.此外还有所谓无限区间.引进记号 $+\infty$ (读作正无穷大)及 $-\infty$ (读作负无穷大),则可类似地表示无限区间,例如

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\},$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}.$$

这两个无限区间在数轴上如图1-1(c),(d)所示.

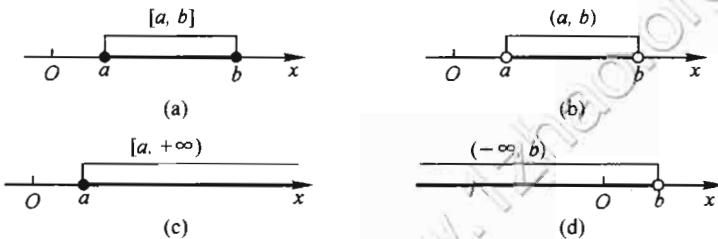


图 1-1

全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 也可记作 $(-\infty, +\infty)$ ,它也是无限区间.

以后在不需要辨明所论区间是否包含端点,以及是有限区间还是无限区间的场合,我们就简单地称它为“区间”,且常用 $I$ 表示.

邻域也是一个经常用到的概念.以点 $a$ 为中心的任何开区间称为点 $a$ 的邻域,记作 $U(a)$ .

设 $\delta$ 是任一正数,则开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 就是点 $a$ 的一个邻域,这个邻域称为点 $a$ 的 $\delta$ 邻域,记作 $U(a, \delta)$ ,即

$$U(a, \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\}.$$

点 $a$ 称为这邻域的中心, $\delta$ 称为这邻域的半径(图1-2).

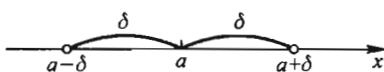


图 1-2

由于  $a - \delta < x < a + \delta$  相当于  $|x - a| < \delta$ , 因此

$$U(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\}.$$

因为  $|x - a|$  表示点  $x$  与点  $a$  间的距离, 所以  $U(a, \delta)$  表示: 与点  $a$  的距离小于  $\delta$  的一切点  $x$  的全体.

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. 点  $a$  的  $\delta$  邻域去掉中心  $a$  后, 称为点  $a$  的去心  $\delta$  邻域, 记作  $\mathring{U}(a, \delta)$ , 即

$$\mathring{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}.$$

这里  $0 < |x - a|$  就表示  $x \neq a$ .

为了方便, 有时把开区间  $(a - \delta, a)$  称为  $a$  的左  $\delta$  邻域, 把开区间  $(a, a + \delta)$  称为  $a$  的右  $\delta$  邻域.

两个闭区间的直积表示  $xOy$  平面上的矩形区域. 例如

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid x \in [a, b], y \in [c, d]\},$$

即为  $xOy$  平面上的一个矩形区域, 这个区域在  $x$  轴与  $y$  轴上的投影分别为闭区间  $[a, b]$  和闭区间  $[c, d]$ .

## 二、映射

### 1. 映射概念

定义 设  $X, Y$  是两个非空集合, 如果存在一个法则  $f$ , 使得对  $X$  中每个元素  $x$ , 按法则  $f$ , 在  $Y$  中有唯一确定的元素  $y$  与之对应, 则称  $f$  为从  $X$  到  $Y$  的映射, 记作

$$f: X \rightarrow Y,$$

其中  $y$  称为元素  $x$  (在映射  $f$  下) 的像, 并记作  $f(x)$ , 即

$$y = f(x),$$

而元素  $x$  称为元素  $y$  (在映射  $f$  下) 的一个原像; 集合  $X$  称为映射  $f$  的定义域, 记作  $D_f$ , 即  $D_f = X$ ;  $X$  中所有元素的像所组成的集合称为映射  $f$  的值域, 记作  $R_f$  或  $f(X)$ , 即

$$R_f = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}.$$

从上述映射的定义中, 需要注意的是:

(1) 构成一个映射必须具备以下三个要素: 集合  $X$ , 即定义域  $D_f = X$ ; 集合  $Y$ , 即值域的范围:  $R_f \subset Y$ ; 对应法则  $f$ , 使对每个  $x \in X$ , 有唯一确定的  $y = f(x)$  与之对应.

(2) 对每个  $x \in X$ , 元素  $x$  的像  $y$  是唯一的; 而对每个  $y \in R_f$ , 元素  $y$  的原像

不一定是唯一的；映射  $f$  的值域  $R_f$  是  $Y$  的一个子集，即  $R_f \subset Y$ ，不一定  $R_f = Y$ 。

**例 1** 设  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ，对每个  $x \in \mathbf{R}$ ， $f(x) = x^2$ 。显然， $f$  是一个映射， $f$  的定义域  $D_f = \mathbf{R}$ ，值域  $R_f = \{y | y \geq 0\}$ ，它是  $\mathbf{R}$  的一个真子集。对于  $R_f$  中的元素  $y$ ，除  $y=0$  外，它的原像不是唯一的。如  $y=4$  的原像就有  $x=2$  和  $x=-2$  两个。

**例 2** 设  $X = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$ ， $Y = \{(x, 0) | |x| \leq 1\}$ ， $f: X \rightarrow Y$ ，对每个  $(x, y) \in X$ ，有唯一确定的  $(x, 0) \in Y$  与之对应。显然  $f$  是一个映射， $f$  的定义域  $D_f = X$ ，值域  $R_f = Y$ 。在几何上，这个映射表示将平面上一个圆心在原点的单位圆周上的点投影到  $x$  轴的区间  $[-1, 1]$  上。

**例 3** 设  $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ ，对每个  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ， $f(x) = \sin x$ 。这  $f$  是一个映射，其定义域  $D_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ，值域  $R_f = [-1, 1]$ 。

设  $f$  是从集合  $X$  到集合  $Y$  的映射，若  $R_f = Y$ ，即  $Y$  中任一元素  $y$  都是  $X$  中某元素的像，则称  $f$  为  $X$  到  $Y$  上的映射或满射；若对  $X$  中任意两个不同元素  $x_1 \neq x_2$ ，它们的像  $f(x_1) \neq f(x_2)$ ，则称  $f$  为  $X$  到  $Y$  的单射；若映射  $f$  既是单射，又是满射，则称  $f$  为 一一映射（或双射）。

上面例 1 中的映射，既非单射，又非满射；例 2 中的映射不是单射，是满射；例 3 中的映射，既是单射，又是满射，因此是一一映射。

映射又称为算子。根据集合  $X$ 、 $Y$  的不同情形，在不同的数学分支中，映射又有不同的惯用名称。例如，从非空集  $X$  到数集  $Y$  的映射又称为  $X$  上的泛函，从非空集  $X$  到它自身的映射又称为  $X$  上的变换，从实数集（或其子集） $X$  到实数集  $Y$  的映射通常称为定义在  $X$  上的函数。

## 2. 逆映射与复合映射

设  $f$  是  $X$  到  $Y$  的单射，则由定义，对每个  $y \in R_f$ ，有唯一的  $x \in X$ ，适合  $f(x) = y$ 。于是，我们可定义一个从  $R_f$  到  $X$  的新映射  $g$ ，即

$$g: R_f \rightarrow X,$$

对每个  $y \in R_f$ ，规定  $g(y) = x$ ，这  $x$  满足  $f(x) = y$ 。这个映射  $g$  称为  $f$  的逆映射，记作  $f^{-1}$ ，其定义域  $D_{f^{-1}} = R_f$ ，值域  $R_{f^{-1}} = X$ 。

按上述定义，只有单射才存在逆映射。所以，在例 1, 2, 3 中，只有例 3 中的映射  $f$  才存在逆映射  $f^{-1}$ ，这个  $f^{-1}$  就是反正弦函数的主值

$$f^{-1}(x) = \arcsin x, x \in [-1, 1],$$

其定义域  $D_{f^{-1}} = [-1, 1]$ ，值域  $R_{f^{-1}} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 。

设有两个映射

$$g: X \rightarrow Y_1, \quad f: Y_2 \rightarrow Z,$$

其中  $Y_1 \subset Y_2$ . 则由映射  $g$  和  $f$  可以定出一个从  $X$  到  $Z$  的对应法则, 它将每个  $x \in X$  映成  $f[g(x)] \in Z$ . 显然, 这个对应法则确定了一个从  $X$  到  $Z$  的映射, 这个映射称为映射  $g$  和  $f$  构成的复合映射, 记作  $f \circ g$ , 即

$$f \circ g: X \rightarrow Z,$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)], x \in X.$$

由复合映射的定义可知, 映射  $g$  和  $f$  构成复合映射的条件是:  $g$  的值域  $R_g$  必须包含在  $f$  的定义域内, 即  $R_g \subset D_f$ . 否则, 不能构成复合映射. 由此可以知道, 映射  $g$  和  $f$  的复合是有顺序的,  $f \circ g$  有意义并不表示  $g \circ f$  也有意义. 即使  $f \circ g$  与  $g \circ f$  都有意义, 复合映射  $f \circ g$  与  $g \circ f$  也未必相同.

**例 4** 设有映射  $g: \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1]$ , 对每个  $x \in \mathbf{R}$ ,  $g(x) = \sin x$ , 映射  $f: [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ , 对每个  $u \in [-1, 1]$ ,  $f(u) = \sqrt{1 - u^2}$ . 则映射  $g$  和  $f$  构成的复合映射  $f \circ g: \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$ , 对每个  $x \in \mathbf{R}$ , 有

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(\sin x) = \sqrt{1 - \sin^2 x} = |\cos x|.$$

### 三、函数

#### 1. 函数概念

**定义** 设数集  $D \subset \mathbf{R}$ , 则称映射  $f: D \rightarrow \mathbf{R}$  为定义在  $D$  上的函数, 通常简记为

$$y = f(x), x \in D,$$

其中  $x$  称为自变量,  $y$  称为因变量,  $D$  称为定义域, 记作  $D_f$ , 即  $D_f = D$ .

函数定义中, 对每个  $x \in D$ , 按对应法则  $f$ , 总有唯一确定的值  $y$  与之对应, 这个值称为函数  $f$  在  $x$  处的函数值, 记作  $f(x)$ , 即  $y = f(x)$ . 因变量  $y$  与自变量  $x$  之间的这种依赖关系, 通常称为函数关系. 函数值  $f(x)$  的全体所构成的集合称为函数  $f$  的值域, 记作  $R_f$  或  $f(D)$ , 即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

需要指出, 按照上述定义, 记号  $f$  和  $f(x)$  的含义是有区别的: 前者表示自变量  $x$  和因变量  $y$  之间的对应法则, 而后者表示与自变量  $x$  对应的函数值. 但为了叙述方便, 习惯上常用记号 " $f(x), x \in D$ " 或 " $y = f(x), x \in D$ " 来表示定义在  $D$  上的函数, 这时应理解为由它所确定的函数  $f$ .

表示函数的记号是可以任意选取的, 除了常用的  $f$  外, 还可用其他的英文字母或希腊字母, 如 " $g$ "、" $F$ "、" $\varphi$ " 等. 相应的, 函数可记作  $y = g(x)$ ,  $y = F(x)$ ,  $y = \varphi(x)$  等. 有时还直接用因变量的记号来表示函数, 即把函数记作  $y =$

$y(x)$ .但在同一个问题中,讨论到几个不同的函数时,为了表示区别,需用不同的记号来表示它们.

函数是从实数集到实数集的映射,其值域总在  $\mathbf{R}$  内,因此构成函数的要素是:定义域  $D_f$  及对应法则  $f$ .如果两个函数的定义域相同,对应法则也相同,那么这两个函数就是相同的,否则就是不同的.

函数的定义域通常按以下两种情形来确定:一种是对有实际背景的函数,根据实际背景中变量的实际意义确定.例如,在自由落体运动中,设物体下落的时间为  $t$ ,下落的距离为  $s$ ,开始下落的时刻  $t=0$ ,落地的时刻  $t=T$ ,则  $s$  与  $t$  之间的函数关系是

$$s = \frac{1}{2}gt^2, t \in [0, T].$$

这个函数的定义域就是区间  $[0, T]$ ;另一种是对抽象地用算式表达的函数,通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合,这种定义域称为函数的自然定义域.在这种约定之下,一般的用算式表达的函数可用“ $y=f(x)$ ”表达,而不必再表出  $D_f$ .例如,函数  $y=\sqrt{1-x^2}$  的定义域是闭区间  $[-1, 1]$ ,函数  $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  的定义域是开区间  $(-1, 1)$ .

在函数的定义中,对每个  $x \in D$ ,对应的函数值  $y$  总是唯一的.如果给定一个对应法则,按这个法则,对每个  $x \in D$ ,总有确定的  $y$  值与之对应,但这个  $y$  不总是唯一的,那么对于这样的对应法则并不符合函数的定义,习惯上我们称这种法则确定了一个多值函数.例如,设变量  $x$  和  $y$  之间的对应法则由方程  $x^2 + y^2 = r^2$  给出.显然,对每个  $x \in [-r, r]$ ,由方程  $x^2 + y^2 = r^2$  可确定出对应的  $y$  值,当  $x=r$  或  $-r$  时,对应  $y=0$  一个值;当  $x$  取  $(-r, r)$  内任一个值时,对应的  $y$  有两个值.所以这方程确定了一个多值函数.对于多值函数,如果我们附加一些条件,使得在附加条件之下,按照这个法则,对每个  $x \in D$ ,总有唯一确定的实数值  $y$  与之对应,那么这就确定了一个函数.我们称这样得到的函数为多值函数的单值分支.例如,在由方程  $x^2 + y^2 = r^2$  给出的对应法则中,附加“ $y \geq 0$ ”的条件,即以“ $x^2 + y^2 = r^2$  且  $y \geq 0$ ”作为对应法则,就可得到一个单值分支  $y=y_1(x)=\sqrt{r^2 - x^2}$ ;附加“ $y \leq 0$ ”的条件,即以“ $x^2 + y^2 = r^2$  且  $y \leq 0$ ”作为对应法则,就可得到另一个单值分支  $y=y_2(x)=-\sqrt{r^2 - x^2}$ .

表示函数的主要方法有三种:表格法、图形法、解析法(公式法),这在中学里大家已经熟悉.其中,用图形法表示函数是基于函数图形的概念,即坐标平面上的点集

$$\{P(x, y) | y=f(x), x \in D\}$$

称为函数  $y=f(x), x \in D$  的图形(图 1-3).图中的  $R_f$  表示函数  $y=f(x)$  的值域.

下面举几个函数的例子.

### 例 5 函数

$$y = 2$$

的定义域  $D = (-\infty, +\infty)$ , 值域  $R_f = \{2\}$ , 它的图形是一条平行于  $x$  轴的直线, 如图 1-4 所示.

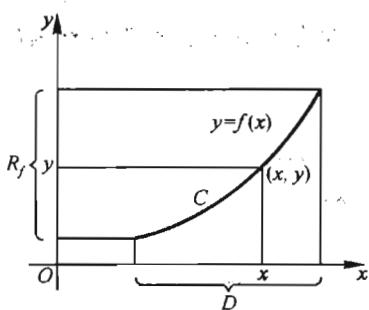


图 1-3

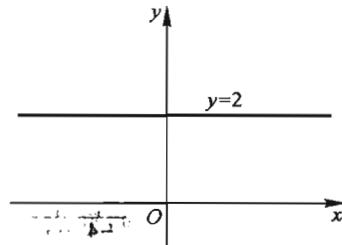


图 1-4

### 例 6 函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

的定义域  $D = (-\infty, +\infty)$ , 值域  $R_f = [0, +\infty)$ , 它的图形如图 1-5 所示. 这函数称为绝对值函数.

### 例 7 函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

称为符号函数, 它的定义域  $D = (-\infty, +\infty)$ , 值域  $R_f = \{-1, 0, 1\}$ , 它的图形如图 1-6 所示. 对于任何实数  $x$ , 下列关系成立:

$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|.$$

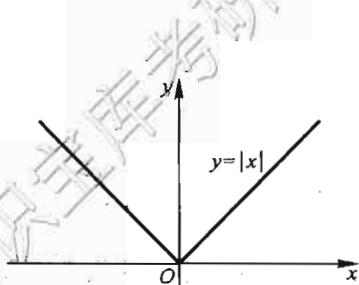


图 1-5

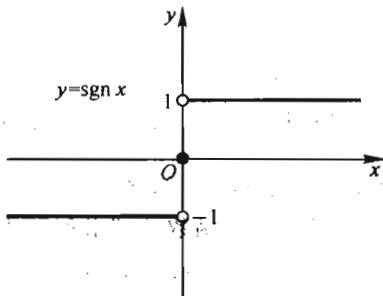


图 1-6

**例 8** 设  $x$  为任一实数. 不超过  $x$  的最大整数称为  $x$  的整数部分, 记作  $[x]$ . 例如,  $[\frac{5}{7}] = 0$ ,  $[\sqrt{2}] = 1$ ,  $[\pi] = 3$ ,  $[-1] = -1$ ,  $[-3.5] = -4$ . 把  $x$  看作变量, 则函数

$$y = [x]$$

的定义域  $D = (-\infty, +\infty)$ , 值域  $R_f = \mathbb{Z}$ . 它的图形如图 1-7 所示, 这图形称为阶梯曲线. 在  $x$  为整数值处, 图形发生跳跃, 跃度为 1. 这函数称为取整函数.

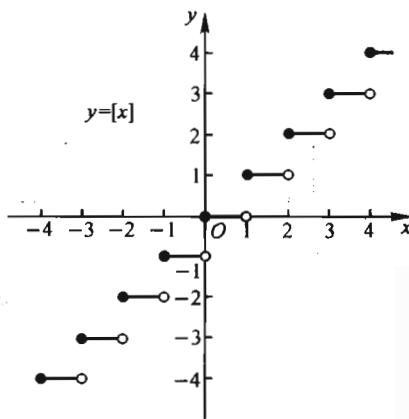


图 1-7

在例 6 和例 7 中看到, 有时一个函数要用几个式子表示. 这种在自变量的不同变化范围内, 对应法则用不同式子来表示的函数, 通常称为分段函数.

### 例 9 函数

$$y = f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1 + x, & x > 1 \end{cases}$$

是一个分段函数. 它的定义域  $D = [0, +\infty)$ . 当  $x \in [0, 1]$  时, 对应的函数值  $f(x) = 2\sqrt{x}$ ; 当  $x \in (1, +\infty)$  时, 对应的函数值  $f(x) = 1 + x$ . 例如,  $\frac{1}{2} \in [0, 1]$ , 所以  $f(\frac{1}{2}) = 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ ;  $3 \in [0, 1]$ , 所以  $f(3) = 1 + 3 = 4$ . 这函数的图形如图 1-8 所示.

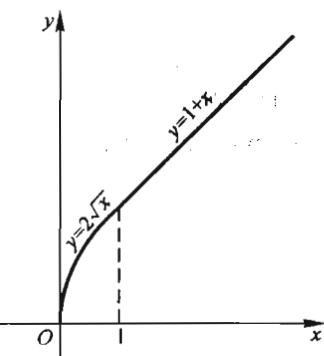


图 1-8

用几个式子来表示一个(不是几个!)函数, 不仅与函数定义并无矛盾, 而且有现实意义. 在自然科学和工程技术中, 经常会遇到分段函数的情形. 例如在等

温过程中,气体压强  $p$  与体积  $V$  的函数关系,当  $V$  不太小时依从玻意耳(Boyle)定律;当  $V$  相当时,函数关系就要用范德瓦耳斯(van der Waals)方程来表示,即

$$p = \begin{cases} \frac{k}{V}, & V \geq V_0, \\ \frac{\gamma}{V - \beta} - \frac{\alpha}{V^2}, & \beta < V < V_0 \end{cases}$$

其中  $k, \alpha, \beta, \gamma$  都是常量.

## 2. 函数的几种特性

(1) 函数的有界性 设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 数集  $X \subset D$ . 如果存在数  $K_1$ , 使得

$$f(x) \leq K_1$$

对任一  $x \in X$  都成立, 则称函数  $f(x)$  在  $X$  上有上界, 而  $K_1$  称为函数  $f(x)$  在  $X$  上的一个上界. 如果存在数  $K_2$ , 使得

$$f(x) \geq K_2$$

对任一  $x \in X$  都成立, 则称函数  $f(x)$  在  $X$  上有下界, 而  $K_2$  称为函数  $f(x)$  在  $X$  上的一个下界. 如果存在正数  $M$ , 使得

$$|f(x)| \leq M$$

对任一  $x \in X$  都成立, 则称函数  $f(x)$  在  $X$  上有界. 如果这样的  $M$  不存在, 就称函数  $f(x)$  在  $X$  上无界; 这就是说, 如果对于任何正数  $M$ , 总存在  $x_1 \in X$ , 使  $|f(x_1)| > M$ , 那么函数  $f(x)$  在  $X$  上无界.

例如, 就函数  $f(x) = \sin x$  在  $(-\infty, +\infty)$  内来说, 数 1 是它的一个上界, 数 -1 是它的一个下界(当然, 大于 1 的任何数也是它的上界, 小于 -1 的任何数也是它的下界). 又

$$|\sin x| \leq 1$$

对任一实数  $x$  都成立, 故函数  $f(x) = \sin x$  在  $(-\infty, +\infty)$  内是有界的. 这里  $M = 1$  (当然也可取大于 1 的任何数作为  $M$  而使  $|f(x)| \leq M$  对任一实数  $x$  都成立).

又如函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  在开区间  $(0, 1)$  内没有上界, 但有下界, 例如 1 就是它的一个下界. 函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  在开区间  $(0, 1)$  内是无界的, 因为不存在这样的正数  $M$ , 使  $\left| \frac{1}{x} \right| \leq M$  对于  $(0, 1)$  内的一切  $x$  都成立( $x$  接近于 0 时, 不存在确定的正数  $K_1$ , 使  $\frac{1}{x} \leq K_1$  成立). 但是  $f(x) = \frac{1}{x}$  在区间  $(1, 2)$  内是有界的, 例如可取  $M$

$= 1$  而使  $\left| \frac{1}{x} \right| \leqslant 1$  对于一切  $x \in (1, 2)$  都成立.

容易证明, 函数  $f(x)$  在  $X$  上有界的充分必要条件是它在  $X$  上既有上界又有下界.

(2) 函数的单调性 设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 区间  $I \subset D$ . 如果对于区间  $I$  上任意两点  $x_1$  及  $x_2$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称函数  $f(x)$  在区间  $I$  上是单调增加的(图 1-9); 如果对于区间  $I$  上任意两点  $x_1$  及  $x_2$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 恒有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数  $f(x)$  在区间  $I$  上是单调减少的(图 1-10). 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

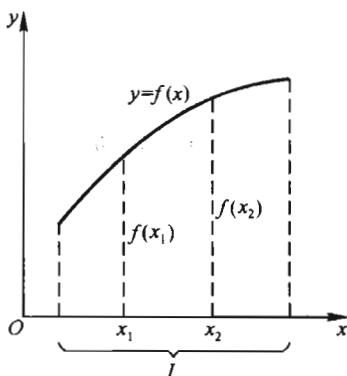


图 1-9

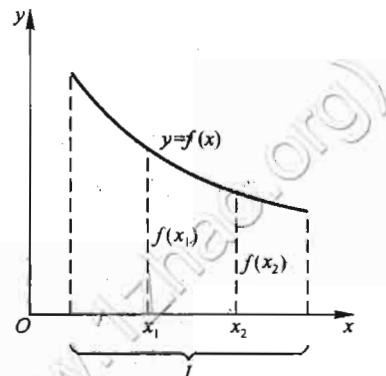


图 1-10

例如, 函数  $f(x) = x^2$  在区间  $[0, +\infty)$  上是单调增加的, 在区间  $(-\infty, 0]$  上是单调减少的; 在区间  $(-\infty, +\infty)$  内函数  $f(x) = x^2$  不是单调的(图 1-11).

又例如, 函数  $f(x) = x^3$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  内是单调增加的(图 1-12).

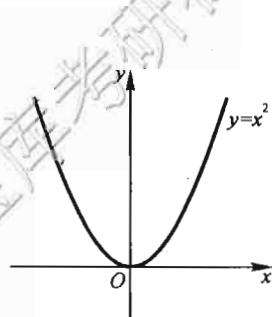


图 1-11

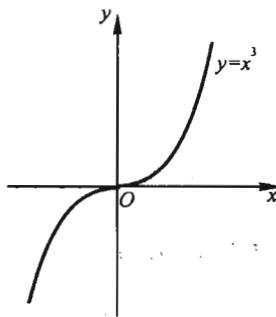


图 1-12

(3) 函数的奇偶性 设函数  $f(x)$  的定义域  $D$  关于原点对称. 如果对于任一  $x \in D$ ,

$$f(-x) = f(x)$$

恒成立, 则称  $f(x)$  为偶函数. 如果对于任一  $x \in D$ ,

$$f(-x) = -f(x)$$

恒成立, 则称  $f(x)$  为奇函数.

例如,  $f(x) = x^2$  是偶函数, 因为  $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ . 又例如,  $f(x) = x^3$  是奇函数, 因为  $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ .

偶函数的图形关于  $y$  轴是对称的. 因为若  $f(x)$  是偶函数, 则  $f(-x) = f(x)$ , 所以如果  $A(x, f(x))$  是图形上的点, 则与它关于  $y$  轴对称的点  $A'(-x, f(x))$  也在图形上(图 1-13).

奇函数的图形关于原点是对称的. 因为若  $f(x)$  是奇函数, 则  $f(-x) = -f(x)$ , 所以如果  $A(x, f(x))$  是图形上的点, 则与它关于原点对称的点  $A''(-x, -f(x))$  也在图形上(图 1-14).

函数  $y = \sin x$  是奇函数. 函数  $y = \cos x$  是偶函数. 函数  $y = \sin x + \cos x$  既非奇函数, 也非偶函数.

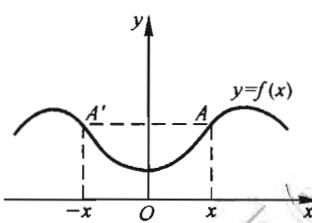


图 1-13

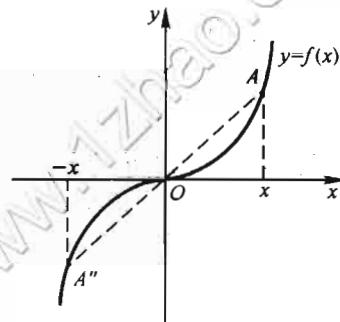


图 1-14

(4) 函数的周期性. 设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ . 如果存在一个正数  $l$ , 使得对于任一  $x \in D$  有  $(x \pm l) \in D$ , 且

$$f(x+l) = f(x)$$

恒成立, 则称  $f(x)$  为周期函数,  $l$  称为  $f(x)$  的周期, 通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例如, 函数  $\sin x, \cos x$  都是以  $2\pi$  为周期的周期函数; 函数  $\tan x$  是以  $\pi$  为周期的周期函数.

图 1-15 表示周期为  $l$  的一个周期函数. 在每个长度为  $l$  的区间上, 函数图形有相同的形状.

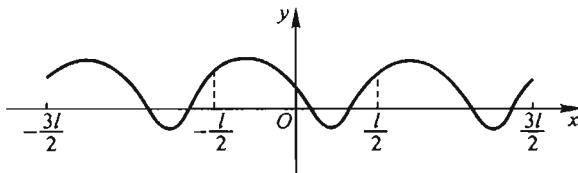


图 1-15

并非每个周期函数都有最小正周期. 下面的函数就属于这种情形.

**例 10** 狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{Q}^c. \end{cases}$$

容易验证这是一个周期函数, 任何正有理数  $r$  都是它的周期. 因为不存在最小的正有理数, 所以它没有最小正周期.

### 3. 反函数与复合函数

作为逆映射的特例, 我们有以下反函数的概念.

设函数  $f: D \rightarrow f(D)$  是单射, 则它存在逆映射  $f^{-1}: f(D) \rightarrow D$ , 称此映射  $f^{-1}$  为函数  $f$  的反函数.

按此定义, 对每个  $y \in f(D)$ , 有唯一的  $x \in D$ , 使得  $f(x) = y$ , 于是有

$$f^{-1}(y) = x.$$

这就是说, 反函数  $f^{-1}$  的对应法则是完全由函数  $f$  的对应法则所确定的.

例如, 函数  $y = x^3$ ,  $x \in \mathbf{R}$  是单射, 所以它的反函数存在, 其反函数为  $x = y^{\frac{1}{3}}$ ,  $y \in \mathbf{R}$ .

由于习惯上自变量用  $x$  表示, 因变量用  $y$  表示, 于是  $y = x^3$ ,  $x \in \mathbf{R}$  的反函数通常写作  $y = x^{\frac{1}{3}}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

一般的,  $y = f(x)$ ,  $x \in D$  的反函数记成  $y = f^{-1}(x)$ ,  $x \in f(D)$ .

若  $f$  是定义在  $D$  上的单调函数, 则  $f: D \rightarrow f(D)$  是单射, 于是  $f$  的反函数  $f^{-1}$  必定存在, 而且容易证明  $f^{-1}$  也是  $f(D)$  上的单调函数. 事实上, 不妨设  $f$  在  $D$  上单调增加, 现在来证明  $f^{-1}$  在  $f(D)$  上也是单调增加的.

任取  $y_1, y_2 \in f(D)$ , 且  $y_1 < y_2$ . 按函数  $f$  的定义, 对  $y_1$ , 在  $D$  内存在唯一的原像  $x_1$ , 使得  $f(x_1) = y_1$ , 于是  $f^{-1}(y_1) = x_1$ ; 对  $y_2$ , 在  $D$  内存在唯一的原像  $x_2$ , 使得  $f(x_2) = y_2$ , 于是  $f^{-1}(y_2) = x_2$ .

如果  $x_1 > x_2$ , 则由  $f(x)$  单调增加, 必有  $y_1 > y_2$ ; 如果  $x_1 = x_2$ , 则显然有  $y_1 = y_2$ . 这两种情形都与假设  $y_1 < y_2$  不符, 故必有  $x_1 < x_2$ , 即  $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ .

$f^{-1}(y_2)$ . 这就证明了  $f^{-1}$  在  $f(D)$  上是单调增加的.

相对于反函数  $y = f^{-1}(x)$  来说, 原来的函数  $y = f(x)$  称为直接函数. 把直接函数  $y = f(x)$  和它的反函数  $y = f^{-1}(x)$  的图形画在同一坐标平面上, 这两个图形关于直线  $y = x$  是对称的(图 1-16). 这是因为如果  $P(a, b)$  是  $y = f(x)$  图形上的点, 则有  $b = f(a)$ . 按反函数的定义, 有  $a = f^{-1}(b)$ , 故  $Q(b, a)$  是  $y = f^{-1}(x)$  图形上的点; 反之, 若  $Q(b, a)$  是  $y = f^{-1}(x)$  图形上的点, 则  $P(a, b)$  是  $y = f(x)$  图形上的点. 而  $P(a, b)$  与  $Q(b, a)$  是关于直线  $y = x$  对称的.

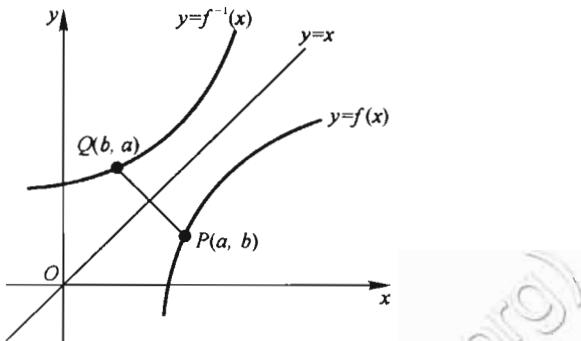


图 1-16

复合函数是复合映射的一种特例, 按照通常函数的记号, 复合函数的概念可如下表述.

设函数  $y = f(u)$  的定义域为  $D_f$ , 函数  $u = g(x)$  的定义域为  $D_g$ , 且其值域  $R_g \subset D_f$ , 则由下式确定的函数

$$y = f[g(x)], \quad x \in D_g$$

称为由函数  $u = g(x)$  与函数  $y = f(u)$  构成的复合函数, 它的定义域为  $D_g$ , 变量  $u$  称为中间变量.

函数  $g$  与函数  $f$  构成的复合函数, 即按“先  $g$  后  $f$ ”的次序复合的函数, 通常记为  $f \circ g$ , 即

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)].$$

与复合映射一样,  $g$  与  $f$  能构成复合函数  $f \circ g$  的条件是: 函数  $g$  的值域  $R_g$  必须含在函数  $f$  的定义域  $D_f$  内, 即  $R_g \subset D_f$ . 否则, 不能构成复合函数. 例如,  $y = f(u) = \arcsin u$  的定义域为  $[-1, 1]$ ,  $u = g(x) = \sin x$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 且  $g(\mathbf{R}) \subset [-1, 1]$ , 故  $g$  与  $f$  可构成复合函数.

$$y = \arcsin \sin x, x \in \mathbf{R};$$

又如,  $y = f(u) = \sqrt{u}$  的定义域为  $D_f = [0, +\infty)$ ,  $u = g(x) = \tan x$  的值域为  $R_g = (-\infty, +\infty)$ , 显然  $R_g \not\subset D_f$ , 故  $g$  与  $f$  不能构成复合函数. 但是, 如果将函数

$g$  限制在它的定义域的一个子集  $D = \left\{ x \mid k\pi \leq x < \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$  上, 令  $g^*(x) = \tan x, x \in D$ , 那么  $R_{g^*} = g^*(D) \subset D_f$ ,  $g^*$  与  $f$  就可以构成复合函数

$$(f \circ g^*)(x) = \sqrt{\tan x}, x \in D.$$

习惯上为了简便起见, 仍称函数  $\sqrt{\tan x}$  是由函数  $u = \tan x$  与函数  $y = \sqrt{u}$  构成的复合函数. 这里函数  $u = \tan x$  应理解成:  $u = \tan x, x \in D$ . 以后, 我们采取这种习惯说法. 例如, 我们称函数  $u = x + 1$  与函数  $y = \ln u$  构成复合函数  $\ln(x + 1)$ , 它的定义域不是  $u = x + 1$  的自然定义域  $\mathbf{R}$ , 而是  $\mathbf{R}$  的一个子集  $D = (-1, +\infty)$ .

有时, 也会遇到两个以上函数所构成的复合函数, 只要它们顺次满足构成复合函数的条件. 例如, 函数  $y = \sqrt{u}, u = \cot v, v = \frac{x}{2}$  可构成复合函数  $y =$

$\sqrt{\cot \frac{x}{2}}$ , 这里  $u$  及  $v$  都是中间变量, 复合函数的定义域是  $D = \{x \mid 2k\pi < x \leq (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ , 而不是  $v = \frac{x}{2}$  的自然定义域  $\mathbf{R}$ ,  $D$  是  $\mathbf{R}$  的一个非空子集.

#### 4. 函数的运算

设函数  $f(x), g(x)$  的定义域依次为  $D_1, D_2, D = D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ , 则我们可以定义这两个函数的下列运算:

$$\text{和(差)} f \pm g: \quad (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), x \in D;$$

$$\text{积 } f \cdot g: \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in D;$$

$$\text{商 } \frac{f}{g}: \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in D \setminus \{x \mid g(x) = 0, x \in D\}.$$

**例 11** 设函数  $f(x)$  的定义域为  $(-l, l)$ , 证明必存在  $(-l, l)$  上的偶函数  $g(x)$  及奇函数  $h(x)$ , 使得

$$f(x) = g(x) + h(x).$$

**证** 先分析如下: 假若这样的  $g(x), h(x)$  存在, 使得

$$f(x) = g(x) + h(x), \tag{1}$$

且

$$g(-x) = g(x), h(-x) = -h(x).$$

于是有

$$f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x). \tag{2}$$

利用(1)、(2)式, 就可作出  $g(x), h(x)$ . 这就启发我们作如下证明:

作

$$g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)],$$

$$h(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)].$$

则

$$g(x) + h(x) = f(x),$$

$$g(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) + f(x)] = g(x),$$

$$h(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)] = -h(x).$$

证毕.



## 5. 初等函数

在初等数学中已经讲过下面几类函数：

幂函数： $y = x^\mu$  ( $\mu \in \mathbf{R}$  是常数)，

指数函数： $y = a^x$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ )，

对数函数： $y = \log_a x$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ，特别当  $a = e$ <sup>①</sup> 时，记为  $y = \ln x$ )，

三角函数：如  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \tan x$  等，

反三角函数：如  $y = \arcsin x$ ,  $y = \arccos x$ ,  $y = \arctan x$  等

以上这五类函数统称为基本初等函数。

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数。例如

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad y = \sin^2 x, \quad y = \sqrt{\cot \frac{x}{2}}$$

等都是初等函数。在本课程中所讨论的函数绝大多数都是初等函数。

应用上常遇到以  $e$  为底的指数函数  $y = e^x$  和  $y = e^{-x}$  所产生的双曲函数以及它们的反函数——反双曲函数。它们的定义如下：

$$\text{双曲正弦} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\text{双曲余弦} \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\text{双曲正切} \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

这三个双曲函数的简单性态如下：

双曲正弦的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ ；它是奇函数，它的图形通过原点且关于原点对称。在区间  $(-\infty, +\infty)$  内它是单调增加的。当  $x$  的绝对值很大时，它的

①  $e$  是一个无理数，这个数的意义见本章第六节。

图形在第一象限内接近于曲线  $y = \frac{1}{2}e^x$ ; 在第三象限内接近于曲线  $y = -\frac{1}{2}e^{-x}$  (图 1-17).

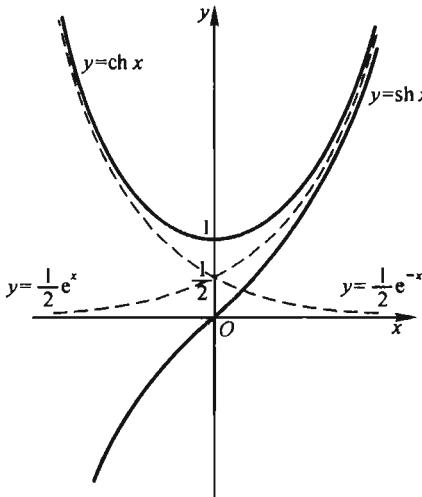


图 1-17

双曲余弦的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ ; 它是偶函数, 它的图形通过点  $(0, 1)$  且关于  $y$  轴对称. 在区间  $(-\infty, 0)$  内它是单调减少的; 在区间  $(0, +\infty)$  内它是单调增加的.  $\text{ch } 0 = 1$  是这函数的最小值. 当  $x$  的绝对值很大时, 它的图形在第一象限内接近于曲线  $y = \frac{1}{2}e^x$ , 在第二象限内接近于曲线  $y = \frac{1}{2}e^{-x}$  (图 1-17).

$$y = \frac{1}{2}e^{-x}$$

双曲正切的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ ; 它是奇函数, 它的图形通过原点且关于原点对称. 在区间  $(-\infty, +\infty)$  内它是单调增加的. 它的图形夹在水平直线  $y = 1$  及  $y = -1$  之间; 且当  $x$  的绝对值很大时, 它的图形在第一象限内接近于直线  $y = 1$ , 而在第三象限内接近于直线  $y = -1$  (图 1-18).

根据双曲函数的定义, 可证下列四个公式:

$$\text{sh}(x+y) = \text{sh } x \text{ch } y + \text{ch } x \text{sh } y; \quad (1)$$

$$\text{sh}(x-y) = \text{sh } x \text{ch } y - \text{ch } x \text{sh } y; \quad (2)$$

$$\text{ch}(x+y) = \text{ch } x \text{ch } y + \text{sh } x \text{sh } y; \quad (3)$$

$$\text{ch}(x-y) = \text{ch } x \text{ch } y - \text{sh } x \text{sh } y. \quad (4)$$

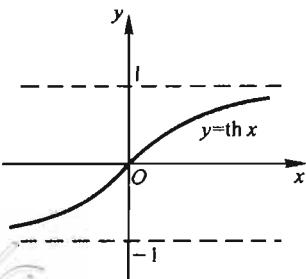


图 1-18

我们来证明公式(1), 其他三个公式读者可自行证明. 由定义, 得

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\&= \frac{e^{x+y} - e^{y-x} + e^{x-y} - e^{-(x+y)}}{4} + \\&\quad \frac{e^{x+y} + e^{y-x} - e^{x-y} - e^{-(x+y)}}{4} \\&= \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \operatorname{sh}(x+y).\end{aligned}$$

由以上几个公式可以导出其他一些公式, 例如:

在公式(4)中令  $x = y$ , 并注意到  $\operatorname{ch} 0 = 1$ , 得

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1; \quad (5)$$

在公式(1)中令  $x = y$ , 得

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x; \quad (6)$$

在公式(3)中令  $x = y$ , 得

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x. \quad (7)$$

以上关于双曲函数的公式(1)至(7)与三角函数的有关公式相类似, 把它们对比一下可帮助记忆.

双曲函数  $y = \operatorname{sh} x$ ,  $y = \operatorname{ch} x$  ( $x \geq 0$ ),  $y = \operatorname{th} x$  的反函数依次记为

反双曲正弦  $y = \operatorname{arsh} x$ ,

反双曲余弦  $y = \operatorname{arch} x$ ,

反双曲正切  $y = \operatorname{arth} x$ .

这些反双曲函数都可通过自然对数函数来表示, 分别讨论如下:

先讨论双曲正弦  $y = \operatorname{sh} x$  的反函数. 由  $x = \operatorname{sh} y$ , 有

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

令  $u = e^y$ , 则由上式有

$$u^2 - 2xu - 1 = 0.$$

这是关于  $u$  的一个二次方程, 它的根为

$$u = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

因  $u = e^y > 0$ , 故上式根号前应取正号, 于是

$$u = x + \sqrt{x^2 + 1}.$$

由于  $y = \ln u$ , 故得反双曲正弦

$$y = \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

函数  $y = \operatorname{arsh} x$  的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ , 它是奇函数, 在区间  $(-\infty, +\infty)$

内为单调增加. 由  $y = \sinh x$  的图形, 根据反函数的作图法, 可得  $y = \operatorname{arsinh} x$  的图形如图 1-19 所示.

下面讨论双曲余弦  $y = \cosh x$  ( $x \geq 0$ ) 的反函数. 由  $x = \cosh y$  ( $y \geq 0$ ), 有

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \quad y \geq 0.$$

由此得  $e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$ , 故

$$y = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}).$$

上式中  $x$  的值必须满足条件  $x \geq 1$ , 而其中平方根前的符号由于  $y \geq 0$  应取正. 故

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

上述双曲余弦  $y = \cosh x$  ( $x \geq 0$ ) 的反函数称为反双曲余弦的主值, 记作  $y = \operatorname{arch} x$ , 即

$$y = \operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

这样规定的函数  $y = \operatorname{arch} x$  的定义域为  $[1, +\infty)$ , 它在区间  $[1, +\infty)$  上是单调增加的(图 1-20).

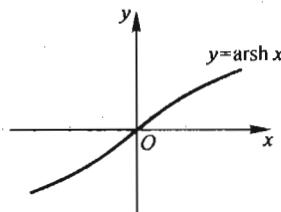


图 1-19

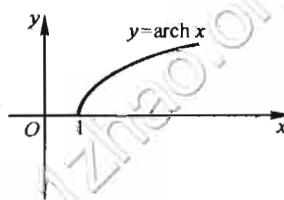


图 1-20

类似地可得反双曲正切

$$y = \operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

这函数的定义域为开区间  $(-1, 1)$ , 它在开区间  $(-1, 1)$  内是单调增加的奇函数. 它的图形关于原点对称(图 1-21).

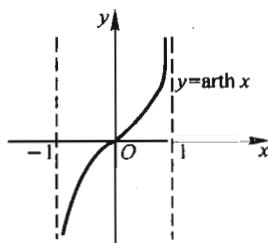


图 1-21

## 习 题 1-1

1. 设  $A = (-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$ ,  $B = [-10, 3]$ , 写出  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$  及  $A \setminus (A \setminus B)$  的表达式.

2. 设  $A, B$  是任意两个集合, 证明对偶律:  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ .

3. 设映射  $f: X \rightarrow Y$ ;  $A \subset X$ ,  $B \subset X$ . 证明:

$$(1) f(A \cup B) = f(A) \cup f(B);$$

$$(2) f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

4. 求下列函数的自然定义域:

$$(1) y = \sqrt{3x+2};$$

$$(2) y = \frac{1}{1-x^2};$$

$$(3) y = \frac{1}{x} - \sqrt{1-x^2};$$

$$(4) y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}};$$

$$(5) y = \sin \sqrt{x};$$

$$(6) y = \tan(x+1);$$

$$(7) y = \arcsin(x-3);$$

$$(8) y = \sqrt{3-x} + \arctan \frac{1}{x};$$

$$(9) y = \ln(x+1);$$

$$(10) y = e^{\frac{1}{x}}.$$

5. 下列各题中, 函数  $f(x)$  和  $g(x)$  是否相同? 为什么?

$$(1) f(x) = \lg x^2, g(x) = 2\lg x;$$

$$(2) f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2};$$

$$(3) f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}, g(x) = x \sqrt[3]{x-1};$$

$$(4) f(x) = 1, g(x) = \sec^2 x - \tan^2 x.$$

6. 设

$$\varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \frac{\pi}{3}, \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{3}, \end{cases}$$

求  $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ,  $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ,  $\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ,  $\varphi(-2)$ , 并作出函数  $y = \varphi(x)$  的图形.

7. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

$$(1) y = \frac{x}{1-x}, \quad (-\infty, 1);$$

$$(2) y = x + \ln x, \quad (0, +\infty).$$

8. 设  $f(x)$  为定义在  $(-l, l)$  内的奇函数, 若  $f(x)$  在  $(0, l)$  内单调增加, 证明  $f(x)$  在  $(-l, 0)$  内也单调增加.

9. 设下面所考虑的函数都是定义在区间  $(-l, l)$  上的. 证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数, 两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数, 两个奇函数的乘积是偶函数, 偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

10. 下列函数中哪些是偶函数,哪些是奇函数,哪些既非偶函数又非奇函数?

$$(1) y = x^2(1 - x^2);$$

$$(2) y = 3x^2 - x^3;$$

$$(3) y = \frac{1-x^2}{1+x};$$

$$(4) y = x(x-1)(x+1);$$

$$(5) y = \sin x - \cos x + 1;$$

$$(6) y = \frac{a^x + a^{-x}}{2}.$$

11. 下列各函数中哪些是周期函数? 对于周期函数,指出其周期:

$$(1) y = \cos(x-2);$$

$$(2) y = \cos 4x;$$

$$(3) y = 1 + \sin \pi x;$$

$$(4) y = x \cos x;$$

$$(5) y = \sin^2 x.$$

12. 求下列函数的反函数:

$$(1) y = \sqrt[3]{x+1};$$

$$(2) y = \frac{1-x}{1+x};$$

$$(3) y = \frac{ax+b}{cx+d} (ad-bc \neq 0);$$

$$(4) y = 2\sin 3x \left( -\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6} \right);$$

$$(5) y = 1 + \ln(x+2);$$

$$(6) y = \frac{2^x}{2^x + 1}.$$

13. 设函数  $f(x)$  在数集  $X$  上有定义, 试证: 函数  $f(x)$  在  $X$  上有界的充分必要条件是它在  $X$  上既有上界又有下界.

14. 在下列各题中, 求由所给函数构成的复合函数, 并求这函数分别对应于给定自变量值  $x_1$  和  $x_2$  的函数值:

$$(1) y = u^2, u = \sin x, x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{\pi}{3};$$

$$(2) y = \sin u, u = 2x, x_1 = \frac{\pi}{8}, x_2 = \frac{\pi}{4};$$

$$(3) y = \sqrt{u}, u = 1 + x^2, x_1 = 1, x_2 = 2;$$

$$(4) y = e^u, u = x^2, x_1 = 0, x_2 = 1;$$

$$(5) y = u^2, u = e^x, x_1 = 1, x_2 = -1.$$

15. 设  $f(x)$  的定义域  $D = [0, 1]$ , 求下列各函数的定义域:

$$(1) f(x^2);$$

$$(2) f(\sin x);$$

$$(3) f(x+a) (a > 0);$$

$$(4) f(x+a) + f(x-a) (a > 0).$$

16. 设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -1, & |x| > 1, \end{cases}$$

求  $f[g(x)]$  和  $g[f(x)]$ , 并作出这两个函数的图形.

17. 已知水渠的横断面为等腰梯形, 斜角  $\varphi = 40^\circ$  (图 1-22). 当过水断面  $ABCD$  的面积为定值  $S_0$  时, 求湿周  $L$  ( $L = AB + BC + CD$ ) 与水深  $h$  之间的函数关系式, 并指明其定义域.

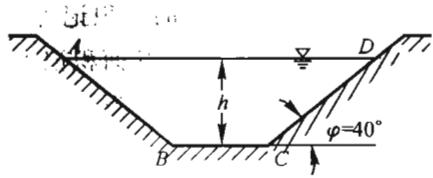


图 1-22

18. 收音机每台售价为 90 元,成本为 60 元. 厂方为鼓励销售商大量采购,决定凡是订购量超过 100 台以上的,每多订购 1 台,售价就降低 1 分,但最低价为每台 75 元.

(1) 将每台的实际售价  $p$  表示为订购量  $x$  的函数;

(2) 将厂方所获的利润  $P$  表示成订购量  $x$  的函数;

(3) 某一销售商订购了 1 000 台,厂方可获利润多少?

19. 求联系华氏温度(用  $F$  表示)和摄氏温度(用  $C$  表示)的转换公式,并求

(1)  $90^{\circ}\text{F}$  的等价摄氏温度和  $-5^{\circ}\text{C}$  的等价华氏温度;

(2) 是否存在一个温度值,使华氏温度计和摄氏温度计的读数是一样的? 如果存在,那么该温度值是多少?

20. 利用以下联合国统计办公室提供的世界人口数据以及指数模型来推测 2010 年的世界人口.

年份	人口数(百万)	当年人口数与上一年人口数的比值
1986	4936	
1987	5023	1.0176
1988	5111	1.0175
1989	5201	1.0176
1990	5329	1.0246
1991	5422	1.0175

## 第二节 数列的极限

### 一、数列极限的定义

极限概念是由于求某些实际问题的精确解答而产生的. 例如, 我国古代数学家刘徽(公元 3 世纪)利用圆内接正多边形来推算圆面积的方法——割圆术, 就是极限思想在几何学上的应用.

设有一圆，首先作内接正六边形，把它的面积记为  $A_1$ ；再作内接正十二边形，其面积记为  $A_2$ ；再作内接正二十四边形，其面积记为  $A_3$ ；循此下去，每次边数加倍，一般的把内接正  $6 \times 2^{n-1}$  边形的面积记为  $A_n$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ )。这样，就得到一系列内接正多边形的面积：

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots,$$

它们构成一列有次序的数。当  $n$  越大，内接正多边形与圆的差别就越小，从而以  $A_n$  作为圆面积的近似值也越精确。但是无论  $n$  取得如何大，只要  $n$  取定了， $A_n$  终究只是多边形的面积，而还不是圆的面积。因此，设想  $n$  无限增大（记为  $n \rightarrow \infty$ ，读作  $n$  趋于无穷大），即内接正多边形的边数无限增加，在这个过程中，内接正多边形无限接近于圆，同时  $A_n$  也无限接近于某一确定的数值，这个确定的数值就理解为圆的面积。这个确定的数值在数学上称为上面这列有次序的数（所谓数列） $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$  当  $n \rightarrow \infty$  时的极限。在圆面积问题中我们看到，正是这个数列的极限才精确地表达了圆的面积。

在解决实际问题中逐渐形成的这种极限方法，已成为高等数学中的一种基本方法，因此有必要作进一步的阐明。

先说明数列的概念。如果按照某一法则，对每个  $n \in \mathbb{N}^+$ ，对应着一个确定的实数  $x_n$ ，这些实数  $x_n$  按照下标  $n$  从小到大排列得到的一个序列

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

就叫做数列，简记为数列  $\{x_n\}$ 。

数列中的每一个数叫做数列的项，第  $n$  项  $x_n$  叫做数列的一般项。例如：

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots;$$

$$2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots;$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots;$$

$$1, -1, 1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots;$$

$$2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+(-1)^{n+1}}{n}, \dots$$

都是数列的例子。它们的一般项依次为

$$\frac{n}{n+1}, \quad 2^n, \quad \frac{1}{2^n}, \quad (-1)^{n+1}, \quad \frac{n+(-1)^{n+1}}{n}.$$

在几何上，数列  $\{x_n\}$  可看作数轴上的一个动点，它依次取数轴上的点  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ （图 1-23）。

数列  $\{x_n\}$  可看作自变量为正整数  $n$  的函数：

$$x_n = f(n), n \in \mathbb{N}^+.$$

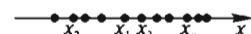


图 1-23

当自变量  $n$  依次取  $1, 2, 3, \dots$  一切正整数时, 对应的函数值就排列成数列  $\{x_n\}$ .

对于我们讨论的问题来说, 重要的是: 当  $n$  无限增大时(即  $n \rightarrow \infty$  时), 对应的  $x_n = f(n)$  是否能无限接近于某个确定的数值? 如果能够的话, 这个数值等于多少?

我们对数列

$$2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n + (-1)^{n-1}}{n}, \dots \quad (1)$$

进行分析. 在这数列中,

$$x_n = \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} = 1 + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

我们知道, 两个数  $a$  与  $b$  之间的接近程度可以用这两个数之差的绝对值  $|b - a|$  来度量(在数轴上  $|b - a|$  表示点  $a$  与点  $b$  之间的距离),  $|b - a|$  越小,  $a$  与  $b$  就越接近.

就数列(1)来说, 因为

$$|x_n - 1| = \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n},$$

由此可见, 当  $n$  越来越大时,  $\frac{1}{n}$  越来越小, 从而  $x_n$  就越来越接近于 1. 因为只要  $n$  足够大,  $|x_n - 1|$  即  $\frac{1}{n}$  可以小于任意给定的正数, 所以说, 当  $n$  无限增大时,  $x_n$  无限接近于 1. 例如, 给定  $\frac{1}{100}$ , 欲使  $\frac{1}{n} < \frac{1}{100}$ , 只要  $n > 100$ , 即从第 101 项起, 都能使不等式

$$|x_n - 1| < \frac{1}{100}$$

成立. 同样地, 如果给定  $\frac{1}{10000}$ , 则从第 10001 项起, 都能使不等式

$$|x_n - 1| < \frac{1}{10000}$$

成立. 一般的, 不论给定的正数  $\epsilon$  多么小, 总存在着一个正整数  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 不等式

$$|x_n - 1| < \epsilon$$

都成立. 这就是数列  $x_n = \frac{n + (-1)^{n-1}}{n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 当  $n \rightarrow \infty$  时无限接近于 1

这件事的实质. 这样的一个数 1, 叫做数列  $x_n = \frac{n + (-1)^{n-1}}{n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 当

$n \rightarrow \infty$  时的极限.

一般的, 有如下数列极限的定义.

定义 设  $\{x_n\}$  为一数列, 如果存在常数  $a$ , 对于任意给定的正数  $\epsilon$  (不论它多么小), 总存在正整数  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 不等式

$$|x_n - a| < \epsilon$$

都成立, 那么就称常数  $a$  是数列  $\{x_n\}$  的极限, 或者称数列  $\{x_n\}$  收敛于  $a$ , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

或

$$x_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty).$$

如果不存在这样的常数  $a$ , 就说数列  $\{x_n\}$  没有极限, 或者说数列  $\{x_n\}$  是发散的, 习惯上也说  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  不存在.

上面定义中正数  $\epsilon$  可以任意给定是很重要的, 因为只有这样, 不等式  $|x_n - a| < \epsilon$  才能表达出  $x_n$  与  $a$  无限接近的意思. 此外还应注意: 定义中的正整数  $N$  是与任意给定的正数  $\epsilon$  有关的, 它随着  $\epsilon$  的给定而选定.

我们给“数列  $\{x_n\}$  的极限为  $a$ ”一个几何解释:

将常数  $a$  及数列  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$  在数轴上用它们的对应点表示出来, 再在数轴上作点  $a$  的  $\epsilon$  邻域即开区间  $(a - \epsilon, a + \epsilon)$  (图 1-24).

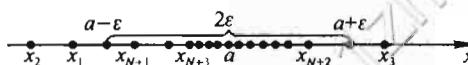


图 1-24

因不等式

$$|x_n - a| < \epsilon$$

与不等式

$$a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$$

等价, 所以当  $n > N$  时, 所有的点  $x_n$  都落在开区间  $(a - \epsilon, a + \epsilon)$  内, 而只有有限个(至多只有  $N$  个)在这区间以外.

为了表达方便, 引入记号“ $\forall$ ”表示“对于任意给定的”或“对于每一个”, 记号“ $\exists$ ”表示“存在”. 于是, “对于任意给定的  $\epsilon > 0$ ”写成“ $\forall \epsilon > 0$ ”, “存在正整数  $N$ ”写成“ $\exists$  正整数  $N$ ”, 数列极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  的定义可表达为:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \text{ 正整数 } N, \text{ 当 } n > N \text{ 时, 有 } |x_n - a| < \epsilon.$$

数列极限的定义并未直接提供如何去求数列的极限, 以后要讲极限的求法, 而现在只先举几个说明极限概念的例子.

例 1 证明数列

$$2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n + (-1)^{n-1}}{n}, \dots$$

的极限是 1.

证  $|x_n - a| = \left| \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n}$ ,

为了使  $|x_n - a|$  小于任意给定的正数  $\epsilon$  (设  $\epsilon < 1$ ), 只要

$$\frac{1}{n} < \epsilon \quad \text{或} \quad n > \frac{1}{\epsilon}.$$

所以,  $\forall \epsilon > 0$ , 取  $N = \left[ \frac{1}{\epsilon} \right]$ , 则当  $n > N$  时, 就有

$$\left| \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} - 1 \right| < \epsilon,$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} = 1.$$

例 2 已知  $x_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ , 证明数列  $\{x_n\}$  的极限是 0.

证  $|x_n - a| = \left| \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} - 0 \right| = \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n+1}$ .

$\forall \epsilon > 0$  (设  $\epsilon < 1$ ), 只要

$$\frac{1}{n+1} < \epsilon \quad \text{或} \quad n > \frac{1}{\epsilon} - 1,$$

不等式  $|x_n - a| < \epsilon$  必定成立. 所以, 取  $N = \left[ \frac{1}{\epsilon} - 1 \right]$ , 则当  $n > N$  时就有

$$\left| \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} - 0 \right| < \epsilon,$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = 0.$$

注意 在利用数列极限的定义来论证某个数  $a$  是数列  $\{x_n\}$  的极限时, 重要的是对于任意给定的正数  $\epsilon$ , 要能够指出定义中所说的这种正整数  $N$  确实存在, 但没有必要去求最小的  $N$ . 如果知道  $|x_n - a|$  小于某个量 (这个量是  $n$  的一个函数), 那么当这个量小于  $\epsilon$  时,  $|x_n - a| < \epsilon$  当然也成立. 若令这个量小于  $\epsilon$  来定出  $N$  比较方便的话, 就可采用这种方法. 例 2 便是这样做的.

例 3 设  $|q| < 1$ , 证明等比数列

$$1, q, q^2, \dots, q^{n-1}, \dots$$

的极限是 0.

证  $\forall \epsilon > 0$  (设  $\epsilon < 1$ ),

因为  $|x_n - 0| = |q^{n-1} - 0| = |q|^{n-1}$ ,

要使  $|x_n - 0| < \epsilon$ , 只要

$$|q|^{n-1} < \epsilon.$$

取自然对数,得 $(n-1)\ln|q| < \ln\epsilon$ . 因 $|q| < 1, \ln|q| < 0$ ,

故

$$n > 1 + \frac{\ln\epsilon}{\ln|q|}.$$

证

取 $N = \left[1 + \frac{\ln\epsilon}{\ln|q|}\right]$ , 则当 $n > N$ 时, 就有

$$|q^{n-1} - 0| < \epsilon,$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n-1} = 0$ .

## 二、收敛数列的性质

下面四个定理都是有关收敛数列的性质.

**定理 1(极限的唯一性)** 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么它的极限唯一.

**证** 用反证法. 假设同时有 $x_n \rightarrow a$  及 $x_n \rightarrow b$ , 且 $a < b$ . 取 $\epsilon = \frac{b-a}{2}$ . 因为

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 故 $\exists$ 正整数 $N_1$ , 当 $n > N_1$ 时, 不等式

$$|x_n - a| < \frac{b-a}{2} \quad (2)$$

都成立. 同理, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ , 故 $\exists$ 正整数 $N_2$ , 当 $n > N_2$ 时, 不等式

$$|x_n - b| < \frac{b-a}{2} \quad (3)$$

都成立. 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$  (这式子表示 $N$ 是 $N_1$ 和 $N_2$ 中较大的那个数), 则

当 $n > N$ 时,(2)式及(3)式会同时成立. 但由(2)式有 $x_n < \frac{a+b}{2}$ , 由(3)式有

$x_n > \frac{a+b}{2}$ , 这是不可能的. 这矛盾证明了本定理的断言.

**例 4** 证明数列 $x_n = (-1)^{n+1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 是发散的.

**证** 如果这数列收敛, 根据定理 1 它有唯一的极限, 设极限为 $a$ , 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

按数列极限的定义, 对于 $\epsilon = \frac{1}{2}$ ,  $\exists$ 正整数 $N$ , 当 $n > N$ 时,  $|x_n - a| < \frac{1}{2}$  成立;

即当 $n > N$ 时,  $x_n$ 都在开区间 $\left(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right)$ 内. 但这是不可能的, 因为 $n \rightarrow \infty$ 时,  $x_n$ 无休止地一再重复取得 1 和 -1 这两个数, 而这两个数不可能同时属于长度为 1 的开区间 $\left(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right)$ 内. 因此这数列发散.

下面先介绍数列的有界性概念, 然后证明收敛数列的有界性.

对于数列 $\{x_n\}$ , 如果存在着正数 $M$ , 使得对于一切 $x_n$ 都满足不等式

$$|x_n| \leq M,$$

则称数列  $\{x_n\}$  是有界的；如果这样的正数  $M$  不存在，就说数列  $\{x_n\}$  是无界的。

例如，数列  $x_n = \frac{n}{n+1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 是有界的，因为可取  $M = 1$ ，而使  $\frac{n}{n+1} < 1$ 。

$$\left| \frac{n}{n+1} \right| \leq 1$$

对于一切正整数  $n$  都成立。

数列  $x_n = 2^n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 是无界的，因为当  $n$  无限增加时， $2^n$  可超过任何正数。

数轴上对应于有界数列的点  $x_n$  都落在闭区间  $[-M, M]$  上。

**定理 2(收敛数列的有界性)** 如果数列  $\{x_n\}$  收敛，那么数列  $\{x_n\}$  一定有界。

证 因为数列  $\{x_n\}$  收敛，设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 。根据数列极限的定义，对于  $\epsilon = 1$ ， $\exists$  正整数  $N$ ，当  $n > N$  时，不等式

$$|x_n - a| < 1$$

都成立。于是，当  $n > N$  时，

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

取  $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, 1 + |a|\}$ ，那么数列  $\{x_n\}$  中的一切  $x_n$  都满足不等式

$$|x_n| \leq M.$$

这就证明了数列  $\{x_n\}$  是有界的。

根据上述定理，如果数列  $\{x_n\}$  无界，那么数列  $\{x_n\}$  一定发散。但是，如果数列  $\{x_n\}$  有界，却不能断定数列  $\{x_n\}$  一定收敛，例如数列

$$1, -1, 1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots$$

有界，但例 4 证明了这数列是发散的。所以数列有界是数列收敛的必要条件，但不是充分条件。

**定理 3(收敛数列的保号性)** 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ，且  $a > 0$  (或  $a < 0$ )，那么存在正整数  $N > 0$ ，当  $n > N$  时，都有  $x_n > 0$  (或  $x_n < 0$ )。

证 就  $a > 0$  的情形证明。由数列极限的定义，对  $\epsilon = \frac{a}{2} > 0$ ， $\exists$  正整数  $N > 0$ ，当  $n > N$  时，有

$$|x_n - a| < \frac{a}{2},$$

从而

$$x_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0.$$

**推论** 如果数列  $\{x_n\}$  从某项起有  $x_n \geq 0$  (或  $x_n \leq 0$ ), 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 那么  $a \geq 0$  (或  $a \leq 0$ ).

**证** 设数列  $\{x_n\}$  从第  $N_1$  项起, 即当  $n > N_1$  时有  $x_n \geq 0$ . 现在用反证法证明. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a < 0$ , 则由定理 3 知,  $\exists$  正整数  $N_2 > 0$ , 当  $n > N_2$  时, 有  $x_n < 0$ . 取  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , 当  $n > N$  时, 按假定有  $x_n \geq 0$ , 按定理 3 有  $x_n < 0$ , 这引起矛盾. 所以必有  $a \geq 0$ .

数列  $\{x_n\}$  从某项起有  $x_n \leq 0$  的情形, 可以类似地证明.

最后, 介绍子数列的概念以及关于收敛的数列与其子数列间关系的一个定理.

在数列  $\{x_n\}$  中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列  $\{x_n\}$  中的先后次序, 这样得到的一个数列称为原数列  $\{x_n\}$  的子数列(或子列).

设在数列  $\{x_n\}$  中, 第一次抽取  $x_{n_1}$ , 第二次在  $x_{n_1}$  后抽取  $x_{n_2}$ , 第三次在  $x_{n_2}$  后抽取  $x_{n_3}$ , ……, 这样无休止地抽取下去, 得到一个数列

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots,$$

这个数列  $\{x_{n_k}\}$  就是数列  $\{x_n\}$  的一个子数列.

**注意** 在子数列  $\{x_{n_k}\}$  中, 一般项  $x_{n_k}$  是第  $k$  项, 而  $x_{n_k}$  在原数列  $\{x_n\}$  中却是第  $n_k$  项. 显然,  $n_k \geq k$ .

**定理 4(收敛数列与其子数列间的关系)** 如果数列  $\{x_n\}$  收敛于  $a$ , 那么它的任一子数列也收敛, 且极限也是  $a$ .

**证** 设数列  $\{x_{n_k}\}$  是数列  $\{x_n\}$  的任一子数列.

由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 故  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists$  正整数  $N$ , 当  $n > N$  时,  $|x_n - a| < \varepsilon$  成立.

取  $K = N$ , 则当  $k > K$  时,  $n_k > n_K = n_N \geq N$ . 于是  $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$ . 这就证明了  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ . 证毕.

由定理 4 可知, 如果数列  $\{x_n\}$  有两个子数列收敛于不同的极限, 那么数列  $\{x_n\}$  是发散的. 例如, 例 4 中的数列

$$1, -1, 1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots$$

的子数列  $\{x_{2k-1}\}$  收敛于 1, 而子数列  $\{x_{2k}\}$  收敛于 -1, 因此数列  $x_n = (-1)^{n+1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 是发散的. 同时这个例子也说明, 一个发散的数列也可能有收敛的子数列.

## 习题 1-2

1. 下列各题中, 哪些数列收敛? 哪些数列发散? 对收敛数列, 通过观察  $\{x_n\}$  的变化趋

势,写出它们的极限:

$$(1) x_n = \frac{1}{2^n};$$

$$(2) x_n = (-1)^n \frac{1}{n};$$

$$(3) x_n = 2 + \frac{1}{n^2};$$

$$(4) x_n = \frac{n-1}{n+1};$$

$$(5) x_n = n(-1)^n;$$

$$(6) x_n = \frac{2^n - 1}{3^n};$$

$$(7) x_n = n - \frac{1}{n};$$

$$(8) x_n = [(-1)^n + 1] \frac{n+1}{n}.$$

\* 2. 设数列  $|x_n|$  的一般项  $x_n = \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{2}$ . 问  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = ?$  求出  $N$ , 使当  $n > N$  时,  $x_n$  与其极限之差的绝对值小于正数  $\epsilon$ . 当  $\epsilon = 0.001$  时, 求出数  $N$ .

\* 3. 根据数列极限的定义证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+1} = \frac{3}{2};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{n} = 1;$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} 0.\underbrace{999 \dots 9}_{n \text{个}} = 1.$$

\* 4. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = |a|$ . 并举例说明: 如果数列  $\{|x_n|\}$  有极限, 但数列  $\{x_n\}$  未必有极限.

\* 5. 设数列  $|x_n|$  有界, 又  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ , 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ .

\* 6. 对于数列  $|x_n|$ , 若  $x_{2k-1} \rightarrow a$  ( $k \rightarrow \infty$ ),  $x_{2k} \rightarrow a$  ( $k \rightarrow \infty$ ), 证明:  $x_n \rightarrow a$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

### 第三节 函数的极限

第五章

#### 一、函数极限的定义

因为数列  $\{x_n\}$  可看作自变量为  $n$  的函数:  $x_n = f(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$ , 所以, 数列  $\{x_n\}$  的极限为  $a$ , 就是, 当自变量  $n$  取正整数而无限增大(即  $n \rightarrow \infty$ )时, 对应的函数值  $f(n)$  无限接近于确定的数  $a$ . 把数列极限概念中的函数为  $f(n)$  而自变量的变化过程为  $n \rightarrow \infty$  等特殊性撇开, 这样可以引出函数极限的一般概念: 在自变量的某个变化过程中, 如果对应的函数值无限接近于某个确定的数, 那么这个确定的数就叫做在这一变化过程中函数的极限. 这个极限是与自变量的变化过程密切相关的, 由于自变量的变化过程不同, 函数的极限就表现为不同的形式. 数列极限看作函数  $f(n)$  当  $n \rightarrow \infty$  时的极限, 这里自变量的变化过程是  $n \rightarrow \infty$ . 下面讲述自变量的变化过程为其他情形时函数  $f(x)$  的极限, 主要研究两种情形:

(1) 自变量  $x$  任意地接近于有限值  $x_0$  或者说趋于有限值  $x_0$  (记作  $x \rightarrow x_0$ ) 时, 对应的函数值  $f(x)$  的变化情形;

(2) 自变量  $x$  的绝对值  $|x|$  无限增大即趋于无穷大(记作  $x \rightarrow \infty$ )时, 对应的函数值  $f(x)$  的变化情形.

### 1. 自变量趋于有限值时函数的极限

现在考虑自变量  $x$  的变化过程为  $x \rightarrow x_0$ . 如果在  $x \rightarrow x_0$  的过程中, 对应的函数值  $f(x)$  无限接近于确定的数值  $A$ , 那么就说  $A$  是函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的极限. 当然, 这里我们首先假定函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某个去心邻域内是有定义的.

在  $x \rightarrow x_0$  的过程中, 对应的函数值  $f(x)$  无限接近于  $A$ , 就是  $|f(x) - A|$  能任意小. 如数列极限概念所述,  $|f(x) - A|$  能任意小这件事可以用  $|f(x) - A| < \epsilon$  来表达, 其中  $\epsilon$  是任意给定的正数. 因为函数值  $f(x)$  无限接近于  $A$  是在  $x \rightarrow x_0$  的过程中实现的, 所以对于任意给定的正数  $\epsilon$ , 只要求充分接近于  $x_0$  的  $x$  所对应的函数值  $f(x)$  满足不等式  $|f(x) - A| < \epsilon$ ; 而充分接近于  $x_0$  的  $x$  可表达为  $0 < |x - x_0| < \delta$ , 其中  $\delta$  是某个正数. 从几何上看, 适合不等式  $0 < |x - x_0| < \delta$  的  $x$  的全体, 就是点  $x_0$  的去心  $\delta$  邻域, 而邻域半径  $\delta$  则体现了  $x$  接近  $x_0$  的程度.

通过以上分析, 我们给出  $x \rightarrow x_0$  时函数的极限的定义如下.

**定义 1** 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数  $A$ , 对于任意给定的正数  $\epsilon$  (不论它多么小), 总存在正数  $\delta$ , 使得当  $x$  满足不等式  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 对应的函数值  $f(x)$  都满足不等式

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

那么常数  $A$  就叫做函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A \text{ (当 } x \rightarrow x_0 \text{ ).}$$

我们指出, 定义中  $0 < |x - x_0|$  表示  $x \neq x_0$ , 所以  $x \rightarrow x_0$  时  $f(x)$  有没有极限, 与  $f(x)$  在点  $x_0$  是否有定义并无关系.

**定义 1** 可以简单地表述为:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \epsilon.$

函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的极限为  $A$  的几何解释如下: 任意给定一正数  $\epsilon$ , 作平行于  $x$  轴的两条直线  $y = A + \epsilon$  和  $y = A - \epsilon$ , 介于这两条直线之间是一横条区域. 根据定义, 对于给定的  $\epsilon$ , 存在着点  $x_0$  的一个  $\delta$  邻域  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , 当  $y = f(x)$  的图形上的点的横坐标  $x$  在邻域  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  内, 但  $x \neq x_0$  时, 这

些点的纵坐标  $f(x)$  满足不等式

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

或

$$A - \epsilon < f(x) < A + \epsilon.$$

亦即这些点落在上面所作的横条区域内(图 1-25).

例 1 证明  $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ , 此处  $c$  为一常数.

证 这里  $|f(x) - A| = |c - c| = 0$ , 因此  $\forall \epsilon > 0$ , 可任取  $\delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 能使不等式

$$|f(x) - A| = |c - c| = 0 < \epsilon$$

成立. 所以  $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ .

例 2 证明  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ .

证 这里  $|f(x) - A| = |x - x_0|$ , 因此  $\forall \epsilon > 0$ , 总可取  $\delta = \epsilon$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta = \epsilon$  时, 能使不等式  $|f(x) - A| = |x - x_0| < \epsilon$  成立. 所以  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ .

例 3 证明

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1) = 1.$$

证 由于

$$|f(x) - A| = |(2x - 1) - 1| = 2|x - 1|,$$

为了使  $|f(x) - A| < \epsilon$ , 只要

$$|x - 1| < \frac{\epsilon}{2}$$

所以,  $\forall \epsilon > 0$ , 可取  $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ , 则当  $x$  适合不等式

$$0 < |x - 1| < \delta$$

时, 对应的函数值  $f(x)$  就满足不等式

$$|f(x) - 1| = |(2x - 1) - 1| < \epsilon.$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1) = 1.$$

例 4 证明

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

证 这里, 函数在点  $x = 1$  是没有定义的, 但是函数当  $x \rightarrow 1$  时的极限存在或不存在与它并无关系. 事实上,  $\forall \epsilon > 0$ , 将不等式

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \epsilon$$

约去非零因子  $x - 1$  后, 就化为

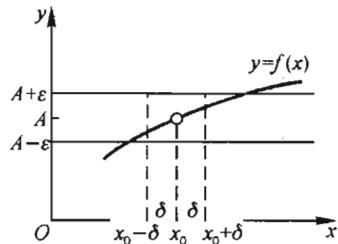


图 1-25

$$|x+1-2|=|x-1|<\epsilon,$$

因此,只要取  $\delta=\epsilon$ ,那么当  $0<|x-1|<\delta$  时,就有

$$\left| \frac{x^2-1}{x-1}-2 \right| < \epsilon.$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$$

**例 5 证明:**当  $x_0>0$  时,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ .

证  $\forall \epsilon>0$ ,因为

$$|f(x)-A| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \left| \frac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x_0}} |x-x_0|,$$

要使  $|f(x)-A|<\epsilon$ ,只要  $|x-x_0|<\sqrt{x_0}\epsilon$  且  $x \geq 0$ ,而  $x \geq 0$  可用  $|x-x_0| \leq x_0$  保证,因此取  $\delta = \min\{x_0, \sqrt{x_0}\epsilon\}$  (这式子表示,  $\delta$  是  $x_0$  和  $\sqrt{x_0}\epsilon$  两个数中较小的那个数),则当  $x$  适合不等式  $0<|x-x_0|<\delta$  时,对应的函数值  $\sqrt{x}$  就满足不等式

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \epsilon.$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}.$$

上述  $x \rightarrow x_0$  时函数  $f(x)$  的极限概念中,  $x$  是既从  $x_0$  的左侧也从  $x_0$  的右侧趋于  $x_0$  的.但有时只能或只需考虑  $x$  仅从  $x_0$  的左侧趋于  $x_0$  (记作  $x \rightarrow x_0^-$ ) 的情形,或  $x$  仅从  $x_0$  的右侧趋于  $x_0$  (记作  $x \rightarrow x_0^+$ ) 的情形.在  $x \rightarrow x_0^-$  的情形,  $x$  在  $x_0$  的左侧,  $x < x_0$ .在  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  的定义中,把  $0<|x-x_0|<\delta$  改为  $x_0 - \delta < x < x_0$ ,那么  $A$  就叫做函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的左极限,记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^-) = A.$$

类似地,在  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  的定义中,把  $0<|x-x_0|<\delta$  改为  $x_0 < x < x_0 + \delta$ ,

那么  $A$  就叫做函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的右极限,记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^+) = A.$$

左极限与右极限统称为单侧极限.

根据  $x \rightarrow x_0$  时函数  $f(x)$  的极限的定义以及左极限和右极限的定义,容易证明:函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时极限存在的充分必要条件是左极限及右极限各自存在并且相等,即

$$f(x_0^-) = f(x_0^+).$$

因此,即使  $f(x_0^-)$  和  $f(x_0^+)$  都存在,但若不相等,则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  也不存在.

### 例 6 函数

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x + 1 & x > 0. \end{cases}$$

当  $x \rightarrow 0$  时  $f(x)$  的极限不存在.

仿例 3 可证当  $x \rightarrow 0$  时  $f(x)$  的左极限

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 1) = -1,$$

而右极限

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1,$$

因为左极限和右极限存在但不相等,所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

不存在(图 1-26).

### 2. 自变量趋于无穷大时函数的极限

如果在  $x \rightarrow \infty$  的过程中,对应的函数值  $f(x)$  无限接近于确定的数值  $A$ ,那么  $A$  叫做函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow \infty$  时的极限. 精确地说,就是

**定义 2** 设函数  $f(x)$  当  $|x|$  大于某一正数时有定义. 如果存在常数  $A$ , 对于任意给定的正数  $\epsilon$  (不论它多么小), 总存在着正数  $X$ , 使得当  $x$  满足不等式  $|x| > X$  时, 对应的函数值  $f(x)$  都满足不等式

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

那么常数  $A$  就叫做函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow \infty$  时的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (\text{当 } x \rightarrow \infty).$$

**定义 2** 可简单地表达为:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists X > 0, \text{当 } |x| > X \text{ 时}, \text{有 } |f(x) - A| < \epsilon.$$

如果  $x > 0$  且无限增大(记作  $x \rightarrow +\infty$ ), 那么只要把上面定义中的  $|x| > X$  改为  $x > X$ , 就可得  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$  的定义. 同样, 如果  $x < 0$  而  $|x|$  无限增大(记作  $x \rightarrow -\infty$ ), 那么只要把  $|x| > X$  改为  $x < -X$ , 便得  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$  的定义.

从几何上来说,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$  的意义是: 作直线  $y = A - \epsilon$  和  $y = A + \epsilon$ , 则总有一个正数  $X$  存在, 使得当  $x < -X$  或  $x > X$  时, 函数  $y = f(x)$  的图形位于这两直线之间(图 1-27). 这时, 直线  $y = A$  是函数  $y = f(x)$  的图形的水平渐近线.

### 例 7 证明

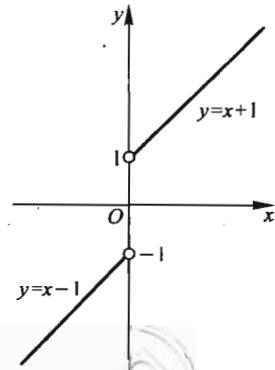


图 1-26

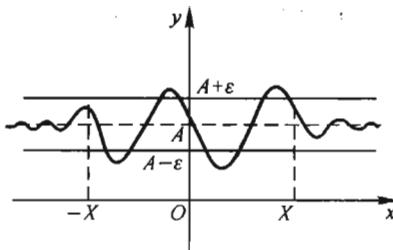


图 1-27

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

证  $\forall \varepsilon > 0$ , 要证  $\exists X > 0$ , 当  $|x| > X$  时, 不等式

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$$

成立. 因这个不等式相当于

$$\frac{1}{|x|} < \varepsilon$$

或

$$|x| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

由此可知, 如果取  $X = \frac{1}{\varepsilon}$ , 那么当  $|x| > X = \frac{1}{\varepsilon}$  时, 不等式  $\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$  成立, 这就证明了

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0,$$

直线  $y = 0$  是函数  $y = \frac{1}{x}$  的图形的水平渐近线.

## 二、函数极限的性质

与收敛数列的性质相比较, 可得函数极限的一些相应的性质. 它们都可根据函数极限的定义, 运用类似于证明收敛数列性质的方法加以证明. 由于函数极限的定义按自变量的变化过程不同有各种形式, 下面仅以 " $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ " 这种形式为代表给出关于函数极限性质的一些定理, 并就其中的几个给出证明. 至于其他形式的极限的性质及其证明, 只要相应地做一些修改即可得出.

**定理 1(函数极限的唯一性)** 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 那么这极限唯一.

**定理 2(函数极限的局部有界性)** 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 那么存在常数  $M > 0$

和  $\delta > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x)| \leq M$ .

证 因为  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 所以取  $\epsilon = 1$ , 则  $\exists \delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有  
 $|f(x) - A| < 1 \Rightarrow |f(x)| \leq |f(x) - A| + |A| < |A| + 1$ ,  
记  $M = |A| + 1$ , 则定理 2 就获得证明.

定理 3(函数极限的局部保号性) 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 且  $A > 0$  (或  $A < 0$ ),  
那么存在常数  $\delta > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有  $f(x) > 0$  (或  $f(x) < 0$ ).

证 就  $A > 0$  的情形证明.

因为  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$ , 所以, 取  $\epsilon = \frac{A}{2} > 0$ , 则  $\exists \delta > 0$ , 当  
 $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有

$$|f(x) - A| < \frac{A}{2} \Rightarrow f(x) > A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} > 0.$$

类似地可以证明  $A < 0$  的情形.

从定理 3 的证明中可知, 在定理 3 的条件下, 可得下面更强的结论:

定理 3' 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  ( $A \neq 0$ ), 那么就存在着  $x_0$  的某一去心邻域  
 $\dot{U}(x_0)$ , 当  $x \in \dot{U}(x_0)$  时, 就有  $|f(x)| > \frac{|A|}{2}$ .

由定理 3, 易得以下推论.

推论 如果在  $x_0$  的某去心邻域内  $f(x) \geq 0$  (或  $f(x) \leq 0$ ), 而且  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 那么  $A \geq 0$  (或  $A \leq 0$ ).

定理 4(函数极限与数列极限的关系) 如果极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在,  $\{x_n\}$  为  
函数  $f(x)$  的定义域内任一收敛于  $x_0$  的数列, 且满足:  $x_n \neq x_0$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ ), 那么相  
应的函数值数列  $\{f(x_n)\}$  必收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

证 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 则  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有  
 $|f(x) - A| < \epsilon$ .

又因  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , 故对  $\delta > 0$ ,  $\exists N$ , 当  $n > N$  时, 有  $|x_n - x_0| < \delta$ .

由假设,  $x_n \neq x_0$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ ). 故当  $n > N$  时,  $0 < |x_n - x_0| < \delta$ , 从而  
 $|f(x_n) - A| < \epsilon$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ .

### 习题 1-3

1. 对图 1-28 所示的函数  $f(x)$ , 求下列极限, 如极限不存在, 说明理由.

$$(1) \lim_{x \rightarrow -2} f(x);$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

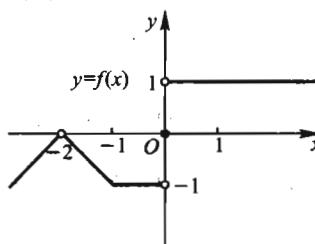


图 1-28

$$(2) \lim_{x \rightarrow -1} f(x);$$

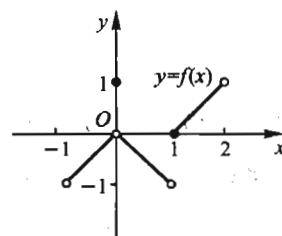


图 1-29

2. 对图 1-29 所示的函数  $f(x)$ , 下列陈述中哪些是对的, 哪些是错的?

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ 不存在;} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1; \quad (4) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0;$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ 不存在;} \quad (6) \text{对每个 } x_0 \in (-1, 1), \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ 存在.}$$

3. 对图 1-30 所示的函数, 下列陈述中哪些是对的, 哪些是错的?

$$(1) \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1; \quad (2) \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \text{ 不存在;} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0; \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1;$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1; \quad (6) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0; \quad (7) \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0; \quad (8) \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0.$$

4. 求  $f(x) = \frac{x}{x}$ ,  $\varphi(x) = \frac{|x|}{x}$  当  $x \rightarrow 0$  时的左、右极限, 并说明它们在  $x \rightarrow 0$  时的极限是否存在.

5. 根据函数极限的定义证明:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 3} (3x - 1) = 8; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 2} (5x + 2) = 12;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4; \quad (4) \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1 - 4x^2}{2x + 1} = 2.$$

6. 根据函数极限的定义证明:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0.$$

7. 当  $x \rightarrow 2$  时,  $y = x^2 \rightarrow 4$ . 问  $\delta$  等于多少, 使当  $|x - 2| < \delta$  时,  $|y - 4| < 0.001$ ?

8. 当  $x \rightarrow \infty$  时,  $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3} \rightarrow 1$ . 问  $X$  等于多少, 使当  $|x| > X$  时,  $|y - 1| < 0.01$ ?

9. 证明函数  $f(x) = |x|$  当  $x \rightarrow 0$  时极限为零.

10. 证明: 若  $x \rightarrow +\infty$  及  $x \rightarrow -\infty$  时, 函数  $f(x)$  的极限都存在且都等于  $A$ , 则  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ .

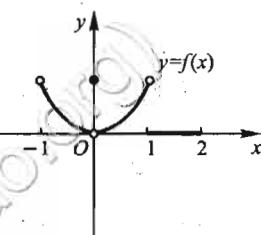


图 1-30

A.

11. 根据函数极限的定义证明：函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时极限存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在并且相等。

12. 试给出  $x \rightarrow \infty$  时函数极限的局部有界的定理，并加以证明。

## 第四节 无穷小与无穷大

### 一、无穷小

**定义 1** 如果函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的极限为零，那么称函数  $f(x)$  为当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的无穷小。

特别地，以零为极限的数列  $\{x_n\}$  称为  $n \rightarrow \infty$  时的无穷小。

**例 1** 因为  $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$ ，所以函数  $x - 1$  为当  $x \rightarrow 1$  时的无穷小。

因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ ，所以函数  $\frac{1}{x}$  为当  $x \rightarrow \infty$  时的无穷小。

**注意** 不要把无穷小与很小的数(例如百万分之一)混为一谈，因为无穷小是这样的函数，在  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 的过程中，这函数的绝对值能小于任意给定的正数  $\epsilon$ ，而很小的数如百万分之一，就不能小于任意给定的正数  $\epsilon$ ，例如取  $\epsilon$  等于千万分之一，则百万分之一就不能小于这个给定的  $\epsilon$ 。但零是可以作为无穷小的唯一的常数，因为如果  $f(x) \equiv 0$ ，那么对于任意给定的  $\epsilon > 0$  总有  $|f(x)| < \epsilon$ 。

下面的定理说明无穷小与函数极限的关系。

**定理 1** 在自变量的同一变化过程  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 中，函数  $f(x)$  具有极限  $A$  的充分必要条件是  $f(x) = A + \alpha$ ，其中  $\alpha$  是无穷小。

**证** 先证必要性。设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ，则  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ ，使当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时，有

$$|f(x) - A| < \epsilon.$$

令  $\alpha = f(x) - A$ ，则  $\alpha$  是当  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小，且

$$f(x) = A + \alpha.$$

这就证明了  $f(x)$  等于它的极限  $A$  与一个无穷小  $\alpha$  之和。

再证充分性。设  $f(x) = A + \alpha$ ，其中  $A$  是常数， $\alpha$  是当  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小，于是

$$|f(x) - A| = |\alpha|.$$

因  $\alpha$  是当  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小，所以  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ ，使当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时，有

$$|\alpha| < \varepsilon,$$

即

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

这就证明了  $A$  是  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的极限.

类似地可证明当  $x \rightarrow \infty$  时的情形.

## 二、无穷大

如果当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时, 对应的函数值的绝对值  $|f(x)|$  无限增大, 就称函数  $f(x)$  为当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的无穷大. 精确地说, 就是

**定义 2** 设函数  $f(x)$  在  $x_0$  的某一去心邻域内有定义 (或  $|x|$  大于某一正数时有定义). 如果对于任意给定的正数  $M$  (不论它多么大), 总存在正数  $\delta$  (或正数  $X$ ), 只要  $x$  适合不等式  $0 < |x - x_0| < \delta$  (或  $|x| > X$ ), 对应的函数值  $f(x)$  总满足不等式

$$|f(x)| > M,$$

则称函数  $f(x)$  为当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的无穷大.

当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的无穷大的函数  $f(x)$ , 按函数极限定义来说, 极限是不存在的. 但为了便于叙述函数的这一性态, 我们也说“函数的极限是无穷大”, 并记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

$$(\text{或 } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty).$$

如果在无穷大的定义中, 把  $|f(x)| > M$  换成  $f(x) > M$  (或  $f(x) < -M$ ), 就记作

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = +\infty \quad (\text{或 } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = -\infty).$$

必须注意, 无穷大 ( $\infty$ ) 不是数, 不可与很大的数 (如一千万、一亿等) 混为一谈.

**例 2** 证明  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$  (图 1-31).

证 设  $\forall M > 0$ .

要使  $\left| \frac{1}{x-1} \right| > M$ ,

只要  $|x-1| < \frac{1}{M}$ .

所以, 取  $\delta = \frac{1}{M}$ , 则只要  $x$  适合不等式  $0 < |x-1|$

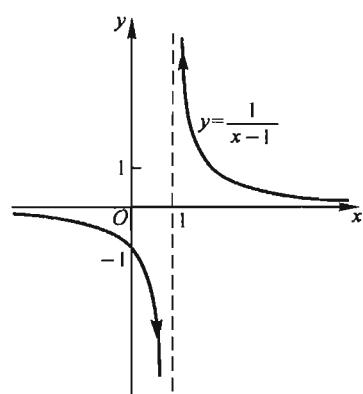


图 1-31

$< \delta = \frac{1}{M}$ , 就有

$$\left| \frac{1}{x-1} \right| > M.$$

这就证明了  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$ .

直线  $x=1$  是函数  $y=\frac{1}{x-1}$  的图形的铅直渐近线.

一般地说, 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ , 则直线  $x=x_0$  是函数  $y=f(x)$  的图形的铅直渐近线.

无穷大与无穷小之间有一种简单的关系, 即:

**定理 2** 在自变量的同一变化过程中, 如果  $f(x)$  为无穷大, 则  $\frac{1}{f(x)}$  为无穷小; 反之, 如果  $f(x)$  为无穷小, 且  $f(x) \neq 0$ , 则  $\frac{1}{f(x)}$  为无穷大.

证 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ .

$\forall \epsilon > 0$ . 根据无穷大的定义, 对于  $M = \frac{1}{\epsilon}$ ,  $\exists \delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有

$$|f(x)| > M = \frac{1}{\epsilon},$$

即

$$\left| \frac{1}{f(x)} \right| < \epsilon,$$

所以  $\frac{1}{f(x)}$  为当  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小.

反之, 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ , 且  $f(x) \neq 0$ .

$\forall M > 0$ . 根据无穷小的定义, 对于  $\epsilon = \frac{1}{M}$ ,  $\exists \delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有

$$|f(x)| < \epsilon = \frac{1}{M},$$

由于当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时  $f(x) \neq 0$ , 从而

$$\left| \frac{1}{f(x)} \right| > M,$$

所以  $\frac{1}{f(x)}$  为当  $x \rightarrow x_0$  时的无穷大.

类似地可证当  $x \rightarrow \infty$  时的情形.

## 习 题 1-4

1. 两个无穷小的商是否一定是无穷小? 举例说明之.

2. 根据定义证明:

$$(1) y = \frac{x^2 - 9}{x + 3} \text{ 为当 } x \rightarrow 3 \text{ 时的无穷小; } \quad (2) y = x \sin \frac{1}{x} \text{ 为当 } x \rightarrow 0 \text{ 时的无穷小.}$$

3. 根据定义证明: 函数  $y = \frac{1+2x}{x}$  为当  $x \rightarrow 0$  时的无穷大. 问  $x$  应满足什么条件, 能使  $|y| > 10^4$ ?

4. 求下列极限并说明理由:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x^2}{1-x}.$$

5. 根据函数极限或无穷大定义, 填写下表:

	$f(x) \rightarrow A$	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow +\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$
$x \rightarrow x_0$	$\forall \epsilon > 0,$ $\exists \delta > 0,$ 使当 $0 <  x - x_0  < \delta$ 时, 即有 $ f(x) - A  < \epsilon$ .			
$x \rightarrow x_0^+$				
$x \rightarrow x_0^-$				
$x \rightarrow \infty$		$\forall M > 0,$ $\exists X > 0,$ 使当 $ x  > X$ 时, 即有 $ f(x)  > M$ .		
$x \rightarrow +\infty$				
$x \rightarrow -\infty$				

6. 函数  $y = x \cos x$  在  $(-\infty, +\infty)$  内是否有界? 这个函数是否为  $x \rightarrow +\infty$  时的无穷大? 为什么?

7. 证明: 函数  $y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$  在区间  $(0, 1]$  上无界, 但这函数不是  $x \rightarrow 0^+$  时的无穷大.

8. 求函数  $f(x) = \frac{4}{2-x}$  的图形的渐近线.

## 第五节 极限运算法则

本节讨论极限的求法,主要是建立极限的四则运算法则和复合函数的极限运算法则,利用这些法则,可以求某些函数的极限.以后我们还将介绍求极限的其他方法.

在下面的讨论中,记号“ $\lim$ ”下面没有标明自变量的变化过程,实际上,下面的定理对  $x \rightarrow x_0$  及  $x \rightarrow \infty$  都是成立的.在论证时,我们只证明了  $x \rightarrow x_0$  的情形,只要把  $\delta$  改成  $X$ ,把  $0 < |x - x_0| < \delta$  改成  $|x| > X$ ,就可得  $x \rightarrow \infty$  情形的证明.

**定理 1 有限个无穷小的和也是无穷小.**

**证** 考虑两个无穷小的和.

设  $\alpha$  及  $\beta$  是当  $x \rightarrow x_0$  时的两个无穷小,而

$$\gamma = \alpha + \beta.$$

$\forall \epsilon > 0$ . 因为  $\alpha$  是当  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小,对于  $\frac{\epsilon}{2} > 0$ ,  $\exists \delta_1 > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta_1$  时,不等式

$$|\alpha| < \frac{\epsilon}{2}$$

成立. 又因  $\beta$  是当  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小,对于  $\frac{\epsilon}{2} > 0$ ,  $\exists \delta_2 > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta_2$  时,不等式

$$|\beta| < \frac{\epsilon}{2}$$

成立. 取  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , 则当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时,

$$|\alpha| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{及} \quad |\beta| < \frac{\epsilon}{2}$$

同时成立,从而  $|\gamma| = |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ . 这就证明了  $\gamma$  也是当  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小.

有限个无穷小之和的情形可以同样证明.

**定理 2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.**

**证** 设函数  $u$  在  $x_0$  的某一去心邻域  $\dot{U}(x_0, \delta_1)$  内是有界的,即  $\exists M > 0$  使  $|u| \leq M$  对一切  $x \in \dot{U}(x_0, \delta_1)$  成立. 又设  $\alpha$  是当  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小,即  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \delta_2 > 0$ , 当  $x \in \dot{U}(x_0, \delta_2)$  时,有

$$|\alpha| < \frac{\epsilon}{M}.$$

取  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , 则当  $x \in U(x_0, \delta)$  时,

$$|u| \leq M \quad \text{及} \quad |\alpha| < \frac{\epsilon}{M}$$

同时成立. 从而

$$|u\alpha| = |u| \cdot |\alpha| < M \cdot \frac{\epsilon}{M} = \epsilon,$$

这就证明了  $u\alpha$  是当  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小.

**推论 1** 常数与无穷小的乘积是无穷小.

**推论 2** 有限个无穷小的乘积也是无穷小.

**定理 3** 如果  $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$ , 那么

(1)  $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B;$

(2)  $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B;$

(3) 若又有  $B \neq 0$ , 则

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}.$$

**证** 先证(1).

因  $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$ , 由第四节定理 1 有

$$f(x) = A + \alpha, \quad g(x) = B + \beta,$$

其中  $\alpha$  及  $\beta$  为无穷小. 于是

$$f(x) \pm g(x) = (A + \alpha) \pm (B + \beta) = (A \pm B) + (\alpha \pm \beta).$$

由本节定理 1,  $\alpha \pm \beta$  是无穷小 ( $\alpha - \beta$  可看作  $\alpha + (-1)\beta$ , 由本节定理 2 的推论 1,  $(-1)\beta$  是无穷小, 因此  $\alpha - \beta$  也可看作两个无穷小的和). 再由第四节定理 1, 得

$$\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B = \lim f(x) \pm \lim g(x).$$

关于(2)的证明, 建议读者作为练习.

再证(3).

由  $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$ , 有

$$f(x) = A + \alpha, \quad g(x) = B + \beta,$$

其中  $\alpha$  及  $\beta$  为无穷小. 设

$$\gamma = \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B},$$

则  $\gamma = \frac{A + \alpha}{B + \beta} - \frac{A}{B} = \frac{1}{B(B + \beta)}(B\alpha - A\beta).$

上式表示,  $\gamma$  可看作两个函数的乘积, 其中函数  $B\alpha - A\beta$  是无穷小. 下面我们证明另一个函数  $\frac{1}{B(B + \beta)}$  在点  $x_0$  的某一邻域内有界.

根据第三节定理3',由于  $\lim g(x) = B \neq 0$ , 存在着点  $x_0$  的某一去心邻域  $\dot{U}(x_0)$ , 当  $x \in \dot{U}(x_0)$  时,  $|g(x)| > \frac{|B|}{2}$ , 从而  $\left| \frac{1}{g(x)} \right| < \frac{2}{|B|}$ . 于是

$$\left| \frac{1}{B(B+\beta)} \right| = \frac{1}{|B|} \cdot \left| \frac{1}{g(x)} \right| < \frac{1}{|B|} \cdot \frac{2}{|B|} = \frac{2}{|B|^2}.$$

这就证明了  $\frac{1}{B(B+\beta)}$  在点  $x_0$  的去心邻域  $\dot{U}(x_0)$  内有界.

因此, 根据本节定理2,  $\gamma$  是无穷小. 而

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} + \gamma,$$

所以由上节定理1, 得

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} = \lim f(x).$$

证毕.

定理3中的(1)、(2)可推广到有限个函数的情形. 例如, 如果  $\lim f(x)$ ,  $\lim g(x)$ ,  $\lim h(x)$  都存在, 则有

$$\lim [f(x) + g(x) - h(x)] = \lim f(x) + \lim g(x) - \lim h(x),$$

$$\lim [f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) \cdot \lim h(x).$$

关于定理3中的(2), 有如下推论:

**推论1** 如果  $\lim f(x)$  存在, 而  $c$  为常数, 则

$$\lim [cf(x)] = c \lim f(x).$$

就是说, 求极限时, 常数因子可以提到极限记号外面. 这是因为  $\lim c = c$ .

**推论2** 如果  $\lim f(x)$  存在, 而  $n$  是正整数, 则

$$\lim [f(x)]^n = [\lim f(x)]^n.$$

这是因为

$$\begin{aligned} \lim [f(x)]^n &= \lim [f(x) \cdot f(x) \cdots f(x)] \\ &= \lim f(x) \cdot \lim f(x) \cdots \lim f(x) = [\lim f(x)]^n. \end{aligned}$$

关于数列, 也有类似的极限四则运算法则, 这就是下面的定理.

**定理4** 设有数列  $\{x_n\}$  和  $\{y_n\}$ . 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B,$$

那么

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = A \pm B;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = A \cdot B;$$

$$(3) \text{当 } y_n \neq 0 \ (n = 1, 2, \dots) \text{ 且 } B \neq 0 \text{ 时}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}.$$

证明从略.

**定理 5** 如果  $\varphi(x) \geq \psi(x)$ , 而  $\lim \varphi(x) = a$ ,  $\lim \psi(x) = b$ , 那么  $a \geq b$ .

**证** 令  $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ , 则  $f(x) \geq 0$ . 由本节定理 3 有

$$\begin{aligned}\lim f(x) &= \lim [\varphi(x) - \psi(x)] \\ &= \lim \varphi(x) - \lim \psi(x) = a - b.\end{aligned}$$

由第三节定理 3 推论, 有  $\lim f(x) \geq 0$ , 即  $a - b \geq 0$ , 故  $a \geq b$ .

**例 1** 求  $\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1)$ .

解  $\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x - \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 2 \lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ .

**例 2** 求  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 5x + 3}$ .

解 这里分母的极限不为零, 故

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 5x + 3} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 1)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 5x + 3)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^3 - \lim_{x \rightarrow 2} 1}{\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 5 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 3} = \frac{(\lim_{x \rightarrow 2} x)^3 - 1}{(\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 - 5 \cdot 2 + 3} \\ &= \frac{2^3 - 1}{2^2 - 10 + 3} = \frac{7}{-3} = -\frac{7}{3}.\end{aligned}$$

从上面两个例子可以看出, 求有理整函数(多项式)或有理分式函数当  $x \rightarrow x_0$  的极限时, 只要把  $x_0$  代替函数中的  $x$  就行了; 但是对于有理分式函数, 这样代入后如果分母等于零, 则没有意义.

事实上, 设多项式

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n)$

$$= a_0 (\lim_{x \rightarrow x_0} x)^n + a_1 (\lim_{x \rightarrow x_0} x)^{n-1} + \cdots + \lim_{x \rightarrow x_0} a_n$$

$$= a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \cdots + a_n = f(x_0);$$

又设有理分式函数

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

其中  $P(x), Q(x)$  都是多项式, 于是

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} Q(x) = Q(x_0);$$

如果  $Q(x_0) \neq 0$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = F(x_0).$$

但必须注意:若  $Q(x_0)=0$ ,则关于商的极限的运算法则不能应用,那就需要特别考虑.下面我们举两个属于这种情形的例题.

**例 3** 求  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9}$ .

解 当  $x \rightarrow 3$  时,分子及分母的极限都是零,于是分子、分母不能分别取极限.因分子及分母有公因子  $x-3$ ,而  $x \rightarrow 3$  时,  $x \neq 3$ ,  $x-3 \neq 0$ ,可约去这个不为零的公因子.所以

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\lim_{x \rightarrow 3} 1}{\lim_{x \rightarrow 3} (x+3)} = \frac{1}{6}.$$

**例 4** 求  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-3}{x^2-5x+4}$ .

解 因为分母的极限  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 5x + 4) = 1^2 - 5 \cdot 1 + 4 = 0$ ,不能应用商的极限的运算法则.但因

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{2x-3} = \frac{1^2 - 5 \cdot 1 + 4}{2 \cdot 1 - 3} = 0,$$

故由第四节定理 2 得

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-3}{x^2-5x+4} = \infty.$$

**例 5** 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$ .

解 先用  $x^3$  去除分母及分子,然后取极限:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^3}}{7 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^3}} = \frac{3}{7},$$

这是因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x^n} = a \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = a \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \right)^n = 0$ ,

其中  $a$  为常数,  $n$  为正整数,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$  (见第三节例 7).

**例 6** 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+2x-1}{2x^3-x^2+5}$ .

解 先用  $x^3$  除分母和分子,然后求极限,得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+2x-1}{2x^3-x^2+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{2 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}} = \frac{0}{2} = 0.$$

**例 7** 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}$ .

解 应用例 6 的结果并根据上节定理 2, 即得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x^2 + 5}{3x^2 - 2x - 1} = \infty.$$

例 5、例 6、例 7 是下列一般情形的特例, 即当  $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, m$  和  $n$  为非负整数时, 有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n = m, \\ 0, & \text{当 } n > m, \\ \infty, & \text{当 } n < m. \end{cases}$$

例 8 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$ .

解 当  $x \rightarrow \infty$  时, 分子及分母的极限都不存在, 故关于商的极限的运算法则不能应用. 如果把  $\frac{\sin x}{x}$  看作  $\sin x$  与  $\frac{1}{x}$  的乘积, 由于  $\frac{1}{x}$  当  $x \rightarrow \infty$  时为无穷小, 而  $\sin x$  是有界函数, 则根据本节定理 2, 有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

定理 6(复合函数的极限运算法则) 设函数  $y = f[g(x)]$  是由函数  $u = g(x)$  与函数  $y = f(u)$  复合而成,  $f[g(x)]$  在点  $x_0$  的某去心邻域内有定义, 若

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$ ,  $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$ , 且存在  $\delta_0 > 0$ , 当  $x \in U^\circ(x_0, \delta_0)$  时, 有  $g(x) \neq u_0$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A.$$

证 按函数极限的定义, 要证:  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时,

$$|f[g(x)] - A| < \varepsilon$$

成立.

由于  $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$ ,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ , 当  $0 < |u - u_0| < \eta$  时,  $|f(u) - A| < \varepsilon$  成立.

又由于  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$ , 对于上面得到的  $\eta > 0, \exists \delta_1 > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta_1$  时,  $|g(x) - u_0| < \eta$  成立.

由假设, 当  $x \in U^\circ(x_0, \delta_0)$  时,  $g(x) \neq u_0$ . 取  $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$ , 则当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时,  $|g(x) - u_0| < \eta$  及  $|g(x) - u_0| \neq 0$  同时成立, 即  $0 < |g(x) - u_0| < \eta$  成立, 从而

$$|f[g(x)] - A| = |f(u) - A| < \epsilon$$

成立. 证毕.

在定理 6 中, 把  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$  换成  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$  或  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ , 而把  $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$  换成  $\lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = A$ , 可得类似的定理.

定理 6 表示, 如果函数  $g(x)$  和  $f(u)$  满足该定理的条件, 那么作代换  $u = g(x)$  可把求  $\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)]$  化为求  $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$ , 这里  $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

## 习题 1-5

1. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x - 3};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x};$$

$$(5) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right);$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^4 - 3x^2 + 1};$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4};$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \left( 2 - \frac{1}{x^2} \right);$$

$$(11) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right); \quad (12) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2};$$

$$(13) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}; \quad (14) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right).$$

2. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2}{(x-2)^2};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x+1};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 - x + 1).$$

3. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x}.$$

4. 设  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ ,  $\{c_n\}$  均为非负数列, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$ . 下列陈述中哪些是对的, 哪些是错的? 如果是对的, 说明理由; 如果是错的, 试给出一个反例.

$$(1) a_n < b_n, n \in \mathbb{N}^+;$$

$$(2) b_n < c_n, n \in \mathbb{N}^+;$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n \text{ 不存在};$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n \text{ 不存在}.$$

5. 下列陈述中, 哪些是对的, 哪些是错的? 如果是对的, 说明理由; 如果是错的, 试给出一个反例.

$$(1) \text{如果 } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ 存在, 但 } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ 不存在, 那么 } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] \text{ 不存在;}$$

(2) 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  都不存在, 那么  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$  不存在;

(3) 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 但  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  不存在, 那么  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x)$  不存在.

6. 证明本节定理 3 中的(2).

## 第六节 极限存在准则 两个重要极限

下面讲判定极限存在的两个准则以及作为应用准则的例子, 讨论两个重要极限:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  及  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ .

准则 I 如果数列  $\{x_n\}$ 、 $\{y_n\}$  及  $\{z_n\}$  满足下列条件:

(1) 从某项起, 即  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ , 当  $n > n_0$  时, 有

$$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n,$$

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ ,

那么数列  $\{x_n\}$  的极限存在, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

证 因  $y_n \rightarrow a$ ,  $z_n \rightarrow a$ , 所以根据数列极限的定义,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists$  正整数  $N_1$ , 当  $n > N_1$  时, 有  $|y_n - a| < \varepsilon$ ; 又  $\exists$  正整数  $N_2$ , 当  $n > N_2$  时, 有  $|z_n - a| < \varepsilon$ . 现在取  $N = \max\{n_0, N_1, N_2\}$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$|y_n - a| < \varepsilon, \quad |z_n - a| < \varepsilon$$

同时成立, 即

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon, \quad a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$$

同时成立. 又因当  $n > N$  时,  $x_n$  介于  $y_n$  和  $z_n$  之间, 从而有

$$a - \varepsilon < y_n \leqslant x_n \leqslant z_n < a + \varepsilon,$$

即

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

成立. 这就证明了  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

上述数列极限存在准则可以推广到函数的极限:

准则 I' 如果

(1) 当  $x \in U(x_0, r)$  (或  $|x| > M$ ) 时,

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$$

(2)  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = A$ ,  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} h(x) = A$ ,

那么  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x)$  存在, 且等于  $A$ .

准则 I 及准则 I' 称为 夹逼准则.

作为准则 I' 的应用,下面证明一个重要的极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

首先注意到,函数  $\frac{\sin x}{x}$  对于一切  $x \neq 0$  都有定义.

在图 1-32 所示的四分之一的单位圆中,设圆心角  $\angle AOB = x$  ( $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ),点 A 处的切线与 OB 的延长线相交于 D,又  $BC \perp OA$ ,则

$$\sin x = CB, x = \widehat{AB}, \tan x = AD.$$

因为

$\triangle AOB$  的面积  $<$  扇形  $AOB$  的面积  $<$   $\triangle AOD$  的面积,

$$\text{所以 } \frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x,$$

$$\text{即 } \sin x < x < \tan x.$$

不等号各边都除以  $\sin x$ ,就有

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

或

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \quad (1)$$

因为当  $x$  用  $-x$  代替时,  $\cos x$  与  $\frac{\sin x}{x}$  都不变,所以上面的不等式对于开区间  $(-\frac{\pi}{2}, 0)$  内的一切  $x$  也是成立的.

为了对(1)式应用准则 I',下面来证  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ .

事实上,当  $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$  时,

$$0 < |\cos x - 1| = 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \left( \frac{x}{2} \right)^2 = \frac{x^2}{2},$$

$$\text{即 } 0 < 1 - \cos x < \frac{x^2}{2}.$$

当  $x \rightarrow 0$  时,  $\frac{x^2}{2} \rightarrow 0$ ,由准则 I' 有  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0$ ,所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

由于  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ ,由不等式(1)及准则 I',即得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

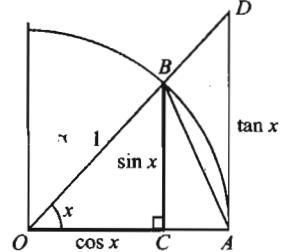


图 1-32

从图 1-33 中, 也可以看出这个重要极限.

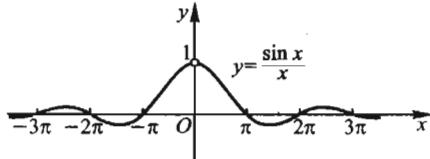


图 1-33

例 1 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$ .

$$\begin{aligned}\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1.\end{aligned}$$

例 2 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ .

$$\begin{aligned}\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

这里倒数第二个等号用到了复合函数的极限运算法则. 实际上,  $\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$  可看

作由  $\frac{\sin u}{u}$  及  $u = \frac{x}{2}$  复合而成. 因  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} = 0$ , 而  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$ , 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1.$$

例 3 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$ .

解 令  $t = \arcsin x$ , 则  $x = \sin t$ , 当  $x \rightarrow 0$  时, 有  $t \rightarrow 0$ . 于是由复合函数的极限运算法则得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1.$$

准则 II 单调有界数列必有极限.

如果数列  $\{x_n\}$  满足条件

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots,$$

就称数列  $\{x_n\}$  是单调增加的；如果数列  $\{x_n\}$  满足条件

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \cdots,$$

就称数列  $\{x_n\}$  是单调减少的。单调增加和单调减少的数列统称为单调数列<sup>①</sup>。

在第二节中曾证明：收敛的数列一定有界。但那时也曾指出：有界的数列不一定收敛。现在准则Ⅱ表明：如果数列不仅有界，并且是单调的，那么这数列的极限必定存在，也就是这数列一定收敛。

对准则Ⅱ我们不作证明，而给出如下的几何解释。

从数轴上看，对应于单调数列的点  $x_n$  只可能向一个方向移动，所以只有两种可能情形：或者点  $x_n$  沿数轴移向无穷远 ( $x_n \rightarrow +\infty$  或  $x_n \rightarrow -\infty$ )；或者点  $x_n$  无限趋近于某一个定点  $A$ （图 1-34），也就是数列  $\{x_n\}$  趋于一个极限。但现在假定数列是有界的，而有界数列的点  $x_n$  都落在数轴上某一个区间  $[-M, M]$  内，那么上述第一种情形就不可能发生了。这就表示这个数列趋于一个极限，并且这个极限的绝对值不超过  $M$ 。

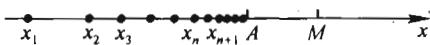


图 1-34

作为准则Ⅱ的应用，我们讨论另一个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

下面考虑  $x$  取正整数  $n$  而趋于  $+\infty$  的情形。

设  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ，我们来证数列  $\{x_n\}$  单调增加并且有界。按牛顿二项公式，有

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + \frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots + \\ &\quad \frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \\ &\quad \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right), \end{aligned}$$

① 这里的单调数列是广义的，就是说，在条件中也包括相等的情形。以后称单调数列都是指这种广义的单调数列。

类似地,

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \cdots + \\&\quad \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \\&\quad \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right).\end{aligned}$$

比较  $x_n$ 、 $x_{n+1}$  的展开式, 可以看到除前两项外,  $x_n$  的每一项都小于  $x_{n+1}$  的对应项, 并且  $x_{n+1}$  还多了最后的一项, 其值大于 0, 因此

$$x_n < x_{n+1},$$

这就说明数列  $\{x_n\}$  是单调增加的. 这个数列同时还是有界的. 因为, 如果  $x_n$  的展开式中各项括号内的数用较大的数 1 替换, 得

$$\begin{aligned}x_n &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\&= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3,\end{aligned}$$

这就说明数列  $\{x_n\}$  是有界的. 根据极限存在准则 II, 这个数列  $\{x_n\}$  的极限存在, 通常用字母 e 来表示它, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

可以证明, 当  $x$  取实数而趋于  $+\infty$  或  $-\infty$  时, 函数  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  的极限都存在且都等于 e<sup>①</sup>. 因此<sup>②</sup>,

① 设  $n \leq x < n+1$ , 则

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

且  $n$  与  $x$  同时趋于  $+\infty$ , 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = e,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] = e,$$

应用夹逼准则, 即得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

令  $x = -(t+1)$ , 则  $x \rightarrow -\infty$  时,  $t \rightarrow +\infty$ . 从而

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)^{-(t+1)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{t+1}\right)^{-(t+1)} \\&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \cdot \left(1 + \frac{1}{t}\right) \right] = e.\end{aligned}$$

② 参阅习题 1-3 第 10 题.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (2)$$

这个数  $e$  是无理数, 它的值是

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\cdots.$$

在第一节中提到的指数函数  $y = e^x$  以及自然对数  $y = \ln x$  中的底  $e$  就是这个常数.

利用复合函数的极限运算法则, 可把(2)式写成另一形式. 在  $(1+z)^{\frac{1}{z}}$  中作代换  $x = \frac{1}{z}$ , 得  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ . 又当  $z \rightarrow 0$  时  $x \rightarrow \infty$ . 因此由复合函数的极限运算法则得

$$\lim_{z \rightarrow 0} (1+z)^{\frac{1}{z}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

下面的例 4 也是用代换方法来做的, 实质上还是用到了复合函数的极限运算法则.

**例 4** 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$ .

解 令  $t = -x$ , 则当  $x \rightarrow \infty$  时,  $t \rightarrow -\infty$ . 于是

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t} = \frac{1}{e}.$$

相应于单调有界数列必有极限的准则 II, 函数极限也有类似的准则. 对于自变量的不同变化过程 ( $x \rightarrow x_0^-$ ,  $x \rightarrow x_0^+$ ,  $x \rightarrow -\infty$ ,  $x \rightarrow +\infty$ ), 准则有不同的形式. 现以  $x \rightarrow x_0^-$  为例, 将相应的准则叙述如下:

**准则 II'** 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某个左邻域内单调并且有界, 则  $f(x)$  在  $x_0$  的左极限  $f(x_0^-)$  必定存在.

#### \* 柯西(Cauchy)<sup>①</sup>极限存在准则

在第二节例 1 及例 2 中, 我们看到收敛数列不一定是单调的. 因此, 准则 II 所给出的单调有界这条件, 是数列收敛的充分条件, 而不是必要的. 当然, 其中有界这一条件对数列的收敛性来说是必要的. 下面叙述的柯西极限存在准则, 它给出了数列收敛的充分必要条件.

**柯西极限存在准则** 数列  $\{x_n\}$  收敛的充分必要条件是: 对于任意给定的正数  $\epsilon$ , 存在着这样的正整数  $N$ , 使得当  $m > N, n > N$  时, 就有

<sup>①</sup> 柯西(Augustin Louis Cauchy, 1789—1857), 法国数学家, 1821 年他出版了《分析教程》、《无穷小计算讲义》、《无穷小计算在几何中的应用》这几部划时代的著作, 给出了分析学一系列基本概念的严格定义, 将微积分理论完整而严密地奠基于极限的基础之上, 从而使他成为严格微积分学的奠基者.

$$|x_n - x_m| < \epsilon.$$

证 必要性 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .  $\forall \epsilon > 0$ , 由数列极限的定义,  
 $\exists$  正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 有

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2};$$

同样, 当  $m > N$  时, 也有

$$|x_m - a| < \frac{\epsilon}{2}.$$

因此, 当  $m > N, n > N$  时, 有

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) - (x_m - a)|$$

$$\leq |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

所以条件是必要的.

充分性这里不予证明.

这准则的几何意义表示, 数列  $\{x_n\}$  收敛的充分必要条件是: 对于任意给定的正数  $\epsilon$ , 在数轴上一切具有足够大号码的点  $x_n$  中, 任意两点间的距离小于  $\epsilon$ .

柯西极限存在准则有时也叫做柯西审敛原理.

## 习 题 1-6

1. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \omega x}{x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} x \cot x;$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x};$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n} (x \text{ 为不等于零的常数}).$$

2. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{\frac{1}{x}};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{kx} (k \text{ 为正整数}).$$

\*3. 根据函数极限的定义, 证明极限存在的准则 I'.

4. 利用极限存在准则证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + \dots + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right) = 1;$$

(3) 数列  $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \dots$  的极限存在；

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1+x} = 1$ ；

(5)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[ \frac{1}{x} \right] = 1$ .

## 第七节 无穷小的比较

在第五节中我们已经知道，两个无穷小的和、差及乘积仍旧是无穷小。但是，关于两个无穷小的商，却会出现不同的情况，例如，当  $x \rightarrow 0$  时， $3x, x^2, \sin x$  都是无穷小，而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x^2} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3}.$$

两个无穷小之比的极限的各种不同情况，反映了不同的无穷小趋于零的“快慢”程度。就上面几个例子来说，在  $x \rightarrow 0$  的过程中， $x^2 \rightarrow 0$  比  $3x \rightarrow 0$  “快些”，反过来  $3x \rightarrow 0$  比  $x^2 \rightarrow 0$  “慢些”，而  $\sin x \rightarrow 0$  与  $x \rightarrow 0$  “快慢相仿”。

下面，我们就无穷小之比的极限存在或为无穷大时，来说明两个无穷小之间的比较。应当注意，下面的  $\alpha$  及  $\beta$  都是在同一个自变量的变化过程中的无穷小，且  $\alpha \neq 0$ ， $\lim \frac{\beta}{\alpha}$  也是在这个变化过程中的极限。

定义：

如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ ，就说  $\beta$  是比  $\alpha$  高阶的无穷小，记作  $\beta = o(\alpha)$ ；

如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$ ，就说  $\beta$  是比  $\alpha$  低阶的无穷小。

如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$ ，就说  $\beta$  与  $\alpha$  是同阶无穷小；

如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0, k > 0$ ，就说  $\beta$  是关于  $\alpha$  的  $k$  阶无穷小。

如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$ ，就说  $\beta$  与  $\alpha$  是等价无穷小，记作  $\alpha \sim \beta$ 。

显然，等价无穷小是同阶无穷小的特殊情形，即  $c = 1$  的情形。

下面举一些例子：

因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{x} = 0$ ，所以当  $x \rightarrow 0$  时， $3x^2$  是比  $x$  高阶的无穷小，即  $3x^2 = o(x)$  ( $x \rightarrow 0$ )。

因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \infty$ , 所以当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\frac{1}{n}$  是比  $\frac{1}{n^2}$  低阶的无穷小.

因为  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$ , 所以当  $x \rightarrow 3$  时,  $x^2 - 9$  与  $x - 3$  是同阶无穷小.

因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ , 所以当  $x \rightarrow 0$  时,  $1 - \cos x$  是关于  $x$  的二阶无穷小.

因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , 所以当  $x \rightarrow 0$  时,  $\sin x$  与  $x$  是等价无穷小, 即  $\sin x \sim x$  ( $x \rightarrow 0$ ).

下面再举一个常用的等价无穷小的例子.

**例 1** 证明: 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x$ .

证 因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{\frac{1}{n}x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[n]{1+x})^n - 1}{\frac{1}{n}x[\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \dots + 1]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{n}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \dots + 1} = 1 \text{ ①}, \end{aligned}$$

所以  $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x$  ( $x \rightarrow 0$ ).

关于等价无穷小, 有下面两个定理.

**定理 1**  $\beta$  与  $\alpha$  是等价无穷小的充分必要条件为

$$\beta = \alpha + o(\alpha).$$

证 必要性 设  $\alpha \sim \beta$ , 则

$$\lim \frac{\beta - \alpha}{\alpha} = \lim \left( \frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) = \lim \frac{\beta}{\alpha} - 1 = 0,$$

因此  $\beta - \alpha = o(\alpha)$ , 即  $\beta = \alpha + o(\alpha)$ .

充分性 设  $\beta = \alpha + o(\alpha)$ , 则

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\alpha + o(\alpha)}{\alpha} = \lim \left( 1 + \frac{o(\alpha)}{\alpha} \right) = 1,$$

因此  $\alpha \sim \beta$ .

**例 2** 因为当  $x \rightarrow 0$  时,  $\sin x \sim x$ ,  $\tan x \sim x$ ,  $\arcsin x \sim x$ ,  $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ ,

① 极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{(1+x)^m} = 1$  ( $m = n-1, n-2, \dots, 1$ ) 用到了习题 1-6 中题 4(4) 的结果及第五节中定理 3 的推论 2.

所以当  $x \rightarrow 0$  时有

$$\sin x = x + o(x), \quad \tan x = x + o(x),$$

$$\arcsin x = x + o(x), \quad 1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

**定理 2** 设  $\alpha \sim \alpha'$ ,  $\beta \sim \beta'$ , 且  $\lim \frac{\beta'}{\alpha}$  存在, 则

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

证  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \left( \frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha} \right)$   
 $= \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}.$

定理 2 表明, 求两个无穷小之比的极限时, 分子及分母都可用等价无穷小来代替. 因此, 如果用来代替的无穷小选得适当的话, 可以使计算简化.

**例 3** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x}$ .

解 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\tan 2x \sim 2x$ ,  $\sin 5x \sim 5x$ , 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}.$$

**例 4** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^3 + 3x}$ .

解 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\sin x \sim x$ , 无穷小  $x^3 + 3x$  与它本身显然是等价的, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^3 + 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(x^2 + 3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + 3} = \frac{1}{3}.$$

**例 5** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x^2)^{\frac{1}{3}} - 1}{\cos x - 1}$ .

解 当  $x \rightarrow 0$  时,  $(1 + x^2)^{\frac{1}{3}} - 1 \sim \frac{1}{3}x^2$ ,  $\cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$ , 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x^2)^{\frac{1}{3}} - 1}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^2}{-\frac{1}{2}x^2} = -\frac{2}{3}.$$

### 习题 1-7

1. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $2x - x^2$  与  $x^2 - x^3$  相比, 哪一个是高阶无穷小?

2. 当  $x \rightarrow 1$  时, 无穷小  $1 - x$  和 (1)  $1 - x^3$ , (2)  $\frac{1}{2}(1 - x^2)$  是否同阶? 是否等价?

3. 证明: 当  $x \rightarrow 0$  时, 有

$$(1) \arctan x \sim x;$$

$$(2) \sec x - 1 \sim \frac{x^2}{2}.$$

4. 利用等价无穷小的性质,求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{2x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m} \quad (n, m \text{ 为正整数});$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+\sin x} - 1)}.$$

5. 证明无穷小的等价关系具有下列性质:

(1)  $\alpha \sim \alpha$  (自反性);

(2) 若  $\alpha \sim \beta$ , 则  $\beta \sim \alpha$  (对称性);

(3) 若  $\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma$ , 则  $\alpha \sim \gamma$  (传递性).

## 第八节 函数的连续性与间断点

### 一、函数的连续性

自然界中有许多现象,如气温的变化、河水的流动、植物的生长等等,都是连续地变化着的.这种现象在函数关系上的反映,就是函数的连续性.例如就气温的变化来看,当时间变动很微小时,气温的变化也很微小,这种特点就是所谓连续性.下面我们先引入增量的概念,然后来描述连续性,并引出函数的连续性的定义.

设变量  $u$  从它的一个初值  $u_1$  变到终值  $u_2$ , 终值与初值的差  $u_2 - u_1$  就叫做变量  $u$  的增量, 记作  $\Delta u$ , 即

$$\Delta u = u_2 - u_1.$$

增量  $\Delta u$  可以是正的,也可以是负的.在  $\Delta u$  为正的情形,变量  $u$  从  $u_1$  变到  $u_2 = u_1 + \Delta u$  时是增大的;当  $\Delta u$  为负时,变量  $u$  是减小的.

应该注意到:记号  $\Delta u$  并不表示某个量  $\Delta$  与变量  $u$  的乘积,而是一个整体不可分割的记号.

现在假定函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  的某一个邻域内是有定义的.当自变量  $x$  在这邻域内从  $x_0$  变到  $x_0 + \Delta x$  时,函数  $y$  相应的从  $f(x_0)$  变到  $f(x_0 + \Delta x)$ ,因此函数  $y$  的对应增量为

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

这个关系式的几何解释如图 1-35 所示.

假如保持  $x_0$  不变而让自变量的增量  $\Delta x$  变动,一般说来,函数  $y$  的增量  $\Delta y$  也要随着变动.现在我们对连续性的概念可以这样描述:如果当  $\Delta x$  趋于

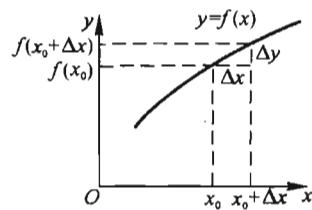


图 1-35

零时,函数  $y$  的对应增量  $\Delta y$  也趋于零,即

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \quad (1)$$

或  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0,$

那么就称函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处是连续的,即有下述定义:

定义 设函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  的某一邻域内有定义,如果

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0,$$

那么就称函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  连续.

为了应用方便起见,下面把函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  连续的定义用不同的方式来叙述.

设  $x = x_0 + \Delta x$ , 则  $\Delta x \rightarrow 0$  就是  $x \rightarrow x_0$ . 又由于

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0)$$

即  $f(x) = f(x_0) + \Delta y,$

可见  $\Delta y \rightarrow 0$  就是  $f(x) \rightarrow f(x_0)$ , 因此(1)式与

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

相当. 所以,函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  连续的定义又可叙述如下:

设函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  的某一邻域内有定义,如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad (2)$$

那么就称函数  $f(x)$  在点  $x_0$  连续.

由函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的极限的定义可知,上述定义也可用“ $\varepsilon - \delta$ ”语言表达如下:

$f(x)$  在点  $x_0$  连续  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $|x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

下面说明左连续及右连续的概念.

如果  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0^-)$  存在且等于  $f(x_0)$ , 即

$$f(x_0^-) = f(x_0),$$

就说函数  $f(x)$  在点  $x_0$  左连续. 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$  存在且等于  $f(x_0)$ , 即

$$f(x_0^+) = f(x_0),$$

就说函数  $f(x)$  在点  $x_0$  右连续.

在区间上每一点都连续的函数,叫做在该区间上的连续函数,或者说函数在该区间上连续. 如果区间包括端点,那么函数在右端点连续是指左连续,在左端点连续是指右连续.

连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

在第五节中, 我们曾经证明: 如果  $f(x)$  是有理整函数(多项式), 则对于任意的实数  $x_0$ , 都有  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , 因此有理整函数在区间  $(-\infty, +\infty)$  内是连续的. 对于有理分式函数  $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , 只要  $Q(x_0) \neq 0$ , 就有  $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0)$ , 因此有理分式函数在其定义域内的每一点都是连续的.

由第三节例 5 可知, 函数  $f(x) = \sqrt{x}$  在  $(0, +\infty)$  内是连续的.

作为例子, 我们来证明, 函数  $y = \sin x$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  内是连续的.

设  $x$  是区间  $(-\infty, +\infty)$  内任意取定的一点. 当  $x$  有增量  $\Delta x$  时, 对应的函数的增量为

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x,$$

由三角公式有

$$\sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

注意到

$$\left| \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \right| \leq 1,$$

就推得

$$|\Delta y| = |\sin(x + \Delta x) - \sin x| \leq 2 \left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right|.$$

因为对于任意的角度  $\alpha$ , 当  $\alpha \neq 0$  时有  $|\sin \alpha| < |\alpha|$ , 所以

$$0 \leq |\Delta y| = |\sin(x + \Delta x) - \sin x| < |\Delta x|.$$

因此, 当  $\Delta x \rightarrow 0$  时, 由夹逼准则得  $|\Delta y| \rightarrow 0$ . 这就证明了  $y = \sin x$  对于任一  $x \in (-\infty, +\infty)$  是连续的.

类似地可以证明, 函数  $y = \cos x$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  内是连续的.

## 二、函数的间断点

设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某去心邻域内有定义. 在此前提下, 如果函数  $f(x)$  有下列三种情形之一:

(1) 在  $x = x_0$  没有定义;

(2) 虽在  $x = x_0$  有定义, 但  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  不存在;

(3) 虽在  $x = x_0$  有定义, 且  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 但  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ ,

则函数  $f(x)$  在点  $x_0$  为不连续, 而点  $x_0$  称为函数  $f(x)$  的不连续点或间断点.

下面举例来说明函数间断点的几种常见类型.

**例 1** 正切函数  $y = \tan x$  在  $x = \frac{\pi}{2}$  处没有定义, 所以点  $x = \frac{\pi}{2}$  是函数  $\tan x$  的间断点. 因

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty,$$

我们称  $x = \frac{\pi}{2}$  为函数  $\tan x$  的无穷间断点(图 1-36).

**例 2** 函数  $y = \sin \frac{1}{x}$  在点  $x = 0$  没有定义; 当  $x \rightarrow 0$  时, 函数值在  $-1$  与  $+1$  之间变动无限多次(图 1-37), 所以点  $x = 0$  称为函数  $\sin \frac{1}{x}$  的振荡间断点.

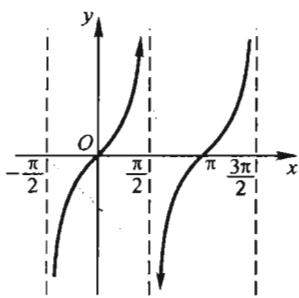


图 1-36

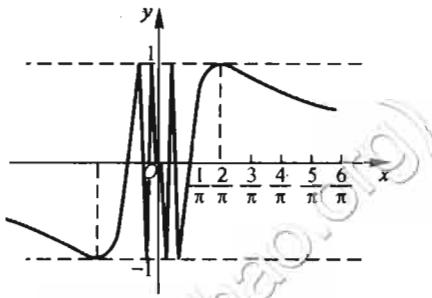


图 1-37

**例 3** 函数  $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  在点  $x = 1$  没有定义, 所以函数在点  $x = 1$  为不连续(图 1-38). 但这里

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

如果补充定义: 令  $x = 1$  时  $y = 2$ , 则所给函数在  $x = 1$  成为连续. 所以  $x = 1$  称为该函数的可去间断点.

**例 4** 函数

$$y = f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1, \\ \frac{1}{2}, & x = 1. \end{cases}$$

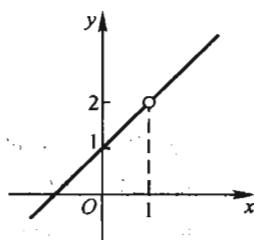


图 1-38

这里  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1$ , 但  $f(1) = \frac{1}{2}$ , 所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1).$$

因此, 点  $x = 1$  是函数  $f(x)$  的间断点(图 1-39). 但如果改变函数  $f(x)$  在  $x = 1$  处的定义: 令  $f(1) = 1$ , 则  $f(x)$  在  $x = 1$  成为连续. 所以  $x = 1$  也称为该函数的

可去间断点.

### 例 5 函数

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x + 1, & x > 0. \end{cases}$$

这里, 当  $x \rightarrow 0$  时,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 1) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1.$$

左极限与右极限虽都存在, 但不相等, 故极限  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在, 所以点  $x = 0$  是函数  $f(x)$  的间断点(图 1-40). 因  $y = f(x)$  的图形在  $x = 0$  处产生跳跃现象, 我们称  $x = 0$  为函数  $f(x)$  的跳跃间断点.

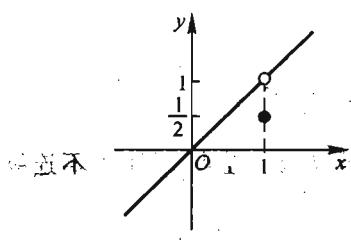


图 1-39

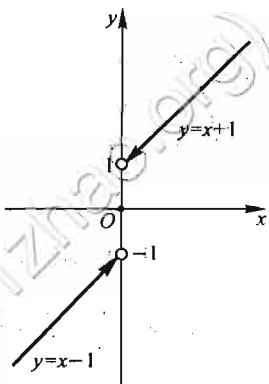


图 1-40

上面举了一些间断点的例子. 通常把间断点分成两类: 如果  $x_0$  是函数  $f(x)$  的间断点, 但左极限  $f(x_0^-)$  及右极限  $f(x_0^+)$  都存在, 那么  $x_0$  称为函数  $f(x)$  的第一类间断点. 不是第一类间断点的任何间断点, 称为第二类间断点. 在第一类间断点中, 左、右极限相等者称为可去间断点, 不相等者称为跳跃间断点. 无穷间断点和振荡间断点显然是第二类间断点.

### 习题 1-8

1. 设  $y = f(x)$  的图形如图 1-41 所示, 试指出  $f(x)$  的全部间断点, 并对可去间断点补充或修改函数值的定义, 使它成为连续点.

2. 研究下列函数的连续性,并画出函数的图形:

$$(1) f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2; \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x \leq 1, \\ 1, & x < -1 \text{ 或 } x > 1. \end{cases}$$

3. 下列函数在指出的点处间断,说明这些间断点属于哪一类.如果是可去间断点,则补充或改变函数的定义使它连续:

$$(1) y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}, x = 1, x = 2;$$

$$(2) y = \frac{x}{\tan x}, x = k\pi, x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots);$$

$$(3) y = \cos^2 \frac{1}{x}, x = 0;$$

$$(4) y = \begin{cases} x - 1, & x \leq 1, \\ 3 - x, & x > 1. \end{cases}$$

4. 讨论函数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{2^n}}{1 + x^{2^n}}$  的连续性,若有间断点,判别其类型.

5. 下列陈述中,哪些是对的,哪些是错的?如果是对的,说明理由;如果是错的,试给出一个反例.

(1) 如果函数  $f(x)$  在  $a$  连续,那么  $|f(x)|$  也在  $a$  连续;

(2) 如果函数  $|f(x)|$  在  $a$  连续,那么  $f(x)$  也在  $a$  连续.

6. 证明:若函数  $f(x)$  在点  $x_0$  连续且  $f(x_0) \neq 0$ ,则存在  $x_0$  的某一邻域  $U(x_0)$ ,当  $x \in U(x_0)$  时,  $f(x) \neq 0$ .

7. 设

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

证明:

(1)  $f(x)$  在  $x = 0$  连续;

(2)  $f(x)$  在非零的  $x$  处都不连续.

8. 试举出具有以下性质的函数  $f(x)$  的例子:

$x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}, \dots, \pm n, \pm \frac{1}{n}, \dots$  是  $f(x)$  的所有间断点,且它们都是无穷间断点.

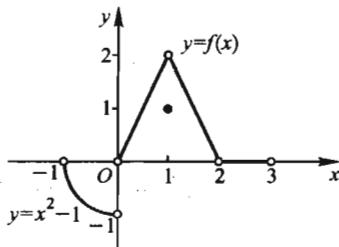


图 1-41

## 第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性

### 一、连续函数的和、差、积、商的连续性

由函数在某点连续的定义和极限的四则运算法则,立即可得出下面的定理.

**定理 1** 设函数  $f(x)$  和  $g(x)$  在点  $x_0$  连续, 则它们的和(差)  $f \pm g$ 、积  $f \cdot g$  及商  $\frac{f}{g}$  (当  $g(x_0) \neq 0$  时) 都在点  $x_0$  连续.

**例 1** 因  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ,  $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ , 而  $\sin x$  和  $\cos x$  都在区间  $(-\infty, +\infty)$  内连续(第八节), 故由定理 1 知  $\tan x$  和  $\cot x$  在它们的定义域内是连续的.

### 二、反函数与复合函数的连续性

反函数和复合函数的概念已经在第一节中讲过, 这里来讨论它们的连续性.

**定理 2** 如果函数  $y = f(x)$  在区间  $I_x$  上单调增加(或单调减少)且连续, 那么它的反函数  $x = f^{-1}(y)$  也在对应的区间  $I_y = \{y | y = f(x), x \in I_x\}$  上单调增加(或单调减少)且连续.

证明从略.

**例 2** 由于  $y = \sin x$  在闭区间  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  上单调增加且连续, 所以它的反函数  $y = \arcsin x$  在闭区间  $[-1, 1]$  上也是单调增加且连续的.

同样, 应用定理 2 可证,  $y = \arccos x$  在闭区间  $[-1, 1]$  上单调减少且连续;  $y = \arctan x$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  内单调增加且连续;  $y = \operatorname{arccot} x$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  内单调减少且连续.

总之, 反三角函数  $\arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x$  在它们的定义域内都是连续的.

**定理 3** 设函数  $y = f[g(x)]$  由函数  $u = g(x)$  与函数  $y = f(u)$  复合而成,  $\overset{\circ}{U}(x_0) \subset D_{f,g}$ . 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$ , 而函数  $y = f(u)$  在  $u = u_0$  连续, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0). \quad (1)$$

**证** 在第五节定理 6 中, 令  $A = f(u_0)$  (这时  $f(u)$  在点  $u_0$  连续), 并取消

“存在  $\delta_0 > 0$ , 当  $x \in U(x_0, \delta_0)$  时, 有  $g(x) \neq u_0$ ”这条件, 便得上面的定理. 这里  $g(x) \neq u_0$  这条件可以取消的理由是:  $\forall \epsilon > 0$ , 使  $g(x) = u_0$  成立的那些点  $x$ , 显然也使  $|f[g(x)] - f(u_0)| < \epsilon$  成立. 因此附加  $g(x) \neq u_0$  这条件就没有必要了.

因为在定理 3 中有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0, \quad \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0),$$

故(1)式又可写成

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = f[\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)]. \quad (2)$$

(1)式表示, 在定理 3 的条件下, 如果作代换  $u = g(x)$ , 那么求  $\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)]$  就化为求  $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$ , 这里  $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

(2)式表示, 在定理 3 的条件下, 求复合函数  $f[g(x)]$  的极限时, 函数符号  $f$  与极限号  $\lim_{x \rightarrow x_0}$  可以交换次序.

把定理 3 中的  $x \rightarrow x_0$  换成  $x \rightarrow \infty$ , 可得类似的定理.

例 3 求  $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}}$ .

解  $y = \sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}}$  可看作由  $y = \sqrt{u}$  与  $u = \frac{x-3}{x^2-9}$  复合而成. 因为  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{1}{6}$ ,

而函数  $y = \sqrt{u}$  在点  $u = \frac{1}{6}$  连续, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9}} = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

定理 4 设函数  $y = f[g(x)]$  是由函数  $u = g(x)$  与函数  $y = f(u)$  复合而成,  $U(x_0) \subset D_{f \circ g}$ . 若函数  $u = g(x)$  在  $x = x_0$  连续, 且  $g(x_0) = u_0$ , 而函数  $y = f(u)$  在  $u = u_0$  连续, 则复合函数  $y = f[g(x)]$  在  $x = x_0$  也连续.

证 只要在定理 3 中令  $u_0 = g(x_0)$ , 这就表示  $g(x)$  在点  $x_0$  连续, 于是由(1)式得

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = f(u_0) = f[g(x_0)],$$

这就证明了复合函数  $f[g(x)]$  在点  $x_0$  连续.

例 4 讨论函数  $y = \sin \frac{1}{x}$  的连续性.

解 函数  $y = \sin \frac{1}{x}$  可看作是由  $u = \frac{1}{x}$  及  $y = \sin u$  复合而成的.  $\frac{1}{x}$  当  $-\infty <$

$x < 0$  和  $0 < x < +\infty$  时是连续的,  $\sin u$  当  $-\infty < u < +\infty$  时是连续的. 根据定理 4, 函数  $\sin \frac{1}{x}$  在无限区间  $(-\infty, 0)$  和  $(0, +\infty)$  内是连续的.

### 三、初等函数的连续性

前面证明了三角函数及反三角函数在它们的定义域内是连续的.

我们指出(但不详细讨论), 指数函数  $a^x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) 对于一切实数  $x$  都有定义, 且在区间  $(-\infty, +\infty)$  内是单调的和连续的, 它的值域为  $(0, +\infty)$ .

由指数函数的单调性和连续性, 引用定理 2 可得: 对数函数  $\log_a x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) 在区间  $(0, +\infty)$  内单调且连续.

幂函数  $y = x^\mu$  的定义域随  $\mu$  的值而异, 但无论  $\mu$  为何值, 在区间  $(0, +\infty)$  内幂函数总是有定义的. 下面我们来证明, 在  $(0, +\infty)$  内幂函数是连续的. 事实上, 设  $x > 0$ , 则

$$y = x^\mu = a^{\mu \log_a x},$$

因此, 幂函数  $x^\mu$  可看作是由  $y = a^\mu$ ,  $u = \mu \log_a x$  复合而成的, 由此, 根据定理 4, 它在  $(0, +\infty)$  内连续. 如果对于  $\mu$  取各种不同值加以分别讨论, 可以证明(证明从略) 幂函数在它的定义域内是连续的.

综合起来得到: 基本初等函数在它们的定义域内都是连续的.

最后, 根据第一节中关于初等函数的定义, 由基本初等函数的连续性以及本节定理 1、定理 4 可得下列重要结论: 一切初等函数在其定义区间内都是连续的. 所谓定义区间, 就是包含在定义域内的区间.

根据函数  $f(x)$  在点  $x_0$  连续的定义, 如果已知  $f(x)$  在点  $x_0$  连续, 那么求  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  的极限时, 只要求  $f(x)$  在点  $x_0$  的函数值就行了. 因此, 上述关于初等函数连续性的结论提供了求极限的一个方法, 这就是: 如果  $f(x)$  是初等函数, 且  $x_0$  是  $f(x)$  的定义区间内的点, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

例如, 点  $x_0 = 0$  是初等函数  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$  的定义区间  $[-1, 1]$  内的点, 所以  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1} = 1$ ; 又如点  $x_0 = \frac{\pi}{2}$  是初等函数  $f(x) = \ln \sin x$  的一个定义区间  $(0, \pi)$  内的点, 所以

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln \sin x = \ln \sin \frac{\pi}{2} = 0.$$

例 5 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$ .

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+x^2} + 1)}{x(\sqrt{1+x^2} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2} + 1} = \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

例 6 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}$ .

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

例 7 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$ .

解 令  $a^x - 1 = t$ , 则  $x = \log_a(1+t)$ , 当  $x \rightarrow 0$  时  $t \rightarrow 0$ , 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \ln a.$$

例 8 求  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$ .

解 因为

$$(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}} = (1+2x)^{\frac{1}{\sin x} \cdot \frac{3}{2x} \cdot 6} = e^{6 \cdot \frac{3}{\sin x} \ln(1+2x)^{\frac{1}{2x}}},$$

利用定理 3 及极限的运算法则, 便有

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{3}{\sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left[ 6 \cdot \frac{3}{\sin x} \cdot \ln(1+2x)^{\frac{1}{2x}} \right]} = e^6.$$

一般的, 对于形如  $u(x)^{v(x)}$  ( $u(x) > 0, u(x) \neq 1$ ) 的函数(通常称为幂指函数), 如果

$$\lim u(x) = a > 0, \lim v(x) = b,$$

那么

$$\lim u(x)^{v(x)} = a^b.$$

注意: 这里三个  $\lim$  都表示在同一自变量变化过程中的极限.

## 习题 1-9

1. 求函数  $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 + x - 6}$  的连续区间, 并求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  及  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

2. 设函数  $f(x)$  与  $g(x)$  在点  $x_0$  连续, 证明函数

$$\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad \psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

在点  $x_0$  也连续.

3. 求下列极限:

- $$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 2x + 5}; \quad (2) \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2\alpha)^3;$$
- $$(3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \ln(2\cos 2x); \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x};$$
- $$(5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-4} - \sqrt{x}}{x-1}; \quad (6) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a};$$
- $$(7) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}).$$

4. 求下列极限：

- $$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} e^x; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{\sin x}{x};$$
- $$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3\tan^2 x)^{\cot^2 x}.$$
- $$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}; \quad (6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \sqrt{1+\sin^2 x} - x}.$$

5. 设  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上连续, 且  $f(x) \neq 0$ ,  $\varphi(x)$  在  $\mathbf{R}$  上有定义, 且有间断点, 则下列陈述中哪些是对的, 哪些是错的? 如果是对的, 说明理由; 如果是错的, 试给出一个反例.

- $$(1) \varphi[f(x)] \text{ 必有间断点;} \quad (2) [\varphi(x)]^2 \text{ 必有间断点;} \\ (3) f[\varphi(x)] \text{ 未必有间断点;} \quad (4) \frac{\varphi(x)}{f(x)} \text{ 必有间断点.}$$

6. 设函数

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ a + x, & x \geq 0. \end{cases}$$

应当怎样选择数  $a$ , 使得  $f(x)$  成为在  $(-\infty, +\infty)$  内的连续函数.

## 第十节 闭区间上连续函数的性质

第八节中已说明了函数在区间上连续的概念, 如果函数  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  内连续, 在右端点  $b$  左连续, 在左端点  $a$  右连续, 那么函数  $f(x)$  就是在闭区间  $[a, b]$  上连续的. 在闭区间上连续的函数有几个重要的性质, 今以定理的形式叙述它们.

### 一、有界性与最大值最小值定理

先说明最大值和最小值的概念. 对于在区间  $I$  上有定义的函数  $f(x)$ , 如果有  $x_0 \in I$ , 使得对于任一  $x \in I$  都有

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)),$$

则称  $f(x_0)$  是函数  $f(x)$  在区间  $I$  上的最大值(最小值).

例如,函数  $f(x) = 1 + \sin x$  在区间  $[0, 2\pi]$  上有最大值 2 和最小值 0. 又例如, 函数  $f(x) = \operatorname{sgn} x$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  内有最大值 1 和最小值 -1. 在开区间  $(0, +\infty)$  内,  $\operatorname{sgn} x$  的最大值和最小值都等于 1 (注意: 最大值和最小值可以相等!). 但函数  $f(x) = x$  在开区间  $(a, b)$  内既无最大值又无最小值. 下面的定理给出函数有界且最大值和最小值存在的充分条件.

**定理 1(有界性与最大值最小值定理)** 在闭区间上连续的函数在该区间上有界且一定能取得它的最大值和最小值.

这就是说, 如果函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 那么存在常数  $M > 0$ , 使得对任一  $x \in [a, b]$ , 满足  $|f(x)| \leq M$ ; 且至少有一点  $\xi_1$ , 使  $f(\xi_1)$  是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最大值; 又至少有一点  $\xi_2$ , 使  $f(\xi_2)$  是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最小值 (图 1-42).

这里不予证明.

**注意** 如果函数在开区间内连续, 或函数在闭区间上有间断点, 那么函数在该区间上不一定有界, 也不一定有最大值或最小值. 例如, 函数  $y = \tan x$  在开区间  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  内是连续的, 但它在开区间  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  内是无界的, 且既无最大值又无最小值; 又如, 函数

$$y = f(x) = \begin{cases} -x + 1, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ -x + 3, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

在闭区间  $[0, 2]$  上有间断点  $x = 1$ , 这函数  $f(x)$  在闭区间  $[0, 2]$  上虽然有界, 但是既无最大值又无最小值 (图 1-43).

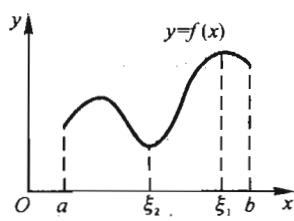


图 1-42

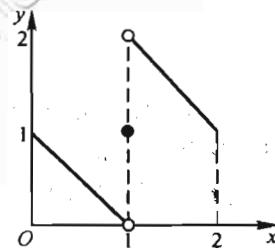


图 1-43

## 二、零点定理与介值定理

如果  $x_0$  使  $f(x_0) = 0$ , 则  $x_0$  称为函数  $f(x)$  的零点.

**定理 2(零点定理)** 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 且  $f(a)$  与  $f(b)$  异号 (即  $f(a) \cdot f(b) < 0$ ), 那么在开区间  $(a, b)$  内至少有一点  $\xi$ , 使

$$f(\xi) = 0.$$

这里不予证明.

从几何上看, 定理 2 表示: 如果连续曲线弧  $y = f(x)$  的两个端点位于  $x$  轴的不同侧, 那么这段曲线弧与  $x$  轴至少有一个交点 (图 1-44).

由定理 2 立即可推得下列较一般性的定理.

**定理 3(介值定理)** 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 且在这区间的端点取不同的函数值

$$f(a) = A \text{ 及 } f(b) = B,$$

那么, 对于  $A$  与  $B$  之间的任意一个数  $C$ , 在开区间  $(a, b)$  内至少有一点  $\xi$ , 使得

$$f(\xi) = C \quad (a < \xi < b).$$

证 设  $\varphi(x) = f(x) - C$ , 则  $\varphi(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 且  $\varphi(a) = A - C$  与  $\varphi(b) = B - C$  异号. 根据零点定理, 开区间  $(a, b)$  内至少有一点  $\xi$  使得

$$\varphi(\xi) = 0 \quad (a < \xi < b).$$

又  $\varphi(\xi) = f(\xi) - C$ , 因此由上式即得

$$f(\xi) = C \quad (a < \xi < b).$$

这定理的几何意义是: 连续曲线弧  $y = f(x)$  与水平直线  $y = C$  至少相交于一点(图 1-44).

**推论** 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值  $M$  与最小值  $m$  之间的任何值.

设  $m = f(x_1)$ ,  $M = f(x_2)$ , 而  $m \neq M$ , 在闭区间  $[x_1, x_2]$  (或  $[x_2, x_1]$ ) 上应用介值定理, 即得上述推论.

**例 1** 证明方程  $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$  在区间  $(0, 1)$  内至少有一个根.

证 函数  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$  在闭区间  $[0, 1]$  上连续, 又

$$f(0) = 1 > 0, \quad f(1) = -2 < 0.$$

根据零点定理, 在  $(0, 1)$  内至少有一点  $\xi$ , 使得

$$f(\xi) = 0,$$

即

$$\xi^3 - 4\xi^2 + 1 = 0 \quad (0 < \xi < 1).$$

这等式说明方程  $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$  在区间  $(0, 1)$  内至少有一个根是  $\xi$ .

### \* 三、一致连续性

我们先介绍函数的一致连续性概念.

设函数在区间  $I$  上连续,  $x_0$  是在  $I$  上任意取定的一个点. 由于  $f(x)$  在点  $x_0$  连续, 因此  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 使得当  $|x - x_0| < \delta$  时, 就有  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ . 通常这个  $\delta$  不仅与  $\epsilon$  有关, 而且与所取定的  $x_0$  有关, 即使  $\epsilon$  不变, 但选取区间  $I$

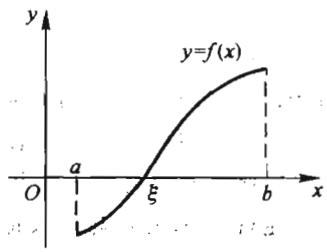


图 1-44

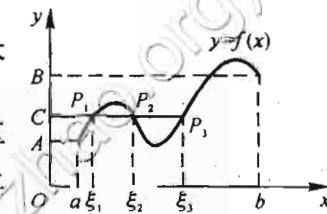


图 1-45

上的其他点作为  $x_0$  时, 这个  $\delta$  就不一定适用了. 可是对于某些函数, 却有这样一种重要情形: 存在着只与  $\epsilon$  有关, 而对区间  $I$  上任何点  $x_0$  都能适用的正数  $\delta$ , 即对任何  $x_0 \in I$ , 只要  $|x - x_0| < \delta$  时, 就有  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ . 如果函数  $f(x)$  在区间  $I$  上能使这种情形发生, 就说函数  $f(x)$  在区间  $I$  上是一致连续的.

**定义** 设函数  $f(x)$  在区间  $I$  上有定义. 如果对于任意给定的正数  $\epsilon$ , 总存在着正数  $\delta$ , 使得对于区间  $I$  上的任意两点  $x_1, x_2$ , 当  $|x_1 - x_2| < \delta$  时, 就有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon,$$

那么称函数  $f(x)$  在区间  $I$  上是一致连续的.

一致连续性表示, 不论在区间  $I$  的任何部分, 只要自变量的两个数值接近到一定程度, 就可使对应的函数值达到所指定的接近程度.

由上述定义可知, 如果函数  $f(x)$  在区间  $I$  上一致连续, 那么  $f(x)$  在区间  $I$  上也是连续的. 但反过来不一定成立, 举例说明如下:

**例 2** 函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  在区间  $(0, 1]$  上是连续的, 但不是一致连续的.

因为函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  是初等函数, 它在区间  $(0, 1]$  上有定义, 所以在  $(0, 1]$  上是连续的.

$\forall \epsilon > 0$  ( $0 < \epsilon < 1$ ), 假定  $f(x) = \frac{1}{x}$  在  $(0, 1]$  上一致连续, 应该  $\exists \delta > 0$ , 使得对于  $(0, 1]$  上的任意两个值  $x_1, x_2$ , 当  $|x_1 - x_2| < \delta$  时, 就有  $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ .

现在取原点附近的两点

$$x_1 = \frac{1}{n}, \quad x_2 = \frac{1}{n+1},$$

其中  $n$  为正整数, 这样的  $x_1, x_2$  显然在  $(0, 1]$  上. 因

$$|x_1 - x_2| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{n(n+1)},$$

故只要  $n$  取得足够大, 总能使  $|x_1 - x_2| < \delta$ . 但这时有

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \frac{1}{\frac{1}{n}} - \frac{1}{\frac{1}{n+1}} \right| = |n - (n+1)| = 1 > \epsilon,$$

不符合一致连续的定义, 所以  $f(x) = \frac{1}{x}$  在  $(0, 1]$  上不是一致连续的.

上例说明, 在半开区间上连续的函数不一定在该区间上一致连续. 但是, 有下面的定理:

**定理 4(一致连续性定理)** 如果函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 那么它

在该区间上一致连续.

这里不予证明.

## 习 题 1-10

1. 假设函数  $f(x)$  在闭区间  $[0,1]$  上连续, 并且对  $[0,1]$  上任一点  $x$  有  $0 \leq f(x) \leq 1$ . 试证明  $[0,1]$  中必存在一点  $c$ , 使得  $f(c) = c$  ( $c$  称为函数  $f(x)$  的不动点).
2. 证明方程  $x^5 - 3x = 1$  至少有一个根介于 1 和 2 之间.
3. 证明方程  $x = a \sin x + b$ , 其中  $a > 0, b > 0$ , 至少有一个正根, 并且它不超过  $a + b$ .
4. 设函数  $f(x)$  对于闭区间  $[a, b]$  上的任意两点  $x, y$ , 恒有  $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ , 其中  $L$  为正常数, 且  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . 证明: 至少有一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f(\xi) = 0$ .
5. 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$  ( $n \geq 3$ ), 则在  $(x_1, x_n)$  内至少有一点  $\xi$ , 使  $f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$ .
6. 证明: 若  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  存在, 则  $f(x)$  必在  $(-\infty, +\infty)$  内有界.
7. 在什么条件下,  $(a, b)$  内的连续函数  $f(x)$  为一致连续?

## 总习题一

1. 在“充分”、“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内:

- (1) 数列  $\{x_n\}$  有界是数列  $\{x_n\}$  收敛的 \_\_\_\_\_ 条件. 数列  $\{x_n\}$  收敛是数列  $\{x_n\}$  有界的 \_\_\_\_\_ 条件.
- (2)  $f(x)$  在  $x_0$  的某一去心邻域内有界是  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在的 \_\_\_\_\_ 条件.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在是  $f(x)$  在  $x_0$  的某一去心邻域内有界的 \_\_\_\_\_ 条件.
- (3)  $f(x)$  在  $x_0$  的某一去心邻域内无界是  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  的 \_\_\_\_\_ 条件.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  是  $f(x)$  在  $x_0$  的某一去心邻域内无界的 \_\_\_\_\_ 条件.
- (4)  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的右极限  $f(x_0^+)$  及左极限  $f(x_0^-)$  都存在且相等是  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在的 \_\_\_\_\_ 条件.

2. 已知函数

$$f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{-x^2}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

在  $x = 0$  连续, 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

3. 选择以下两题中给出的四个结论中一个正确的结论.

- (1) 设  $f(x) = 2^x + 3^x - 2$ , 则当  $x \rightarrow 0$  时, 有 ( ) .

- (A)  $f(x)$  与  $x$  是等价无穷小.      (B)  $f(x)$  与  $x$  同阶但非等价无穷小.  
 (C)  $f(x)$  是比  $x$  高阶的无穷小.      (D)  $f(x)$  是比  $x$  低阶的无穷小.

(2) 设

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1},$$

则  $x=0$  是  $f(x)$  的( ).

- (A) 可去间断点.      (B) 跳跃间断点.  
 (C) 第二类间断点.      (D) 连续点.

4. 设  $f(x)$  的定义域是  $[0, 1]$ , 求下列函数的定义域:

- (1)  $f(e^x)$ ;      (2)  $f(\ln x)$ ;  
 (3)  $f(\arctan x)$ ;      (4)  $f(\cos x)$ .

5. 设

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & x > 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ -x^2, & x > 0, \end{cases}$$

求  $f[f(x)]$ ,  $g[g(x)]$ ,  $f[g(x)]$ ,  $g[f(x)]$ .

6. 利用  $y = \sin x$  的图形作出下列函数的图形:

- (1)  $y = |\sin x|$ ;      (2)  $y = \sin |x|$ ;      (3)  $y = 2\sin \frac{x}{2}$ .

7. 把半径为  $R$  的一圆形铁皮, 自中心处剪去中心角为  $\alpha$  的一扇形后围成一无底圆锥. 试将这圆锥的体积表为  $\alpha$  的函数.

8. 根据函数极限的定义证明  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = 5$ .

9. 求下列极限:

- (1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 1}{(x - 1)^2}$  ;      (2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$  ;  
 (3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$  ;      (4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$  ;  
 (5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$  ( $a > 0, b > 0, c > 0$ );      (6)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$ .

10. 设

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ a + x^2 & x \leq 0, \end{cases}$$

要使  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 应当怎样选择数  $a$ ?

11. 设

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}}, & x > 0, \\ \ln(1+x), & -1 < x \leq 0, \end{cases}$$

求  $f(x)$  的间断点, 并说明间断点所属类型.

12. 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right) = 1.$$

13. 证明方程  $\sin x + x + 1 = 0$  在开区间  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  内至少有一个根.

14. 如果存在直线  $L: y = kx + b$ , 使得当  $x \rightarrow \infty$  (或  $x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$ ) 时, 曲线  $y = f(x)$  上的动点  $M(x, y)$  到直线  $L$  的距离  $d(M, L) \rightarrow 0$ , 则称  $L$  为曲线  $y = f(x)$  的渐近线. 当直线  $L$  的斜率  $k \neq 0$  时, 称  $L$  为斜渐近线.

(1) 证明: 直线  $L: y = kx + b$  为曲线  $y = f(x)$  的渐近线的充分必要条件是

$$k = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (x \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty)}} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (x \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty)}} [f(x) - kx].$$

(2) 求曲线  $y = (2x - 1)e^{\frac{1}{x}}$  的斜渐近线.

## 第二章 导数与微分

微分学是微积分的重要组成部分,它的基本概念是导数与微分.

本章中,我们主要讨论导数和微分的概念以及它们的计算方法.至于导数的应用,将在第三章讨论.

### 第一节 导数概念

#### 一、引例

为了说明微分学的基本概念——导数,我们先讨论两个问题:速度问题和切线问题.这两个问题在历史上都与导数概念的形成有密切的关系.

##### 1. 直线运动的速度

设某点沿直线运动.在直线上引入原点和单位点(即表示实数1的点),使直线成为数轴.此外,再取定一个时刻作为测量时间的零点.设动点于时刻 $t$ 在直线上的位置的坐标为 $s$ (简称位置 $s$ ).这样,该点的运动完全由某个函数

$$s = f(t)$$

所确定.此函数对运动过程中所出现的 $t$ 值有定义,称为位置函数.在最简单的情形,该动点所经过的路程与所花的时间成正比.就是说,无论取哪一段时间间隔,比值

$$\frac{\text{经过的路程}}{\text{所花的时间}} \quad (1)$$

总是相同的.这个比值就称为该动点的速度,并说该点作匀速运动.如果运动不是匀速的,那么在运动的不同时间间隔内,比值(1)会有不同的值.这样,把比值(1)笼统地称为该动点的速度就不合适了,而需要按不同时刻来考虑.那么,这种非匀速运动的动点在某一时刻(设为 $t_0$ )的速度应如何理解而又如何求得呢?

首先取从时刻 $t_0$ 到 $t$ 这样一个时间间隔,在这段时间内,动点从位置 $s_0 = f(t_0)$ 移动到 $s = f(t)$ .这时由(1)式算得的比值

$$\frac{s - s_0}{t - t_0} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \quad (2)$$

可认为是动点在上述时间间隔内的平均速度.如果时间间隔选得较短,这个比值(2)在实践中也可用以说明动点在时刻 $t_0$ 的速度.但对于动点在时刻 $t_0$ 的速度

的精确概念来说,这样做是不够的,而更确切地应当这样:令  $t \rightarrow t_0$ , 取(2)式的极限,如果这个极限存在,设为  $v$ , 即

$$v = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0},$$

这时就把这个极限值  $v$  称为动点在时刻  $t_0$  的(瞬时)速度.

## 2. 切线问题

圆的切线可定义为“与曲线只有一个交点的直线”.但是对于其他曲线,用“与曲线只有一个交点的直线”作为切线的定义就不一定合适.例如,对于抛物线  $y = x^2$ , 在原点  $O$  处两个坐标轴都符合上述定义,但实际上只有  $x$  轴是该抛物线在点  $O$  处的切线.下面给出切线的定义.

设有曲线  $C$  及  $C$  上的一点  $M$  (图 2-1),在点  $M$  外另取  $C$  上一点  $N$ ,作割线  $MN$ .当点  $N$  沿曲线  $C$  趋于点  $M$  时,如果割线  $MN$  绕点  $M$  旋转而趋于极限位置  $MT$ ,直线  $MT$  就称为曲线  $C$  在点  $M$  处的切线.这里极限位置的含义是:只要弦长  $|MN|$  趋于零,  $\angle NMT$  也趋于零.

现在就曲线  $C$  为函数  $y = f(x)$  的图形的情形来讨论切线问题.设  $M(x_0, y_0)$  是曲线  $C$  上的一个点(图 2-2),则  $y_0 = f(x_0)$ .根据上述定义要定出曲线  $C$  在点  $M$  处的切线,只要定出切线的斜率就行了.为此,在点  $M$  外另取  $C$  上的一点  $N(x, y)$ ,于是割线  $MN$  的斜率为

$$\tan \varphi = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

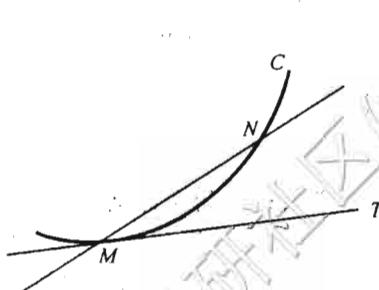


图 2-1

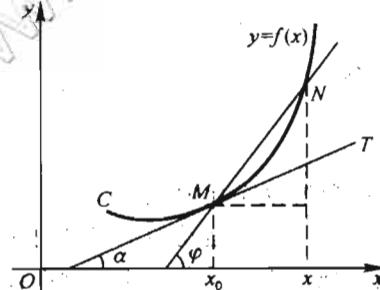


图 2-2

其中  $\varphi$  为割线  $MN$  的倾角.当点  $N$  沿曲线  $C$  趋于点  $M$  时,  $x \rightarrow x_0$ .如果当  $x \rightarrow x_0$  时,上式的极限存在,设为  $k$ ,即

$$k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在,则此极限  $k$  是割线斜率的极限,也就是切线的斜率.这里  $k = \tan \alpha$ ,其中  $\alpha$

是切线  $MT$  的倾角. 于是, 通过点  $M(x_0, f(x_0))$  且以  $k$  为斜率的直线  $MT$  便是曲线  $C$  在点  $M$  处的切线. 事实上, 由  $\angle NMT = \varphi - \alpha$  以及  $x \rightarrow x_0$  时  $\varphi \rightarrow \alpha$ , 可见  $x \rightarrow x_0$  时(这时  $|MN| \rightarrow 0$ ),  $\angle NMT \rightarrow 0$ . 因此直线  $MT$  确为曲线  $C$  在点  $M$  处的切线.

二、  
二、导数的定义

### 1. 函数在一点处的导数与导函数

从上面所讨论的两个问题看出, 非匀速直线运动的速度和切线的斜率都归结为如下的极限:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad (3)$$

这里  $x - x_0$  和  $f(x) - f(x_0)$  分别是函数  $y = f(x)$  的自变量的增量  $\Delta x$  和函数的增量  $\Delta y$ :

$$\Delta x = x - x_0,$$

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

因  $x \rightarrow x_0$  相当于  $\Delta x \rightarrow 0$ , 故(3)式也可写成

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{或} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

在自然科学和工程技术领域内, 还有许多概念, 例如电流强度、角速度、线密度等等, 都可归结为形如(3)式的数学形式. 我们撇开这些量的具体意义, 抓住它们在数量关系上的共性, 就得出函数的导数概念.

**定义** 设函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  的某个邻域内有定义, 当自变量  $x$  在  $x_0$  处取得增量  $\Delta x$  (点  $x_0 + \Delta x$  仍在该邻域内) 时, 相应的函数取得增量  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ; 如果  $\Delta y$  与  $\Delta x$  之比当  $\Delta x \rightarrow 0$  时的极限存在, 则称函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处可导, 并称这个极限为函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处的导数, 记为  $f'(x_0)$ , 即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad (4)$$

也可记作  $y'|_{x=x_0}$ ,  $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0}$  或  $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$ .

函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处可导有时也说成  $f(x)$  在点  $x_0$  具有导数或导数存在.

导数的定义式(4)也可取不同的形式, 常见的有

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (5)$$

和

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (6)$$

(5)式中的  $h$  即自变量的增量  $\Delta x$ .

在实际中,需要讨论各种具有不同意义的变量的变化“快慢”问题,在数学上就是所谓函数的变化率问题.导数概念就是函数变化率这一概念的精确描述.它撇开了自变量和因变量所代表的几何或物理等方面的特殊意义,纯粹从数量方面来刻画变化率的本质:因变量增量与自变量增量之比  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  是因变量  $y$  在以  $x_0$  和  $x_0 + \Delta x$  为端点的区间上的平均变化率,而导数  $f'(x_0)$  则是因变量  $y$  在点  $x_0$  处的变化率,它反映了因变量随自变量的变化而变化的快慢程度.

如果极限(4)不存在,就说函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处不可导.如果不可导的原因是由于  $\Delta x \rightarrow 0$  时,比式  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \infty$ ,为了方便起见,也往往说函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处的导数为无穷大.

上面讲的是函数在一点处可导.如果函数  $y = f(x)$  在开区间  $I$  内的每点处都可导,就称函数  $f(x)$  在开区间  $I$  内可导.这时,对于任一  $x \in I$ ,都对应着  $f(x)$  的一个确定的导数值.这样就构成了一个新的函数,这个函数叫做原来函数  $y = f(x)$  的导函数,记作  $y'$ ,  $f'(x)$ ,  $\frac{dy}{dx}$  或  $\frac{df(x)}{dx}$ .

在(4)式或(5)式中把  $x_0$  换成  $x$ ,即得导函数的定义式

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

或

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

注意 在以上两式中,虽然  $x$  可以取区间  $I$  内的任何数值,但在极限过程中, $x$  是常量,  $\Delta x$  或  $h$  是变量.

显然,函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处的导数  $f'(x_0)$  就是导函数  $f'(x)$  在点  $x = x_0$  处的函数值,即

$$f'(x_0) = f'(x)|_{x=x_0}.$$

导函数  $f'(x)$  简称导数,而  $f'(x_0)$  是  $f(x)$  在  $x_0$  处的导数或导数  $f'(x)$  在  $x_0$  处的值.

## 2. 求导数举例

下面根据导数定义求一些简单函数的导数.

例 1 求函数  $f(x) = C$  ( $C$  为常数) 的导数.

解  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C - C}{h} = 0,$

即

$$(C)' = 0.$$

这就是说, 常数的导数等于零.

例 2 求函数  $f(x) = x^n$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ ) 在  $x = a$  处的导数.

解  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$   
 $= \lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-1}) = na^{n-1}.$

把以上结果中的  $a$  换成  $x$  得  $f'(x) = nx^{n-1}$ , 即

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

更一般的, 对于幂函数  $y = x^\mu$  ( $\mu$  为常数), 有

$$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}.$$

这就是幂函数的导数公式. 这公式的证明将在以后讨论. 利用这公式, 可以很方便地求出幂函数的导数, 例如:

当  $\mu = \frac{1}{2}$  时,  $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$  ( $x > 0$ ) 的导数为

$$(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}},$$

即

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

当  $\mu = -1$  时,  $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$  ( $x \neq 0$ ) 的导数为

$$(x^{-1})' = (-1)x^{-1-1} = -x^{-2},$$

即

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

例 3 求函数  $f(x) = \sin x$  的导数.

解  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot 2 \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x,$

即

$$(\sin x)' = \cos x.$$

这就是说, 正弦函数的导数是余弦函数.

用类似的方法,可求得

$$(\cos x)' = -\sin x,$$

也就是说,余弦函数的导数是负的正弦函数.

例 4 求函数  $f(x) = a^x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) 的导数.

$$\begin{aligned} \text{解 } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \\ &= a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}. \end{aligned}$$

利用第一章第九节例 7 的结果得

$$f'(x) = a^x \ln a,$$

即

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

这就是指数函数的导数公式. 特殊地, 当  $a = e$  时, 因  $\ln e = 1$ , 故有

$$(e^x)' = e^x.$$

上式表明, 以  $e$  为底的指数函数的导数就是它自己, 这是以  $e$  为底的指数函数的一个重要特性.

例 5 求函数  $f(x) = \log_a x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) 的导数.

$$\begin{aligned} \text{解 } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \frac{x+h}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}. \end{aligned}$$

作代换  $u = \frac{h}{x}$  并利用第一章第九节例 6 的结果得

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln a},$$

即

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

这就是对数函数的导数公式. 特殊地, 当  $a = e$  时, 由上式得自然对数函数的导数公式

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

例 6 求函数  $f(x) = |x|$  在  $x = 0$  处的导数.

$$\text{解 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}.$$

当  $h < 0$  时,  $\frac{|h|}{h} = -1$ , 故  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$ ;

当  $h > 0$  时,  $\frac{|h|}{h} = 1$ , 故  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$ .

所以,  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$  不存在, 即函数  $f(x) = |x|$  在  $x=0$  处不可导.

### 3. 单侧导数

根据函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处的导数  $f'(x_0)$  的定义, 导数

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

是一个极限, 而极限存在的充分必要条件是左、右极限都存在且相等, 因此  $f'(x_0)$  存在即  $f(x)$  在点  $x_0$  处可导的充分必要条件是左、右极限

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{及} \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

都存在且相等. 这两个极限分别称为函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处的左导数和右导数, 记作  $f'_-(x_0)$  及  $f'_+(x_0)$ , 即

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

现在可以说, 函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处可导的充分必要条件是左导数  $f'_-(x_0)$  和右导数  $f'_+(x_0)$  都存在且相等.

函数  $f(x) = |x|$  在  $x=0$  处的左导数  $f'_-(0) = -1$  及右导数  $f'_+(0) = 1$  虽然都存在, 但不相等, 故  $f(x) = |x|$  在  $x=0$  处不可导.

左导数和右导数统称为单侧导数.

如果函数  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  内可导, 且  $f'_+(a)$  及  $f'_-(b)$  都存在, 就说  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上可导.

### 三、导数的几何意义

由第一目中切线问题的讨论以及第二目中导数的定义可知: 函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处的导数  $f'(x_0)$  在几何上表示曲线  $y = f(x)$  在点  $M(x_0, f(x_0))$  处的切线的斜率, 即

$$f'(x_0) = \tan \alpha,$$

其中  $\alpha$  是切线的倾角(图 2-3).

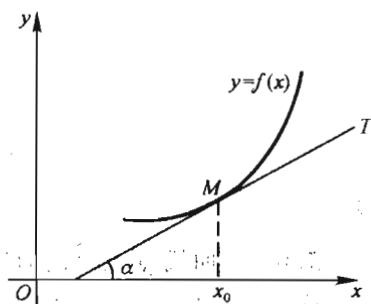


图 2-3

如果  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处的导数为无穷大, 这时曲线  $y = f(x)$  的割线以垂直于  $x$  轴的直线  $x = x_0$  为极限位置, 即曲线  $y = f(x)$  在点  $M(x_0, f(x_0))$  处具有垂直于  $x$  轴的切线  $x = x_0$  (参看后面例 9).

根据导数的几何意义并应用直线的点斜式方程, 可知曲线  $y = f(x)$  在点  $M(x_0, y_0)$  处的切线方程为

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

过切点  $M(x_0, y_0)$  且与切线垂直的直线叫做曲线  $y = f(x)$  在点  $M$  处的法线. 如果  $f'(x_0) \neq 0$ , 法线的斜率为  $-\frac{1}{f'(x_0)}$ , 从而法线方程为

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

**例 7** 求等边双曲线  $y = \frac{1}{x}$  在点  $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$  处的切线的斜率, 并写出在该点处的切线方程和法线方程.

解 根据导数的几何意义知道, 所求切线的斜率为

$$k_1 = y' \Big|_{x=\frac{1}{2}}.$$

由于  $y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ , 于是

$$k_1 = -\frac{1}{x^2} \Big|_{x=\frac{1}{2}} = -4.$$

从而所求切线方程为

$$y - 2 = -4\left(x - \frac{1}{2}\right),$$

即

$$4x + y - 4 = 0.$$

所求法线的斜率为

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} = \frac{1}{4},$$

于是所求法线方程为

$$y - 2 = \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right),$$

即

$$2x - 8y + 15 = 0.$$

**例 8** 求曲线  $y = x^{\frac{3}{2}}$  的通过点  $(0, -4)$  的切线方程.

解 设切点为  $(x_0, y_0)$ , 则切线的斜率为

$$f'(x_0) = \frac{3}{2}\sqrt{x} \Big|_{x=x_0} = \frac{3}{2}\sqrt{x_0}.$$

于是所求切线方程可设为

$$y - y_0 = \frac{3}{2} \sqrt{x_0} (x - x_0). \quad (7)$$

切点  $(x_0, y_0)$  在曲线  $y = x^{\frac{3}{2}}$  上, 故有

$$y_0 = x_0^{\frac{3}{2}}, \quad (8)$$

切线(7)通过点  $(0, -4)$ , 故有

$$-4 - y_0 = \frac{3}{2} \sqrt{x_0} (0 - x_0). \quad (9)$$

求得方程(8)及(9)组成的方程组的解为  $x_0 = 4, y_0 = 8$ , 代入(7)式并化简, 即得所求切线方程为

$$3x - y - 4 = 0.$$

#### 四、函数可导性与连续性的关系

设函数  $y = f(x)$  在点  $x$  处可导, 即

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

存在. 由具有极限的函数与无穷小的关系知道,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

其中  $\alpha$  为当  $\Delta x \rightarrow 0$  时的无穷小. 上式两边同乘以  $\Delta x$ , 得

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x.$$

由此可见, 当  $\Delta x \rightarrow 0$  时,  $\Delta y \rightarrow 0$ . 这就是说, 函数  $y = f(x)$  在点  $x$  处是连续的. 所以, 如果函数  $y = f(x)$  在点  $x$  处可导, 则函数在该点必连续.

另一方面, 一个函数在某点连续却不一定在该点可导. 举例说明如下:

**例 9** 函数  $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 但在点  $x = 0$  处不可导. 这是因为在点  $x = 0$  处有

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt[3]{h} - 0}{h} = \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}},$$

因而,  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} = +\infty$ , 即导数为无穷大(注意, 导数不存在). 这事实在图形中表现为曲线  $y = \sqrt[3]{x}$  在原点  $O$  具有垂直于  $x$  轴的切线  $x = 0$  (图 2-4).

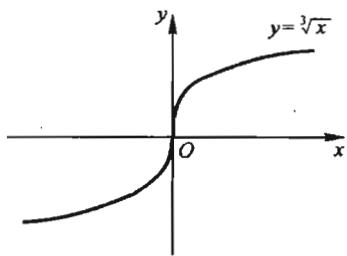


图 2-4

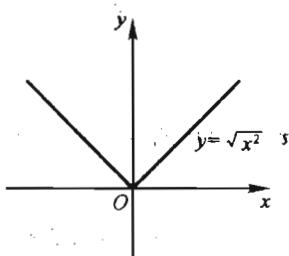


图 2-5

**例 10** 函数  $y = \sqrt{x^2}$  (即  $y = |x|$ ) 在  $(-\infty, +\infty)$  内连续,但在例 6 中已经看到,这函数在  $x = 0$  处不可导. 曲线  $y = \sqrt{x^2}$  在原点  $O$  没有切线(图 2-5).

由以上讨论可知,函数在某点连续是函数在该点可导的必要条件,但不是充分条件.

### 习题 2-1

1. 设物体绕定轴旋转,在时间间隔  $[0, t]$  内转过角度  $\theta$ ,从而转角  $\theta$  是  $t$  的函数:  $\theta = \theta(t)$ . 如果旋转是匀速的,那么称  $\omega = \frac{\theta}{t}$  为该物体旋转的角速度. 如果旋转是非匀速的,应怎样确定该物体在时刻  $t_0$  的角速度?

2. 当物体的温度高于周围介质的温度时,物体就不断冷却. 若物体的温度  $T$  与时间  $t$  的函数关系为  $T = T(t)$ ,应怎样确定该物体在时刻  $t$  的冷却速度?

3. 设某工厂生产  $x$  件产品的成本为

$$C(x) = 2000 + 100x - 0.1x^2 \text{ (元)},$$

这函数  $C(x)$  称为成本函数,成本函数  $C(x)$  的导数  $C'(x)$  在经济学中称为边际成本. 试求

(1) 当生产 100 件产品时的边际成本;

(2) 生产第 101 件产品的成本,并与(1)中求得的边际成本作比较,说明边际成本的实际意义.

4. 设  $f(x) = 10x^2$ , 试按定义求  $f'(-1)$ .

5. 证明  $(\cos x)' = -\sin x$ .

6. 下列各题中均假定  $f'(x_0)$  存在,按照导数定义观察下列极限,指出  $A$  表示什么:

$$(1) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A, \text{ 其中 } f(0) = 0, \text{ 且 } f'(0) \text{ 存在};$$

$$(3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h} = A.$$

以下两题中,选择给出的四个结论中一个正确的结论:

## 7. 设函数

共曲线题

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x^3, & x \leq 1, \\ x^2, & x > 1, \end{cases}$$

则  $f(x)$  在  $x=1$  处的( )

- (A) 左、右导数都存在. (B) 左导数存在, 右导数不存在.  
 (C) 左导数不存在, 右导数存在. (D) 左、右导数都不存在.

8. 设  $f(x)$  可导,  $F(x) = f(x)(1 + \sin x)$ , 则  $f(0) = 0$  是  $F(x)$  在  $x = 0$  处可导的( ).

- (A) 充分必要条件. (B) 充分条件但非必要条件.  
 (C) 必要条件但非充分条件. (D) 既非充分条件又非必要条件.

9. 求下列函数的导数:

(1)  $y = x^4$ ; (2)  $y = \sqrt[3]{x^2}$ ; (3)  $y = x^{1.6}$ ;

(4)  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ; (5)  $y = \frac{1}{x^2}$ ; (6)  $y = x^3 \sqrt[5]{x}$ ;

(7)  $y = \frac{x^2 \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^5}}$ .

10. 已知物体的运动规律为  $s = t^3$  (m), 求这物体在  $t=2$  (s) 时的速度.11. 如果  $f(x)$  为偶函数, 且  $f'(0)$  存在, 证明  $f'(0) = 0$ .12. 求曲线  $y = \sin x$  在具有下列横坐标的各点处切线的斜率:

$x = \frac{2}{3}\pi; \quad x = \pi.$

13. 求曲线  $y = \cos x$  上点  $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$  处的切线方程和法线方程.14. 求曲线  $y = e^x$  在点  $(0, 1)$  处的切线方程.15. 在抛物线  $y = x^2$  上取横坐标为  $x_1 = 1$  及  $x_2 = 3$  的两点, 作过这两点的割线. 问该抛物线上哪一点的切线平行于这条割线?16. 讨论下列函数在  $x=0$  处的连续性与可导性:

(1)  $y = |\sin x|$ ;

(2)  $y = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

17. 设函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ ax + b, & x > 1. \end{cases}$$

为了使函数  $f(x)$  在  $x=1$  处连续且可导,  $a$ 、 $b$  应取什么值?18. 已知  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$  求  $f'_+(0)$  及  $f'_{-}(0)$ , 又  $f'(0)$  是否存在?19. 已知  $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0, \end{cases}$  求  $f'(x)$ .

20. 证明: 双曲线  $xy = a^2$  上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形的面积都等于  $2a^2$ .

## 第二节 函数的求导法则

在本节中, 将介绍求导数的几个基本法则以及前一节中未讨论过的几个基本初等函数的导数公式. 借助于这些法则和基本初等函数的导数公式, 就能比较方便地求出常见的初等函数的导数.

### 一、函数的和、差、积、商的求导法则

定理 1 如果函数  $u = u(x)$  及  $v = v(x)$  都在点  $x$  具有导数, 那么它们的和、差、积、商(除分母为零的点外)都在点  $x$  具有导数, 且

- (1)  $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x);$   
(2)  $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x);$   
(3)  $\left[ \frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \quad (v(x) \neq 0).$

证

(1)  $[u(x) \pm v(x)]'$   
 $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x) \pm v(x + \Delta x)] - [u(x) \pm v(x)]}{\Delta x}$   
 $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) + v(x)}{\Delta x}$   
 $= u'(x) \pm v'(x).$

于是法则(1)获得证明. 法则(1)可简单地表示为

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

(2)  $[u(x)v(x)]'$   
 $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x}$   
 $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right]$   
 $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x) + u(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}$   
 $= u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$

其中  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x) = v(x)$  是由于  $v'(x)$  存在, 故  $v(x)$  在点  $x$  连续. 于是法则(2)获得证明. 法则(2)可简单地表示为

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \left[ \frac{u(x)}{v(x)} \right]' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x + \Delta x)v(x) - u(x)v(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)v(x)}}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x) - u(x)]v(x) - u(x)[v(x + \Delta x) - v(x)]}{v(x)v(x)\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}v(x) - u(x)\frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}}{v(x)v(x)} \\
 &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.
 \end{aligned}$$

于是法则(3)获得证明. 法则(3)可简单地表示为

$$\left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

定理1中的法则(1)、(2)可推广到任意有限个可导函数的情形. 例如, 设  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$ ,  $w = w(x)$  均可导, 则有

$$(u + v - w)' = u' + v' - w',$$

$$(uvw)' = [(uv)w]' = (uv)'w + (uv)w' = (u[v + uv'])w + uvw',$$

即

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

在法则(2)中, 当  $v(x) = C$  ( $C$  为常数)时, 有

$$(Cu)' = Cu'.$$

**例1**  $y = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 7$ , 求  $y'$ .

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad y' &= (2x^3 - 5x^2 + 3x - 7)' \\
 &= (2x^3)' - (5x^2)' + (3x)' - (7)' \\
 &= 2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 3 - 0 = 6x^2 - 10x + 3.
 \end{aligned}$$

**例2**  $f(x) = x^3 + 4\cos x - \sin \frac{\pi}{2}$ , 求  $f'(x)$  及  $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .

**解**  $f'(x) = 3x^2 - 4\sin x$ ,

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{4}\pi^2 - 4.$$

**例3**  $y = e^x (\sin x + \cos x)$ , 求  $y'$ .

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad y' &= (e^x)'(\sin x + \cos x) + e^x(\sin x + \cos x)' \\
 &= e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) \\
 &= 2e^x \cos x.
 \end{aligned}$$

例 4  $y = \tan x$ , 求  $y'$ .

解  $y' = (\tan x)' = \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)'$   
 $= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x}$   
 $= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x,$

即

$$(\tan x)' = \sec^2 x.$$

这就是正切函数的导数公式.

例 5  $y = \sec x$ , 求  $y'$ .

解  $y' = (\sec x)' = \left( \frac{1}{\cos x} \right)'$   
 $= \frac{(1)' \cos x - 1 \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x}$   
 $= \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x,$

即

$$(\sec x)' = \sec x \tan x.$$

这就是正割函数的导数公式.

用类似方法, 还可求得余切函数及余割函数的导数公式

$$(\cot x)' = -\csc^2 x,$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x.$$

## 二、反函数的求导法则

定理 2 如果函数  $x = f(y)$  在区间  $I_y$  内单调、可导且  $f'(y) \neq 0$ , 则它的反函数  $y = f^{-1}(x)$  在区间  $I_x = \{x | x = f(y), y \in I_y\}$  内也可导, 且

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)} \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}. \quad (1)$$

证 由于  $x = f(y)$  在  $I_y$  内单调、可导(从而连续), 由第一章第九节定理 2 知道,  $x = f(y)$  的反函数  $y = f^{-1}(x)$  存在, 且  $f^{-1}(x)$  在  $I_x$  内也单调、连续.

任取  $x \in I_x$ , 给  $x$  以增量  $\Delta x$  ( $\Delta x \neq 0, x + \Delta x \in I_x$ ), 由  $y = f^{-1}(x)$  的单调性可知

$$\Delta y = f^{-1}(x + \Delta x) - f^{-1}(x) \neq 0,$$

于是有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

因  $y = f^{-1}(x)$  连续, 故

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0,$$

从而

$$[f^{-1}(x)]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{f'(y)}.$$

上述结论可简单地说成: 反函数的导数等于直接函数导数的倒数.

下面用上述结论来求反三角函数及对数函数的导数.

**例 6** 设  $x = \sin y$ ,  $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  为直接函数, 则  $y = \arcsin x$  是它的反函数. 函数  $x = \sin y$  在开区间  $I_y = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  内单调、可导, 且  $(\sin y)' = \cos y > 0$ .

因此, 由公式(1), 在对应区间  $I_x = (-1, 1)$  内有

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}.$$

但  $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$  (因为当  $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$  时,  $\cos y > 0$ , 所以根号前只取正号), 从而得反正弦函数的导数公式

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad (2)$$

用类似的方法可得反余弦函数的导数公式

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad (3)$$

**例 7** 设  $x = \tan y$  是直接函数,  $y \in I_y = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , 则  $y = \arctan x$  是它的反函数. 函数  $x = \tan y$  在  $I_y = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  内单调、可导, 且  $(\tan y)' = \sec^2 y \neq 0$ .

因此, 由公式(1), 在对应区间  $I_x = (-\infty, +\infty)$  内有

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\sec^2 y}.$$

但  $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$ , 从而得反正切函数的导数公式

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}. \quad (4)$$

用类似的方法可得反余切函数的导数公式

$$(\text{arccot } x)' = -\frac{1}{1 + x^2}. \quad (5)$$

如果利用三角学中的公式

$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$  和  $\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ , 那么从本节公式(2)和(4), 也立刻可得公式(3)和(5).

例 8 设  $x = a^y$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) 为直接函数, 则  $y = \log_a x$  是它的反函数. 函数  $x = a^y$  在区间  $I_y = (-\infty, +\infty)$  内单调、可导, 且

$$(a^y)' = a^y \ln a \neq 0.$$

因此, 由公式(1), 在对应区间  $I_x = (0, +\infty)$  内有

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^x)'} = \frac{1}{a^x \ln a}.$$

但  $a^y = x$ , 从而得到第一节例 5 中已求得的对数函数的导数公式

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

### 三、复合函数的求导法则

到目前为止, 对于

$$\ln \tan x, \quad e^{x^3}, \quad \sin \frac{2x}{1+x^2}$$

那样的函数, 我们还不知道它们是否可导, 可导的话如何求它们的导数. 这些问题借助于下面的重要法则可以得到解决, 从而使可以求得导数的函数的范围得到很大扩充.

定理 3 如果  $u = g(x)$  在点  $x$  可导, 而  $y = f(u)$  在点  $u = g(x)$  可导, 则复合函数  $y = f[g(x)]$  在点  $x$  可导, 且其导数为

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x) \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \quad (6)$$

证 由于  $y = f(u)$  在点  $u$  可导, 因此

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u)$$

存在, 于是根据极限与无穷小的关系有

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u) + \alpha,$$

其中  $\alpha$  是  $\Delta u \rightarrow 0$  时的无穷小. 上式中  $\Delta u \neq 0$ , 用  $\Delta u$  乘上式两边, 得

$$\Delta y = f'(u) \Delta u + \alpha \cdot \Delta u. \quad (7)$$

当  $\Delta u = 0$  时, 规定  $\alpha = 0$ <sup>①</sup>, 这时因  $\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u) = 0$ , 而(7)式右端亦为零, 故(7)式对  $\Delta u = 0$  也成立. 用  $\Delta x \neq 0$  除(7)式两边, 得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

于是  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ f'(u) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x} \right].$

根据函数在某点可导必在该点连续的性质知道, 当  $\Delta x \rightarrow 0$  时,  $\Delta u \rightarrow 0$ , 从而可以推知

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \alpha = 0.$$

又因  $u = g(x)$  在点  $x$  处可导, 有

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = g'(x),$$

故  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x},$

即  $\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x).$

这就是公式(6).

例 9  $y = e^{x^3}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .

解  $y = e^{x^3}$  可看作由  $y = e^u$ ,  $u = x^3$  复合而成, 因此

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot 3x^2 = 3x^2 e^{x^3}.$$

例 10  $y = \sin \frac{2x}{1+x^2}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .

解  $y = \sin \frac{2x}{1+x^2}$  可看作由  $y = \sin u$ ,  $u = \frac{2x}{1+x^2}$  复合而成. 因

$$\frac{dy}{du} = \cos u,$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2(1+x^2) - (2x)^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2},$$

所以

$$\frac{dy}{dx} = \cos u \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \cdot \cos \frac{2x}{1+x^2}.$$

从以上例子看出, 应用复合函数求导法则时, 首先要分析所给函数可看作由

①  $\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta u} - f'(u)$ , 即  $\alpha = \alpha(\Delta u)$ . 这函数当  $\Delta u = 0$  时无定义, 当  $\Delta u \rightarrow 0$  时,  $\alpha \rightarrow 0$ . 今规定  $\Delta u = 0$  时  $\alpha = 0$ , 则该函数在  $\Delta u = 0$  处连续.

哪些函数复合而成,或者说,所给函数能分解成哪些函数.如果所给函数能分解成比较简单的函数,而这些简单函数的导数我们已经会求,那么应用复合函数求导法则就可以求所给函数的导数了.

对复合函数的分解比较熟练后,就不必再写出中间变量,而可以采用下列例题的方式来计算.

**例 11**  $y = \ln \sin x$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .

$$\text{解 } \frac{dy}{dx} = (\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x} (\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x.$$

**例 12**  $y = \sqrt[3]{1 - 2x^2}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .

$$\begin{aligned} \text{解 } \frac{dy}{dx} &= [(1 - 2x^2)^{\frac{1}{3}}]' = \frac{1}{3}(1 - 2x^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot (1 - 2x^2)' \\ &= \frac{-4x}{3\sqrt[3]{(1 - 2x^2)^2}}. \end{aligned}$$

复合函数的求导法则可以推广到多个中间变量的情形. 我们以两个中间变量为例, 设  $y = f(u)$ ,  $u = \varphi(v)$ ,  $v = \psi(x)$ , 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

而  $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$ , 故复合函数  $y = f[\varphi(\psi(x))]$  的导数为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

当然, 这里假定上式右端所出现的导数在相应处都存在.

**例 13**  $y = \ln \cos(e^x)$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .

**解** 所给函数可分解为  $y = \ln u$ ,  $u = \cos v$ ,  $v = e^x$ . 因  $\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}$ ,  $\frac{du}{dv} = -\sin v$ ,  $\frac{dv}{dx} = e^x$ , 故

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot (-\sin v) \cdot e^x = -\frac{\sin(e^x)}{\cos(e^x)} \cdot e^x = -e^x \tan(e^x).$$

不写出中间变量,此例可这样写:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= [\ln \cos(e^x)]' = \frac{1}{\cos(e^x)} [\cos(e^x)]' \\ &= -\frac{\sin(e^x)}{\cos(e^x)} (e^x)' = -e^x \tan(e^x). \end{aligned}$$

**例 14**  $y = e^{\sin \frac{1}{x}}$ , 求  $y'$ .

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= (\sin \frac{1}{x})' = e^{\sin \frac{1}{x}} \left( \sin \frac{1}{x} \right)' \\ &= e^{\sin \frac{1}{x}} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left( \frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2} e^{\sin \frac{1}{x}} \cdot \cos \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

例 15 设  $x > 0$ , 证明幂函数的导数公式

$$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}.$$

证 因为  $x^\mu = (e^{\ln x})^\mu = e^{\mu \ln x}$ , 所以

$$\begin{aligned} (x^\mu)' &= (e^{\mu \ln x})' = e^{\mu \ln x} \cdot (\mu \ln x)' \\ &= x^\mu \cdot \mu \cdot \frac{1}{x} = \mu x^{\mu-1}. \end{aligned}$$

## 四、基本求导法则与导数公式

基本初等函数的导数公式与本节中所讨论的求导法则, 在初等函数的求导运算中起着重要的作用, 我们必须熟练地掌握它们. 为了便于查阅, 现在把这些导数公式和求导法则归纳如下:

### 1. 常数和基本初等函数的导数公式

- |  |                                    |
|--|------------------------------------|
| (1) $(C)' = 0$ ,                                       | (2) $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$ ,   |
| (3) $(\sin x)' = \cos x$ ,                             | (4) $(\cos x)' = -\sin x$ ,        |
| (5) $(\tan x)' = \sec^2 x$ ,                           | (6) $(\cot x)' = -\csc^2 x$ ,      |
| (7) $(\sec x)' = \sec x \tan x$ ,                      | (8) $(\csc x)' = -\csc x \cot x$ , |
| (9) $(a^x)' = a^x \ln a$ ,                             | (10) $(e^x)' = e^x$ ,              |
| (11) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ ,               | (12) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ,    |
| (13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,         |                                    |
| (14) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,        |                                    |
| (15) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ ,                |                                    |
| (16) $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ . |                                    |

### 2. 函数的和、差、积、商的求导法则

设  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  都可导, 则

- (1)  $(u \pm v)' = u' \pm v'$ ,
- (2)  $(Cu)' = Cu'$  ( $C$  是常数),
- (3)  $(uv)' = u'v + uv'$ ,
- (4)  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$  ( $v \neq 0$ ).

### 3. 反函数的求导法则

设  $x = f(y)$  在区间  $I_y$  内单调、可导且  $f'(y) \neq 0$ , 则它的反函数  $y = f^{-1}(x)$  在  $I_x = f(I_y)$  内也可导, 且

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)} \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

### 4. 复合函数的求导法则

设  $y = f(u)$ , 而  $u = g(x)$  且  $f(u)$  及  $g(x)$  都可导, 则复合函数  $y = f[g(x)]$  的导数为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{或} \quad y'(x) = f'(u) \cdot g'(x).$$

下面再举两个综合运用这些法则和导数公式的例子.

**例 16**  $y = \sin nx \cdot \sin^n x$  ( $n$  为常数), 求  $y'$ .

解 首先应用积的求导法则得

$$y' = (\sin nx)' \sin^n x + \sin nx \cdot (\sin^n x)'.$$

在计算  $(\sin nx)'$  与  $(\sin^n x)'$  时, 都要应用复合函数求导法则, 由此得

$$\begin{aligned} y' &= n \cos nx \cdot \sin^n x + \sin nx \cdot n \sin^{n-1} x \cdot \cos x \\ &= n \sin^{n-1} x (\cos nx \cdot \sin x + \sin nx \cdot \cos x) \\ &= n \sin^{n-1} x \cdot \sin(n+1)x. \end{aligned}$$

\* **例 17** 证明下列双曲函数及反双曲函数的导数公式

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad (\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad (\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

证 由定理 1(1)、(2), 有

$$(\operatorname{sh} x)' = \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{(e^x)' - (e^{-x})'}{2},$$

再利用  $(e^x)' = e^x$  及定理 3, 得  $(e^{-x})' = -e^{-x}$ . 于是

$$(\operatorname{sh} x)' = \frac{(e^x)' - (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

同理可得

$$(\operatorname{ch} x)' = \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$$

由定理 1(3) 及上述结果, 有

$$(\operatorname{th} x)' = \left( \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x (\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$= \frac{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

由  $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ , 应用复合函数求导法则及定理 1(1), 有

$$\begin{aligned} (\operatorname{arsh} x)' &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} (x + \sqrt{1+x^2})' \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned}$$

由  $\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ , 同理可得

$$(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, x \in (1, +\infty).$$

由  $\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ , 可得

$$(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, x \in (-1, 1).$$

## 习 题 2-2

1. 推导余切函数及余割函数的导数公式:

$$(\cot x)' = -\csc^2 x, \quad (\csc x)' = -\csc x \cot x.$$

2. 求下列函数的导数:

$$(1) y = x^3 + \frac{7}{x^4} - \frac{2}{x} + 12; \quad (2) y = 5x^3 - 2^x + 3e^x;$$

$$(3) y = 2\tan x + \sec x - 1; \quad (4) y = \sin x \cdot \cos x;$$

$$(5) y = x^2 \ln x; \quad (6) y = 3e^x \cos x;$$

$$(7) y = \frac{\ln x}{x}; \quad (8) y = \frac{e^x}{x^2} + \ln 3;$$

$$(9) y = x^2 \ln x \cos x; \quad (10) s = \frac{1 + \sin t}{1 + \cos t}.$$

3. 求下列函数在给定点处的导数:

$$(1) y = \sin x - \cos x, \text{求 } y' \Big|_{x=\frac{\pi}{6}} \text{ 和 } y' \Big|_{x=\frac{\pi}{4}};$$

$$(2) \rho = \theta \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta, \text{求 } \frac{d\rho}{d\theta} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}};$$

$$(3) f(x) = \frac{3}{5-x} + \frac{x^2}{5}, \text{求 } f'(0) \text{ 和 } f'(2).$$

4. 以初速度  $v_0$  竖直上抛的物体, 其上升高度  $s$  与时间  $t$  的关系是  $s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ . 求:

(1) 该物体的速度  $v(t)$ ;

(2) 该物体达到最高点的时刻.

5. 求曲线  $y = 2\sin x + x^2$  上横坐标为  $x=0$  的点处的切线方程和法线方程.

6. 求下列函数的导数:

$$(1) y = (2x+5)^4;$$

$$(2) y = \cos(4-3x);$$

$$(3) y = e^{-3x^2};$$

$$(4) y = \ln(1+x^2);$$

$$(5) y = \sin^2 x;$$

$$(6) y = \sqrt{a^2 - x^2};$$

$$(7) y = \tan x^2;$$

$$(8) y = \arctan(e^x);$$

$$(9) y = (\arcsin x)^2;$$

$$(10) y = \ln \cos x.$$

7. 求下列函数的导数:

$$(1) y = \arcsin(1-2x);$$

$$(2) y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(3) y = e^{-\frac{x}{2}} \cos 3x;$$

$$(4) y = \arccos \frac{1}{x};$$

$$(5) y = \frac{1-\ln x}{1+\ln x};$$

$$(6) y = \frac{\sin 2x}{x};$$

$$(7) y = \arcsin \sqrt{x};$$

$$(8) y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2});$$

$$(9) y = \ln(\sec x + \tan x);$$

$$(10) y = \ln(\csc x - \cot x).$$

8. 求下列函数的导数:

$$(1) y = \left( \arcsin \frac{x}{2} \right)^2;$$

$$(2) y = \ln \tan \frac{x}{2};$$

$$(3) y = \sqrt{1 + \ln^2 x};$$

$$(4) y = e^{\arctan \sqrt{x}};$$

$$(5) y = \sin^n x \cos nx;$$

$$(6) y = \arctan \frac{x+1}{x-1};$$

$$(7) y = \frac{\arcsin x}{\arccos x};$$

$$(8) y = \ln \ln \ln x;$$

$$(9) y = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}};$$

$$(10) y = \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

9. 设函数  $f(x)$  和  $g(x)$  可导, 且  $f^2(x) + g^2(x) \neq 0$ , 试求函数  $y = \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$  的导数.

10. 设  $f(x)$  可导, 求下列函数的导数  $\frac{dy}{dx}$ :

$$(1) y = f(x^2);$$

$$(2) y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x);$$

11. 求下列函数的导数:

$$(1) y = e^{-x}(x^2 - 2x + 3);$$

$$(2) y = \sin^2 x \cdot \sin(x^2);$$

$$(3) y = \left( \arctan \frac{x}{2} \right)^2;$$

$$(4) y = \frac{\ln x}{x^n};$$

$$(5) y = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}};$$

$$(6) y = \ln \cos \frac{1}{x};$$

$$(7) y = e^{-\sin^2 \frac{1}{x}};$$

$$(8) y = \sqrt{x + \sqrt{x}};$$

$$(9) y = x \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{4-x^2};$$

$$(10) y = \arcsin \frac{2t}{1+t^2}.$$

12. 求下列函数的导数:

$$(1) y = \operatorname{ch}(\operatorname{sh} x);$$

$$(2) y = \operatorname{sh} x \cdot e^{\operatorname{ch} x};$$

$$(3) y = \operatorname{th}(\ln x);$$

$$(4) y = \operatorname{sh}^3 x + \operatorname{ch}^2 x;$$

$$(5) y = \operatorname{th}(1 - x^2);$$

$$(6) y = \operatorname{arsh}(x^2 + 1);$$

$$(7) y = \operatorname{arch}(e^{2x});$$

$$(8) y = \arctan(\operatorname{th} x);$$

$$(9) y = \ln \operatorname{ch} x + \frac{1}{2\operatorname{ch}^2 x};$$

$$(10) y = \operatorname{ch}^2 \left( \frac{x-1}{x+1} \right).$$

13. 设函数  $f(x)$  和  $g(x)$  均在点  $x_0$  的某一邻域内有定义,  $f(x)$  在  $x_0$  处可导,  $f'(x_0) = 0$ ,  $g(x)$  在  $x_0$  处连续, 试讨论  $f(x)g(x)$  在  $x_0$  处的可导性.

14. 设函数  $f(x)$  满足下列条件:

$$(1) f(x+y) = f(x) \cdot f(y), \text{ 对一切 } x, y \in \mathbb{R};$$

$$(2) f(x) = 1 + xg(x), \text{ 而 } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1.$$

试证明  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上处处可导, 且  $f'(x) = f(x)$ .

### 第三节 高阶导数

我们知道, 变速直线运动的速度  $v(t)$  是位置函数  $s(t)$  对时间  $t$  的导数, 即

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \text{或} \quad v = s',$$

而加速度  $a$  又是速度  $v$  对时间  $t$  的变化率, 即速度  $v$  对时间  $t$  的导数:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{ds}{dt} \right) \quad \text{或} \quad a = (s')'.$$

这种导数的导数  $\frac{d}{dt} \left( \frac{ds}{dt} \right)$  或  $(s')'$  叫做  $s$  对  $t$  的二阶导数, 记作

$$\frac{d^2 s}{dt^2} \quad \text{或} \quad s''(t).$$

所以, 直线运动的加速度就是位置函数  $s$  对时间  $t$  的二阶导数.

一般的, 函数  $y = f(x)$  的导数  $y' = f'(x)$  仍然是  $x$  的函数. 我们把  $y' = f'(x)$  的导数叫做函数  $y = f(x)$  的二阶导数, 记作  $y''$  或  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ , 即

$$y'' = (y')' \quad \text{或} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right).$$

相应的, 把  $y = f(x)$  的导数  $f'(x)$  叫做函数  $y = f(x)$  的一阶导数.

类似地, 二阶导数的导数, 叫做三阶导数, 三阶导数的导数叫做四阶导数, …, 一般的,  $(n-1)$  阶导数的导数叫做  $n$  阶导数, 分别记作

$$\begin{aligned} & y''' , y^{(4)} , \dots , y^{(n)} \\ \text{或} \quad & \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}. \end{aligned}$$

函数  $y=f(x)$  具有  $n$  阶导数, 也常说成函数  $f(x)$  为  $n$  阶可导. 如果函数  $f(x)$  在点  $x$  处具有  $n$  阶导数, 那么  $f(x)$  在点  $x$  的某一邻域内必定具有一切低于  $n$  阶的导数. 二阶及二阶以上的导数统称高阶导数.

由此可见, 求高阶导数就是多次接连地求导数. 所以, 仍可应用前面学过的求导方法来计算高阶导数.

**例 1**  $y=ax+b$ , 求  $y''$ .

解  $y'=a$ ,  $y''=0$ .

**例 2**  $s=\sin \omega t$ , 求  $s''$ .

解  $s'=\omega \cos \omega t$ ,  $s''=-\omega^2 \sin \omega t$ .

**例 3** 证明: 函数  $y=\sqrt{2x-x^2}$  满足关系式

$$y^3 y'' + 1 = 0.$$

证 将  $y=\sqrt{2x-x^2}$  求导, 得

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}, \\ y'' &= \frac{-\sqrt{2x-x^2} - (1-x)\frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}}{2x-x^2} \\ &= \frac{-2x+x^2-(1-x)^2}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}} \\ &= \frac{1}{(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{y^3}. \end{aligned}$$

于是

$$y^3 y'' + 1 = 0.$$

下面介绍几个初等函数的  $n$  阶导数.

**例 4** 求指数函数  $y=e^x$  的  $n$  阶导数.

解  $y'=e^x$ ,  $y''=e^x$ ,  $y'''=e^x$ ,  $y^{(4)}=e^x$ .

一般的, 可得

$$y^{(n)}=e^x,$$

即

$$(e^x)^{(n)}=e^x.$$

**例 5** 求正弦函数与余弦函数的  $n$  阶导数.

解  $y=\sin x$ ,

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''' = \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y^{(4)} = \cos\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

一般的, 可得

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

即

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

用类似方法, 可得

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

**例 6** 求函数  $\ln(1+x)$  的  $n$  阶导数.

解  $y = \ln(1+x)$ ,  $y' = \frac{1}{1+x}$ ,

$$y'' = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad y''' = \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3}, \quad y^{(4)} = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1+x)^4},$$

一般的, 可得

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n},$$

即  $[\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ .

通常规定  $0! = 1$ , 所以这个公式当  $n=1$  时也成立.

**例 7** 求幂函数的  $n$  阶导数公式.

解 设  $y = x^\mu$  ( $\mu$  是任意常数), 那么

$$y' = \mu x^{\mu-1},$$

$$y'' = \mu(\mu-1)x^{\mu-2},$$

$$y''' = \mu(\mu-1)(\mu-2)x^{\mu-3},$$

$$y^{(4)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)x^{\mu-4},$$

一般的, 可得

$$y^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n},$$

即  $(x^\mu)^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}$ .

当  $\mu=n$  时, 得到

$$(x^n)^{(n)} = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!,$$

而

$$(x^n)^{(n+1)} = 0.$$

如果函数  $u = u(x)$  及  $v = v(x)$  都在点  $x$  处具有  $n$  阶导数, 那么显然  $u(x) + v(x)$  及  $u(x) - v(x)$  也在点  $x$  处具有  $n$  阶导数, 且

$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}.$$

但乘积  $u(x) \cdot v(x)$  的  $n$  阶导数并不如此简单. 由

$$(uv)' = u'v + uv'$$

首先得出

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv'',$$

$$(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''.$$

用数学归纳法可以证明

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \dots$$

$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \dots + uv^{(n)}.$$

上式称为莱布尼茨(Leibniz)公式. 这公式可以这样记忆: 把  $(u+v)^n$  按二项式定理展开写成

$$(u+v)^n = u^n v^0 + nu^{n-1}v^1 + \frac{n(n-1)}{2!}u^{n-2}v^2 + \dots + u^0v^n,$$

即

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{n-k} v^k \text{①},$$

然后把  $k$  次幂换成  $k$  阶导数(零阶导数理解为函数本身), 再把左端的  $u+v$  换成  $uv$ , 这样就得到莱布尼茨公式

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

**例 8**  $y = x^2 e^{2x}$ , 求  $y^{(20)}$ .

解 设  $u = e^{2x}$ ,  $v = x^2$ , 则

$$u^{(k)} = 2^k e^{2x} (k=1, 2, \dots, 20),$$

$$v' = 2x, \quad v'' = 2, \quad v^{(k)} = 0 (k=3, 4, \dots, 20),$$

代入莱布尼茨公式, 得

$$\begin{aligned} y^{(20)} &= (x^2 e^{2x})^{(20)} \\ &= 2^{20} e^{2x} \cdot x^2 + 20 \cdot 2^{19} e^{2x} \cdot 2x + \frac{20 \cdot 19}{2!} 2^{18} e^{2x} \cdot 2 \\ &= 2^{20} e^{2x} (x^2 + 20x + 95). \end{aligned}$$

① 记号  $\sum$  表示对同一类型诸项求和. 例如,  $\sum_{k=0}^n C_n^k u^{n-k} v^k$  表示在  $C_n^k u^{n-k} v^k$  中依次令  $k = 0, 1, \dots, n$ , 然后对这样得到的  $n+1$  项求和.

## 习题 2-3

1. 求下列函数的二阶导数:

$$(1) y = 2x^2 + \ln x; \quad (2) y = e^{2x-1};$$

$$(3) y = x \cos x; \quad (4) y = e^{-t} \sin t;$$

$$(5) y = \sqrt{a^2 - x^2}; \quad (6) y = \ln(1 - x^2);$$

$$(7) y = \tan x; \quad (8) y = \frac{1}{x^3 + 1};$$

$$(9) y = (1 + x^2) \arctan x; \quad (10) y = \frac{e^x}{x};$$

$$(11) y = x e^{x^2}; \quad (12) y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

2. 设  $f(x) = (x + 10)^6$ ,  $f'''(2) = ?$

3. 设  $f''(x)$  存在, 求下列函数的二阶导数  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

$$(1) y = f(x^2); \quad (2) y = \ln[f(x)].$$

4. 试从  $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$  导出:

$$(1) \frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{y''}{(y')^3}; \quad (2) \frac{d^3x}{dy^3} = \frac{3(y'')^2 - y'y'''}{(y')^5}.$$

5. 已知物体的运动规律为  $s = A \sin \omega t$  ( $A, \omega$  是常数), 求物体运动的加速度, 并验证:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = 0.$$

6. 密度大的陨星进入大气层时, 当它离地心为  $s$  千米时的速度与  $\sqrt{s}$  成反比. 试证陨星的加速度与  $s^2$  成反比.

7. 假设质点沿  $x$  轴运动的速度为  $\frac{dx}{dt} = f(x)$ , 试求质点运动的加速度.

8. 验证函数  $y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$  ( $\lambda, C_1, C_2$  是常数) 满足关系式

$$y'' - \lambda^2 y = 0.$$

9. 验证函数  $y = e^x \sin x$  满足关系式

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

10. 求下列函数所指定的阶的导数:

$$(1) y = e^x \cos x, \text{求 } y^{(4)}; \quad (2) y = x^2 \sin 2x, \text{求 } y^{(50)}.$$

\* 11. 求下列函数的  $n$  阶导数的一般表达式:

$$(1) y = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \quad (a_1, a_2, \dots, a_n \text{ 都是常数});$$

$$(2) y = \sin^2 x; \quad (3) y = x \ln x; \quad (4) y = x e^x.$$

\* 12. 求函数  $f(x) = x^2 \ln(1 + x)$  在  $x = 0$  处的  $n$  阶导数  $f^{(n)}(0)$  ( $n \geq 3$ ).

## 第四节 隐函数及由参数方程所确定的 函数的导数 相关变化率

### 一、隐函数的导数

函数  $y = f(x)$  表示两个变量  $y$  与  $x$  之间的对应关系, 这种对应关系可以用各种不同方式表达. 前面我们遇到的函数, 例如  $y = \sin x$ ,  $y = \ln x + \sqrt{1 - x^2}$  等, 这种函数表达方式的特点是: 等号左端是因变量的符号, 而右端是含有自变量的式子, 当自变量取定义域内任一值时, 由这式子能确定对应的函数值. 用这种方式表达的函数叫做显函数. 有些函数的表达方式却不是这样, 例如, 方程

$$x + y^3 - 1 = 0$$

表示一个函数, 因为当变量  $x$  在  $(-\infty, +\infty)$  内取值时, 变量  $y$  有确定的值与之对应. 例如, 当  $x = 0$  时,  $y = 1$ ; 当  $x = -1$  时,  $y = \sqrt[3]{2}$ , 等等. 这样的函数称为隐函数.

一般的, 如果变量  $x$  和  $y$  满足一个方程  $F(x, y) = 0$ , 在一定条件下, 当  $x$  取某区间内的任一值时, 相应地总有满足这方程的唯一的  $y$  值存在, 那么就说方程  $F(x, y) = 0$  在该区间内确定了一个隐函数.

把一个隐函数化成显函数, 叫做隐函数的显化. 例如从方程  $x + y^3 - 1 = 0$  解出  $y = \sqrt[3]{1 - x}$ , 就把隐函数化成了显函数. 隐函数的显化有时是有困难的, 甚至是不可能的. 但在实际问题中, 有时需要计算隐函数的导数, 因此, 我们希望有一种方法, 不管隐函数能否显化, 都能直接由方程算出它所确定的隐函数的导数来. 下面通过具体例子来说明这种方法.

**例 1** 求由方程  $e^y + xy - e = 0$  所确定的隐函数的导数  $\frac{dy}{dx}$ .

**解** 我们把方程两边分别对  $x$  求导数<sup>①</sup>, 注意  $y = y(x)$ . 方程左边对  $x$  求导得

$$\frac{d}{dx}(e^y + xy - e) = e^y \frac{dy}{dx} + y + x \frac{dy}{dx},$$

方程右边对  $x$  求导得

$$(0)' = 0.$$

<sup>①</sup> 假设方程  $F(x, y) = 0$  确定一个函数  $y = y(x)$ , 把  $y = y(x)$  代入方程便得恒等式  $F[x, y(x)] \equiv 0$ . 因此, 这里说的方程两边对  $x$  求导, 是指恒等式两边对  $x$  求导.

由于等式两边对  $x$  的导数相等, 所以

$$e^y \frac{dy}{dx} + y + x \frac{dy}{dx} = 0,$$

从而

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x+e^y} \quad (x+e^y \neq 0).$$

在这个结果中, 分式中的  $y = y(x)$  是由方程  $e^y + xy - e = 0$  所确定的隐函数.

**例 2** 求由方程  $y^5 + 2y - x - 3x^7 = 0$  所确定的隐函数在  $x=0$  处的导数

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}.$$

解 把方程两边分别对  $x$  求导, 由于方程两边的导数相等, 所以

$$5y^4 \frac{dy}{dx} + 2 \frac{dy}{dx} - 1 - 21x^6 = 0.$$

由此得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + 21x^6}{5y^4 + 2}.$$

因为当  $x=0$  时, 从原方程得  $y=0$ , 所以

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \frac{1}{2}.$$

**例 3** 求椭圆  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$  在点  $(2, \frac{3}{2}\sqrt{3})$  处的切线方程(图2-6).

解 由导数的几何意义知道, 所求切线的斜率

为

$$k = \left. y' \right|_{x=2}.$$

椭圆方程的两边分别对  $x$  求导, 有

$$\frac{x}{8} + \frac{2}{9}y \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

从而

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{9x}{16y}.$$

当  $x=2$  时,  $y=\frac{3}{2}\sqrt{3}$ , 代入上式得

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

于是所求的切线方程为

$$y - \frac{3}{2}\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{4}(x - 2),$$

即

$$\sqrt{3}x + 4y - 8\sqrt{3} = 0.$$

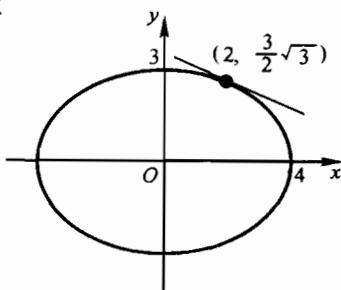


图 2-6

**例 4** 求由方程  $x - y + \frac{1}{2} \sin y = 0$  所确定的隐函数的二阶导数  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ .

**解** 应用隐函数的求导方法, 得

$$1 - \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2} \cos y \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

于是

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2 - \cos y}.$$

上式两边再对  $x$  求导, 得

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-2 \sin y \frac{dy}{dx}}{(2 - \cos y)^2} = \frac{-4 \sin y}{(2 - \cos y)^3}.$$

上式右端分式中的  $y = y(x)$  是由方程  $x - y + \frac{1}{2} \sin y = 0$  所确定的隐函数.

在某些场合, 利用所谓对数求导法求导数比用通常的方法简便些. 这种方法是先在  $y = f(x)$  的两边取对数, 然后再求出  $y$  的导数. 我们通过下面的例子来说明这种方法.

**例 5** 求  $y = x^{\sin x}$  ( $x > 0$ ) 的导数.

**解** 这函数是幂指函数. 为了求这函数的导数, 可以先在两边取对数, 得

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x;$$

上式两边对  $x$  求导, 注意到  $y = y(x)$ , 得

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x},$$

$$\text{于是 } y' = y \left( \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right) = x^{\sin x} \left( \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right).$$

对于一般形式的幂指函数

$$y = u^v \quad (u > 0), \tag{1}$$

如果  $u = u(x)$ 、 $v = v(x)$  都可导, 则可像例 5 那样利用对数求导法求出幂指函数(1)的导数, 也可把幂指函数(1)表示为

$$y = e^{v \ln u}.$$

这样, 便可直接求得

$$\begin{aligned} y' &= e^{v \ln u} \left( v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right) \\ &= u^v \left( v' \cdot \ln u + \frac{vu'}{u} \right). \end{aligned}$$

**例 6** 求  $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$  的导数.

**解** 先在两边取对数(假定  $x > 4$ ), 得

$$\ln y = \frac{1}{2} [\ln(x-1) + \ln(x-2) - \ln(x-3) - \ln(x-4)],$$

上式两边对  $x$  求导, 注意到  $y = y(x)$ , 得

$$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} \right),$$

于是

$$y' = \frac{y}{2} \left( \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} \right).$$

$$\text{当 } x < 1 \text{ 时}, y = \sqrt{\frac{(1-x)(2-x)}{(3-x)(4-x)}};$$

$$\text{当 } 2 < x < 3 \text{ 时}, y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(3-x)(4-x)}};$$

用同样的方法可得与上面相同的结果.

## 二、由参数方程所确定的函数的导数

研究物体运动的轨迹时, 常遇到参数方程. 例如, 研究抛射体的运动问题时, 如果空气阻力忽略不计, 则抛射体的运动轨迹可表示为

$$\begin{cases} x = v_1 t, \\ y = v_2 t - \frac{1}{2} g t^2, \end{cases} \quad (2)$$

其中  $v_1, v_2$  分别是抛射体初速度的水平、铅直分量,  $g$  是重力加速度,  $t$  是飞行时间,  $x$  和  $y$  分别是飞行中抛射体在铅直平面上的位置的横坐标和纵坐标(图 2-7).

在(2)式中,  $x, y$  都与  $t$  存在函数关系. 如果把对应于同一个  $t$  值的  $y$  与  $x$  的值看做是对应的, 这样就得到  $y$  与  $x$  之间的函数关系. 消去(2)中的参数  $t$ , 有

$$y = \frac{v_2}{v_1} x - \frac{g}{2v_1^2} x^2.$$

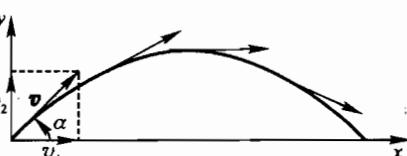


图 2-7

这是因变量  $y$  与自变量  $x$  直接联系的式子, 也是参数方程(2)所确定的函数的显式表示.

一般的, 若 参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (3)$$

确定  $y$  与  $x$  间的函数关系, 则称此函数关系所表达的函数为由参数方程(3)所确定的函数.

在实际问题中,需要计算由参数方程(3)所确定的函数的导数.但从(3)中消去参数  $t$  有时会有困难.因此,我们希望有一种方法能直接由参数方程(3)算出它所确定的函数的导数来.下面就来讨论由参数方程(3)所确定的函数的求导方法.

在(3)式中,如果函数  $x = \varphi(t)$  具有单调连续反函数  $t = \varphi^{-1}(x)$ ,且此反函数能与函数  $y = \psi(t)$  构成复合函数,那么由参数方程(3)所确定的函数可以看成是由函数  $y = \psi(t)$ 、 $t = \varphi^{-1}(x)$  复合而成的函数  $y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$ .现在,要计算这个复合函数的导数.为此再假定函数  $x = \varphi(t)$ 、 $y = \psi(t)$  都可导,而且  $\varphi'(t) \neq 0$ .于是根据复合函数的求导法则与反函数的求导法则,就有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

即

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \quad (4)$$

上式也可写成

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

(4)式就是由参数方程(3)所确定的  $x$  的函数的导数公式<sup>①</sup>.

如果  $x = \varphi(t)$ 、 $y = \psi(t)$  还是二阶可导的,那么从(4)式又可得到函数的二阶导数公式

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right) \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)} \cdot \frac{1}{\varphi'(t)},\end{aligned}$$

即

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}. \quad (5)$$

**例 7** 已知椭圆的参数方程为

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases}$$

① 作为  $x$  的函数,  $\frac{dy}{dx}$  应表示为

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \end{cases}$$

但为了方便起见,通常把  $x = \varphi(t)$  省去.后面的公式(5)也作类似的理解.

求椭圆在  $t = \frac{\pi}{4}$  相应的点处的切线方程(图 2-8).

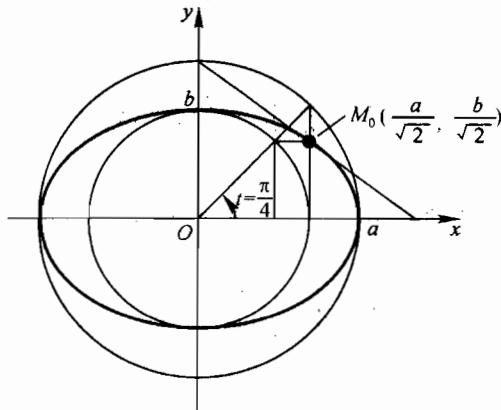


图 2-8

解 当  $t = \frac{\pi}{4}$  时, 椭圆上的相应点  $M_0$  的坐标是

$$x_0 = a \cos \frac{\pi}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

$$y_0 = b \sin \frac{\pi}{4} = \frac{b\sqrt{2}}{2}.$$

曲线在点  $M_0$  的切线斜率为

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \left. \frac{(b \sin t)'}{(a \cos t)'} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \left. \frac{-b \cos t}{-a \sin t} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{b}{a}.$$

代入点斜式方程, 即得椭圆在点  $M_0$  处的切线方程

$$y - \frac{b\sqrt{2}}{2} = -\frac{b}{a} \left( x - \frac{a\sqrt{2}}{2} \right).$$

化简后得

$$bx + ay - \sqrt{2}ab = 0.$$

**例 8** 已知抛射体的运动轨迹的参数方程为

$$\begin{cases} x = v_1 t, \\ y = v_2 t - \frac{1}{2} g t^2, \end{cases}$$

求抛射体在时刻  $t$  的运动速度的大小和方向.

解 先求速度的大小.

由于速度的水平分量为

$$\frac{dx}{dt} = v_1,$$

铅直分量为

$$\frac{dy}{dt} = v_2 - gt,$$

所以抛射体运动速度的大小为

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{v_1^2 + (v_2 - gt)^2}.$$

再求速度的方向,也就是轨迹的切线方向.

设  $\alpha$  是切线的倾角,则根据导数的几何意义,得

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{v_2 - gt}{v_1}.$$

所以,在抛射体刚射出(即  $t=0$ )时,

$$\tan \alpha \Big|_{t=0} = \frac{dy}{dx} \Big|_{t=0} = \frac{v_2}{v_1};$$

当  $t = \frac{v_2}{g}$  时,

$$\tan \alpha \Big|_{t=\frac{v_2}{g}} = \frac{dy}{dx} \Big|_{t=\frac{v_2}{g}} = 0,$$

这时,运动方向是水平的,即抛射体达到最高点(图 2-7).

例 9 计算由摆线(图 2-9)的参数方程

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

所确定的函数  $y = y(x)$  的二阶导数.

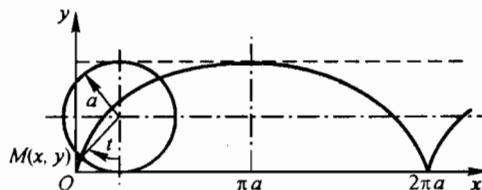


图 2-9

解  $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \cot \frac{t}{2} \quad (t \neq 2n\pi, n \in \mathbb{Z}).$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left( \cot \frac{t}{2} \right) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= -\frac{1}{2\sin^2 \frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{a(1-\cos t)} = -\frac{1}{a(1-\cos t)^2}$$

$(t \neq 2n\pi, n \in \mathbf{Z}).$

### 三、相关变化率

设  $x = x(t)$  及  $y = y(t)$  都是可导函数, 而变量  $x$  与  $y$  间存在某种关系, 从而变化率  $\frac{dx}{dt}$  与  $\frac{dy}{dt}$  间也存在一定关系. 这两个相互依赖的变化率称为 相关变化率. 相关变化率问题就是研究这两个变化率之间的关系, 以便从其中一个变化率求出另一个变化率.

**例 10** 一气球从离开观察员 500 m 处离地面铅直上升, 当气球高度为 500 m 时, 其速率为 140 m/min(分). 求此时观察员视线的仰角增加的速率是多少?

解 设气球上升  $t$  s(秒)后, 其高度为  $h$ , 观察员视线的仰角为  $\alpha$ , 则

$$\tan \alpha = \frac{h}{500},$$

其中  $\alpha$  及  $h$  都与  $t$  存在可导的函数关系. 上式两边对  $t$  求导, 得

$$\sec^2 \alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{500} \cdot \frac{dh}{dt}.$$

由已知条件, 存在  $t_0$ , 使  $h|_{t=t_0} = 500$  m,  $\frac{dh}{dt}|_{t=t_0} = 140$  m/min. 又  $\tan \alpha|_{t=t_0} = 1$ ,  $\sec^2 \alpha|_{t=t_0} = 2$ . 代入上式得

$$2 \frac{d\alpha}{dt} \Big|_{t=t_0} = \frac{1}{500} \cdot 140,$$

所以  $\frac{d\alpha}{dt} \Big|_{t=t_0} = \frac{70}{500} = 0.14$  (rad(弧度)/min).

即此时观察员视线的仰角增加的速率是 0.14 rad/min.

### 习题 2-4

1. 求由下列方程所确定的隐函数的导数  $\frac{dy}{dx}$ :

- |                           |                              |
|---------------------------|------------------------------|
| (1) $y^2 - 2xy + 9 = 0$ ; | (2) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ ; |
| (3) $xy = e^{x+y}$ ;      | (4) $y = 1 - xe^y$ .         |

2. 求曲线  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$  在点  $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a\right)$  处的切线方程和法线方程.

3. 求由下列方程所确定的隐函数的二阶导数  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

$$(1) x^2 - y^2 = 1; \quad (2) b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2;$$

$$(3) y = \tan(x+y); \quad (4) y = 1 + x e^y.$$

4. 用对数求导法求下列函数的导数:

$$(1) y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x;$$

$$(2) y = \sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}};$$

$$(3) y = \frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}; \quad (4) y = \sqrt{x \sin x \sqrt{1-e^x}}.$$

5. 求下列参数方程所确定的函数的导数  $\frac{dy}{dx}$ :

$$(1) \begin{cases} x = at^2, \\ y = bt^3; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x = \theta(1 - \sin \theta), \\ y = \theta \cos \theta. \end{cases}$$

6. 已知  $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t. \end{cases}$  求当  $t = \frac{\pi}{3}$  时  $\frac{dy}{dx}$  的值.

7. 写出下列曲线在所给参数值相应的点处的切线方程和法线方程:

$$(1) \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos 2t, \end{cases} \text{ 在 } t = \frac{\pi}{4} \text{ 处;}$$

$$(2) \begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^2}, \\ y = \frac{3at^2}{1+t^2}, \end{cases} \text{ 在 } t = 2 \text{ 处.}$$

8. 求下列参数方程所确定的函数的二阶导数  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

$$(1) \begin{cases} x = \frac{t^2}{2}, \\ y = 1-t; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x = 3e^{-t}, \\ y = 2e^t; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x = f'(t), \\ y = tf'(t) - f(t); \end{cases} \text{ 设 } f''(t) \text{ 存在且不为零.}$$

9. 求下列参数方程所确定的函数的三阶导数  $\frac{d^3y}{dx^3}$ :

$$(1) \begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \arctan t. \end{cases}$$

10. 落在平静水面上的石头,产生同心波纹.若最外一圈波半径的增大速率总是 6 m/s,问在 2 s 末扰动水面面积增大的速率为多少?

11. 注水入深 8 m 上顶直径 8 m 的正圆锥形容器中,其速率为 4 m<sup>3</sup>/min. 当水深为 5 m 时,其表面上升的速率为多少?

12. 溶液自深 18 cm 顶直径 12 cm 的正圆锥形漏斗中漏入一直径为 10 cm 的圆柱形筒

中.开始时漏斗中盛满了溶液.已知当溶液在漏斗中深为 12 cm 时,其表面下降的速率为 1 cm/min.问此时圆柱形筒中溶液表面上升的速率为多少?

## 第五节 函数的微分

### 一、微分的定义

先分析一个具体问题.一块正方形金属薄片受温度变化的影响,其边长由  $x_0$  变到  $x_0 + \Delta x$  (图 2-10),问此薄片的面积改变了多少?

设此薄片的边长为  $x$ ,面积为  $A$ ,则  $A$  与  $x$  存在函数关系:  $A = x^2$ . 薄片受温度变化的影响时面积的改变量,可以看成是当自变量  $x$  自  $x_0$  取得增量  $\Delta x$  时,函数  $A = x^2$  相应的增量  $\Delta A$ ,即

$$\Delta A = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2.$$

从上式可以看出,  $\Delta A$  分成两部分, 第一部分  $2x_0\Delta x$  是  $\Delta x$  的线性函数, 即图中带有斜线的两个矩形面积之和, 而第二部分  $(\Delta x)^2$  在图中是带有交叉斜线的小正方形的面积, 当  $\Delta x \rightarrow 0$  时, 第二部分  $(\Delta x)^2$  是比  $\Delta x$  高阶的无穷小, 即  $(\Delta x)^2 = o(\Delta x)$ . 由此可见, 如果边长改变很微小, 即  $|\Delta x|$  很小时, 面积的改变量  $\Delta A$  可近似地用第一部分来代替.

一般的,如果函数  $y = f(x)$  满足一定条件,则增量  $\Delta y$  可表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x),$$

其中  $A$  是不依赖于  $\Delta x$  的常数,因此  $A\Delta x$  是  $\Delta x$  的线性函数,且它与  $\Delta y$  之差

$$\Delta y - A\Delta x = o(\Delta x)$$

是比  $\Delta x$  高阶的无穷小.所以,当  $A \neq 0$ ,且  $|\Delta x|$  很小时,我们就可以用  $\Delta x$  的线性函数  $A\Delta x$  来近似代替  $\Delta y$ .

**定义** 设函数  $y = f(x)$  在某区间内有定义,  $x_0$  及  $x_0 + \Delta x$  在这区间内,如果增量

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

可表示为

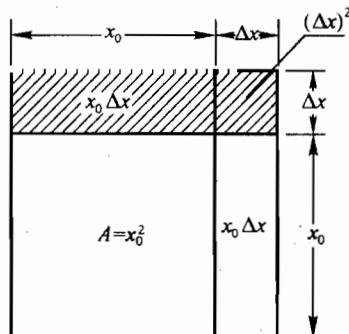


图 2-10

$$\Delta y = A \Delta x + o(\Delta x), \quad (1)$$

其中  $A$  是不依赖于  $\Delta x$  的常数, 那么称函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  是可微的, 而  $A \Delta x$  叫做函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  相应于自变量增量  $\Delta x$  的微分, 记作  $dy$ , 即

$$dy = A \Delta x.$$

下面讨论函数可微的条件. 设函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  可微, 则按定义有(1)式成立.(1)式两边除以  $\Delta x$ , 得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

于是, 当  $\Delta x \rightarrow 0$  时, 由上式就得到

$$A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

因此, 如果函数  $f(x)$  在点  $x_0$  可微, 则  $f(x)$  在点  $x_0$  也一定可导(即  $f'(x_0)$  存在), 且  $A = f'(x_0)$ .

反之, 如果  $y = f(x)$  在点  $x_0$  可导, 即

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

存在, 根据极限与无穷小的关系(第一章第四节定理 1), 上式可写成

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha,$$

其中  $\alpha \rightarrow 0$  (当  $\Delta x \rightarrow 0$ ). 由此又有

$$\Delta y = f'(x_0) \Delta x + \alpha \Delta x.$$

因  $\alpha \Delta x = o(\Delta x)$ , 且  $f'(x_0)$  不依赖于  $\Delta x$ , 故上式相当于(1)式, 所以  $f(x)$  在点  $x_0$  也是可微的.

由此可见, 函数  $f(x)$  在点  $x_0$  可微的充分必要条件是函数  $f(x)$  在点  $x_0$  可导, 且当  $f(x)$  在点  $x_0$  可微时, 其微分一定是

$$dy = f'(x_0) \Delta x. \quad (2)$$

当  $f'(x_0) \neq 0$  时, 有

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{f'(x_0) \Delta x} = \frac{1}{f'(x_0)} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

从而, 当  $\Delta x \rightarrow 0$  时,  $\Delta y$  与  $dy$  是等价无穷小, 于是由第一章第七节定理 1 可知, 这时有

$$\Delta y = dy + o(dy), \quad (3)$$

即  $dy$  是  $\Delta y$  的主部<sup>①</sup>. 又由于  $dy = f'(x_0) \Delta x$  是  $\Delta x$  的线性函数, 所以在

① 设  $\alpha$  及  $\beta$  都是在同一个自变量的变化过程中的无穷小, 如果  $\beta = \alpha + o(\alpha)$ , 则称  $\alpha$  是  $\beta$  的主部.

$f'(x_0) \neq 0$  的条件下, 我们说  $dy$  是  $\Delta y$  的线性主部(当  $\Delta x \rightarrow 0$ ). 于是我们得到结论: 在  $f'(x_0) \neq 0$  的条件下, 以微分  $dy = f'(x_0)\Delta x$  近似代替增量  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  时, 其误差为  $o(dy)$ . 因此, 在  $|\Delta x|$  很小时, 有近似等式

$$\Delta y \approx dy.$$

**例 1** 求函数  $y = x^2$  在  $x = 1$  和  $x = 3$  处的微分.

**解** 函数  $y = x^2$  在  $x = 1$  处的微分为

$$dy = (x^2)'|_{x=1} \Delta x = 2\Delta x;$$

在  $x = 3$  处的微分为

$$dy = (x^2)'|_{x=3} \Delta x = 6\Delta x.$$

函数  $y = f(x)$  在任意点  $x$  的微分, 称为函数的微分, 记作  $dy$  或  $df(x)$ , 即

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

例如, 函数  $y = \cos x$  的微分为

$$dy = (\cos x)' \Delta x = -\sin x \Delta x;$$

函数  $y = e^x$  的微分为

$$dy = (e^x)' \Delta x = e^x \Delta x.$$

显然, 函数的微分  $dy = f'(x)\Delta x$  与  $x$  和  $\Delta x$  有关.

**例 2** 求函数  $y = x^3$  当  $x = 2, \Delta x = 0.02$  时的微分.

**解** 先求函数在任意点  $x$  的微分

$$dy = (x^3)' \Delta x = 3x^2 \Delta x.$$

再求函数当  $x = 2, \Delta x = 0.02$  时的微分

$$dy \Big|_{\substack{x=2 \\ \Delta x=0.02}} = 3x^2 \Delta x \Big|_{\substack{x=2 \\ \Delta x=0.02}} = 3 \cdot 2^2 \cdot 0.02 = 0.24.$$

通常把自变量  $x$  的增量  $\Delta x$  称为自变量的微分, 记作  $dx$ , 即  $dx = \Delta x$ . 于是函数  $y = f(x)$  的微分又可记作

$$dy = f'(x)dx.$$

从而有

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

这就是说, 函数的微分  $dy$  与自变量的微分  $dx$  之商等于该函数的导数. 因此, 导数也叫做“微商”.

## 二、微分的几何意义

为了对微分有比较直观的了解, 我们来说明微分的几何意义.

在直角坐标系中, 函数  $y = f(x)$  的图形是一条曲线. 对于某一固定的  $x_0$  值, 曲线上有一个确定点  $M(x_0, y_0)$ , 当自变量  $x$  有微小增量  $\Delta x$  时, 就得到曲

线上另一点  $N(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ . 从图 2-11 可知:

$$MQ = \Delta x,$$

$$QN = \Delta y.$$

过点  $M$  作曲线的切线  $MT$ , 它的倾角为  $\alpha$ , 则

$$QP = MQ \cdot \tan \alpha = \Delta x \cdot f'(x_0),$$

即

$$dy = QP.$$

由此可见, 对于可微函数  $y = f(x)$  而言, 当  $\Delta y$  是曲线  $y = f(x)$  上的点的纵坐标的增量时,  $dy$  就是曲线的切线上点的纵坐标的相应增量. 当

$|\Delta x|$  很小时,  $|\Delta y - dy|$  比  $|\Delta x|$  小得多. 因此在点  $M$  的邻近, 我们可以用切线段来近似代替曲线段. 在局部范围内用线性函数近似代替非线性函数, 在几何上就是局部用切线段近似代替曲线段, 这在数学上称为非线性函数的局部线性化, 这是微分学的基本思想方法之一. 这种思想方法在自然科学和工程问题的研究中是经常采用的.

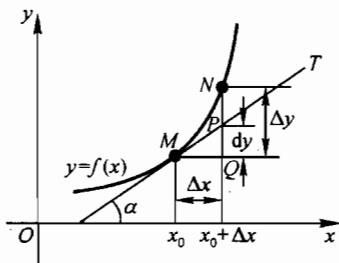


图 2-11

### 三、基本初等函数的微分公式与微分运算法则

从函数的微分的表达式

$$dy = f'(x)dx$$

可以看出, 要计算函数的微分, 只要计算函数的导数, 再乘以自变量的微分. 因此, 可得如下的微分公式和微分运算法则.

#### 1. 基本初等函数的微分公式

由基本初等函数的导数公式, 可以直接写出基本初等函数的微分公式. 为了便于对照, 列表于下:

导 数 公 式	微 分 公 式
$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$	$d(x^\mu) = \mu x^{\mu-1} dx$
$(\sin x)' = \cos x$	$d(\sin x) = \cos x dx$
$(\cos x)' = -\sin x$	$d(\cos x) = -\sin x dx$
$(\tan x)' = \sec^2 x$	$d(\tan x) = \sec^2 x dx$
$(\cot x)' = -\csc^2 x$	$d(\cot x) = -\csc^2 x dx$
$(\sec x)' = \sec x \tan x$	$d(\sec x) = \sec x \tan x dx$
$(\csc x)' = -\csc x \cot x$	$d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$

导数公式	微分公式
$(a^x)' = a^x \ln a$	$d(a^x) = a^x \ln a dx$
$(e^x)' = e^x$	$d(e^x) = e^x dx$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$d(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} dx$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} dx$
$(\text{arccot } x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$d(\text{arccot } x) = -\frac{1}{1+x^2} dx$

## 2. 函数和、差、积、商的微分法则

由函数和、差、积、商的求导法则, 可推得相应的微分法则. 为了便于对照, 列成下表(表中  $u = u(x), v = v(x)$  都可导).

函数和、差、积、商的求导法则	函数和、差、积、商的微分法则
$(u \pm v)' = u' \pm v'$	$d(u \pm v) = du \pm dv$
$(Cu)' = Cu'$	$d(Cu) = Cdu$
$(uv)' = u'v + uv'$	$d(uv) = vdu + udv$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$	$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} \quad (v \neq 0)$

现在我们以乘积的微分法则为例加以证明.

根据函数微分的表达式, 有

$$d(uv) = (uv)'dx.$$

再根据乘积的求导法则, 有

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

于是  $d(uv) = (u'v + uv')dx = u'v dx + uv' dx.$

由于  $u' dx = du, v' dx = dv,$

所以

$$d(uv) = vdu + udv.$$

其他法则都可以用类似方法证明.

### 3. 复合函数的微分法则

与复合函数的求导法则相应的复合函数的微分法则可推导如下:

设  $y = f(u)$  及  $u = g(x)$  都可导, 则复合函数  $y = f[g(x)]$  的微分为

$$dy = y'_u dx = f'(u)g'(x)dx.$$

由于  $g'(x)dx = du$ , 所以, 复合函数  $y = f[g(x)]$  的微分公式也可以写成

$$dy = f'(u)du \quad \text{或} \quad dy = y'_u du.$$

由此可见, 无论  $u$  是自变量还是中间变量, 微分形式  $dy = f'(u)du$  保持不变. 这一性质称为微分形式不变性. 这性质表示, 当变换自变量时, 微分形式  $dy = f'(u)du$  并不改变.

例 3  $y = \sin(2x + 1)$ , 求  $dy$ .

解 把  $2x + 1$  看成中间变量  $u$ , 则

$$\begin{aligned} dy &= d(\sin u) = \cos u du = \cos(2x + 1)d(2x + 1) \\ &= \cos(2x + 1) \cdot 2dx = 2\cos(2x + 1)dx. \end{aligned}$$

在求复合函数的导数时, 可以不写出中间变量. 在求复合函数的微分时, 类似地也可以不写出中间变量. 下面我们用这种方法来求函数的微分.

例 4  $y = \ln(1 + e^{x^2})$ , 求  $dy$ .

$$\begin{aligned} \text{解 } dy &= d(\ln(1 + e^{x^2})) = \frac{1}{1 + e^{x^2}} d(1 + e^{x^2}) = \frac{1}{1 + e^{x^2}} \cdot e^{x^2} d(x^2) \\ &= \frac{e^{x^2}}{1 + e^{x^2}} \cdot 2x dx = \frac{2x e^{x^2}}{1 + e^{x^2}} dx. \end{aligned}$$

例 5  $y = e^{1-3x} \cos x$ , 求  $dy$ .

解 应用积的微分法则, 得

$$\begin{aligned} dy &= d(e^{1-3x} \cos x) = \cos x d(e^{1-3x}) + e^{1-3x} d(\cos x) \\ &= (\cos x)e^{1-3x}(-3dx) + e^{1-3x}(-\sin x dx) \\ &= -e^{1-3x}(3\cos x + \sin x)dx. \end{aligned}$$

例 6 在下列等式左端的括号中填入适当的函数, 使等式成立.

$$(1) d(\quad) = xdx; \quad (2) d(\quad) = \cos \omega t dt.$$

解 (1) 我们知道,

$$d(x^2) = 2xdx.$$

可见

$$xdx = \frac{1}{2}d(x^2) = d\left(\frac{x^2}{2}\right),$$

即

$$d\left(\frac{x^2}{2}\right) = x \, dx.$$

一般的,有

$$d\left(\frac{x^2}{2} + C\right) = x \, dx \quad (C \text{ 为任意常数}).$$

(2) 因为

$$d(\sin \omega t) = \omega \cos \omega t \, dt,$$

可见

$$\cos \omega t \, dt = \frac{1}{\omega} d(\sin \omega t) = d\left(\frac{1}{\omega} \sin \omega t\right),$$

即

$$d\left(\frac{1}{\omega} \sin \omega t\right) = \cos \omega t \, dt.$$

一般的,有

$$d\left(\frac{1}{\omega} \sin \omega t + C\right) = \cos \omega t \, dt \quad (C \text{ 为任意常数}).$$

## 四、微分在近似计算中的应用

### 1. 函数的近似计算

在工程问题中,经常会遇到一些复杂的计算公式.如果直接用这些公式进行计算,那是很费力的.利用微分往往可以把一些复杂的计算公式用简单的近似公式来代替.

前面说过,如果  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处的导数  $f'(x_0) \neq 0$ ,且  $|\Delta x|$  很小时,我们有

$$\Delta y \approx dy = f'(x_0) \Delta x.$$

这个式子也可以写为

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \Delta x, \quad (4)$$

或  $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x. \quad (5)$

在(5)式中令  $x = x_0 + \Delta x$ , 即  $\Delta x = x - x_0$ , 那么(5)式可改写为

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (6)$$

如果  $f(x_0)$  与  $f'(x_0)$  都容易计算,那么可利用(4)式来近似计算  $\Delta y$ , 利用(5)式来近似计算  $f(x_0 + \Delta x)$ , 或利用(6)式来近似计算  $f(x)$ . 这种近似计算的实质就是用  $x$  的线性函数  $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  来近似表达函数  $f(x)$ . 从导数的几何意义可知,这也就是用曲线  $y = f(x)$  在点  $(x_0, f(x_0))$  处的切线来近似代替该曲线(就切点邻近部分来说).

**例 7** 有一批半径为 1 cm 的球,为了提高球面的光洁度,要镀上一层铜,厚度定为 0.01 cm. 估计一下每只球需用铜多少 g(铜的密度是  $8.9 \text{ g/cm}^3$ )?

解 先求出镀层的体积,再乘上密度就得到每只球需用铜的质量.

因为镀层的体积等于两个球体体积之差,所以它就是球体体积  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

当  $R$  自  $R_0$  取得增量  $\Delta R$  时的增量  $\Delta V$ : 我们求  $V$  对  $R$  的导数

$$V' \Big|_{R=R_0} = \left( \frac{4}{3}\pi R^3 \right)' \Big|_{R=R_0} = 4\pi R_0^2,$$

由(4)式得

$$\Delta V \approx 4\pi R_0^2 \Delta R.$$

将  $R_0 = 1, \Delta R = 0.01$  代入上式, 得

$$\Delta V \approx 4 \times 3.14 \times 1^2 \times 0.01 \approx 0.13 (\text{cm}^3).$$

于是镀每只球需用的铜约为

$$0.13 \times 8.9 \approx 1.16 (\text{g}).$$

**例 8** 利用微分计算  $\sin 30^\circ 30'$  的近似值.

解 把  $30^\circ 30'$  化为弧度, 得

$$30^\circ 30' = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360}.$$

由于所求的是正弦函数的值, 故设  $f(x) = \sin x$ . 此时  $f'(x) = \cos x$ . 如果取  $x_0 = \frac{\pi}{6}$ , 则  $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$  与  $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  都容易计算, 并且  $\Delta x = \frac{\pi}{360}$  比较小. 应用(5)式便得

$$\begin{aligned} \sin 30^\circ 30' &= \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360}\right) \approx \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{360} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{360} \approx 0.5000 + 0.0076 \\ &= 0.5076. \end{aligned}$$

(本)

下面我们来推导一些常用的近似公式. 为此, 在(6)式中取  $x_0 = 0$ , 于是得

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x. \quad (7)$$

应用(7)式可以推得以下几个在工程上常用的近似公式(下面都假定  $|x|$  是较小的数值):

$$(i) \sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{n}x;$$

$$(ii) \sin x \approx x \quad (x \text{ 用弧度作单位来表达});$$

$$(iii) \tan x \approx x \quad (x \text{ 用弧度作单位来表达});$$

$$(iv) e^x \approx 1 + x;$$

(v)  $\ln(1+x) \approx x$ .

证 (i) 在第一章第七节例 1 中我们已经证明过这个近似公式. 在这里, 我们利用微分证明. 取  $f(x) = \sqrt[n]{1+x}$ , 那么  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = \frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1} \Big|_{x=0} = \frac{1}{n}$ , 代入(7)式便得

$$\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{n}x.$$

证 (ii) 取  $f(x) = \sin x$ , 那么  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = \cos x \Big|_{x=0} = 1$ , 代入(7)式便得

$$\sin x \approx x.$$

其他几个近似公式可用类似方法证明, 这里从略了.

例 9 计算  $\sqrt{1.05}$  的近似值.

解  $\sqrt{1.05} = \sqrt{1+0.05}$ ,

这里  $x = 0.05$ , 其值较小, 利用近似公式(i)( $n = 2$  的情形), 便得

$$\sqrt{1.05} \approx 1 + \frac{1}{2}(0.05) = 1.025.$$

如果直接开方, 可得

$$\sqrt{1.05} = 1.02470.$$

将两个结果比较一下, 可以看出, 用 1.025 作为  $\sqrt{1.05}$  的近似值, 其误差不超过 0.001, 这样的近似值在一般应用上已够精确了. 如果开方次数较高, 就更能体现出用微分进行近似计算的优越性.

## 2. 误差估计

在生产实践中, 经常要测量各种数据. 但是有的数据不易直接测量, 这时我们就通过测量其他有关数据后, 根据某种公式算出所要的数据. 例如, 要计算圆钢的截面积  $A$ , 可先用卡尺测量圆钢截面的直径  $D$ , 然后根据公式  $A = \frac{\pi}{4}D^2$  算出  $A$ .

由于测量仪器的精度、测量的条件和测量的方法等各种因素的影响, 测得的数据往往带有误差, 而根据带有误差的数据计算所得的结果也会有误差, 我们把它叫做间接测量误差.

下面就讨论怎样利用微分来估计间接测量误差.

先说明什么叫绝对误差、什么叫相对误差.

如果某个量的精确值为  $A$ , 它的近似值为  $a$ , 那么  $|A - a|$  叫做  $a$  的绝对误差.

差,而绝对误差与 $|a|$ 的比值 $\frac{|A-a|}{|a|}$ 叫做 $a$ 的相对误差.

在实际工作中,某个量的精确值往往是无法知道的,于是绝对误差和相对误差也就无法求得.但是根据测量仪器的精度等因素,有时能够确定误差在某一个范围内.如果某个量的精确值是 $A$ ,测得它的近似值是 $a$ ,又知道它的误差不超过 $\delta_A$ ,即

$$|A-a|\leq\delta_A,$$

那么 $\delta_A$ 叫做测量 $A$ 的绝对误差限,而 $\frac{\delta_A}{|a|}$ 叫做测量 $A$ 的相对误差限.

**例 10** 设测得圆钢截面的直径 $D=60.03$  mm,测量 $D$ 的绝对误差限 $\delta_D=0.05$  mm.利用公式

$$A=\frac{\pi}{4}D^2$$

计算圆钢的截面积时,试估计面积的误差.

**解** 我们把测量 $D$ 时所产生的误差当作自变量 $D$ 的增量 $\Delta D$ ,那么,利用公式 $A=\frac{\pi}{4}D^2$ 来计算 $A$ 时所产生的误差就是函数 $A$ 的对应增量 $\Delta A$ .当 $|\Delta D|$ 很小时,可以利用微分 $dA$ 近似地代替增量 $\Delta A$ ,即

$$\Delta A \approx dA = A' \cdot \Delta D = \frac{\pi}{2}D \cdot \Delta D.$$

由于 $D$ 的绝对误差限为 $\delta_D=0.05$  mm,所以

$$|\Delta D| \leq \delta_D = 0.05,$$

而  $|\Delta A| \approx |dA| = \frac{\pi}{2}D \cdot |\Delta D| \leq \frac{\pi}{2}D \cdot \delta_D,$

因此得出 $A$ 的绝对误差限约为

$$\delta_A = \frac{\pi}{2}D \cdot \delta_D = \frac{\pi}{2} \times 60.03 \times 0.05 \approx 4.715 \text{ (mm}^2\text{)};$$

$A$ 的相对误差限约为

$$\frac{\delta_A}{A} = \frac{\frac{\pi}{2}D \cdot \delta_D}{\frac{\pi}{4}D^2} = 2 \frac{\delta_D}{D} = 2 \times \frac{0.05}{60.03} \approx 0.17\%.$$

一般的,根据直接测量的 $x$ 值按公式 $y=f(x)$ 计算 $y$ 值时,如果已知测量 $x$ 的绝对误差限是 $\delta_x$ ,即

$$|\Delta x| \leq \delta_x,$$

那么,当 $y' \neq 0$ 时, $y$ 的绝对误差

$$|\Delta y| \approx |dy| = |y'| \cdot |\Delta x| \leq |y'| \cdot \delta_x,$$

即  $y$  的绝对误差限约为

$$\delta_y = |y'| \cdot \delta_x; \quad (8)$$

$y$  的相对误差限约为

$$\frac{\delta_y}{|y|} = \left| \frac{y'}{y} \right| \cdot \delta_x. \quad (9)$$

以后常把绝对误差限与相对误差限简称为绝对误差与相对误差.

## 习题 2-5

- 已知  $y = x^3 - x$ , 计算在  $x = 2$  处当  $\Delta x$  分别等于 1, 0.1, 0.01 时的  $\Delta y$  及  $dy$ .
- 设函数  $y = f(x)$  的图形如图 2-12, 试在图 2-12(a)、(b)、(c)、(d) 中分别标出在点  $x_0$  的  $dy$ 、 $\Delta y$  及  $\Delta y - dy$ , 并说明其正负.

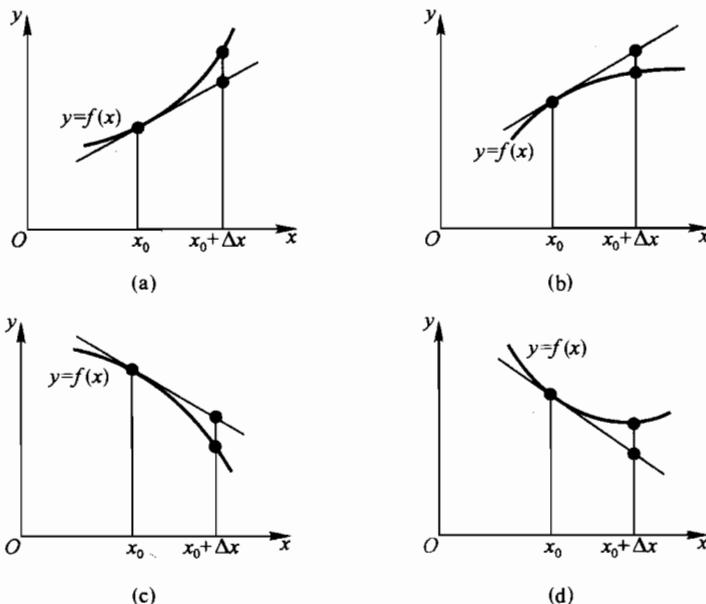


图 2-12

3. 求下列函数的微分:

$$(1) y = \frac{1}{x} + 2\sqrt{x};$$

$$(2) y = x \sin 2x;$$

$$(3) y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}};$$

$$(4) y = \ln^2(1-x);$$

$$(5) y = x^2 e^{2x};$$

$$(6) y = e^{-x} \cos(3-x);$$

$$(7) y = \arcsin \sqrt{1-x^2};$$

$$(8) y = \tan^2(1+2x^2);$$

$$(9) y = \arctan \frac{1-x^2}{1+x^2};$$

$$(10) s = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (A, \omega, \varphi \text{ 是常数}).$$

4. 将适当的函数填入下列括号内,使等式成立:

$$(1) d(\quad) = 2dx;$$

$$(2) d(\quad) = 3x dx;$$

$$(3) d(\quad) = \cos t dt;$$

$$(4) d(\quad) = \sin \omega x dx;$$

$$(5) d(\quad) = \frac{1}{1+x} dx;$$

$$(6) d(\quad) = e^{-2x} dx;$$

$$(7) d(\quad) = \frac{1}{\sqrt{x}} dx;$$

$$(8) d(\quad) = \sec^2 3x dx.$$

5. 如图 2-13 所示的电缆  $AOB$  的长为  $s$ , 跨度为  $2l$ , 电缆的最低点  $O$  与杆顶连线  $AB$  的距离为  $f$ , 则电缆长可按下面公式计算

$$s = 2l \left( 1 + \frac{2f^2}{3l^2} \right),$$

当  $f$  变化了  $\Delta f$  时, 电缆长的变化约为多少?

6. 设扇形的圆心角  $\alpha = 60^\circ$ , 半径  $R = 100$  cm(图 2-14). 如果  $R$  不变,  $\alpha$  减少  $30'$ , 问扇形面积大约改变了多少? 又如果  $\alpha$  不变,  $R$  增加 1 cm, 问扇形面积大约改变了多少?

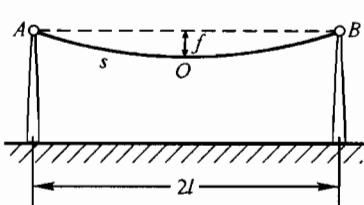


图 2-13

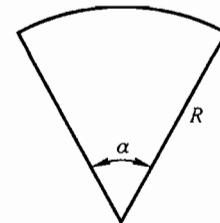


图 2-14

7. 计算下列三角函数值的近似值:

$$(1) \cos 29^\circ; \quad (2) \tan 136^\circ.$$

8. 计算下列反三角函数值的近似值:

$$(1) \arcsin 0.5002; \quad (2) \arccos 0.4995.$$

9. 当  $|x|$  较小时, 证明下列近似公式:

$$(1) \tan x \approx x \quad (x \text{ 是角的弧度值}); \quad (2) \ln(1+x) \approx x;$$

$$(3) \frac{1}{1+x} \approx 1-x,$$

并计算  $\tan 45'$  和  $\ln 1.002$  的近似值.

10. 计算下列各根式的近似值:

$$(1) \sqrt[3]{996}; \quad (2) \sqrt[6]{65}.$$

11. 计算球体体积时, 要求精确度在 2% 以内. 问这时测量直径  $D$  的相对误差不能超过多少?

12. 某厂生产如图 2-15 所示的扇形板, 半径  $R = 200$  mm, 要求

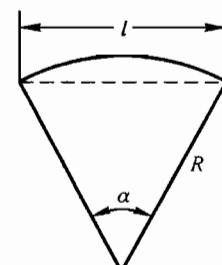


图 2-15

中心角  $\alpha$  为  $55^\circ$ . 产品检验时, 一般用测量弦长  $l$  的办法来间接测量中心角  $\alpha$ . 如果测量弦长  $l$  时的误差  $\delta_l = 0.1 \text{ mm}$ , 问由此而引起的中心角测量误差  $\delta_\alpha$  是多少?

## 总习题二

1. 在“充分”、“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内:

(1)  $f(x)$  在点  $x_0$  可导是  $f(x)$  在点  $x_0$  连续的 \_\_\_\_\_ 条件.  $f(x)$  在点  $x_0$  连续是  $f(x)$  在点  $x_0$  可导的 \_\_\_\_\_ 条件.

(2)  $f(x)$  在点  $x_0$  的左导数  $f'_-(x_0)$  及右导数  $f'_+(x_0)$  都存在且相等是  $f(x)$  在点  $x_0$  可导的 \_\_\_\_\_ 条件.

(3)  $f(x)$  在点  $x_0$  可导是  $f(x)$  在点  $x_0$  可微的 \_\_\_\_\_ 条件.

2. 设  $f(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$  ( $n \geq 2$ ), 则  $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

3. 选择下述题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设  $f(x)$  在  $x = a$  的某个邻域内有定义, 则  $f(x)$  在  $x = a$  处可导的一个充分条件是 ( ).

(A)  $\lim_{h \rightarrow +\infty} h \left[ f\left(a + \frac{1}{h}\right) - f(a) \right]$  存在.

(B)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a+h)}{h}$  存在.

(C)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$  存在.

(D)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{h}$  存在.

4. 设有一根细棒, 取棒的一端作为原点, 棒上任意点的坐标为  $x$ , 于是分布在区间  $[0, x]$  上细棒的质量  $m$  与  $x$  存在函数关系  $m = m(x)$ . 应怎样确定细棒在点  $x_0$  处的线密度(对于均匀细棒来说, 单位长度细棒的质量叫做这细棒的线密度)?

5. 根据导数的定义, 求  $f(x) = \frac{1}{x}$  的导数.

6. 求下列函数  $f(x)$  的  $f'_-(0)$  及  $f'_+(0)$ , 又  $f'(0)$  是否存在:

(1)  $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ \ln(1+x), & x \geq 0; \end{cases}$

(2)  $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{1+e^x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

7. 讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在  $x = 0$  处的连续性与可导性.

8. 求下列函数的导数:

$$(1) y = \arcsin(\sin x);$$

$$(2) y = \arctan \frac{1+x}{1-x};$$

$$(3) y = \ln \tan \frac{x}{2} - \cos x \cdot \ln \tan x;$$

$$(4) y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}});$$

$$(5) y = x^{\frac{1}{x}} (x > 0).$$

9. 求下列函数的二阶导数:

$$(1) y = \cos^2 x \cdot \ln x;$$

$$(2) y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

\* 10. 求下列函数的  $n$  阶导数:

$$(1) y = \sqrt[n]{1+x};$$

$$(2) y = \frac{1-x}{1+x}.$$

11. 设函数  $y = y(x)$  由方程  $e^y + xy = e$  所确定, 求  $y''(0)$ .

12. 求下列由参数方程所确定的函数的一阶导数  $\frac{dy}{dx}$  及二阶导数  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

$$(1) \begin{cases} x = a \cos^3 \theta, \\ y = a \sin^3 \theta; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x = \ln \sqrt{1+t^2}, \\ y = \arctan t. \end{cases}$$

13. 求曲线  $\begin{cases} x = 2e^t, \\ y = e^{-t}, \end{cases}$  在  $t=0$  相应的点处的切线方程及法线方程.

14. 已知  $f(x)$  是周期为 5 的连续函数, 它在  $x=0$  的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x) = 8x + o(x),$$

且  $f(x)$  在  $x=1$  处可导, 求曲线  $y=f(x)$  在点  $(6, f(6))$  处的切线方程.

15. 当正在高度  $H$  水平飞行的飞机开始向机场跑道下降时, 如图 2-16 所示从飞机到机场的水平地面距离为  $L$ . 假设飞机下降的路径为三次函数  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  的图形, 其中  $y|_{x=-L} = H$ ,  $y|_{x=0} = 0$ . 试确定飞机的降落路径.

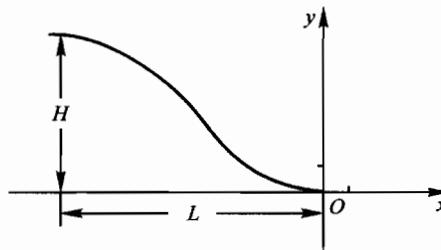


图 2-16

16. 甲船以  $6 \text{ km/h}$  的速率向东行驶, 乙船以  $8 \text{ km/h}$  的速率向南行驶. 在中午十二点整, 乙船位于甲船之北  $16 \text{ km}$  处. 问下午一点正两船相离的速率为多少?

17. 利用函数的微分代替函数的增量求  $\sqrt[3]{1.02}$  的近似值.

18. 已知单摆的振动周期  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ , 其中  $g = 980 \text{ cm/s}^2$ ,  $l$  为摆长(单位为 cm). 设原摆长为 20 cm, 为使周期  $T$  增大 0.05 s, 摆长约需加长多少?

### 第三章 微分中值定理与导数的应用

上一章里,从分析实际问题中因变量相对于自变量的变化快慢出发,引进了导数概念,并讨论了导数的计算方法.本章中,我们将应用导数来研究函数以及曲线的某些性态,并利用这些知识解决一些实际问题.为此,先要介绍微分学的几个中值定理,它们是导数应用的理论基础.

#### 第一节 微分中值定理

我们先讲罗尔(Rolle)定理,然后根据它推出拉格朗日(Lagrange)中值定理和柯西中值定理.

##### 一、罗尔定理

首先,我们观察图 3-1. 设曲线弧  $\widehat{AB}$  是函数  $y = f(x)$  ( $x \in [a, b]$ ) 的图形. 这是一条连续的曲线弧,除端点外处处有不垂直于  $x$  轴的切线,且两个端点的纵坐标相等,即  $f(a) = f(b)$ . 可以发现在曲线弧的最高点  $C$  处或最低点  $D$  处,曲线有水平的切线. 如果记  $C$  点的横坐标为  $\xi$ ,那么就有  $f'(\xi) = 0$ . 现在用分析语言把这个几何现象描述出来,就可得下面的罗尔定理. 为了应用方便,先介绍费马(Fermat)引理.

费马引理 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某邻域

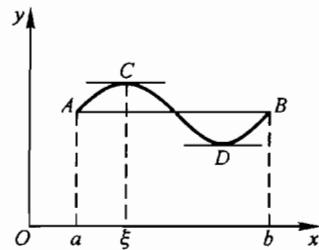


图 3-1

$U(x_0)$  内有定义,并且在  $x_0$  处可导,如果对任意的  $x \in U(x_0)$ ,有

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad (\text{或 } f(x) \geqslant f(x_0)),$$

那么  $f'(x_0) = 0$ .

证 不妨设  $x \in U(x_0)$  时,  $f(x) \leqslant f(x_0)$  (如果  $f(x) \geqslant f(x_0)$ , 可以类似地证明). 于是,对于  $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$ , 有

$$f(x_0 + \Delta x) \leqslant f(x_0),$$

从而当  $\Delta x > 0$  时,

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leqslant 0;$$

当  $\Delta x < 0$  时,

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0.$$

根据函数  $f(x)$  在  $x_0$  可导的条件及极限的保号性,便得到

$$f'(x_0) = f'_{+}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0,$$

$$f'(x_0) = f'_{-}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0.$$

所以,  $f'(x_0) = 0$ . 证毕.

通常称导数等于零的点为函数的驻点(或稳定点,临界点).

罗尔定理 如果函数  $f(x)$  满足

(1) 在闭区间  $[a, b]$  上连续;

(2) 在开区间  $(a, b)$  内可导;

(3) 在区间端点处的函数值相等, 即  $f(a) = f(b)$ ,

那么在  $(a, b)$  内至少有一点  $\xi$  ( $a < \xi < b$ ), 使得  $f'(\xi) = 0$ .

证 由于  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 根据闭区间上连续函数的最大值最小值定理,  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上必定取得它的最大值  $M$  和最小值  $m$ . 这样, 只有两种可能情形:

(1)  $M = m$ . 这时  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上必然取相同的数值  $M$ :  $f(x) = M$ . 由此,  $\forall x \in (a, b)$ , 有  $f'(x) = 0$ . 因此, 任取  $\xi \in (a, b)$ , 有  $f'(\xi) = 0$ .

(2)  $M > m$ . 因为  $f(a) = f(b)$ , 所以  $M$  和  $m$  这两个数中至少有一个不等于  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  的端点处的函数值. 为确定起见, 不妨设  $M \neq f(a)$  (如果设  $m \neq f(a)$ , 证法完全类似), 那么必定在开区间  $(a, b)$  内有一点  $\xi$  使  $f(\xi) = M$ . 因此,  $\forall x \in [a, b]$ , 有  $f(x) \leq f(\xi)$ , 从而由费马引理可知  $f'(\xi) = 0$ . 定理证毕.

## 二、拉格朗日中值定理

罗尔定理中  $f(a) = f(b)$  这个条件是相当特殊的, 它使罗尔定理的应用受到限制. 如果把  $f(a) = f(b)$  这个条件取消, 但仍保留其余两个条件, 并相应地改变结论, 那么就得到微分学中十分重要的拉格朗日中值定理.

拉格朗日中值定理 如果函数  $f(x)$  满足

(1) 在闭区间  $[a, b]$  上连续;

(2) 在开区间  $(a, b)$  内可导,

那么在  $(a, b)$  内至少有一点  $\xi$  ( $a < \xi < b$ ), 使等式

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a) \quad (1)$$

成立.

在证明之前,先看一下定理的几何意义.如图 3-2 所示,如果把(1)式改写成

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi),$$

由图 3-2 可看出,  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  为弦  $AB$  的斜率,

而  $f'(\xi)$  为曲线在点  $C$  处的切线的斜率.因此拉格朗日中值定理的几何意义是:

如果连续

曲线  $y = f(x)$  的弧  $AB$  上除端点外处处具有不

垂直于  $x$  轴的切线,那么这弧上至少有一点  $C$ ,使曲线在  $C$  点处的切线平行于弦  $AB$ .

从图 3-1 看出,在罗尔定理中,由于  $f(a) = f(b)$ , 弦  $AB$  是平行于  $x$  轴的,因此点  $C$  处的切线实际上也平行于弦  $AB$ .由此可见,罗尔定理是拉格朗日中值定理的特殊情形.

从上述拉格朗日中值定理与罗尔定理的关系,自然想到利用罗尔定理来证明拉格朗日中值定理.但在拉格朗日中值定理中,函数  $f(x)$  不一定具备  $f(a) = f(b)$  这个条件,为此我们设想构造一个与  $f(x)$  有密切联系的函数  $\varphi(x)$  (称为辅助函数),使  $\varphi(x)$  满足条件  $\varphi(a) = \varphi(b)$ .然后对  $\varphi(x)$  应用罗尔定理,再把对  $\varphi(x)$  所得的结论转化到  $f(x)$  上,证得所要的结果.我们从拉格朗日中值定理的几何解释中来寻找辅助函数,从图 3-2 中看到,有向线段  $NM$  的值是  $x$  的函数,把它表示为  $\varphi(x)$ ,它与  $f(x)$  有密切的联系,且当  $x = a$  及  $x = b$  时,点  $M$  与点  $N$  重合,即有  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ .为求得函数  $\varphi(x)$  的表达式,设直线  $AB$  的方程为  $y = L(x)$ ,则

$$L(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

由于点  $M$ 、 $N$  的纵坐标依次为  $f(x)$  及  $L(x)$ ,故表示有向线段  $NM$  的值的函数

$$\varphi(x) = f(x) - L(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

下面就利用这个辅助函数来证明拉格朗日中值定理.

### 定理的证明 引进辅助函数

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

容易验证函数  $\varphi(x)$  适合罗尔定理的条件:  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ ;  $\varphi(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续,在开区间  $(a, b)$  内可导,且

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

根据罗尔定理, 可知在  $(a, b)$  内至少有一点  $\xi$ , 使  $\varphi'(\xi) = 0$ , 即

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

由此得

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi),$$

即

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

定理证毕.

显然, 公式(1)对于  $b < a$  也成立. (1)式叫做拉格朗日中值公式.

设  $x$  为区间  $[a, b]$  内一点,  $x + \Delta x$  为这区间内的另一点 ( $\Delta x > 0$  或  $\Delta x < 0$ ), 则公式(1)在区间  $[x, x + \Delta x]$  (当  $\Delta x > 0$  时) 或在区间  $[x + \Delta x, x]$  (当  $\Delta x < 0$  时) 上就成为

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta \Delta x) \cdot \Delta x \quad (0 < \theta < 1). \quad (2)$$

这里数值  $\theta$  在 0 与 1 之间, 所以  $x + \theta \Delta x$  是在  $x$  与  $x + \Delta x$  之间.

如果记  $f(x)$  为  $y$ , 则(2)式又可写成

$$\Delta y = f'(x + \theta \Delta x) \cdot \Delta x \quad (0 < \theta < 1). \quad (3)$$

我们知道, 函数的微分  $dy = f'(x) \cdot \Delta x$  是函数的增量  $\Delta y$  的近似表达式, 一般说来, 以  $dy$  近似代替  $\Delta y$  时所产生的误差只有当  $\Delta x \rightarrow 0$  时才趋于零; 而(3)式却给出了自变量取得有限增量  $\Delta x$  ( $|\Delta x|$  不一定很小) 时, 函数增量  $\Delta y$  的准确表达式. 因此, 这个定理也叫做有限增量定理, (3)式称为有限增量公式. 拉格朗日中值定理在微分学中占有重要地位, 有时也称这定理为微分中值定理. 在某些问题中当自变量  $x$  取得有限增量  $\Delta x$  而需要函数增量的准确表达式时, 拉格朗日中值定理就显出它的价值.

作为拉格朗日中值定理的一个应用, 我们来导出以后讲积分学时很有用的一个定理. 我们知道, 如果函数  $f(x)$  在某一区间上是一个常数, 那么  $f(x)$  在该区间上的导数恒为零. 它的逆命题也是成立的, 这就是:

**定理** 如果函数  $f(x)$  在区间  $I$  上的导数恒为零, 那么  $f(x)$  在区间  $I$  上是一个常数.

**证** 在区间  $I$  上任取两点  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ), 应用(1)式就得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \quad (x_1 < \xi < x_2).$$

由假定,  $f'(\xi) = 0$ , 所以  $f(x_2) - f(x_1) = 0$ , 即

$$f(x_2) = f(x_1).$$

因为  $x_1, x_2$  是  $I$  上任意两点, 所以上面的等式表明:  $f(x)$  在  $I$  上的函数值总是相等的, 这就是说,  $f(x)$  在区间  $I$  上是一个常数.

从上述论证中可以看出,虽然拉格朗日中值定理中的  $\xi$  的准确数值不知道,但在这里并不妨碍它的应用.

例 1 证明当  $x > 0$  时,

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

证 设  $f(t) = \ln(1+t)$ , 显然  $f(t)$  在区间  $[0, x]$  上满足拉格朗日中值定理的条件, 根据定理, 应有

$$f(x) - f(0) = f'(\xi)(x-0), 0 < \xi < x.$$

由于  $f(0) = 0, f'(t) = \frac{1}{1+t}$ , 因此上式即为

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1+\xi}.$$

又由  $0 < \xi < x$ , 有

$$\frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+\xi} < x,$$

即

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x (x > 0).$$

### 三、柯西中值定理

上面已经指出, 如果连续曲线弧  $AB$  上除端点外处处具有不垂直于横轴的切线, 那么这段弧上至少有一点  $C$ , 使曲线在点  $C$  处的切线平行于弦  $AB$ . 设  $AB$  由参数方程

$$\begin{cases} X = F(x), \\ Y = f(x) \end{cases} \quad (a \leq x \leq b)$$

表示(图 3-3), 其中  $x$  为参数. 那么曲线上点  $(X, Y)$  处的切线的斜率为

$$\frac{dY}{dX} = \frac{f'(x)}{F'(x)},$$

弦  $AB$  的斜率为

$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)}.$$

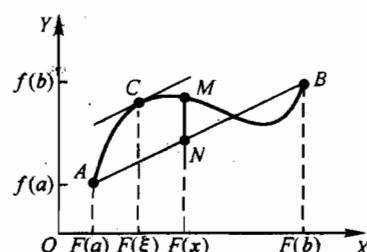


图 3-3

假定点  $C$  对应于参数  $x = \xi$ , 那么曲线上点  $C$  处的切线平行于弦  $AB$ , 可表示为

$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

与这一事实相应的是

柯西中值定理 如果函数  $f(x)$  及  $F(x)$  满足

- (1) 在闭区间  $[a, b]$  上连续;
- (2) 在开区间  $(a, b)$  内可导;
- (3) 对任一  $x \in (a, b)$ ,  $F'(x) \neq 0$ ,

那么在  $(a, b)$  内至少有一点  $\xi$ , 使等式

$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \quad (4)$$

成立.

证 首先注意到  $F(b) - F(a) \neq 0$ . 这是由于

$$F(b) - F(a) = F'(\eta)(b - a),$$

其中  $a < \eta < b$ , 根据假定  $F'(\eta) \neq 0$ , 又  $b - a \neq 0$ , 所以

$$F(b) - F(a) \neq 0.$$

类似拉格朗日中值定理的证明, 我们仍然以表示有向线段  $NM$  的值的函数  $\varphi(x)$  (见图 3-3) 作为辅助函数. 这里, 点  $M$  的纵坐标为  $Y = f(x)$ , 点  $N$  的纵坐标为

$$Y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} [F(x) - F(a)],$$

于是

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} [F(x) - F(a)].$$

容易验证, 这个辅助函数  $\varphi(x)$  适合罗尔定理的条件:  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ ;  $\varphi(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 在开区间  $(a, b)$  内可导且

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} \cdot F'(x).$$

根据罗尔定理, 可知在  $(a, b)$  内必定有一点  $\xi$ , 使得  $\varphi'(\xi) = 0$ , 即

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} \cdot F'(\xi) = 0,$$

由此得

$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)},$$

定理证毕.

很明显, 如果取  $F(x) = x$ , 那么  $F(b) - F(a) = b - a$ ,  $F'(x) = 1$ , 因而公式(4)就可以写成:

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \quad (a < \xi < b),$$

这样就变成拉格朗日中值公式了.

## 习 题 3-1

1. 验证罗尔定理对函数  $y = \ln \sin x$  在区间  $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$  上的正确性.
2. 验证拉格朗日中值定理对函数  $y = 4x^3 - 5x^2 + x - 2$  在区间  $[0, 1]$  上的正确性.
3. 对函数  $f(x) = \sin x$  及  $F(x) = x + \cos x$  在区间  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上验证柯西中值定理的正确性.
4. 试证明对函数  $y = px^2 + qx + r$  应用拉格朗日中值定理时所求得的点  $\xi$  总是位于区间的正中间.
5. 不用求出函数  $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$  的导数, 说明方程  $f'(x) = 0$  有几个实根, 并指出它们所在的区间.
6. 证明恒等式:  $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ).
7. 若方程  $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x = 0$  有一个正根  $x = x_0$ , 证明方程  $a_0 n x^{n-1} + a_1 (n-1) x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0$  必有一个小于  $x_0$  的正根.
8. 若函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  内具有二阶导数, 且  $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$ , 其中  $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$ , 证明: 在  $(x_1, x_3)$  内至少有一点  $\xi$ , 使得  $f''(\xi) = 0$ .
9. 设  $a > b > 0, n > 1$ , 证明:
$$nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b).$$
10. 设  $a > b > 0$ , 证明:
$$\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}.$$
11. 证明下列不等式:
  - (1)  $|\arctan a - \arctan b| \leq |a - b|$ ;
  - (2) 当  $x > 1$  时,  $e^x > e \cdot x$ .
12. 证明方程  $x^5 + x - 1 = 0$  只有一个正根.
13. 设  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 证明在  $(a, b)$  内有一点  $\xi$ , 使
 
$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}^2 = (b-a) \begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$
14. 证明: 若函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内满足关系式  $f'(x) = f(x)$ , 且  $f(0) = 1$ , 则  $f(x) = e^x$ .
15. 设函数  $y = f(x)$  在  $x = 0$  的某邻域内具有  $n$  阶导数, 且  $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$ , 试用柯西中值定理证明:
 
$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} \quad (0 < \theta < 1).$$

## 第二节 洛必达法则

如果当  $x \rightarrow a$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时, 两个函数  $f(x)$  与  $F(x)$  都趋于零或都趋于无

穷大,那么极限  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{F(x)}$  可能存在、也可能不存在.通常把这种极限叫做未定式,并分别简记为  $\frac{0}{0}$  或  $\frac{\infty}{\infty}$ .在第一章第六节中讨论过的极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$  就是未定式  $\frac{0}{0}$  的一个例子.对于这类极限,即使它存在也不能用“商的极限等于极限的商”这一法则.下面我们将根据柯西中值定理来推出求这类极限的一种简便且重要的方法.

我们着重讨论  $x \rightarrow a$  时的未定式  $\frac{0}{0}$  的情形,关于这情形有以下定理:

### 定理 1 设

- (1) 当  $x \rightarrow a$  时,函数  $f(x)$  及  $F(x)$  都趋于零;
- (2) 在点  $a$  的某去心邻域内,  $f'(x)$  及  $F'(x)$  都存在且  $F'(x) \neq 0$ ;
- (3)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$  存在(或为无穷大),

那么

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

这就是说,当  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$  存在时,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)}$  也存在且等于  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ ;当  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$  为无穷大时,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)}$  也是无穷大.这种在一定条件下通过分子分母分别求导再求极限来确定未定式的值的方法称为洛必达(L'Hospital)法则.

证 因为求  $\frac{f(x)}{F(x)}$  当  $x \rightarrow a$  时的极限与  $f(a)$  及  $F(a)$  无关,所以可以假定  $f(a) = F(a) = 0$ ,于是由条件(1)、(2)知道,  $f(x)$  及  $F(x)$  在点  $a$  的某一邻域内是连续的.设  $x$  是这邻域内的一点,那么在以  $x$  及  $a$  为端点的区间上,柯西中值定理的条件均满足,因此有

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{F(x) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \quad (\xi \text{ 在 } x \text{ 与 } a \text{ 之间}).$$

令  $x \rightarrow a$ ,并对上式两端求极限,注意到  $x \rightarrow a$  时  $\xi \rightarrow a$ ,再根据条件(3)便得要证明的结论.

如果  $\frac{f'(x)}{F'(x)}$  当  $x \rightarrow a$  时仍属  $\frac{0}{0}$  型,且这时  $f'(x)$ ,  $F'(x)$  能满足定理中  $f(x)$ ,  $F(x)$  所要满足的条件,那么可以继续施用洛必达法则先确定  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ ,

从而确定  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)}$ ,即

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{F''(x)}.$$

且可以以次类推.

例 1 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$  ( $b \neq 0$ ).

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cos ax}{b \cos bx} = \frac{a}{b}.$

例 2 求  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}.$

解  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{3x^2 - 2x - 1}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{6x - 2} = \frac{3}{2}.$

注意, 上式中的  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{6x - 2}$  已不是未定式, 不能对它应用洛必达法则, 否则会导致错误结果. 以后使用洛必达法则时应当经常注意这一点, 如果不是未定式, 就不能应用洛必达法则.

例 3 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$

我们指出, 对于  $x \rightarrow \infty$  时的未定式  $\frac{0}{0}$  以及对于  $x \rightarrow a$  或  $x \rightarrow \infty$  时的未定式  $\frac{\infty}{\infty}$ , 也有相应的洛必达法则. 例如, 对于  $x \rightarrow \infty$  时的未定式  $\frac{0}{0}$  有以下定理.

定理 2 设

- (1) 当  $x \rightarrow \infty$  时, 函数  $f(x)$  及  $F(x)$  都趋于零;
- (2) 当  $|x| > N$  时  $f'(x)$  与  $F'(x)$  都存在, 且  $F'(x) \neq 0$ ;
- (3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}$  存在(或为无穷大),

那么

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

例 4 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}}.$

解  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$

例 5 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n}$  ( $n > 0$ ).

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{nx^{n-1}} = 0.$$

例 6 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{\lambda x}}$  ( $n$  为正整数,  $\lambda > 0$ ).

解 相继应用洛必达法则  $n$  次, 得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{\lambda x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2 e^{\lambda x}} = \dots \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{\lambda^n e^{\lambda x}} = 0. \end{aligned}$$

事实上, 如果例 6 中的  $n$  不是正整数而是任何正数, 那么极限仍为零.

对数函数  $\ln x$ 、幂函数  $x^n$  ( $n > 0$ )、指数函数  $e^{\lambda x}$  ( $\lambda > 0$ ) 均为当  $x \rightarrow +\infty$  时的无穷大, 但从例 5、例 6 可以看出, 这三个函数增大的“速度”是很不一样的, 幂函数增大的“速度”比对数函数快得多, 而指数函数增大的“速度”又比幂函数快得多.

下表列出了  $x = 10, 100, 1000$  时, 函数  $\ln x, \sqrt{x}, x^2$  及  $e^x$  相应的函数值. 从中可以看出当  $x$  增大时这几个函数增大“速度”快慢的情况。

$x$	10	100	1000
$\ln x$	2.3	4.6	6.9
$\sqrt{x}$	3.2	10	31.6
$x^2$	100	$10^4$	$10^6$
$e^x$	$2.20 \times 10^4$	$2.69 \times 10^{43}$	$1.97 \times 10^{434}$

其他还有一些  $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$  型的未定式, 也可通过  $\frac{0}{0}$  或  $\frac{\infty}{\infty}$  型的未定式来计算, 下面用例子说明.

例 7 求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x$  ( $n > 0$ ).

解 这是未定式  $0 \cdot \infty$ . 因为

$$x^n \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x^n}},$$

当  $x \rightarrow 0^+$  时, 上式右端是未定式  $\frac{\infty}{\infty}$ , 应用洛必达法则, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-n}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{-x^n}{n} \right) = 0.$$

**例 8** 求  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$ .

**解** 这是未定式  $\infty - \infty$ . 因为

$$\sec x - \tan x = \frac{1 - \sin x}{\cos x},$$

当  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$  时, 上式右端是未定式  $\frac{0}{0}$ , 应用洛必达法则, 得

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0.$$

**例 9** 求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ .

**解** 这是未定式  $0^0$ . 设  $y = x^x$ , 取对数得

$$\ln y = x \ln x,$$

当  $x \rightarrow 0^+$  时, 上式右端是未定式  $0 \cdot \infty$ . 应用例 7 的结果, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = 0.$$

因为  $y = e^{\ln y}$ , 而  $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln y} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y}$  (当  $x \rightarrow 0^+$ ),

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} y = e^0 = 1.$$

洛必达法则是求未定式的一种有效方法, 但最好能与其他求极限的方法结合使用. 例如能化简时应尽可能先化简, 可以应用等价无穷小替代或重要极限时, 应尽可能应用, 这样可以使运算简捷.

**例 10** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \sin x}$ .

**解** 如果直接用洛必达法则, 那么分母的导数(尤其是高阶导数)较繁. 如果作一个等价无穷小替代, 那么运算就方便得多. 其运算如下:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} \cdot \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sec^2 x \tan x}{6x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

最后, 我们指出, 本节定理给出的是求未定式的一种方法. 当定理条件满足时, 所求的极限当然存在(或为  $\infty$ ), 但当定理条件不满足时, 所求极限却不一定不存在, 这就是说, 当  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{F'(x)}$  不存在时(等于无穷大的情况除外),  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{F(x)}$  仍可能存在(见本节习题第 2 题).

### 习题 3-2

1. 用洛必达法则求下列极限:

- (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x};$
- (2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x};$
- (3)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a};$
- (4)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\tan 5x};$
- (5)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2};$
- (6)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x'' - a''} (a \neq 0);$
- (7)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \tan 7x}{\ln \tan 2x};$
- (8)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan 3x};$
- (9)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\operatorname{arccot} x};$
- (10)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{\sec x - \cos x};$
- (11)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot 2x;$
- (12)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{1/x^2};$
- (13)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right);$
- (14)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{a}{x} \right)^x;$
- (15)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x};$
- (16)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} \right)^{\tan x};$

2. 验证极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$  存在, 但不能用洛必达法则得出.

3. 验证极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$  存在, 但不能用洛必达法则得出.

#### 4. 讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} \left[ \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ e^{-\frac{1}{2}}, & x \leq 0 \end{cases}$$

在点  $x=0$  处的连续性.

### 第三节 泰勒公式

对于一些较复杂的函数, 为了便于研究, 往往希望用一些简单的函数来近似表达. 由于用多项式表示的函数, 只要对自变量进行有限次加、减、乘三种算术运算, 便能求出它的函数值来, 因此我们经常用多项式来近似表达函数.

在微分的应用中已经知道, 当  $|x|$  很小时, 有如下的近似等式:

$$e^x \approx 1 + x, \quad \ln(1 + x) \approx x.$$

这些都是用一次多项式来近似表达函数的例子. 显然, 在  $x=0$  处这些一次多项式及其一阶导数的值, 分别等于被近似表达的函数及其导数的相应值.

但是这种近似表达式还存在着不足之处: 首先是精确度不高, 它所产生的误差仅是关于  $x$  的高阶无穷小; 其次是用它来作近似计算时, 不能具体估算出误差大小. 因此, 对于精确度要求较高且需要估计误差的时候, 就必须用高次多项

式来近似表达函数,同时给出误差公式.

于是提出如下的问题:设函数  $f(x)$  在含有  $x_0$  的开区间内具有直到  $(n+1)$  阶导数,试找出一个关于  $(x-x_0)$  的  $n$  次多项式

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n \quad (1)$$

来近似表达  $f(x)$ ,要求  $p_n(x)$  与  $f(x)$  之差是比  $(x-x_0)^n$  高阶的无穷小,并给出误差  $|f(x) - p_n(x)|$  的具体表达式.

下面我们来讨论这个问题.假设  $p_n(x)$  在  $x_0$  处的函数值及它的直到  $n$  阶导数在  $x_0$  处的值依次与  $f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$  相等,即满足

$$p_n(x_0) = f(x_0), \quad p'_n(x_0) = f'(x_0),$$

$$p''_n(x_0) = f''(x_0), \dots, \quad p_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0),$$

按这些等式来确定多项式(1)的系数  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ .为此,对(1)式求各阶导数,然后分别代入以上等式,得

$$a_0 = f(x_0), \quad 1 \cdot a_1 = f'(x_0),$$

$$2! a_2 = f''(x_0), \dots, \quad n! a_n = f^{(n)}(x_0),$$

即得

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = f'(x_0), \quad a_2 = \frac{1}{2!} f''(x_0), \dots, \quad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

将求得的系数  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  代入(1)式,有

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \\ &\quad \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \end{aligned} \quad (2)$$

下面的定理表明,多项式(2)的确是所要找的  $n$  次多项式.

**泰勒(Taylor)中值定理** 如果函数  $f(x)$  在含有  $x_0$  的某个开区间  $(a, b)$  内具有直到  $(n+1)$  阶的导数,则对任一  $x \in (a, b)$ ,有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \\ &\quad \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x), \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad (4)$$

这里  $\xi$  是  $x_0$  与  $x$  之间的某个值.

证  $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$ .只需证明

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}).$$

由假设可知,  $R_n(x)$  在  $(a, b)$  内具有直到  $(n+1)$  阶的导数, 且

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = R''_n(x_0) = \cdots = R^{(n)}_n(x_0) = 0.$$

对两个函数  $R_n(x)$  及  $(x - x_0)^{n+1}$  在以  $x_0$  及  $x$  为端点的区间上应用柯西中值定理(显然, 这两个函数满足柯西中值定理的条件), 得

$$\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{(x - x_0)^{n+1} - 0} = \frac{R'_n(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n}$$

( $\xi_1$  在  $x_0$  与  $x$  之间),

再对两个函数  $R'_n(x)$  与  $(n+1)(x - x_0)^n$  在以  $x_0$  及  $\xi_1$  为端点的区间上应用柯西中值定理, 得

$$\begin{aligned} \frac{R'_n(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n} &= \frac{R'_n(\xi_1) - R'_n(x_0)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n - 0} \\ &= \frac{R''_n(\xi_2)}{n(n+1)(\xi_2 - x_0)^{n-1}} \\ &\quad (\xi_2 \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } \xi_1 \text{ 之间}). \end{aligned}$$

照此方法继续做下去, 经过  $(n+1)$  次后, 得

$$\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{R^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

( $\xi$  在  $x_0$  与  $\xi_n$  之间, 因而也在  $x_0$  与  $x$  之间).

注意到  $R^{(n+1)}_n(x) = f^{(n+1)}(x)$  (因  $p_n^{(n+1)}(x) = 0$ ), 则由上式得

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}),$$

定理证毕.

多项式(2)称为函数  $f(x)$  按  $(x - x_0)$  的幂展开的  $n$  次泰勒多项式, 公式(3)称为  $f(x)$  按  $(x - x_0)$  的幂展开的带有拉格朗日型余项的  $n$  阶泰勒公式, 而  $R_n(x)$  的表达式(4)称为拉格朗日型余项.

当  $n=0$  时, 泰勒公式变成拉格朗日中值公式

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}).$$

因此, 泰勒中值定理是拉格朗日中值定理的推广.

由泰勒中值定理可知, 以多项式  $p_n(x)$  近似表达函数  $f(x)$  时, 其误差为  $|R_n(x)|$ . 如果对于某个固定的  $n$ , 当  $x \in (a, b)$  时,  $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ , 则有估计式

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \quad (5)$$

及

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

由此可见,当  $x \rightarrow x_0$  时误差  $|R_n(x)|$  是比  $(x - x_0)^n$  高阶的无穷小,即

$$R_n(x) = o[(x - x_0)^n]. \quad (6)$$

这样,我们提出的问题圆满地得到解决.

在不需要余项的精确表达式时,  $n$  阶泰勒公式也可写成

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o[(x - x_0)^n]. \quad (7)$$

$R_n(x)$  的表达式(6)称为佩亚诺(Peano)型余项,公式(7)称为  $f(x)$  按  $(x - x_0)$  的幂展开的带有佩亚诺型余项的  $n$  阶泰勒公式<sup>①</sup>.

在泰勒公式(3)中,如果取  $x_0 = 0$ ,则  $\xi$  在 0 与  $x$  之间.因此可以令  $\xi = \theta x$  ( $0 < \theta < 1$ ),从而泰勒公式变成较简单的形式,即所谓带有拉格朗日型余项的麦克劳林(Maclaurin)公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1). \quad (8)$$

在泰勒公式(7)中,如果取  $x_0 = 0$ ,则有带有佩亚诺型余项的麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n). \quad (9)$$

由(8)或(9)可得近似公式

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

误差估计式(5)相应地变成

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1}. \quad (10)$$

例 1 写出函数  $f(x) = e^x$  的带有拉格朗日型余项的  $n$  阶麦克劳林公式.

解 因为

$$f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x,$$

所以  $f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1$ .

把这些值代入公式(8),并注意到  $f^{(n+1)}(\theta x) = e^{\theta x}$  便得

① 这里公式(7)是  $f^{(n+1)}(x)$  在区间  $(a, b)$  内有界的条件下推得的.事实上公式(7)只要在“ $f(x)$  在含有  $x_0$  的开区间  $(a, b)$  内具有直到  $n$  阶的导数,且  $f^{(n)}(x)$  在  $(a, b)$  内连续”的条件下就成立.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

由这个公式可知,若把  $e^x$  用它的  $n$  次泰勒多项式表达为

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!},$$

这时所产生的误差为

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

如果取  $x=1$ ,则得无理数  $e$  的近似式为

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!},$$

其误差

$$|R_n| < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

当  $n=10$  时,可算出  $e \approx 2.718282$ ,其误差不超过  $10^{-6}$ .

**例 2** 求  $f(x) = \sin x$  的带有拉格朗日型余项的  $n$  阶麦克劳林公式.

解 因为

$$f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x,$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x, \dots, f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$$

所以

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = -1, f^{(4)}(0) = 0$$

等等.它们顺序循环地取四个数  $0, 1, 0, -1$ ,于是按公式(8)得(令  $n=2m$ )

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m},$$

其中

$$R_{2m}(x) = \frac{\sin\left[\theta x + (2m+1)\frac{\pi}{2}\right]}{(2m+1)!} x^{2m+1} = (-1)^m \frac{\cos \theta x}{(2m+1)!} x^{2m+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

如果取  $m=1$ ,则得近似公式

$$\sin x \approx x,$$

这时误差为

$$|R_2| = \left| \frac{\cos \theta x}{3!} x^3 \right| \leq \frac{|x|^3}{6} \quad (0 < \theta < 1).$$

如果  $m$  分别取 2 和 3,则可得  $\sin x$  的 3 次和 5 次泰勒多项式

$$\sin x \approx x - \frac{1}{3!} x^3 \text{ 和 } \sin x \approx x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5,$$

其误差的绝对值依次不超过  $\frac{1}{5!}|x|^5$  和  $\frac{1}{7!}|x|^7$ . 以上三个泰勒多项式及正弦函数的图形都画在图 3-4 中, 以便于比较.

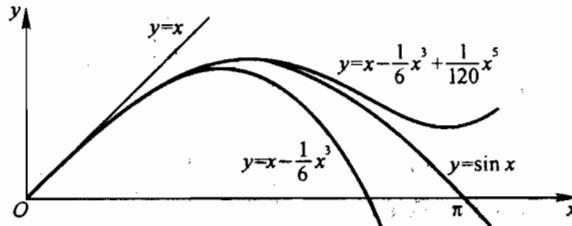


图 3-4

类似地, 还可以得到

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + R_{2m+1}(x),$$

$$\text{其中 } R_{2m+1}(x) = \frac{\cos[\theta x + (m+1)\pi]}{(2m+2)!}x^{2m+2} = (-1)^{m+1} \frac{\cos \theta x}{(2m+2)!}x^{2m+2} (0 < \theta < 1);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}x^n + R_n(x),$$

$$\text{其中 } R_n(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1);$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x),$$

$$\text{其中 } R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1} (0 < \theta < 1).$$

由以上带有拉格朗日型余项的麦克劳林公式, 易得相应的带有佩亚诺型余项的麦克劳林公式, 读者可自行写出.

**例 3** 利用带有佩亚诺型余项的麦克劳林公式, 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$ .

**解** 由于分式的分母  $\sin^3 x \sim x^3 (x \rightarrow 0)$ , 我们只需将分子中的  $\sin x$  和  $x \cos x$  分别用带有佩亚诺型余项的三阶麦克劳林公式表示, 即

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3),$$

$$x \cos x = x - \frac{x^3}{2!} + o(x^3).$$

于是

$$\begin{aligned} \sin x - x \cos x &= x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x + \frac{x^3}{2!} - o(x^3) \\ &= \frac{1}{3}x^3 + o(x^3), \end{aligned}$$

对上式作运算时,把两个比  $x^3$  高阶的无穷小的代数和仍记作  $o(x^3)$ ,故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

### 习题 3-3

1. 按  $(x-4)$  的幕展开多项式  $f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ .
2. 应用麦克劳林公式,按  $x$  的幕展开函数  $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^3$ .
3. 求函数  $f(x) = \sqrt{x}$  按  $(x-4)$  的幕展开的带有拉格朗日型余项的 3 阶泰勒公式.
4. 求函数  $f(x) = \ln x$  按  $(x-2)$  的幕展开的带有佩亚诺型余项的  $n$  阶泰勒公式.
5. 求函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  按  $(x+1)$  的幕展开的带有拉格朗日型余项的  $n$  阶泰勒公式.
6. 求函数  $f(x) = \tan x$  的带有佩亚诺型余项的 3 阶麦克劳林公式.
7. 求函数  $f(x) = xe^x$  的带有佩亚诺型余项的  $n$  阶麦克劳林公式.
8. 验证当  $0 < x \leq \frac{1}{2}$  时,按公式  $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$  计算  $e^x$  的近似值时,所产生的误差

小于 0.01,并求  $\sqrt[e]{e}$  的近似值,使误差小于 0.01.

9. 应用 3 阶泰勒公式求下列各数的近似值,并估计误差:

$$(1) \sqrt[3]{30};$$

$$(2) \sin 18^\circ.$$

10. 利用泰勒公式求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt[4]{x^4 - 2x^3});$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2 [x + \ln(1-x)]};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}})\sin x^2}.$$

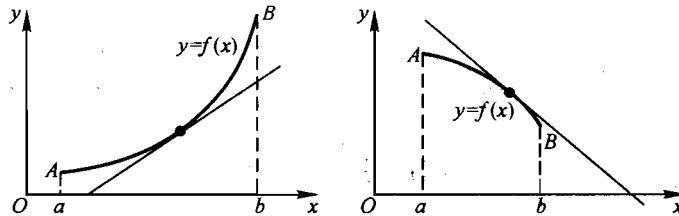
## 第四节 函数的单调性与曲线的凹凸性

### 一、函数单调性的判定法

第一章第一节中已经介绍了函数在区间上单调的概念.下面利用导数来对函数的单调性进行研究.

如果函数  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上单调增加(单调减少),那么它的图形是一条沿  $x$  轴正向上升(下降)的曲线.这时,如图 3-5,曲线上各点处的切线斜率是非负的(是非正的),即  $y' = f'(x) \geq 0$  ( $y' = f'(x) \leq 0$ ).由此可见,函数的单调性

与导数的符号有着密切的联系.



(a) 函数图形上升时切线斜率非负

(b) 函数图形下降时切线斜率非正

图 3-5

反过来,能否用导数的符号来判定函数的单调性呢?

下面我们利用拉格朗日中值定理来进行讨论.

设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 在  $[a, b]$  上任取两点  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ), 应用拉格朗日中值定理, 得到

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \quad (x_1 < \xi < x_2). \quad (1)$$

由于在(1)式中,  $x_2 - x_1 > 0$ , 因此, 如果在  $(a, b)$  内导数  $f'(x)$  保持正号, 即  $f'(x) > 0$ , 那么也有  $f'(\xi) > 0$ . 于是

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0,$$

即

$$f(x_1) < f(x_2),$$

表明函数  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上单调增加. 同理, 如果在  $(a, b)$  内导数  $f'(x)$  保持负号, 即  $f'(x) < 0$ , 那么  $f'(\xi) < 0$ , 于是  $f(x_2) - f(x_1) < 0$ , 即  $f(x_1) > f(x_2)$ , 表明函数  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上单调减少.

归纳以上讨论, 即得

**定理 1** 设函数  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导.

(1) 如果在  $(a, b)$  内  $f'(x) > 0$ , 那么函数  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上单调增加;

(2) 如果在  $(a, b)$  内  $f'(x) < 0$ , 那么函数  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上单调减少.

如果把这个判定法中的闭区间换成其他各种区间(包括无穷区间), 那么结论也成立.

**例 1** 判定函数  $y = x - \sin x$  在  $[0, 2\pi]$  上的单调性.

解 因为在  $(0, 2\pi)$  内

$$y' = 1 - \cos x > 0,$$

所以由定理 1 可知, 函数  $y = x - \sin x$  在  $[0, 2\pi]$  上单调增加.

**例 2** 讨论函数  $y = e^x - x - 1$  的单调性.

解  $y' = e^x - 1$ .

函数  $y = e^x - x - 1$  的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ . 因为在  $(-\infty, 0)$  内  $y' < 0$ , 所

以函数  $y = e^x - x - 1$  在  $(-\infty, 0]$  上单调减少;因为在  $(0, +\infty)$  内  $y' > 0$ , 所以函数  $y = e^x - x - 1$  在  $[0, +\infty)$  上单调增加.

**例 3** 讨论函数  $y = \sqrt[3]{x^2}$  的单调性.

解 这函数的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ .

当  $x \neq 0$  时, 这函数的导数为

$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}},$$

当  $x = 0$  时, 函数的导数不存在. 在  $(-\infty, 0)$  内,  $y' < 0$ , 因此函数  $y = \sqrt[3]{x^2}$  在  $(-\infty, 0]$  上单调减少. 在  $(0, +\infty)$  内,  $y' > 0$ , 因此函数  $y = \sqrt[3]{x^2}$  在  $[0, +\infty)$  上单调增加. 函数的图形如图 3-6 所示.

我们注意到, 在例 2 中,  $x = 0$  是函数  $y = e^x - x - 1$  的单调减少区间  $(-\infty, 0]$  与单调增加区间  $[0, +\infty)$  的分界点, 而在该点处  $y' = 0$ . 在例 3 中,  $x = 0$  是函数  $y = \sqrt[3]{x^2}$  的单调减少区间  $(-\infty, 0]$  与单调增加区间  $[0, +\infty)$  的分界点, 而在该点处导数不存在.

从例 2 中看出, 有些函数在它的定义区间

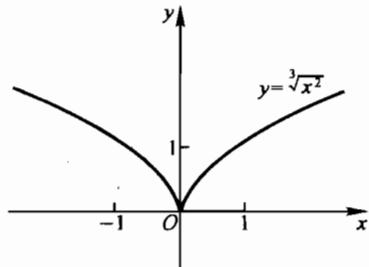


图 3-6

上不是单调的,但是当我们用导数等于零的点来划分函数的定义区间以后,就可以使函数在各个部分区间上单调.这个结论对于在定义区间上具有连续导数的函数都是成立的.从例 3 中可看出,如果函数在某些点处不可导,则划分函数的定义区间的分点,还应包括这些导数不存在的点.综合上述两种情形,我们有如下结论:

如果函数在定义区间上连续,除去有限个导数不存在的点外导数存在且连续,那么只要用方程  $f'(x) = 0$  的根及  $f'(x)$  不存在的点来划分函数  $f(x)$  的定义区间,就能保证  $f'(x)$  在各个部分区间内保持固定符号,因而函数  $f(x)$  在每个部分区间上单调.

**例 4** 确定函数  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$  的单调区间.

解 这函数的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ . 求这函数的导数

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2).$$

解方程  $f'(x) = 0$ , 即解

$$6(x-1)(x-2) = 0,$$

得出它在函数定义域  $(-\infty, +\infty)$  内的两个根  $x_1 = 1, x_2 = 2$ . 这两个根把  $(-\infty, +\infty)$  分成三个部分区间  $(-\infty, 1], [1, 2]$  及  $[2, +\infty)$ .

在区间  $(-\infty, 1)$  内,  $x-1 < 0, x-2 < 0$ , 所以  $f'(x) > 0$ . 因此, 函数  $f(x)$  在

$(-\infty, 1]$  内单调增加. 在区间  $(1, 2)$  内,  $x - 1 > 0, x - 2 < 0$ , 所以  $f'(x) < 0$ . 因此, 函数  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上单调减少. 在区间  $(2, +\infty)$  内,  $x - 1 > 0, x - 2 > 0$ , 所以  $f'(x) > 0$ . 因此, 函数  $f(x)$  在  $[2, +\infty)$  上单调增加.

函数  $y = f(x)$  的图形如图 3-7 所示.

例 5 讨论函数  $y = x^3$  的单调性.

解 这函数的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ .

函数的导数  $y' = 3x^2$ . 显然, 除了点  $x = 0$  使  $y' = 0$  外, 在其余各点处均有  $y' > 0$ . 因此函数  $y = x^3$  在区间  $(-\infty, 0]$  及  $[0, +\infty)$  上都是单调增加的, 从而在整个定义域  $(-\infty, +\infty)$  内是单调增加的. 在  $x = 0$  处曲线有一水平切线. 函数的图形如图 3-8 所示.

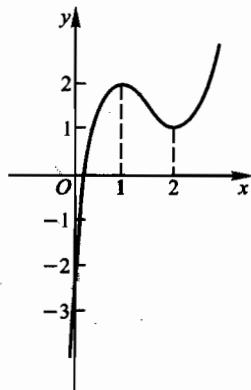


图 3-7

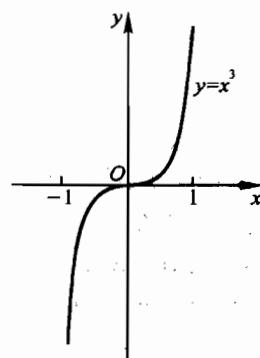


图 3-8

一般的, 如果  $f'(x)$  在某区间内的有限个点处为零, 在其余各点处均为正(或负)时, 那么  $f(x)$  在该区间上仍旧是单调增加(或单调减少)的.

下面我们举一个利用函数的单调性证明不等式的例子.

例 6 证明: 当  $x > 1$  时,  $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$ .

证 令  $f(x) = 2\sqrt{x} - \left(3 - \frac{1}{x}\right)$ , 则

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}(x\sqrt{x} - 1).$$

$f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上连续, 在  $(1, +\infty)$  内  $f'(x) > 0$ , 因此在  $[1, +\infty)$  上  $f(x)$  单调增加, 从而当  $x > 1$  时,  $f(x) > f(1)$ .

由于  $f(1) = 0$ , 故  $f(x) > f(1) = 0$ , 即

$$2\sqrt{x} - \left(3 - \frac{1}{x}\right) > 0,$$

亦即

$$2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x} \quad (x > 1).$$

## 二、曲线的凹凸性与拐点

在第一目中,我们研究了函数单调性的判定法.函数的单调性反映在图形上,就是曲线的上升或下降.但是,曲线在上升或下降的过程中,还有一个弯曲方向的问题.例如,图 3-9 中有两条曲线弧,虽然它们都是上升的,但图形却有显著的不同, $\widehat{ACB}$  是向上凸的曲线弧,而  $\widehat{ADB}$  是向上凹的曲线弧,它们的凹凸性不同,下面我们就来研究曲线的凹凸性及其判定法.

我们从几何上看到,在有的曲线弧上,如果任取两点,则联结这两点间的弦总位于这两点间的弧段的上方(图 3-10(a)),而有的曲线弧,则正好相反(图 3-10(b)).曲线的这种性质就是曲线的凹凸性.因此曲线的凹凸性可以用联结曲线弧上任意两点的弦的中点与曲线弧上相应点(即具有相同横坐标的点)的位置关系来描述,下面给出曲线凹凸性的定义.

**定义** 设  $f(x)$  在区间  $I$  上连续,如果对  $I$  上任意两点  $x_1, x_2$  恒有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

那么称  $f(x)$  在  $I$  上的图形是(向上)凹的(或凹弧);如果恒有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

那么称  $f(x)$  在  $I$  上的图形是(向上)凸的(或凸弧).

如果函数  $f(x)$  在  $I$  内具有二阶导数,那么可以利用二阶导数的符号来判定曲线的凹凸性,这就是下面的曲线凹凸性的判定定理.我们仅就  $I$  为闭区间的情形来叙述定理,当  $I$  不是闭区间时,定理类同.

**定理 2** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,在  $(a, b)$  内具有一阶和二阶导数,那么

- (1) 若在  $(a, b)$  内  $f''(x) > 0$ , 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的图形是凹的;
- (2) 若在  $(a, b)$  内  $f''(x) < 0$ , 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的图形是凸的.

**证明** 在情形(1),设  $x_1$  和  $x_2$  为  $[a, b]$  内任意两点,且  $x_1 < x_2$ , 记  $\frac{x_1 + x_2}{2} = x_0$ , 并记  $x_2 - x_0 = x_0 - x_1 = h$ , 则  $x_1 = x_0 - h$ ,  $x_2 = x_0 + h$ , 由拉格朗日中值

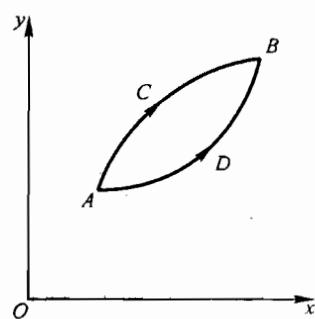


图 3-9

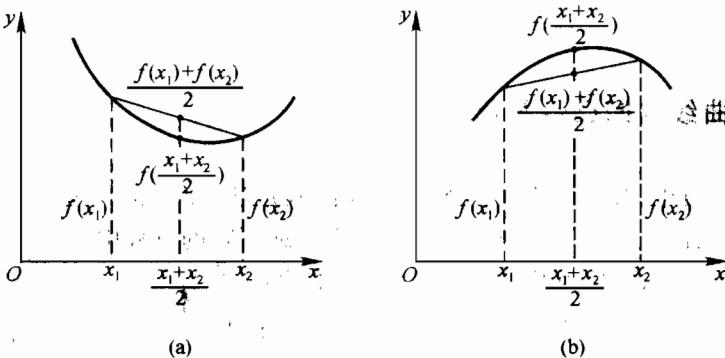


图 3-10

公式,得

$$\begin{aligned}f(x_0 + h) - f(x_0) &= f'(x_0 + \theta_1 h)h, \\f(x_0) - f(x_0 - h) &= f'(x_0 - \theta_2 h)h,\end{aligned}$$

其中  $0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1$ . 两式相减,即得

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0) = [f'(x_0 + \theta_1 h) - f'(x_0 - \theta_2 h)]h.$$

对  $f'(x)$  在区间  $[x_0 - \theta_2 h, x_0 + \theta_1 h]$  上再利用拉格朗日中值公式,得

$$[f'(x_0 + \theta_1 h) - f'(x_0 - \theta_2 h)]h = f''(\xi)(\theta_1 + \theta_2)h^2,$$

其中  $x_0 - \theta_2 h < \xi < x_0 + \theta_1 h$ . 按情形(1)的假设,  $f''(\xi) > 0$ , 故有

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0) > 0,$$

即

$$\frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h)}{2} > f(x_0),$$

亦即

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right),$$

所以  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的图形是凹的.

类似地可证明情形(2).

**例 7** 判定曲线  $y = \ln x$  的凹凸性.

**解** 因为  $y' = \frac{1}{x}$ ,  $y'' = -\frac{1}{x^2}$ , 所以在函数  $y = \ln x$  的定义域  $(0, +\infty)$  内,  $y'' < 0$ , 由定理 2 可知, 曲线  $y = \ln x$  是凸的.

**例 8** 判定曲线  $y = x^3$  的凹凸性.

**解** 因为  $y' = 3x^2$ ,  $y'' = 6x$ . 当  $x < 0$  时,  $y'' < 0$ , 所以曲线在  $(-\infty, 0]$  内为凸弧; 当  $x > 0$  时,  $y'' > 0$ , 所以曲线在  $[0, +\infty)$  内为凹弧(参看图 3-8).

一般的,设  $y=f(x)$  在区间  $I$  上连续,  $x_0$  是  $I$  的内点<sup>①</sup>. 如果曲线  $y=f(x)$  在经过点  $(x_0, f(x_0))$  时, 曲线的凹凸性改变了, 那么就称点  $(x_0, f(x_0))$  为这曲线的拐点.

如何来寻找曲线  $y=f(x)$  的拐点呢?

从上面的定理知道, 由  $f''(x)$  的符号可以判定曲线的凹凸性, 因此, 如果  $f''(x)$  在  $x_0$  的左、右两侧邻近异号, 那么点  $(x_0, f(x_0))$  就是曲线的一个拐点, 所以, 要寻找拐点, 只要找出  $f''(x)$  符号发生变化的分界点即可. 如果  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  内具有二阶连续导数, 那么在这样的分界点处必然有  $f''(x)=0$ ; 除此以外,  $f(x)$  的二阶导数不存在的点, 也有可能是  $f''(x)$  的符号发生变化的分界点. 综合以上分析, 我们可以按下列步骤来判定区间  $I$  上的连续曲线  $y=f(x)$  的拐点:

(1) 求  $f''(x)$ ;

(2) 令  $f''(x)=0$ , 解出这方程在区间  $I$  内的实根, 并求出在区间  $I$  内  $f''(x)$  不存在的点;

(3) 对于(2)中求出的每一个实根或二阶导数不存在的点  $x_0$ , 检查  $f''(x)$  在  $x_0$  左、右两侧邻近的符号, 那么当两侧的符号相同时, 点  $(x_0, f(x_0))$  是拐点, 当两侧的符号相同时, 点  $(x_0, f(x_0))$  不是拐点.

**例 9** 求曲线  $y=2x^3+3x^2-12x+14$  的拐点.

解  $y'=6x^2+6x-12, y''=12x+6=12\left(x+\frac{1}{2}\right).$

解方程  $y''=0$ , 得  $x=-\frac{1}{2}$ . 当  $x<-\frac{1}{2}$  时,  $y''<0$ ; 当  $x>-\frac{1}{2}$  时,  $y''>0$ . 因此, 点  $\left(-\frac{1}{2}, 20\frac{1}{2}\right)$  是这曲线的拐点.

**例 10** 求曲线  $y=3x^4-4x^3+1$  的拐点及凹、凸的区间.

解 函数  $y=3x^4-4x^3+1$  的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ .

$$y'=12x^3-12x^2,$$

$$y''=36x^2-24x=36x\left(x-\frac{2}{3}\right).$$

解方程  $y''=0$ , 得  $x_1=0, x_2=\frac{2}{3}$ .

$x_1=0$  及  $x_2=\frac{2}{3}$  把函数的定义域  $(-\infty, +\infty)$  分成三个部分区间:

<sup>①</sup> 区间  $I$  的内点是指除端点外的  $I$  内的点.

$$(-\infty, 0], \left[0, \frac{2}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, +\infty\right).$$

在 $(-\infty, 0)$ 内,  $y'' > 0$ , 因此在区间 $(-\infty, 0]$ 上这曲线是凹的. 在 $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ 内,  $y'' < 0$ , 因此在区间 $\left[0, \frac{2}{3}\right]$ 上这曲线是凸的. 在 $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$ 内,  $y'' > 0$ , 因此在区间 $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$ 上这曲线是凹的.

当 $x = 0$ 时,  $y = 1$ , 点 $(0, 1)$ 是这曲线的一个拐点. 当 $x = \frac{2}{3}$ 时,  $y = \frac{11}{27}$ , 点 $\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{27}\right)$ 也是这曲线的拐点.

**例 11** 问曲线  $y = x^4$  是否有拐点?

解  $y' = 4x^3$ ,  $y'' = 12x^2$ .

显然, 只有  $x = 0$  是方程  $y'' = 0$  的根. 但当  $x \neq 0$  时, 无论  $x < 0$  或  $x > 0$  都有  $y'' > 0$ , 因此点 $(0, 0)$ 不是这曲线的拐点. 曲线  $y = x^4$  没有拐点, 它在 $(-\infty, +\infty)$ 内是凹的.

**例 12** 求曲线  $y = \sqrt[3]{x}$  的拐点.

解 这函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 当  $x \neq 0$  时,

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad y'' = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}},$$

当  $x = 0$  时,  $y'$ ,  $y''$  都不存在. 故二阶导数在 $(-\infty, +\infty)$ 内不连续且不具有零点. 但  $x = 0$  是  $y''$  不存在的点, 它把 $(-\infty, +\infty)$ 分成两个部分区间: $(-\infty, 0]$ ,  $[0, +\infty)$ .

在 $(-\infty, 0)$ 内,  $y'' > 0$ , 这曲线在 $(-\infty, 0]$ 上是凹的. 在 $(0, +\infty)$ 内,  $y'' < 0$ , 这曲线在 $[0, +\infty)$ 上是凸的.

当  $x = 0$  时,  $y = 0$ , 点 $(0, 0)$ 是这曲线的一个拐点.

### 习题 3-4

1. 判定函数  $f(x) = \arctan x - x$  的单调性.
2. 判定函数  $f(x) = x + \cos x$  ( $0 \leq x \leq 2\pi$ ) 的单调性.
3. 确定下列函数的单调区间:

$$(1) y = 2x^3 - 6x^2 - 18x - 7;$$

$$(2) y = 2x + \frac{8}{x} \quad (x > 0);$$

$$(3) y = \frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x};$$

$$(4) y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2});$$

- (5)  $y = (x-1)(x+1)^3$ ;  
 (6)  $y = \sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2}$  ( $a > 0$ );  
 (7)  $y = x^n e^{-x}$  ( $n > 0, x \geq 0$ );  
 (8)  $y = x + |\sin 2x|$ .

4. 设函数  $f(x)$  在定义域内可导,  $y = f(x)$  的图形如图 3-11 所示, 则导函数  $f'(x)$  的图形为图 3-12 中所示的四个图形中的哪一个?

5. 证明下列不等式:

- (1) 当  $x > 0$  时,  $1 + \frac{1}{2}x > \sqrt{1+x}$ ;  
 (2) 当  $x > 0$  时,  $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2}$ ;  
 (3) 当  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时,  $\sin x + \tan x > 2x$ ;  
 (4) 当  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时,  $\tan x > x + \frac{1}{3}x^3$ ;  
 (5) 当  $x > 4$  时,  $2^x > x^2$ .

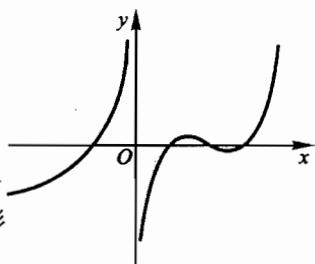


图 3-11

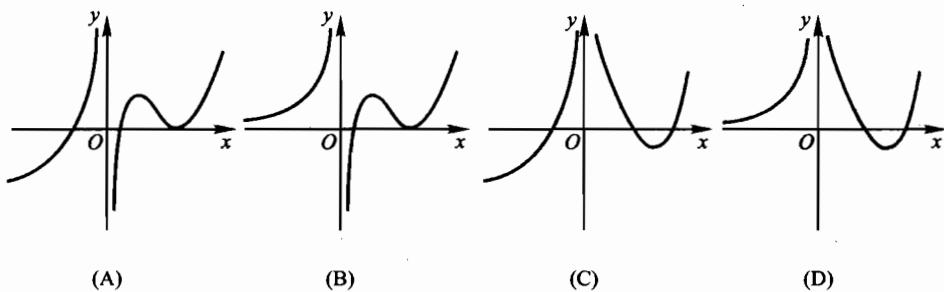


图 3-12

6. 讨论方程  $\ln x = ax$  (其中  $a > 0$ ) 有几个实根?

7. 单调函数的导函数是否必为单调函数? 研究下面这个例子:

$$f(x) = x + \sin x.$$

8. 判定下列曲线的凹凸性:

- (1)  $y = 4x - x^2$ ;                          (2)  $y = \sin x$ ;  
 (3)  $y = x + \frac{1}{x}$  ( $x > 0$ );                          (4)  $y = x \arctan x$ .

9. 求下列函数图形的拐点及凹或凸的区间:

- (1)  $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 5$ ;                          (2)  $y = x e^{-x}$ ;  
 (3)  $y = (x+1)^4 + e^x$ ;                                  (4)  $y = \ln(x^2 + 1)$ ;  
 (5)  $y = e^{\arctan x}$ ;    (6)  $y = x^4(12 \ln x - 7)$ .

10. 利用函数图形的凹凸性, 证明下列不等式:

- (1)  $\frac{1}{2}((x'' + y'') > \left(\frac{x+y}{2}\right)'')$  ( $x > 0, y > 0, x \neq y, n > 1$ );

$$(2) \frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}} \quad (x \neq y);$$

$$(3) x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2} \quad (x > 0, y > 0, x \neq y).$$

- 11. 试证明曲线  $y = \frac{x-1}{x^2+1}$  有三个拐点位于同一直线上.
- 12. 问  $a, b$  为何值时, 点  $(1, 3)$  为曲线  $y = ax^3 + bx^2$  的拐点?
- 13. 试决定曲线  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  中的  $a, b, c, d$ , 使得  $x = -2$  处曲线有水平切线,  $(1, -10)$  为拐点, 且点  $(-2, 44)$  在曲线上.
- 14. 试决定  $y = k(x^2 - 3)^2$  中  $k$  的值, 使曲线的拐点处的法线通过原点.
- 15. 设  $y = f(x)$  在  $x = x_0$  的某邻域内具有三阶连续导数, 如果  $f''(x_0) = 0$ , 而  $f'''(x_0) \neq 0$ , 试问  $(x_0, f(x_0))$  是否为拐点? 为什么?

## 第五节 函数的极值与最大值最小值

### 一、函数的极值及其求法

在上节例 4 中我们看到, 点  $x = 1$  及  $x = 2$  是函数

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$$

的单调区间的分界点. 例如, 在点  $x = 1$  的左侧邻近, 函数  $f(x)$  是单调增加的, 在点  $x = 1$  的右侧邻近, 函数  $f(x)$  是单调减少的. 因此, 存在点  $x = 1$  的一个去心邻域, 对于这去心邻域内的任何点  $x$ ,  $f(x) < f(1)$  均成立. 类似地, 关于点  $x = 2$ , 也存在着一个去心邻域, 对于这去心邻域内的任何点  $x$ ,  $f(x) > f(2)$  均成立(参看图 3-7). 具有这种性质的点如  $x = 1$  及  $x = 2$ , 在应用上有着重要的意义, 值得我们对此作一般性的讨论.

**定义** 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某邻域  $U(x_0)$  内有定义, 如果对于去心邻域  $\overset{\circ}{U}(x_0)$  内的任一  $x$ , 有

$$f(x) < f(x_0) \quad (\text{或 } f(x) > f(x_0)),$$

那么就称  $f(x_0)$  是函数  $f(x)$  的一个极大值(或极小值).

函数的极大值与极小值统称为函数的极值, 使函数取得极值的点称为极值点. 例如, 上节例 4 中的函数

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$$

有极大值  $f(1) = 2$  和极小值  $f(2) = 1$ , 点  $x = 1$  和  $x = 2$  是函数  $f(x)$  的极值点.

函数的极大值和极小值概念是局部性的. 如果  $f(x_0)$  是函数  $f(x)$  的一个极大值, 那只是就  $x_0$  附近的一个局部范围来说,  $f(x_0)$  是  $f(x)$  的一个最大值; 如

果就  $f(x)$  的整个定义域来说,  $f(x_0)$  不见得是最大值. 关于极小值也类似.

在图 3-13 中, 函数  $f(x)$  有两个极大值:  $f(x_2)、f(x_5)$ , 三个极小值:  $f(x_1)、f(x_4)、f(x_6)$ , 其中极大值  $f(x_2)$  比极小值  $f(x_6)$  还小. 就整个区间  $[a, b]$  来说, 只有一个极小值  $f(x_1)$  同时也是最小值, 而没有一个极大值是最大值.

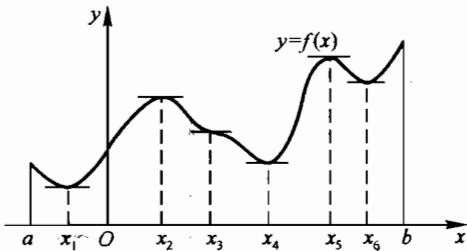


图 3-13

从图中还可看到, 在函数取得极值处, 曲线的切线是水平的. 但曲线上有水平切线的地方, 函数不一定取得极值. 例如图中  $x = x_3$  处, 曲线上有水平切线, 但  $f(x_3)$  不是极值.

由本章第一节费马引理可知, 如果函数  $f(x)$  在  $x_0$  处可导, 且  $f(x)$  在  $x_0$  处取得极值, 那么  $f'(x_0) = 0$ . 这就是可导函数取得极值的必要条件. 现将此结论叙述成如下定理.

**定理 1(必要条件)** 设函数  $f(x)$  在  $x_0$  处可导, 且在  $x_0$  处取得极值, 那么  $f'(x_0) = 0$ .

定理 1 就是说: 可导函数  $f(x)$  的极值点必定是它的驻点. 但反过来, 函数的驻点却不一定都是极值点. 例如,  $f(x) = x^3$  的导数  $f'(x) = 3x^2, f'(0) = 0$ , 因此  $x = 0$  是这可导函数的驻点, 但  $x = 0$  却不是这函数的极值点. 所以, 函数的驻点只是可能的极值点. 此外, 函数在它的导数不存在的点处也可能取得极值. 例如, 函数  $f(x) = |x|$  在点  $x = 0$  处不可导, 但函数在该点取得极小值.

怎样判定函数在驻点或不可导的点处究竟是否取得极值? 如果是的话, 究竟取得极大值还是极小值? 下面给出两个判定极值的充分条件.

**定理 2(第一充分条件)** 设函数  $f(x)$  在  $x_0$  处连续, 且在  $x_0$  的某去心邻域  $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$  内可导.

(1) 若  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  时,  $f'(x) > 0$ , 而  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  时,  $f'(x) < 0$ , 则  $f(x)$  在  $x_0$  处取得极大值;

(2) 若  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  时,  $f'(x) < 0$ , 而  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  时,  $f'(x) > 0$ , 则  $f(x)$  在  $x_0$  处取得极小值;

(3) 若  $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$  时,  $f'(x)$  的符号保持不变, 则  $f(x)$  在  $x_0$  处没有极值.

证 事实上, 就情形(1)来说, 根据函数单调性的判定法, 函数  $f(x)$  在  $(x_0 - \delta, x_0)$  内单调增加, 而在  $(x_0, x_0 + \delta)$  内单调减少, 又由于函数  $f(x)$  在  $x_0$  处是连续的, 故当  $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$  时, 总有  $f(x) < f(x_0)$ . 所以,  $f(x_0)$  是  $f(x)$  的一个极大值(图 3-14(a)).

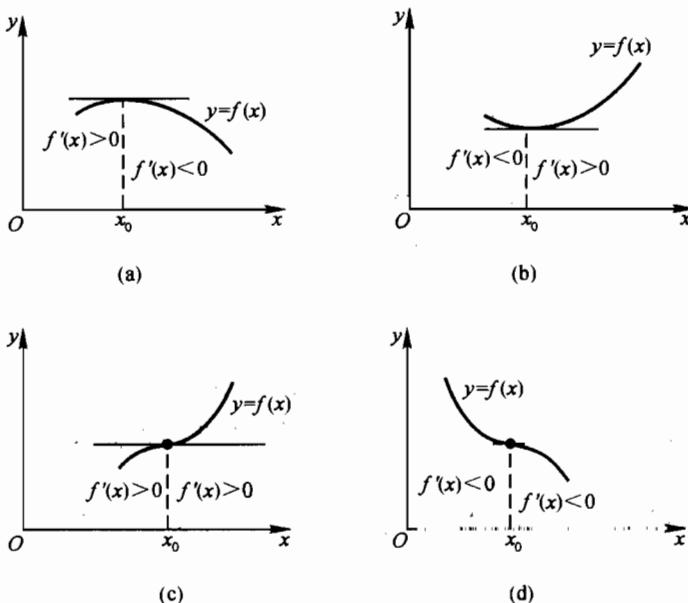


图 3-14

类似地可论证情形(2)(图 3-14(b))及情形(3)(图 3-14(c)、(d)).

定理 2 也可简单地这样说: 当  $x$  在  $x_0$  的邻近渐增地经过  $x_0$  时, 如果  $f'(x)$  的符号由正变负, 那么  $f(x)$  在  $x_0$  处取得极大值; 如果  $f'(x)$  的符号由负变正, 那么  $f(x)$  在  $x_0$  处取得极小值; 如果  $f'(x)$  的符号并不改变, 那么  $f(x)$  在  $x_0$  处没有极值.

根据上面的两个定理, 如果函数  $f(x)$  在所讨论的区间内连续, 除个别点外处处可导, 那么就可以按下列步骤来求  $f(x)$  在该区间内的极值点和相应的极值:

- (1) 求出导数  $f'(x)$ ;
- (2) 求出  $f(x)$  的全部驻点与不可导点;
- (3) 考察  $f'(x)$  的符号在每个驻点或不可导点的左、右邻近的情形, 以确定该点是否为极值点; 如果是极值点, 进一步确定是极大值点还是极小值点;

(4) 求出各极值点的函数值,就得函数  $f(x)$  的全部极值.

例 1 求函数  $f(x) = (x-4)\sqrt[3]{(x+1)^2}$  的极值.

解 (1)  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续,除  $x = -1$  外处处可导,且

$$f'(x) = \frac{5(x-1)}{3\sqrt[3]{x+1}};$$

(2) 令  $f'(x) = 0$ , 得驻点  $x = 1, x = -1$  为  $f(x)$  的不可导点;

(3) 在  $(-\infty, -1)$  内,  $f'(x) > 0$ ; 在  $(-1, 1)$  内,  $f'(x) < 0$ . 故不可导点  $x = -1$  是一个极大值点; 又在  $(1, +\infty)$  内,  $f'(x) > 0$ , 故驻点  $x = 1$  是一个极小值点;

(4) 极大值为  $f(-1) = 0$ , 极小值为  $f(1) = -3\sqrt[3]{4}$ .

当函数  $f(x)$  在驻点处的二阶导数存在且不为零时,也可以利用下述定理来判定  $f(x)$  在驻点处取得极大值还是极小值.

定理 3(第二充分条件) 设函数  $f(x)$  在  $x_0$  处具有二阶导数且  $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$ , 那么

(1) 当  $f''(x_0) < 0$  时, 函数  $f(x)$  在  $x_0$  处取得极大值;

(2) 当  $f''(x_0) > 0$  时, 函数  $f(x)$  在  $x_0$  处取得极小值.

证 在情形(1), 由于  $f''(x_0) < 0$ , 按二阶导数的定义有

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0.$$

根据函数极限的局部保号性, 当  $x$  在  $x_0$  的足够小的去心邻域内时,

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0.$$

但  $f'(x_0) = 0$ , 所以上式即

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} < 0.$$

从而知道, 对于这去心邻域内的  $x$  来说,  $f'(x)$  与  $x - x_0$  符号相反. 因此, 当  $x - x_0 < 0$  即  $x < x_0$  时,  $f'(x) > 0$ ; 当  $x - x_0 > 0$  即  $x > x_0$  时,  $f'(x) < 0$ . 于是根据定理 2 知道,  $f(x)$  在点  $x_0$  处取得极大值.

类似地可以证明情形(2).

定理 3 表明, 如果函数  $f(x)$  在驻点  $x_0$  处的二阶导数  $f''(x_0) \neq 0$ , 那么该驻点  $x_0$  一定是极值点, 并且可以按二阶导数  $f''(x_0)$  的符号来判定  $f(x_0)$  是极大值还是极小值. 但如果  $f''(x_0) = 0$ , 定理 3 就不能应用. 事实上, 当  $f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0$  时,  $f(x)$  在  $x_0$  处可能有极大值, 也可能有极小值, 也可能没有极值. 例如,  $f_1(x) = -x^4, f_2(x) = x^4, f_3(x) = x^3$  这三个函数在  $x = 0$  处就分别属于

这三种情况.因此,如果函数在驻点处的二阶导数为零,那么还得用一阶导数在驻点左右邻近的符号来判定.

**例 2** 求函数  $f(x) = (x^2 - 1)^3 + 1$  的极值.

$$\text{解 } f'(x) = 6x(x^2 - 1)^2.$$

令  $f'(x) = 0$ ,求得驻点  $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$ .

$$f''(x) = 6(x^2 - 1)(5x^2 - 1).$$

因  $f''(0) = 6 > 0$ ,故  $f(x)$  在  $x = 0$  处取得极小值,极小值为  $f(0) = 0$ .

因  $f''(-1) = f''(1) = 0$ ,故用定理 3 无法判别.考察一阶导数  $f'(x)$  在驻点  $x_1 = -1$  及  $x_3 = 1$  左右邻近的符号:

当  $x$  取  $-1$  左侧邻近的值时,  $f'(x) < 0$ ; 当  $x$  取  $-1$  右侧邻近的值时,  $f'(x) < 0$ ; 因为  $f'(x)$  的符号没有改变, 所以  $f(x)$  在  $x = -1$  处没有极值. 同理,  $f(x)$  在  $x = 1$  处也没有极值(图 3-15).

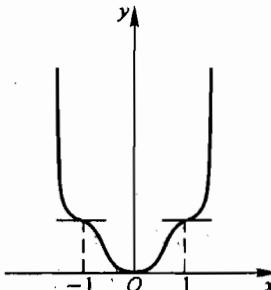


图 3-15

## 二、最大值最小值问题

在工农业生产、工程技术及科学实验中,常常会遇到这样一类问题:在一定条件下,怎样使“产品最多”、“用料最省”、“成本最低”、“效率最高”等问题,这类问题在数学上有时可归结为求某一函数(通常称为目标函数)的最大值或最小值问题.

假定函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续,在开区间  $(a, b)$  内除有限个点外可导,且至多有有限个驻点. 在上述条件下,我们来讨论  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最大值和最小值的求法.

首先,由闭区间上连续函数的性质,可知  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最大值和最小值一定存在.

其次,如果最大值(或最小值)  $f(x_0)$  在开区间  $(a, b)$  内的点  $x_0$  处取得,那么,按  $f(x)$  在开区间内除有限个点外可导且至多有有限个驻点的假定,可知  $f(x_0)$  一定也是  $f(x)$  的极大值(或极小值),从而  $x_0$  不一定是  $f(x)$  的驻点或不可导点. 又  $f(x)$  的最大值和最小值也可能在区间的端点处取得. 因此,可用如下方法求  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最大值和最小值.

(1) 求出  $f(x)$  在  $(a, b)$  内的驻点  $x_1, x_2, \dots, x_m$  及不可导点  $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ ;

(2) 计算  $f(x_i)$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ),  $f(x'_j)$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) 及  $f(a), f(b)$ ;

(3) 比较(2)中诸值的大小, 其中最大的便是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最大值, 最小的便是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最小值.

例 3 求函数  $f(x)=|x^2-3x+2|$  在  $[-3, 4]$  上的最大值与最小值.

解  $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2, & x \in [-3, 1] \cup \{2, 4\}, \\ -x^2+3x-2, & x \in (1, 2). \end{cases}$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-3, & x \in (-3, 1) \cup (2, 4), \\ -2x+3, & x \in (1, 2). \end{cases}$$

在  $(-3, 4)$  内,  $f(x)$  的驻点为  $x=\frac{3}{2}$ ; 不可导点为  $x=1, 2$ .

由于  $f(-3)=20, f(1)=0, f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4}, f(2)=0, f(4)=6$ , 比较可得  $f(x)$

在  $x=-3$  处取得它在  $[-3, 4]$  上的最大值 20, 在  $x=1$  和  $x=2$  处取得它在  $[-3, 4]$  上的最小值 0.

例 4 铁路线上  $AB$  段的距离为 100 km. 工厂  $C$  距  $A$  处为 20 km,  $AC$  垂直于  $AB$  (图 3-16). 为了运输需要, 要在  $AB$  线上选定一点  $D$  向工厂修筑一条公路. 已知铁路每公里货运的运费与公路上每公里货运的运费之比为 3:5. 为了使货物从供应站  $B$  运到工厂  $C$  的运费最省, 问  $D$  点应选在何处?

解 设  $AD=x$  km, 那么  $DB=100-x$ ,

图 3-16

$$CD=\sqrt{20^2+x^2}=\sqrt{400+x^2}.$$

由于铁路上每公里货运的运费与公路上每公里货运的运费之比为 3:5, 因此我们不妨设铁路上每公里的运费为  $3k$ , 公路上每公里的运费为  $5k$  ( $k$  为某个正数, 因它与本题的解无关, 所以不必定出). 设从  $B$  点到  $C$  点需要的总运费为  $y$ , 那么

$$y=5k \cdot CD + 3k \cdot DB,$$

即  $y=5k\sqrt{400+x^2}+3k(100-x)$  ( $0 \leq x \leq 100$ ).

现在, 问题就归结为:  $x$  在  $[0, 100]$  内取何值时目标函数  $y$  的值最小.

先求  $y$  对  $x$  的导数:

$$y'=k\left(\frac{5x}{\sqrt{400+x^2}}-3\right).$$

解方程  $y'=0$ , 得  $x=15$  km.

由于  $y|_{x=0}=400k, y|_{x=15}=380k, y|_{x=100}=500k\sqrt{1+\frac{1}{5^2}}$ , 其中以  $y|_{x=15}$

$= 380k$  为最小, 因此, 当  $AD = x = 15 \text{ km}$  时, 总运费为最省.

在求函数的最大值(或最小值)时, 特别值得指出的是下述情形:  $f(x)$  在一个区间(有限或无限, 开或闭)内可导且只有一个驻点  $x_0$ , 并且这个驻点  $x_0$  是函数  $f(x)$  的极值点, 那么, 当  $f(x_0)$  是极大值时,  $f(x_0)$  就是  $f(x)$  在该区间上的最大值(图 3-17(a)); 当  $f(x_0)$  是极小值时,  $f(x_0)$  就是  $f(x)$  在该区间上的最小值(图 3-17(b)). 在应用问题中往往遇到这样的情形.

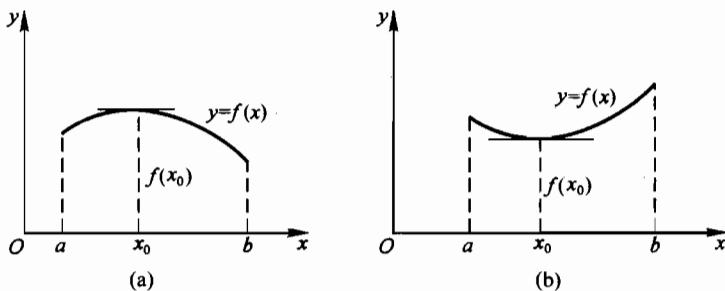


图 3-17

例 5 一束光线由空气中  $A$  点经过水面折射后到达水中  $B$  点(图 3-18). 已知光在空气中和水中传播的速度分别是  $v_1$  和  $v_2$ , 光线在介质中总是沿着耗时最少的路径传播. 试确定光线传播的路径.

解 设  $A$  点到水面的垂直距离为  $AO = h_1$ ,  $B$  点到水面的垂直距离为  $BQ = h_2$ ,  $x$  轴沿水面过点  $O, Q, OQ$  的长度为  $l$ .

由于光线总是沿着耗时最少的路径传播, 因此光线在同一均匀介质中必沿直线传播. 设光线的传播路径与  $x$  轴的交点为  $P$ ,  $OP = x$ , 则光线从  $A$  到  $B$  的传播路径必为折线  $APB$ , 其所需要的传播时间为

$$T(x) = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (l-x)^2}}{v_2}, \quad x \in [0, l].$$

下面来确定  $x$  满足什么条件时,  $T(x)$  在  $[0, l]$  上取得最小值.

由于

$$T'(x) = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} \cdot \frac{l-x}{\sqrt{h_2^2 + (l-x)^2}}, \quad x \in [0, l]$$

$$T''(x) = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{h_1^2}{(h_1^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{v_2} \cdot \frac{h_2^2}{[h_2^2 + (l-x)^2]^{\frac{3}{2}}} > 0, \quad x \in [0, l]$$

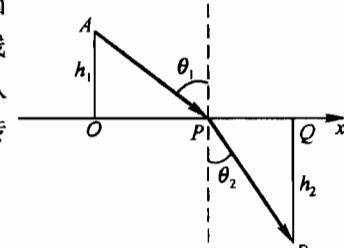


图 3-18

$$T'(0) < 0, T'(l) > 0,$$

又  $T'(x)$  在  $[0, l]$  上连续, 故  $T'(x)$  在  $(0, l)$  内存在唯一零点  $x_0$ , 且  $x_0$  是  $T(x)$  在  $(0, l)$  内的唯一极小值点, 从而也是  $T(x)$  在  $[0, l]$  上的最小值点.

设  $x_0$  满足  $T'(x) = 0$ , 即

$$\frac{x_0}{v_1 \sqrt{h_1^2 + x_0^2}} = \frac{l - x_0}{v_2 \sqrt{h_2^2 + (l - x_0)^2}}.$$

记

$$\frac{x_0}{\sqrt{h_1^2 + x_0^2}} = \sin \theta_1, \quad \frac{l - x_0}{\sqrt{h_2^2 + (l - x_0)^2}} = \sin \theta_2,$$

就得到

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2}.$$

这就是说, 当  $P$  点满足以上条件时,  $APB$  就是光线的传播路径. 上式就是光学中著名的折射定律, 其中  $\theta_1, \theta_2$  分别是光线的入射角和折射角(见图 3-18).

还要指出, 实际问题中, 往往根据问题的性质就可以断定可导函数  $f(x)$  确有最大值或最小值, 而且一定在定义区间内部取得. 这时如果  $f(x)$  在定义区间内部只有一个驻点  $x_0$ , 那么不必讨论  $f(x_0)$  是不是极值, 就可以断定  $f(x_0)$  是最大值或最小值.

**例 6** 把一根直径为  $d$  的圆木锯成截面为矩形的梁(图3-19). 问矩形截面的高  $h$  和宽  $b$  应如何选择才能使梁的抗弯截面模量最大?

解 由力学分析知道: 矩形梁的抗弯截面模量为

$$W = \frac{1}{6} b h^3.$$

由图 3-19 看出,  $b$  与  $h$  有下面的关系:

$$h^2 = d^2 - b^2,$$

因而

$$W = \frac{1}{6} (d^2 b - b^3).$$

这样,  $W$  就与  $b$  存在函数关系,  $b$  的变化范围是  $(0, d)$ . 现在, 问题化为:  $b$  等于多少时目标函数  $W = W(b)$  取最大值? 为此, 求  $W$  对  $b$  的导数:

$$W' = \frac{1}{6} (d^2 - 3b^2).$$

令  $W' = 0$ , 解得

$$b = \sqrt{\frac{1}{3}} d.$$

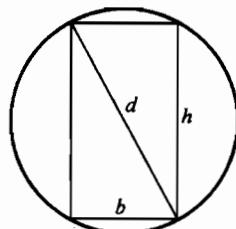


图 3-19

由于梁的最大抗弯截面模量一定存在,而且在  $(0, d)$  内部取得;现在,  $W' = 0$  在  $(0, d)$  内只有一个根  $b = \sqrt{\frac{1}{3}}d$ , 所以, 当  $b = \sqrt{\frac{1}{3}}d$  时,  $W$  的值最大. 这时,

$$h^2 = d^2 - b^2 = d^2 - \frac{1}{3}d^2 = \frac{2}{3}d^2,$$

即

$$h = \sqrt{\frac{2}{3}}d.$$

$$d : h : b = \sqrt{3} : \sqrt{2} : 1.$$

**例 7** 假设某工厂生产某产品  $x$  千件的成本是  $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ , 售出该产品  $x$  千件的收入是  $r(x) = 9x$ . 问是否存在一个能取得最大利润的生产水平? 如果存在的话, 找出这个生产水平.

解 由题意知, 售出  $x$  千件产品的利润是

$$p(x) = r(x) - c(x).$$

如果  $p(x)$  取得最大值, 那么它一定在使得  $p'(x) = 0$  的生产水平处获得. 因此, 令

$$p'(x) = r'(x) - c'(x) = 0,$$

即

$$r'(x) = c'(x).$$

得

$$x^2 - 4x + 2 = 0.$$

解得  $x = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$ ,  $x_1 = 2 - \sqrt{2} \approx 0.586$ ,  $x_2 = 2 + \sqrt{2} \approx 3.414$ .

又  $p''(x) = -6x + 12$ ,  $p''(x_1) > 0$ ,  $p''(x_2) < 0$ .

故在  $x_2 = 3.414$  处达到最大利润, 而在  $x_1 = 0.586$  处发生局部最大亏损.

在经济学中, 称  $c'(x)$  为边际成本,  $r'(x)$  为边际收入,  $p'(x)$  为边际利润. 上述结果表明: 在给出最大利润的生产水平上,  $r'(x) = c'(x)$ , 即边际收入等于边际成本. 上面的结果也可以从图 3-20 的成本曲线和收入曲线中看出.

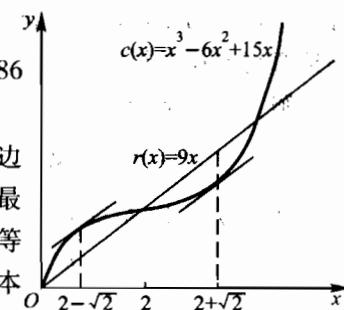


图 3-20

### 习题 3-5

1. 求下列函数的极值:

- (1)  $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$ ;
- (2)  $y = x - \ln(1 + x)$ ;
- (3)  $y = -x^4 + 2x^2$ ;
- (4)  $y = x + \sqrt{1 - x}$ ;

$$(5) y = \frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}};$$

$$(6) y = \frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1};$$

$$(7) y = e^x \cos x;$$

$$(8) y = x^{\frac{1}{x}};$$

$$(9) y = 3 - 2(x+1)^{\frac{1}{3}};$$

$$(10) y = x + \tan x.$$

2. 试证明: 如果函数  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  满足条件  $b^2 - 3ac < 0$ , 那么这函数没有极值.

3. 试问  $a$  为何值时, 函数  $f(x) = a \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$  在  $x = \frac{\pi}{3}$  处取得极值? 它是极大值还是极小值? 并求此极值.

4. 求下列函数的最大值、最小值;

$$(1) y = 2x^3 - 3x^2, -1 \leq x \leq 4;$$

$$(2) y = x^4 - 8x^2 + 2, -1 \leq x \leq 3;$$

$$(3) y = x + \sqrt{1-x}, -5 \leq x \leq 1.$$

5. 问函数  $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x - 7$  ( $1 \leq x \leq 4$ ) 在何处取得最大值? 并求出它的最大值.

6. 问函数  $y = x^2 - \frac{54}{x}$  ( $x < 0$ ) 在何处取得最小值?

7. 问函数  $y = \frac{x}{x^2 + 1}$  ( $x \geq 0$ ) 在何处取得最大值?

8. 某车间靠墙壁要盖一间长方形小屋, 现有存砖只够砌 20 m 长的墙壁. 问应围成怎样的长方形才能使这间小屋的面积最大?

9. 要造一圆柱形油罐, 体积为  $V$ , 问底半径  $r$  和高  $h$  各等于多少时, 才能使表面积最小? 这时底直径与高的比是多少?

10. 某地区防空洞的截面拟建成矩形加半圆(图 3-21). 截面的面积为  $5 \text{ m}^2$ . 问底宽  $x$  为多少时才能使截面的周长最小, 从而使建造时所用的材料最省?

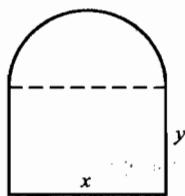


图 3-21

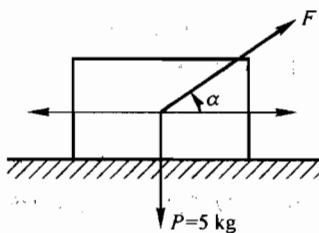


图 3-22

11. 设有质量为  $5 \text{ kg}$  的物体, 置于水平面上, 受力  $F$  的作用而开始移动(图 3-22). 设摩擦系数  $\mu = 0.25$ , 问力  $F$  与水平线的交角  $\alpha$  为多少时, 才可使力  $F$  的大小为最小?

12. 有一杠杆, 支点在它的一端. 在距支点  $0.1 \text{ m}$  处挂一质量为  $49 \text{ kg}$  的物体. 加力于杠杆的另一端使杠杆保持水平(图 3-23). 如果杠杆的线密度为  $5 \text{ kg/m}$ , 求最省力的杆长?

13. 从一块半径为  $R$  的圆铁片上挖去一个扇形做成一个漏斗(图 3-24). 问留下的扇形的中心角  $\varphi$  取多大时, 做成的漏斗的容积最大?

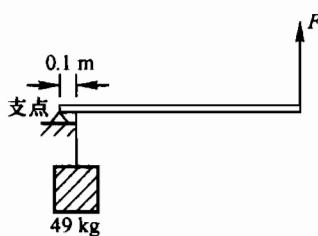


图 3-23

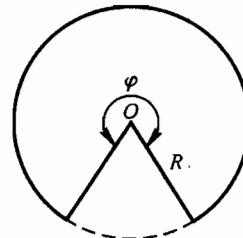


图 3-24

14. 某吊车的车身高为 1.5 m, 吊臂长 15 m. 现在要把一个 6 m 宽、2 m 高的屋架, 水平地吊到 6 m 高的柱子上去(图 3-25), 问能否吊得上去?

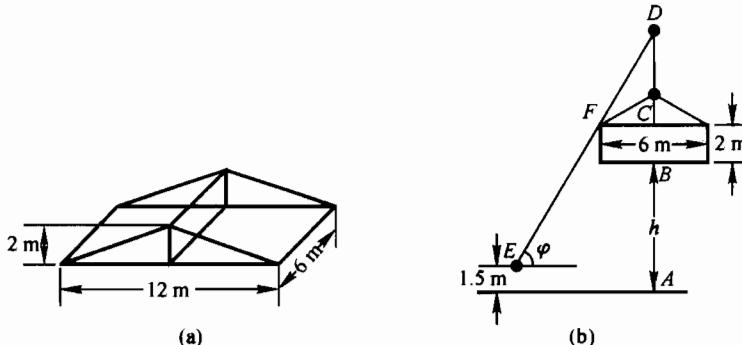


图 3-25

15. 一房地产公司有 50 套公寓要出租. 当月租金定为 1 000 元时, 公寓会全部租出去. 当月租金每增加 50 元时, 就会多一套公寓租不出去, 而租出去的公寓每月需花费 100 元的维修费. 试问房租定为多少可获得最大收入?

16. 已知制作一个背包的成本为 40 元. 如果每一个背包的售出价为  $x$  元, 售出的背包数由

$$n = \frac{a}{x - 40} + b(80 - x)$$

给出, 其中  $a, b$  为正常数. 问什么样的售出价格能带来最大利润?

## 第六节 函数图形的描绘

借助于一阶导数的符号, 可以确定函数图形在哪个区间上上升, 在哪个区间上下降, 在什么地方有极值点; 借助于二阶导数的符号, 可以确定函数图形在哪个区间上为凹, 在哪个区间上为凸, 在什么地方有拐点. 知道了函数图形的升降、凹凸以及极值点和拐点后, 也就可以掌握函数的性态, 并把函数的图形画得比较准确.

现在,随着现代计算机技术的发展,借助于计算机和许多数学软件,可以方便地画出各种函数的图形.但是,如何识别机器作图中的误差,如何掌握图形上的关键点,如何选择作图的范围等,从而进行人工干预,仍然需要我们有运用微分学的方法描绘函数图形的基本知识.

利用导数描绘函数图形的一般步骤如下:

第一步 确定函数  $y = f(x)$  的定义域及函数所具有的某些特性(如奇偶性、周期性等),并求出函数的一阶导数  $f'(x)$  和二阶导数  $f''(x)$ ;

第二步 求出一阶导数  $f'(x)$  和二阶导数  $f''(x)$  在函数定义域内的全部零点,并求出函数  $f(x)$  的间断点及  $f'(x)$  和  $f''(x)$  不存在的点,用这些点把函数的定义域划分成几个部分区间;

第三步 确定在这些部分区间内  $f'(x)$  和  $f''(x)$  的符号,并由此确定函数图形的升降和凹凸,极值点和拐点;

第四步 确定函数图形的水平、铅直渐近线以及其他变化趋势;

第五步 算出  $f'(x)$  和  $f''(x)$  的零点以及不存在的点所对应的函数值,定出图形上相应的点;为了把图形描绘得准确些,有时还需要补充一些点;然后结合第三、四步中得到的结果,联结这些点画出函数  $y = f(x)$  的图形.

例 1 画出函数  $y = x^3 - x^2 - x + 1$  的图形.

解 (1) 所给函数  $y = f(x)$  的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ , 而

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x + 1)(x - 1),$$

$$f''(x) = 6x - 2 = 2(3x - 1).$$

(2)  $f'(x)$  的零点为  $x = -\frac{1}{3}$  和  $1$ ;  $f''(x)$  的零点为  $x = \frac{1}{3}$ . 将点  $x = -\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $1$  由小到大排列,依次把定义域  $(-\infty, +\infty)$  划分成下列四个部分区间:

$$\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right], \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, 1\right], [1, +\infty).$$

(3) 在  $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$  内,  $f'(x) > 0$ ,  $f''(x) < 0$ , 所以在  $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$  上的曲线弧上升而且是凸的.

在  $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$  内,  $f'(x) < 0$ ,  $f''(x) < 0$ , 所以在  $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$  上的曲线弧下降而且是凸的.

同样,可以讨论在区间  $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$  上及在区间  $[1, +\infty)$  上相应的曲线弧的升降和凹凸.为了明确起见,我们把所得的结论列成下表:

$x$	$(-\infty, -\frac{1}{3})$	$\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$	$(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3}, 1)$	$1$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-	-	-	0	+	+	+
$y=f(x)$ 的图形	/	极大	\	拐点	\	极小	/

这里记号 / 表示曲线弧上升而且是凸的, \ 表示曲线弧下降而且是凸的, \ 表示曲线弧下降而且是凹的, / 表示曲线弧上升而且是凹的.

(4) 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $y \rightarrow +\infty$ ; 当  $x \rightarrow -\infty$  时,  $y \rightarrow -\infty$ ;

(5) 算出  $x = -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1$  处的函数值:

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{27}, f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{27}, f(1) = 0.$$

从而得到函数  $y = x^3 - x^2 - x + 1$  图形上的三个点:

$$\left(-\frac{1}{3}, \frac{32}{27}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{16}{27}\right), (1, 0).$$

适当补充一些点. 例如, 计算出

$$f(-1) = 0, f(0) = 1, f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{8},$$

就可补充描出点  $(-1, 0)$ , 点  $(0, 1)$  和点

$\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{8}\right)$ . 结合(3)、(4)中得到的结果, 就可以画出

$y = x^3 - x^2 - x + 1$   
的图形(图 3-26).

例 2 描绘函数  $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  的图形.

解 (1) 所给函数  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  的定

义域为  $(-\infty, +\infty)$ .

由于

$$f(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-x)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = f(x),$$

所以  $f(x)$  是偶函数, 它的图形关于  $y$  轴对称. 因此可以只讨论  $[0, +\infty)$  上该函数的图形. 求出

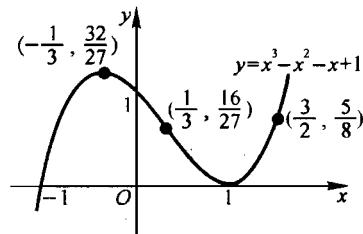


图 3-26

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} [e^{-\frac{x^2}{2}} + x e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-x)] \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (x^2 - 1). \end{aligned}$$

(2) 在  $[0, +\infty)$  上,  $f'(x)$  的零点为  $x=0$ ;  $f''(x)$  的零点为  $x=1$ . 用点  $x=1$  把  $[0, +\infty)$  划分成两个区间  $[0, 1]$  和  $[1, +\infty)$ .

(3) 在  $(0, 1)$  内,  $f'(x) < 0$ ,  $f''(x) < 0$ , 所以在  $[0, 1]$  上的曲线弧下降而且是凸的. 结合  $f'(0)=0$  以及图形关于  $y$  轴对称可知,  $x=0$  处函数  $f(x)$  有极大值.

在  $(1, +\infty)$  内,  $f'(x) < 0$ ,  $f''(x) > 0$ , 所以在  $[1, +\infty)$  上的曲线弧下降而且是凹的.

上述的这些结果, 可以列成下表:

$x$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	0	-	-	-
$f''(x)$	-	-	0	+
$y=f(x)$ 的图形	极大	↙	拐点	↘

(4) 由于  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , 所以图形有一条水平渐近线  $y=0$ .

(5) 算出  $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ,  $f(1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$ . 从而得到函数

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

图形上的两点  $M_1\left(0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$  和  $M_2\left(1, \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$ . 又由  $f(2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi e^2}}$

得  $M_3\left(2, \frac{1}{\sqrt{2\pi e^2}}\right)$ . 结合(3)、(4)的讨论, 画出函数  $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  在  $[0, +\infty)$  上的

图形. 最后, 利用图形的对称性, 便可得到函数在  $(-\infty, 0]$  上的图形(图 3-27).

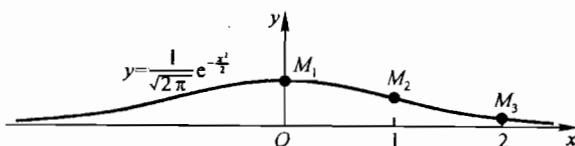


图 3-27

例 3 描绘函数  $y = 1 + \frac{36x}{(x+3)^2}$  的图形.

解 (1) 所给函数  $y = f(x)$  的定义域为  $(-\infty, -3), (-3, +\infty)$ .

$$f'(x) = \frac{36(3-x)}{(x+3)^3}, \quad f''(x) = \frac{72(x-6)}{(x+3)^4}.$$

(2)  $f'(x)$  的零点为  $x=3$ ;  $f''(x)$  的零点为  $x=6$ ;  $x=-3$  是函数的间断点. 点  $x=-3, x=3$  和  $x=6$  把定义域划分成四个部分区间:

$$(-\infty, -3), (-3, 3], [3, 6], [6, +\infty).$$

(3) 在各部分区间内  $f'(x)$  及  $f''(x)$  的符号、相应曲线弧的升降及凹凸、极值点和拐点等如下表:

$x$	$(-\infty, -3)$	$(-3, 3)$	3	$(3, 6)$	6	$(6, +\infty)$
$f'(x)$	-	+	0	-	-	-
$f''(x)$	-	-	-	-	0	+
$y=f(x)$ 的图形	↙	↗	极大	↘	拐点	↙

(4) 由于  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\infty$ , 所以图形有一条水平渐近线  $y=1$  和一条铅直渐近线  $x=-3$ .

(5) 算出  $x=3, 6$  处的函数值:

$$f(3)=4, f(6)=\frac{11}{3},$$

从而得到图形上的两个点:

$$M_1(3, 4), M_2\left(6, \frac{11}{3}\right).$$

又由于

$$f(0)=1, f(-1)=-8, f(-9)=-8, f(-15)=-\frac{11}{4},$$

得图形上的四个点:

$$\begin{array}{ll} M_3(0, 1), & M_4(-1, -8), \\ M_5(-9, -8), & M_6\left(-15, -\frac{11}{4}\right). \end{array}$$

结合(3)、(4)中得到的结果, 画出函数  $y = 1 + \frac{36x}{(x+3)^2}$  的图形如图 3-28 所示.

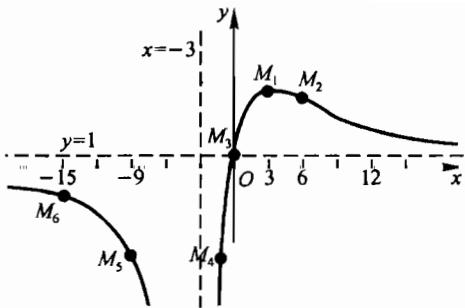


图 3-28

### 习题 3-6

描绘下列函数的图形：

$$1. \quad y = \frac{1}{5}(x^4 - 6x^2 + 8x + 7);$$

$$2. \quad y = \frac{x}{1+x^2};$$

$$3. \quad y = e^{-(x-1)^2};$$

$$4. \quad y = x^2 + \frac{1}{x};$$

$$5. \quad y = \frac{\cos x}{\cos 2x}.$$

## 第七节 曲 率

### 一、弧微分

作为曲率的预备知识，先介绍弧微分的概念。

设函数  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  内具有连续导数。在曲线  $y = f(x)$  上取固定点  $M_0(x_0, y_0)$  作为度量弧长的基点（图 3-29），并规定依  $x$  增大的方向作为曲线的正向。对曲线上任一点  $M(x, y)$ ，规定有向弧段  $\widehat{M_0 M}$  的值  $s$ （简称为弧  $s$ ）<sup>①</sup> 如下： $s$  的绝对值等于这弧段的长度，当有向弧段  $\widehat{M_0 M}$  的方向与曲线的正向一致

<sup>①</sup> 有向弧段  $\widehat{M_0 M}$  的值也常记作  $\widehat{M_0 M}$ ，即记号  $\widehat{M_0 M}$  既表示有向弧段，又表示有向弧段的值。

时  $s > 0$ , 相反时  $s < 0$ . 显然, 弧  $s$  与  $x$  存在函数关系:  $s = s(x)$ , 而且  $s(x)$  是  $x$  的单调增加函数. 下面来求  $s(x)$  的导数及微分.

设  $x, x + \Delta x$  为  $(a, b)$  内两个邻近的点, 它们在曲线  $y = f(x)$  上的对应点为  $M, M'$  (图 3-29), 并设对于  $x$  的增量  $\Delta x$ , 弧  $s$  的增量为  $\Delta s$ , 那么

$$\Delta s = \widehat{M_0 M'} - \widehat{M_0 M} = \widehat{M M'}$$

$$\text{于是 } \left( \frac{\Delta s}{\Delta x} \right)^2 = \left( \frac{\widehat{M M'}}{\Delta x} \right)^2 = \left( \frac{\widehat{M M'}}{|M M'|} \right)^2 \cdot \frac{|M M'|^2}{(\Delta x)^2}$$

$$= \left( \frac{\widehat{M M'}}{|M M'|} \right)^2 \cdot \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}$$

$$= \left( \frac{\widehat{M M'}}{|M M'|} \right)^2 \left[ 1 + \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \right],$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \pm \sqrt{\left( \frac{\widehat{M M'}}{|M M'|} \right)^2 \cdot \left[ 1 + \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \right]}.$$

令  $\Delta x \rightarrow 0$  取极限, 由于  $\Delta x \rightarrow 0$  时,  $M' \rightarrow M$ , 这时弧的长度与弦的长度之比的极限等于 1, 即

$$\lim_{M' \rightarrow M} \frac{\widehat{M M'}}{|M M'|} = 1,$$

又

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$$

因此得

$$\frac{ds}{dx} = \pm \sqrt{1 + y'^2},$$

由于  $s = s(x)$  是单调增加函数, 从而根号前应取正号, 于是有

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (1)$$

这就是弧微分公式.

## 二、曲率及其计算公式

我们直觉地认识到: 直线不弯曲, 半径较小的圆弯曲得比半径较大的圆厉害些, 而其他曲线的不同部分有不同的弯曲程度, 例如抛物线  $y = x^2$  在顶点附近弯曲得比远离顶点的部分厉害些.

在工程技术中, 有时需要研究曲线的弯曲程度. 例如, 船体结构中的钢梁, 机床的转轴等, 它们在荷载作用下要产生弯曲变形, 在设计时对它们的弯曲必须有

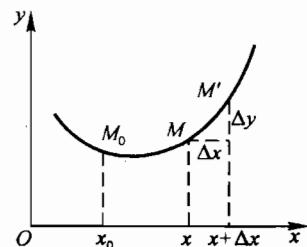


图 3-29

一定的限制,这就要定量地研究它们的弯曲程度.为此首先要讨论如何用数量来描述曲线的弯曲程度.

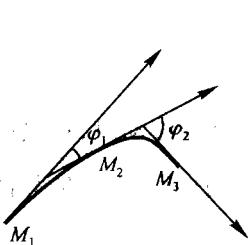


图 3-30

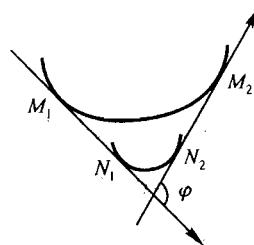


图 3-31

在图 3-30 中可以看出,弧段  $\widehat{M_1 M_2}$  比较平直,当动点沿这段弧从  $M_1$  移动到  $M_2$  时,切线转过的角度  $\varphi_1$  不大,而弧段  $\widehat{M_2 M_3}$  弯曲得比较厉害,角  $\varphi_2$  就比较大.

但是,切线转过的角度的大小还不能完全反映曲线弯曲的程度.例如,从图 3-31 中可以看出,两段曲线弧  $\widehat{M_1 M_2}$  及  $\widehat{N_1 N_2}$  尽管切线转过的角度都是  $\varphi$ ,然而弯曲程度并不相同,短弧段比长弧段弯曲得厉害些.由此可见,曲线弧的弯曲程度还与弧段的长度有关.

按上面的分析,我们引入描述曲线弯曲程度的曲率概念如下.

设曲线  $C$  是光滑的<sup>①</sup>,在曲线  $C$  上选定一点  $M_0$  作为度量弧  $s$  的基点.设曲线上点  $M$  对应于弧  $s$ ,在点  $M$  处切线的倾角为  $\alpha$  (这里假定曲线  $C$  所在的平面上已设立了  $xOy$  坐标系),曲线上另外一点  $M'$  对应于弧  $s + \Delta s$ ,在点  $M'$  处切线的倾角为  $\alpha + \Delta\alpha$  (图 3-32),那么,弧段  $MM'$  的长度为  $|\Delta s|$ ,当动点从  $M$  移动到  $M'$  时切线转过的角度为  $|\Delta\alpha|$ .

我们用比值  $\frac{|\Delta\alpha|}{|\Delta s|}$ ,即单位弧段上切线转过的角度的大小来表达弧段  $MM'$  的平均弯曲程度,把这个比值叫做弧段  $MM'$  的平均曲率,并记作  $\bar{K}$ ,即

$$\bar{K} = \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right|.$$

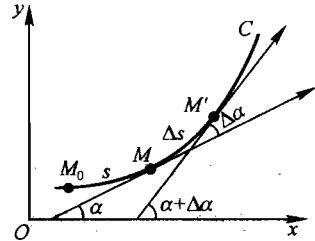


图 3-32

类似于从平均速度引进瞬时速度的方法,当  $\Delta s \rightarrow 0$  时(即  $M' \rightarrow M$  时),上述平均曲率的极限叫做曲线  $C$  在点  $M$  处的曲率,记作  $K$ ,即

<sup>①</sup> 当曲线上每一点处都具有切线,且切线随切点的移动而连续转动,这样的曲线称为光滑曲线.

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right|.$$

在  $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}$  存在的条件下,  $K$  也可以表示为

$$K = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|. \quad (2)$$

对于直线来说, 切线与直线本身重合, 当点沿直线移动时, 切线的倾角  $\alpha$  不变(图 3-33),  $\Delta \alpha = 0$ ,  $\frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = 0$ , 从而  $K = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| = 0$ . 这就是说, 直线上任意点  $M$  处的曲率都等于零, 这与我们直觉认识到的“直线不弯曲”一致.

设圆的半径为  $a$ , 由图 3-34 可见圆在点  $M, M'$  处的切线所夹的角  $\Delta \alpha$  等于中心角  $MDM'$ . 但  $\angle MDM' = \frac{\Delta s}{a}$ , 于是

$$\frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{\frac{\Delta s}{a}}{\Delta s} = \frac{1}{a},$$

从而

$$K = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| = \frac{1}{a}.$$

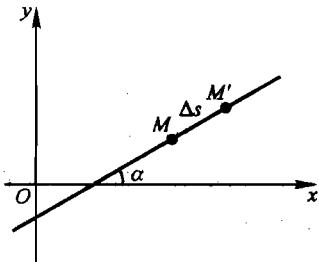


图 3-33

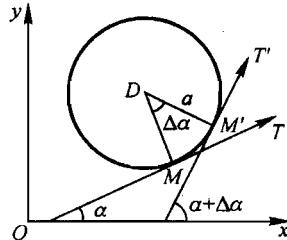


图 3-34

因为点  $M$  是圆上任意取定的一点, 上述结论表示圆上各点处的曲率都等于半径  $a$  的倒数  $\frac{1}{a}$ , 这就是说, 圆的弯曲程度到处一样, 且半径越小曲率越大, 即圆弯曲得越厉害.

在一般情况下, 我们根据(2)式来导出便于实际计算曲率的公式.

设曲线的直角坐标方程是  $y = f(x)$ , 且  $f(x)$  具有二阶导数(这时  $f'(x)$  连续, 从而曲线是光滑的). 因为  $\tan \alpha = y'$ , 所以

$$\sec^2 \alpha \frac{d\alpha}{dx} = y'',$$

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{y''}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{y''}{1 + y'^2},$$

于是

$$d\alpha = \frac{y''}{1+y'^2} dx.$$

又由(1)知道

$$ds = \sqrt{1+y'^2} dx.$$

从而,根据曲率  $K$  的表达式(2),有

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}. \quad (3)$$

设曲线由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

给出,则可利用由参数方程所确定的函数的求导法,求出  $y'_x$  及  $y''_x$ ,代入(3)便得

$$K = \frac{|\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)]^{3/2}}. \quad (4)$$

例 1 计算等边双曲线  $xy=1$  在点  $(1,1)$  处的曲率.

解 由  $y = \frac{1}{x}$ , 得

$$y' = -\frac{1}{x^2}, y'' = \frac{2}{x^3}.$$

因此,

$$y'|_{x=1} = -1, y''|_{x=1} = 2.$$

把它们代入公式(3),便得曲线  $xy=1$  在点  $(1,1)$  处的曲率为

$$K = \frac{2}{[1+(-1)^2]^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 2 抛物线  $y=ax^2+bx+c$  上哪一点处的曲率最大?

解 由  $y=ax^2+bx+c$ , 得

$$y' = 2ax+b, y'' = 2a,$$

代入公式(3),得

$$K = \frac{|2a|}{[1+(2ax+b)^2]^{3/2}}.$$

因为  $K$  的分子是常数  $|2a|$ , 所以只要分母最小,  $K$  就最大: 容易看出, 当  $2ax+b=0$ , 即  $x=-\frac{b}{2a}$  时,  $K$  的分母最小, 因而  $K$  有最大值  $|2a|$ . 而  $x=-\frac{b}{2a}$  所对应的点为抛物线的顶点. 因此, 抛物线在顶点处的曲率最大.

在有些实际问题中,  $|y'|$  同 1 比较起来是很小的(有的工程技术书上把这种关系记成  $|y'| \ll 1$ ), 可以忽略不计. 这时, 由

$$1+y'^2 \approx 1,$$

而有曲率的近似计算公式

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} \approx |y''|.$$

这就是说,当 $|y'| \ll 1$ 时,曲率 $K$ 近似于 $|y''|$ . 经过这样简化之后,对一些复杂问题的计算和讨论就方便多了.

### 三、曲率圆与曲率半径

设曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x,y)$ 处的曲率为 $K(K \neq 0)$ . 在点 $M$ 处的曲线的法线上,在凹的一侧取一点 $D$ ,使 $|DM| = \frac{1}{K} = \rho$ . 以 $D$ 为圆心, $\rho$ 为半径作圆(图 3-35),这个圆叫做曲线在点 $M$ 处的曲率圆,曲率圆的圆心 $D$ 叫做曲线在点 $M$ 处的曲率中心,曲率圆的半径 $\rho$ 叫做曲线在点 $M$ 处的曲率半径.

按上述规定可知,曲率圆与曲线在点 $M$ 有相同的切线和曲率,且在点 $M$ 邻近有相同的凹向. 因此,在实际问题中,常常用曲率圆在点 $M$ 邻近的一段圆弧来近似代替曲线弧,以使问题简化.

按上述规定,曲线在点 $M$ 处的曲率 $K(K \neq 0)$ 与曲线在点 $M$ 处的曲率半径 $\rho$ 有如下关系:

$$\rho = \frac{1}{K}, \quad K = \frac{1}{\rho}.$$

这就是说:曲线上一点处的曲率半径与曲线在该点处的曲率互为倒数.

**例 3** 设工件内表面的截线为抛物线 $y=0.4x^2$ (图 3-36). 现在要用砂轮磨削其内表面. 问用直径多大的砂轮才比较合适?

**解** 为了在磨削时不使砂轮与工件接触处附近的那部分工件磨去太多,砂轮的半径应不大于抛物线上各点处曲率半径中的最小值. 由本节例 2 知道,抛物线在其顶点处的曲率最大,也就是说,抛物线在其顶点处的曲率半径最小. 因此,只要求出抛物线 $y=0.4x^2$ 在顶点 $O(0,0)$ 处的曲率半径. 由

$$y' = 0.8x, \quad y'' = 0.8,$$

而有

$$y'|_{x=0} = 0, \quad y''|_{x=0} = 0.8.$$

把它们代入公式(3),得

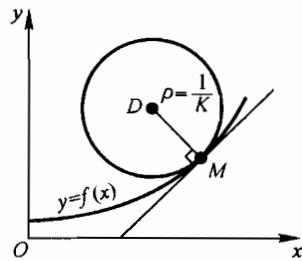


图 3-35

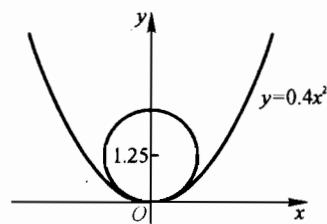


图 3-36

$$K = 0.8.$$

因而求得抛物线顶点处的曲率半径

$$\rho = \frac{1}{K} = 1.25.$$

所以选用砂轮的半径不得超过 1.25 单位长, 即直径不得超过 2.50 单位长.

对于用砂轮磨削一般工件的内表面时, 也有类似的结论, 即选用的砂轮的半径不应超过这工件内表面的截线上各点处曲率半径中的最小值.

#### \* 四、曲率中心的计算公式 渐屈线与渐伸线

设已知曲线的方程是  $y = f(x)$ , 且其二阶导数  $y''$  在点  $x$  不为零, 则曲线在对应点  $M(x, y)$  的曲率中心  $D(\alpha, \beta)$  的坐标为

$$\begin{cases} \alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \\ \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''}. \end{cases} \quad (5)$$

这是因为, 曲线  $y = f(x)$  在点  $M(x, y)$  的曲率圆的方程为

$$(\xi - \alpha)^2 + (\eta - \beta)^2 = \rho^2,$$

其中  $\xi, \eta$  是曲率圆上的动点坐标, 且

$$\rho^2 = \frac{1}{K^2} = \frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}.$$

因为点  $M$  在曲率圆上, 所以

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2; \quad (6)$$

又因为曲线在点  $M$  的切线与曲率圆的半径  $DM$  相垂直(图 3-35), 所以

$$y' = -\frac{x - \alpha}{y - \beta}. \quad (7)$$

由(6)和(7)消去  $x - \alpha$ , 解出

$$(y - \beta)^2 = \frac{\rho^2}{1+y'^2} = \frac{(1+y'^2)^2}{y''^2}.$$

由于当  $y'' > 0$  时曲线为凹弧,  $y - \beta < 0$ ; 当  $y'' < 0$  时曲线为凸弧,  $y - \beta > 0$ . 总之,  $y''$  与  $y - \beta$  异号. 因此取上式两边的平方根, 得

$$y - \beta = -\frac{1+y'^2}{y''},$$

又

$$x - \alpha = -y'(y - \beta) = \frac{y'(1+y'^2)}{y''}.$$

从而有公式(5).

当点 $(x, f(x))$ 沿曲线 $C$ 移动时, 相应的曲率中心 $D$ 的轨迹曲线 $G$ 称为曲线 $C$ 的渐屈线, 而曲线 $C$ 称为曲线 $G$ 的渐伸线(图3-37). 所以曲线 $y=f(x)$ 的渐屈线的参数方程为

$$\begin{cases} \alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \\ \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''}, \end{cases} \quad (8)$$

其中 $y=f(x), y'=f'(x), y''=f''(x), x$ 为参数, 直角坐标系 $aO\beta$ 与 $xOy$ 坐标系重合.

#### 例4 求摆线

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

的渐屈线方程.

解  $\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t), \frac{dy}{dt} = a \sin t$ , 所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{1 - \cos t}\right)}{a(1 - \cos t)}$$

$$= \frac{\cos t - 1}{(1 - \cos t)^2} = \frac{1}{a(1 - \cos t)^2}.$$

将这些结果代入(8)式并化简, 便得摆线的渐屈线的参数方程

$$\begin{cases} \alpha = a(t + \sin t), \\ \beta = a(\cos t - 1), \end{cases} \quad (9)$$

其中 $t$ 为参数, 直角坐标系 $aO\beta$ 与 $xOy$ 坐标系重合. 为了作出渐屈线(9), 令 $t = \pi + \tau$ , 代入(9)式得

$$\begin{cases} \alpha - \pi a = a(\tau - \sin \tau), \\ \beta + 2a = a(1 - \cos \tau), \end{cases}$$

再令 $\alpha - \pi a = \xi, \beta + 2a = \eta$ , 则得

$$\begin{cases} \xi = a(\tau - \sin \tau), \\ \eta = a(1 - \cos \tau). \end{cases} \quad (10)$$

在新坐标系 $\xi O_1 \eta$ 中, 曲线(10)为一摆线, 其中新坐标系 $\xi O_1 \eta$ 由旧坐标系 $xOy$ 平移到新原点 $O_1(\pi a, -2a)$ 得到. 由此可知摆线的渐屈线仍为一摆线, 如图3-38所示.

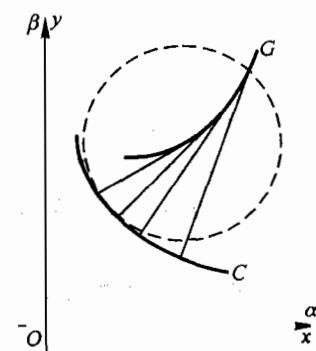


图 3-37

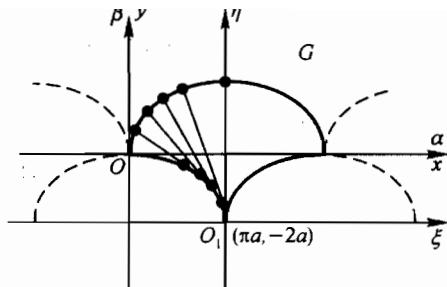


图 3-38

### 习题 3-7

1. 求椭圆  $4x^2 + y^2 = 4$  在点  $(0, 2)$  处的曲率.
2. 求曲线  $y = \ln \sec x$  在点  $(x, y)$  处的曲率及曲率半径.
3. 求抛物线  $y = x^2 - 4x + 3$  在其顶点处的曲率及曲率半径.
4. 求曲线  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$  在  $t = t_0$  相应的点处的曲率.
5. 对数曲线  $y = \ln x$  上哪一点处的曲率半径最小? 求出该点处的曲率半径.
6. 证明曲线  $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$  在点  $(x, y)$  处的曲率半径为  $\frac{y^2}{a}$ .
7. 一飞机沿抛物线路径  $y = \frac{x^2}{10000}$  ( $y$  轴铅直向上, 单位为 m) 作俯冲飞行. 在坐标原点  $O$  处飞机的速度为  $v = 200$  m/s. 飞行员体重  $G = 70$  kg. 求飞机俯冲至最低点即原点  $O$  处时坐椅对飞行员的反力.
8. 汽车连同载重共 5 t, 在抛物线拱桥上行驶, 速度为 21.6 km/h, 桥的跨度为 10 m, 拱的矢高为 0.25 m (图 3-39). 求汽车越过桥顶时对桥的压力.

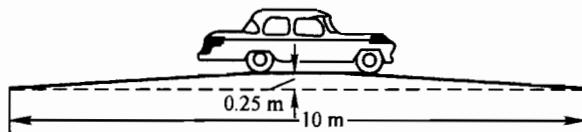


图 3-39

9. 求曲线  $y = \ln x$  在与  $x$  轴交点处的曲率圆方程.
10. 求曲线  $y = \tan x$  在点  $(\frac{\pi}{4}, 1)$  处的曲率圆方程.
11. 求抛物线  $y^2 = 2px$  的渐屈线方程.

## 第八节 方程的近似解

在科学技术问题中,经常会遇到求解高次代数方程或其他类型的方程的问题.要求得这类方程的实根的精确值,往往比较困难,因此就需要寻求方程的近似解.

求方程的近似解,可分两步来做.

第一步是确定根的大致范围.具体地说,就是确定一个区间 $[a, b]$ ,使所求的根是位于这个区间内的唯一实根.这一步工作称为根的隔离,区间 $[a, b]$ 称为所求实根的隔离区间.由于方程 $f(x)=0$ 的实根在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 与 $x$ 轴交点的横坐标,因此为了确定根的隔离区间,可以先较精确地画出 $y=f(x)$ 的图形,然后从图上定出它与 $x$ 轴交点的大概位置.由于作图和读数的误差,这种做法得不出根的高精确度的近似值,但一般已可以确定出根的隔离区间.

第二步是以根的隔离区间的端点作为根的初始近似值,逐步改善根的近似值的精确度,直至求得满足精确度要求的近似解.完成这一步工作有多种方法,这里我们介绍两种常用的方法——二分法和切线法,按照这些方法,编出简单的程序,就可以在计算机上求出方程足够精确的近似解.

### 一、二分法

设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, $f(a) \cdot f(b) < 0$ ,且方程 $f(x)=0$ 在 $(a, b)$ 内仅有一个实根 $\xi$ ,于是 $[a, b]$ 即是这个根的一个隔离区间.

取 $[a, b]$ 的中点 $\xi_1 = \frac{a+b}{2}$ ,计算 $f(\xi_1)$ .

如果 $f(\xi_1) = 0$ ,那么 $\xi = \xi_1$ ;

如果 $f(\xi_1)$ 与 $f(a)$ 同号,那么取 $a_1 = \xi_1, b_1 = b$ ,由 $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$ ,即知 $a_1 < \xi < b_1$ ,且 $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b - a)$ ;

如果 $f(\xi_1)$ 与 $f(b)$ 同号,那么取 $a_1 = a, b_1 = \xi_1$ ,也有 $a_1 < \xi < b_1$ 及 $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b - a)$ ;

总之,当 $\xi \neq \xi_1$ 时,可求得 $a_1 < \xi < b_1$ ,且 $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b - a)$ .

以 $[a_1, b_1]$ 作为新的隔离区间,重复上述做法,当 $\xi \neq \xi_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$ 时,可

求得  $a_2 < \xi < b_2$ , 且  $b_2 - a_2 = \frac{1}{2^2}(b - a)$ .

如此重复  $n$  次, 可求得  $a_n < \xi < b_n$ , 且  $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a)$ . 由此可知, 如果以  $a_n$  或  $b_n$  作为  $\xi$  的近似值, 那么其误差小于  $\frac{1}{2^n}(b - a)$ .

**例 1** 用二分法求方程  $x^3 + 1.1x^2 + 0.9x - 1.4 = 0$  的实根的近似值, 使误差不超过  $10^{-3}$ <sup>①</sup>.

解 令  $f(x) = x^3 + 1.1x^2 + 0.9x - 1.4$ , 显然  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续.

由  $f'(x) = 3x^2 + 2.2x + 0.9$ , 根据判别式  $B^2 - 4AC = 2.2^2 - 4 \times 3 \times 0.9 = -5.96 < 0$ , 知  $f'(x) > 0$ . 故  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内单调增加,  $f(x) = 0$  至多有一个实根.

由  $f(0) = -1.4 < 0$ ,  $f(1) = 1.6 > 0$ , 知  $f(x) = 0$  在  $[0, 1]$  内有唯一的实根. 取  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $[0, 1]$  即是一个隔离区间.

计算得:

$$\xi_1 = 0.5, f(\xi_1) = -0.55 < 0, \text{故 } a_1 = 0.5, b_1 = 1;$$

$$\xi_2 = 0.75, f(\xi_2) = 0.32 > 0, \text{故 } a_2 = 0.5, b_2 = 0.75;$$

$$\xi_3 = 0.625, f(\xi_3) = -0.16 < 0, \text{故 } a_3 = 0.625, b_3 = 0.75;$$

$$\xi_4 = 0.687, f(\xi_4) = 0.062 > 0, \text{故 } a_4 = 0.625, b_4 = 0.687;$$

$$\xi_5 = 0.656, f(\xi_5) = -0.054 < 0, \text{故 } a_5 = 0.656, b_5 = 0.687;$$

$$\xi_6 = 0.672, f(\xi_6) = 0.005 > 0, \text{故 } a_6 = 0.656, b_6 = 0.672;$$

$$\xi_7 = 0.664, f(\xi_7) = -0.025 < 0, \text{故 } a_7 = 0.664, b_7 = 0.672;$$

$$\xi_8 = 0.668, f(\xi_8) = -0.010 < 0, \text{故 } a_8 = 0.668, b_8 = 0.672;$$

$$\xi_9 = 0.670, f(\xi_9) = -0.002 < 0, \text{故 } a_9 = 0.670, b_9 = 0.672;$$

$$\xi_{10} = 0.671, f(\xi_{10}) = 0.001 > 0, \text{故 } a_{10} = 0.670, b_{10} = 0.671.$$

于是  $0.670 < \xi < 0.671$ .

即 0.670 作为根的不足近似值, 0.671 作为根的过剩近似值, 其误差都小于  $10^{-3}$ .

## 二、切线法

设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上具有二阶导数,  $f(a) \cdot f(b) < 0$  且  $f'(x)$  及  $f''(x)$  在

① 按本例误差不超过  $10^{-3}$  的要求, 计算时只取 3 位小数.

$[a, b]$  上保持定号. 在上述条件下, 方程  $f(x) = 0$  在  $(a, b)$  内有唯一的实根  $\xi$ ,  $[a, b]$  为根的一个隔离区间. 此时,  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上的图形  $AB$  只有如图 3-40 所示的四种不同情形.

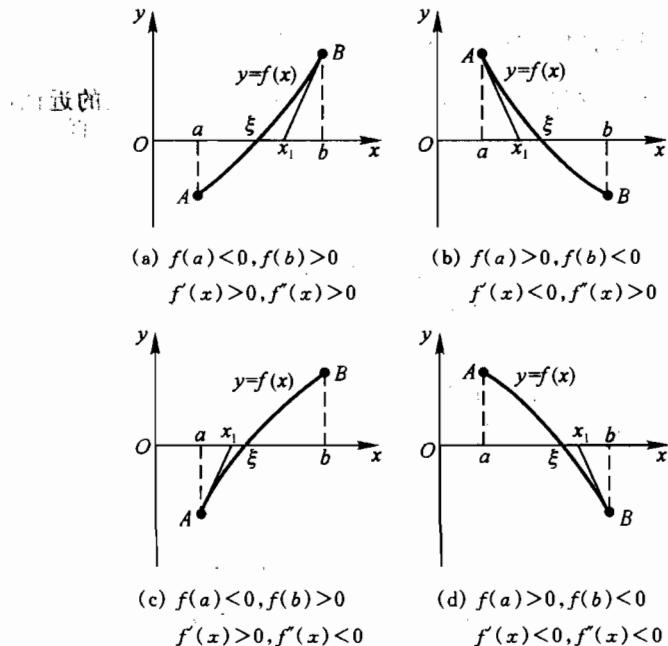


图 3-40

考虑用曲线弧一端的切线来代替曲线弧, 从而求出方程实根的近似值. 这种方法叫做切线法. 从图 3-40 中看出, 如果在纵坐标与  $f''(x)$  同号的那个端点 (此端点记作  $(x_0, f(x_0))$ ) 作切线, 这切线与  $x$  轴的交点的横坐标  $x_1$ , 就比  $x_0$  更接近方程的根  $\xi$ <sup>①</sup>.

① 如图 3-41 所示, 如果把切线作在纵坐标与  $f''(x)$  异号的那个端点, 就不能保证切线与  $x$  轴的交点的横坐标  $x_1$  比原来的近似值  $a$  或  $b$  更接近于方程的根  $\xi$ .

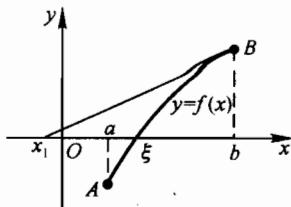


图 3-41

下面以图 3-40(c):  $f(a) < 0, f(b) > 0, f'(x) > 0, f''(x) < 0$  的情形为例进行讨论. 此时因为  $f(a)$  与  $f''(x)$  同号, 所以令  $x_0 = a$ , 在端点  $(x_0, f(x_0))$  作切线, 这切线的方程为

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

令  $y = 0$ , 从上式中解出  $x$ , 就得到切线与  $x$  轴交点的横坐标为

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

它比  $x_0$  更接近方程的根  $\xi$ .

再在点  $(x_1, f(x_1))$  作切线, 可得根的近似值  $x_2$ . 如此继续, 一般的, 在点  $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$  作切线, 得根的近似值

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}. \quad (1)$$

如果  $f(b)$  与  $f''(x)$  同号, 切线作在端点  $B$  (如图 3-40 情形(a)及(d)), 可记  $x_0 = b$ , 仍按公式(1)计算切线与  $x$  轴交点的横坐标.

**例 2** 用切线法求方程  $x^3 + 1.1x^2 + 0.9x - 1.4 = 0$  的实根的近似值, 使误差不超过  $10^{-3}$ .

解 令  $f(x) = x^3 + 1.1x^2 + 0.9x - 1.4$ . 由例 1 知  $[0, 1]$  是根的一个隔离区间.  $f(0) < 0, f(1) > 0$ .

在  $[0, 1]$  上,

$$f'(x) = 3x^2 + 2.2x + 0.9 > 0,$$

$$f''(x) = 6x + 2.2 > 0,$$

故  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上的图形属于图 3-40 中情形(a). 按  $f''(x)$  与  $f(1)$  同号, 所以令  $x_0 = 1$ .

连续应用公式(1), 得

$$x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} \approx 0.738;$$

$$x_2 = 0.738 - \frac{f(0.738)}{f'(0.738)} \approx 0.674;$$

$$x_3 = 0.674 - \frac{f(0.674)}{f'(0.674)} \approx 0.671;$$

$$x_4 = 0.671 - \frac{f(0.671)}{f'(0.671)} \approx 0.671.$$

至此, 计算不能再继续. 注意到  $f(x_i)$  ( $i = 0, 1, \dots$ ) 与  $f''(x)$  同号, 知  $f(0.671) > 0$ , 经计算可知  $f(0.670) < 0$ , 于是有

$$0.670 < \xi < 0.671.$$

以 0.670 或 0.671 作为根的近似值, 其误差都小于  $10^{-3}$ .

### 习 题 3-8

1. 试证明方程  $x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$  在区间  $(0, 1)$  内有唯一的实根，并用二分法求这个根的近似值，使误差不超过 0.01.
2. 试证明方程  $x^5 + 5x + 1 = 0$  在区间  $(-1, 0)$  内有唯一的实根，并用切线法求这个根的近似值，使误差不超过 0.01.
3. 求方程  $x^3 + 3x - 1 = 0$  的近似根，使误差不超过 0.01.
4. 求方程  $x \lg x = 1$  的近似根，使误差不超过 0.01.

### 总习题三

1. 填空：

设常数  $k > 0$ ，函数  $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$  在  $(0, +\infty)$  内零点的个数为 \_\_\_\_\_.

2. 选择以下两题中给出的四个结论中一个正确的结论：

(1) 设在  $[0, 1]$  上  $f''(x) > 0$ ，则  $f'(0), f'(1), f(1) - f(0)$  或  $f(0) - f(1)$  几个数的大小顺序为( )。

(A)  $f'(1) > f'(0) > f(1) - f(0)$ . (B)  $f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)$ .

(C)  $f(1) - f(0) > f'(1) > f'(0)$ . (D)  $f'(1) > f(0) - f(1) > f'(0)$ .

(2) 设  $f'(x_0) = f''(x_0) = 0, f'''(x_0) > 0$ ，则( ).

(A)  $f'(x_0)$  是  $f'(x)$  的极大值. (B)  $f(x_0)$  是  $f(x)$  的极大值.

(C)  $f(x_0)$  是  $f(x)$  的极小值. (D)  $(x_0, f(x_0))$  是曲线  $y = f(x)$  的拐点.

3. 列举一个函数  $f(x)$  满足： $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续，在  $(a, b)$  内除某一点外处处可导，但在  $(a, b)$  内不存在点  $\xi$ ，使  $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ .

4. 设  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = k$ ，求  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+a) - f(x)]$ .

5. 证明多项式  $f(x) = x^3 - 3x + a$  在  $[0, 1]$  上不可能有两个零点.

6. 设  $a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$ ，证明多项式

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

在  $(0, 1)$  内至少有一个零点.

\*7. 设  $f(x)$  在  $[0, a]$  上连续，在  $(0, a)$  内可导，且  $f(a) = 0$ ，证明存在一点  $\xi \in (0, a)$ ，使  $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$ .

\*8. 设  $0 < a < b$ ，函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续，在  $(a, b)$  内可导，试利用柯西中值定理，证明存在一点  $\xi \in (a, b)$ ，使

$$f(b) - f(a) = \xi f'(\xi) \ln \frac{b}{a}.$$

9. 设  $f(x), g(x)$  都是可导函数，且  $|f'(x)| < g'(x)$ ，证明：当  $x > a$  时， $|f(x) - f(a)|$

$< g(x) - g(a)$ .

10. 求下列极限：

(1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^x}{1 - x + \ln x}$ ;

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right]$ ;

(3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x$ ;

(4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} [(a_1^{\frac{1}{x}} + a_2^{\frac{1}{x}} + \cdots + a_n^{\frac{1}{x}})/n]^{nx}$  (其中  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ ).

11. 证明下列不等式：

(1) 当  $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$  时,  $\frac{\tan x_2}{\tan x_1} > \frac{x_2}{x_1}$ ;

(2) 当  $x > 0$  时,  $\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}$ ;

(3) 当  $e < a < b < e^2$  时,  $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$ .

12. 设  $a > 1$ ,  $f(x) = a^x - ax$  在  $(-\infty, +\infty)$  内的驻点为  $x(a)$ . 问  $a$  为何值时,  $x(a)$  最小? 并求出最小值.

13. 求椭圆  $x^2 - xy + y^2 = 3$  上纵坐标最大和最小的点.

14. 求数列  $\{\sqrt[n]{n}\}$  的最大项.

15. 曲线弧  $y = \sin x$  ( $0 < x < \pi$ ) 上哪一点处的曲率半径最小? 求出该点处的曲率半径.

16. 证明方程  $x^3 - 5x - 2 = 0$  只有一个正根, 并求此正根的近似值, 精确到  $10^{-3}$ .

\* 17. 设  $f''(x_0)$  存在, 证明

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0).$$

\* 18. 设  $f^{(n)}(x_0)$  存在, 且  $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = 0$ , 证明

$$f(x) = o[(x - x_0)^n] \quad (x \rightarrow x_0).$$

19. 设  $f(x)$  在  $(a, b)$  内二阶可导, 且  $f''(x) \geq 0$ . 证明对于  $(a, b)$  内任意两点  $x_1, x_2$  及  $0 \leq t \leq 1$ , 有

$$f[(1-t)x_1 + tx_2] \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

20. 试确定常数  $a$  和  $b$ , 使  $f(x) = x - (a + b \cos x) \sin x$  为当  $x \rightarrow 0$  时关于  $x$  的 5 阶无穷小.

## 第四章 不定积分

在第二章中,我们讨论了如何求一个函数的导函数问题,本章将讨论它的反问题,即要寻求一个可导函数,使它的导函数等于已知函数.这是积分学的基本问题之一.

### 第一节 不定积分的概念与性质

#### 一、原函数与不定积分的概念

**定义 1** 如果在区间  $I$  上,可导函数  $F(x)$  的导函数为  $f(x)$ ,即对任一  $x \in I$ ,都有

$$F'(x) = f(x) \text{ 或 } dF(x) = f(x)dx,$$

那么函数  $F(x)$  就称为  $f(x)$ (或  $f(x)dx$ )在区间  $I$  上的原函数.

例如,因  $(\sin x)' = \cos x$ ,故  $\sin x$  是  $\cos x$  的一个原函数.

又如当  $x \in (1, +\infty)$  时,

$$[\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})]' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

故  $\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$  是  $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$  在区间  $(1, +\infty)$  内的原函数.

关于原函数,我们首先要问:一个函数具备什么条件,能保证它的原函数一定存在?这个问题将在下一章中讨论,这里先介绍一个结论.

**原函数存在定理** 如果函数  $f(x)$  在区间  $I$  上连续,那么在区间  $I$  上存在可导函数  $F(x)$ ,使对任一  $x \in I$  都有

$$F'(x) = f(x).$$

简单地说就是:连续函数一定有原函数.

下面还要说明两点.

第一,如果  $f(x)$  在区间  $I$  上有原函数,即有一个函数  $F(x)$ ,使对任一  $x \in I$ ,都有  $F'(x) = f(x)$ ,那么,对任何常数  $C$ ,显然也有

$$[F(x) + C]' = f(x),$$

即对任何常数  $C$ ,函数  $F(x) + C$  也是  $f(x)$  的原函数.这说明,如果  $f(x)$  有一个原函数,那么  $f(x)$  就有无限多个原函数.

第二,如果在区间  $I$  上  $F(x)$  是  $f(x)$  的一个原函数,那么  $f(x)$  的其他原函数与  $F(x)$  有什么关系?

设  $\Phi(x)$  是  $f(x)$  的另一个原函数,即对任一  $x \in I$  有

$$\Phi'(x) = f(x),$$

于是

$$[\Phi(x) - F(x)]' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

在第三章第一节中已经知道,在一个区间上导数恒为零的函数必为常数,所以

$$\Phi(x) - F(x) = C_0 \quad (C_0 \text{ 为某个常数}).$$

这表明  $\Phi(x)$  与  $F(x)$  只差一个常数.因此,当  $C$  为任意的常数时,表达式

$$F(x) + C$$

就可表示  $f(x)$  的任意一个原函数.也就是说, $f(x)$  的全体原函数所组成的集合,就是函数族

$$\{F(x) + C \mid -\infty < C < +\infty\}.$$

由以上两点说明,我们引进下述定义.

**定义 2** 在区间  $I$  上,函数  $f(x)$  的带有任意常数项的原函数称为  $f(x)$  (或  $f(x)dx$ ) 在区间  $I$  上的不定积分,记作

$$\int f(x)dx.$$

其中记号  $\int$  称为积分号, $f(x)$  称为被积函数, $f(x)dx$  称为被积表达式, $x$  称为积分变量.

由此定义及前面的说明可知,如果  $F(x)$  是  $f(x)$  在区间  $I$  上的一个原函数,那么  $F(x) + C$  就是  $f(x)$  的不定积分,即

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

因而不定积分  $\int f(x)dx$  可以表示  $f(x)$  的任意一个原函数.

**例 1** 求  $\int x^2 dx$ .

解 由于  $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$ , 所以  $\frac{x^3}{3}$  是  $x^2$  的一个原函数. 因此

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

**例 2** 求  $\int \frac{1}{x} dx$ .

解 当  $x > 0$  时,由于  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ , 所以  $\ln x$  是  $\frac{1}{x}$  在  $(0, +\infty)$  内的一个原函

数.因此,在 $(0, +\infty)$ 内,

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C.$$

当 $x < 0$ 时,由于 $[\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$ ,所以 $\ln(-x)$ 是 $\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 内的一个原函数.因此,在 $(-\infty, 0)$ 内,

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C.$$

把在 $x > 0$ 及 $x < 0$ 内的结果合起来,可写作

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$$

**例3** 设曲线通过点 $(1, 2)$ ,且其上任一点处的切线斜率等于这点横坐标的两倍,求此曲线的方程.

解 设所求的曲线方程为 $y = f(x)$ ,按题设,曲线上任一点 $(x, y)$ 处的切线斜率为

$$\frac{dy}{dx} = 2x,$$

即 $f(x)$ 是 $2x$ 的一个原函数.

因为  $\int 2x dx = x^2 + C,$

故必有某个常数 $C$ 使 $f(x) = x^2 + C$ ,即曲线方程为 $y = x^2 + C$ .因所求曲线通过点 $(1, 2)$ ,故

$$2 = 1 + C, C = 1.$$

于是所求曲线方程为

$$y = x^2 + 1.$$

函数 $f(x)$ 的原函数的图形称为 $f(x)$ 的积分曲线.本例即是求函数 $2x$ 的通过点 $(1, 2)$ 的那条积分曲线.显然,这条积分曲线可以由另一条积分曲线(例如 $y = x^2$ )经 $y$ 轴方向平移而得(图4-1).

**例4** 质点以初速度 $v_0$ 铅直上抛,不计阻力,求它的运动规律.

解 所谓运动规律,是指质点的位置关于时间 $t$ 的函数关系.为表示质点的位置,取坐标系如下:把质点所在的铅直线取作坐标轴,指向朝上,轴与地面的交点取作坐标原点.设质点抛出时刻为 $t = 0$ ,当 $t = 0$ 时质点所在位置的坐标为 $x_0$ ,在时刻 $t$ 时坐标为 $x$ (图4-2), $x = x(t)$ 就是要求的函数.

按导数的物理意义知道,

$$\frac{dx}{dt} = v(t)$$

即为质点在时刻 $t$ 时向上运动的速度(如果 $v(t) < 0$ ,那么运动方向实际朝下).

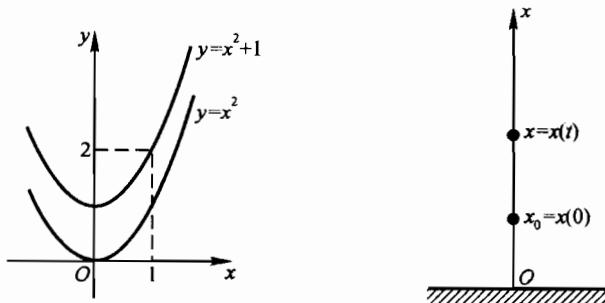


图 4-1

图 4-2

又知

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = a(t)$$

即为质点在时刻  $t$  时向上运动的加速度, 按题意, 有  $a(t) = -g$ , 即

$$\frac{dv}{dt} = -g \text{ 或 } \frac{d^2 x}{dt^2} = -g.$$

先求  $v(t)$ . 由  $\frac{dv}{dt} = -g$ , 即  $v(t)$  是  $(-g)$  的原函数, 故

$$v(t) = \int (-g) dt = -gt + C_1,$$

由  $v(0) = v_0$ , 得  $v_0 = C_1$ , 于是

$$v(t) = -gt + v_0.$$

再求  $x(t)$ . 由  $\frac{dx}{dt} = v(t)$ , 即  $x(t)$  是  $v(t)$  的原函数, 故

$$x(t) = \int v(t) dt = \int (-gt + v_0) dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + C_2,$$

由  $x(0) = x_0$ , 得  $x_0 = C_2$ , 于是所求运动规律为

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0, t \in [0, T],$$

其中  $T$  表示质点落地的时刻.

从不定积分的定义, 即可知下述关系:

由于  $\int f(x) dx$  是  $f(x)$  的原函数, 所以

$$\frac{d}{dx} \left[ \int f(x) dx \right] = f(x),$$

或

$$d \left[ \int f(x) dx \right] = f(x) dx; \quad (1)$$

又由于  $F(x)$  是  $F'(x)$  的原函数, 所以

$$\int F'(x) dx = F(x) + C,$$

或记作

$$\int dF(x) = F(x) + C. \quad (2)$$

由此可见,微分运算(以记号  $d$  表示)与求不定积分的运算(简称积分运算,以记号  $\int$  表示)是互逆的.当记号  $\int$  与  $d$  连在一起时,或者抵消,或者抵消后差一个常数.

## 二、基本积分表

既然积分运算是微分运算的逆运算,那么很自然地可以从导数公式得到相应的积分公式.

例如,因为  $\left(\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right)' = x^\mu$ , 所以  $\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}$  是  $x^\mu$  的一个原函数,于是

$$\int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1).$$

类似地可以得到其他积分公式.下面我们把一些基本的积分公式列成一个表,这个表通常叫做基本积分表.

$$① \int k dx = kx + C \quad (k \text{ 是常数}),$$

$$② \int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1),$$

$$③ \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

$$④ \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C,$$

$$⑤ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$$

$$⑥ \int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$⑦ \int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$⑧ \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C,$$

$$⑨ \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C,$$

$$⑩ \int \sec x \tan x dx = \sec x + C,$$

$$⑪ \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C,$$

$$⑫ \int e^x dx = e^x + C,$$

$$⑬ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

以上十三个基本积分公式是求不定积分的基础,必须熟记,下面举几个应用幂函数的积分公式②的例子.

例 5 求  $\int \frac{dx}{x^3}$ .

解  $\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$ .

例 6 求  $\int x^2 \sqrt{x} dx$ .

解  $\int x^2 \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + C = \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + C$   
 $= \frac{2}{7} x^3 \sqrt{x} + C$ .

例 7 求  $\int \frac{dx}{x \sqrt[3]{x}}$ .

解  $\int \frac{dx}{x \sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{4}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1} + C = -3x^{-\frac{1}{3}} + C$   
 $= -\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + C$ .

上面三个例子表明,有时被积函数实际是幂函数,但用分式或根式表示. 遇此情形,应先把它化为  $x^\mu$  的形式,然后应用幂函数的积分公式②来求不定积分.

### 三、不定积分的性质

根据不定积分的定义,可以推得它有如下两个性质:

**性质 1** 设函数  $f(x)$  及  $g(x)$  的原函数存在, 则

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx. \quad (3)$$

证 将(3)式右端求导, 得

$$\begin{aligned} \left[ \int f(x)dx + \int g(x)dx \right]' &= \left[ \int f(x)dx \right]' + \left[ \int g(x)dx \right]' \\ &= f(x) + g(x). \end{aligned}$$

这表示,(3)式右端是  $f(x) + g(x)$  的原函数,又(3)式右端有两个积分记号,形式上含两个任意常数,由于任意常数之和仍为任意常数,故实际上含一个任意常数,因此(3)式右端是  $f(x) + g(x)$  的不定积分.

**性质 1** 对于有限个函数都是成立的.

类似地可以证明不定积分的第二个性质.

**性质 2** 设函数  $f(x)$  的原函数存在,  $k$  为非零常数, 则

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx.$$

利用基本积分表以及不定积分的这两个性质, 可以求出一些简单函数的不定积分.

**例 8** 求  $\int \sqrt{x}(x^2 - 5)dx$ .

$$\begin{aligned} \text{解 } \int \sqrt{x}(x^2 - 5)dx &= \int (x^{\frac{5}{2}} - 5x^{\frac{1}{2}})dx \\ &= \int x^{\frac{5}{2}}dx - \int 5x^{\frac{1}{2}}dx \\ &= \int x^{\frac{5}{2}}dx - 5 \int x^{\frac{1}{2}}dx \\ &= \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - 5 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{10}{3}x\sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

**注意** 检验积分结果是否正确,只要对结果求导,看它的导数是否等于被积函数,相等时结果是正确的,否则结果是错误的.如就例 8 的结果来看,由于

$$\begin{aligned} \left( \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{10}{3}x\sqrt{x} + C \right)' &= \left( \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \right)' \\ &= x^{\frac{5}{2}} - 5x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}(x^2 - 5), \end{aligned}$$

所以结果是正确的.

**例 9** 求  $\int \frac{(x-1)^3}{x^2}dx$ .

$$\begin{aligned} \text{解 } \int \frac{(x-1)^3}{x^2}dx &= \int \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2}dx \\ &= \int \left( x - 3 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \right)dx \\ &= \int xdx - 3 \int dx + 3 \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{x^2}{2} - 3x + 3\ln|x| + \frac{1}{x} + C.$$

例 10 求  $\int (e^x - 3\cos x) dx$ .

$$\begin{aligned}\text{解 } \int (e^x - 3\cos x) dx &= \int e^x dx - 3 \int \cos x dx \\ &= e^x - 3\sin x + C.\end{aligned}$$

例 11 求  $\int 2^x e^x dx$ .

解 因为

$$2^x e^x = (2e)^x,$$

所以可把  $2e$  看作  $a$ , 并利用积分公式⑬, 便得

$$\int 2^x e^x dx = \int (2e)^x dx = \frac{(2e)^x}{\ln(2e)} + C = \frac{2^x e^x}{1 + \ln 2} + C.$$

例 12 求  $\int \tan^2 x dx$ .

解 基本积分表中没有这种类型的积分, 先利用三角恒等式化成表中所列类型的积分, 然后再逐项求积分:

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x dx &= \int (\sec^2 x - 1) dx = \int \sec^2 x dx - \int dx \\ &= \tan x - x + C.\end{aligned}$$

例 13 求  $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$ .

解 基本积分表中也没有这种类型的积分, 同上例一样, 可以先利用三角恒等式变形, 然后再逐项求积分:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 \frac{x}{2} dx &= \int \frac{1}{2}(1 - \cos x) dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left( \int dx - \int \cos x dx \right) = \frac{1}{2}(x - \sin x) + C.\end{aligned}$$

例 14 求  $\int \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} dx$ .

解 同上例一样, 先利用三角恒等式变形, 然后再求积分:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} dx &= \int \frac{1}{\left(\frac{\sin x}{2}\right)^2} dx \\ &= 4 \int \csc^2 x dx = -4 \cot x + C.\end{aligned}$$

例 15 求  $\int \frac{2x^4 + x^2 + 3}{x^2 + 1} dx$ .

解 被积函数的分子和分母都是多项式,通过多项式的除法,可以把它化成基本积分表中所列类型的积分,然后再逐项求积分:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^4 + x^2 + 3}{x^2 + 1} dx &= \int \left(2x^2 - 1 + \frac{4}{x^2 + 1}\right) dx \\&\stackrel{\text{分}}{=} 2 \int x^2 dx - \int 1 dx + 4 \int \frac{1}{x^2 + 1} dx \\&= \frac{2}{3}x^3 - x + 4 \arctan x + C.\end{aligned}$$

### 习 题 4-1

1. 利用求导运算验证下列等式:

$$(1) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C;$$

$$(2) \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + C;$$

$$(3) \int \frac{2x}{(x^2 + 1)(x + 1)^2} dx = \arctan x + \frac{1}{x + 1} + C;$$

$$(4) \int \sec x dx = \ln |\tan x + \sec x| + C;$$

$$(5) \int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C;$$

$$(6) \int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C.$$

2. 求下列不定积分:

$$(1) \int \frac{dx}{x^2};$$

$$(2) \int x \sqrt{x} dx;$$

$$(3) \int \frac{dx}{\sqrt{x}};$$

$$(4) \int x^2 \sqrt[3]{x} dx;$$

$$(5) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x}};$$

$$(6) \int \sqrt[3]{x^2} dx;$$

$$(7) \int 5x^3 dx;$$

$$(8) \int (x^2 - 3x + 2) dx;$$

$$(9) \int \frac{dh}{\sqrt{2gh}} \quad (g \text{ 是常数});$$

$$(10) \int (x^2 + 1)^2 dx;$$

$$(11) \int (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x^3 - 1}) dx;$$

$$(12) \int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}} dx;$$

$$(13) \int \left(2e^x + \frac{3}{x}\right) dx;$$

$$(14) \int \left(\frac{3}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx;$$

$$(15) \int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right) dx;$$

$$(16) \int 3^x e^x dx;$$

$$\begin{array}{ll}
 (17) \int \frac{2 \cdot 3^x - 5 \cdot 2^x}{3^x} dx; & (18) \int \sec x (\sec x - \tan x) dx; \\
 (19) \int \cos^2 \frac{x}{2} dx; & (20) \int \frac{dx}{1 + \cos 2x}; \\
 (21) \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx; & (22) \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx; \\
 (23) \int \cot^2 x dx; & (24) \int \cos \theta (\tan \theta + \sec \theta) d\theta; \\
 (25) \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx; & (26) \int \frac{3x^4 + 2x^2}{x^2 + 1} dx.
 \end{array}$$

3. 含有未知函数的导数的方程称为微分方程, 例如方程  $\frac{dy}{dx} = f(x)$ , 其中  $\frac{dy}{dx}$  为未知函数的导数,  $f(x)$  为已知函数. 如果将函数  $y = \varphi(x)$  代入微分方程, 使微分方程成为恒等式, 那么函数  $y = \varphi(x)$  就称为这微分方程的解. 求下列微分方程满足所给条件的解:

$$\begin{array}{l}
 (1) \frac{dy}{dx} = (x - 2)^2, \quad y|_{x=2} = 0; \\
 (2) \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2}{t^3}, \quad \frac{dx}{dt} \Big|_{t=1} = 1, x|_{t=1} = 1.
 \end{array}$$

4. 汽车以 20 m/s 的速度行驶, 刹车后匀减速行驶了 50 m 停住, 求刹车加速度. 可执行下列步骤:

- (1) 求微分方程  $\frac{ds}{dt} = -k$  满足条件  $\frac{ds}{dt} \Big|_{t=0} = 20$  及  $s|_{t=0} = 0$  的解;
  - (2) 求使  $\frac{ds}{dt} = 0$  的  $t$  值及相应的  $s$  值;
  - (3) 求使  $s = 50$  的  $k$  值.
5. 一曲线通过点  $(e^2, 3)$ , 且在任一点处的切线的斜率等于该点横坐标的倒数, 求该曲线的方程.

6. 一物体由静止开始运动, 经  $t(s)$  后的速度是  $3t^2$  (m/s), 问
- (1) 在 3 s 后物体离开出发点的距离是多少?
  - (2) 物体走完 360 m 需要多少时间?

7. 证明函数  $\arcsin(2x^2 - 1)$ ,  $\arccos(1 - 2x)$  和  $2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}$  都是  $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$  的原函数.

## 第二节 换元积分法

利用基本积分表与积分的性质, 所能计算的不定积分是非常有限的. 因此, 有必要进一步来研究不定积分的求法. 本节把复合函数的微分法反过来用于求不定积分, 利用中间变量的代换, 得到复合函数的积分法, 称为换元积分法, 简称换元法. 换元法通常分成两类, 下面先讲第一类换元法.

## 一、第一类换元法

设  $f(u)$  具有原函数  $F(u)$ , 即

$$F'(u) = f(u), \int f(u) du = F(u) + C.$$

如果  $u$  是中间变量:  $u = \varphi(x)$ , 且设  $\varphi(x)$  可微, 那么, 根据复合函数微分法, 有

$$dF[\varphi(x)] = f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx,$$

从而根据不定积分的定义就得

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = F[\varphi(x)] + C = \left[ \int f(u)du \right]_{u=\varphi(x)}.$$

于是有下述定理:

**定理 1** 设  $f(u)$  具有原函数,  $u = \varphi(x)$  可导, 则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \left[ \int f(u)du \right]_{u=\varphi(x)}. \quad (1)$$

由此定理可见, 虽然  $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$  是一个整体的记号, 但从形式上看, 被积表达式中的  $dx$  也可当作变量  $x$  的微分来对待, 从而微分等式  $\varphi'(x)dx = du$  可以方便地应用到被积表达式中来, 我们在上节第一目中已经这样用了, 那里把积分  $\int F'(x)dx$  记作  $\int dF(x)$ , 就是按微分  $F'(x)dx = dF(x)$ , 把被积表达式  $F'(x)dx$  记作  $dF(x)$ .

如何应用公式(1)来求不定积分? 设要求  $\int g(x)dx$ , 如果函数  $g(x)$  可以化为  $g(x) = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$  的形式, 那么

$$\int g(x)dx = \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \left[ \int f(u)du \right]_{u=\varphi(x)},$$

这样, 函数  $g(x)$  的积分即转化为函数  $f(u)$  的积分. 如果能求得  $f(u)$  的原函数, 那么也就得到了  $g(x)$  的原函数.

**例 1** 求  $\int 2\cos 2x dx$ .

**解** 被积函数中,  $\cos 2x$  是一个复合函数:  $\cos 2x = \cos u$ ,  $u = 2x$ , 常数因子恰好是中间变量  $u$  的导数. 因此, 作变换  $u = 2x$ , 便有

$$\begin{aligned} \int 2\cos 2x dx &= \int \cos 2x \cdot 2dx = \int \cos 2x \cdot (2x)' dx \\ &= \int \cos u du = \sin u + C, \end{aligned}$$

再以  $u = 2x$  代入, 即得

$$\int 2\cos 2x \, dx = \sin 2x + C.$$

例 2 求  $\int \frac{1}{3+2x} \, dx$ .

解 被积函数  $\frac{1}{3+2x} = \frac{1}{u}$ ,  $u = 3+2x$ . 这里缺少  $\frac{du}{dx} = 2$  这样一个因子, 但由于  $\frac{du}{dx}$  是个常数, 故可改变系数凑出这个因子:

$$\frac{1}{3+2x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3+2x} \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3+2x} (3+2x)',$$

从而令  $u = 3+2x$ , 便有

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{3+2x} \, dx &= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3+2x} (3+2x)' \, dx = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u} \, du \\ &= \frac{1}{2} \ln |u| + C = \frac{1}{2} \ln |3+2x| + C.\end{aligned}$$

一般的, 对于积分  $\int f(ax+b) \, dx$ , 总可作变换  $u = ax+b$ , 把它化为

$$\begin{aligned}\int f(ax+b) \, dx &= \int \frac{1}{a} f(u) d(ax+b) \\ &= \frac{1}{a} \left[ \int f(u) \, du \right]_{u=ax+b}.\end{aligned}$$

例 3 求  $\int \frac{x^2}{(x+2)^3} \, dx$ .

解 令  $u = x+2$ , 则  $x = u-2$ ,  $dx = du$ . 于是

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(x+2)^3} \, dx &= \int \frac{(u-2)^2}{u^3} \, du = \int (u^2 - 4u + 4) u^{-3} \, du \\ &= \int (u^{-1} - 4u^{-2} + 4u^{-3}) \, du \\ &= \ln |u| + 4u^{-1} - 2u^{-2} + C \\ &= \ln |x+2| + \frac{4}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2} + C.\end{aligned}$$

例 4 求  $\int 2xe^{x^2} \, dx$ .

解 被积函数中的一个因子为  $e^{x^2} = e^u$ ,  $u = x^2$ ; 剩下的因子  $2x$  恰好是中间变量  $u = x^2$  的导数, 于是有

$$\int 2xe^{x^2} \, dx = \int e^{x^2} d(x^2) = \int e^u \, du = e^u + C = e^{x^2} + C.$$

例 5 求  $\int x \sqrt{1-x^2} \, dx$ .

解 设  $u = 1 - x^2$ , 则  $du = -2x dx$ , 即  $-\frac{1}{2} du = x dx$ , 因此,

$$\begin{aligned}\int x \sqrt{1-x^2} dx &= \int u^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{2} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3} + C \\ &= -\frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C.\end{aligned}$$

在对变量代换比较熟练以后, 就不一定写出中间变量  $u$ .

例 6 求  $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx$ .

$$\begin{aligned}\text{解 } \int \frac{1}{a^2+x^2} dx &= \int \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} dx \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} d\frac{x}{a} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.\end{aligned}$$

在上例中, 我们实际上已经用了变量代换  $u = \frac{x}{a}$ , 并在求出积分  $\frac{1}{a} \int \frac{1}{1+u^2} du$

之后, 代回了原积分变量  $x$ , 只是没有把这些步骤写出来而已.

例 7 求  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$  ( $a > 0$ ).

$$\begin{aligned}\text{解 } \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} &= \int \frac{1}{a} \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \\ &= \arcsin \frac{x}{a} + C.\end{aligned}$$

例 8 求  $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx$ .

解 由于

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \left( \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right),$$

所以

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-a^2} dx &= \frac{1}{2a} \int \left( \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx \\ &= \frac{1}{2a} \left( \int \frac{1}{x-a} dx - \int \frac{1}{x+a} dx \right) \\ &= \frac{1}{2a} \left[ \int \frac{1}{x-a} d(x+a) - \int \frac{1}{x+a} d(x+a) \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2a} (\ln|x-a| - \ln|x+a|) + C \\
 &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.
 \end{aligned}$$

**例 9** 求  $\int \frac{dx}{x(1+2\ln x)}$ .

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \int \frac{dx}{x(1+2\ln x)} &= \int \frac{d(\ln x)}{1+2\ln x} \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{d(1+2\ln x)}{1+2\ln x} = \frac{1}{2} \ln|1+2\ln x| + C.
 \end{aligned}$$

**例 10** 求  $\int \frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ .

解 由于  $d\sqrt{x} = \frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ , 因此,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &= 2 \int e^{3\sqrt{x}} d\sqrt{x} = \frac{2}{3} \int e^{3\sqrt{x}} d(3\sqrt{x}) \\
 &= \frac{2}{3} e^{3\sqrt{x}} + C.
 \end{aligned}$$

下面再举一些积分的例子, 它们的被积函数中含有三角函数, 在计算这种积分的过程中, 往往要用到一些三角恒等式.

**例 11** 求  $\int \sin^3 x dx$ .

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \int \sin^3 x dx &= \int \sin^2 x \sin x dx = - \int (1 - \cos^2 x) d(\cos x) \\
 &= -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C.
 \end{aligned}$$

**例 12** 求  $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$ .

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \int \sin^2 x \cos^5 x dx &= \int \sin^2 x \cos^4 x \cos x dx \\
 &= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) \\
 &= \int (\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x) d(\sin x) \\
 &= \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \frac{1}{7} \sin^7 x + C.
 \end{aligned}$$

一般的, 对于  $\sin^{2k+1} x \cos^n x$  或  $\sin^n x \cos^{2k+1} x$  (其中  $k \in \mathbb{N}$ )型函数的积分, 总可依次作变换  $u = \cos x$  或  $u = \sin x$ , 求得结果.

**例 13** 求  $\int \tan x dx$ .

$$\begin{aligned} \text{解 } \int \tan x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{1}{\cos x} d(\cos x) \\ &= -\ln|\cos x| + C. \end{aligned}$$

类似地可得  $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C.$

例 14 求  $\int \cos^2 x dx.$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int \cos^2 x dx &= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left( \int dx + \int \cos 2x dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{4} \int \cos 2x d(2x) \\ &= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C. \end{aligned}$$

例 15 求  $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int \sin^2 x \cos^4 x dx &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)^2 dx \\ &= \frac{1}{8} \int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x) dx \\ &= \frac{1}{8} \int (\cos 2x - \cos^3 2x) dx + \frac{1}{8} \int (1 - \cos^2 2x) dx \\ &= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cdot \frac{1}{2} d(\sin 2x) + \frac{1}{8} \int \frac{1}{2} (1 - \cos 4x) dx \\ &= \frac{1}{48} \sin^3 2x + \frac{x}{16} - \frac{1}{64} \sin 4x + C. \end{aligned}$$

一般的,对于  $\sin^{2k} x \cos^{2l} x$  ( $k, l \in \mathbb{N}$ )型函数,总可利用三角恒等式: $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ ,  $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ 化成  $\cos 2x$  的多项式,然后采用例 15 中所用的方法求得积分的结果.

例 16 求  $\int \sec^6 x dx.$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int \sec^6 x dx &= \int (\sec^2 x)^2 \sec^2 x dx \\ &= \int (1 + \tan^2 x)^2 d(\tan x) \\ &= \int (1 + 2\tan^2 x + \tan^4 x) d(\tan x) \\ &= \tan x + \frac{2}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x + C. \end{aligned}$$

例 17 求  $\int \tan^5 x \sec^3 x dx.$

$$\begin{aligned}
\text{解 } \int \tan^5 x \sec^3 x dx &= \int \tan^4 x \sec^2 x \sec x \tan x dx \\
&= \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^2 x d(\sec x) \\
&= \int (\sec^6 x - 2\sec^4 x + \sec^2 x) d(\sec x) \\
&= \frac{1}{7} \sec^7 x - \frac{2}{5} \sec^5 x + \frac{1}{3} \sec^3 x + C.
\end{aligned}$$

一般的,对于  $\tan^n x \sec^{2k} x$  或  $\tan^{2k-1} x \sec^n x$  ( $k \in \mathbb{N}^+$ )型函数的积分,可依次作变换  $u = \tan x$  或  $u = \sec x$ ,求得结果.

**例 18** 求  $\int \csc x dx$ .

$$\begin{aligned}
\text{解 } \int \csc x dx &= \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \\
&= \int \frac{d \frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{d \left( \tan \frac{x}{2} \right)}{\tan \frac{x}{2}} \\
&= \ln |\tan \frac{x}{2}| + C.
\end{aligned}$$

因为

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \csc x - \cot x,$$

所以上述不定积分又可表为:

$$\int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + C.$$

**例 19** 求  $\int \sec x dx$ .

**解** 利用上例的结果,有

$$\begin{aligned}
\int \sec x dx &= \int \csc \left( x + \frac{\pi}{2} \right) d \left( x + \frac{\pi}{2} \right) \\
&= \ln \left| \csc \left( x + \frac{\pi}{2} \right) - \cot \left( x + \frac{\pi}{2} \right) \right| + C \\
&= \ln |\sec x + \tan x| + C.
\end{aligned}$$

**例 20** 求  $\int \cos 3x \cos 2x dx$ .

**解** 利用三角函数的积化和差公式

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

得

$$\cos 3x \cos 2x = \frac{1}{2} (\cos x + \cos 5x),$$

于是

$$\begin{aligned}\int \cos 3x \cos 2x dx &= \frac{1}{2} \int (\cos x + \cos 5x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left( \int \cos x dx + \frac{1}{5} \int \cos 5x d(5x) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{10} \sin 5x + C.\end{aligned}$$

上面所举的例子,可以使我们认识到公式(1)在求不定积分中所起的作用.像复合函数的求导法则在微分学中一样,公式(1)在积分学中也是经常使用的.但利用公式(1)来求不定积分,一般却比利用复合函数的求导法则求函数的导数要来得困难,因为其中需要一定的技巧,而且如何适当地选择变量代换  $u = \varphi(x)$  没有一般规律可循,因此要掌握换元法,除了熟悉一些典型的例子外,还要做较多的练习才行.

上述各例用的都是第一类换元法,即形如  $u = \varphi(x)$  的变量代换.下面介绍另一种形式的变量代换  $x = \psi(t)$ ,即所谓第二类换元法.

## 二、第二类换元法

上面介绍的第一类换元法是通过变量代换  $u = \varphi(x)$ ,将积分  $\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx$  化为积分  $\int f(u) du$ .

下面将介绍的第二类换元法是:适当地选择变量代换  $x = \psi(t)$ ,将积分  $\int f(x) dx$  化为积分  $\int f[\psi(t)] \psi'(t) dt$ .这是另一种形式的变量代换,换元公式可表达为

$$\int f(x) dx = \int f[\psi(t)] \psi'(t) dt.$$

这公式的成立是需要一定条件的.首先,等式右边的不定积分要存在,即  $f[\psi(t)] \psi'(t)$  有原函数;其次,  $\int f[\psi(t)] \psi'(t) dt$  求出后必须用  $x = \psi(t)$  的反函数  $t = \psi^{-1}(x)$  代回去,为了保证这反函数存在而且是可导的,我们假定直接函数  $x = \psi(t)$  在  $t$  的某一个区间(这区间和所考虑的  $x$  的积分区间相对应)上是单调的、可导的,并且  $\psi'(t) \neq 0$ .

归纳上述,我们给出下面的定理.

**定理 2** 设  $x = \psi(t)$  是单调的、可导的函数，并且  $\psi'(t) \neq 0$ . 又设  $f[\psi(t)]$   $\psi'(t)$  具有原函数，则有换元公式

$$\int f(x) dx = \left[ \int f[\psi(t)] \psi'(t) dt \right]_{t=\psi^{-1}(x)}, \quad (2)$$

其中  $\psi^{-1}(x)$  是  $x = \psi(t)$  的反函数.

**证** 设  $f[\psi(t)]\psi'(t)$  的原函数为  $\Phi(t)$ , 记  $\Phi[\psi^{-1}(x)] = F(x)$ , 利用复合函数及反函数的求导法则, 得到

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d\Phi}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = f[\psi(t)]\psi'(t) \cdot \frac{1}{\psi'(t)} \\ &= f[\psi(t)] = f(x), \end{aligned}$$

即  $F(x)$  是  $f(x)$  的原函数. 所以有

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= F(x) + C = \Phi[\psi^{-1}(x)] + C \\ &= \left[ \int f[\psi(t)] \psi'(t) dt \right]_{t=\psi^{-1}(x)}, \end{aligned}$$

这就证明了公式(2).

下面举例说明换元公式(2)的应用.

**例 21** 求  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$  ( $a > 0$ ).

**解** 求这个积分的困难在于有根式  $\sqrt{a^2 - x^2}$ , 但我们可以利用三角公式  
 $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$

来化去根式.

设  $x = a \sin t$ ,  $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ , 那么  $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = a \cos t$ ,  $dx = a \cos t dt$ , 于是根式化成了三角式, 所求积分化为

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int a \cos t \cdot a \cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt.$$

利用例 14 的结果得

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= a^2 \left( \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) + C \\ &= \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{2} \sin t \cos t + C. \end{aligned}$$

由于  $x = a \sin t$ ,  $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ , 所以

$$t = \arcsin \frac{x}{a},$$

$$\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a},$$

于是所求积分为

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

例 22 求  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$  ( $a > 0$ ).

解 和上例类似, 可以利用三角公式

$$1 + \tan^2 t = \sec^2 t$$

来化去根式.

设  $x = a \tan t$  ( $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ ), 那么

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 t} = a \sqrt{1 + \tan^2 t} = a \sec t, dx = a \sec^2 t dt,$$

于是

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{a \sec^2 t}{a \sec t} dt = \int \sec t dt.$$

利用例 19 的结果得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln |\sec t + \tan t| + C.$$

为了要把  $\sec t$  及  $\tan t$  换成  $x$  的函数, 可以根据  $\tan t = \frac{x}{a}$  作辅助三角形 (图 4-3), 便有

$$\sec t = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a},$$

且  $\sec t + \tan t > 0$ , 因此,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} &= \ln \left( \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a} \right) + C \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C_1, \end{aligned}$$

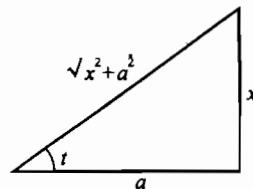


图 4-3

其中  $C_1 = C - \ln a$ .

例 23 求  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$  ( $a > 0$ ).

解 和以上两例类似, 可以利用公式

$$\sec^2 t - 1 = \tan^2 t$$

来化去根式. 注意到被积函数的定义域是  $x > a$  和  $x < -a$  两个区间, 我们在两个区间内分别求不定积分.

当  $x > a$  时, 设  $x = a \sec t$  ( $0 < t < \frac{\pi}{2}$ ), 那么

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2 t - a^2} = a \sqrt{\sec^2 t - 1} = a \tan t,$$

$$dx = a \sec t \tan t dt,$$

于是

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \int \frac{a \sec t \tan t}{a \tan t} dt = \int \sec t dt \\ &= \ln(\sec t + \tan t) + C.\end{aligned}$$

为了把  $\sec t$  及  $\tan t$  换成  $x$  的函数, 我们根据  $\sec t = \frac{x}{a}$  作辅助三角形(图 4-4), 得到

$$\tan t = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a},$$

因此

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \ln \left( \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right) + C \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C_1,\end{aligned}$$

其中  $C_1 = C - \ln a$ .

当  $x < -a$  时, 令  $x = -u$ , 那么  $u > a$ . 由上段结果, 有

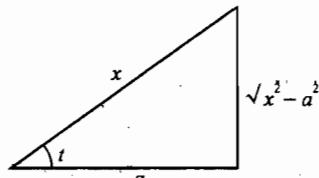


图 4-4

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= - \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = - \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2}) + C \\ &= - \ln(-x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C \\ &= \ln \frac{-x - \sqrt{x^2 - a^2}}{a^2} + C \\ &= \ln(-x - \sqrt{x^2 - a^2}) + C_1,\end{aligned}$$

其中  $C_1 = C - 2\ln a$ .

把在  $x > a$  及  $x < -a$  内的结果合起来, 可写作

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C.$$

从上面的三个例子可以看出: 如果被积函数含有  $\sqrt{a^2 - x^2}$ , 可以作代换  $x = a \sin t$  化去根式; 如果被积函数含有  $\sqrt{x^2 + a^2}$ , 可以作代换  $x = a \tan t$  化去根式; 如果被积函数含有  $\sqrt{x^2 - a^2}$ , 可以作代换  $x = \pm a \sec t$  化去根式. 但具体解题时要分析被积函数的具体情况, 选取尽可能简捷的代换, 不要拘泥于上述的变量代换(如例 5、例 7).

当被积函数含有  $\sqrt{x^2 \pm a^2}$  时,为了化去根式,除采用三角代换  $x = a \tan t$  或  $x = \pm a \sec t$  外,还可利用公式

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1,$$

采用双曲代换  $x = a \operatorname{sh} t$ 、 $x = \pm a \operatorname{ch} t$  来化去根式.

例如,在例 22 中,可设  $x = a \operatorname{sh} t$ ,那么

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2 \operatorname{sh}^2 t + a^2} = a \operatorname{ch} t, dx = a \operatorname{ch} t dt,$$

于是

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} &= \int \frac{a \operatorname{ch} t}{a \operatorname{ch} t} dt = \int dt = t + C \\ &= \operatorname{arsh} \frac{x}{a} + C \\ &= \ln \left[ \frac{x}{a} + \sqrt{\left( \frac{x}{a} \right)^2 + 1} \right] + C \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C_1, \end{aligned}$$

其中  $C_1 = C - \ln a$ .

在例 23 中,当  $x > a$  时,可设  $x = a \operatorname{ch} t$  ( $t > 0$ ),那么

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - a^2} &= \sqrt{a^2 \operatorname{ch}^2 t - a^2} = a \operatorname{sh} t, \\ dx &= a \operatorname{sh} t dt, \end{aligned}$$

于是当  $x > a$  时,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \int \frac{a \operatorname{sh} t}{a \operatorname{sh} t} dt = \int dt = t + C \\ &= \operatorname{arsh} \frac{x}{a} + C \\ &= \ln \left[ \frac{x}{a} + \sqrt{\left( \frac{x}{a} \right)^2 - 1} \right] + C \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C_1, \end{aligned}$$

其中  $C_1 = C - \ln a$ .

当  $x < -a$  时,令  $x = -a \operatorname{ch} t$  ( $t > 0$ ),类似可得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln(-x - \sqrt{x^2 - a^2}) + C_1.$$

上节所列基本积分表中没有双曲函数的积分公式,现添加两个常用的双曲函数积分公式:

$$⑭ \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C,$$

$$⑯ \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$$

下面我们通过例子来介绍一种也很有用的代换——倒代换,利用它常可消去被积函数的分母中的变量因子  $x$ .

$$\text{例 24 求 } \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4} dx.$$

解 设  $x = \frac{1}{t}$ , 那么  $dx = -\frac{dt}{t^2}$ , 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4} dx &= \int \frac{\sqrt{a^2 - \frac{1}{t^2}} \cdot \left( -\frac{dt}{t^2} \right)}{\frac{1}{t^4}} \\ &= - \int (a^2 t^2 - 1)^{\frac{1}{2}} |t| dt, \end{aligned}$$

当  $x > 0$  时, 有

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4} dx &= -\frac{1}{2a^2} \int (a^2 t^2 - 1)^{\frac{1}{2}} d(a^2 t^2 - 1) \\ &= -\frac{(a^2 t^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{3a^2} + C \\ &= -\frac{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2 x^3} + C, \end{aligned}$$

当  $x < 0$  时, 有相同的结果.

在本节的例题中, 有几个积分是以后经常会遇到的. 所以它们通常也被当作公式使用. 这样, 常用的积分公式, 除了基本积分表中的几个外, 再添加下面几个(其中常数  $a > 0$ ):

$$⑯ \int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C,$$

$$⑰ \int \cot x dx = \ln|\sin x| + C,$$

$$⑱ \int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C,$$

$$⑲ \int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C,$$

$$⑳ \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C,$$

$$㉑ \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C,$$

$$\textcircled{2} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C,$$

$$\textcircled{3} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C,$$

$$\textcircled{4} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C.$$

例 25 求  $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 9}}$ .

$$\text{解 } \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 9}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(2x)^2 + 3^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x)}{\sqrt{(2x)^2 + 3^2}},$$

利用公式③,便得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 9}} = \frac{1}{2} \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 9}) + C.$$

例 26 求  $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x - x^2}}$ .

$$\text{解 } \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x - x^2}} = \int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}},$$

利用公式②,便得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x - x^2}} = \arcsin \frac{2x - 1}{\sqrt{5}} + C.$$

在例 22 中,我们用变换  $x = a \tan t$  消去被积函数中的根式  $\sqrt{x^2 + a^2}$ ,这个变换还能消去被积函数分母中的  $(x^2 + a^2)$  的高次幂.请看下例.

例 27 求  $\int \frac{x^3}{(x^2 - 2x + 2)^2} dx$ .

解 分母是二次质因式的平方,把二次质因式配方成  $(x - 1)^2 + 1$ ,令  $x - 1 = \tan t \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$ ,则

$$x^2 - 2x + 2 = \sec^2 t, dx = \sec^2 t dt.$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } & \int \frac{x^3}{(x^2 - 2x + 2)^2} dx \\ &= \int \frac{(\tan t + 1)^3}{\sec^4 t} \cdot \sec^2 t dt \\ &= \int (\sin^3 t \cos^{-1} t + 3\sin^2 t + 3\sin t \cos t + \cos^2 t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int (\sin^2 t \cos^{-1} t + 3 \cos t) \sin t dt + \int (3 \sin^2 t + \cos^2 t) dt \\
&= \int [(1 - \cos^2 t) \cos^{-1} t + 3 \cos t] [-d(\cos t)] + \int (2 - \cos 2t) dt \\
&= - \int (\cos^{-1} t + 2 \cos t) d(\cos t) + 2t - \frac{1}{2} \sin 2t \\
&= -\ln \cos t - \cos^2 t + 2t - \sin t \cos t + C,
\end{aligned}$$

按  $\tan t = x - 1$  作辅助三角形(图 4-5),便有

$$\cos t = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}, \sin t = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}},$$

于是

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^3}{(x^2 - 2x + 2)^2} dx \\
&= \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 2) + 2 \arctan(x-1) - \frac{x}{x^2 - 2x + 2} + C.
\end{aligned}$$

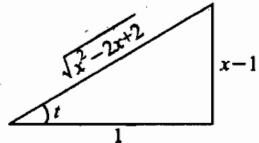


图 4-5

## 习题 4-2

1. 在下列各式等号右端的空白处填入适当的系数,使等式成立(例如:  $dx = \frac{1}{4}d(4x+7)$ ):

$$(1) dx = d(ax); \quad (2) dx = d(7x-3);$$

$$(3) xdx = d(x^2); \quad (4) xdx = d(5x^2);$$

$$(5) xdx = d(1-x^2); \quad (6) x^3dx = d(3x^4-2);$$

$$(7) e^{2x}dx = d(e^{2x}); \quad (8) e^{-\frac{x}{2}}dx = d(1+e^{-\frac{x}{2}});$$

$$(9) \sin \frac{3}{2}xdx = d\left(\cos \frac{3}{2}x\right); \quad (10) \frac{dx}{x} = d(5 \ln|x|);$$

$$(11) \frac{dx}{x} = d(3-5 \ln|x|); \quad (12) \frac{dx}{1+9x^2} = d(\arctan 3x);$$

$$(13) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(1-\arcsin x); \quad (14) \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\sqrt{1-x^2}).$$

2. 求下列不定积分(其中  $a, b, \omega, \varphi$  均为常数):

$$(1) \int e^{5t} dt; \quad (2) \int (3-2x)^3 dx;$$

$$(3) \int \frac{dx}{1-2x}; \quad (4) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}};$$

$$(5) \int (\sin ax - e^{\frac{x}{a}}) dx; \quad (6) \int \frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt;$$

$$(7) \int x e^{-x^2} dx; \quad (8) \int x \cos(x^2) dx;$$

$$(9) \int \frac{x}{\sqrt{2-3x^2}} dx;$$

$$(10) \int \frac{3x^3}{1-x^4} dx;$$

$$(11) \int \frac{x+1}{x^2+2x+5} dx;$$

$$(12) \int \cos^2(\omega t + \varphi) \sin(\omega t + \varphi) dt;$$

$$(13) \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx;$$

$$(14) \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx;$$

$$(15) \int \tan^{10} x \sec^2 x dx;$$

$$(16) \int \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x};$$

$$(17) \int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}};$$

$$(18) \int \frac{10^{2 \arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$(19) \int \tan \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$(20) \int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx;$$

$$(21) \int \frac{1+\ln x}{(x \ln x)^2} dx;$$

$$(22) \int \frac{dx}{\sin x \cos x};$$

$$(23) \int \frac{\ln \tan x}{\cos x \sin x} dx;$$

$$(24) \int \cos^3 x dx;$$

$$(25) \int \cos^2(\omega t + \varphi) dt;$$

$$(26) \int \sin 2x \cos 3x dx;$$

$$(27) \int \cos x \cos \frac{x}{2} dx;$$

$$(28) \int \sin 5x \sin 7x dx;$$

$$(29) \int \tan^3 x \sec x dx;$$

$$(30) \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}};$$

$$(31) \int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}} dx;$$

$$(32) \int \frac{x^3}{9+x^2} dx;$$

$$(33) \int \frac{dx}{2x^2-1};$$

$$(34) \int \frac{dx}{(x+1)(x-2)};$$

$$(35) \int \frac{x}{x^2-x-2} dx;$$

$$(36) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (a>0);$$

$$(37) \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}};$$

$$(38) \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}};$$

$$(39) \int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx;$$

$$(40) \int \frac{dx}{1+\sqrt{2x}};$$

$$(41) \int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}};$$

$$(42) \int \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}};$$

$$(43) \int \frac{x-1}{x^2+2x+3} dx;$$

$$(44) \int \frac{x^3+1}{(x^2+1)^2} dx.$$

### 第三节 分部积分法

前面我们在复合函数求导法则的基础上,得到了换元积分法.现在我们利用两个函数乘积的求导法则,来推得另一个求积分的基本方法——分部积分法.

设函数  $u = u(x)$  及  $v = v(x)$  具有连续导数. 那么, 两个函数乘积的导数公式为

$$(uv)' = u'v + uv',$$

移项, 得  $uv' = (uv)' - u'v.$

对这个等式两边求不定积分, 得

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx. \quad (1)$$

公式(1)称为分部积分公式. 如果求  $\int uv' dx$  有困难, 而求  $\int u'v dx$  比较容易时, 分部积分公式就可以发挥作用了.

为简便起见, 也可把公式(1)写成下面的形式:

$$\int u dv = uv + \int v du. \quad (2)$$

现在通过例子说明如何运用这个重要公式.

**例 1** 求  $\int x \cos x dx.$

解 这个积分用换元积分法不易求得结果. 现在试用分部积分法来求它. 但是怎样选取  $u$  和  $dv$  呢? 如果设  $u = x, dv = \cos x dx$ , 那么  $du = dx, v = \sin x$ , 代入分部积分公式(2), 得

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx,$$

而  $\int v du = \int \sin x dx$  容易积出, 所以

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

求这个积分时, 如果设  $u = \cos x, dv = x dx$ , 那么

$$du = -\sin x dx, v = \frac{x^2}{2}.$$

于是  $\int x \cos x dx = \frac{x^2}{2} \cos x + \int \frac{x^2}{2} \sin x dx.$

上式右端的积分比原积分更不容易求出.

由此可见, 如果  $u$  和  $dv$  选取不当, 就求不出结果, 所以应用分部积分法时, 恰当选取  $u$  和  $dv$  是一个关键. 选取  $u$  和  $dv$  一般要考虑下面两点:

(1)  $v$  要容易求得;

(2)  $\int v du$  要比  $\int u dv$  容易积出.

**例 2** 求  $\int x e^x dx.$

已知

解 设  $u = x$ ,  $dv = e^x dx$ , 那么  $du = dx$ ,  $v = e^x$ . 于是

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = e^x(x - 1) + C.$$

运用分部积分公式(2)的形式, 如上列例 1、例 2 的求解过程也可表述为

$$\begin{aligned}\int x \cos x dx &= \int x d(\sin x) = x \sin x - \int \sin x dx \\&= x \sin x + \cos x + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int x e^x dx &= \int x d(e^x) = x e^x - \int e^x dx \\&= x e^x - e^x + C = (x - 1)e^x + C.\end{aligned}$$

例 3 求  $\int x^2 e^x dx$ .

解 设  $u = x^2$ ,  $dv = e^x dx = d(e^x)$ , 那么

$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 d(e^x) = x^2 e^x - \int e^x d(x^2) = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx.$$

这里  $\int x e^x dx$  比  $\int x^2 e^x dx$  容易积出, 因为被积函数中  $x$  的幂次前者比后者降低了一次. 由例 2 可知, 对  $\int x e^x dx$  再使用一次分部积分法就可以了. 于是

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x d(e^x) \\&= x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C \\&= e^x(x^2 - 2x + 2) + C.\end{aligned}$$

总结上面三个例子可以知道, 如果被积函数是幂函数和正(余)弦函数或幂函数和指数函数的乘积, 就可以考虑用分部积分法, 并设幂函数为  $u$ . 这样用一次分部积分法就可以使幂函数的幂次降低一次. 这里假定幂指数是正整数.

例 4 求  $\int x \ln x dx$ .

解 设  $u = \ln x$ ,  $dv = x dx$ , 那么

$$\begin{aligned}\int x \ln x dx &= \int \ln x d\frac{x^2}{2} \\&= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} d(\ln x) \\&= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx \\&= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.\end{aligned}$$

例 5 求  $\int \arccos x dx$ .

解 设  $u = \arccos x$ ,  $dv = dx$ , 那么

$$\begin{aligned}\int \arccos x dx &= x \arccos x - \int x d(\arccos x) \\&= x \arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\&= x \arccos x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} d(1-x^2) \\&= x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.\end{aligned}$$

在分部积分法运用比较熟练以后,就不必再写出哪一部分选作  $u$ ,哪一部分选作  $dv$ . 只要把被积表达式凑成  $\varphi(x)d\psi(x)$  的形式,便可使用分部积分公式.

例 6 求  $\int x \arctan x dx$ .

$$\begin{aligned}\text{解 } \int x \arctan x dx &= \frac{1}{2} \int \arctan x d(x^2) \\&= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \\&= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx \\&= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\&= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} (x - \arctan x) + C \\&= \frac{1}{2} (x^2 + 1) \arctan x - \frac{1}{2} x + C.\end{aligned}$$

总结上面三个例子可以知道,如果被积函数是幂函数和对数函数或幂函数和反三角函数的乘积,就可以考虑用分部积分法,并设对数函数或反三角函数为  $u$ .

下面几个例子中所用的方法也是比较典型的.

例 7 求  $\int e^x \sin x dx$ .

$$\text{解 } \int e^x \sin x dx = \int \sin x d(e^x) = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx,$$

等式右端的积分与等式左端的积分是同一类型的. 对右端的积分再用一次分部积分法,得

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x dx &= e^x \sin x - \int \cos x d(e^x) \\&= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx,\end{aligned}$$

由于上式右端的第三项就是所求的积分  $\int e^x \sin x dx$ , 把它移到等号左端去, 再两端同除以 2, 便得

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

因上式右端已不包含积分项, 所以必须加上任意常数  $C$ .

**例 8** 求  $\int \sec^3 x dx$ .

$$\begin{aligned} \text{解 } \int \sec^3 x dx &= \int \sec x d(\tan x) \\ &= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx \\ &= \sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x dx. \end{aligned}$$

由于上式右端的第三项就是所求的积分  $\int \sec^3 x dx$ , 把它移到等号左端去, 再两端各除以 2, 便得

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} (\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|) + C.$$

在积分的过程中往往要兼用换元法与分部积分法, 如例 5, 下面再来举一个例子.

**例 9** 求  $\int e^{\sqrt{x}} dx$ .

解 令  $\sqrt{x} = t$ , 则  $x = t^2$ ,  $dx = 2t dt$ . 于是

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int t e^t dt.$$

利用例 2 的结果, 并用  $t = \sqrt{x}$  代回, 便得所求积分:

$$\begin{aligned} \int e^{\sqrt{x}} dx &= 2 \int t e^t dt = 2e^t(t-1) + C \\ &= 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C. \end{aligned}$$

### 习 题 4-3

求下列不定积分:

1.  $\int x \sin x dx.$
2.  $\int \ln^2 x dx.$
3.  $\int \arcsin x dx.$
4.  $\int x e^{-x} dx.$
5.  $\int x^2 \ln x dx.$
6.  $\int e^{-x} \cos x dx.$
7.  $\int e^{-2x} \sin \frac{x}{2} dx.$
8.  $\int x \cos \frac{x}{2} dx.$
9.  $\int x^2 \arctan x dx.$
10.  $\int x \tan^2 x dx.$
11.  $\int x^2 \cos x dx.$
12.  $\int t e^{-2t} dt.$
13.  $\int \ln^2 x dx.$
14.  $\int x \sin x \cos x dx.$
15.  $\int x^2 \cos^2 \frac{x}{2} dx.$
16.  $\int x \ln(x-1) dx.$
17.  $\int (x^2 - 1) \sin 2x dx.$
18.  $\int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx.$
19.  $\int e^{\sqrt[3]{x}} dx.$
20.  $\int \cos \ln x dx.$
21.  $\int (\arcsin x)^2 dx.$
22.  $\int e^x \sin^2 x dx.$
23.  $\int x \ln^2 x dx.$
24.  $\int e^{\sqrt{3x+9}} dx.$

## 第四节 有理函数的积分

前面已经介绍了求不定积分的两个基本方法——换元积分法和分部积分法. 下面简要地介绍有理函数的积分及可化为有理函数的积分.

### 一、有理函数的积分

两个多项式的商  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  称为有理函数, 又称有理分式. 我们总假定分子多项式  $P(x)$  与分母多项式  $Q(x)$  之间是没有公因式的. 当分子多项式  $P(x)$  的次数小于分母多项式  $Q(x)$  的次数时, 称这有理函数为真分式, 否则称为假分式.

利用多项式的除法, 总可以将一个假分式化成一个多项式与一个真分式之和的形式, 例如第一节例 15 中的被积函数

$$\frac{2x^4 + x^2 + 3}{x^2 + 1} = 2x^2 - 1 + \frac{4}{x^2 + 1}.$$

对于真分式  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , 如果分母可分解为两个多项式的乘积

$$Q(x) = Q_1(x)Q_2(x),$$

且  $Q_1(x)$  与  $Q_2(x)$  没有公因式, 那么它可分拆成两个真分式之和

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)},$$

上述步骤称为把真分式化成部分分式之和. 如果  $Q_1(x)$  或  $Q_2(x)$  还能再分解成两个没有公因式的多项式的乘积, 那么就可再分拆成更简单的部分分式. 最后, 有理函数的分解式中只出现多项式、 $\frac{P_1(x)}{(x-a)^k}$ 、 $(x^2+px+q)^l$  等三类函数(这里  $p^2-4q<0$ ,  $P_1(x)$  为小于  $k$  次的多项式,  $P_2(x)$  为小于  $2l$  次的多项式). 多项式的积分容易求得, 后两类真分式的积分可参看第二节例 3 和例 27.

下面举几个真分式的积分的例子.

**例 1** 求  $\int \frac{x+1}{x^2-5x+6} dx$ .

解 被积函数的分母分解成  $(x-3)(x-2)$ , 故可设

$$\frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2},$$

其中  $A, B$  为待定系数. 上式两端去分母后, 得

$$x+1 = A(x-2) + B(x-3),$$

即

$$x+1 = (A+B)x - 2A - 3B.$$

比较上式两端同次幂的系数, 即有

$$\begin{cases} A+B=1, \\ 2A+3B=-1, \end{cases}$$

从而解得

$$A=4, B=-3.$$

于是

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^2-5x+6} dx &= \int \left( \frac{4}{x-3} - \frac{3}{x-2} \right) dx \\ &= 4\ln|x-3| - 3\ln|x-2| + C. \end{aligned}$$

**例 2** 求  $\int \frac{x+2}{(2x+1)(x^2+x+1)} dx$ .

解 设  $\frac{x+2}{(2x+1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$ ,

则

$$x+2 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(2x+1),$$

即

$$x+2 = (A+2B)x^2 + (A+B+2C)x + A+C,$$

有

$$\begin{cases} A+2B=0, \\ A+B+2C=1, \\ A+C=2, \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} A=2, \\ B=-1, \\ C=0. \end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{x+2}{(2x+1)(x^2+x+1)} dx \\
 &= \int \left( \frac{2}{2x+1} - \frac{x}{x^2+x+1} \right) dx \\
 &= \ln|2x+1| - \frac{1}{2} \int \frac{(2x+1)-1}{x^2+x+1} dx \\
 &= \ln|2x+1| - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\
 &= \ln|2x+1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.
 \end{aligned}$$

例 3 求  $\int \frac{x-3}{(x-1)(x^2-1)} dx$ .

解 被积函数分母的两个因式  $x-1$  与  $x^2-1$  有公因式, 故需再分解成  $(x-1)^2(x+1)$ . 设

$$\frac{x-3}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{Ax+B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1},$$

则

$$x-3 = (Ax+B)(x+1) + C(x-1)^2,$$

即

$$x-3 = (A+C)x^2 + (A+B-2C)x + B+C,$$

有

$$\begin{cases} A+C=0, \\ A+B-2C=1, \\ B+C=-3, \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} A=1, \\ B=-2, \\ C=-1. \end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{x-3}{(x-1)(x^2-1)} dx \\
 &= \int \frac{x-3}{(x-1)^2(x+1)} dx \\
 &= \int \left[ \frac{x-2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} \right] dx \\
 &= \int \frac{x-1-1}{(x-1)^2} dx - \ln|x+1| \\
 &= \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} - \ln|x+1| + C.
 \end{aligned}$$

## 二、可化为有理函数的积分举例

例 4 求  $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)} dx$ .

解 由三角函数知道,  $\sin x$  与  $\cos x$  都可以用  $\tan \frac{x}{2}$  的有理式表示, 即

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{\sec^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}},$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{\sec^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}.$$

如果作变换  $u = \tan \frac{x}{2}$  ( $-\pi < x < \pi$ ), 那么

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

而  $x = 2 \arctan u$ , 从而

$$dx = \frac{2}{1+u^2} du.$$

于是

$$\begin{aligned} & \int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)} dx \\ &= \int \frac{\left(1 + \frac{2u}{1+u^2}\right) \frac{2du}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2} \left(1 + \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)} \\ &= \frac{1}{2} \int \left(u + 2 + \frac{1}{u}\right) du \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{u^2}{2} + 2u + \ln|u|\right) + C \\ &= \frac{1}{4} \tan^2 \frac{x}{2} + \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln |\tan \frac{x}{2}| + C. \end{aligned}$$

本例所用的变量代换  $u = \tan \frac{x}{2}$  对三角函数有理式的积分都可以应用.

例 5 求  $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$ .

解 为了去掉根号, 可以设  $\sqrt{x-1} = u$ , 于是  $x = u^2 + 1$ ,  $dx = 2u du$ . 从而所求积分为

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx &= \int \frac{u}{u^2 + 1} \cdot 2u du = 2 \int \frac{u^2}{u^2 + 1} du \\ &= 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+u^2}\right) du = 2(u - \arctan u) + C \end{aligned}$$

$$= 2(\sqrt{x-1} - \arctan \sqrt{x-1}) + C.$$

例 6 求  $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$ .

解 为了去掉根号, 可以设  $\sqrt[3]{x+2} = u$ . 于是  $x = u^3 - 2$ ,  $dx = 3u^2 du$ , 从而所求积分为

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}} &= \int \frac{3u^2}{1+u} du \\ &= 3 \int \left( u - 1 + \frac{1}{1+u} \right) du = 3 \left( \frac{u^2}{2} - u + \ln|1+u| \right) + C \\ &= \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x+2)^2} - 3 \sqrt[3]{x+2} + 3\ln|1+\sqrt[3]{x+2}| + C.\end{aligned}$$

例 7 求  $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$ .

解 被积函数中出现了两个根式  $\sqrt{x}$  及  $\sqrt[3]{x}$ . 为了能同时消去这两个根式, 可令  $x = t^6$ . 于是  $dx = 6t^5 dt$ , 从而所求积分为

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}} &= \int \frac{6t^5}{(1+t^2)t^3} dt = 6 \int \frac{t^2}{1+t^2} dt \\ &= 6 \int \left( 1 - \frac{1}{1+t^2} \right) dt = 6(t - \arctan t) + C \\ &= 6(\sqrt[6]{x} - \arctan \sqrt[6]{x}) + C.\end{aligned}$$

例 8 求  $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx$ .

解 为了去掉根号, 可以设  $\sqrt{\frac{1+x}{x}} = t$ , 于是  $\frac{1+x}{x} = t^2$ ,  $x = \frac{1}{t^2-1}$ ,  $dx =$

$-\frac{2t dt}{(t^2-1)^2}$ , 从而所求积分为

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx &= \int (t^2-1) t \cdot \frac{-2t}{(t^2-1)^2} dt = -2 \int \frac{t^2}{t^2-1} dt \\ &= -2 \int \left( 1 + \frac{1}{t^2-1} \right) dt = -2t - \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C \\ &= -2t + 2\ln(t+1) - \ln|t^2-1| + C \\ &= -2\sqrt{\frac{1+x}{x}} + 2\ln \left( \sqrt{\frac{1+x}{x}} + 1 \right) + \ln|x| + C.\end{aligned}$$

以上四个例子表明, 如果被积函数中含有简单根式  $\sqrt[n]{ax+b}$  或  $\sqrt[n]{cx+d}$ , 可以令这个简单根式为  $u$ . 由于这样的变换具有反函数, 且反函数是  $u$  的有理函

数,因此原积分即可化为有理函数的积分.

## 习 题 4-4

求下列不定积分:

$$1. \int \frac{x^3}{x+3} dx.$$

$$2. \int \frac{2x+3}{x^2+3x-10} dx.$$

$$3. \int \frac{x+1}{x^2+2x+5} dx.$$

$$4. \int \frac{dx}{x(x^2+1)}.$$

$$5. \int \frac{3}{x^3+1} dx.$$

$$6. \int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} dx.$$

$$7. \int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

$$8. \int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-x} dx.$$

$$9. \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}.$$

$$10. \int \frac{1}{x^4-1} dx.$$

$$11. \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}.$$

$$12. \int \frac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2} dx.$$

$$13. \int \frac{-x^2-2}{(x^2+x+1)^2} dx.$$

$$14. \int \frac{dx}{3+\sin^2 x}.$$

$$15. \int \frac{dx}{3+\cos x}.$$

$$16. \int \frac{dx}{2+\sin x}.$$

$$17. \int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}.$$

$$18. \int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}.$$

$$19. \int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}.$$

$$20. \int \frac{(\sqrt{x})^3-1}{\sqrt{x}+1} dx.$$

$$21. \int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} dx.$$

$$22. \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$$

$$23. \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}.$$

$$24. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}.$$

## 第五节 积分表的使用

通过前面的讨论可以看出,积分的计算要比导数的计算来得灵活、复杂.为了实用的方便,往往把常用的积分公式汇集成为表,这种表叫做积分表.积分表是按照被积函数的类型来排列的.求积分时,可根据被积函数的类型直接地或经过简单的变形后,在表内查得所需的结果.

本书末附录Ⅲ有一个简单的积分表,以供查阅.

我们先举几个可以直接从积分表中查得结果的积分例子.

例 1 求  $\int \frac{x}{(3x+4)^2} dx.$

解 被积函数含有  $ax + b$ , 在积分表(一)中查得公式(7)

$$\int \frac{x}{(ax+b)^2} dx = \frac{1}{a^2} \left( \ln|ax+b| + \frac{b}{ax+b} \right) + C.$$

现在  $a=3, b=4$ , 于是

$$\int \frac{x}{(3x+4)^2} dx = \frac{1}{9} \left( \ln|3x+4| + \frac{4}{3x+4} \right) + C.$$

例 2 求  $\int \frac{dx}{5-4\cos x}$ .

解 被积函数含有三角函数, 在积分表(十一)中查得关于积分  $\int \frac{dx}{a+b\cos x}$  的公式, 但是公式有两个, 要看  $a^2 > b^2$  或  $a^2 < b^2$  而决定采用哪一个.

现在  $a=5, b=-4, a^2 > b^2$ , 所以用公式(105)

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{a+b\cos x} \\ &= \frac{2}{a+b} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \arctan \left( \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2} \right) + C \quad (a^2 > b^2). \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{5-4\cos x} \\ &= \frac{2}{5+(-4)} \sqrt{\frac{5+(-4)}{5-(-4)}} \arctan \left( \sqrt{\frac{5-(-4)}{5+(-4)}} \tan \frac{x}{2} \right) + C \\ &= \frac{2}{3} \arctan \left( 3 \tan \frac{x}{2} \right) + C. \end{aligned}$$

下面再举一个需要先进行变量代换, 然后再查表求积分的例子.

例 3 求  $\int \frac{dx}{x \sqrt{4x^2+9}}$ .

解 这个积分不能在表中直接查到, 需要先进行变量代换.

令  $2x = u$ , 那么  $\sqrt{4x^2+9} = \sqrt{u^2+3^2}$ ,  $x = \frac{u}{2}$ ,  $dx = \frac{1}{2}du$ . 于是

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{4x^2+9}} = \int \frac{\frac{1}{2}du}{\frac{u}{2} \sqrt{u^2+3^2}} = \int \frac{du}{u \sqrt{u^2+3^2}}.$$

被积函数中含有  $\sqrt{u^2+3^2}$ , 在积分表(六)中查到公式(37)

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{a} \ln \frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{|x|} + C.$$

现在  $a=3, x$  相当于  $u$ , 于是

$$\int \frac{du}{u \sqrt{u^2 + 3^2}} = \frac{1}{3} \ln \frac{\sqrt{u^2 + 3^2} - 3}{|u|} + C.$$

再把  $u = 2x$  代入, 最后得到

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x \sqrt{4x^2 + 9}} &= \int \frac{du}{u \sqrt{u^2 + 3^2}} = \frac{1}{3} \ln \frac{\sqrt{u^2 + 3^2} - 3}{|u|} + C. \\ &= \frac{1}{3} \ln \frac{\sqrt{4x^2 + 9} - 3}{2|x|} + C. \end{aligned}$$

最后, 举一个用递推公式求积分的例子.

**例 4** 求  $\int \sin^4 x dx$ .

解 在积分表(十一)中查到公式(95)

$$\int \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx.$$

利用这个公式可以使被积函数中正弦的幂次减少两次, 只要重复使用这个公式, 可以使正弦的幂次继续减少, 直到求出最后结果为止, 这种公式叫做递推公式.

现在  $n = 4$ , 于是

$$\int \sin^4 x dx = -\frac{\sin^3 x \cos x}{4} + \frac{3}{4} \int \sin^2 x dx.$$

对积分  $\int \sin^2 x dx$  用公式(93)

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C,$$

从而所求积分为

$$\int \sin^4 x dx = -\frac{\sin^3 x \cos x}{4} + \frac{3}{4} \left( \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \right) + C.$$

一般说来, 查积分表可以节省计算积分的时间, 但是, 只有掌握了前面学过的基本积分方法才能灵活地使用积分表, 而且对一些比较简单的积分, 应用基本积分方法来计算比查表更快些, 例如, 对  $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$ , 用变换  $u = \sin x$  很快就可得到结果. 所以, 求积分时究竟是直接计算, 还是查表, 或是两者结合使用, 应该做具体分析, 不能一概而论.

在本章结束之前, 我们还要指出: 对初等函数来说, 在其定义区间上, 它的原函数一定存在, 但原函数不一定都是初等函数, 如

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

等等, 它们的原函数就都不是初等函数.

## 习 题 4-5

利用积分表计算下列不定积分:

1.  $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 9}}.$

2.  $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx.$

3.  $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x + x^2}}.$

4.  $\int \sqrt{2x^2 + 9} dx.$

5.  $\int \sqrt{3x^2 - 2} dx.$

6.  $\int e^{2x} \cos x dx.$

7.  $\int x \arcsin \frac{x}{2} dx.$

8.  $\int \frac{dx}{(x^2 + 9)^2}.$

9.  $\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$

10.  $\int e^{-2x} \sin 3x dx.$

11.  $\int \sin 3x \sin 5x dx.$

12.  $\int \ln^3 x dx.$

13.  $\int \frac{1}{x^2(1-x)} dx.$

14.  $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx.$

15.  $\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx.$

16.  $\int \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}} dx.$

17.  $\int \frac{x}{(2+3x)^2} dx.$

18.  $\int \cos^6 x dx.$

19.  $\int x^2 \sqrt{x^2 - 2} dx.$

20.  $\int \frac{1}{2+5\cos x} dx.$

21.  $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{2x-1}}.$

22.  $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx.$

23.  $\int \frac{x+5}{x^2 - 2x - 1} dx.$

24.  $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x-x^2}}.$

25.  $\int \frac{x^4}{25+4x^2} dx.$

## 总习题四

求下列不定积分(其中  $a, b$  为常数):

1.  $\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}}.$

2.  $\int \frac{x}{(1-x)^3} dx.$

3.  $\int \frac{x^2}{a^6 - x^6} dx \quad (a > 0).$

4.  $\int \frac{1 + \cos x}{x + \sin x} dx.$

5.  $\int \frac{\ln \ln x}{x} dx.$

6.  $\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx.$

7.  $\int \tan^4 x dx.$

8.  $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx.$

9.  $\int \frac{dx}{x(x^6+4)}.$   
 10.  $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx \ (a>0).$   
 11.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}.$   
 12.  $\int x \cos^2 x dx.$   
 13.  $\int e^{ax} \cos bx dx.$   
 14.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$   
 15.  $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}}.$   
 16.  $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}.$   
 17.  $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}}.$   
 18.  $\int \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx.$   
 19.  $\int \ln(1+x^2) dx.$   
 20.  $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx.$   
 21.  $\int \arctan \sqrt{x} dx.$   
 22.  $\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x} dx.$   
 23.  $\int \frac{x^3}{(1+x^8)^2} dx.$   
 24.  $\int \frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2} dx.$   
 25.  $\int \frac{dx}{16-x^4}.$   
 26.  $\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx.$   
 27.  $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x} dx.$   
 28.  $\int e^{\sin x} \frac{x \cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x} dx.$   
 29.  $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} dx.$   
 30.  $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}.$   
 31.  $\int \frac{e^{3x}+e^x}{e^{4x}-e^{2x}+1} dx.$   
 32.  $\int \frac{xe^x}{(e^x+1)^2} dx.$   
 33.  $\int \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$   
 34.  $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$   
 35.  $\int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx.$   
 36.  $\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$   
 37.  $\int \frac{\cot x}{1+\sin x} dx.$   
 38.  $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}.$   
 39.  $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}.$   
 40.  $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx.$

# 第五章 定 积 分

本章讨论积分学的另一个基本问题——定积分问题. 我们先从几何与力学问题出发引进定积分的定义, 然后讨论它的性质与计算方法. 关于定积分的应用, 将在第六章讨论.

## 第一节 定积分的概念与性质

### 一、定积分问题举例

#### 1. 曲边梯形的面积

设  $y = f(x)$  在区间  $[a, b]$  上非负、连续. 由直线  $x = a$ 、 $x = b$ 、 $y = 0$  及曲线  $y = f(x)$  所围成的图形(如图 5-1)称为曲边梯形, 其中曲线弧称为曲边.

我们知道, 矩形的高是不变的, 它的面积可按公式

$$\text{矩形面积} = \text{高} \times \text{底}$$

来定义和计算. 而曲边梯形在底边上各点处的高  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上是变动的, 故它的面积不能直接按上述公式来定义和计算. 然而, 由于曲边梯形的高  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上是连续变化的, 在很小一段区间上它的变化很小, 近似于不变. 因此, 如果把区间  $[a, b]$  划分为许多小区间, 在每个小区间上用其中某一点处的高来近似代替同一个小区间上的窄曲边梯形的变高, 那么, 每个窄曲边梯形就可近似地看成这样得到的窄矩形. 我们就以所有这些窄矩形面积之和作为曲边梯形面积的近似值, 并把区间  $[a, b]$  无限细分下去, 即使每个小区间的长度都趋于零, 这时所有窄矩形面积之和的极限就可定义为曲边梯形的面积. 这个定义同时也给出了计算曲边梯形面积的方法, 现详述于下.

在区间  $[a, b]$  中任意插入若干个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

把  $[a, b]$  分成  $n$  个小区间

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n],$$

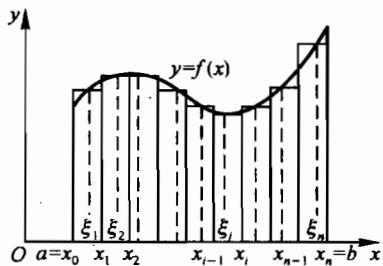


图 5-1

它们的长度依次为

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \dots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

经过每一个分点作平行于  $y$  轴的直线段, 把曲边梯形分成  $n$  个窄曲边梯形. 在每个小区间  $[x_{i-1}, x_i]$  上任取一点  $\xi_i$ , 以  $[x_{i-1}, x_i]$  为底、 $f(\xi_i)$  为高的窄矩形近似替代第  $i$  个窄曲边梯形 ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 把这样得到的  $n$  个窄矩形面积之和作为所求曲边梯形面积  $A$  的近似值, 即

$$\begin{aligned} A &\approx f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n \\ &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i. \end{aligned}$$

为了保证所有小区间的长度都无限缩小, 我们要求小区间长度中的最大值趋于零, 如记  $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$ , 则上述条件可表为  $\lambda \rightarrow 0$ . 当  $\lambda \rightarrow 0$  时 (这时分段数  $n$  无限增多, 即  $n \rightarrow \infty$ ), 取上述和式的极限, 便得曲边梯形的面积

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

## 2. 变速直线运动的路程

设某物体作直线运动, 已知速度  $v = v(t)$  是时间间隔  $[T_1, T_2]$  上  $t$  的连续函数, 且  $v(t) \geq 0$ , 计算在这段时间内物体所经过的路程  $s$ .

我们知道, 对于等速直线运动, 有公式

$$\text{路程} = \text{速度} \times \text{时间}.$$

但是, 在现在讨论的问题中, 速度不是常量而是随时间变化的变量, 因此, 所求路程  $s$  不能直接按等速直线运动的路程公式来计算. 然而, 物体运动的速度函数  $v = v(t)$  是连续变化的, 在很短一段时间内, 速度的变化很小, 近似于等速. 因此, 如果把时间间隔分小, 在小段时间内, 以等速运动代替变速运动, 那么, 就可算出部分路程的近似值; 再求和, 得到整个路程的近似值; 最后, 通过对时间间隔无限细分的极限过程, 这时所有部分路程的近似值之和的极限, 就是所求变速直线运动的路程的精确值.

具体计算步骤如下:

在时间间隔  $[T_1, T_2]$  内任意插入若干个分点

$$T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = T_2,$$

把  $[T_1, T_2]$  分成  $n$  个小时段

$$[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n],$$

各小时段时间的长依次为

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0, \Delta t_2 = t_2 - t_1, \dots, \Delta t_n = t_n - t_{n-1}.$$

相应的，在各段时间内物体经过的路程依次为

$$\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n.$$

在时间间隔  $[t_{i-1}, t_i]$  上任取一个时刻  $\tau_i$  ( $t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$ )，以  $\tau_i$  时的速度  $v(\tau_i)$  来代替  $[t_{i-1}, t_i]$  上各个时刻的速度，得到部分路程  $\Delta s_i$  的近似值，即

$$\Delta s_i \approx v(\tau_i) \Delta t_i \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

于是这  $n$  段部分路程的近似值之和就是所求变速直线运动路程  $s$  的近似值，即

$$\begin{aligned} s &\approx v(\tau_1) \Delta t_1 + v(\tau_2) \Delta t_2 + \dots + v(\tau_n) \Delta t_n \\ &= \sum_{i=1}^n v(\tau_i) \Delta t_i. \end{aligned}$$

记  $\lambda = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n\}$ ，当  $\lambda \rightarrow 0$  时，取上述和式的极限，即得变速直线运动的路程

$$s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v(\tau_i) \Delta t_i.$$

## 二、定积分定义

从上面两个例子可以看到：所要计算的量，即曲边梯形的面积  $A$  及变速直线运动的路程  $s$  的实际意义虽然不同，前者是几何量，后者是物理量，但是它们都决定于一个函数及其自变量的变化区间，如：

曲边梯形的高度  $y = f(x)$  及其底边上的点  $x$  的变化区间  $[a, b]$ ；

直线运动的速度  $v = v(t)$  及时间  $t$  的变化区间  $[T_1, T_2]$ ；

其次，计算这些量的方法与步骤都是相同的，并且它们都归结为具有相同结构的一种特定和的极限，如

$$\text{面积 } A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

$$\text{路程 } s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v(\tau_i) \Delta t_i.$$

抛开这些问题的具体意义，抓住它们在数量关系上共同的本质与特性加以概括，我们就可以抽象出下述定积分的定义。

**定义** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界，在  $[a, b]$  中任意插入若干个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

把区间  $[a, b]$  分成  $n$  个小区间

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n],$$

各个小区间的长度依次为

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \dots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

在每个小区间  $[x_{i-1}, x_i]$  上任取一点  $\xi_i$  ( $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ ), 作函数值  $f(\xi_i)$  与小区间长度  $\Delta x_i$  的乘积  $f(\xi_i) \Delta x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 并作出和

$$S = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (1)$$

记  $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$ , 如果不论对  $[a, b]$  怎样划分, 也不论在小区间  $[x_{i-1}, x_i]$  上点  $\xi_i$  怎样选取, 只要当  $\lambda \rightarrow 0$  时, 和  $S$  总趋于确定的极限  $I$ , 那么称这个极限  $I$  为函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的定积分(简称积分), 记作  $\int_a^b f(x) dx$ , 即

$$\int_a^b f(x) dx = I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (2)$$

其中  $f(x)$  叫做被积函数,  $f(x) dx$  叫做被积表达式,  $x$  叫做积分变量,  $a$  叫做积分下限,  $b$  叫做积分上限,  $[a, b]$  叫做积分区间.

利用“ $\epsilon - \delta$ ”的说法, 上述定积分的定义可以表述如下:

设有常数  $I$ , 如果对于任意给定的正数  $\epsilon$ , 总存在一个正数  $\delta$ , 使得对于区间  $[a, b]$  的任何分法, 不论  $\xi_i$  在  $[x_{i-1}, x_i]$  中怎样选取, 只要  $\lambda < \delta$ , 总有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - I \right| < \epsilon$$

成立, 则称  $I$  是  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的定积分, 记作  $\int_a^b f(x) dx$ .

注意 当和  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$  的极限存在时, 其极限  $I$  仅与被积函数  $f(x)$  及积分区间  $[a, b]$  有关. 如果既不改变被积函数  $f$ , 也不改变积分区间  $[a, b]$ , 而只把积分变量  $x$  改写成其他字母, 例如  $t$  或  $u$ , 那么, 这时和的极限  $I$  不变, 也就是定积分的值不变, 即

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du.$$

这就是说, 定积分的值只与被积函数及积分区间有关, 而与积分变量的记法无关.

和  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$  通常称为  $f(x)$  的积分和. 如果  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的定积分存在, 那么就说  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积.

对于定积分, 有这样一个重要问题: 函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上满足怎样的条件,  $f(x)$  在  $[a, b]$  上一定可积? 这个问题我们不作深入讨论, 而只给出以下两个充分条件.

**定理 1** 设  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积.

**定理2** 设  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上有界, 且只有有限个间断点, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积.

利用定积分的定义, 前面所讨论的两个实际问题可以分别表述如下:

曲线  $y = f(x)$  ( $f(x) \geq 0$ )、 $x$  轴及两条直线  $x = a$ 、 $x = b$  所围成的曲边梯形的面积  $A$  等于函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的定积分. 即

$$A := \int_a^b f(x) dx.$$

物体以变速  $v = v(t)$  ( $v(t) \geq 0$ ) 作直线运动, 从时刻  $t = T_1$  到时刻  $t = T_2$ , 这物体经过的路程  $s$  等于函数  $v(t)$  在区间  $[T_1, T_2]$  上的定积分, 即

$$s = \int_{T_1}^{T_2} v(t) dt.$$

下面讨论定积分的几何意义. 在  $[a, b]$  上  $f(x) \geq 0$  时, 我们已经知道, 定积分  $\int_a^b f(x) dx$  在几何上表示由曲线  $y = f(x)$ 、两条直线  $x = a$ 、 $x = b$  与  $x$  轴所围成的曲边梯形的面积; 在  $[a, b]$  上  $f(x) \leq 0$  时, 由曲线  $y = f(x)$ 、两条直线  $x = a$ 、 $x = b$  与  $x$  轴所围成的曲边梯形位于  $x$  轴的下方, 定积分

$$\int_a^b f(x) dx$$

在几何上表示上述曲边梯形面积的负值; 在  $[a, b]$  上  $f(x)$  既取得正值又取得负值时, 函数  $f(x)$  的图形某些部分在  $x$  轴的上方, 而其他部分在  $x$  轴下方(图 5-2), 此时定积分  $\int_a^b f(x) dx$  表示  $x$  轴上方图形面积减去  $x$  轴下方图形面积所得之差.

最后, 举一个按定义计算定积分的例子.

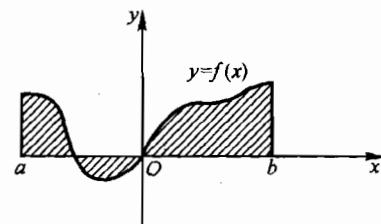


图 5-2

**例 1** 利用定义计算定积分  $\int_0^1 x^2 dx$ .

**解** 因为被积函数  $f(x) = x^2$  在积分区间  $[0, 1]$  上连续, 而连续函数是可积的, 所以积分与区间  $[0, 1]$  的分法及点  $\xi_i$  的取法无关. 因此, 为了便于计算, 不妨把区间  $[0, 1]$  分成  $n$  等份, 分点为  $x_i = \frac{i}{n}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ; 这样, 每个小区间  $[x_{i-1}, x_i]$  的长度  $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ; 取  $\xi_i = x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . 于是, 得和式

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \Delta x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 \Delta x_i$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \\
&= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \text{①} \\
&= \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

当  $\lambda \rightarrow 0$  即  $n \rightarrow \infty$  时, 取上式右端的极限. 由定积分的定义, 即得所要计算的积分为

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}.$$

### 三、定积分的近似计算

从例 1 的计算过程中可以看到, 对于任一确定的正整数  $n$ , 积分和

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

都是定积分  $\int_0^1 x^2 dx$  的近似值. 当  $n$  取不同值时, 可得到定积分  $\int_0^1 x^2 dx$  精度不同的近似值. 一般说来,  $n$  取得越大, 近似程度越好.

下面就一般情形, 讨论定积分的近似计算问题. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 这时定积分  $\int_a^b f(x) dx$  存在. 如同例 1, 采取把区间  $[a, b]$  等分的分法, 即用分点  $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$  将  $[a, b]$  分成  $n$  个长度相等的小区间, 每个小区间的长为

① 利用恒等式  $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$ , 得

$$\left\{
\begin{array}{l}
(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1, \\
n^3 - (n-1)^3 = 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1, \\
\cdots \cdots \cdots \\
3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1, \\
2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1.
\end{array}
\right.$$

把这  $n$  个等式两端分别相加, 得

$$(n+1)^3 - 1 = 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + \cdots + n) + n.$$

由于

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1),$$

代入上式, 得

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + \frac{3}{2}n(n+1) + n.$$

整理后, 得

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n},$$

在小区间  $[x_{i-1}, x_i]$  上, 取  $\xi_i = x_{i-1}$ , 应有

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}),$$

从而对于任一确定的正整数  $n$ , 有

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}).$$

记  $f(x_i) = y_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ), 上式可记作

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}). \quad (3)$$

如果取  $\xi_i = x_i$ , 则可得近似公式

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n). \quad (4)$$

以上求定积分近似值的方法称为矩形法, 公式(3)、(4)称为矩形法公式.

矩形法的几何意义是: 用窄条矩形的面积作为窄条曲边梯形面积的近似值. 整体上用台阶形的面积作为曲边梯形面积的近似值. 如图 5-3 所示.

求定积分近似值的方法, 常用的还有梯形法和抛物线法(又称辛普森(Simpson)法), 简单介绍如下.

和矩形法一样, 将区间  $[a, b]$   $n$  等分. 设  $f(x_i) = y_i$ , 曲线  $y = f(x)$  上的点  $(x_i, y_i)$  记作  $M_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ).

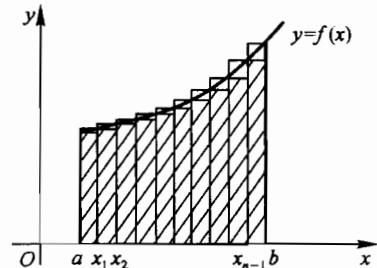


图 5-3

梯形法的原理是: 将曲线  $y = f(x)$  上的小弧段  $\widehat{M_{i-1} M_i}$  用直线段  $\overline{M_{i-1} M_i}$  代替, 也就是把窄条曲边梯形用窄条梯形代替(图 5-4(a)), 由此得到定积分的近似值为

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{b-a}{n} \left( \frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right) \\ &= \frac{b-a}{n} \left( \frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

显然, 梯形法公式(5)所得近似值就是矩形法公式(3)和(4)所得两个近似值的平均值.

抛物线法的原理是: 将曲线  $y = f(x)$  上的两个小弧段  $\widehat{M_{i-1} M_i}$  和  $\widehat{M_i M_{i+1}}$  合

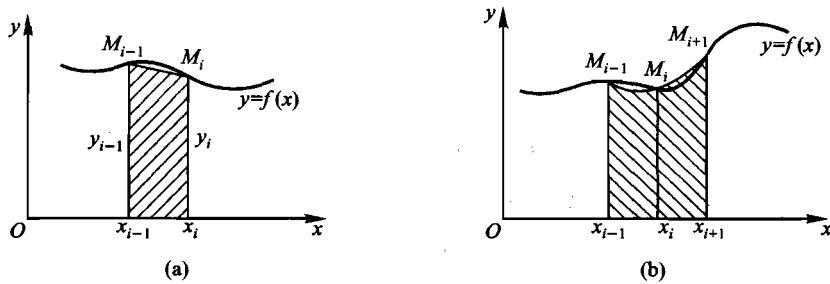


图 5-4

起来,用过  $M_{i-1}$ ,  $M_i$ ,  $M_{i+1}$  三点的抛物线  $y = px^2 + qx + r$  代替(图 5-4(b)). 经推导可得,以此抛物线弧段为曲边、以  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$  为底的曲边梯形面积为

$$\frac{1}{6}(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}) \cdot 2\Delta x = \frac{b-a}{3n}(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}).$$

取  $n$  为偶数,得到定积分的近似值为

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{b-a}{3n} [(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)] \\ &= \frac{b-a}{3n} [y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2})]. \end{aligned} \quad (6)$$

**例 2** 按梯形法公式(5)和抛物线法公式(6)计算定积分  $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$  的近似值.(取  $n = 10$ , 计算时取 5 位小数).

解 计算  $y_i$  并列表:

$i$	$x_i$	$y_i$
0	0.0	4.00000
1	0.1	3.96040
2	0.2	3.84615
3	0.3	3.66972
4	0.4	3.44828
5	0.5	3.20000
6	0.6	2.94118
7	0.7	2.68456
8	0.8	2.43902
9	0.9	2.20994
10	1.0	2.00000

按梯形法公式(5)求得近似值为

$$S_1 = 3.13993;$$

按抛物线法公式(6)求得近似值为

$$S_2 = 3.14159.$$

本例所给积分的精确值为

$$\pi = 3.1415926\cdots,$$

用  $S_2$  作为  $\pi$  的近似值, 误差小于  $10^{-5}$ .

计算定积分的近似值的方法很多, 这里不再作介绍. 随着计算机应用的普及, 定积分的近似计算已变得更为方便, 现在已有很多现成的数学软件可用于定积分的近似计算.

#### 四、定积分的性质

为了以后计算及应用方便起见, 对定积分作以下两点补充规定:

(1) 当  $a = b$  时,  $\int_a^b f(x) dx = 0$ ;

(2) 当  $a > b$  时,  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ .

由上式可知, 交换定积分的上下限时, 定积分的绝对值不变而符号相反.

下面讨论定积分的性质. 下列各性质中积分上下限的大小, 如不特别指明, 均不加限制; 并假定各性质中所列出的定积分都是存在的.

**性质 1**  $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$ .

**证** 
$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)] \Delta x_i \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \pm \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i \\ &= \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

性质 1 对于任意有限个函数都是成立的. 类似地, 可以证明:

**性质 2**  $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$  ( $k$  是常数).

**性质 3** 设  $a < c < b$ , 则

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

**证** 因为函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上可积, 所以不论把  $[a, b]$  怎样分, 积分和的极限总是不变的. 因此, 在分区间时, 可以使  $c$  永远是个分点. 那么,  $[a, b]$  上的积分和等于  $[a, c]$  上的积分和加  $[c, b]$  上的积分和, 记为

$$\sum_{[a, b]} f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{[a, c]} f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{[c, b]} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

令  $\lambda \rightarrow 0$ , 上式两端同时取极限, 即得

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

这个性质表明定积分对于积分区间具有可加性.

按定积分的补充规定, 我们有: 不论  $a, b, c$  的相对位置如何, 总有等式

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

成立. 例如, 当  $a < b < c$  时, 由于

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx,$$

于是得

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx \\ &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \end{aligned}$$

**性质 4** 如果在区间  $[a, b]$  上  $f(x) \equiv 1$ , 则

$$\int_a^b 1 dx = \int_a^b dx = b - a.$$

这个性质的证明请读者自己完成.

**性质 5** 如果在区间  $[a, b]$  上,  $f(x) \geq 0$ , 则

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad (a < b).$$

**证** 因为  $f(x) \geq 0$ , 所以

$$f(\xi_i) \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

又由于  $\Delta x_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 因此

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \geq 0,$$

令  $\lambda = \max\{\Delta x_1, \dots, \Delta x_n\} \rightarrow 0$ , 便得要证的不等式.

**推论 1** 如果在区间  $[a, b]$  上,  $f(x) \leq g(x)$ , 则

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad (a < b).$$

证 因为  $g(x) - f(x) \geq 0$ , 由性质 5 得

$$\int_a^b [g(x) - f(x)] dx \geq 0,$$

再利用性质 1, 便得要证的不等式.

推论 2  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (a < b).$

证 因为

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|,$$

所以由推论 1 及性质 2 可得

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

即

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

性质 6 设  $M$  及  $m$  分别是函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的最大值及最小值, 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad (a < b).$$

证 因为  $m \leq f(x) \leq M$ , 所以由性质 5 推论 1, 得

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx.$$

再由性质 2 及性质 4, 即得所要证的不等式.

这个性质说明, 由被积函数在积分区间上的最大值及最小值, 可以估计积分值的大致范围. 例如, 定积分  $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^4 dx$ , 它的被积函数  $f(x) = x^4$  在积分区间  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$  上是单调增加的, 于是有最小值  $m = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ 、最大值  $M = (1)^4 = 1$ .

由性质 6, 得

$$\frac{1}{16} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \leq \int_{\frac{1}{2}}^1 x^4 dx \leq 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right),$$

即

$$\frac{1}{32} \leq \int_{\frac{1}{2}}^1 x^4 dx \leq \frac{1}{2}.$$

性质 7(定积分中值定理) 如果函数  $f(x)$  在积分区间  $[a, b]$  上连续, 则在  $[a, b]$  上至少存在一个点  $\xi$ , 使下式成立:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad (a \leq \xi \leq b).$$

这个公式叫做积分中值公式.

**证** 把性质 6 中的不等式各除以  $b-a$ , 得

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M.$$

这表明, 确定的数值  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$  介于函数  $f(x)$  的最小值  $m$  及最大值  $M$  之间.

根据闭区间上连续函数的介值定理(第一章第十节定理 3 推论), 在  $[a, b]$  上至少存在一点  $\xi$ , 使得函数  $f(x)$  在点  $\xi$  处的值与这个确定的数值相等, 即应有

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(\xi) \quad (a \leq \xi \leq b).$$

两端各乘以  $b-a$ , 即得所要证的等式.

显然, 积分中值公式

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad (\xi \text{ 在 } a \text{ 与 } b \text{ 之间})$$

不论  $a < b$  或  $a > b$  都是成立的.

积分中值公式有如下的几何解释: 在区间  $[a, b]$  上至少存在一点  $\xi$ , 使得以区间  $[a, b]$  为底边、以曲线  $y=f(x)$  为曲边的曲边梯形的面积等于同一底边而高为  $f(\xi)$  的一个矩形的面积(图 5-5).

按积分中值公式所得

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

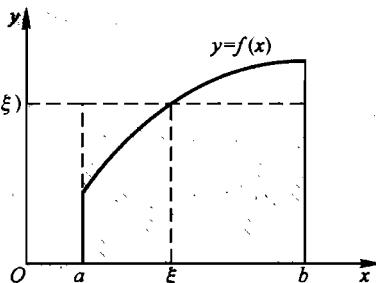


图 5-5

称为函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的平均值. 例

如按图 5-5,  $f(\xi)$  可看作图中曲边梯形的平均高度. 又如物体以变速  $v(t)$  作直线运动, 在时间区间  $[T_1, T_2]$  上经过的路程为  $\int_{T_1}^{T_2} v(t)dt$ , 因此,

$$v(\xi) = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} v(t)dt, \xi \in [T_1, T_2]$$

便是运动物体在  $[T_1, T_2]$  这段时间内的平均速度.

## 习题 5-1

- \* 1. 利用定积分定义计算由抛物线  $y=x^2+1$ , 两直线  $x=a$ ,  $x=b$  ( $b > a$ ) 及  $x$  轴所围

成的图形的面积.

\* 2. 利用定积分定义计算下列积分:

$$(1) \int_a^b x dx \quad (a < b);$$

$$(2) \int_0^1 e^x dx .$$

3. 利用定积分的几何意义, 证明下列等式:

$$(1) \int_0^1 2x dx = 1 ;$$

$$(2) \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{\pi}{4} ;$$

$$(3) \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0 ;$$

$$(4) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx ,$$

4. 利用定积分的几何意义, 求下列积分:

$$(1) \int_0^t x dx \quad (t > 0);$$

$$(2) \int_{-2}^4 \left( \frac{x}{2} + 3 \right) dx ;$$

$$(3) \int_{-1}^2 |x| dx ;$$

$$(4) \int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2} dx .$$

5. 设  $a < b$ . 问  $a, b$  取什么值时, 积分  $\int_a^b (x - x^2) dx$  取得最大值?

6. 已知  $\ln 2 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ , 试用抛物线法公式(6), 求出  $\ln 2$  的近似值(取  $n=10$ , 计算时取 4 位小数).

7. 设  $\int_{-1}^1 3f(x) dx = 18$ ,  $\int_{-1}^3 f(x) dx = 4$ ,  $\int_{-1}^3 g(x) dx = 3$ . 求

$$(1) \int_{-1}^1 f(x) dx ;$$

$$(2) \int_1^3 f(x) dx ;$$

$$(3) \int_{-3}^{-1} g(x) dx ;$$

$$(4) \int_{-1}^3 \frac{1}{5}[4f(x) + 3g(x)] dx .$$

8. 水利工程中要计算拦水闸门所受的水压力. 已知闸门上水的压强  $p$  与水深  $h$  存在函数关系, 且有  $p = 9.8h$  ( $\text{kN/m}^2$ ). 若闸门高  $H=3$  m, 宽  $L=2$  m, 求水面与闸门顶相齐时闸门所受的水压力  $P$ .

9. 证明定积分性质:

$$(1) \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (k \text{ 是常数});$$

$$(2) \int_a^b 1 \cdot dx = \int_a^b dx = b - a .$$

10. 估计下列各积分的值:

$$(1) \int_1^4 (x^2 + 1) dx ;$$

$$(2) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1 + \sin^2 x) dx ;$$

$$(3) \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x \arctan x dx ;$$

$$(4) \int_2^0 e^{x^2-x} dx .$$

11. 设  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续, 证明  $\int_0^1 f^2(x) dx \geq \left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2$ .

12. 设  $f(x)$  及  $g(x)$  在  $[a,b]$  上连续, 证明:

- (1) 若在  $[a, b]$  上,  $f(x) \geq 0$ , 且  $\int_a^b f(x) dx = 0$ , 则在  $[a, b]$  上  $f(x) \equiv 0$ ;
- (2) 若在  $[a, b]$  上,  $f(x) \geq 0$ , 且  $f(x) \not\equiv 0$ , 则  $\int_a^b f(x) dx > 0$ ;
- (3) 若在  $[a, b]$  上,  $f(x) \leq g(x)$ , 且  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$ , 则在  $[a, b]$  上  $f(x) \equiv g(x)$ .

13. 根据定积分的性质及第 12 题的结论, 说明下列各对积分哪一个的值较大:

- (1)  $\int_0^1 x^2 dx$  还是  $\int_0^1 x^3 dx$ ?
- (2)  $\int_1^2 x^2 dx$  还是  $\int_1^2 x^3 dx$ ?
- (3)  $\int_1^2 \ln x dx$  还是  $\int_1^2 (\ln x)^2 dx$ ?
- (4)  $\int_0^1 x dx$  还是  $\int_0^1 \ln(1+x) dx$ ?
- (5)  $\int_0^1 e^x dx$  还是  $\int_0^1 (1+x) dx$ ?

## 第二节 微积分基本公式

在第一节中有一个应用定积分定义计算积分的例子. 从这个例子我们看到, 被积函数虽然是简单的二次幂函数  $f(x) = x^2$ , 但直接按定义来计算它的定积分已经不是很容易的事. 如果被积函数是其他复杂的函数, 其困难就更大了. 因此, 我们必须寻求计算定积分的新方法.

下面先从实际问题中寻找解决问题的线索. 为此, 我们对变速直线运动中遇到的位置函数  $s(t)$  及速度函数  $v(t)$  之间的联系作进一步的研究.

### 一、变速直线运动中位置函数与速度函数之间的联系

有一物体在一直线上运动. 在这直线上取定原点、正向及长度单位, 使它成一数轴. 设时刻  $t$  时物体所在位置为  $s(t)$ , 速度为  $v(t)$  (为了讨论方便起见, 可以设  $v(t) \geq 0$ ).

从第一节知道: 物体在时间间隔  $[T_1, T_2]$  内经过的路程可以用速度函数  $v(t)$  在  $[T_1, T_2]$  上的定积分

$$\int_{T_1}^{T_2} v(t) dt$$

来表达; 另一方面, 这段路程又可以通过位置函数  $s(t)$  在区间  $[T_1, T_2]$  上的增  
量

$$s(T_2) - s(T_1)$$

来表达.由此可见,位置函数  $s(t)$  与速度函数  $v(t)$  之间有如下关系:

$$\int_{T_1}^{T_2} v(t) dt = s(T_2) - s(T_1). \quad (1)$$

因为  $s'(t) = v(t)$ , 即位置函数  $s(t)$  是速度函数  $v(t)$  的原函数, 所以关系式(1)表示, 速度函数  $v(t)$  在区间  $[T_1, T_2]$  上的定积分等于  $v(t)$  的原函数  $s(t)$  在区间  $[T_1, T_2]$  上的增量

$$s(T_2) - s(T_1).$$

上述从变速直线运动的路程这个特殊问题中得出来的关系, 在一定条件下具有普遍性.事实上, 我们将在第三目中证明, 如果函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 那么,  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的定积分就等于  $f(x)$  的原函数(设为  $F(x)$ )在区间  $[a, b]$  上的增量

$$F(b) - F(a).$$

## 二、积分上限的函数及其导数

设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 并且设  $x$  为  $[a, b]$  上的一点. 我们来考察  $f(x)$  在部分区间  $[a, x]$  上的定积分

$$\int_a^x f(x) dx.$$

首先, 由于  $f(x)$  在  $[a, x]$  上仍旧连续, 因此这个定积分存在. 这里,  $x$  既表示定积分的上限, 又表示积分变量. 因为定积分与积分变量的记法无关, 所以, 为了明确起见, 可以把积分变量改用其他符号, 例如用  $t$  表示, 则上面的定积分可以写成

$$\int_a^x f(t) dt.$$

如果上限  $x$  在区间  $[a, b]$  上任意变动, 则对于每一个取定的  $x$  值, 定积分有一个对应值, 所以它在  $[a, b]$  上定义了一个函数, 记作  $\Phi(x)$ :

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (a \leq x \leq b).$$

这个函数  $\Phi(x)$  具有下面定理 1 所指出的重要性质.

**定理 1** 如果函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 则积分上限的函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

在  $[a, b]$  上可导, 并且它的导数

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad (a \leq x \leq b). \quad (2)$$

证 若  $x \in (a, b)$ , 设  $x$  获得增量  $\Delta x$ , 其绝对值足够地小, 使得  $x + \Delta x \in (a, b)$ , 则  $\Phi(x)$  (图 5-6, 图中  $\Delta x > 0$ ) 在  $x + \Delta x$  处的函数值为

$$\Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

由此得函数的增量

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) \\ &= \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt + \int_x^x f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.\end{aligned}$$

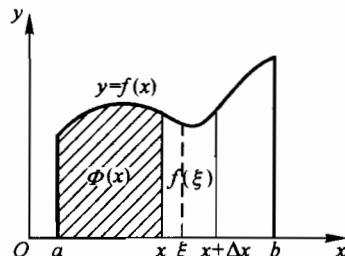


图 5-6

再应用积分中值定理, 即有等式

$$\Delta\Phi = f(\xi)\Delta x,$$

这里,  $\xi$  在  $x$  与  $x + \Delta x$  之间. 把上式两端各除以  $\Delta x$ , 得函数增量与自变量增量的比值

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(\xi).$$

由于假设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 而  $\Delta x \rightarrow 0$  时,  $\xi \rightarrow x$ , 因此  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = f(x)$ . 于是, 令  $\Delta x \rightarrow 0$  对上式两端取极限时, 左端的极限也应该存在且等于  $f(x)$ . 这就是说, 函数  $\Phi(x)$  的导数存在, 并且

$$\Phi'(x) = f(x).$$

若  $x = a$ , 取  $\Delta x > 0$ , 则同理可证  $\Phi'_+(a) = f(a)$ ; 若  $x = b$ , 取  $\Delta x < 0$ , 则同理可证  $\Phi'_(b) = f(b)$ .

定理 1 证毕.

这个定理指出了一个重要结论: 连续函数  $f(x)$  取变上限  $x$  的定积分然后求导, 其结果还原为  $f(x)$  本身. 联想到原函数的定义, 就可以从定理 1 推知  $\Phi(x)$  是连续函数  $f(x)$  的一个原函数. 因此, 我们引出如下的原函数的存在定理.

**定理 2** 如果函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 则函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (3)$$

就是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的一个原函数.

这个定理的重要意义是：一方面肯定了连续函数的原函数是存在的，另一方面初步地揭示了积分学中的定积分与原函数之间的联系。因此，我们就有可能通过原函数来计算定积分。

### 三、牛顿—莱布尼茨公式

现在我们根据定理2来证明一个重要定理，它给出了用原函数计算定积分的公式。

**定理3** 如果函数  $F(x)$  是连续函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (4)$$

**证** 已知函数  $F(x)$  是连续函数  $f(x)$  的一个原函数，又根据定理2知道，积分上限的函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

也是  $f(x)$  的一个原函数。于是这两个原函数之差  $F(x) - \Phi(x)$  在  $[a, b]$  上必定是某一个常数  $C$ （第四章第一节），即

$$F(x) - \Phi(x) = C \quad (a \leq x \leq b). \quad (5)$$

在上式中令  $x = a$ ，得  $F(a) - \Phi(a) = C$ 。又由  $\Phi(x)$  的定义式(3)及上节定积分的补充规定(1)可知  $\Phi(a) = 0$ ，因此， $C = F(a)$ 。以  $F(a)$  代入(5)式中的  $C$ ，以  $\int_a^x f(t)dt$  代入(5)式中的  $\Phi(x)$ ，可得

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

在上式中令  $x = b$ ，就得到所要证明的公式(4)。

由上节定积分的补充规定(2)可知，(4)式对  $a > b$  的情形同样成立。

为了方便起见，以后把  $F(b) - F(a)$  记成  $[F(x)]_a^b$ ，于是(4)式又可写成

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b.$$

公式(4)叫做牛顿—莱布尼茨(Leibniz)公式<sup>①</sup>。这个公式进一步揭示了定积分与被积函数的原函数或不定积分之间的联系。它表明：一个连续函数

① 牛顿(Isaac Newton, 1642—1727) 英国数学家、物理学家，微积分的奠基者。牛顿的微积分学说最早的公开表述是在1687年出版的巨著《自然哲学之数学原理》中。

莱布尼茨(Gottfrid Wilhelm Leibniz, 1646—1716) 德国数学家，微积分的另一个奠基者。牛顿—莱布尼茨公式最早出现在莱布尼茨1677年的一篇手稿中。

在区间  $[a, b]$  上的定积分等于它的任一个原函数在区间  $[a, b]$  上的增量. 这就给定积分提供了一个有效而简便的计算方法, 大大简化了定积分的计算手续.

通常也把公式(4)叫做微积分基本公式.

下面我们举几个应用公式(4)来计算定积分的简单例子.

**例 1** 计算第一节中的定积分  $\int_0^1 x^2 dx$ .

解 由于  $\frac{x^3}{3}$  是  $x^2$  的一个原函数, 所以按牛顿-莱布尼茨公式, 有

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

**例 2** 计算  $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ .

解 由于  $\arctan x$  是  $\frac{1}{1+x^2}$  的一个原函数, 所以

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} &= [\arctan x]_{-1}^{\sqrt{3}} = \arctan \sqrt{3} - \arctan(-1) \\ &= \frac{\pi}{3} - \left( -\frac{\pi}{4} \right) = \frac{7}{12}\pi. \end{aligned}$$

**例 3** 计算  $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}$ .

解 当  $x < 0$  时,  $\frac{1}{x}$  的一个原函数是  $\ln|x|$ , 现在积分区间是  $[-2, -1]$ , 所以按牛顿-莱布尼茨公式, 有

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x} = [\ln|x|]_{-2}^{-1} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2.$$

通过例 3, 我们应该特别注意: 公式(4)中的函数  $F(x)$  必须是  $f(x)$  在该积分区间  $[a, b]$  上的原函数.

**例 4** 计算正弦曲线  $y = \sin x$  在  $[0, \pi]$  上与  $x$  轴所围成的平面图形(图 5-7)的面积.

解 这图形是曲边梯形的一个特例. 它的面积

$$A = \int_0^\pi \sin x dx.$$

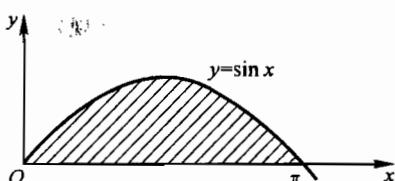


图 5-7

由于  $-\cos x$  是  $\sin x$  的一个原函数, 所以

$$A = \int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = -(-1) - (-1) = 2.$$

**例 5** 汽车以每小时 36 km 速度行驶, 到某处需要减速停车. 设汽车以等加速度  $a = -5 \text{ m/s}^2$  刹车. 问从开始刹车到停车, 汽车驶过了多少距离?

**解** 首先要算出从开始刹车到停车经过的时间. 设开始刹车的时刻为  $t = 0$ , 此时汽车速度

$$v_0 = 36 \text{ km/h} = \frac{36 \times 1000}{3600} \text{ m/s} = 10 \text{ m/s}.$$

刹车后汽车减速行驶, 其速度为

$$v(t) = v_0 + at = 10 - 5t.$$

当汽车停住时, 速度  $v(t) = 0$ , 故从

$$v(t) = 10 - 5t = 0$$

解得

$$t = \frac{10}{5} = 2(\text{s}).$$

于是在这段时间内, 汽车所驶过的距离为

$$s = \int_0^2 v(t) dt = \int_0^2 (10 - 5t) dt = \left[ 10t - 5 \times \frac{t^2}{2} \right]_0^2 = 10(\text{m}),$$

即在刹车后, 汽车需驶过 10 m 才能停住.

**例 6** 证明积分中值定理: 若函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 则在开区间  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a) \quad (a < \xi < b).$$

**证** 因  $f(x)$  连续, 故它的原函数存在, 设为  $F(x)$ , 即设在  $[a, b]$  上  $F'(x) = f(x)$ . 根据牛顿-莱布尼茨公式, 有

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

显然函数  $F(x)$  在区间  $[a, b]$  上满足微分中值定理的条件, 因此按微分中值定理, 在开区间  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使

$$F(b) - F(a) = F'(\xi)(b - a), \xi \in (a, b),$$

故  $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a), \xi \in (a, b).$

本例的结论是上一节所述积分中值定理的改进. 从本例的证明中不难看出积分中值定理与微分中值定理的联系.

下面再举几个应用公式(2)的例子.

**例 7** 设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  内连续且  $f(x) > 0$ . 证明函数

$$F(x) = \frac{\int_0^x tf(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}$$

在  $(0, +\infty)$  内为单调增加函数.

证 由公式(2), 得

$$\frac{d}{dx} \int_0^x t f(t) dt = x f(x), \quad \frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt = f(x).$$

故

$$\begin{aligned} F'(x) &= xf(x) \int_0^x f(t) dt - f(x) \int_0^x t f(t) dt \\ &= \frac{\left( \int_0^x f(t) dt \right)^2}{\left( \int_0^x f(t) dt \right)^2} \\ &= \frac{f(x) \int_0^x (x-t) f(t) dt}{\left( \int_0^x f(t) dt \right)^2}. \end{aligned}$$

按假设, 当  $0 < t < x$  时  $f(t) > 0$ ,  $(x-t)f(t) > 0$ , 按例 6 所述积分中值定理可知

$$\int_0^x f(t) dt > 0, \quad \int_0^x (x-t) f(t) dt > 0,$$

所以  $F'(x) > 0$  ( $x > 0$ ), 从而  $F(x)$  在  $(0, +\infty)$  内为单调增加函数.

例 8 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2} dt}{x^2}$

解 易知这是一个  $\frac{0}{0}$  型的未定式, 我们利用洛必达法则来计算. 分子可写成

$$-\int_1^{\cos x} e^{-t^2} dt,$$

它是以  $\cos x$  为上限的积分, 作为  $x$  的函数可看成是以  $u = \cos x$  为中间变量的复合函数, 故由公式(2)有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{\cos x}^1 e^{-t^2} dt &= -\frac{d}{dx} \int_1^{\cos x} e^{-t^2} dt \\ &= -\frac{d}{du} \int_1^u e^{-t^2} dt \Big|_{u=\cos x} \cdot (\cos x)' \\ &= -e^{-\cos^2 x} \cdot (-\sin x) \\ &= \sin x e^{-\cos^2 x}. \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2} dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x e^{-\cos^2 x}}{2x} = \frac{1}{2e}.$$

## 习 题 5-2

1. 试求函数  $y = \int_0^x \sin t dt$  当  $x=0$  及  $x=\frac{\pi}{4}$  时的导数.

2. 求由参数表达式  $x = \int_0^t \sin u du$ ,  $y = \int_0^t \cos u du$  所确定的函数对  $x$  的导数  $\frac{dy}{dx}$ .

3. 求由  $\int_0^y e^t dt + \int_0^x \cos t dt = 0$  所决定的隐函数对  $x$  的导数  $\frac{dy}{dx}$ .

4. 当  $x$  为何值时, 函数  $I(x) = \int_0^x t e^{-t^2} dt$  有极值?

5. 计算下列各导数:

$$(1) \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt; \quad (2) \frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}};$$

$$(3) \frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt.$$

6. 计算下列各定积分:

$$(1) \int_0^a (3x^2 - x + 1) dx; \quad (2) \int_1^2 \left( x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx;$$

$$(3) \int_4^9 \sqrt{x}(1+\sqrt{x}) dx; \quad (4) \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2};$$

$$(5) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (6) \int_0^{\sqrt{3}a} \frac{dx}{a^2+x^2};$$

$$(7) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}; \quad (8) \int_{-1}^0 \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1} dx;$$

$$(9) \int_{-e-1}^{-2} \frac{dx}{1+x}; \quad (10) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 \theta d\theta;$$

$$(11) \int_0^{2\pi} |\sin x| dx;$$

$$(12) \int_0^2 f(x) dx, \text{ 其中 } f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1, \\ \frac{1}{2}x^2, & x > 1. \end{cases}$$

7. 设  $k \in \mathbb{N}^+$ . 试证下列各题:

$$(1) \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = 0; \quad (2) \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = 0;$$

$$(3) \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \pi; \quad (4) \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \pi.$$

8. 设  $k, l \in \mathbb{N}^+$ , 且  $k \neq l$ . 证明:

$$(1) \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin lx dx = 0; \quad (2) \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx dx = 0;$$

$$(3) \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lx dx = 0.$$

9. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left( \int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x t e^{t^2} dt}.$$

10. 设

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1], \\ x, & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

求  $\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt$  在  $[0, 2]$  上的表达式, 并讨论  $\Phi(x)$  在  $(0, 2)$  内的连续性.

11. 设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & x < 0 \text{ 或 } x > \pi. \end{cases}$$

求  $\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt$  在  $(-\infty, +\infty)$  内的表达式.

12. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导且  $f'(x) \leq 0$ ,

$$F(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt.$$

证明在  $(a, b)$  内有  $F'(x) \leq 0$ .

13. 设  $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ , 求  $F'(0)$ .

14. 设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  内连续, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ . 证明函数

$$y = e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt$$

满足方程  $\frac{dy}{dx} + y = f(x)$ , 并求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x)$ .

### 第三节 定积分的换元法和分部积分法

由上节结果知道, 计算定积分  $\int_a^b f(x) dx$  的简便方法是把它转化为求  $f(x)$  的原函数的增量. 在第四章中, 我们知道用换元积分法和分部积分法可以求出一些函数的原函数. 因此, 在一定条件下, 可以用换元积分法和分部积分法来计算定积分. 下面就来讨论定积分的这两种计算方法.

#### 一、定积分的换元法

为了说明如何用换元法来计算定积分, 先证明下面的定理.

**定理** 假设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 函数  $x = \varphi(t)$  满足条件:

(1)  $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ ;

(2)  $\varphi(t)$  在  $[\alpha, \beta]$  (或  $[\beta, \alpha]$ ) 上具有连续导数, 且其值域  $R_\varphi = [\alpha, \beta]^\circledR$ , 则有

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt. \quad (1)$$

公式(1)叫做定积分的换元公式.

证 由假设可以知道, 上式两边的被积函数都是连续的, 因此不仅上式两边的定积分都存在, 而且由上节的定理 2 知道, 被积函数的原函数也都存在. 所以, (1) 式两边的定积分都可应用牛顿-莱布尼茨公式. 假设  $F(x)$  是  $f(x)$  的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

另一方面, 记  $\Phi(t) = F[\varphi(t)]$ , 它是由  $F(x)$  与  $x = \varphi(t)$  复合而成的函数. 由复合函数求导法则, 得

$$\Phi'(t) = \frac{dF}{dx} \frac{dx}{dt} = f(x) \varphi'(t) = f[\varphi(t)] \varphi'(t).$$

这表明  $\Phi(t)$  是  $f[\varphi(t)] \varphi'(t)$  的一个原函数. 因此有

$$\int_a^\beta f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

又由  $\Phi(t) = F[\varphi(t)]$  及  $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$  可知

$$\Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a).$$

所以

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= F(b) - F(a) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) \\ &= \int_a^\beta f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt. \end{aligned}$$

这就证明了换元公式.

在定积分  $\int_a^b f(x) dx$  中的  $dx$ , 本来是整个定积分记号中不可分割的一部分, 但由上述定理可知, 在一定条件下, 它确实可以作为微分记号来对待. 这就是说, 应用换元公式时, 如果把  $\int_a^b f(x) dx$  中的  $x$  换成  $\varphi(t)$ , 则  $dx$  就换成  $\varphi'(t) dt$ , 这正好是  $x = \varphi(t)$  的微分  $dx$ .

应用换元公式时有两点值得注意:(1) 用  $x = \varphi(t)$  把原来变量  $x$  代换成新变量  $t$  时, 积分限也要换成相应于新变量  $t$  的积分限;(2) 求出  $f[\varphi(t)] \varphi'(t)$

① 当  $\varphi(t)$  的值域  $R_\varphi$  超出  $[\alpha, \beta]$ , 但  $\varphi(t)$  满足其余条件时, 只要  $f(x)$  在  $R_\varphi$  上连续, 则定理的结论仍成立.

的一个原函数  $\Phi(t)$  后,不必像计算不定积分那样再要把  $\Phi(t)$  变换成原来变量  $x$  的函数,而只要把新变量  $t$  的上、下限分别代入  $\Phi(t)$  中然后相减就行了.

**例 1** 计算  $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$  ( $a > 0$ ).

解 设  $x = a \sin t$ , 则  $dx = a \cos t dt$ ,

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, 取 } t=0; \quad \text{当 } x=a \text{ 时, 取 } t=\frac{\pi}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt \\ &= \frac{a^2}{2} \left[ t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}. \end{aligned}$$

换元公式也可反过来使用. 为使用方便起见, 把换元公式中左右两边对调位置, 同时把  $t$  改记为  $x$ , 而  $x$  改记为  $t$ , 得

$$\int_a^b f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \int_a^\beta f(t) dt.$$

这样, 我们可用  $t = \varphi(x)$  来引入新变量  $t$ , 而  $\alpha = \varphi(a)$ ,  $\beta = \varphi(b)$ .

**例 2** 计算  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx$ .

解 设  $t = \cos x$ , 则  $dt = -\sin x dx$ , 且

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, } t=1; \quad \text{当 } x=\frac{\pi}{2} \text{ 时, } t=0.$$

于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx = - \int_1^0 t^5 dt = \int_0^1 t^5 dt = \left[ \frac{t^6}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

在例 2 中, 如果我们不明显地写出新变量  $t$ , 那么定积分的上、下限就不要变更. 现在用这种记法写出计算过程如下:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x d(\cos x) \\ &= - \left[ \frac{\cos^6 x}{6} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = - \left( 0 - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

**例 3** 计算  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} dx$ .

解 由于  $\sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} = \sqrt{\sin^3 x (1 - \sin^2 x)} = \sin^{\frac{3}{2}} x \cdot |\cos x|$ , 在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上,  $|\cos x| = \cos x$ ; 在  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$  上,  $|\cos x| = -\cos x$ , 所以

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x (-\cos x) dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x d(\sin x) - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x d(\sin x) \\
&= \left[ \frac{2}{5} \sin^{\frac{5}{2}} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[ \frac{2}{5} \sin^{\frac{5}{2}} x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&= \frac{2}{5} - \left( -\frac{2}{5} \right) = \frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

注意 如果忽略  $\cos x$  在  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  上非正, 而按

$$\sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} = \sin^{\frac{3}{2}} x \cos x$$

计算, 将导致错误.

例 4 计算  $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}} dx$ .

解 设  $\sqrt{2x+1} = t$ , 则  $x = \frac{t^2 - 1}{2}$ ,  $dx = t dt$ , 且

当  $x = 0$  时,  $t = 1$ ; 当  $x = 4$  时,  $t = 3$ .

于是

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}} dx &= \int_1^3 \frac{\frac{t^2 - 1}{2} + 2}{t} t dt = \frac{1}{2} \int_1^3 (t^2 + 3) dt \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{t^3}{3} + 3t \right]_1^3 \\
&= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{27}{3} + 9 \right) - \left( \frac{1}{3} + 3 \right) \right] = \frac{22}{3}.
\end{aligned}$$

例 5 证明:

(1) 若  $f(x)$  在  $[-a, a]$  上连续且为偶函数, 则

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

(2) 若  $f(x)$  在  $[-a, a]$  上连续且为奇函数, 则

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

证 因为

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx,$$

对积分  $\int_{-a}^0 f(x) dx$  作代换  $x = -t$ , 则得

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = - \int_a^0 f(-t)dt = \int_0^a f(-t)dt = \int_0^a f(-x)dx.$$

于是

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a f(x)dx &= \int_0^a f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx \\ &= \int_0^a [f(x) + f(-x)]dx.\end{aligned}$$

(1) 若  $f(x)$  为偶函数, 则

$$f(x) + f(-x) = 2f(x),$$

从而

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

(2) 若  $f(x)$  为奇函数, 则

$$f(x) + f(-x) = 0,$$

从而

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

利用例 5 的结论, 常可简化计算偶函数、奇函数在对称于原点的区间上的定积分.

**例 6** 若  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续, 证明

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx;$$

$$(2) \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x)dx, \text{由此计算}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

**证** (1) 设  $x = \frac{\pi}{2} - t$ , 则  $dx = -dt$ , 且

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } t = \frac{\pi}{2}; \text{ 当 } x = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } t = 0.$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right]dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx.\end{aligned}$$

(2) 设  $x = \pi - t$ , 则  $dx = -dt$ , 且

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } t = \pi; \text{ 当 } x = \pi \text{ 时, } t = 0.$$

于是

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi xf(\sin x)dx &= -\int_\pi^0(\pi-t)f[\sin(\pi-t)]dt \\
&= \int_0^\pi(\pi-t)f(\sin t)dt \\
&= \pi \int_0^\pi f(\sin t)dt - \int_0^\pi tf(\sin t)dt \\
&= \pi \int_0^\pi f(\sin x)dx - \int_0^\pi xf(\sin x)dx,
\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x)dx.$$

利用上述结论, 即得

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = -\frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{d(\cos x)}{1 + \cos^2 x} \\
&= -\frac{\pi}{2} [\arctan(\cos x)]_0^\pi \\
&= -\frac{\pi}{2} \left( -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi^2}{4}.
\end{aligned}$$

**例 7** 设  $f(x)$  是连续的周期函数, 周期为  $T$ , 证明:

$$(1) \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx;$$

$$(2) \int_a^{a+nT} f(x)dx = n \int_0^T f(x)dx \quad (n \in \mathbb{N}), \text{由此计算}$$

$$\int_0^{\pi\pi} \sqrt{1 + \sin 2x} dx.$$

**证** (1) 记  $\Phi(a) = \int_a^{a+T} f(x)dx$ , 则  $\Phi'(a) = f(a+T) - f(a) = 0$ , 知

$\Phi(a)$  与  $a$  无关, 因此  $\Phi(a) = \Phi(0)$ , 即

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

$$(2) \int_a^{a+nT} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+kT}^{a+(k+1)T} f(x)dx,$$

由(1)知  $\int_{a+kT}^{a+(k+1)T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$ , 因此

$$\int_a^{a+nT} f(x)dx = n \int_0^T f(x)dx.$$

由于  $\sqrt{1 + \sin 2x}$  是以  $\pi$  为周期的周期函数, 利用上述结论, 有

$$\int_0^{\pi\pi} \sqrt{1 + \sin 2x} dx = n \int_0^\pi \sqrt{1 + \sin 2x} dx$$

$$\begin{aligned}
&= n \int_0^\pi |\sin x + \cos x| dx \\
&= \sqrt{2} n \int_0^\pi |\sin(x + \frac{\pi}{4})| dx \\
&\stackrel{x+\frac{\pi}{4}}{=} \sqrt{2} n \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} |\sin t| dt \\
&= \sqrt{2} n \int_0^\pi |\sin t| dt \\
&= \sqrt{2} n \int_0^\pi \sin t dt \\
&= 2\sqrt{2} n.
\end{aligned}$$

例 8 计算  $\int_0^3 \frac{x^2}{(x^2 - 3x + 3)^2} dx$ .

解  $x^2 - 3x + 3 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ , 令  $x - \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan u$  ( $|u| < \frac{\pi}{2}$ ),

则  $(x^2 - 3x + 3)^2 = \left(\frac{3}{4} \sec^2 u\right)^2 = \frac{9}{16} \sec^4 u$ ,  $dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \sec^2 u du$ . 且

当  $x = 0$  时,  $u = -\frac{\pi}{3}$ ;  $x = 3$  时,  $u = \frac{\pi}{3}$ .

$$\begin{aligned}
\text{于是 } \int_0^3 \frac{x^2}{(x^2 - 3x + 3)^2} dx &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left( \frac{3}{4} \tan^2 u + \frac{3\sqrt{3}}{2} \tan u + \frac{9}{4} \right) \cdot \frac{16}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cos^2 u du \\
&= \frac{8}{3\sqrt{3}} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left( \frac{3}{4} \tan^2 u + \frac{9}{4} \right) \cos^2 u du \\
&= \frac{4}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin^2 u + 3\cos^2 u) du \\
&= \frac{4}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 + \cos 2u) du \\
&= \frac{4}{\sqrt{3}} \left[ 2u + \frac{1}{2} \sin 2u \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{8\pi}{3\sqrt{3}} + 1.
\end{aligned}$$

例 9 设函数

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x^2}, & x \geq 0, \\ \frac{1}{1 + \cos x}, & -\pi < x < 0, \end{cases}$$

计算  $\int_1^4 f(x-2)dx$ .

解 设  $x-2=t$ , 则  $dx=dt$ , 且

当  $x=1$  时,  $t=-1$ ; 当  $x=4$  时,  $t=2$ .

于是

$$\begin{aligned}\int_1^4 f(x-2)dx &= \int_{-1}^2 f(t)dt = \int_{-1}^0 \frac{dt}{1+\cos t} + \int_0^2 te^{-t^2} dt \\&= \left[ \tan \frac{t}{2} \right]_{-1}^0 - \left[ \frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_0^2 \\&= \tan \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-4} + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

## 二、定积分的分部积分法

依据不定积分的分部积分法, 可得

$$\begin{aligned}\int_a^b u(x)v'(x)dx &= \left[ \int u(x)v'(x)dx \right]_a^b \\&= \left[ u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx \right]_a^b \\&= [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx,\end{aligned}$$

简记作

$$\int_a^b uv' dx = [uv]_a^b - \int_a^b vu' dx,$$

或

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du.$$

这就是定积分的分部积分公式. 公式表明原函数已经积出的部分可以先用上、下限代入.

例 10 计算  $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$ .

$$\begin{aligned}\text{解 } \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx &= [\arcsin x]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + [\sqrt{1-x^2}]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.\end{aligned}$$

例 11 计算  $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$ .

解 先用换元法. 令  $\sqrt{x}=t$ , 则  $x=t^2$ ,  $dx=2tdt$ , 且

当  $x=0$  时,  $t=0$ ; 当  $x=1$  时,  $t=1$ .

$$\begin{aligned}
 \text{于是 } \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx &= 2 \int_0^1 t e^t dt = 2 \int_0^1 t d(e^t) \\
 &= 2([te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt) = 2(e - [e^t]_0^1) \\
 &= 2[e - (e - 1)] = 2.
 \end{aligned}$$

例 12 证明定积分公式(见附录Ⅲ积分表公式(147)):

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \left( = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \right) \\
 &= \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为正偶数,} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}, & n \text{ 为大于 1 的正奇数.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{证 } I_n &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d(\cos x) \\
 &= [-\cos x \sin^{n-1} x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx.
 \end{aligned}$$

右端第一项等于零;将第二项里的  $\cos^2 x$  写成  $1 - \sin^2 x$ , 并把积分分成两个, 得

$$\begin{aligned}
 I_n &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \\
 &= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n,
 \end{aligned}$$

由此得

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

这个等式叫做积分  $I_n$  关于下标的递推公式.

如果把  $n$  换成  $n-2$ , 则得

$$I_{n-2} = \frac{n-3}{n-2} I_{n-4}.$$

同样地依次进行下去, 直到  $I_n$  的下标递减到 0 或 1 为止. 于是,

$$\begin{aligned}
 I_{2m} &= \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0, \\
 I_{2m+1} &= \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} I_1 \quad (m=1, 2, \dots),
 \end{aligned}$$

而  $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ ,  $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$ ,

因此

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \cdots \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \cdots \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \quad (m=1, 2, \dots).$$

至于定积分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$  与  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$  相等, 由本节例 6(1) 即可知道, 证毕.

### 习 题 5-3

1. 计算下列定积分:

$$(1) \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) dx;$$

$$(2) \int_{-2}^1 \frac{dx}{(11+5x)^3};$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos^3 \varphi d\varphi;$$

$$(4) \int_0^{\pi} (1 - \sin^3 \theta) d\theta;$$

$$(5) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du;$$

$$(6) \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx;$$

$$(7) \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{8-2y^2} dy;$$

$$(8) \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx;$$

$$(9) \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0);$$

$$(10) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}};$$

$$(11) \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}};$$

$$(12) \int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}};$$

$$(13) \int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}-1};$$

$$(14) \int_0^{\sqrt{2}a} \frac{x dx}{\sqrt{3a^2-x^2}} \quad (a>0);$$

$$(15) \int_0^1 t e^{-\frac{t^2}{2}} dt;$$

$$(16) \int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{1+\ln x}};$$

$$(17) \int_{-2}^0 \frac{(x+2) dx}{x^2+2x+2};$$

$$(18) \int_0^2 \frac{x dx}{(x^2-2x+2)^2};$$

$$(19) \int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x dx;$$

$$(20) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^4 \theta d\theta;$$

$$(21) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$(22) \int_{-5}^5 \frac{x^3 \sin^2 x}{x^4+2x^2+1} dx;$$

$$(23) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos 2x dx;$$

$$(24) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx;$$

$$(25) \int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos 2x} dx;$$

$$(26) \int_0^{2\pi} |\sin(x+1)| dx.$$

2. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 证明

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx.$$

3. 证明:  $\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_{\frac{x}{1-x}}^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$  ( $x > 0$ ).

4. 证明:  $\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ ).

5. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续,  $n \in \mathbb{Z}$ , 证明

$$\int_{\frac{n}{2}\pi}^{\frac{n+1}{2}\pi} f(|\sin x|)dx = \int_{\frac{n}{2}\pi}^{\frac{n+1}{2}\pi} f(|\cos x|)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx.$$

6. 若  $f(t)$  是连续的奇函数, 证明  $\int_0^x f(t)dt$  是偶函数; 若  $f(t)$  是连续的偶函数, 证明  $\int_0^x f(t)dt$  是奇函数.

7. 计算下列定积分

(1)  $\int_0^1 xe^{-x}dx;$

(2)  $\int_1^e x \ln x dx;$

(3)  $\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} t \sin \omega t dt$  ( $\omega$  为常数);

(4)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx;$

(5)  $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx;$

(6)  $\int_0^1 x \arctan x dx;$

(7)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx;$

(8)  $\int_1^2 x \log_2 x dx;$

(9)  $\int_0^{\pi} (x \sin x)^2 dx;$

(10)  $\int_1^e \sin(\ln x) dx;$

(11)  $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx;$

(12)  $\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{m}{2}} dx$  ( $m \in \mathbb{N}^+$ );

(13)  $J_m = \int_0^{\pi} x \sin^m x dx$  ( $m \in \mathbb{N}^+$ ).

## 第四节 反常积分

在一些实际问题中, 常会遇到积分区间为无穷区间, 或者被积函数为无界函数的积分, 它们已经不属于前面所说的定积分了. 因此, 我们对定积分作如下两种推广, 从而形成反常积分的概念.

### 一、无穷限的反常积分

**定义 1** 设函数  $f(x)$  在区间  $[a, +\infty)$  上连续, 取  $t > a$ , 如果极限

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x)dx$$

存在，则称此极限为函数  $f(x)$  在无穷区间  $[a, +\infty)$  上的反常积分，记作

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx, \text{ 即}$$

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx, \quad (1)$$

这时也称反常积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛；如果上述极限不存在，则函数  $f(x)$  在无穷

区间  $[a, +\infty)$  上的反常积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  就没有意义，习惯上称为反常积分

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$  发散，这时记号  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  不再表示数值了。

类似地，设函数  $f(x)$  在区间  $(-\infty, b]$  上连续，取  $t < b$ 。如果极限

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx$$

存在，则称此极限为函数  $f(x)$  在无穷区间  $(-\infty, b]$  上的反常积分，记作

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx, \text{ 即}$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx, \quad (2)$$

这时也称反常积分  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$  收敛；如果上述极限不存在，则称反常积分

$\int_{-\infty}^b f(x) dx$  发散。

设函数  $f(x)$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  上连续，如果反常积分

$$\int_{-\infty}^0 f(x) dx \text{ 和 } \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

都收敛，则称上述两反常积分之和为函数  $f(x)$  在无穷区间  $(-\infty, +\infty)$  上的反

常积分，记作  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ ，即

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 f(x) dx + \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t f(x) dx, \end{aligned} \quad (3)$$

这时也称反常积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  收敛；否则就称反常积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  发散。

上述反常积分统称为无穷限的反常积分。

由上述定义及牛顿-莱布尼茨公式，可得如下结果。

设  $F(x)$  为  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上的一个原函数，若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  存在，则反常

## 积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(a);$$

若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  不存在, 则反常积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  发散.

如果记  $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ ,  $[F(x)]_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$ , 则当  $F(+\infty)$  存在时,

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = [F(x)]_a^{+\infty};$$

当  $F(+\infty)$  不存在时, 反常积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  发散.

类似地, 若在  $(-\infty, b]$  上  $F'(x) = f(x)$ , 则当  $F(-\infty)$  存在时,

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = [F(x)]_{-\infty}^b;$$

当  $F(-\infty)$  不存在时, 反常积分  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$  发散.

若在  $(-\infty, +\infty)$  内  $F'(x) = f(x)$ , 则当  $F(-\infty)$  与  $F(+\infty)$  都存在时,

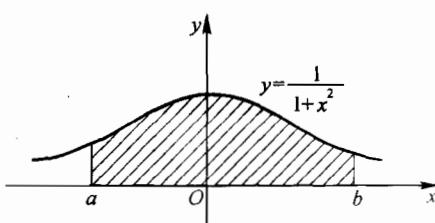
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = [F(x)]_{-\infty}^{+\infty};$$

当  $F(-\infty)$  与  $F(+\infty)$  有一个不存在时, 反常积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  发散.

**例 1** 计算反常积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ .

$$\begin{aligned} \text{解 } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= [\arctan x]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x - \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x \\ &= \frac{\pi}{2} - \left( -\frac{\pi}{2} \right) = \pi. \end{aligned}$$

这个反常积分值的几何意义是: 当  $a \rightarrow -\infty, b \rightarrow +\infty$  时, 虽然图 5-8 中阴影部分向左、右无限延伸, 但其面积却有极限值  $\pi$ . 简单地说, 它是位于曲线  $y = \frac{1}{1+x^2}$  的下方,  $x$  轴上方的图形面积.



**例 2** 计算反常积分  $\int_0^{+\infty} t e^{-pt} dt$ , 其

图 5-8

中  $p$  是常数, 且  $p > 0$ .

$$\begin{aligned} \text{解 } \int_0^{+\infty} t e^{-pt} dt &= \left[ \int t e^{-pt} dt \right]_0^{+\infty} = \left[ -\frac{1}{p} \int t d(e^{-pt}) \right]_0^{+\infty} \\ &= \left[ -\frac{t}{p} e^{-pt} + \frac{1}{p} \int e^{-pt} dt \right]_0^{+\infty} \\ &= \left[ -\frac{t}{p} e^{-pt} \right]_0^{+\infty} - \left[ \frac{1}{p^2} e^{-pt} \right]_0^{+\infty} \\ &= -\frac{1}{p} \lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-pt} - 0 - \frac{1}{p^2} (0 - 1) = \frac{1}{p^2}. \end{aligned}$$

注意, 上式中的极限  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-pt}$  是未定式, 可用洛必达法则确定.

例 3 证明反常积分  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$  ( $a > 0$ ) 当  $p > 1$  时收敛, 当  $p \leq 1$  时发散.

证 当  $p = 1$  时,

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = [\ln x]_a^{+\infty} = +\infty,$$

当  $p \neq 1$  时,

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \left[ \frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, & p < 1, \\ \frac{a^{1-p}}{p-1}, & p > 1. \end{cases}$$

因此, 当  $p > 1$  时, 这反常积分收敛, 其值为  $\frac{a^{1-p}}{p-1}$ ; 当  $p \leq 1$  时, 这反常积分发散.

## 二、无界函数的反常积分

现在我们把定积分推广到被积函数为无界函数的情形.

如果函数  $f(x)$  在点  $a$  的任一邻域内都无界, 那么点  $a$  称为函数  $f(x)$  的瑕点(也称为无界间断点). 无界函数的反常积分又称为瑕积分.

定义 2 设函数  $f(x)$  在  $(a, b]$  上连续, 点  $a$  为  $f(x)$  的瑕点. 取  $t > a$ , 如果极限

$$\lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

存在, 则称此极限为函数  $f(x)$  在  $(a, b]$  上的反常积分, 仍然记作  $\int_a^b f(x) dx$ , 即

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx. \quad (4)$$

这时也称反常积分  $\int_a^b f(x)dx$  收敛. 如果上述极限不存在, 则称反常积分  $\int_a^b f(x)dx$  发散.

类似地, 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 点  $b$  为  $f(x)$  的瑕点. 取  $t < b$ , 如果极限

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x)dx$$

存在, 则定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x)dx ; \quad (5)$$

否则, 就称反常积分  $\int_a^b f(x)dx$  发散.

设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上除点  $c$  ( $a < c < b$ ) 外连续, 点  $c$  为  $f(x)$  的瑕点. 如果两个反常积分

$$\int_a^c f(x)dx \text{ 与 } \int_c^b f(x)dx$$

都收敛, 则定义

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \\ &= \lim_{t \rightarrow c^-} \int_a^t f(x)dx + \lim_{t \rightarrow c^+} \int_t^b f(x)dx ; \end{aligned} \quad (6)$$

否则, 就称反常积分  $\int_a^b f(x)dx$  发散.

计算无界函数的反常积分, 也可借助于牛顿-莱布尼茨公式.

设  $x = a$  为  $f(x)$  的瑕点, 在  $(a, b]$  上  $F'(x) = f(x)$ , 如果极限  $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$  存在, 则反常积分

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = F(b) - F(a^+);$$

如果  $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$  不存在, 则反常积分  $\int_a^b f(x)dx$  发散.

我们仍用记号  $[F(x)]_a^b$  来表示  $F(b) - F(a^+)$ , 从而形式上仍有

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b .$$

对于  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $b$  为瑕点的反常积分, 也有类似的计算公式, 这里不再详述.

**例 4** 计算反常积分

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (a > 0).$$

解 因为

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = +\infty,$$

所以点  $a$  是瑕点,于是

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \left[ \arcsin \frac{x}{a} \right]_0^a = \lim_{x \rightarrow a^-} \arcsin \frac{x}{a} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

这个反常积分值的几何意义是:位于曲线  $y = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$  之下,  $x$  轴之上, 直线  $x=0$  与  $x=a$  之间的图形面积(图 5-9).

**例 5** 讨论反常积分  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$  的收敛性.

解 被积函数  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  在积分区间  $[-1, 1]$  上除  $x=0$  外连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ .

由于

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} = \left[ -\frac{1}{x} \right]_{-1}^0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( -\frac{1}{x} \right) - 1 = +\infty,$$

即反常积分  $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2}$  发散, 所以反常积分  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$  发散.

**注意** 如果疏忽了  $x=0$  是被积函数的瑕点, 就会得到以下的错误结果:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \left[ -\frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = -1 - 1 = -2.$$

**例 6** 证明反常积分  $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q}$  当  $0 < q < 1$  时收敛; 当  $q \geq 1$  时发散.

**证** 当  $q=1$  时,

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q} &= \int_a^b \frac{dx}{x-a} = [\ln(x-a)]_a^b \\ &= \ln(b-a) - \lim_{x \rightarrow a^+} \ln(x-a) = +\infty. \end{aligned}$$

当  $q \neq 1$  时,

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q} = \left[ \frac{(x-a)^{1-q}}{1-q} \right]_a^b = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & 0 < q < 1, \\ +\infty, & q \geq 1. \end{cases}$$

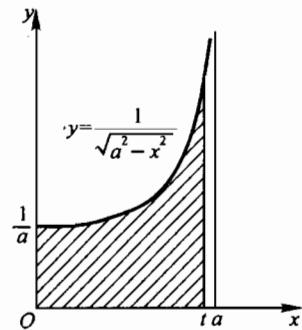


图 5-9

因此,当 $0 < q < 1$ 时,这反常积分收敛,其值为 $\frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}$ ;当 $q \geq 1$ 时,这反常积分发散.

设有反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ ,其中 $f(x)$ 在开区间 $(a,b)$ 内连续, $a$ 可以是 $-\infty$ , $b$ 可以是 $+\infty$ , $a,b$ 也可以是 $f(x)$ 的瑕点.对这样的反常积分,在另加换元函数单调的假定下,可以像定积分一样作换元.

**例 7** 求反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)^3}}$ .

解 这里,积分上限为 $+\infty$ ,且下限 $x=0$ 为被积函数的瑕点.

令 $\sqrt{x}=t$ ,则 $x=t^2$ , $x \rightarrow 0^+$ 时 $t \rightarrow 0$ , $x \rightarrow +\infty$ 时 $t \rightarrow +\infty$ .于是

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)^3}} = \int_0^{+\infty} \frac{2t dt}{t(t^2+1)^{3/2}} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)^{3/2}}.$$

再令 $t = \tan u$ ,取 $u = \arctan t$ , $t=0$ 时 $u=0$ , $t \rightarrow +\infty$ 时 $u \rightarrow \frac{\pi}{2}$ .于是

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)^3}} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 u du}{\sec^3 u} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u du = 2.$$

本例如用变换 $\frac{1}{x}=t$ 或 $\frac{1}{x+1}=t$ ,计算会更简单些,读者可自行解之.

## 习 题 5-4

1. 判定下列各反常积分的收敛性,如果收敛,计算反常积分的值:

$$(1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4};$$

$$(2) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}};$$

$$(3) \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx (a > 0);$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)};$$

$$(5) \int_0^{+\infty} e^{-pt} \sin \omega t dt \quad (p > 0, \omega > 0); \quad (6) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2};$$

$$(7) \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(8) \int_0^2 \frac{dx}{(1-x)^2};$$

$$(9) \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}};$$

$$(10) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{1-(\ln x)^2}}.$$

2. 当 $k$ 为何值时,反常积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 收敛?当 $k$ 为何值时,这反常积分发散?又当 $k$

为何值时,这反常积分取得最小值?

3. 利用递推公式计算反常积分 $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

## \* 第五节 反常积分的审敛法 $\Gamma$ 函数

反常积分的收敛性,可以通过求被积函数的原函数,然后按定义取极限,根据极限的存在与否来判定.本节中我们来建立不通过被积函数的原函数判定反常积分收敛性的判定法.

### 一、无穷限反常积分的审敛法

**定理 1** 设函数  $f(x)$  在区间  $[a, +\infty)$  上连续,且  $f(x) \geq 0$ . 若函数

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

在  $[a, +\infty)$  上有上界,则反常积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛.

事实上,因为  $f(x) \geq 0$ ,  $F(x)$  在  $[a, +\infty)$  上单调增加,又  $F(x)$  在  $[a, +\infty)$  上有上界,故  $F(x)$  在  $[a, +\infty)$  上是单调有界的函数.按照“ $[a, +\infty)$  上的单调有界函数  $F(x)$  必有极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ ”的准则,就可知道极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$$

存在,即反常积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛.

根据定理 1,对于非负函数的无穷限的反常积分,有以下的比较审敛原理.

**定理 2(比较审敛原理)** 设函数  $f(x), g(x)$  在区间  $[a, +\infty)$  上连续.如果  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  ( $a \leq x < +\infty$ ), 并且  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  收敛, 则  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  也收敛; 如果  $0 \leq g(x) \leq f(x)$  ( $a \leq x < +\infty$ ), 并且  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  发散, 则  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  也发散.

**证** 设  $a < t < +\infty$ , 由  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  及  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  收敛, 得

$$\int_a^t f(x) dx \leq \int_a^t g(x) dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx.$$

这表明作为积分上限  $t$  的函数

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx$$

在  $[a, +\infty)$  上有上界.由定理 1 即知反常积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛.

如果  $0 \leq g(x) \leq f(x)$ , 且  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  发散, 则  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  必定发散. 因为如果  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 由定理的第一部分即知  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  也收敛, 这与假设相矛盾. 证毕.

由上节例 3 知道, 反常积分  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$  ( $a > 0$ ) 当  $p > 1$  时收敛; 当  $p \leq 1$  时发散. 因此, 取  $g(x) = \frac{A}{x^p}$  ( $A > 0$ ), 立即可得下面的反常积分的比较审敛法.

**定理 3(比较审敛法 1)** 设函数  $f(x)$  在区间  $[a, +\infty)$  ( $a > 0$ ) 上连续, 且  $f(x) \geq 0$ . 如果存在常数  $M > 0$  及  $p > 1$ , 使得  $f(x) \leq \frac{M}{x^p}$  ( $a \leq x < +\infty$ ), 则反常积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛; 如果存在常数  $N > 0$ , 使得  $f(x) \geq \frac{N}{x^p}$  ( $a \leq x < +\infty$ ), 则反常积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  发散.

**例 1** 判定反常积分  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4 + 1}}$  的收敛性.

解 由于

$$0 < \frac{1}{\sqrt[3]{x^4 + 1}} < \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = \frac{1}{x^{4/3}},$$

根据比较审敛法 1, 这个反常积分收敛.

以比较审敛法 1 为基础, 可以得到在应用上较为方便的极限审敛法.

**定理 4(极限审敛法 1)** 设函数  $f(x)$  在区间  $[a, +\infty)$  上连续, 且  $f(x) \geq 0$ . 如果存在常数  $p > 1$ , 使得  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x)$  存在, 则反常积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛; 如果  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = d > 0$  (或  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = +\infty$ ), 则反常积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  发散.

证 设  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x) = c$  ( $p > 1$ ). 根据极限的定义, 存在充分大的  $x_1$  ( $x_1 \geq a, x_1 > 0$ ), 当  $x > x_1$  时, 必有

$$|x^p f(x) - c| < 1,$$

由此得  $0 \leq x^p f(x) < 1 + c$ .

令  $1 + c = M > 0$ , 于是在区间  $x_1 < x < +\infty$  内不等式  $0 \leq f(x) < \frac{M}{x^p}$  成立. 由比较审敛法 1 知  $\int_{x_1}^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 而

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ \int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^t f(x) dx \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_a^{x_1} f(x) dx + \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{x_1}^t f(x) dx \\
 &= \int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{+\infty} f(x) dx,
 \end{aligned}$$

故反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

收敛.

如果  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = d > 0$  (或  $+\infty$ ), 则存在充分大的  $x_1$ , 当  $x > x_1$  时, 必有

$$|xf(x) - d| < \frac{d}{2},$$

由此得

$$xf(x) > \frac{d}{2}.$$

(当  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = +\infty$  时, 可取任意正数作为  $d$ .) 令  $\frac{d}{2} = N > 0$ . 于是在区间

$x_1 < x < +\infty$  内不等式  $f(x) \geq \frac{N}{x}$  成立. 根据比较审敛法 1 知  $\int_{x_1}^{+\infty} f(x) dx$  发散,

从而反常积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  发散.

**例 2** 判定反常积分  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{1+x^2}}$  的收敛性.

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \frac{1}{x \sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}} = 1,$$

根据极限审敛法 1, 知所给反常积分收敛.

**例 3** 判定反常积分  $\int_1^{+\infty} \frac{x^{3/2}}{1+x^2} dx$  的收敛性.

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{x^{3/2}}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \sqrt{x}}{1+x^2} = +\infty,$$

根据极限审敛法 1, 知所给反常积分发散.

**例 4** 判定反常积分  $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} dx$  的收敛性.

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x \mp \frac{\pi}{2},$$

根据极限审敛法 1, 知所给反常积分发散.

假定反常积分的被积函数在所讨论的区间上可取正值也可取负值. 对于这类反常积分的收敛性, 有如下的结论.

**定理 5** 设函数  $f(x)$  在区间  $[a, +\infty)$  上连续. 如果反常积分

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

收敛, 则反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

也收敛.

**证** 令  $\varphi(x) = \frac{1}{2}(f(x) + |f(x)|)$ . 于是  $\varphi(x) \geq 0$ , 且  $\varphi(x) \leq |f(x)|$ , 而  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  收敛, 由比较审敛原理即知  $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$  也收敛. 但  $f(x) = 2\varphi(x) - |f(x)|$ , 因此

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = 2 \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx - \int_a^{+\infty} |f(x)| dx.$$

可见反常积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  是两个收敛的反常积分的差, 因此它是收敛的. 证毕.

通常称满足定理 5 条件的反常积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  绝对收敛. 于是, 定理 5 可简单地表达为: 绝对收敛的反常积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  必定收敛.

**例 5** 判定反常积分  $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx$  ( $a, b$  都是常数, 且  $a > 0$ ) 的收敛性.

**解** 因为  $|e^{-ax} \sin bx| \leq e^{-ax}$ , 而  $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx$  收敛, 根据比较审敛原理, 反常积分  $\int_0^{+\infty} |e^{-ax} \sin bx| dx$  收敛. 由定理 5 可知所给反常积分收敛.

## 二、无界函数的反常积分的审敛法

对于无界函数的反常积分, 也有类似的审敛法.

由上节例 6 知道, 反常积分

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q}$$

当  $q < 1$  时收敛, 当  $q \geq 1$  时发散. 于是, 与定理 3、定理 4 类似可得如下两个审敛

法：

**定理 6(比较审敛法 2)** 设函数  $f(x)$  在区间  $(a, b]$  上连续, 且  $f(x) \geq 0$ ,  $x = a$  为  $f(x)$  的瑕点. 如果存在常数  $M > 0$  及  $q < 1$ , 使得

$$f(x) \leq \frac{M}{(x-a)^q} \quad (a < x \leq b),$$

则反常积分  $\int_a^b f(x) dx$  收敛; 如果存在常数  $N > 0$ , 使得

$$f(x) \geq \frac{N}{x-a} \quad (a < x \leq b),$$

则反常积分  $\int_a^b f(x) dx$  发散.

**定理 7(极限审敛法 2)** 设函数  $f(x)$  在区间  $(a, b]$  上连续, 且  $f(x) \geq 0$ ,  $x = a$  为  $f(x)$  的瑕点. 如果存在常数  $0 < q < 1$ , 使得

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (x-a)^q f(x)$$

存在, 则反常积分  $\int_a^b f(x) dx$  收敛; 如果

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (x-a)^q f(x) = d > 0 \quad (\text{或} \lim_{x \rightarrow a^+} (x-a)^q f(x) = +\infty),$$

则反常积分  $\int_a^b f(x) dx$  发散.

**例 6** 判定反常积分  $\int_1^3 \frac{dx}{\ln x}$  的收敛性.

解 这里  $x=1$  是被积函数的瑕点. 由洛必达法则知

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \frac{1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1 > 0,$$

根据极限审敛法 2, 所给反常积分发散.

**例 7** 判定椭圆积分

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} \quad (k^2 < 1)$$

的收敛性.

解 这里  $x=1$  是被积函数的瑕点. 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-k^2 x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}}, \end{aligned}$$

根据极限审敛法 2, 所给反常积分收敛.

对于无界函数的反常积分,当被积函数在所讨论的区间上可取正值也可取负值时,有与定理 5 相类似的结论,在此不再详述.

**例 8** 判定反常积分  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} dx$  的收敛性.

解 因为  $\left| \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ , 而  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$  收敛, 根据比较审敛原理, 反常积分  $\int_0^1 \left| \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} \right| dx$  收敛, 从而反常积分  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} dx$  也收敛.

### 三、 $\Gamma$ 函数

下面介绍在理论上和应用上都有重要意义的  $\Gamma$  函数. 这函数的定义是

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad (s > 0). \quad (1)$$

首先讨论(1)式右端积分的收敛性问题. 这个积分的积分区间为无穷, 又当  $s-1 < 0$  时  $x=0$  是被积函数的瑕点. 为此, 分别讨论下列两个积分

$$I_1 = \int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx, \quad I_2 = \int_1^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

的收敛性.

先讨论  $I_1$ . 当  $s \geq 1$  时,  $I_1$  是定积分; 当  $0 < s < 1$  时, 因为

$$e^{-x} \cdot x^{s-1} = \frac{1}{x^{1-s}} \cdot \frac{1}{e^x} < \frac{1}{x^{1-s}},$$

而  $1-s < 1$ , 根据比较审敛法 2, 反常积分  $I_1$  收敛.

再讨论  $I_2$ . 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot (e^{-x} x^{s-1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{s+1}}{e^x} = 0,$$

根据极限审敛法 1,  $I_2$  也收敛.

由以上讨论即得反常积分  $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$  对  $s > 0$  均收敛.  $\Gamma$  函数的图形如图 5-10 所示.

其次讨论  $\Gamma$  函数的几个重要性质.

**1. 递推公式**  $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$  ( $s > 0$ ).

**证** 应用分部积分法, 有

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^s dx = - \int_0^{+\infty} x^s d(e^{-x})$$

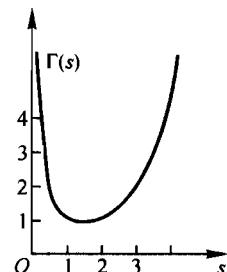


图 5-10

$$= [-x^s e^{-x}]_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \\ = s \Gamma(s),$$

其中  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^s e^{-x} = 0$  可由洛必达法则求得.

$$\text{显然, } \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1.$$

反复运用递推公式,便有

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1,$$

$$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2!,$$

$$\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3!,$$

.....

一般的,对任何正整数  $n$ ,有

$$\Gamma(n+1) = n!$$

所以,我们可以把  $\Gamma$  函数看成是阶乘的推广.

2. 当  $s \rightarrow 0^+$  时,  $\Gamma(s) \rightarrow +\infty$ .

证 因为

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}, \quad \Gamma(1) = 1,$$

所以当  $s \rightarrow 0^+$  时,  $\Gamma(s) \rightarrow +\infty$ .<sup>①</sup>

$$3. \quad \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s} \quad (0 < s < 1).$$

这个公式称为余元公式,在此我们不作证明.

当  $s = \frac{1}{2}$  时,由余元公式可得

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

4. 在  $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$  中,作代换  $x = u^2$ ,有

$$\Gamma(s) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^{2s-1} du. \quad (2)$$

再令  $2s-1=t$  或  $s=\frac{1+t}{2}$ ,即有

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^t du = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1+t}{2}\right) \quad (t > -1).$$

上式左端是应用上常见的积分,它的值可以通过上式用  $\Gamma$  函数计算出来.

①  $\Gamma$  函数在  $s > 0$  时连续.

在(2)中,令  $s = \frac{1}{2}$ ,得

$$2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

从而

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

上式左端的积分是在概率论中常用的积分.

### \*习题 5-5

1. 判定下列反常积分的收敛性:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx;$$

$$(2) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt[3]{x^2 + 1}};$$

$$(3) \int_1^{+\infty} \sin \frac{1}{x^2} dx;$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x |\sin x|};$$

$$(5) \int_1^{+\infty} \frac{x \arctan x}{1 + x^3} dx;$$

$$(6) \int_1^2 \frac{dx}{(\ln x)^3};$$

$$(7) \int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt[3]{1 - x^4}} dx;$$

$$(8) \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}}.$$

2. 设反常积分  $\int_1^{+\infty} f^2(x) dx$  收敛. 证明反常积分  $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$  绝对收敛.

3. 用  $\Gamma$  函数表示下列积分,并指出这些积分的收敛范围:

$$(1) \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx \quad (n > 0); \quad (2) \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^n dx;$$

$$(3) \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^n} dx \quad (n \neq 0).$$

4. 证明  $\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2^k} \sqrt{\pi}$ , 其中  $k \in \mathbb{N}^+$ .

5. 证明以下各式(其中  $n \in \mathbb{N}^+$ ):

$$(1) 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n = 2^n \Gamma(n+1); \quad (2) 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) = \frac{\Gamma(2n)}{2^{n-1} \Gamma(n)};$$

$$(3) \sqrt{\pi} \Gamma(2n) = 2^{2n-1} \Gamma(n) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \text{(勒让德(Legendre)倍量公式).}$$

### 总习题五

1. 填空:

(1) 函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积的\_\_\_\_\_条件, 而  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积的\_\_\_\_\_条件;

(2) 对  $[a, +\infty)$  上非负、连续的函数  $f(x)$ , 它的变上限积分  $\int_a^x f(t) dt$  在  $[a, +\infty)$  上有界是反常积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛的\_\_\_\_\_条件;

(3) 绝对收敛的反常积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  一定\_\_\_\_\_;

(4) 函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有定义且  $|f(x)|$  在  $[a, b]$  上可积, 此时积分  $\int_a^b f(x) dx$  \_\_\_\_\_存在.

2. 回答下列问题:

(1) 设函数  $f(x)$  及  $g(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 且  $f(x) \geq g(x)$ , 那么  $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$  在几何上表示什么?

(2) 设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 且  $f(x) \geq 0$ , 那么  $\int_a^b \pi f^2(x) dx$  在几何上表示什么?

(3) 如果在时刻  $t$  以  $\varphi(t)$  的流量(单位时间内流过的流体的体积或质量)向一水池注水, 那么  $\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) dt$  表示什么?

(4) 如果某国人口增长的速率为  $u(t)$ , 那么  $\int_{T_1}^{T_2} u(t) dt$  表示什么?

(5) 如果一公司经营某种产品的边际利润函数为  $P'(x)$ , 那么  $\int_{1000}^{2000} P'(x) dx$  表示什么?

3. 利用定积分的定义计算下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \frac{i}{n}}; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} \quad (p > 0).$$

4. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x}{x-a} \int_a^x f(t) dt, \text{ 其中 } f(x) \text{ 连续}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

5. 下列计算是否正确, 试说明理由:

$$(1) \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = - \int_{-1}^1 \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \left[ -\arctan \frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = -\frac{\pi}{2};$$

$$(2) \text{因为 } \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \int_{-1}^1 \frac{dt}{t^2 + t + 1},$$

所以  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 + x + 1} = 0.$

$$(3) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \frac{x}{1+x^2} dx = 0.$$

6. 设  $x > 0$ , 证明

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

7. 设  $p > 0$ , 证明

$$\frac{p}{p+1} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^p} < 1.$$

8. 设  $f(x), g(x)$  在区间  $[a, b]$  上均连续, 证明:

$$(1) \left( \int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx \quad (\text{柯西-施瓦茨不等式});$$

$$(2) \left( \int_a^b [f(x) + g(x)]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \int_a^b f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_a^b g^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{闵可夫斯基不等式}).$$

9. 设  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 且  $f(x) > 0$ . 证明

$$\int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geq (b-a)^2.$$

10. 计算下列积分:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx; \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx;$$

$$(3) \int_0^a \frac{dx}{x + \sqrt{a^2 - x^2}} \quad (a > 0); \quad (4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin 2x} dx;$$

$$(5) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \cos^2 x}; \quad (6) \int_0^{\pi} x \sqrt{\cos^2 x - \cos^4 x} dx;$$

$$(7) \int_0^{\pi} x^2 + \cos x + dx; \quad (8) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^{x+1} + e^{3-x}};$$

$$(9) \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x^2 - x|}}; \quad (10) \int_0^x \max\{t^3, t^2, 1\} dt.$$

11. 设  $f(x)$  为连续函数, 证明

$$\int_0^x f(t)(x-t) dt = \int_0^x \left( \int_0^t f(u) du \right) dt.$$

12. 设  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 且  $f(x) > 0$ ,

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + \int_b^x \frac{dt}{f(t)}, \quad x \in [a, b].$$

证明:

$$(1) F'(x) \geq 2;$$

(2) 方程  $F(x) = 0$  在区间  $(a, b)$  内有且仅有一个根.

13. 求  $\int_0^2 f(x-1) dx$ , 其中

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & x \geq 0, \\ \frac{1}{1+e^x}, & x < 0. \end{cases}$$

14. 设  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续,  $g(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续且不变号. 证明至少存在一

点  $\xi \in [a, b]$ , 使下式成立

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx \quad (\text{积分第一中值定理}).$$

\* 15. 证明:  $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx = \frac{n-1}{2} \int_0^{+\infty} x^{n-2} e^{-x^2} dx \quad (n > 1)$ , 并用它证明:

$$\int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \Gamma(n+1) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

\* 16. 判定下列反常积分的收敛性:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}} dx;$$

$$(2) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}};$$

$$(3) \int_2^{+\infty} \frac{\cos x}{\ln x} dx;$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}.$$

\* 17. 计算下列反常积分:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx;$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} \quad (\alpha \geq 0).$$

解題說明

$\lambda \neq A$

$\lambda \neq 0$

$\lambda = A$

$\lambda = 0$

求根、換元

求根、換元

# 第六章 定积分的应用

本章中我们将应用前面学过的定积分理论来分析和解决一些几何、物理中的问题，其目的不仅在于建立计算这些几何、物理量的公式，而且更重要的还在于介绍运用元素法将一个量表达成为定积分的分析方法。

## 第一节 定积分的元素法

在定积分的应用中，经常采用所谓元素法。为了说明这种方法，我们先回顾一下第五章中讨论过的曲边梯形的面积问题。

设  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续且  $f(x) \geq 0$ ，求以曲线  $y = f(x)$  为曲边、底为  $[a, b]$  的曲边梯形的面积  $A$ 。把这个面积  $A$  表示为定积分

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

的步骤是：

(1) 用任意一组分点把区间  $[a, b]$  分成长度为  $\Delta x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 的  $n$  个小区间，相应地把曲边梯形分成  $n$  个窄曲边梯形，第  $i$  个窄曲边梯形的面积设为  $\Delta A_i$ ，于是有

$$A = \sum_{i=1}^n \Delta A_i;$$

(2) 计算  $\Delta A_i$  的近似值

$$\Delta A_i \approx f(\xi_i) \Delta x_i \quad (x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i);$$

(3) 求和，得  $A$  的近似值

$$A \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i;$$

(4) 求极限，得

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

在上述问题中我们注意到，所求量（即面积  $A$ ）与区间  $[a, b]$  有关。如果把区间  $[a, b]$  分成许多部分区间，则所求量相应地分成许多部分量（即  $\Delta A_i$ ），而所求量等于所有部分量之和（即  $A = \sum_{i=1}^n \Delta A_i$ ），这一性质称为所求量对于区间  $[a, b]$  具有可加性。此外，以  $f(\xi_i) \Delta x_i$  近似代替部分量  $\Delta A_i$  时，要求它们只相

差一个比  $\Delta x_i$  高阶的无穷小, 以使和式  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$  的极限是  $A$  的精确值, 从而  $A$  可以表示为定积分:

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

在引出  $A$  的积分表达式的四个步骤中, 主要的是第二步, 这一步是要确定  $\Delta A_i$  的近似值  $f(\xi_i) \Delta x_i$ , 使得

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

在实用上, 为了简便起见, 省略下标  $i$ , 用  $\Delta A$  表示任一小区间  $[x, x + dx]$  上的窄曲边梯形的面积, 这样,

$$A = \sum \Delta A.$$

取  $[x, x + dx]$  的左端点  $x$  为  $\xi$ , 以点  $x$  处的函数值  $f(x)$  为高、 $dx$  为底的矩形的面积  $f(x)dx$  为  $\Delta A$  的近似值(如图 6-1 阴影部分所示), 即

$$\Delta A \approx f(x)dx.$$

上式右端  $f(x)dx$  叫做面积元素, 记为  $dA = f(x)dx$ . 于是

$$A \approx \sum f(x)dx,$$

因此

$$A = \lim \sum f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

一般的, 如果某一实际问题中的所求量  $U$  符合下列条件:

(1)  $U$  是与一个变量  $x$  的变化区间  $[a, b]$  有关的量;

(2)  $U$  对于区间  $[a, b]$  具有可加性, 就是说, 如果把区间  $[a, b]$  分成许多部分区间, 则  $U$  相应地分成许多部分量, 而  $U$  等于所有部分量之和;

(3) 部分量  $\Delta U_i$  的近似值可表示为  $f(\xi_i) \Delta x_i$ ; 那么就可考虑用定积分来表达这个量  $U$ . 通常写出这个量  $U$  的积分表达式的步骤是:

1) 根据问题的具体情况, 选取一个变量例如  $x$  为积分变量, 并确定它的变化区间  $[a, b]$ ;

2) 设想把区间  $[a, b]$  分成  $n$  个小区间, 取其中任一小区间并记作  $[x, x + dx]$ , 求出相应于这个小区间的部分量  $\Delta U$  的近似值. 如果  $\Delta U$  能近似地表示为

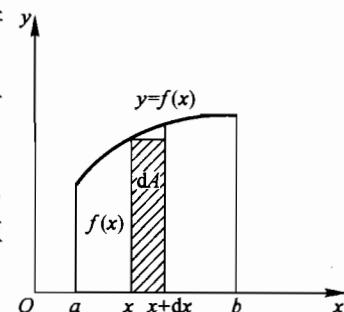


图 6-1

$[a, b]$  上的一个连续函数在  $x$  处的值  $f(x)$  与  $dx$  的乘积<sup>①</sup>, 就把  $f(x)dx$  称为量  $U$  的元素且记作  $dU$ , 即

$$dU = f(x)dx;$$

3) 以所求量  $U$  的元素  $f(x)dx$  为被积表达式, 在区间  $[a, b]$  上作定积分, 得

$$U = \int_a^b f(x)dx.$$

这就是所求量  $U$  的积分表达式.

这个方法通常叫做元素法. 下面两节中我们将应用这个方法来讨论几何、物理中的一些问题.

## 第二节 定积分在几何学上的应用

### 一、平面图形的面积

#### 1. 直角坐标情形

在第五章中我们已经知道, 由曲线  $y = f(x)$  ( $f(x) \geq 0$ ) 及直线  $x = a$ ,  $x = b$  ( $a < b$ ) 与  $x$  轴所围成的曲边梯形的面积  $A$  是定积分

$$A = \int_a^b f(x)dx,$$

其中被积表达式  $f(x)dx$  就是直角坐标下的面积元素, 它表示高为  $f(x)$ 、底为  $dx$  的一个矩形面积.

应用定积分, 不但可以计算曲边梯形面积, 还可以计算一些比较复杂的平面图形的面积.

**例 1** 计算由两条抛物线:  $y^2 = x$ ,  $y = x^2$  所围成的图形的面积.

解 这两条抛物线所围成的图形如图 6-2 所示. 为了具体定出图形的所在范围, 先求出这两条抛物线的交点. 为此, 解方程组

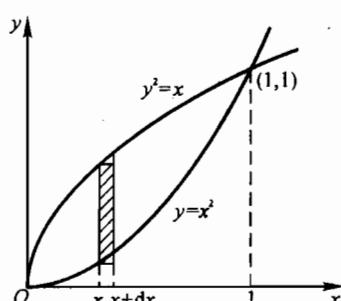


图 6-2

① 这里  $\Delta U$  与  $f(x)dx$  相差一个比  $dx$  高阶的无穷小.

$$\begin{cases} y^2 = x, \\ y = x^2, \end{cases}$$

得到两个解：

$$x = 0, y = 0 \quad \text{及} \quad x = 1, y = 1.$$

即这两抛物线的交点为  $(0,0)$  及  $(1,1)$ , 从而知道这图形在直线  $x=0$  与  $x=1$  之间.

取横坐标  $x$  为积分变量, 它的变化区间为  $[0,1]$ . 相应于  $[0,1]$  上的任一小区间  $[x, x+dx]$  的窄条的面积近似于高为  $\sqrt{x} - x^2$ 、底为  $dx$  的窄矩形的面积, 从而得到面积元素

$$dA = (\sqrt{x} - x^2)dx.$$

以  $(\sqrt{x} - x^2)dx$  为被积表达式, 在闭区间  $[0,1]$  上作定积分, 便得所求面积为

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left[ \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

**例 2** 计算抛物线  $y^2 = 2x$  与直线  $y = x - 4$  所围成的图形的面积.

解 这个图形如图 6-3 所示. 为了定出这图形所在的范围, 先求出所给抛物线和直线的交点.

解方程组

$$\begin{cases} y^2 = 2x, \\ y = x - 4, \end{cases}$$

得交点  $(2, -2)$  和  $(8, 4)$ , 从而知道这图形在直线  $y = -2$  及  $y = 4$  之间.

现在, 选取纵坐标  $y$  为积分变量, 它的变化区间为  $[-2, 4]$  (读者可以思考一下, 取横坐标  $x$  为积分变量, 有什么不方便的地方). 相应于  $[-2, 4]$  上任一小区间  $[y, y+dy]$  的窄条面积近似于高为  $dy$ 、底为  $(y+4) - \frac{1}{2}y^2$  的窄矩形的面积, 从而得到面积元素

$$dA = \left( y + 4 - \frac{1}{2}y^2 \right)dy.$$

以  $\left( y + 4 - \frac{1}{2}y^2 \right)dy$  为被积表达式, 在闭区间  $[-2, 4]$  上作定积分, 便得所求的面积为

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^4 \left( y + 4 - \frac{1}{2}y^2 \right)dy \\ &= \left[ \frac{y^2}{2} + 4y - \frac{y^3}{6} \right]_{-2}^4 \\ &= 18. \end{aligned}$$

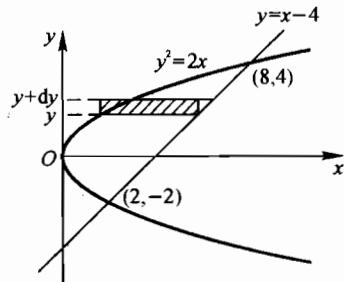


图 6-3

由例 2 可以看到, 积分变量选得适当, 可使计算方便.

**例 3** 求椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  所围成的图形的面积.

**解** 这椭圆关于两坐标轴都对称(图 6-4), 所以椭圆所围成的图形的面积为

$$A = 4A_1,$$

其中  $A_1$  为该椭圆在第一象限部分与两坐标轴所围图形的面积, 因此

$$A = 4A_1 = 4 \int_0^a y dx.$$

利用椭圆的参数方程

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t \end{cases} \quad \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

图 6-4

应用定积分换元法, 令  $x = a \cos t$ , 则

$$y = b \sin t, \quad dx = -a \sin t dt.$$

当  $x$  由 0 变到  $a$  时,  $t$  由  $\frac{\pi}{2}$  变到 0, 所以

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_{\pi/2}^0 b \sin t (-a \sin t) dt = -4ab \int_{\pi/2}^0 \sin^2 t dt \\ &= 4ab \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = 4ab \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi ab. \end{aligned}$$

当  $a = b$  时, 就得到大家所熟悉的圆面积的公式  $A = \pi a^2$ .

## 2. 极坐标情形

某些平面图形, 用极坐标来计算它们的面积比较方便.

设由曲线  $\rho = \varphi(\theta)$  及射线  $\theta = \alpha, \theta = \beta$

围成一图形(简称为曲边扇形), 现在要计算它的面积(图 6-5). 这里,  $\varphi(\theta)$  在  $[\alpha, \beta]$  上连续, 且  $\varphi(\theta) \geqslant 0$ .

由于当  $\theta$  在  $[\alpha, \beta]$  上变动时, 极径  $\rho = \varphi(\theta)$  也随之变动, 因此所求图形的面积不能直接

利用扇形面积的公式  $A = \frac{1}{2} R^2 \theta$  来计算.

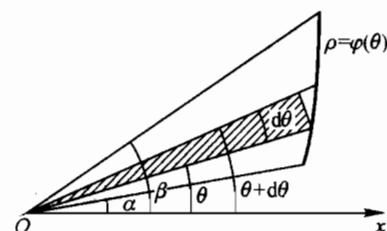


图 6-5

取极角  $\theta$  为积分变量, 它的变化区间为  $[\alpha, \beta]$ . 相应于任一小区间  $[\theta, \theta + d\theta]$  的窄曲边扇形的面积可以用半径为  $\rho = \varphi(\theta)$ 、中心角为  $d\theta$  的扇形的面积来近似代替, 从而得到这窄曲边扇形面积的近似值, 即曲边扇形的面积元素

$$dA = \frac{1}{2} [\varphi(\theta)]^2 d\theta.$$

以  $\frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2 d\theta$  为被积表达式, 在闭区间  $[\alpha, \beta]$  上作定积分, 便得所求曲边扇形的面积为

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} [\varphi(\theta)]^2 d\theta.$$

#### 例 4 计算阿基米德螺线

$$\rho = a\theta \quad (a > 0)$$

上相当于  $\theta$  从 0 变到  $2\pi$  的一段弧与极轴所围成的图形(图 6-6)的面积.

解 在指定的这段螺线上,  $\theta$  的变化区间为  $[0, 2\pi]$ . 相应于  $[0, 2\pi]$  上任一小区间  $[\theta, \theta + d\theta]$  的窄曲边扇形的面积近似于半径为  $a\theta$ 、中心角为  $d\theta$  的圆扇形的面积. 从而得到面积元素

$$dA = \frac{1}{2}(a\theta)^2 d\theta.$$

于是所求面积为

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{2} \theta^2 d\theta = \frac{a^2}{2} \left[ \frac{\theta^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{4}{3} a^2 \pi^3.$$

#### 例 5 计算心形线

$$\rho = a(1 + \cos \theta) \quad (a > 0)$$

所围成的图形的面积.

解 心形线所围成的图形如图 6-7 所示. 这个图形对称于极轴, 因此所求图形的面积  $A$  是极轴以上部分图形面积  $A_1$  的两倍.

对于极轴以上部分的图形,  $\theta$  的变化区间为  $[0, \pi]$ . 相应于  $[0, \pi]$  上任一小区间  $[\theta, \theta + d\theta]$  的窄曲边扇形的面积近似于半径为  $a(1 + \cos \theta)$ 、中心角为  $d\theta$  的圆扇形的面积. 从而得到面积元素

$$dA = \frac{1}{2} a^2 (1 + \cos \theta)^2 d\theta,$$

于是

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} a^2 (1 + \cos \theta)^2 d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi} (1 + 2\cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi} \left( \frac{3}{2} + 2\cos \theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta \right) d\theta \end{aligned}$$

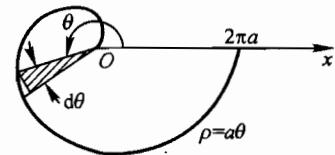


图 6-6

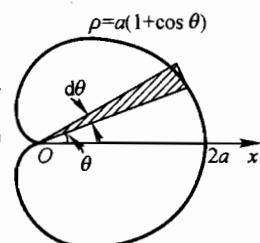


图 6-7

$$= \frac{a^2}{2} \left[ \frac{3}{2}\theta + 2\sin \theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^\pi = \frac{3}{4}\pi a^2,$$

因而所求面积为

$$A = 2A_1 = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

## 二、体积

### 1. 旋转体的体积

旋转体就是由一个平面图形绕这平面内一条直线旋转一周而成的立体. 这直线叫做旋转轴. 圆柱、圆锥、圆台、球体可以分别看成是由矩形绕它的一条边、直角三角形绕它的直角边、直角梯形绕它的直角腰、半圆绕它的直径旋转一周而成的立体, 所以它们都是旋转体.

上述旋转体都可以看作是由连续曲线  $y=f(x)$ 、直线  $x=a$ 、 $x=b$  及  $x$  轴所围成的曲边梯形绕  $x$  轴旋转一周而成的立体. 现在我们考虑用定积分来计算这种旋转体的体积.

取横坐标  $x$  为积分变量, 它的变化区间为  $[a, b]$ . 相应于  $[a, b]$  上的任一小区间  $[x, x+dx]$  的窄曲边梯形绕  $x$  轴旋转而成的薄片的体积近似于以  $f(x)$  为底半径、 $dx$  为高的扁圆柱体的体积(图 6-8), 即体积元素

$$dV = \pi[f(x)]^2 dx.$$

以  $\pi[f(x)]^2 dx$  为被积表达式, 在闭区间  $[a, b]$  上作定积分, 便得所求旋转体体积为

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx.$$

**例 6** 连接坐标原点  $O$  及点  $P(h, r)$  的直线、直线  $x=h$  及  $x$  轴围成一个直角三角形(图 6-9). 将它绕  $x$  轴旋转一周构成一个底半径为  $r$ 、高为  $h$  的圆锥体. 计算这圆锥体的体积.

解 过原点  $O$  及点  $P(h, r)$  的直线方程为

$$y = \frac{r}{h}x.$$

取横坐标  $x$  为积分变量, 它的变化区间为  $[0, h]$ . 圆锥体中相应于  $[0, h]$  上

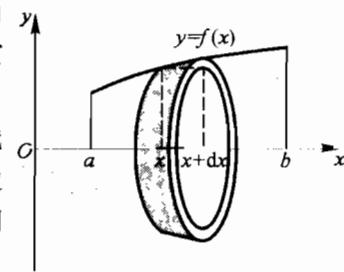


图 6-8

任一小区间  $[x, x+dx]$  的薄片的体积近似于底半径为  $\frac{r}{h}x$ 、高为  $dx$  的扁圆柱体的体积, 即体积元素

$$dV = \pi \left[ \frac{r}{h}x \right]^2 dx.$$

于是所求圆锥体的体积为

$$V = \int_0^h \pi \left( \frac{r}{h}x \right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

### 例 7 计算由椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

所围成的图形绕  $x$  轴旋转一周而成的旋转体(叫做旋转椭球体)的体积.

解 这个旋转椭球体也可以看作是由半个椭圆

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

及  $x$  轴围成的图形绕  $x$  轴旋转一周而成的立体.

取  $x$  为积分变量, 它的变化区间为  $[-a, a]$ . 旋转椭球体中相应于  $[-a, a]$  上任一小区间  $[x, x+dx]$  的薄片的体积, 近似于底半径为  $\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ 、高为  $dx$  的扁圆柱体的体积(图 6-10), 即体积元素

$$dV = \frac{\pi b^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx.$$

于是所求旋转椭球体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^a \pi \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx \\ &= \pi \frac{b^2}{a^2} \left[ a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^a = \frac{4}{3} \pi a b^2. \end{aligned}$$

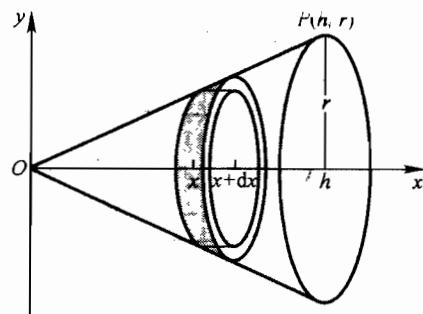


图 6-9

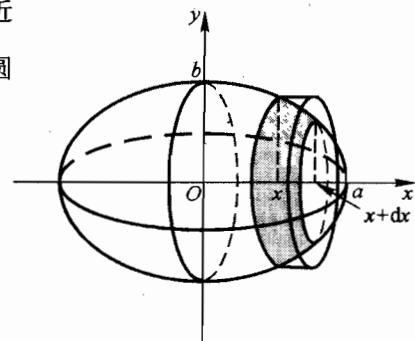


图 6-10

当  $a = b$  时, 旋转椭球体就成为半径为  $a$  的球体, 它的体积为  $\frac{4}{3}\pi a^3$ .

用与上面类似的方法可以推出: 由曲线  $x = \varphi(y)$ 、直线  $y=c$ 、 $y=d$  ( $c < d$ ) 与  $y$  轴所围成的曲边梯形, 绕  $y$  轴旋转一周而成的旋转体(图 6-11)的体积为

$$V = \pi \int_c^d [\varphi(y)]^2 dy.$$

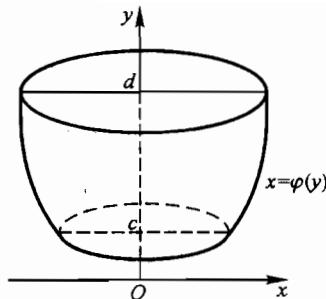


图 6-11

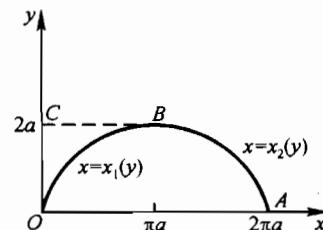


图 6-12

**例 8** 计算由摆线  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  相应于  $0 \leq t \leq 2\pi$  的一拱, 直线  $y = 0$  所围成的图形分别绕  $x$  轴、 $y$  轴旋转而成的旋转体的体积.

**解** 按旋转体的体积公式, 所述图形绕  $x$  轴旋转而成的旋转体的体积为

$$\begin{aligned} V_x &= \int_0^{2\pi a} \pi y^2(x) dx = \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 \cdot a (1 - \cos t) dt \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt = 5\pi^2 a^3. \end{aligned}$$

所述图形绕  $y$  轴旋转而成的旋转体的体积可看成平面图形  $OABC$  与  $OBC$  (图 6-12) 分别绕  $y$  轴旋转而成的旋转体的体积之差. 因此所求的体积为

$$\begin{aligned} V_y &= \int_0^{2a} \pi x_2^2(y) dy - \int_0^{2a} \pi x_1^2(y) dy \\ &= \pi \int_{2\pi}^{\pi} a^2 (t - \sin t)^2 \cdot a \sin t dt - \pi \int_0^{\pi} a^2 (t - \sin t)^2 \cdot a \sin t dt \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t)^2 \sin t dt = 6\pi^3 a^3. \end{aligned}$$

## 2. 平行截面面积为已知的立体的体积

从计算旋转体体积的过程中可以看出: 如果一个立体不是旋转体, 但却知道该立体上垂直于一定轴的各个截面的面积, 那么, 这个立体的体积也可以用定积分来计算.

如图 6-13 所示, 取上述定轴为  $x$  轴, 并设该立体在过点  $x = a$ 、 $x = b$  且垂直于  $x$  轴的两个平面之间. 以  $A(x)$  表示过点  $x$  且垂直于  $x$  轴的截面面积. 假定  $A(x)$  为  $x$  的已知的连续函数. 这时, 取  $x$  为积分变量, 它的变化区间为  $[a, b]$ ; 立体中相应于  $[a, b]$  上任一小区间  $[x, x + dx]$  的一薄片的体积, 近似于底面积为  $A(x)$ 、高为  $dx$  的扁柱体的体积, 即体积元素

$$dV = A(x)dx.$$

以  $A(x)dx$  为被积表达式, 在闭区间  $[a, b]$  上作定积分, 便得所求立体的体积

$$V = \int_a^b A(x)dx.$$

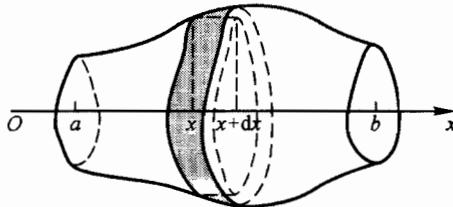


图 6-13

**例 9** 一平面经过半径为  $R$  的圆柱体的底圆中心, 并与底面交成角  $\alpha$  (图 6-14). 计算这平面截圆柱体所得立体的体积.

解 取这平面与圆柱体的底面的交线为  $x$  轴, 底面上过圆心且垂直于  $x$  轴的直线为  $y$  轴. 那么, 底圆的方程为  $x^2 + y^2 = R^2$ . 立体中过  $x$  轴上的点  $x$  且垂直于  $x$  轴的截面是一个直角三角形. 它的两条直角边的长分别为  $y$  及  $y \tan \alpha$ , 即  $\sqrt{R^2 - x^2}$  及  $\sqrt{R^2 - x^2} \tan \alpha$ . 因而截面积为  $A(x) = \frac{1}{2}(R^2 - x^2)\tan \alpha$ ,

于是所求立体体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_{-R}^R \frac{1}{2}(R^2 - x^2)\tan \alpha dx = \frac{1}{2}\tan \alpha \left[ R^2 x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-R}^R \\ &= \frac{2}{3}R^3 \tan \alpha. \end{aligned}$$

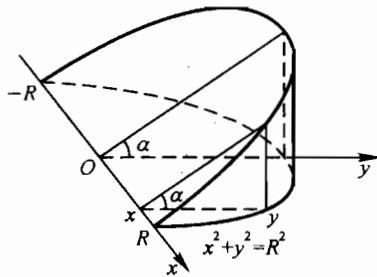


图 6-14

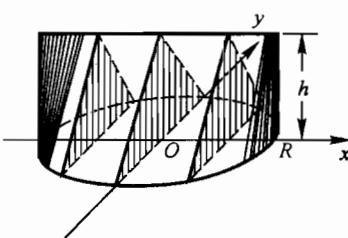


图 6-15

**例 10** 求以半径为  $R$  的圆为底、平行且等于底圆直径的线段为顶、高为  $h$  的正劈锥体的体积.

解 取底圆所在的平面为  $xOy$  平面, 圆心  $O$  为原点, 并使  $x$  轴与正劈锥的顶平行(图 6-15). 底圆的方程为  $x^2 + y^2 = R^2$ . 过  $x$  轴上的点  $x$  ( $-R \leq x \leq R$ ) 作垂直于  $x$  轴的平面, 截正劈锥体得等腰三角形. 这截面的面积为

$$A(x) = h \cdot y = h \sqrt{R^2 - x^2},$$

于是所求正劈锥体的体积为

$$V = \int_{-R}^R A(x) dx = h \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx \\ = 2R^2 h \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi R^2 h}{2}.$$

由此可知正劈锥体的体积等于同底同高的圆柱体体积的一半.

### 三、平面曲线的弧长

我们知道,圆的周长可以利用圆的内接正多边形的周长当边数无限增多时的极限来确定.现在用类似的方法来建立平面的连续曲线弧长的概念,从而应用定积分来计算弧长.

设  $A, B$  是曲线弧的两个端点.在弧  $\widehat{AB}$  上依次任取分点  $A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_{i-1}, M_i, \dots, M_{n-1}, M_n = B$ , 并依次连接相邻的分点得一折线(图 6-16).当分点的数目无限增加且每个小段  $\widehat{M_{i-1}M_i}$  都缩向一点时,如果此折线的长  $\sum_{i=1}^n |M_{i-1}M_i|$  的极限存在,则称此极限为曲线弧  $\widehat{AB}$  的弧长,并称此曲线弧  $\widehat{AB}$  是可求长的.

对光滑的曲线弧(参看第 171 页上的脚注),有如下结论:

**定理 光滑曲线弧是可求长的.**

这个定理我们不加证明.由于光滑曲线弧是可求长的,故可应用定积分来计算弧长.下面我们利用定积分的元素法来讨论平面光滑曲线弧长的计算公式.

设曲线弧由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

给出,其中  $\varphi(t), \psi(t)$  在  $[\alpha, \beta]$  上具有连续导数,且  $\varphi'(t), \psi'(t)$  不同时为零.现在来计算这曲线弧的长度.

取参数  $t$  为积分变量,它的变化区间为  $[\alpha, \beta]$ .相应于  $[\alpha, \beta]$  上任一小区间  $[t, t + dt]$  的小弧段的长度  $\Delta s$  近似等于对应的弦的长度  $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ ,因为

$$\Delta x = \varphi(t + dt) - \varphi(t) \approx dx = \varphi'(t)dt,$$

$$\Delta y = \psi(t + dt) - \psi(t) \approx dy = \psi'(t)dt,$$

所以,  $\Delta s$  的近似值(弧微分)即弧长元素为

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\varphi'^2(t)(dt)^2 + \psi'^2(t)(dt)^2}$$

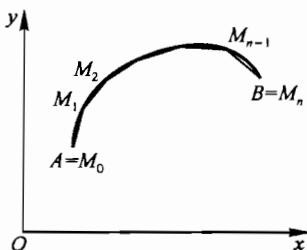


图 6-16

$$= \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

于是所求弧长为

$$s = \int_a^b \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

当曲线弧由直角坐标方程

$$y = f(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

给出, 其中  $f(x)$  在  $[a, b]$  上具有一阶连续导数, 这时曲线弧有参数方程

$$\begin{cases} x = x, \\ y = f(x), \end{cases} \quad (a \leq x \leq b),$$

从而所求的弧长为

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

当曲线弧由极坐标方程

$$\rho = \rho(\theta) \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta)$$

给出, 其中  $\rho(\theta)$  在  $[\alpha, \beta]$  上具有连续导数, 则由直角坐标与极坐标的关系可得

$$\begin{cases} x = \rho(\theta) \cos \theta, \\ y = \rho(\theta) \sin \theta, \end{cases} \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta).$$

这就是以极角  $\theta$  为参数的曲线弧的参数方程. 于是, 弧长元素为

$$ds = \sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta)} d\theta = \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta,$$

从而所求弧长为

$$s = \int_a^b \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta.$$

**例 11** 计算曲线  $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$  上相应于  $a \leq x \leq b$  的一段弧(图 6-17)的长度.

解 因  $y' = x^{1/2}$ , 从而弧长元素

$$ds = \sqrt{1 + (x^{1/2})^2} dx = \sqrt{1 + x} dx.$$

因此, 所求弧长为

$$\begin{aligned} s &= \int_a^b \sqrt{1+x} dx = \left[ \frac{2}{3}(1+x)^{3/2} \right]_a^b \\ &= \frac{2}{3}[(1+b)^{3/2} - (1+a)^{3/2}]. \end{aligned}$$

**例 12** 计算摆线(图 6-18)

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta), \\ y = a(1 - \cos \theta), \end{cases}$$

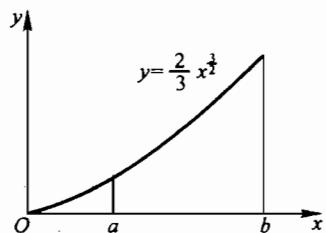


图 6-17

的一拱( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ )的长度.

解 弧长元素为

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta} d\theta \\ &= a\sqrt{2(1-\cos\theta)} d\theta = 2a\sin\frac{\theta}{2} d\theta. \end{aligned}$$

从而, 所求弧长

$$s = \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{\theta}{2} d\theta = 2a \left[ -2\cos\frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = 8a.$$

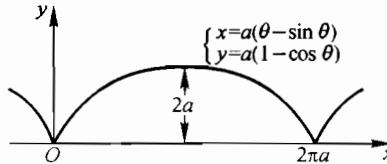


图 6-18

例 13 求阿基米德螺线  $\rho = a\theta$  ( $a > 0$ ) 相应于  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  一段(图 6-19)的弧长.

解 弧长元素为

$$ds = \sqrt{a^2\theta^2 + a^2} d\theta = a\sqrt{1+\theta^2} d\theta,$$

于是所求弧长为

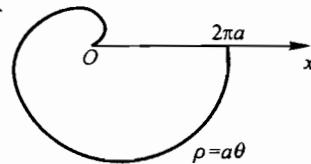


图 6-19

$$s = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\theta^2} d\theta = \frac{a}{2} [2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})].$$

## 习题 6-2

1. 求图 6-20 中各画斜线部分的面积(图见下页).
2. 求由下列各组曲线所围成的图形的面积:
  - (1)  $y = \frac{1}{2}x^2$  与  $x^2 + y^2 = 8$  (两部分都要计算);
  - (2)  $y = \frac{1}{x}$  与直线  $y = x$  及  $x = 2$ ;
  - (3)  $y = e^x$ ,  $y = e^{-x}$  与直线  $x = 1$ ;
  - (4)  $y = \ln x$ ,  $y$  轴与直线  $y = \ln a$ ,  $y = \ln b$  ( $b > a > 0$ ).
3. 求抛物线  $y = -x^2 + 4x - 3$  及其在点  $(0, -3)$  和  $(3, 0)$  处的切线所围成的图形的面积.
4. 求抛物线  $y^2 = 2px$  及其在点  $(\frac{p}{2}, p)$  处的法线所围成的图形的面积.

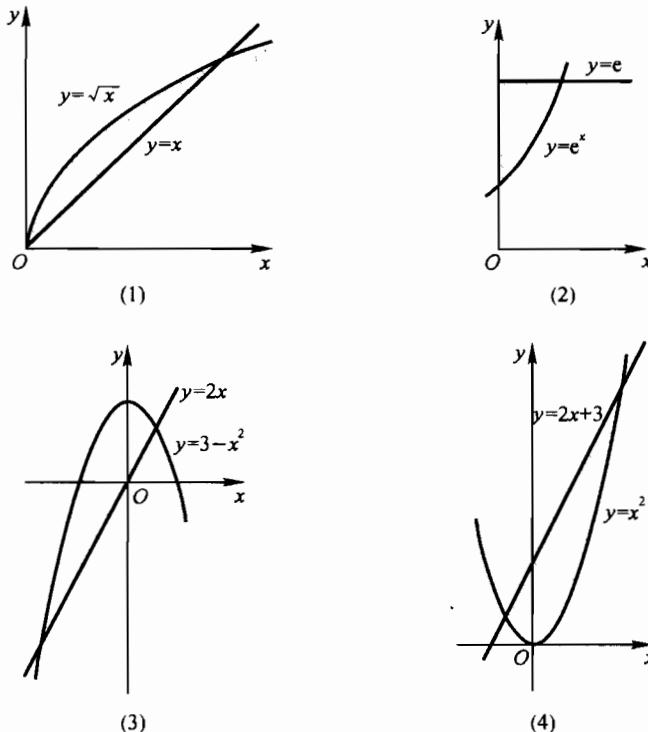


图 6-20

5. 求由下列各曲线所围成的图形的面积:

$$(1) \rho = 2a \cos \theta; \quad (3) \rho = 2a(2 + \cos \theta).$$

$$(2) x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t;$$

6. 求由摆线  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  的一拱 ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) 与横轴所围成的图形的面积.

7. 求对数螺线  $\rho = ae^\theta$  ( $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ) 及射线  $\theta = \pi$  所围成的图形的面积.

8. 求下列各曲线所围成图形的公共部分的面积:

$$(1) \rho = 3 \cos \theta \text{ 及 } \rho = 1 + \cos \theta; \quad (2) \rho = \sqrt{2} \sin \theta \text{ 及 } \rho^2 = \cos 2\theta.$$

9. 求位于曲线  $y = e^x$  下方, 该曲线过原点的切线的左方以及  $x$  轴上方之间的图形的面积.

10. 求由抛物线  $y^2 = 4ax$  与过焦点的弦所围成的图形面积的最小值.

11. 把抛物线  $y^2 = 4ax$  及直线  $x = x_0$  ( $x_0 > 0$ ) 所围成的图形绕  $x$  轴旋转, 计算所得旋转体的体积.

12. 由  $y = x^3$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$  所围成的图形, 分别绕  $x$  轴及  $y$  轴旋转, 计算所得两个旋转体的体积.

13. 把星形线  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$  所围成的图形绕  $x$  轴旋转 (图 6-21), 计算所得旋转体的体积.

14. 用积分方法证明图 6-22 中球缺的体积为

$$V = \pi H^2 \left( R - \frac{H}{3} \right).$$

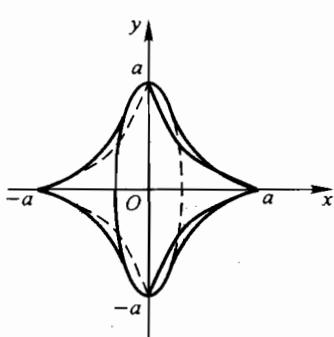


图 6-21

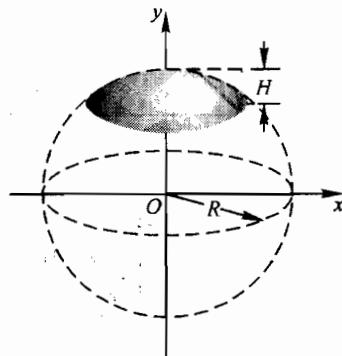


图 6-22

15. 求下列已知曲线所围成的图形,按指定的轴旋转所产生的旋转体的体积:

$$(1) y = x^2, x = y^2, \text{ 绕 } y \text{ 轴};$$

$$(2) y = \arcsin x, x = 1, y = 0, \text{ 绕 } x \text{ 轴};$$

$$(3) x^2 + (y - 5)^2 = 16, \text{ 绕 } x \text{ 轴};$$

$$(4) \text{摆线 } x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) \text{ 的一拱}, y = 0, \text{ 绕直线 } y = 2a.$$

16. 求圆盘  $x^2 + y^2 \leq a^2$  绕  $x = -b$  ( $b > a > 0$ ) 旋转所成旋转体的体积.

17. 设有一截锥体,其高为  $h$ ,上、下底均为椭圆,椭圆的轴长分别为  $2a, 2b$  和  $2A, 2B$ ,求这截锥体的体积.

18. 计算底面是半径为  $R$  的圆,而垂直于底面上一条固定直径的所有截面都是等边三角形的立体体积(图 6-23).

19. 证明:由平面图形  $0 \leq a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)$  绕  $y$  轴旋转所成的旋转体的体积为

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x) dx.$$

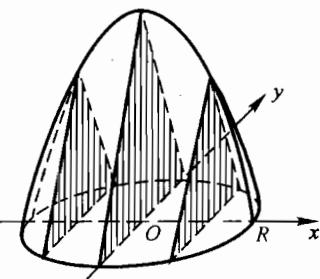


图 6-23

20. 利用题 19 的结论,计算曲线  $y = \sin x$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) 和  $x$  轴所围成的图形绕  $y$  轴旋转所得旋转体的体积.

21. 计算曲线  $y = \ln x$  上相应于  $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$  的一段弧的长度.

22. 计算曲线  $y = \frac{\sqrt{x}}{3}(3-x)$  上相应于  $1 \leq x \leq 3$  的一段弧(图 6-24)的长度.

23. 计算半立方抛物线  $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3$  被抛物线

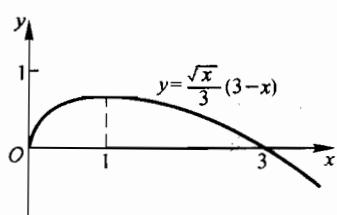


图 6-24

$y^2 = \frac{x}{3}$  截得的一段弧的长度.

24. 计算抛物线  $y^2 = 2px$  从顶点到这曲线上的一点  $M(x, y)$  的弧长.  
 25. 计算星形线  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$  (图 6-25) 的全长.  
 26. 将绕在圆(半径为  $a$ )上的细线放开拉直,使细线与圆周始终相切(图 6-26),细线端点画出的轨迹叫做圆的渐伸线,它的方程为

$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t).$$

算出这曲线上相应于  $0 \leq t \leq \pi$  的一段弧的长度.

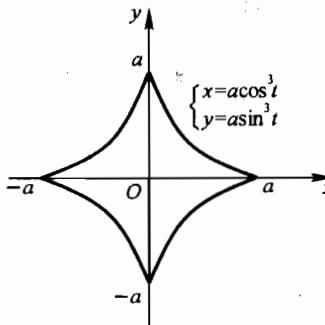


图 6-25

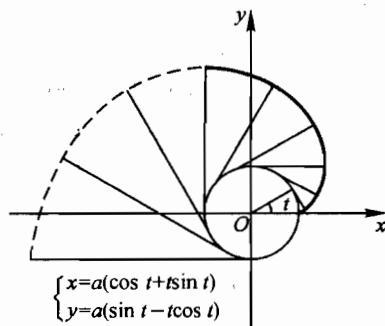


图 6-26

27. 在摆线  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$  上求分摆线第一拱成  $1:3$  的点的坐标.  
 28. 求对数螺线  $\rho = e^{\theta}$  相应于  $0 \leq \theta \leq \varphi$  的一段弧长.  
 29. 求曲线  $\rho\theta = 1$  相应于  $\frac{3}{4} \leq \theta \leq \frac{4}{3}$  的一段弧长.  
 30. 求心形线  $\rho = a(1 + \cos \theta)$  的全长.

### 第三节 定积分在物理学上的应用

#### 一、变力沿直线所作的功

从物理学知道,如果物体在作直线运动的过程中有一个不变的力  $F$  作用在这物体上,且这力的方向与物体运动的方向一致,那么,在物体移动了距离  $s$  时,力  $F$  对物体所作的功为

$$W = F \cdot s.$$

如果物体在运动过程中所受到的力是变化的,这就会遇到变力对物体作功的问题.下面通过具体例子说明如何计算变力所作的功.

**例 1** 把一个带电荷量  $+q$  的点电荷放在  $r$  轴上坐标原点  $O$  处, 它产生一个电场. 这个电场对周围的电荷有作用力. 由物理学知道, 如果有一个单位正电荷放在这个电场中距离原点  $O$  为  $r$  的地方, 那么电场对它的作用力的大小为

$$F = k \frac{q}{r^2} \quad (k \text{ 是常数}).$$

见图 6-27, 当这个单位正电荷在电场中从  $r = a$  处沿  $r$  轴移动到  $r = b$  ( $a < b$ ) 处时, 计算电场力  $F$  对它所作的功.

**解** 在上述移动过程中, 电场对这单位正电荷的作用力是变的. 取  $r$  为积分变量, 它的变化区间为  $[a, b]$ . 设  $[r, r + dr]$  为  $[a, b]$  上的任一小区间. 当单位正电荷从  $r$  移动到  $r + dr$  时,

电场力对它所作的功近似于  $\frac{kq}{r^2} dr$ , 即功元素为

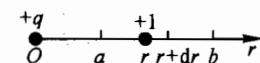


图 6-27

$$dW = \frac{kq}{r^2} dr.$$

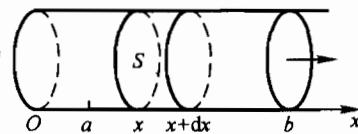
于是所求的功为

$$W = \int_a^b \frac{kq}{r^2} dr = kq \left[ -\frac{1}{r} \right]_a^b = kq \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

在计算静电场中某点的电位时, 要考虑将单位正电荷从该点处 ( $r = a$ ) 移到无穷远处时电场力所作的功  $W$ . 此时, 电场力对单位正电荷所作的功就是反常积分:

$$W = \int_a^{+\infty} \frac{kq}{r^2} dr = \left[ -\frac{kq}{r} \right]_a^{+\infty} = \frac{kq}{a}.$$

**例 2** 在底面积为  $S$  的圆柱形容器中盛有一定量的气体. 在等温条件下, 由于气体的膨胀, 把容器中的一个活塞(面积为  $S$ ) 从点  $a$  处推移到点  $b$  处(图 6-28). 计算在移动过程中, 气体压力所作的功.



**解** 取坐标系如图 6-28 所示. 活塞的位置可以用坐标  $x$  来表示. 由物理学知道, 一定量的气体在等温条件下, 压强  $p$  与体积  $V$  的乘积是常数  $k$ , 即

$$pV = k \quad \text{或} \quad p = \frac{k}{V}.$$

因为  $V = xS$ , 所以

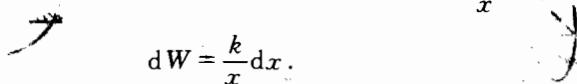
$$p = \frac{k}{xS}.$$

于是, 作用在活塞上的力

$$F = p \cdot S = \frac{k}{xS} \cdot S = \frac{k}{x}.$$

在气体膨胀过程中,体积  $V$  是变的,因而  $x$  也是变的,所以作用在活塞上的力也是变的.

取  $x$  为积分变量,它的变化区间为  $[a, b]$ . 设  $[x, x + dx]$  为  $[a, b]$  上任一小区间,当活塞从  $x$  移动到  $x + dx$  时,变力  $F$  所作的功近似于  $\frac{k}{x} dx$ ,即功元素为



$$dW = \frac{k}{x} dx.$$

于是所求的功为

$$W = \int_a^b \frac{k}{x} dx = k [\ln x]_a^b = k \ln \frac{b}{a}.$$

下面再举一个计算功的例子,它虽不是一个变力作功问题,但也可用积分来计算.

**例 3** 一圆柱形的贮水桶高为 5 m,底圆半径为 3 m,桶内盛满了水.试问要把桶内的水全部吸出需作多少功?

解 作  $x$  轴如图 6-29 所示. 取深度  $x$  (单位为 m) 为积分变量,它的变化区间为  $[0, 5]$ . 相应于  $[0, 5]$  上任一小区间  $[x, x + dx]$  的一薄层水的高度为  $dx$ ,若重力加速度  $g$  取  $9.8 \text{ m/s}^2$ ,则这薄层水的重力为  $9.8\pi \cdot 3^2 dx \text{ kN}$ . 把这薄层水吸出桶外需作的功近似地为

$$dW = 88.2\pi x dx,$$

此即功元素.于是所求的功为

$$\begin{aligned} W &= \int_0^5 88.2\pi x dx = 88.2\pi \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^5 \\ &= 88.2\pi \cdot \frac{25}{2} \approx 3462 (\text{kJ}). \end{aligned}$$

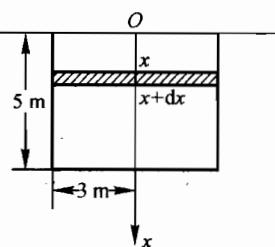


图 6-29

## 二、水压力

从物理学知道,在水深为  $h$  处的压强为  $p = \rho gh$ ,这里  $\rho$  是水的密度,  $g$  是重力加速度. 如果有一面积为  $A$  的平板水平地放置在水深为  $h$  处,那么,平板一侧所受的水压力为

$$P = p \cdot A.$$

如果平板铅直放置在水中,那么,由于水深不同的点处压强  $p$  不相等,平板

一侧所受的水压力就不能用上述方法计算.下面举例说明它的计算方法.

**例 4** 一个横放着的圆柱形水桶,桶内盛有半桶水(图 6-30(a)).设桶的底半径为  $R$ ,水的密度为  $\rho$ ,计算桶的一个端面上所受的压力.

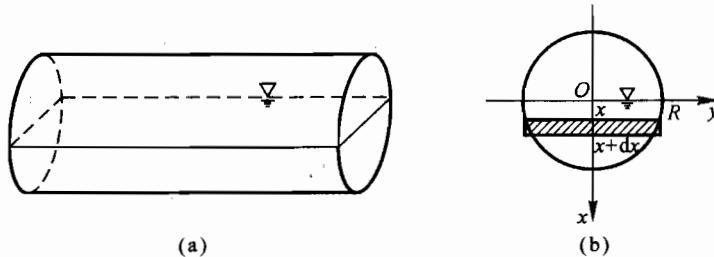


图 6-30

**解** 桶的一个端面是圆片,所以现在要计算的是当水平面通过圆心时,铅直放置的一个半圆片的一侧所受到的水压力.

如图 6-30(b),在这个圆片上取过圆心且铅直向下的直线为  $x$  轴,过圆心的水平线为  $y$  轴.对这个坐标系来讲,所讨论的半圆的方程为  $x^2 + y^2 = R^2$  ( $0 \leq x \leq R$ ).取  $x$  为积分变量,它的变化区间为  $[0, R]$ .设  $[x, x + dx]$  为  $[0, R]$  上的任一小区间,半圆片上相应于  $[x, x + dx]$  的窄条上各点处的压强近似于  $\rho gx$ ,这窄条的面积近似于  $2\sqrt{R^2 - x^2}dx$ .因此,这窄条一侧所受水压力的近似值,即压力元素为

$$dP = 2\rho gx \sqrt{R^2 - x^2} dx.$$

于是所求压力为

$$\begin{aligned} P &= \int_0^R 2\rho gx \sqrt{R^2 - x^2} dx = -\rho g \int_0^R (R^2 - x^2)^{1/2} d(R^2 - x^2) \\ &= -\rho g \left[ \frac{2}{3}(R^2 - x^2)^{3/2} \right]_0^R = \frac{2\rho g}{3} R^3. \end{aligned}$$

### 三、引力

从物理学知道,质量分别为  $m_1, m_2$ ,相距为  $r$  的两质点间的引力的大小为

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

其中  $G$  为引力系数,引力的方向沿着两质点的连线方向.

如要计算一根细棒对一个质点的引力,那么,由于细棒上各点与该质点的距离是变化的,且各点对该质点的引力的方向也是变化的,因此就不能用上述公式

来计算.下面举例说明它的计算方法.

**例 5** 设有一长度为  $l$ 、线密度为  $\mu$  的均匀细直棒, 在其中垂线上距棒  $a$  单位处有一质量为  $m$  的质点  $M$ . 试计算该棒对质点  $M$  的引力.

**解** 取坐标系如图 6-31 所示, 使棒位于  $y$  轴上, 质点  $M$  位于  $x$  轴上, 棒的中点为原点  $O$ . 取  $y$  为积分变量, 它的变化区间为  $[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}]$ . 设  $[y, y + dy]$  为  $[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}]$  上任一小区间, 把细直棒上相应于  $[y, y + dy]$  的一小段近似地看成质点, 其质量为  $\mu dy$ , 与  $M$  相距  $r = \sqrt{a^2 + y^2}$ . 因此可以按照两质点间的引力计算公式求出这小段细直棒对质点  $M$  的引力  $\Delta F$  的大小为

$$\Delta F \approx G \frac{m\mu dy}{a^2 + y^2},$$

从而求出  $\Delta F$  在水平方向分力  $\Delta F_x$  的近似值, 即细直棒对质点  $M$  的引力在水平方向分力  $F_x$  的元素为

$$dF_x = -G \frac{am\mu dy}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

于是得引力在水平方向分力为

$$\begin{aligned} F_x &= -G \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{Gam\mu}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dy \\ &= -\frac{2Gm\mu l}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{4a^2 + l^2}}. \end{aligned}$$

由对称性知, 引力在铅直方向分力为  $F_y = 0$ .

当细直棒的长度  $l$  很大时, 可视  $l$  趋于无穷. 此时, 引力的大小为  $\frac{2Gm\mu}{a}$ , 方向与细棒垂直且由  $M$  指向细棒.

### 习题 6-3

1. 由实验知道, 弹簧在拉伸过程中, 需要的力  $F$  (单位:N) 与伸长量  $s$  (单位:cm) 成正比, 即

$$F = ks \quad (k \text{ 是比例常数}).$$

如果把弹簧由原长拉伸 6 cm, 计算所作的功.

2. 直径为 20 cm、高为 80 cm 的圆筒内充满压强为  $10 \text{ N/cm}^2$  的蒸汽. 设温度保持不变,

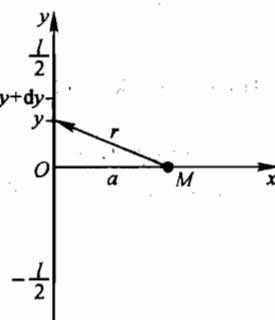


图 6-31

要使蒸汽体积缩小一半,问需要作多少功?

3. (1) 证明:把质量为  $m$  的物体从地球表面升高到  $h$  处所作的功是

$$W = \frac{mgRh}{R+h},$$

其中  $g$  是重力加速度,  $R$  是地球的半径;

(2) 一颗人造地球卫星的质量为 173 kg, 在高于地面 630 km 处进入轨道. 问把这颗卫星从地面送到 630 km 的高空处, 克服地球引力要作多少功? 已知  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ , 地球半径  $R = 6370 \text{ km}$ .

4. 一物体按规律  $x = ct^3$  作直线运动, 介质的阻力与速度的平方成正比. 计算物体由  $x = 0$  移至  $x = a$  时, 克服介质阻力所作的功.

5. 用铁锤将一铁钉击入木板, 设木板对铁钉的阻力与铁钉击入木板的深度成正比, 在击第一次时, 将铁钉击入木板 1 cm. 如果铁锤每次锤击铁钉所作的功相等, 问锤击第二次时, 铁钉又击入多少?

6. 设一圆锥形贮水池, 深 15 m, 口径 20 m, 盛满水, 今以泵将水吸尽, 问要作多少功?

7. 有一闸门, 它的形状和尺寸如图 6-32 所示, 水面超过门顶 2 m. 求闸门上所受的水压力.

8. 洒水车上的水箱是一个横放的椭圆柱体, 尺寸如图 6-33 所示. 当水箱装满水时, 计算水箱的一个端面所受的压力.

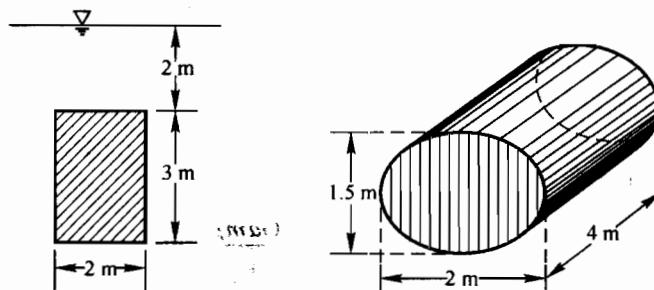


图 6-32

图 6-33

9. 有一等腰梯形闸门, 它的两条底边各长 10 m 和 6 m, 高为 20 m. 较长的底边与水面相齐. 计算闸门的一侧所受的水压力.

10. 一底为 8 cm、高为 6 cm 的等腰三角形片, 铅直地沉没在水中, 顶在上, 底在下且与水面平行, 而顶离水面 3 cm, 试求它每面所受的压力.

11. 设有一长度为  $l$ 、线密度为  $\mu$  的均匀细直棒, 在与棒的一端垂直距离为  $a$  单位处有一质量为  $m$  的质点  $M$ , 试求这细棒对质点  $M$  的引力.

12. 设有一半径为  $R$ 、中心角为  $\varphi$  的圆弧形细棒, 其线密度为常数  $\mu$ . 在圆心处有一质量为  $m$  的质点  $M$ . 试求这细棒对质点  $M$  的引力.

## 总习题六

1. 一金属棒长 3 m, 离棒左端  $x$  m 处的线密度为  $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$  (kg/m). 问  $x$  为何值

时,  $[0, x]$ 一段的质量为全棒质量的一半.

2. 求由曲线  $\rho = a \sin \theta$ ,  $\rho = a(\cos \theta + \sin \theta)$  ( $a > 0$ ) 所围图形公共部分的面积.
3. 设抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  通过点  $(0, 0)$ , 且当  $x \in [0, 1]$  时,  $y \geq 0$ . 试确定  $a, b, c$  的值, 使得抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  与直线  $x = 1, y = 0$  所围图形的面积为  $\frac{4}{9}$ , 且使该图形绕  $x$  轴旋转而成的旋转体的体积最小.
4. 求由曲线  $y = x^{\frac{3}{2}}$ , 直线  $x = 4$  及  $x$  轴所围图形绕  $y$  轴旋转而成的旋转体的体积.
5. 求圆盘  $(x - 2)^2 + y^2 \leq 1$  绕  $y$  轴旋转而成的旋转体的体积.
6. 求抛物线  $y = \frac{1}{2}x^2$  被圆  $x^2 + y^2 = 3$  所截下的有限部分的弧长.
7. 半径为  $r$  的球沉入水中, 球的上部与水面相切, 球的密度与水相同, 现将球从水中取出, 需作多少功?
8. 边长为  $a$  和  $b$  的矩形薄板, 与液面成  $\alpha$  角斜沉于液体中, 长边平行于液面而位于深  $h$  处, 设  $a > b$ , 液体的密度为  $\rho$ , 试求薄板每面所受的压力.
9. 设星形线  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$  上每一点处的线密度的大小等于该点到原点距离的立方, 在原点  $O$  处有一单位质点, 求星形线在第一象限的弧段对这质点的引力.

# 第七章 微分方程

函数是客观事物的内部联系在数量方面的反映,利用函数关系又可以对客观事物的规律性进行研究.因此如何寻求函数关系,在实践中具有重要意义.在许多问题中,往往不能直接找出所需要的函数关系,但是根据问题所提供的情况,有时可以列出含有要找的函数及其导数的关系式.这样的关系式就是所谓微分方程.微分方程建立以后,对它进行研究,找出未知函数来,这就是解微分方程.本章主要介绍微分方程的一些基本概念和几种常用的微分方程的解法.

## 第一节 微分方程的基本概念

下面我们通过几何、力学及物理学中的几个具体例题来说明微分方程的基本概念.

**例 1** 一曲线通过点 $(1, 2)$ ,且在该曲线上任一点 $M(x, y)$ 处的切线的斜率为 $2x$ ,求这曲线的方程.

解 设所求曲线的方程为 $y = \varphi(x)$ .根据导数的几何意义,可知未知函数 $y = \varphi(x)$ 应满足关系式

$$\frac{dy}{dx} = 2x. \quad (1)$$

此外,未知函数 $y = \varphi(x)$ 还应满足下列条件:

$$x = 1 \text{ 时}, y = 2. \quad (2)$$

把(1)式两端积分,得

$$y = \int 2x \, dx \quad \text{即} \quad y = x^2 + C, \quad (3)$$

其中 $C$ 是任意常数.

把条件“ $x = 1$  时,  $y = 2$ ”代入(3)式,得

$$2 = 1^2 + C,$$

由此定出 $C = 1$ .把 $C = 1$ 代入(3)式,即得所求曲线方程

$$y = x^2 + 1. \quad (4)$$

**例 2** 列车在平直线上以 $20 \text{ m/s}$ (相当于 $72 \text{ km/h}$ )的速度行驶;当制动时列车获得加速度 $-0.4 \text{ m/s}^2$ .问开始制动后多少时间列车才能停住以及列车在这段时间里行驶了多少路程?

解 设列车在开始制动后 $t \text{ s}$ 时行驶了 $s \text{ m}$ .根据题意,反映制动阶段列车

运动规律的函数  $s = s(t)$  应满足关系式

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -0.4. \quad (5)$$

此外,未知函数  $s = s(t)$  还应满足下列条件:

$$t=0 \text{ 时}, s=0, v=\frac{ds}{dt}=20. \quad (6)$$

把(5)式两端积分一次,得

$$v=\frac{ds}{dt}=-0.4t+C_1; \quad (7)$$

再积分一次,得

$$s=-0.2t^2+C_1t+C_2, \quad (8)$$

这里  $C_1, C_2$  都是任意常数.

把条件“ $t=0$  时,  $v=20$ ”代入(7)式,得

$$20=C_1;$$

把条件“ $t=0$  时,  $s=0$ ”代入(8)式,得

$$0=C_2.$$

把  $C_1, C_2$  的值代入(7)及(8)式,得

$$v=-0.4t+20, \quad (9)$$

$$s=-0.2t^2+20t. \quad (10)$$

在(9)式中令  $v=0$ , 得到列车从开始制动到完全停住所需的时间

$$t=\frac{20}{0.4}=50(\text{s}).$$

再把  $t=50$  代入(10)式,得到列车在制动阶段行驶的路程

$$s=-0.2 \times 50^2 + 20 \times 50 = 500(\text{m}).$$

上述两个例子中的关系式(1)和(5)都含有未知函数的导数,它们都是微分方程.一般的,凡表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系的方程,叫做微分方程,有时也简称方程.

微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数,叫做微分方程的阶.例如,方程(1)是一阶微分方程;方程(5)是二阶微分方程.又如,方程

$$x^3y''' + x^2y'' - 4xy' + 3x^2$$

是三阶微分方程;方程

$$y^{(4)} - 4y''' + 10y'' - 12y' + 5y = \sin 2x$$

是四阶微分方程.

一般的,  $n$  阶微分方程的形式是

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (11)$$

这里必须指出，在方程(11)中， $y^{(n)}$ 是必须出现的，而 $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$ 等变量则可以不出现。例如 $n$ 阶微分方程

$$y^{(n)} + 1 = 0$$

中，除 $y^{(n)}$ 外，其他变量都没有出现。

如果能从方程(11)中解出最高阶导数，则可得微分方程

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (12)$$

以后我们讨论的微分方程都是已解出最高阶导数的方程或能解出最高阶导数的方程。

由前面的例子我们看到，在研究某些实际问题时，首先要建立微分方程，然后找出满足微分方程的函数（解微分方程），就是说，找出这样的函数，把这函数代入微分方程能使该方程成为恒等式。这个函数就叫做该微分方程的解。确切地说，设函数 $y = \varphi(x)$ 在区间 $I$ 上有 $n$ 阶连续导数，如果在区间 $I$ 上，

$$F[x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)] \equiv 0,$$

那么函数 $y = \varphi(x)$ 就叫做微分方程(11)在区间 $I$ 上的解。

例如，函数(3)和(4)都是微分方程(1)的解；函数(8)和(10)都是微分方程(5)的解。

如果微分方程的解中含有任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相同<sup>①</sup>，这样的解叫做微分方程的通解。例如，函数(3)是方程(1)的解，它含有一个任意常数，而方程(1)是一阶的，所以函数(3)是方程(1)的通解。又如，函数(8)是方程(5)的解，它含有两个任意常数，而方程(5)是二阶的，所以函数(8)是方程(5)的通解。

由于通解中含有任意常数，所以它还不能完全确定地反映某一客观事物的规律性。要完全确定地反映客观事物的规律性，必须确定这些常数的值。为此，要根据问题的实际情况，提出确定这些常数的条件。例如，例1中的条件(2)及例2中的条件(6)便是这样的条件。

设微分方程中的未知函数为 $y = \varphi(x)$ ，如果微分方程是一阶的，通常用来确定任意常数的条件是

$$x = x_0 \text{ 时, } y = y_0,$$

或写成

$$y|_{x=x_0} = y_0,$$

其中 $x_0, y_0$ 都是给定的值；如果微分方程是二阶的，通常用来确定任意常数的条件是

$$x = x_0 \text{ 时, } y = y_0, y' = y'_0,$$

① 这里所说的任意常数是相互独立的，就是说，它们不能合并而使得任意常数的个数减少（参看本章第六节关于函数组的线性相关性）。

或写成

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0,$$

其中  $x_0, y_0$  和  $y'_0$  都是给定的值. 上述这种条件叫做初始条件.

确定了通解中的任意常数以后, 就得到微分方程的特解. 例如(4)式是方程(1)满足条件(2)的特解;(10)式是方程(5)满足条件(6)的特解.

求微分方程  $y' = f(x, y)$  满足初始条件  $y|_{x=x_0} = y_0$  的特解这样一个问题, 叫做一阶微分方程的初值问题, 记作

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y|_{x=x_0} = y_0. \end{cases} \quad (13)$$

微分方程的解的图形是一条曲线, 叫做微分方程的积分曲线. 初值问题(13)的几何意义, 就是求微分方程的通过点  $(x_0, y_0)$  的那条积分曲线. 二阶微分方程的初值问题

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0 \end{cases}$$

的几何意义, 是求微分方程的通过点  $(x_0, y_0)$  且在该点处的切线斜率为  $y'_0$  的那条积分曲线.

### 例 3 验证: 函数

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \quad (14)$$

是微分方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0 \quad (15)$$

的解.

解 求出所给函数(14)的导数

$$\frac{dx}{dt} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -k^2 C_1 \cos kt - k^2 C_2 \sin kt \\ &= -k^2 (C_1 \cos kt + C_2 \sin kt). \end{aligned}$$

把  $\frac{d^2 x}{dt^2}$  及  $x$  的表达式代入方程(15), 得

$$-k^2 (C_1 \cos kt + C_2 \sin kt) + k^2 (C_1 \cos kt + C_2 \sin kt) \equiv 0.$$

函数(14)及其导数代入方程(15)后成为一个恒等式, 因此函数(14)是微分方程(15)的解.

例 4 已知函数(14)当  $k \neq 0$  时是微分方程(15)的通解, 求满足初始条件

$$x|_{t=0} = A, \frac{dx}{dt}|_{t=0} = 0$$

的特解.

解 将条件“ $t = 0$  时,  $x = A$ ”代入(14)式得

$$C_1 = A.$$

将条件“ $t = 0$  时,  $\frac{dx}{dt} = 0$ ”代入(16)式, 得

$$C_2 = 0.$$

把  $C_1, C_2$  的值代入(14)式, 就得所求的特解为

$$x = A \cos kt.$$

## 习 题 7-1

1. 试说出下列各微分方程的阶数:

- (1)  $x(y')^2 - 2yy' + x = 0$ ; (2)  $x^2y'' - xy' + y = 0$ ;  
(3)  $xy''' + 2y'' + x^2y = 0$ ; (4)  $(7x - 6y)dx + (x + y)dy = 0$ ;  
(5)  $L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$ ; (6)  $\frac{d\rho}{d\theta} + \rho = \sin^2 \theta$ .

2. 指出下列各题中的函数是否为所给微分方程的解:

- (1)  $xy' = 2y$ ,  $y = 5x^2$ ;  
(2)  $y'' + y = 0$ ,  $y = 3\sin x - 4\cos x$ ;  
(3)  $y'' - 2y' + y = 0$ ,  $y = x^2e^x$ ;  
(4)  $y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1\lambda_2y = 0$ ,  $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ .

3. 在下列各题中, 验证所给二元方程所确定的函数为所给微分方程的解:

- (1)  $(x - 2y)y' = 2x - y$ ,  $x^2 - xy + y^2 = C$ ;  
(2)  $(xy - x)y'' + xy'^2 + yy' - 2y' = 0$ ,  $y = \ln(xy)$ .

4. 在下列各题中, 确定函数关系式中所含的参数, 使函数满足所给的初始条件:

- (1)  $x^2 - y^2 = C$ ,  $y|_{x=0} = 5$ ;  
(2)  $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$ ,  $y|_{x=0} = 0$ ,  $y'|_{x=0} = 1$ ;  
(3)  $y = C_1 \sin(x - C_2)$ ,  $y|_{x=\pi} = 1$ ,  $y'|_{x=\pi} = 0$ .

5. 写出由下列条件确定的曲线所满足的微分方程:

- (1) 曲线在点  $(x, y)$  处的切线的斜率等于该点横坐标的平方;  
(2) 曲线上点  $P(x, y)$  处的法线与  $x$  轴的交点为  $Q$ , 且线段  $PQ$  被  $y$  轴平分.

6. 用微分方程表示一物理命题: 某种气体的压强  $p$  对于温度  $T$  的变化率与压强成正比, 与温度的平方成反比.

## 第二节 可分离变量的微分方程

本节至第四节, 我们讨论一阶微分方程

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

的一些解法.

一阶微分方程有时也写成如下的对称形式:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \quad (2)$$

在方程(2)中, 变量  $x$  与  $y$  对称, 它既可看作是以  $x$  为自变量、 $y$  为因变量的方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

(这时  $Q(x, y) \neq 0$ ), 也可看作是以  $y$  为自变量、 $x$  为因变量的方程

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

(这时  $P(x, y) \neq 0$ ).

在第一节的例 1 中, 我们遇到一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = 2x,$$

或

$$dy = 2x dx.$$

把上式两端积分就得到这个方程的通解

$$y = x^2 + C.$$

但是并不是所有的一阶微分方程都能这样求解. 例如, 对于一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2 \quad (3)$$

就不能像上面那样用直接对两端积分的方法求出它的通解. 这是什么缘故呢?

原因是方程(3)的右端含有与  $x$  存在函数关系的变量  $y$ , 积分

$$\int 2xy^2 dx$$

求不出来, 这是困难所在. 为了解决这个困难, 在方程(3)的两端同时乘以  $\frac{dx}{y^2}$ , 使

方程(3)变为

$$\frac{dy}{y^2} = 2x dx,$$

这样, 变量  $x$  与  $y$  已分离在等式的两端, 然后两端积分得

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C,$$

或

$$y = -\frac{1}{x^2 + C}, \quad (4)$$

其中  $C$  是任意常数.

可以验证, 函数(4)确实满足一阶微分方程(3), 且含有一个任意常数, 所以

它是方程(3)的通解.

一般的,如果一个一阶微分方程能写成

$$g(y)dy = f(x)dx \quad (5)$$

的形式,就是说,能把微分方程写成一端只含  $y$  的函数和  $dy$ ,另一端只含  $x$  的函数和  $dx$ ,那么原方程就称为可分离变量的微分方程.

假定方程(5)中的函数  $g(y)$  和  $f(x)$  是连续的.设  $y = \varphi(x)$  是方程(5)的解,将它代入(5)中得到恒等式

$$g[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = f(x)dx.$$

将上式两端积分,并由  $y = \varphi(x)$  引进变量  $y$ ,得

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx.$$

设  $G(y)$  及  $F(x)$  依次为  $g(y)$  及  $f(x)$  的原函数,于是有

$$G(y) = F(x) + C. \quad (6)$$

因此,方程(5)的解满足关系式(6).反之,如果  $y = \Phi(x)$  是由关系式(6)所确定的隐函数,那么在  $g(y) \neq 0$  的条件下, $y = \Phi(x)$  也是方程(5)的解,事实上,由隐函数的求导法可知,当  $g(y) \neq 0$  时,

$$\Phi'(x) = \frac{F'(x)}{G'(y)} = \frac{f(x)}{g(y)},$$

这就表示函数  $y = \Phi(x)$  满足方程(5).所以,如果已分离变量的方程(5)中,  $g(y)$  和  $f(x)$  是连续的,且  $g(y) \neq 0$ ,那么(5)式两端积分后得到的关系式(6),就用隐式给出了方程(5)的解,(6)式就叫做微分方程(5)的隐式解.又由于关系式(6)中含有任意常数,因此(6)式所确定的隐函数是方程(5)的通解,所以(6)式叫做微分方程(5)的隐式通解(当  $f(x) \neq 0$  时,(6)式所确定的隐函数  $x = \Psi(y)$  也可认为是方程(5)的解).

### 例 1 求微分方程

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \quad (7)$$

的通解.

解 方程(7)是可分离变量的,分离变量后得

$$\frac{dy}{y} = 2xdx,$$

两端积分

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2xdx,$$

得

$$\ln|y| = x^2 + C_1,$$

从而

$$y = \pm e^{x^2 + C_1} = \pm e^{C_1} e^{x^2}.$$

因  $\pm e^{C_1}$  是任意非零常数,又  $y \equiv 0$  也是方程(7)的解;故得方程(7)的通解

$$y = Ce^{x^2}.$$

**例 2** 放射性元素铀由于不断地有原子放射出微粒子而变成其他元素, 铀的含量就不断减少, 这种现象叫做衰变. 由原子物理学知道, 铀的衰变速度与当时未衰变的铀原子的含量  $M$  成正比. 已知  $t=0$  时铀的含量为  $M_0$ , 求在衰变过程中铀含量  $M(t)$  随时间  $t$  变化的规律.

解 铀的衰变速度就是  $M(t)$  对时间  $t$  的导数  $\frac{dM}{dt}$ . 由于铀的衰变速度与其含量成正比, 故得微分方程

$$\frac{dM}{dt} = -\lambda M, \quad (8)$$

其中  $\lambda (\lambda > 0)$  是常数, 叫做衰变系数,  $\lambda$  前置负号是由于当  $t$  增加时  $M$  单调减少, 即  $\frac{dM}{dt} < 0$  的缘故.

按题意, 初始条件为

$$M|_{t=0} = M_0.$$

方程(8)是可分离变量的. 分离变量后得

$$\frac{dM}{M} = -\lambda dt.$$

两端积分

$$\int \frac{dM}{M} = \int (-\lambda) dt,$$

以  $\ln C$  表示任意常数, 考虑到  $M > 0$ , 得

$$\ln M = -\lambda t + \ln C,$$

即

$$M = Ce^{-\lambda t}.$$

这就是方程(8)的通解. 以初始条件代入上式, 得

$$M_0 = Ce^0 = C,$$

所以

$$M = M_0 e^{-\lambda t},$$

这就是所求铀的衰变规律. 由此可见, 铀的含量随时间的增加而按指数规律衰减(图 7-1).

**例 3** 设降落伞从跳伞塔下落后, 所受空气阻力与速度成正比, 并设降落伞离开跳伞塔时( $t=0$ )速度为零, 求降落伞下落速度与时间的函数关系.

解 设降落伞下落速度为  $v(t)$ . 降落伞在空中下落时, 同时受到重力  $P$  与阻力  $R$  的作用(图 7-2). 重力大小为  $mg$ , 方向与  $v$  一致; 阻力大小为  $kv$  ( $k$  为比例系数), 方向与  $v$  相反, 从而降落伞所受外力为

$$F = mg - kv.$$

根据牛顿第二运动定律

$$F = ma$$

(其中  $a$  为加速度), 得函数  $v(t)$  应满足的方程为

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv. \quad (9)$$

按题意, 初始条件为

$$v|_{t=0} = 0.$$

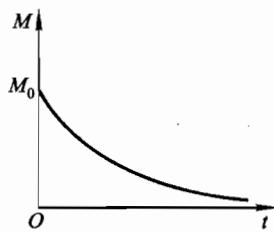


图 7-1

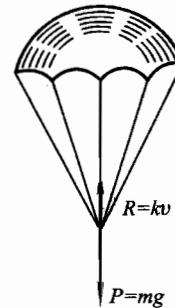


图 7-2

方程(9)是可分离变量的. 分离变量后得

$$\frac{dv}{mg - kv} = \frac{dt}{m},$$

两端积分

$$\int \frac{dv}{mg - kv} = \int \frac{dt}{m},$$

考虑到  $mg - kv > 0$ , 得

$$-\frac{1}{k} \ln(mg - kv) = \frac{t}{m} + C_1,$$

即

$$mg - kv = e^{-\frac{k}{m}t - kC_1},$$

或

$$v = \frac{mg}{k} + Ce^{-\frac{k}{m}t} \quad \left( C = -\frac{e^{-kC_1}}{k} \right), \quad (10)$$

这就是方程(9)的通解.

将初始条件  $v|_{t=0} = 0$  代入(10)式, 得

$$C = -\frac{mg}{k}.$$

于是所求的特解为

$$v = \frac{mg}{k} \left( 1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right). \quad (11)$$

由(11)可以看出, 随着时间  $t$  的增大, 速度  $v$  逐渐接近于常数  $\frac{mg}{k}$ , 且不会超

过  $\frac{mg}{k}$ , 也就是说, 跳伞后开始阶段是加速运动, 但以后逐渐接近于等速运动.

**例 4** 有高为 1 m 的半球形容器, 水从它的底部小孔流出, 小孔横截面面积

为  $1 \text{ cm}^2$  (图 7-3). 开始时容器内盛满了水, 求水从小孔流出过程中容器里水面的高度  $h$  (水面与孔口中心间的距离) 随时间  $t$  变化的规律, 并求水流完所需的时间.

解 由水力学知道, 水从孔口流出的流量(即通过孔口横截面的水的体积  $V$  对时间  $t$  的变化率)  $Q$  可用下列公式计算:

$$Q = \frac{dV}{dt} = kS \sqrt{2gh}, \quad (12)$$

其中  $k$  为流量系数, 由实验测得  $k = 0.62$ ,  $S$  为孔口横截面面积,  $g$  为重力加速度.

另一方面, 设在微小时间间隔  $[t, t + dt]$  内, 水面高度由  $h$  降至  $h + dh$  ( $dh < 0$ ), 则又可得到

$$dV = -\pi r^2 dh, \quad (13)$$

其中  $r$  是时刻  $t$  的水面半径(图 7-3), 右端置负号是由于  $dh < 0$  而  $dV > 0$  的缘故. 又因

$$r = \sqrt{1^2 - (1-h)^2} = \sqrt{2h - h^2},$$

所以(13)式变成  $dV = -\pi(2h - h^2)dh$ . (14)

比较(12)和(14)两式, 得

$$kS \sqrt{2gh} dt = -\pi(2h - h^2)dh, \quad (15)$$

这就是未知函数  $h = h(t)$  应满足的微分方程.

此外, 开始时容器内的水是满的, 所以未知函数  $h = h(t)$  还应满足下列初始条件:

$$h|_{t=0} = 1. \quad (16)$$

方程(15)是可分离变量的. 分离变量后得

$$dt = -\frac{\pi}{kS \sqrt{2g}} (2h^{\frac{1}{2}} - h^{\frac{3}{2}}) dh.$$

两端积分, 得

$$t = -\frac{\pi}{kS \sqrt{2g}} \left( \frac{4}{3}h^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}} + C \right), \quad (17)$$

其中  $C$  是任意常数.

把初始条件(16)代入(17)式, 得

$$C = -\frac{4}{3} + \frac{2}{5} = -\frac{14}{15}.$$

把所得的  $C$  值代入(17)式并化简, 就得

$$t = \frac{14\pi}{15 kS \sqrt{2g}} \left( 1 - \frac{10}{7}h^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{7}h^{\frac{5}{2}} \right).$$

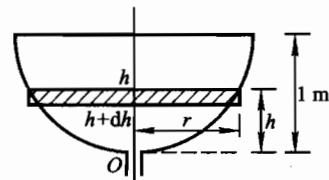


图 7-3

以  $k = 0.62$ ,  $S = 10^{-4} \text{ m}^2$ ,  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  代入上式, 计算后可得

$$t = 1.068 \times 10^4 \left( 1 - \frac{10}{7} h^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{7} h^{\frac{5}{2}} \right) (\text{s}).$$

上式表达了水从小孔流出的过程中容器内水面高度  $h$  与时间  $t$  之间的函数关系. 由此可知水流完所需的时间为

$$t = 1.068 \times 10^4 \text{ s} = 2 \text{ h} 58 \text{ min}.$$

这里还要指出, 在例 4 中我们是通过对微小量  $dV$  的分析得到微分方程 (15) 的. 这种微小量分析的方法, 也是建立微分方程的一种常用方法.

## 习题 7-2

1. 求下列微分方程的通解:

$$(1) xy' + y \ln y = 0;$$

$$(2) 3x^2 + 5x - 5y' = 0;$$

$$(3) \sqrt{1-x^2} y' = \sqrt{1-y^2};$$

$$(4) y' - xy' = a(y^2 + y');$$

$$(5) \sec^2 x \tan y dx + \sec^2 y \tan x dy = 0;$$

$$(6) \frac{dy}{dx} = 10^{x+y};$$

$$(7) (e^{x+y} - e^x) dx + (e^{x+y} + e^y) dy = 0;$$

$$(8) \cos x \sin y dx + \sin x \cos y dy = 0;$$

$$(9) (y+1)^2 \frac{dy}{dx} + x^3 = 0;$$

$$(10) y dx + (x^2 - 4x) dy = 0.$$

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

$$(1) y' = e^{2x-y}, y|_{x=0} = 0;$$

$$(2) \cos x \sin y dy = \cos y \sin x dx, y|_{x=0} = \frac{\pi}{4};$$

$$(3) y' \sin x = y \ln y, y|_{x=\frac{\pi}{2}} = e;$$

$$(4) \cos y dx + (1 + e^{-x}) \sin y dy = 0, y|_{x=0} = \frac{\pi}{4};$$

$$(5) x dy + 2y dx = 0, y|_{x=2} = 1.$$

3. 有一盛满了水的圆锥形漏斗, 高为 10 cm, 顶角为  $60^\circ$ , 漏斗下面有面积为  $0.5 \text{ cm}^2$  的孔, 求水面高度变化的规律及水流完所需的时间.

4. 质量为 1 g 的质点受外力作用作直线运动, 这外力和时间成正比, 和质点运动的速度成反比. 在  $t = 10 \text{ s}$  时, 速度等于  $50 \text{ cm/s}$ , 外力为  $4 \text{ g} \cdot \text{cm/s}^2$ , 问从运动开始经过了一分钟后的速度是多少?

5. 镭的衰变有如下的规律: 镭的衰变速与它的现存量  $R$  成正比. 由经验材料得知, 镭经过 1600 年后, 只余原始量  $R_0$  的一半. 试求镭的现存量  $R$  与时间  $t$  的函数关系.

6. 一曲线通过点  $(2, 3)$ , 它在两坐标轴间的任一切线线段均被切点所平分, 求这曲线方程.

7. 小船从河边点  $O$  处出发驶向对岸(两岸为平行直线). 设船速为  $a$ , 船行方向始终与河岸垂直, 又设河宽为  $h$ , 河中任一点处的水流速度与该点到两岸距离的乘积成正比(比例系数为  $k$ ). 求小船的航行路线.

### 第三节 齐次方程

#### 一、齐次方程

如果一阶微分方程可化成

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad (1)$$

的形式,那么就称这方程为齐次方程,例如

$$(xy - y^2)dx - (x^2 - 2xy)dy = 0$$

是齐次方程,因为它可化成

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 - 2\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

即

在齐次方程

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

中,引进新的未知函数

$$u = \frac{y}{x}, \quad (2)$$

就可把它化为可分离变量的方程.因为由(2)有

$$y = ux, \quad \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx},$$

代入方程(1),便得方程

$$u + x \frac{du}{dx} = \varphi(u),$$

即

$$x \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u.$$

分离变量,得

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

两端积分,得

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x}.$$

求出积分后,再以  $\frac{y}{x}$  代替  $u$ ,便得所给齐次方程的通解.

例 1 解方程

$$y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx}.$$

解 原方程可写成

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x} - 1},$$

因此是齐次方程.令  $\frac{y}{x} = u$ ,则

$$y = ux, \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx},$$

于是原方程变为

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{u^2}{u - 1},$$

即

$$x \frac{du}{dx} = \frac{u}{u - 1}.$$

分离变量,得

$$\left(1 + \frac{1}{u}\right) du = \frac{dx}{x}.$$

两端积分,得

$$u - \ln|u| + C = \ln|x|,$$

或写为

$$\ln| xu | = u + C.$$

以  $\frac{y}{x}$  代上式中的  $u$ ,便得所给方程的通解为

$$\ln|y| = \frac{y}{x} + C.$$

例 2 探照灯的聚光镜的镜面是一张旋转曲面,它的形状由  $xOy$  坐标面上的一条曲线  $L$  绕  $x$  轴旋转而成.按聚光镜性能的要求,在其旋转轴( $x$  轴)上一点  $O$  处发出的一切光线,经它反射后都与旋转轴平行.求曲线  $L$  的方程.

解 将光源所在之  $O$  点取作坐标原点(如图 7-4),且曲线  $L$  位于  $y \geq 0$  范围内.

设点  $M(x, y)$  为  $L$  上的任一点,点  $O$  发出的某条光线经点  $M$  反射后是一条与  $x$  轴平行的直线  $MS$ .又设过点  $M$  的切线  $AT$  与  $x$  轴的夹角为  $\alpha$ .根据题意,  $\angle SMT = \alpha$ .另一方面,  $\angle OMA$  是入射角的余角,  $\angle SMT$  是反射角的余角,于是由光学中的反射定律有  $\angle OMA = \angle SMT = \alpha$ .从而  $AO = OM$ ,但  $AO =$

$AP - OP = PM \cot \alpha - OP = \frac{y}{y} - x$ , 而  $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$ . 于是得微分方程

$$\frac{y}{y} - x = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

把  $x$  看作因变量,  $y$  看作自变量, 当  $y > 0$  时, 上式即为

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1},$$

这是齐次方程. 令  $\frac{x}{y} = v$ , 则  $x = yv$ ,  $\frac{dx}{dy} = v + y \frac{dv}{dy}$ , 代入上式, 得

$$v + y \frac{dv}{dy} = v + \sqrt{v^2 + 1},$$

即

$$y \frac{dv}{dy} = \sqrt{v^2 + 1}.$$

分离变量, 得

$$\frac{dv}{\sqrt{v^2 + 1}} = \frac{dy}{y}.$$

积分, 得

$$\ln(v + \sqrt{v^2 + 1}) = \ln y - \ln C,$$

或

$$v + \sqrt{v^2 + 1} = \frac{y}{C}.$$

由

$$\left(\frac{y}{C} - v\right)^2 = v^2 + 1,$$

得

$$\frac{y^2}{C^2} - \frac{2yv}{C} = 1,$$

以  $yv = x$  代入上式, 得

$$y^2 = 2C\left(x + \frac{C}{2}\right).$$

这是以  $x$  轴为轴、焦点在原点的抛物线.

## \* 二、可化为齐次的方程

方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1} \quad (3)$$

当  $c = c_1 = 0$  时是齐次的, 否则不是齐次的. 在非齐次的情形, 可用下列变换把它化为齐次方程: 令

$$x = X + h, y = Y + k,$$

其中  $h$  及  $k$  是待定的常数. 于是

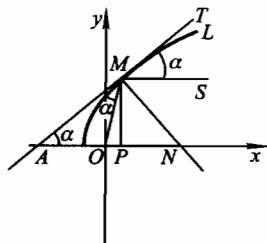


图 7-4

$$dx = dX, dy = dY,$$

从而方程(3)成为

$$\frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY + ah + bk + c}{a_1X + b_1Y + a_1h + b_1k + c_1}.$$

如果方程组

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0, \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0 \end{cases}$$

的系数行列式  $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$ , 即  $\frac{a_1}{a} \neq \frac{b_1}{b}$ , 那么可以定出  $h$  及  $k$  使它们满足上述方程组. 这样, 方程(3)便化为齐次方程

$$\frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY}{a_1X + b_1Y}.$$

求出这齐次方程的通解后, 在通解中以  $x - h$  代  $X$ ,  $y - k$  代  $Y$ , 便得方程(3)的通解.

当  $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b}$  时,  $h$  及  $k$  无法求得, 因此上述方法不能应用. 但这时令  $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$ ,

从而方程(3)可写成

$$\frac{dy}{dx} = \lambda(ax + by) + c_1.$$

引入新变量  $v = ax + by$ , 则

$$\frac{dv}{dx} = a + b \frac{dy}{dx} \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b} \left( \frac{dv}{dx} - a \right).$$

于是方程(3)成为

$$\frac{1}{b} \left( \frac{dv}{dx} - a \right) = \frac{v + c}{\lambda v + c_1},$$

这是可分离变量的方程.

以上所介绍的方法可以应用于更一般的方程

$$\frac{dy}{dx} = f \left( \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1} \right).$$

### 例 3 解方程

$$(2x + y - 4)dx + (x + y - 1)dy = 0.$$

解 所给方程属方程(3)的类型. 令  $x = X + h$ ,  $y = Y + k$ , 则  $dx = dX$ ,  $dy = dY$ , 代入原方程得

$$(2X + Y + 2h + k - 4)dX + (X + Y + h + k - 1)dY = 0.$$

解方程组

$$\begin{cases} 2h + k - 4 = 0, \\ h + k - 1 = 0 \end{cases}$$

得  $h = 3, k = -2$ . 令  $x = X + 3, y = Y - 2$ , 原方程成为

$$(2X + Y)dX + (X + Y)dY = 0,$$

或

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{2X + Y}{X + Y} = -\frac{2 + \frac{Y}{X}}{1 + \frac{Y}{X}},$$

这是齐次方程.

令  $\frac{Y}{X} = u$ , 则  $Y = uX, \frac{dY}{dX} = u + X \frac{du}{dX}$ , 于是方程变为

$$u + X \frac{du}{dX} = -\frac{2 + u}{1 + u},$$

或

$$X \frac{du}{dX} = -\frac{2 + 2u + u^2}{1 + u}.$$

分离变量得

$$-\frac{u+1}{u^2+2u+2} du = \frac{dX}{X}.$$

积分得

$$\ln C_1 - \frac{1}{2} \ln(u^2 + 2u + 2) = \ln |X|,$$

于是

$$\frac{C_1}{\sqrt{u^2 + 2u + 2}} = |X|,$$

或

$$C_2 = X^2(u^2 + 2u + 2) \quad (C_2 = C_1^2),$$

即

$$Y^2 + 2XY + 2X^2 = C_2.$$

以  $X = x - 3, Y = y + 2$  代入上式并化简, 得

$$2x^2 + 2xy + y^2 - 8x - 2y = C \quad (C = C_2 - 10).$$

### 习 题 7-3

1. 求下列齐次方程的通解:

$$(1) xy' - y - \sqrt{y^2 - x^2} = 0; \quad (2) x \frac{dy}{dx} = y \ln \frac{y}{x};$$

$$(3) (x^2 + y^2)dx - xydy = 0; \quad (4) (x^3 + y^3)dx - 3xy^2dy = 0;$$

$$(5) \left(2x \sin \frac{y}{x} + 3y \cos \frac{y}{x}\right)dx - 3x \cos \frac{y}{x} dy = 0;$$

$$(6) (1 + 2e^{\frac{x}{y}})dx + 2e^{\frac{x}{y}} \left(1 + \frac{x}{y}\right)dy = 0.$$

2. 求下列齐次方程满足所给初始条件的特解:

$$(1) (y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0, y|_{x=0} = 1;$$

$$(2) y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, y|_{x=1} = 2;$$

$$(3) (x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0, y|_{x=1} = 1.$$

3. 设有联结点  $O(0,0)$  和  $A(1,1)$  的一段向上凸的曲线弧  $\widehat{OA}$ , 对于  $\widehat{OA}$  上任一点  $P(x,y)$ , 曲线弧  $OP$  与直线段  $\overline{OP}$  所围图形的面积为  $x^2$ , 求曲线弧  $\widehat{OA}$  的方程.

\* 4. 化下列方程为齐次方程, 并求出通解:

- (1)  $(2x - 5y + 3)dx - (2x + 4y - 6)dy = 0$ ;
- (2)  $(x - y - 1)dx + (4y + x - 1)dy = 0$ ;
- (3)  $(3y - 7x + 7)dx + (7y - 3x + 3)dy = 0$ ;
- (4)  $(x + y)dx + (3x + 3y - 4)dy = 0$ .

## 第四节 一阶线性微分方程

### 一、线性方程

方程

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (1)$$

叫做一阶线性微分方程, 因为它对于未知函数  $y$  及其导数是一次方程. 如果  $Q(x) \equiv 0$ , 则方程(1)称为齐次的; 如果  $Q(x) \not\equiv 0$ , 则方程(1)称为非齐次的.

设(1)为非齐次线性方程. 为了求出非齐次线性方程(1)的解, 我们先把  $Q(x)$ 换成零而写出方程

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0. \quad (2)$$

方程(2)叫做对应于非齐次线性方程(1)的齐次线性方程. 方程(2)是可分离变量的, 分离变量后得

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx,$$

两端积分, 得

$$\ln|y| = - \int P(x)dx + C_1,$$

或  $y = C e^{-\int P(x)dx}$  ( $C = \pm e^{C_1}$ ),

这是对应的齐次线性方程(2)的通解<sup>①</sup>.

现在我们使用所谓常数变易法来求非齐次线性方程(1)的通解. 这方法是把(2)的通解中的  $C$ 换成  $x$  的未知函数  $u(x)$ , 即作变换

$$y = u e^{-\int P(x)dx}, \quad (3)$$

<sup>①</sup> 这里记号  $\int P(x)dx$  表示  $P(x)$  的某个确定的原函数.

于是  $\frac{dy}{dx} = u' e^{-\int P(x)dx} + uP(x)e^{-\int P(x)dx}$ . (4)

将(3)和(4)代入方程(1)得

$$u' e^{-\int P(x)dx} + uP(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)ue^{-\int P(x)dx} = Q(x),$$

即

$$u' e^{-\int P(x)dx} = Q(x), u' = Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

两端积分, 得

$$u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C.$$

把上式代入(3), 便得非齐次线性方程(1)的通解

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left( \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right). (5)$$

将(5)式改写成两项之和

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx,$$

上式右端第一项是对应的齐次线性方程(2)的通解, 第二项是非齐次线性方程(1)的一个特解(在(1)的通解(5)中取  $C=0$  便得到这个特解). 由此可知, 一阶非齐次线性方程的通解等于对应的齐次方程的通解与非齐次方程的一个特解之和.

**例 1** 求方程

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$$

的通解.

**解** 这是一个非齐次线性方程. 先求对应的齐次方程的通解.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = 0,$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x+1},$$

$$\ln|y| = 2\ln|x+1| + \ln|C_1|,$$

$$y = C_1(x+1)^2.$$

用常数变易法, 把  $C_1$  换成  $u$ , 即令

$$y = u(x+1)^2, (6)$$

那么

$$\frac{dy}{dx} = u'(x+1)^2 + 2u(x+1),$$

代入所给非齐次方程, 得

$$u' = (x+1)^{\frac{1}{2}}.$$

两端积分, 得

$$u = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

再把上式代入(6)式, 即得所求方程的通解为

$$y = (x+1)^2 \left[ \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} + C \right].$$

例 2 有一个电路如图 7-5 所示, 其中电源电动势为  $E = E_m \sin \omega t$  ( $E_m, \omega$  都是常量), 电阻  $R$  和电感  $L$  都是常量. 求电流  $i(t)$ .

解 (i) 列方程 由电学知道, 当电流变化时,  $L$  上有感应电动势  $-L \frac{di}{dt}$ . 由回路电压定律得出

$$E - L \frac{di}{dt} - iR = 0,$$

即  $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}.$

把  $E = E_m \sin \omega t$  代入上式, 得

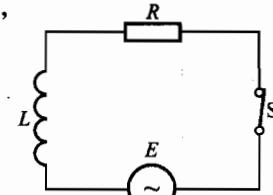


图 7-5

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E_m}{L} \sin \omega t. \quad (7)$$

未知函数  $i(t)$  应满足方程(7). 此外, 设开关  $S$  闭合的时刻为  $t = 0$ , 这时  $i(t)$  还应该满足初始条件

$$i|_{t=0} = 0. \quad (8)$$

(ii) 解方程 方程(7)是一个非齐次线性方程. 可以先求出对应的齐次方程的通解, 然后用常数变易法求非齐次方程的通解. 但是, 也可以直接应用通解公式(5)来求解. 这里  $P(t) = \frac{R}{L}$ ,  $Q(t) = \frac{E_m}{L} \sin \omega t$ , 代入公式(5), 得

$$i(t) = e^{-\frac{R}{L}t} \left( \int \frac{E_m}{L} e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t dt + C \right).$$

应用分部积分法, 得

$$\int e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t dt = \frac{e^{\frac{R}{L}t}}{R^2 + \omega^2 L^2} (RL \sin \omega t - \omega L^2 \cos \omega t),$$

将上式代入前式并化简, 得方程(7)的通解

$$i(t) = \frac{E_m}{R^2 + \omega^2 L^2} (R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t) + C e^{-\frac{R}{L}t},$$

其中  $C$  为任意常数.

将初始条件(8)代入上式, 得

$$C = \frac{\omega L E_m}{R^2 + \omega^2 L^2},$$

因此, 所求函数  $i(t)$  为

$$i(t) = \frac{\omega L E_m}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_m}{R^2 + \omega^2 L^2} (R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t). \quad (9)$$

为了便于说明(9)式所反映的物理现象,下面把  $i(t)$  中第二项的形式稍加改变.

$$\text{令 } \cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}, \sin \varphi = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}},$$

于是(9)式可写成

$$i(t) = \frac{\omega L E_m}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \varphi),$$

其中

$$\varphi = \arctan \frac{\omega L}{R}.$$

当  $t$  增大时,上式右端第一项(叫做暂态电流)逐渐衰减而趋于零;第二项(叫做稳态电流)是正弦函数,它的周期和电动势的周期相同、而相角落后  $\varphi$ .

在上节中,对于齐次方程  $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ , 我们通过变量代换  $y = xu$ , 把它化为变量可分离的方程,然后分离变量,经积分求得通解. 在本节中,对于一阶非齐次线性方程

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

我们通过解对应的齐次线性方程找到变量代换

$$y = u e^{-\int P(x)dx},$$

利用这一代换,把非齐次线性方程化为变量可分离的方程,然后经积分求得通解.

利用变量代换(因变量的变量代换或自变量的变量代换),把一个微分方程化为变量可分离的方程,或化为已经知其求解步骤的方程,这是解微分方程最常用的方法.下面再举一个例子.

例 3 解方程  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y}$ .

解 若把所给方程变形为

$$\frac{dx}{dy} = x + y,$$

即为一阶线性方程,则按一阶线性方程的解法可求得通解.

也可用变量代换来解所给方程:

令  $x+y=u$ , 则  $y=u-x$ ,  $\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-1$ . 代入原方程, 得

$$\frac{du}{dx}-1=\frac{1}{u}, \frac{du}{dx}=\frac{u+1}{u}.$$

分离变量得

$$\frac{u}{u+1}du=dx,$$

两边同时积分

两端积分得  $u - \ln|u + 1| = x + C.$

以  $u = x + y$  代入上式, 即得

$$y - \ln|x + y + 1| = C,$$

或  $x = C_1 e^y - y - 1 \quad (C_1 = \pm e^{-C}).$

## \* 二、伯努利方程

方程

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1) \quad (10)$$

叫做伯努利(Bernoulli)方程. 当  $n = 0$  或  $n = 1$  时, 这是线性微分方程. 当  $n \neq 0, n \neq 1$  时, 这方程不是线性的, 但是通过变量的代换, 便可把它化为线性的. 事实上, 以  $y^n$  除方程(10)的两端, 得

$$y^{1-n} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x). \quad (11)$$

容易看出, 上式左端第一项与  $\frac{d}{dx}(y^{1-n})$  只差一个常数因子  $1 - n$ , 因此我们引入新的因变量

$$z = y^{1-n},$$

那么  $\frac{dz}{dx} = (1 - n)y^{-n} \frac{dy}{dx}.$

用  $(1 - n)$  乘方程(11)的两端, 再通过上述代换便得线性方程

$$\frac{dz}{dx} + (1 - n)P(x)z = (1 - n)Q(x).$$

求出这方程的通解后, 以  $y^{1-n}$  代  $z$  便得到伯努利方程的通解.

### 例 4 求方程

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = a(\ln x)y^2$$

的通解.

解 以  $y^2$  除方程的两端, 得

$$y^{-2} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y^{-1} = a \ln x,$$

即  $-\frac{d(y^{-1})}{dx} + \frac{1}{x}y^{-1} = a \ln x,$

令  $z = y^{-1}$ , 则上述方程成为

$$\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x}z = -a \ln x.$$

这是一个线性方程,它的通解为

$$z = x \left[ C - \frac{a}{2} (\ln x)^2 \right].$$

以  $y^{-1}$  代  $z$ ,得所求方程的通解为

$$yx \left[ C - \frac{a}{2} (\ln x)^2 \right] = 1.$$

### 习题 7-4

1. 求下列微分方程的通解:

$$(1) \frac{dy}{dx} + y = e^{-x};$$

$$(2) xy' + y = x^2 + 3x + 2;$$

$$(3) y' + y \cos x = e^{-\sin x};$$

$$(4) y' + y \tan x = \sin 2x;$$

$$(5) (x^2 - 1)y' + 2xy - \cos x = 0;$$

$$(6) \frac{d\rho}{d\theta} + 3\rho = 2;$$

$$(7) \frac{dy}{dx} + 2xy = 4x;$$

$$(8) y \ln y dx + (x - \ln y) dy = 0;$$

$$(9) (x - 2) \frac{dy}{dx} = y + 2(x - 2)^3;$$

$$(10) (y^2 - 6x) \frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

$$(1) \frac{dy}{dx} - y \tan x = \sec x, y|_{x=0} = 0;$$

$$(2) \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}, y|_{x=\pi} = 1;$$

$$(3) \frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x}, y|_{x=\frac{\pi}{2}} = -4;$$

$$(4) \frac{dy}{dx} + 3y = 8, y|_{x=0} = 2;$$

$$(5) \frac{dy}{dx} + \frac{2-3x^2}{x^3} y = 1, y|_{x=1} = 0.$$

3. 求一曲线的方程,这曲线通过原点,并且它在点  $(x, y)$  处的切线斜率等于  $2x + y$ .

4. 设有一质量为  $m$  的质点作直线运动. 从速度等于零的时刻起,有一个与运动方向一致、大小与时间成正比(比例系数为  $k_1$ )的力作用于它,此外还受一与速度成正比(比例系数为  $k_2$ )的阻力作用. 求质点运动的速度与时间的函数关系.

5. 设有一个由电阻  $R = 10 \Omega$ 、电感  $L = 2 H$  和电源电压  $E = 20 \sin 5t V$  串联组成的电路. 开关  $S$  合上后, 电路中有电流通过. 求电流  $i$  与时间  $t$  的函数关系.

6. 验证形如  $yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0$  的微分方程, 可经变量代换  $v = xy$  化为可分离变量的方程, 并求其通解.

7. 用适当的变量代换将下列方程化为可分离变量的方程, 然后求出通解:

$$(1) \frac{dy}{dx} = (x + y)^2;$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-y} + 1;$$

$$(3) xy' + y = y(\ln x + \ln y);$$

$$(4) y' = y^2 + 2(\sin x - 1)y + \sin^2 x - 2\sin x - \cos x + 1;$$

$$(5) y(xy+1)dx + x(1+xy+x^2y^2)dy = 0.$$

\* 8. 求下列伯努利方程的通解:

$$(1) \frac{dy}{dx} + y = y^2 (\cos x - \sin x);$$

$$(2) \frac{dy}{dx} - 3xy = xy^2;$$

$$(3) \frac{dy}{dx} + \frac{1}{3}y = \frac{1}{3}(1 - 2x)y^4;$$

$$(4) \frac{dy}{dx} + y = xy^5;$$

$$(5) x dy - [y + xy^3(1 + \ln x)] dx = 0.$$

## 第五节 可降阶的高阶微分方程

从这一节起我们将讨论二阶及二阶以上的微分方程,即所谓高阶微分方程.对于有些高阶微分方程,我们可以通过代换将它化成较低阶的方程来求解.以二阶微分方程

$$y'' = f(x, y, y') \quad (1)$$

而论,如果我们能设法作代换把它从二阶降至一阶,那么就有可能应用前面几节中所讲的方法来求出它的解了.

下面介绍三种容易降阶的高阶微分方程的求解方法.

### 一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

微分方程  $y^{(n)} = f(x) \quad (2)$

的右端仅含有自变量  $x$ ,容易看出,只要把  $y^{(n-1)}$  作为新的未知函数,那么(2)式就是新未知函数的一阶微分方程.两边积分,就得到一个  $n-1$  阶的微分方程

$$y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1.$$

同理可得  $y^{(n-2)} = \int [\int f(x) dx + C_1] dx + C_2.$

依此法继续进行,接连积分  $n$  次,便得方程(2)的含有  $n$  个任意常数的通解.

例 1 求微分方程

$$y''' = e^{2x} - \cos x$$

的通解.

解 对所给方程接连积分三次,得

$$y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C,$$

$$y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + Cx + C_2,$$

$$y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + C_1x^2 + C_2x + C_3 \quad \left( C_1 = \frac{C}{2} \right).$$

这就是所求的通解.

**例2** 质量为  $m$  的质点受力  $F$  的作用沿  $Ox$  轴作直线运动. 设力  $F = F(t)$  在开始时刻  $t=0$  时  $F(0) = F_0$ , 随着时间  $t$  的增大, 力  $F$  均匀地减小, 直到  $t=T$  时,  $F(T)=0$ . 如果开始时质点位于原点, 且初速度为零, 求这质点的运动规律.

**解** 设  $x=x(t)$  表示在时刻  $t$  时质点的位置, 根据牛顿第二定律, 质点运动的微分方程为

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(t). \quad (3)$$

由题设, 力  $F(t)$  随  $t$  增大而均匀地减小, 且  $t=0$  时,  $F(0) = F_0$ , 所以  $F(t) = F_0 - kt$ ; 又当  $t=T$  时,  $F(T)=0$ , 从而

$$F(t) = F_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right).$$

于是方程(3)可以写成

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F_0}{m} \left(1 - \frac{t}{T}\right). \quad (4)$$

其初始条件为

$$x|_{t=0} = 0, \quad \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} = 0.$$

把(4)式两端积分, 得

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{m} \int \left(1 - \frac{t}{T}\right) dt,$$

即  $\frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{m} \left(t - \frac{t^2}{2T}\right) + C_1. \quad (5)$

将条件  $\frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} = 0$  代入(5)式, 得

$$C_1 = 0,$$

于是(5)式成为

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{m} \left(t - \frac{t^2}{2T}\right). \quad (6)$$

把(6)式两端积分, 得

$$x = \frac{F_0}{m} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6T}\right) + C_2,$$

将条件  $x|_{t=0} = 0$  代入上式, 得

$$C_2 = 0.$$

于是所求质点的运动规律为

$$x = \frac{F_0}{m} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6T}\right), 0 \leq t \leq T.$$

## 二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

方程

$$y'' = f(x, y') \quad (7)$$

的右端不显含未知函数  $y$ . 如果我们设  $y' = p$ , 那么

$$y'' = \frac{dp}{dx} = p',$$

而方程(7)就成为

$$p' = f(x, p).$$

这是一个关于变量  $x, p$  的一阶微分方程. 设其通解为

$$p = \varphi(x, C_1),$$

但是  $p = \frac{dy}{dx}$ , 因此又得到一个一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, C_1).$$

对它进行积分, 便得方程(7)的通解为

$$y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2.$$

### 例 3 求微分方程

$$(1+x^2)y'' = 2xy'$$

满足初始条件

$$y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = 3$$

的特解.

解 所给方程是  $y'' = f(x, y')$  型的. 设  $y' = p$ , 代入方程并分离变量后, 有

$$\frac{dp}{p} = \frac{2x}{1+x^2} dx.$$

两端积分, 得

$$\ln|p| = \ln(1+x^2) + C,$$

即

$$p = y' = C_1(1+x^2) \quad (C_1 = \pm e^C).$$

由条件  $y'|_{x=0} = 3$ , 得

$$C_1 = 3,$$

所以

$$y' = 3(1+x^2).$$

两端再积分, 得

$$y = x^3 + 3x + C_2.$$

又由条件  $y|_{x=0} = 1$ , 得

$$C_2 = 1,$$

于是所求的特解为

$$y = x^3 + 3x + 1.$$

**例 4** 设有一均匀、柔软的绳索,两端固定,绳索仅受重力的作用而下垂.试问该绳索在平衡状态时是怎样的曲线?

解 设绳索的最低点为  $A$ . 取  $y$  轴通过点  $A$  铅直向上,并取  $x$  轴水平向右. 且  $|OA|$  等于某个定值(这个定值将在以后说明). 设绳索曲线的方程为  $y = \varphi(x)$ . 考察绳索上点  $A$  到另一点  $M(x, y)$  间的一段弧  $\widehat{AM}$ , 设其长为  $s$ . 假定绳索的线密度为  $\rho$ , 则弧  $\widehat{AM}$  所受重力为  $\rho gs$ . 由于绳索是柔软的, 因而在点  $A$  处的张力沿水平的切线方向, 其大小设为  $H$ ; 在点  $M$  处的张力沿该点处的切线方向, 设其倾角为  $\theta$ , 其大小为  $T$  (图 7-6). 因作用于弧段  $\widehat{AM}$  的外力相互平衡, 把作用于弧  $\widehat{AM}$  上的力沿铅直及水平两方向分解, 得

$$T \sin \theta = \rho gs, T \cos \theta = H.$$

将此两式相除, 得

$$\tan \theta = \frac{1}{a} s \quad \left( a = \frac{H}{\rho g} \right).$$

由于  $\tan \theta = y'$ ,  $s = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx$ ,

代入上式即得

$$y' = \frac{1}{a} \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

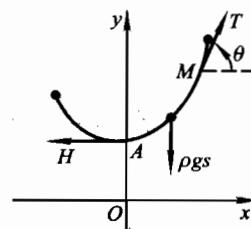


图 7-6

将上式两端对  $x$  求导, 便得  $y = \varphi(x)$  满足的微分方程

$$y'' = \frac{1}{a} \sqrt{1 + y'^2}. \quad (8)$$

取原点  $O$  到点  $A$  的距离为定值  $a$ , 即  $|OA| = a$ , 那么初始条件为

$$y|_{x=0} = a, y'|_{x=0} = 0.$$

下面来解方程(8).

方程(8)属于  $y'' = f(x, y')$  的类型. 设

$$y' = p, \quad \text{则 } y'' = \frac{dp}{dx},$$

代入方程(8), 并分离变量, 得

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{dx}{a}.$$

两端积分, 得

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = \frac{x}{a} + C_1. \quad (9)$$

把条件  $y'|_{x=0} = p|_{x=0} = 0$  代入(9)式, 得

$$C_1 = 0,$$

于是(9)式成为

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = \frac{x}{a},$$

解得

$$p = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}),$$

即

$$y' = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}).$$

积分上式两端, 便得

$$y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) + C_2. \quad (10)$$

将条件  $y|_{x=0} = a$  代入(10)式, 得

$$C_2 = 0.$$

于是该绳索的形状可由曲线方程

$$y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$$

来表示. 这曲线叫做悬链线.

### 三、 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

方程

$$y'' = f(y, y') \quad (11)$$

中不明显地含自变量  $x$ . 为了求出它的解, 我们令  $y' = p$ , 并利用复合函数的求导法则把  $y''$  化为对  $y$  的导数, 即

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}.$$

这样, 方程(11)就成为

$$p \frac{dp}{dy} = f(y, p).$$

这是一个关于变量  $y, p$  的一阶微分方程. 设它的通解为

$$y' = p = \varphi(y, C_1),$$

分离变量并积分, 便得方程(11)的通解为

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

例 5 求微分方程

$$yy'' - y'^2 = 0 \quad (12)$$

的通解.

解 方程(12)不明显地含自变量  $x$ , 设

$$y' = p, \quad \text{则} \quad y'' = p \frac{dp}{dy},$$

代入方程(12), 得

$$yp \frac{dp}{dy} - p^2 = 0.$$

在  $y \neq 0, p \neq 0$  时, 约去  $p$  并分离变量, 得

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}.$$

两端积分, 得

$$\ln|p| = \ln|y| + C,$$

即  $p = C_1 y$ , 或  $y' = C_1 y$  ( $C_1 = \pm e^C$ ).

再分离变量并两端积分, 便得方程(12)的通解为

$$\ln|y| = C_1 x + C'_2,$$

或  $y = C_2 e^{C_1 x}$  ( $C_2 = \pm e^{C'_2}$ ).

**例 6** 一个离地面很高的物体, 受地球引力的作用由静止开始落向地面. 求它落到地面时的速度和所需的时间(不计空气阻力).

解 取联结地球中心与该物体的直线为  $y$  轴, 其方向铅直向上, 取地球的中心为原点  $O$ (图 7-7).

设地球的半径为  $R$ , 物体的质量为  $m$ , 物体开始下落时与地球中心的距离为  $l$  ( $l > R$ ), 在时刻  $t$  物体所在位置为  $y = \varphi(t)$ , 于是速度为  $v(t) = \frac{dy}{dt}$ . 根据万有引力定律, 即得微分方程

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{GmM}{y^2},$$

即  $\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{GM}{v^2}, \quad (13)$

其中  $M$  为地球的质量,  $G$  为引力常数. 因为当  $y = R$  时,  $\frac{d^2 y}{dt^2} = -g$  (这里置负号是由于物体运动加速度的方向与

$y$  轴的正向相反的缘故), 所以  $g = \frac{GM}{R^2}$ ,  $GM = gR^2$ . 于是方程(13)成为

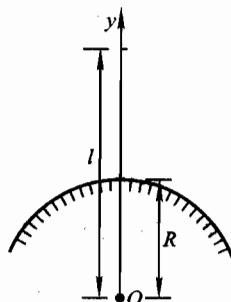


图 7-7

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{gR^2}{y^2}. \quad (14)$$

初始条件是

$$y|_{t=0} = l, y'|_{t=0} = 0.$$

先求物体到达地面时的速度. 由  $\frac{dy}{dt} = v$ , 得

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = v \frac{dv}{dy},$$

代入方程(14)并分离变量, 得

$$v dv = -\frac{gR^2}{y^2} dy.$$

两端积分, 得

$$v^2 = \frac{2gR^2}{y} + C_1.$$

把初始条件代入上式, 得

$$C_1 = -\frac{2gR^2}{l},$$

于是

$$v^2 = 2gR^2 \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{l} \right), v = -R \sqrt{2g \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{l} \right)}. \quad (15)$$

这里取负号是由于物体运动的方向与  $y$  轴的正向相反的缘故.

在(15)式中令  $y = R$ , 就得到物体到达地面时的速度为

$$v = -\sqrt{\frac{2gR(l-R)}{l}}.$$

下面来求物体落到地面所需的时间. 由(15)式有

$$\frac{dy}{dt} = v = -R \sqrt{2g \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{l} \right)},$$

分离变量得

$$dt = -\frac{1}{R} \sqrt{\frac{l}{2g}} \sqrt{\frac{y}{l-y}} dy.$$

两端积分(对右端积分利用置换  $y = l \cos^2 u$ ), 得

$$t = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{l}{2g}} \left( \sqrt{ly - y^2} + l \arccos \sqrt{\frac{y}{l}} \right) + C_2. \quad (16)$$

由条件  $y|_{t=0} = l$ , 得

$$C_2 = 0.$$

于是(16)式成为

$$t = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{l}{2g}} \left( \sqrt{ly - y^2} + l \arccos \sqrt{\frac{y}{l}} \right).$$

在上式中令  $y = R$ , 便得到物体到达地面所需的时间为

$$t = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{l}{2g}} \left( \sqrt{IR - R^2} + l \arccos \sqrt{\frac{R}{l}} \right).$$

### 习题 7-5

1. 求下列各微分方程的通解:

- $$\begin{array}{ll} (1) y'' = x + \sin x; & (2) y''' = xe^x; \\ (3) y'' = \frac{1}{1+x^2}; & (4) y'' = 1 + y'^2; \\ (5) y'' = y' + x; & (6) xy'' + y' = 0; \\ (7) yy'' + 2y'^2 = 0; & (8) y^3 y'' + 1 = 0; \\ (9) y'' = \frac{1}{\sqrt{y}}; & (10) y'' = (y')^3 + y'. \end{array}$$

2. 求下列各微分方程满足所给初始条件的特解:

- $$\begin{array}{l} (1) y^3 y'' + 1 = 0, y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = 0; \\ (2) y'' - ay'^2 = 0, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = -1; \\ (3) y''' = e^{ax}, y|_{x=1} = y'|_{x=1} = y''|_{x=1} = 0; \\ (4) y'' = e^{2y}, y|_{x=0} = y'|_{x=0} = 0; \\ (5) y'' = 3\sqrt{y}, y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 2; \\ (6) y'' + (y')^2 = 1, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 0. \end{array}$$

3. 试求  $y'' = x$  的经过点  $M(0, 1)$  且在此点与直线  $y = \frac{x}{2} + 1$  相切的积分曲线.

4. 设有一质量为  $m$  的物体, 在空中由静止开始下落, 如果空气阻力为  $R = cv$  (其中  $c$  为常数,  $v$  为物体运动的速度), 试求物体下落的距离  $s$  与时间  $t$  的函数关系.

### 第六节 高阶线性微分方程

本节和以下两节, 我们将讨论在实际问题中应用得较多的所谓高阶线性微分方程. 讨论时以二阶线性微分方程为主.

#### 一、二阶线性微分方程举例

**例 1** 设有一个弹簧, 它的上端固定, 下端挂一个质量为  $m$  的物体. 当物体处于静止状态时, 作用在物体上的重力与弹性力大小相等、方向相反. 这个位置就是物体的平衡位置. 如图 7-8, 取  $x$  轴铅直向下, 并取物体的平衡位置为坐标原点.

如果使物体具有一个初始速度  $v_0 \neq 0$ , 那么物体便离开平衡位置, 并在平衡

位置附近作上下振动。在振动过程中，物体的位置  $x$  随时间  $t$  变化，即  $x$  是  $t$  的函数： $x = x(t)$ 。要确定物体的振动规律，就要求出函数  $x = x(t)$ 。

由力学知道，弹簧使物体回到平衡位置的弹性恢复力  $f$ （它不包括在平衡位置时和重力  $mg$  相平衡的那一部分弹性力）和物体离开平衡位置的位移  $x$  成正比：

$$f = -cx,$$

其中  $c$  为弹簧的弹性系数，负号表示弹性恢复力的方向和物体位移的方向相反。

另外，物体在运动过程中还受到阻尼介质（如空气、油等）的阻力的作用，使得振动逐渐趋向停止。由实验知道，阻力  $R$  的方向总与运动方向相反，当运动速度不大时，其大小与物体运动的速度成正比，设比例系数为  $\mu$ ，则有

$$R = -\mu \frac{dx}{dt}.$$

根据上述关于物体受力情况的分析，由牛顿第二定律得

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -cx - \mu \frac{dx}{dt}.$$

移项，并记

$$2n = \frac{\mu}{m}, \quad k^2 = \frac{c}{m},$$

则上式化为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2 x = 0. \quad (1)$$

这就是在有阻尼的情况下，物体自由振动的微分方程。

如果物体在振动过程中，还受到铅直干扰力

$$F = H \sin pt$$

的作用，则有

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2 x = h \sin pt, \quad (2)$$

其中  $h = \frac{H}{m}$ 。这就是强迫振动的微分方程。

**例 2** 设有一个由电阻  $R$ 、自感  $L$ 、电容  $C$  和电源  $E$  串联组成的电路，其中  $R$ 、 $L$  及  $C$  为常数， $E = E_m \sin \omega t$ ，这里  $E_m$  及  $\omega$  也是常数（图 7-9）。

设电路中的电流为  $i(t)$ ，电容器极板上的电荷量为  $q(t)$ ，两极板间的电压为  $u_C$ ，自感电动势为  $E_L$ 。由电学知道

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad u_C = \frac{q}{C}, \quad E_L = -L \frac{di}{dt},$$

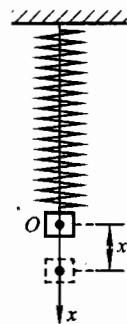


图 7-8

根据回路电压定律,得

$$E - L \frac{di}{dt} - \frac{q}{C} - Ri = 0,$$

即  $LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = E_m \sin \omega t,$

或写成

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + 2\beta \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = \frac{E_m}{LC} \sin \omega t. \quad (3)$$

式中  $\beta = \frac{R}{2L}$ ,  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . 这就是串联电路的振荡方程.

如果电容器经充电后撤去外电源( $E = 0$ ),则方程(3)成为

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + 2\beta \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = 0. \quad (4)$$

例1和例2虽然是两个不同的实际问题,但是仔细观察一下所得出的方程(2)和(3),就会发现它们可以归结为同一个形式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = f(x), \quad (5)$$

而方程(1)和方程(4)都是方程(5)的特殊情形: $f(x) \equiv 0$ . 在工程技术的其他许多问题中,也会遇到上述类型的微分方程.

方程(5)叫做二阶线性微分方程.当方程右端  $f(x) \equiv 0$  时,方程叫做齐次的;当  $f(x) \neq 0$  时,方程叫做非齐次的.

于是方程(2)、(3)都是二阶非齐次线性微分方程;方程(1)、(4)都是二阶齐次线性微分方程.

要进一步讨论例1和例2中的问题,就需要解二阶线性微分方程.为此,下面来讨论二阶线性微分方程的解的一些性质,这些性质可以推广到  $n$  阶线性方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x).$$

## 二、线性微分方程的解的结构

先讨论二阶齐次线性方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \quad (6)$$

**定理1** 如果函数  $y_1(x)$  与  $y_2(x)$  是方程(6)的两个解,那么

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad (7)$$

也是(6)的解,其中  $C_1, C_2$  是任意常数.

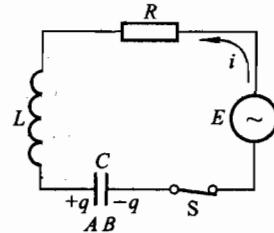


图 7-9

证 将(7)式代入(6)式左端,得

$$\begin{aligned} & [C_1 y_1'' + C_2 y_2''] + P(x)[C_1 y_1' + C_2 y_2'] + Q(x)[C_1 y_1 + C_2 y_2] \\ & = C_1[y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1] + C_2[y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2]. \end{aligned}$$

由于  $y_1$  与  $y_2$  是方程(6)的解,上式右端方括号中的表达式都恒等于零,因而整个式子恒等于零,所以(7)式是方程(6)的解.

解(7)从形式上来看含有  $C_1$  与  $C_2$  两个任意常数,但它不一定是方程(6)的通解.例如,设  $y_1(x)$  是(6)的一个解,则  $y_2(x) = 2y_1(x)$  也是(6)的解.这时(7)式成为  $y = C_1 y_1(x) + 2C_2 y_1(x)$ ,可以把它改写成  $y = Cy_1(x)$ ,其中  $C = C_1 + 2C_2$ .这显然不是(6)的通解.那么在什么情况下(7)式才是方程(6)的通解呢?要解决这个问题,还得引入一个新的概念,即所谓函数组的线性相关与线性无关.

设  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  为定义在区间  $I$  上的  $n$  个函数,如果存在  $n$  个不全为零的常数  $k_1, k_2, \dots, k_n$ ,使得当  $x \in I$  时有恒等式

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 + \dots + k_n y_n \equiv 0$$

成立,那么称这  $n$  个函数在区间  $I$  上线性相关;否则称线性无关.

例如,函数  $1, \cos^2 x, \sin^2 x$  在整个数轴上是线性相关的.因为取  $k_1 = 1, k_2 = k_3 = -1$ ,就有恒等式

$$1 - \cos^2 x - \sin^2 x \equiv 0.$$

又如,函数  $1, x, x^2$  在任何区间  $(a, b)$  内是线性无关的.因为如果  $k_1, k_2, k_3$  不全为零,那么在该区间内至多只有两个  $x$  值能使二次三项式

$$k_1 + k_2 x + k_3 x^2$$

为零;要使它恒等于零,必须  $k_1, k_2, k_3$  全为零.

应用上述概念可知,对于两个函数的情形,它们线性相关与否,只要看它们的比是否为常数:如果比为常数,那么它们就线性相关;否则就线性无关.

有了函数线性相关或线性无关的概念后,我们有如下关于二阶齐次线性微分方程(6)的通解结构的定理.

**定理 2** 如果  $y_1(x)$  与  $y_2(x)$  是方程(6)的两个线性无关的特解,那么

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad (C_1, C_2 \text{ 是任意常数})$$

就是方程(6)的通解.

例如,方程  $y'' + y = 0$  是二阶齐次线性方程(这里  $P(x) \equiv 0, Q(x) \equiv 1$ ).容易验证,  $y_1 = \cos x$  与  $y_2 = \sin x$  是所给方程的两个解,且  $\frac{y_2}{y_1} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \neq \text{常数}$ ,

即它们是线性无关的.因此方程  $y'' + y = 0$  的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

又如,方程  $(x-1)y'' - xy' + y = 0$  也是二阶齐次线性方程(这里  $P(x) = -\frac{x}{x-1}$ ,  $Q(x) = \frac{1}{x-1}$ ). 容易验证  $y_1 = x$ ,  $y_2 = e^x$  是所给方程的两个解,且  $\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^x}{x} \neq$  常数,即它们是线性无关的. 因此方程的通解为

$$y = C_1 x + C_2 e^x.$$

定理 2 不难推广到  $n$  阶齐次线性方程.

**推论** 如果  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  是  $n$  阶齐次线性方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

的  $n$  个线性无关的解,那么,此方程的通解为

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x),$$

其中  $C_1, C_2, \dots, C_n$  为任意常数.

下面讨论二阶非齐次线性方程(5). 我们把方程(6)叫做与非齐次方程(5)对应的齐次方程.

在第四节中我们已经看到,一阶非齐次线性微分方程的通解由两部分构成:一部分是对应的齐次方程的通解;另一部分是非齐次方程本身的一个特解. 实际上,不仅一阶非齐次线性微分方程的通解具有这样的结构,而且二阶及更高阶的非齐次线性微分方程的通解也具有同样的结构.

**定理 3** 设  $y^*(x)$  是二阶非齐次线性方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad (5)$$

的一个特解.  $Y(x)$  是与(5)对应的齐次方程(6)的通解,那么

$$y = Y(x) + y^*(x) \quad (8)$$

是二阶非齐次线性微分方程(5)的通解.

**证** 把(8)式代入方程(5)的左端,得

$$\begin{aligned} & (Y'' + y^{**}) + P(x)(Y' + y') + Q(x)(Y + y^*) \\ &= [Y'' + P(x)Y' + Q(x)Y] + [y^{**} + P(x)y' + Q(x)y^*], \end{aligned}$$

由于  $Y$  是方程(6)的解,  $y^*$  是(5)的解, 可知第一个括号内的表达式恒等于零, 第二个恒等于  $f(x)$ . 这样,  $y = Y + y^*$  使(5)的两端恒等. 即(8)式是方程(5)的解.

由于对应的齐次方程(6)的通解  $Y = C_1 y_1 + C_2 y_2$  中含有两个任意常数, 所以  $y = Y + y^*$  中也含有两个任意常数, 从而它就是二阶非齐次线性方程(5)的通解.

例如, 方程  $y'' + y = x^2$  是二阶非齐次线性微分方程. 已知  $Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$  是对应的齐次方程  $y'' + y = 0$  的通解; 又容易验证  $y^* = x^2 - 2$  是所给方

程的一个特解.因此

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - 2$$

是所给方程的通解.

非齐次线性微分方程(5)的特解有时可用下述定理来帮助求出.

**定理4** 设非齐次线性方程(5)的右端  $f(x)$  是两个函数之和,即

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x), \quad (9)$$

而  $y_1^*(x)$  与  $y_2^*(x)$  分别是方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$$

与

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$$

的特解,那么  $y_1^*(x) + y_2^*(x)$  就是原方程的特解.

**证** 将  $y = y_1^* + y_2^*$  代入方程(9)的左端,得

$$\begin{aligned} & (y_1^* + y_2^*)'' + P(x)(y_1^* + y_2^*)' + Q(x)(y_1^* + y_2^*) \\ &= [y_1^{*\prime\prime} + P(x)y_1^* + Q(x)y_1^*] + [y_2^{*\prime\prime} + P(x)y_2^* + Q(x)y_2^*] \\ &= f_1(x) + f_2(x). \end{aligned}$$

因此  $y_1^* + y_2^*$  是方程(9)的一个特解.

这一定理通常称为线性微分方程的解的叠加原理.

定理3 和定理4 也可推广到  $n$  阶非齐次线性方程,这里不再赘述.

### \* 三、常数变易法

在第四节中,为解一阶非齐次线性方程,我们用了常数变易法.这方法的特点是:如果  $Cy_1(x)$  是齐次线性方程的通解,那么,可以利用变换  $y = uy_1(x)$  (这变换是把齐次方程的通解中的任意常数  $C$  换成未知函数  $u(x)$  而得到的)去解非齐次线性方程.这一方法也适用于解高阶线性方程.下面就二阶线性方程来作讨论.

如果已知齐次方程(6)的通解为

$$Y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

那么,可以用如下的常数变易法去求非齐次方程(5)的通解:

$$\text{令 } y = y_1(x)v_1 + y_2(x)v_2, \quad (10)$$

要确定未知函数  $v_1(x)$  及  $v_2(x)$  使(10)式所表示的函数满足非齐次方程(5).为此,对(10)式求导,得

$$y' = y_1v'_1 + y_2v'_2 + y'_1v_1 + y'_2v_2.$$

由于两个未知函数  $v_1, v_2$  只需使(10)式所表示的函数满足一个关系式(5),所以可规定它们再满足一个关系式.从  $y'$  的上述表示式可看出,为了使  $y''$  的表示

式中不含  $v_1''$  和  $v_2''$ , 可设

$$y_1 v_1' + y_2 v_2' = 0, \quad (11)$$

从而

$$y' = y_1' v_1 + y_2' v_2,$$

再求导, 得

$$y'' = y_1' v_1' + y_2' v_2' + y_1'' v_1 + y_2'' v_2.$$

把  $y$ 、 $y'$ 、 $y''$  代入方程(5), 得

$$y_1' v_1' + y_2' v_2' + y_1'' v_1 + y_2'' v_2 + P(y_1' v_1 + y_2' v_2) + Q(y_1 v_1 + y_2 v_2) = f,$$

整理得

$$y_1' v_1' + y_2' v_2' + (y_1'' + Py_1' + Qy_1) v_1 + (y_2'' + Py_2' + Qy_2) v_2 = f.$$

注意到  $y_1$  及  $y_2$  是齐次方程(6)的解, 故上式即为

$$y_1' v_1' + y_2' v_2' = f. \quad (12)$$

联立方程(11)与(12), 在系数行列式

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 \neq 0$$

时, 可解得

$$v_1' = -\frac{y_2 f}{W}, \quad v_2' = \frac{y_1 f}{W}.$$

对上两式积分(假定  $f(x)$  连续), 得

$$v_1 = C_1 + \int \left( -\frac{y_2 f}{W} \right) dx, \quad v_2 = C_2 + \int \frac{y_1 f}{W} dx.$$

于是得非齐次方程(5)的通解为

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 - y_1 \int \frac{y_2 f}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 f}{W} dx.$$

**例 3** 已知齐次方程  $(x-1)y'' - xy' + y = 0$  的通解为  $Y(x) = C_1 x + C_2 e^x$ , 求非齐次方程  $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2$  的通解.

解 把所给方程写成标准形式

$$y'' - \frac{x}{x-1} y' + \frac{1}{x-1} y = x-1.$$

令  $y = xv_1 + e^x v_2$ . 按照

$$\begin{cases} y_1 v_1' + y_2 v_2' = 0, \\ y_1' v_1' + y_2' v_2' = f. \end{cases}$$

有

$$\begin{cases} xv_1' + e^x v_2' = 0, \\ v_1' + e^x v_2' = x-1, \end{cases}$$

解得

$$v_1' = -1, \quad v_2' = xe^{-x}.$$

积分, 得

$$v_1 = C_1 - x, v_2 = C_2 - (x+1)e^{-x}.$$

于是所求非齐次方程的通解为

$$y = C_1 x + C_2 e^x - (x^2 + x + 1).$$

如果只知齐次方程(6)的一个不恒为零的解  $y_1(x)$ , 那么, 利用变换  $y = u y_1(x)$ , 可把非齐次方程(5)化为一阶线性方程.

事实上, 把

$$y = y_1 u, y' = y_1 u' + y'_1 u, y'' = y_1 u'' + 2y'_1 u' + y''_1 u$$

代入方程(5), 得

$$y_1 u'' + 2y'_1 u' + y''_1 u + P(y_1 u' + y'_1 u) + Qy_1 u = f,$$

$$\text{即 } y_1 u'' + (2y'_1 + Py_1) u' + (y''_1 + Py'_1 + Qy_1) u = f,$$

由于  $y''_1 + Py'_1 + Qy_1 \equiv 0$ , 故上式为

$$y_1 u'' + (2y'_1 + Py_1) u' = f.$$

令  $u' = z$ , 上式即化为一阶线性方程

$$y_1 z' + (2y'_1 + Py_1) z = f. \quad (13)$$

把方程(5)化为方程(13)以后, 按一阶线性方程的解法, 设求得方程(13)的通解为

$$z = C_2 Z(x) + z^*(x),$$

积分得  $u = C_1 + C_2 U(x) + u^*(x)$  (其中  $U'(x) = Z(x)$ ,  $u^{**}(x) = z^*(x)$ ),

上式乘以  $y_1(x)$ , 便得方程(5)的通解

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 U(x) y_1(x) + u^*(x) y_1(x).$$

上述方法显然也适用于求齐次方程(6)的通解.

**例 4** 已知  $y_1(x) = e^x$  是齐次方程  $y'' - 2y' + y = 0$  的解, 求非齐次方程  $y'' - 2y' + y = \frac{1}{x}e^x$  的通解.

**解** 令  $y = e^x u$ , 则  $y' = e^x(u' + u)$ ,  $y'' = e^x(u'' + 2u' + u)$ , 代入非齐次方程, 得

$$e^x(u'' + 2u' + u) - 2e^x(u' + u) + e^x u = \frac{1}{x}e^x,$$

$$\text{即 } e^x u'' = \frac{1}{x}e^x, u'' = \frac{1}{x}.$$

这里不需再作变换去化为一阶线性方程, 只要直接积分, 便得

$$u' = C + \ln|x|,$$

再积分得  $u = C_1 + Cx + x \ln|x| + x$ ,

$$\text{即 } u = C_1 + C_2 x + x \ln|x| \quad (C_2 = C - 1).$$

于是所求通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + x e^x \ln|x|.$$

## 习 题 7-6

1. 下列函数组在其定义区间内哪些是线性无关的?

(1)  $x, x^2;$

(2)  $x, 2x;$

(3)  $e^{2x}, 3e^{2x};$

(4)  $e^{-x}, e^x;$

(5)  $\cos 2x, \sin 2x;$

(6)  $e^{x^2}, x e^{x^2};$

(7)  $\sin 2x, \cos x \sin x;$

(8)  $e^x \cos 2x, e^x \sin 2x;$

(9)  $\ln x, x \ln x;$

(10)  $e^{ax}, e^{bx} (a \neq b).$

2. 验证  $y_1 = \cos \omega x$  及  $y_2 = \sin \omega x$  都是方程  $y'' + \omega^2 y = 0$  的解, 并写出该方程的通解.

3. 验证  $y_1 = e^{x^2}$  及  $y_2 = x e^{x^2}$  都是方程  $y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0$  的解, 并写出该方程的通解.

4. 验证:

(1)  $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{12} e^{5x}$  ( $C_1, C_2$  是任意常数) 是方程  $y'' - 3y' + 2y = e^{5x}$  的通解;

(2)  $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{32} (4x \cos x + \sin x)$  ( $C_1, C_2$  是任意常数) 是方程  $y'' + 9y = x \cos x$  的通解;

(3)  $y = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x$  ( $C_1, C_2$  是任意常数) 是方程  $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$  的通解;

(4)  $y = C_1 x^5 + \frac{C_2}{x} - \frac{x^2}{9} \ln x$  ( $C_1, C_2$  是任意常数) 是方程  $x^2 y'' - 3xy' + 5y = x^2 \ln x$  的通解;

(5)  $y = \frac{1}{x} (C_1 e^x + C_2 e^{-x}) + \frac{e^x}{2}$  ( $C_1, C_2$  是任意常数) 是方程  $xy'' + 2y' - xy = e^x$  的通解.

(6)  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - x^2$  ( $C_1, C_2, C_3, C_4$  是任意常数) 是方程  $y^{(4)} - y = x^2$  的通解.

\* 5. 已知  $y_1(x) = e^x$  是齐次线性方程

$$(2x-1)y'' - (2x+1)y' + 2y = 0$$

的一个解, 求此方程的通解.

\* 6. 已知  $y_1(x) = x$  是齐次线性方程  $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$  的一个解, 求非齐次线性方程  $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 2x^3$  的通解.

\* 7. 已知齐次线性方程  $y'' + y = 0$  的通解为  $Y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ , 求非齐次线性方程  $y'' + y = \sec x$  的通解.

\* 8. 已知齐次线性方程  $x^2 y'' - xy' + y = 0$  的通解为  $Y(x) = C_1 x + C_2 x \ln|x|$ , 求非齐次线性方程  $x^2 y'' - xy' + y = x$  的通解.

## 第七节 常系数齐次线性微分方程

先讨论二阶常系数齐次线性微分方程的解法,再把二阶方程的解法推广到  $n$  阶方程.

### 在二阶齐次线性微分方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (1)$$

中,如果  $y'$ 、 $y$  的系数  $P(x)$ 、 $Q(x)$  均为常数,即(1)式成为

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (2)$$

其中  $p$ 、 $q$  是常数,则称(2)为二阶常系数齐次线性微分方程.如果  $p$ 、 $q$  不全为常数,称(1)为二阶变系数齐次线性微分方程.

由上节讨论可知,要找微分方程(2)的通解,可以先求出它的两个解  $y_1$ 、 $y_2$ ,

如果  $\frac{y_2}{y_1} \neq$  常数,即  $y_1$  与  $y_2$  线性无关,那么  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$  就是方程(2)的通解.

当  $r$  为常数时,指数函数  $y = e^{rx}$  和它的各阶导数都只相差一个常数因子.由于指数函数有这个特点,因此我们用  $y = e^{rx}$  来尝试,看能否选取适当的常数  $r$ ,使  $y = e^{rx}$  满足方程(2).

将  $y = e^{rx}$  求导<sup>①</sup>,得到

$$y' = r e^{rx}, \quad y'' = r^2 e^{rx}.$$

把  $y$ 、 $y'$  和  $y''$  代入方程(2),得

$$(r^2 + pr + q)e^{rx} = 0.$$

由于  $e^{rx} \neq 0$ ,所以

$$r^2 + pr + q = 0. \quad (3)$$

由此可见,只要  $r$  满足代数方程(3),函数  $y = e^{rx}$  就是微分方程(2)的解,我们把代数方程(3)叫做微分方程(2)的特征方程.

特征方程(3)是一个二次代数方程,其中  $r^2$ 、 $r$  的系数及常数项恰好依次是微分方程(2)中  $y''$ 、 $y'$  及  $y$  的系数.

① 当  $r$  为复数  $a + ib$ ,  $x$  为实变数时,导数公式  $\frac{d}{dx}e^{rx} = re^{rx}$  仍成立.事实上,对欧拉公式

$$e^{(a+ib)x} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$$

两端求导,得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}e^{(a+ib)x} &= ae^{ax}(\cos bx + i \sin bx) + e^{ax}(-b \sin bx + ib \cos bx) \\ &= (a + ib)e^{ax}(\cos bx + i \sin bx) = (a + ib)e^{(a+ib)x}. \end{aligned}$$

特征方程(3)的两个根  $r_1, r_2$  可以用公式

$$r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

求出. 它们有三种不同的情形:

(i) 当  $p^2 - 4q > 0$  时,  $r_1, r_2$  是两个不相等的实根:

$$r_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad r_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2};$$

(ii) 当  $p^2 - 4q = 0$  时,  $r_1, r_2$  是两个相等的实根:

$$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2};$$

(iii) 当  $p^2 - 4q < 0$  时,  $r_1, r_2$  是一对共轭复根:

$$r_1 = \alpha + i\beta, \quad r_2 = \alpha - i\beta,$$

其中  $\alpha = -\frac{p}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}.$

相应的, 微分方程(2)的通解也有三种不同的情形. 分别讨论如下:

(i) 特征方程有两个不相等的实根:  $r_1 \neq r_2$ .

由上面的讨论知道,  $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$  是微分方程(2)的两个解, 并且  $\frac{y_2}{y_1} =$

$\frac{e^{r_2 x}}{e^{r_1 x}} = e^{(r_2 - r_1)x}$  不是常数, 因此微分方程(2)的通解为

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

(ii) 特征方程有两个相等的实根:  $r_1 = r_2$ .

这时, 只得到微分方程(2)的一个解

$$y_1 = e^{r_1 x}.$$

为了得出微分方程(2)的通解, 还需求出另一个解  $y_2$ , 并且要求  $\frac{y_2}{y_1}$  不是常数.

设  $\frac{y_2}{y_1} = u(x)$ , 即  $y_2 = e^{r_1 x} u(x)$ . 下面来求  $u(x)$ .

将  $y_2$  求导, 得

$$\begin{aligned} y'_2 &= e^{r_1 x} (u' + r_1 u), \\ y''_2 &= e^{r_1 x} (u'' + 2r_1 u' + r_1^2 u), \end{aligned}$$

将  $y_2, y'_2$  和  $y''_2$  代入微分方程(2), 得

$$e^{r_1 x} [(u'' + 2r_1 u' + r_1^2 u) + p(u' + r_1 u) + qu] = 0,$$

约去  $e^{r_1 x}$ , 并以  $u'', u', u$  为准合并同类项, 得

$$u'' + (2r_1 + p)u' + (r_1^2 + pr_1 + q)u = 0.$$

由于  $r_1$  是特征方程(3)的二重根. 因此  $r_1^2 + pr_1 + q = 0$ , 且  $2r_1 + p = 0$ , 于是得

$$u'' = 0.$$

因为这里只要得到一个不为常数的解, 所以不妨选取  $u = x$ , 由此得到微分方程(2)的另一个解

$$y_2 = xe^{r_1 x}.$$

从而微分方程(2)的通解为

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x},$$

即

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}.$$

(iii) 特征方程有一对共轭复根;  $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$  ( $\beta \neq 0$ ).

这时,  $y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}$ ,  $y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$  是微分方程(2)的两个解, 但它们是复值函数形式. 为了得出实值函数形式的解, 先利用欧拉公式  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  把  $y_1, y_2$  改写为

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x),$$

$$y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x).$$

由于复值函数  $y_1$  与  $y_2$  之间成共轭关系, 因此, 取它们的和除以 2 就得到它们的实部; 取它们的差除以  $2i$  就得到它们的虚部. 由于方程(2)的解符合叠加原理, 所以实值函数

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

还是微分方程(2)的解, 且  $\frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_2} = \frac{e^{\alpha x} \cos \beta x}{e^{\alpha x} \sin \beta x} = \cot \beta x$  不是常数, 所以微分方程(2)的

通解为

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

综上所述, 求二阶常系数齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (2)$$

的通解的步骤如下:

第一步 写出微分方程(2)的特征方程

$$r^2 + pr + q = 0. \quad (3)$$

第二步 求出特征方程(3)的两个根  $r_1, r_2$ .

第三步 根据特征方程(3)的两个根的不同情形, 按照下列表格写出微分方

程(2)的通解：

特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的两个根 $r_1, r_2$	微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解
两个不相等的实根 $r_1, r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
两个相等的实根 $r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
一对共轭复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

例 1 求微分方程  $y'' - 2y' - 3y = 0$  的通解.

解 所给微分方程的特征方程为

$$r^2 - 2r - 3 = 0,$$

其根  $r_1 = -1, r_2 = 3$  是两个不相等的实根, 因此所求通解为

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

例 2 求方程  $\frac{d^2 s}{dt^2} + 2 \frac{ds}{dt} + s = 0$  满足初始条件  $s|_{t=0} = 4, s'|_{t=0} = -2$  的特解.

解 所给方程的特征方程为

$$r^2 + 2r + 1 = 0,$$

其根  $r_1 = r_2 = -1$  是两个相等的实根, 因此所求微分方程的通解为

$$s = (C_1 + C_2 t) e^{-t}.$$

将条件  $s|_{t=0} = 4$  代入通解, 得  $C_1 = 4$ , 从而

$$s = (4 + C_2 t) e^{-t}.$$

将上式对  $t$  求导, 得

$$s' = (C_2 - 4 - C_2 t) e^{-t}.$$

再把条件  $s'|_{t=0} = -2$  代入上式, 得  $C_2 = 2$ . 于是所求特解为

$$s = (4 + 2t) e^{-t}.$$

例 3 求微分方程  $y'' - 2y' + 5y = 0$  的通解.

解 所给方程的特征方程为

$$r^2 - 2r + 5 = 0,$$

其根  $r_{1,2} = 1 \pm 2i$  为一对共轭复根. 因此所求通解为

$$y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

例 4 在第六节例 1 中, 设物体只受弹性恢复力  $f$  的作用, 且在初瞬  $t = 0$  时的位置为  $x = x_0$ , 初始速度为  $\frac{dx}{dt}|_{t=0} = v_0$ . 求反映物体运动规律的函数  $x = x(t)$ .

解 由于不计阻力  $R$ , 即假设  $-\mu \frac{dx}{dt} = 0$ , 所以第六节中的方程(1)成为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = 0, \quad (4)$$

方程(4)叫做无阻尼自由振动的微分方程.

反映物体运动规律的函数  $x = x(t)$  是满足微分方程(4)及初始条件

$$x|_{t=0} = x_0, \frac{dx}{dt}|_{t=0} = v_0$$

的特解.

方程(4)的特征方程为  $r^2 + k^2 = 0$ , 其根  $r = \pm ik$  是一对共轭复根, 所以方程(4)的通解为

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

应用初始条件, 定出  $C_1 = x_0$ ,  $C_2 = \frac{v_0}{k}$ . 因此, 所求的特解为

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt. \quad (5)$$

为了便于说明特解所反映的振动现象, 我们令

$$x_0 = A \sin \varphi, \quad \frac{v_0}{k} = A \cos \varphi \quad (0 \leq \varphi < 2\pi),$$

于是(5)式成为

$$x = A \sin(kt + \varphi), \quad (6)$$

其中  $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}, \quad \tan \varphi = \frac{kx_0}{v_0}$ .

函数(6)的图形如图 7-10 所示(图中假定  $x_0 > 0, v_0 > 0$ ).

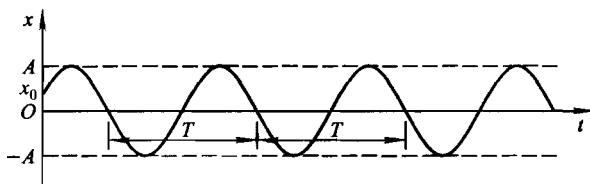


图 7-10

函数(6)所反映的运动就是简谐振动. 这个振动的振幅为  $A$ , 初相为  $\varphi$ , 周期为  $T = \frac{2\pi}{k}$ , 角频率为  $k$ . 由于  $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$  (见第六节例 1), 它与初始条件无关, 而完全由振动系统(在本例中就是弹簧和物体所组成的系统)本身所确定. 因此,  $k$  又叫做系统的固有频率. 固有频率是反映振动系统特性的一个重要参数.

**例 5** 在第六节例 1 中, 设物体受弹簧的恢复力  $f$  和阻力  $R$  的作用, 且在初

瞬  $t=0$  时的位置  $x=x_0$ , 初始速度  $\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}=v_0$ , 求反映物体运动规律的函数  $x=x(t)$ .

解 这就是要找满足有阻尼的自由振动方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2 x = 0 \quad (7)$$

及初始条件

$$x\Big|_{t=0} = x_0, \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = v_0$$

的特解.

方程(7)的特征方程为  $r^2 + 2nr + k^2 = 0$ , 其根为

$$r = \frac{-2n \pm \sqrt{4n^2 - 4k^2}}{2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}.$$

以下按  $n < k$ ,  $n > k$  及  $n = k$  三种不同情形分别进行讨论.

(i) 小阻尼情形:  $n < k$ .

特征方程的根  $r = -n \pm i\omega$  ( $\omega = \sqrt{k^2 - n^2}$ ) 是一对共轭复根, 所以方程(7)的通解为

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t).$$

应用初始条件定出  $C_1 = x_0$ ,  $C_2 = \frac{v_0 + nx_0}{\omega}$ , 因此所求特解为

$$x = e^{-nt} \left( x_0 \cos \omega t + \frac{v_0 + nx_0}{\omega} \sin \omega t \right). \quad (8)$$

如例 4 中所作的那样, 令

$$x_0 = A \sin \varphi, \quad \frac{v_0 + nx_0}{\omega} = A \cos \varphi \quad (0 \leq \varphi < 2\pi), \quad (9)$$

那么(8)式又可写成

$$x = A e^{-nt} \sin (\omega t + \varphi), \quad (10)$$

其中

$$\omega = \sqrt{k^2 - n^2}, A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + nx_0)^2}{\omega^2}}, \quad \tan \varphi = \frac{x_0 \omega}{v_0 + nx_0}.$$

从(10)式看出, 物体的运动是周期  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  的振动. 但与简谐振动不同, 它的振幅  $A e^{-nt}$  随时间  $t$  的增大而逐渐减小. 因此, 物体随时间  $t$  的增大而趋于平衡位置.

函数(10)的图形如图 7-11 所示(图中假定  $x_0 = 0, v_0 > 0$ ).

(ii) 大阻尼情形:  $n > k$ .

特征方程的根  $r_1 = -n + \sqrt{n^2 - k^2}$ ,  $r_2 = -n - \sqrt{n^2 - k^2}$  是两个不相等的

负实根,所以方程(7)的通解为

$$x = C_1 e^{-(n-\sqrt{n^2-k^2})t} + C_2 e^{-(n+\sqrt{n^2-k^2})t}, \quad (11)$$

其中任意常数  $C_1, C_2$  可以由初始条件来确定.

从(11)式看出,使  $x=0$  的  $t$  值最多只有一个,即物体最多越过平衡位置一次,因此物体已不再有振动现象.又当  $t \rightarrow +\infty$  时,  $x \rightarrow 0$ .因此,物体随时间  $t$  的增大而趋于平衡位置.

函数(11)的图形如图 7-12 所示(图中假定  $x_0 > 0, v_0 > 0$ ).

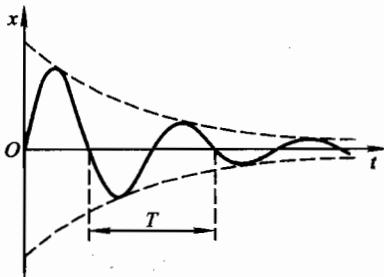


图 7-11

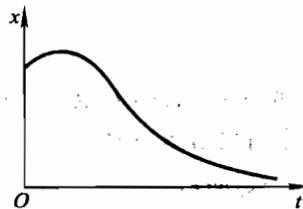


图 7-12

(iii) 临界阻尼情形:  $n = k$ .

特征方程的根  $r_1 = r_2 = -n$  是两个相等的实根,所以方程(7)的通解为

$$x = e^{-nt}(C_1 + C_2 t),$$

其中任意常数  $C_1$  及  $C_2$  可由初始条件来确定.由上式可看出,在临界阻尼情形使  $x=0$  的  $t$  值也最多只有一个,因此物体也不再有振动现象.又由于

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-nt} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^{nt}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{n e^{nt}} = 0,$$

从而可以看出,当  $t \rightarrow +\infty$  时,  $x \rightarrow 0$ .因此,在临界阻尼情形,物体也随时间  $t$  的增大而趋于平衡位置.

上面讨论二阶常系数齐次线性微分方程所用的方法以及方程的通解的形式,可推广到  $n$  阶常系数齐次线性微分方程上去,对此我们不再详细讨论,只简单地叙述于下:

$n$  阶常系数齐次线性微分方程的一般形式是

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0, \quad (12)$$

其中  $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n$  都是常数.

有时我们用记号  $D$  (叫做微分算子) 表示对  $x$  求导的运算  $\frac{d}{dx}$ , 把  $\frac{dy}{dx}$  记作

$Dy$ , 把  $\frac{d^n y}{dx^n}$  记作  $D^n y$ , 并把方程(12)记作

$$(D^n + p_1 D^{n-1} + \cdots + p_{n-1} D + p_n) y = 0. \quad (13)$$

记

$$L(D) = D^n + p_1 D^{n-1} + \cdots + p_{n-1} D + p_n,$$

$L(D)$  叫做微分算子  $D$  的  $n$  次多项式. 于是方程(13)可记作

$$L(D)y = 0.$$

如同讨论二阶常系数齐次线性微分方程那样, 令  $y = e^{rx}$ . 由于  $De^{rx} = re^{rx}$ ,  $\cdots, D^n e^{rx} = r^n e^{rx}$ , 故  $L(D)e^{rx} = L(r)e^{rx}$ . 因此把  $y = e^{rx}$  代入方程(13), 得

$$L(r)e^{rx} = 0.$$

由此可见, 如果选取  $r$  是  $n$  次代数方程

$$L(r) = 0 \text{ 即 } r^n + p_1 r^{n-1} + p_2 r^{n-2} + \cdots + p_{n-1} r + p_n = 0 \quad (14)$$

的根, 那么作出的函数  $y = e^{rx}$  就是方程(13)的一个解.

方程(14)叫做方程(13)的特征方程.

根据特征方程的根, 可以写出其对应的微分方程的解如下:

特征方程的根	微分方程通解中的对应项
单实根 $r$	给出一项: $Ce^{rx}$
一对单复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	给出两项: $e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$
$k$ 重实根 $r$	给出 $k$ 项: $e^{rx} (C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1})$
一对 $k$ 重复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	给出 $2k$ 项: $e^{\alpha x} [(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) \cos \beta x + (D_1 + D_2 x + \cdots + D_k x^{k-1}) \sin \beta x]$

从代数学知道,  $n$  次代数方程有  $n$  个根(重根按重数计算). 而特征方程的每一个根都对应着通解中的一项, 且每项各含一个任意常数. 这样就得到  $n$  阶常系数齐次线性微分方程的通解

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n.$$

例 6 求方程  $y^{(4)} - 2y''' + 5y'' = 0$  的通解.

解 这里的特征方程为

$$r^4 - 2r^3 + 5r^2 = 0,$$

即

$$r^2(r^2 - 2r + 5) = 0.$$

它的根是  $r_1 = r_2 = 0$  和  $r_{3,4} = 1 \pm 2i$ .

因此所给微分方程的通解为

$$y = C_1 + C_2 x + e^x (C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x).$$

例 7 求方程  $\frac{d^4 w}{dx^4} + \beta^4 w = 0$  的通解, 其中  $\beta > 0$ .

解 这里的特征方程为

$$r^4 + \beta^4 = 0.$$

由于

$$\begin{aligned} r^4 + \beta^4 &= r^4 + 2r^2\beta^2 + \beta^4 - 2r^2\beta^2 = (r^2 + \beta^2)^2 - 2r^2\beta^2 \\ &= (r^2 - \sqrt{2}\beta r + \beta^2)(r^2 + \sqrt{2}\beta r + \beta^2), \end{aligned}$$

所以特征方程可以写为

$$(r^2 - \sqrt{2}\beta r + \beta^2)(r^2 + \sqrt{2}\beta r + \beta^2) = 0.$$

它的根为  $r_{1,2} = \frac{\beta}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$ ,  $r_{3,4} = -\frac{\beta}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$ , 因此所给方程的通解为

$$w = e^{\frac{\beta}{\sqrt{2}}x} \left( C_1 \cos \frac{\beta}{\sqrt{2}}x + C_2 \sin \frac{\beta}{\sqrt{2}}x \right) + e^{-\frac{\beta}{\sqrt{2}}x} \left( C_3 \cos \frac{\beta}{\sqrt{2}}x + C_4 \sin \frac{\beta}{\sqrt{2}}x \right).$$

### 习 题 7-7

1. 求下列微分方程的通解:

- |  |                                   |
|--|-----------------------------------|
| (1) $y'' + y' - 2y = 0$ ;                                | (2) $y'' - 4y' = 0$ ;             |
| (3) $y'' + y = 0$ ;                                      | (4) $y'' + 6y' + 13y = 0$ ;       |
| (5) $4 \frac{d^2x}{dt^2} - 20 \frac{dx}{dt} + 25x = 0$ ; | (6) $y'' - 4y' + 5y = 0$ ;        |
| (7) $y^{(4)} - y = 0$ ;                                  | (8) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ ;    |
| (9) $y^{(4)} - 2y''' + y'' = 0$ ;                        | (10) $y^{(4)} + 5y'' - 36y = 0$ . |

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

- |   |
|---|
| (1) $y'' - 4y' + 3y = 0$ , $y _{x=0} = 6$ , $y' _{x=0} = 10$ ;  |
| (2) $4y'' + 4y' + y = 0$ , $y _{x=0} = 2$ , $y' _{x=0} = 0$ ;   |
| (3) $y'' - 3y' - 4y = 0$ , $y _{x=0} = 0$ , $y' _{x=0} = -5$ ;  |
| (4) $y'' + 4y' + 29y = 0$ , $y _{x=0} = 0$ , $y' _{x=0} = 15$ ; |
| (5) $y'' + 25y = 0$ , $y _{x=0} = 2$ , $y' _{x=0} = 5$ ;        |
| (6) $y'' - 4y' + 13y = 0$ , $y _{x=0} = 0$ , $y' _{x=0} = 3$ .  |

3. 一个单位质量的质点在数轴上运动, 开始时质点在原点  $O$  处且速度为  $v_0$ , 在运动过程中, 它受到一个力的作用, 这个力的大小与质点到原点的距离成正比(比例系数  $k_1 > 0$ )而方向与初速度一致. 又介质的阻力与速度成正比(比例系数  $k_2 > 0$ ). 求反映这质点的运动规律的函数.

4. 在图 7-13 所示的电路中先将开关  $S$  拨向  $A$ , 达到稳定状态后再将开关  $S$  拨向  $B$ , 求电压  $u_C(t)$  及电流  $i(t)$ . 已知  $E = 20$  V,  $C = 0.5 \times 10^{-6}$  F,  $L = 0.1$  H,  $R = 2000 \Omega$ .

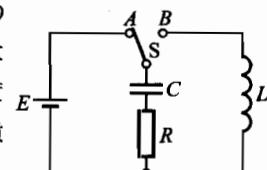


图 7-13

5. 设圆柱形浮筒, 直径为 0.5 m, 铅直放在水中, 当稍向下压后突然放开, 浮筒在水中上下振动的周期为 2 s, 求浮筒的质量.

## 第八节 常系数非齐次线性微分方程

本节着重讨论二阶常系数非齐次线性微分方程的解法, 并对  $n$  阶方程的解法作必要的说明.

二阶常系数非齐次线性微分方程的一般形式是

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad (1)$$

其中  $p, q$  是常数.

由第六节定理 3 可知, 求二阶常系数非齐次线性微分方程的通解, 归结为求对应的齐次方程

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (2)$$

的通解和非齐次方程(1)本身的一个特解. 由于二阶常系数齐次线性微分方程的通解的求法已在第七节得到解决, 所以这里只需讨论求二阶常系数非齐次线性微分方程的一个特解  $y^*$  的方法.

本节只介绍当方程(1)中的  $f(x)$  取两种常见形式时求  $y^*$  的方法. 这种方法的特点是不用积分就可求出  $y^*$  来, 它叫做待定系数法.  $f(x)$  的两种形式是

(1)  $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$ , 其中  $\lambda$  是常数,  $P_m(x)$  是  $x$  的一个  $m$  次多项式:

$$P_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m;$$

(2)  $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x)\cos \omega x + P_n(x)\sin \omega x]$ , 其中  $\lambda, \omega$  是常数,  $P_l(x)$ 、 $P_n(x)$  分别是  $x$  的  $l$  次、 $n$  次多项式, 且有一个可为零.

下面分别介绍  $f(x)$  为上述两种形式时  $y^*$  的求法.

### 一、 $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型

我们知道, 方程(1)的特解  $y^*$  是使(1)成为恒等式的函数. 怎样的函数能使(1)成为恒等式呢? 因为(1)式右端  $f(x)$  是多项式  $P_m(x)$  与指数函数  $e^{\lambda x}$  的乘积, 而多项式与指数函数乘积的导数仍然是多项式与指数函数的乘积, 因此, 我们推测  $y^* = Q(x)e^{\lambda x}$  (其中  $Q(x)$  是某个多项式) 可能是方程(1)的特解. 把  $y^*$ 、 $y^*$ ' 及  $y^*$ '' 代入方程(1), 然后考虑能否选取适当的多项式  $Q(x)$ , 使  $y^* = Q(x)e^{\lambda x}$  满足方程(1). 为此, 将

$$y^* = Q(x)e^{\lambda x},$$

$$y^*' = e^{\lambda x} [\lambda Q(x) + Q'(x)],$$

$$y^*'' = e^{\lambda x} [\lambda^2 Q(x) + 2\lambda Q'(x) + Q''(x)]$$

代入方程(1)并消去  $e^{\lambda x}$ , 得

$$Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x) = P_m(x). \quad (3)$$

(i) 如果  $\lambda$  不是(2)式的特征方程  $r^2 + pr + q = 0$  的根, 即  $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$ , 由于  $P_m(x)$  是一个  $m$  次多项式, 要使(3)的两端恒等, 那么可令  $Q(x)$  为另一个  $m$  次多项式  $Q_m(x)$ :

$$Q_m(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m,$$

代入(3)式, 比较等式两端  $x$  同次幂的系数, 就得到以  $b_0, b_1, \dots, b_m$  作为未知数的  $m+1$  个方程的联立方程组. 从而可以定出这些  $b_i$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ), 并得到所求的特解  $y^* = Q_m(x)e^{\lambda x}$ .

(ii) 如果  $\lambda$  是特征方程  $r^2 + pr + q = 0$  的单根, 即  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ , 但  $2\lambda + p \neq 0$ , 要使(3)的两端恒等, 那么  $Q'(x)$  必须是  $m$  次多项式. 此时可令

$$Q(x) = xQ_m(x),$$

并且可用同样的方法来确定  $Q_m(x)$  的系数  $b_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, m$ ).

(iii) 如果  $\lambda$  是特征方程  $r^2 + pr + q = 0$  的重根, 即  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ , 且  $2\lambda + p = 0$ , 要使(3)的两端恒等, 那么  $Q''(x)$  必须是  $m$  次多项式. 此时可令

$$Q(x) = x^2 Q_m(x),$$

并用同样的方法来确定  $Q_m(x)$  中的系数.

综上所述, 我们有如下结论:

如果  $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$ , 则二阶常系数非齐次线性微分方程(1)具有形如

$$\text{中且 } y^* = x^k Q_m(x)e^{\lambda x} \quad (4)$$

的特解, 其中  $Q_m(x)$  是与  $P_m(x)$  同次( $m$  次)的多项式, 而  $k$  按  $\lambda$  不是特征方程的根、是特征方程的单根或是特征方程的重根依次取为 0、1 或 2.

上述结论可推广到  $n$  阶常系数非齐次线性微分方程, 但要注意(4)式中的  $k$  是特征方程含根  $\lambda$  的重复次数(即若  $\lambda$  不是特征方程的根, 则  $k$  取为 0; 若  $\lambda$  是特征方程的  $s$  重根, 则  $k$  取为  $s$ ).

**例 1** 求微分方程  $y'' - 2y' - 3y = 3x + 1$  的一个特解.

**解** 这是二阶常系数非齐次线性微分方程, 且函数  $f(x)$  是  $P_m(x)e^{\lambda x}$  型(其中  $P_m(x) = 3x + 1, \lambda = 0$ ).

与所给方程对应的齐次方程为

$$y'' - 2y' - 3y = 0,$$

它的特征方程为

$$r^2 - 2r - 3 = 0.$$

由于这里  $\lambda = 0$  不是特征方程的根, 所以应设特解为

$$Q(x) \quad y^* = b_0 x + b_1.$$

把它代入所给方程,得

$$-3b_0x - 2b_0 - 3b_1 = 3x + 1,$$

比较两端  $x$  同次幂的系数,得

$$\begin{cases} -3b_0 = 3, \\ -2b_0 - 3b_1 = 1. \end{cases}$$

由此求得  $b_0 = -1$ ,  $b_1 = \frac{1}{3}$ . 于是求得一个特解为

$$y^* = -x + \frac{1}{3}.$$

例 2 求微分方程  $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$  的通解.

解 所给方程也是二阶常系数非齐次线性微分方程,且  $f(x)$  呈  $P_m(x)e^{\lambda x}$  型(其中  $P_m(x) = x$ ,  $\lambda = 2$ ).

与所给方程对应的齐次方程为

$$y'' - 5y' + 6y = 0,$$

它的特征方程

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

有两个实根  $r_1 = 2$ ,  $r_2 = 3$ . 于是与所给方程对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

由于  $\lambda = 2$  是特征方程的单根,所以应设  $y^*$  为

$$y^* = x(b_0x + b_1)e^{2x}.$$

把它代入所给方程,得

$$-2b_0x + 2b_0 - b_1 = x.$$

比较等式两端同次幂的系数,得

$$\begin{cases} -2b_0 = 1, \\ 2b_0 - b_1 = 0. \end{cases}$$

解得  $b_0 = -\frac{1}{2}$ ,  $b_1 = -1$ . 因此求得一个特解为

$$y^* = x\left(-\frac{1}{2}x - 1\right)e^{2x}.$$

从而所求的通解为

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{2}(x^2 + 2x)e^{2x}.$$

二、 $f(x) = e^{\lambda x}[P_l^{(1)}(x)\cos \omega x + P_n^{(2)}(x)\sin \omega x]$  型

应用欧拉公式

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \sin \theta = \frac{1}{2i} (\cos \theta - i \sin \theta),$$

把  $f(x)$  表成复变指数函数的形式, 有

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\lambda x} [P_l^{(1)} \cos \omega x + P_n^{(2)} \sin \omega x] \\ &= e^{\lambda x} \left[ P_l^{(1)} \frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2} + P_n^{(2)} \frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i} \right] \\ &= \left( \frac{P_l^{(1)}}{2} + \frac{P_n^{(2)}}{2i} \right) e^{(\lambda + i\omega)x} + \left( \frac{P_l^{(1)}}{2} - \frac{P_n^{(2)}}{2i} \right) e^{(\lambda - i\omega)x} \\ &= P(x) e^{(\lambda + i\omega)x} + \bar{P}(x) e^{(\lambda - i\omega)x} \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{P_l^{(1)}}{2} + \frac{P_n^{(2)}}{2i} = \frac{P_l^{(1)}}{2} - \frac{P_n^{(2)}}{2} i, \\ \bar{P}(x) &= \frac{P_l^{(1)}}{2} - \frac{P_n^{(2)}}{2i} = \frac{P_l^{(1)}}{2} + \frac{P_n^{(2)}}{2} i \end{aligned}$$

是互成共轭的  $m$  次多项式 (即它们对应项的系数是共轭复数), 而  $m = \max\{l, n\}$ .

应用上一目的结果, 对于  $f(x)$  中的第一项  $P(x) e^{(\lambda + i\omega)x}$ , 可求出一个  $m$  次多项式  $Q_m(x)$ , 使得  $y_1^* = x^k Q_m e^{(\lambda + i\omega)x}$  为方程

$$y'' + py' + qy = P(x) e^{(\lambda + i\omega)x}$$

的特解, 其中  $k$  按  $\lambda + i\omega$  不是特征方程的根或是特征方程的单根依次取 0 或 1. 由于  $f(x)$  的第二项  $\bar{P}(x) e^{(\lambda - i\omega)x}$  与第一项  $P(x) \cdot e^{(\lambda + i\omega)x}$  成共轭, 所以与  $y_1^*$  成共轭的函数  $y_2^* = x^k \bar{Q}_m e^{(\lambda - i\omega)x}$  必然是方程

$$y'' + py' + qy = \bar{P}(x) e^{(\lambda - i\omega)x}$$

的特解, 这里  $\bar{Q}_m$  表示与  $Q_m$  成共轭的  $m$  次多项式. 于是, 根据第六节定理 4, 方程(1)具有形如

$$y^* = x^k Q_m e^{(\lambda + i\omega)x} + x^k \bar{Q}_m e^{(\lambda - i\omega)x}$$

的特解. 上式可写为

$$\begin{aligned} y^* &= x^k e^{\lambda x} [Q_m e^{i\omega x} + \bar{Q}_m e^{-i\omega x}] \\ &= x^k e^{\lambda x} [Q_m (\cos \omega x + i \sin \omega x) + \bar{Q}_m (\cos \omega x - i \sin \omega x)], \end{aligned}$$

由于括号内的两项是互成共轭的, 相加后即无虚部, 所以可以写成实函数的形式

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos \omega x + R_m^{(2)}(x) \sin \omega x].$$

综上所述, 我们有如下结论:

如果  $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + P_n(x) \sin \omega x]$ , 则二阶常系数非齐次线性微分方程(1)的特解可设为

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos \omega x + R_m^{(2)}(x) \sin \omega x], \quad (5)$$

其中  $R_m^{(1)}(x)、R_m^{(2)}(x)$  是  $m$  次多项式,  $m = \max\{l, n\}$ , 而  $k$  按  $\lambda + i\omega$  (或

$\lambda - i\omega$ )不是特征方程的根、或是特征方程的单根依次取0或1.

上述结论可推广到n阶常系数非齐次线性微分方程,但要注意(5)式中的k是特征方程中含根 $\lambda + i\omega$ (或 $\lambda - i\omega$ )的重复次数.

例3 求微分方程 $y'' + y = x \cos 2x$ 的一个特解.

解 所给方程是二阶常系数非齐次线性方程,且 $f(x)$ 属于 $e^{\lambda x}[P_l^{(1)}(x)\cos \omega x + P_n^{(2)}(x)\sin \omega x]$ 型(其中 $\lambda = 0, \omega = 2, P_l^{(1)}(x) = x, P_n^{(2)}(x) = 0$ ).

与所给方程对应的齐次方程为

$$y'' + y = 0,$$

它的特征方程为

$$r^2 + 1 = 0.$$

由于这里 $\lambda + i\omega = 2i$ 不是特征方程的根,所以应设特解为

$$y^* = (ax + b)\cos 2x + (cx + d)\sin 2x.$$

把它代入所给方程,得

$$(-3ax - 3b + 4c)\cos 2x - (3cx + 3d + 4a)\sin 2x = x \cos 2x.$$

比较两端同类项的系数,得

$$\begin{cases} -3a = 1, \\ -3b + 4c = 0, \\ -3c = 0, \\ -3d - 4a = 0, \end{cases}$$

由此解得

$$a = -\frac{1}{3}, b = 0, c = 0, d = \frac{4}{9}.$$

于是求得一个特解为

$$y^* = -\frac{1}{3}x \cos 2x + \frac{4}{9}\sin 2x.$$

例4 求微分方程 $y'' - y = e^x \cos 2x$ 的一个特解.

解 这是二阶常系数非齐次线性方程,且 $f(x)$ 属 $e^{\lambda x}[P_l^{(1)}(x)\cos \omega x + P_n^{(2)}(x)\sin \omega x]$ 型(这里 $\lambda = 1, \omega = 2, P_l^{(1)}(x) = 1, P_n^{(2)}(x) = 0$ ).

特征方程为 $r^2 - 1 = 0$ ,由于 $\lambda + i\omega = 1 + 2i$ 不是特征方程的根,所以应设特解为

$$y^* = e^x(a \cos 2x + b \sin 2x).$$

求导得

$$y^* = e^x[(a + 2b)\cos 2x + (-2a + b)\sin 2x],$$

$$y^* = e^x[(-3a + 4b)\cos 2x + (-4a - 3b)\sin 2x].$$

代入所给方程,得

$$4e^x[(-a + b)\cos 2x - (a + b)\sin 2x] = e^x \cos 2x,$$

比较两端同类项的系数,有

$$\begin{cases} -a+b=\frac{1}{4}, \\ a+b=0, \end{cases} \quad \text{得} \quad \begin{cases} a=-\frac{1}{8}, \\ b=\frac{1}{8}. \end{cases}$$

因此所给方程的一个特解为

$$y^* = \frac{1}{8}e^x(\sin 2x - \cos 2x).$$

**例 5** 在第六节例 1 中, 设物体受弹性恢复力  $f$  和铅直干扰力  $F$  的作用. 试求物体的运动规律.

**解** 这里需要求出无阻尼强迫振动方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = h \sin pt \quad (6)$$

的通解.

对应的齐次微分方程(即无阻尼自由振动方程)为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = 0, \quad (7)$$

它的特征方程  $r^2 + k^2 = 0$  的根为  $r = \pm ik$ . 故方程(7)的通解为

$$X = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

令

$$C_1 = A \sin \varphi, C_2 = A \cos \varphi,$$

则方程(7)的通解又可写成

$$X = A \sin(kt + \varphi),$$

其中,  $A, \varphi$  为任意常数.

方程(6)右端的函数

$$f(t) = h \sin pt$$

与  $f(t) = e^{\lambda t} [P_l^{(1)}(t) \cos \omega t + P_n^{(2)}(t) \sin \omega t]$  相比较, 有  $\lambda = 0, \omega = p, P_l^{(1)}(t) = 0, P_n^{(2)}(t) = h$ . 现在分别就  $p \neq k$  和  $p = k$  两种情形讨论如下:

(i) 如果  $p \neq k$ , 则  $\lambda \pm i\omega = \pm ip$  不是特征方程的根, 故设

$$x^* = a_1 \cos pt + b_1 \sin pt.$$

代入方程(6)求得

$$a_1 = 0, \quad b_1 = \frac{h}{k^2 - p^2},$$

于是

$$x^* = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt.$$

从而当  $p \neq k$  时, 方程(6)的通解为

$$x = X + x^* = A \sin(kt + \varphi) + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt.$$

上式表示，物体的运动由两部分组成，这两部分都是简谐振动。上式第一项表示自由振动，第二项所表示的振动叫做强迫振动。强迫振动是干扰力引起的，它的角频率即是干扰力的角频率  $p$ ；当干扰力的角频率  $p$  与振动系统的固有频率  $k$  相差很小时，它的振幅  $\left| \frac{h}{k^2 - p^2} \right|$  可以很大。

(ii) 如果  $p = k$  则  $\lambda \pm i\omega = \pm ip$  是特征方程的根，故设

$$x^* = t(a_1 \cos kt + b_1 \sin kt).$$

代入方程(6)求得

$$a_1 = -\frac{h}{2k}, \quad b_1 = 0.$$

于是

$$x^* = -\frac{h}{2k}t \cos kt.$$

从而当  $p = k$  时，方程(6)的通解为

$$x = X + x^* = A \sin(kt + \varphi) - \frac{h}{2k}t \cos kt.$$

上式右端第二项表明，强迫振动的振幅  $\frac{h}{2k}t$  随时间  $t$  的增大而无限增大。这就发生所谓共振现象。为了避免共振现象，应使干扰力的角频率  $p$  不要靠近振动系统的固有频率  $k$ 。反之，如果要利用共振现象，则应使  $p = k$  或使  $p$  与  $k$  尽量靠近。

有阻尼的强迫振动问题可作类似的讨论，这里从略了。

## 习题 7-8

1. 求下列各微分方程的通解：

$$(1) 2y'' + y' - y = 2e^x;$$

$$(2) y'' + a^2 y = e^x;$$

$$(3) 2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1;$$

$$(4) y'' + 3y' + 2y = 3xe^{-x};$$

$$(5) y'' - 2y' + 5y = e^x \sin 2x;$$

$$(6) y'' - 6y' + 9y = (x+1)e^{3x};$$

$$(7) y'' + 5y' + 4y = 3 - 2x;$$

$$(8) y'' + 4y = x \cos x;$$

$$(9) y'' + y = e^x + \cos x;$$

$$(10) y'' - y = \sin^2 x.$$

2. 求下列各微分方程满足已给初始条件的特解：

$$(1) y'' + y + \sin 2x = 0, y|_{x=\pi} = 1, y'|_{x=\pi} = 1;$$

$$(2) y'' - 3y' + 2y = 5, y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 2;$$

$$(3) y'' - 10y' + 25y = e^{2x}, y|_{x=0} = \frac{6}{7}, y'|_{x=0} = \frac{33}{7};$$

$$(4) y'' - y = 4xe^x, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1;$$

$$(5) y'' - 4y' = 5, y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 0.$$

3. 大炮以仰角  $\alpha$ 、初速度  $v_0$  发射炮弹, 若不计空气阻力, 求弹道曲线.
4. 在  $RLC$  含源串联电路中, 电动势为  $E$  的电源对电容器  $C$  充电. 已知  $E = 20$  V,  $C = 0.2 \mu\text{F}$ ,  $L = 0.1$  H,  $R = 1000 \Omega$ , 试求合上开关 S 后的电流  $i(t)$  及电压  $u_C(t)$ .
5. 一链条悬挂在一钉子上, 起动时一端离开钉子 8 m 另一端离开钉子 12 m, 分别在以下两种情况下求链条滑下来所需要的时间:
- (1) 若不计钉子对链条所产生的摩擦力;
  - (2) 若摩擦力的大小等于 1 m 长的链条所受重力的大小.
6. 设函数  $\varphi(x)$  连续, 且满足

$$\varphi(x) = e^x + \int_0^x t\varphi(t)dt - x \int_0^x \varphi(t)dt,$$

求  $\varphi(x)$ .

## \*第九节 欧拉方程

变系数的线性微分方程, 一般说来都是不容易求解的. 但是有些特殊的变系数线性微分方程, 则可以通过变量代换化为常系数线性微分方程, 因而容易求解, 欧拉方程就是其中的一种.

形如

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x) \quad (1)$$

的方程(其中  $p_1, p_2, \dots, p_n$  为常数), 叫做欧拉方程.

作变换  $x = e^t$  或  $t = \ln x$ ,

将自变量  $x$ 换成  $t$ <sup>①</sup>, 我们有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \left( \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{x^3} \left( \frac{d^3y}{dt^3} - 3 \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \right).$$

如果采用记号 D 表示对  $t$  求导的运算  $\frac{d}{dt}$ , 那么上述计算结果可以写成

$$\begin{aligned} xy' &= Dy, \\ x^2 y'' &= \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = \left( \frac{d^2}{dt^2} - \frac{d}{dt} \right)y \\ &= (D^2 - D)y = D(D-1)y, \end{aligned}$$

① 这里仅在  $x > 0$  范围内求解. 如果要在  $x < 0$  内求解, 则可作变换  $x = -e^t$  或  $t = \ln(-x)$ , 所得结果与  $x > 0$  内的结果相类似.

$$\begin{aligned}x^3 y''' &= \frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \\&= (D^3 - 3D^2 + 2D)y = D(D-1)(D-2)y,\end{aligned}$$

一般的,有  $x^k y^{(k)} = D(D-1)\cdots(D-k+1)y$ .

把它代入欧拉方程(1),便得一个以  $t$  为自变量的常系数线性微分方程. 在求出这个方程的解后,把  $t$  换成  $\ln x$ ,即得原方程的解.

例 求欧拉方程  $x^3 y''' + x^2 y'' - 4xy' = 3x^2$  的通解.

解 作变换  $x = e^t$  或  $t = \ln x$ , 原方程化为

$$D(D-1)(D-2)y + D(D-1)y - 4Dy = 3e^{2t},$$

即

$$D^3 y - 2D^2 y - 3Dy = 3e^{2t},$$

或

$$\frac{d^3 y}{dt^3} - 2 \frac{d^2 y}{dt^2} - 3 \frac{dy}{dt} = 3e^{2t}. \quad (2)$$

方程(2)所对应的齐次方程为

$$\frac{d^3 y}{dt^3} - 2 \frac{d^2 y}{dt^2} - 3 \frac{dy}{dt} = 0, \quad (3)$$

其特征方程为

$$r^3 - 2r^2 - 3r = 0,$$

它有三个根:  $r_1 = 0, r_2 = -1, r_3 = 3$ . 于是方程(3)的通解为

$$Y = C_1 + C_2 e^{-t} + C_3 e^{3t} = C_1 + \frac{C_2}{x} + C_3 x^3.$$

根据上节第一目,特解的形式为

$$y^* = b e^{2t} = b x^2,$$

代入原方程,求得  $b = -\frac{1}{2}$ , 即

$$y^* = -\frac{x^2}{2}.$$

于是, 所给欧拉方程的通解为<sup>①</sup>

$$y = C_1 + \frac{C_2}{x} + C_3 x^3 - \frac{1}{2} x^2.$$

### \* 习 题 7-9

求下列欧拉方程的通解:

1.  $x^2 y'' + xy' - y = 0$ ;

2.  $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x}$ ;

<sup>①</sup> 这是在  $x > 0$  内所求得的通解. 容易验证,在  $x < 0$  内,它也是所给方程的通解.

$$\begin{array}{ll}
 3. x^3 y''' + 3x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0; & 4. x^2 y'' - 2xy' + 2y = \ln^2 x - 2\ln x; \\
 5. x^2 y'' + xy' - 4y = x^3; & 6. x^2 y'' - xy' + 4y = x \sin(\ln x); \\
 7. x^2 y'' - 3xy' + 4y = x + x^2 \ln x; & 8. x^3 y''' + 2xy' - 2y = x^2 \ln x + 3x.
 \end{array}$$

## \* 第十节 常系数线性微分方程组解法举例

前面讨论的是由一个微分方程求解一个未知函数的情形.但在研究某些实际问题时,还会遇到由几个微分方程联立起来共同确定几个具有同一自变量的函数的情形.这些联立的微分方程称为微分方程组.

如果微分方程组中的每一个微分方程都是常系数线性微分方程,那么,这种微分方程组就叫做常系数线性微分方程组.

对于常系数线性微分方程组,我们可以用下述方法求它的解:

第一步 从方程组中消去一些未知函数及其各阶导数,得到只含有一个未知函数的高阶常系数线性微分方程.

第二步 解此高阶微分方程,求出满足该方程的未知函数.

第三步 把已求得的函数代入原方程组,一般说来,不必经过积分就可求出其余的未知函数.

**例 1** 解微分方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = 3y - 2z, \\ \frac{dz}{dx} = 2y - z. \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = 3y - 2z, \\ \frac{dz}{dx} = 2y - z. \end{array} \right. \quad (2)$$

解 这是含有两个未知函数  $y(x), z(x)$  的由两个一阶常系数线性方程组成的方程组.

设法消去未知函数  $y$ . 由(2)式得

$$y = \frac{1}{2} \left( \frac{dz}{dx} + z \right). \quad (3)$$

对上式两端求导,有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left( \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{dz}{dx} \right). \quad (4)$$

把(3)、(4)两式代入(1)式并化简,得

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - 2 \frac{dz}{dx} + z = 0.$$

这是一个二阶常系数线性微分方程,它的通解是

$$z = (C_1 + C_2 x) e^x. \quad (5)$$

再把(5)式代入(3)式,得

$$y = \frac{1}{2}(2C_1 + C_2 + 2C_2 x)e^x. \quad (6)$$

将(5),(6)联立起来,就得到所给方程组的通解.

如果我们要得到方程组满足初始条件

$$y|_{x=0} = 1, \quad z|_{x=0} = 0$$

的特解,只需将此条件代入(6)和(5)式,得

$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{2}(2C_1 + C_2), \\ 0 = C_1. \end{cases}$$

由此求得

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 2.$$

于是所给微分方程组满足上述初始条件的特解为

$$\begin{cases} y = (1 + 2x)e^x, \\ z = 2xe^x. \end{cases}$$

在讨论常系数线性微分方程(或方程组)时,常采用第七节中引入的记号 D 表示对自变量  $x$  求导的运算  $\frac{d}{dx}$ .

### 例 2 解微分方程组

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - x = e^t, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + y = 0. \end{cases}$$

解 用记号 D 表示  $\frac{d}{dt}$ ,则方程组可记作

$$\begin{cases} (D^2 - 1)x + Dy = e^t, \\ Dx + (D^2 + 1)y = 0. \end{cases} \quad (7)$$

$$(8) \quad \begin{cases} (D^2 - 1)x + Dy = e^t, \\ Dx + (D^2 + 1)y = 0. \end{cases} \quad (8)$$

我们可以类似于解代数方程组那样消去一个未知数,例如为消去  $x$ ,可作如下运算:

$$(7) - D(8): -x - D^3y = e^t, \quad (9)$$

$$(8) + D(9): (-D^4 + D^2 + 1)y = De^t,$$

$$\text{即 } (-D^4 + D^2 + 1)y = e^t. \quad (10)$$

(10)式为四阶非齐次线性方程,其特征方程为

$$-r^4 + r^2 + 1 = 0,$$

解得特征根为

$$r_{1,2} = \pm \alpha = \pm \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, \quad r_{3,4} = \pm i\beta = \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}},$$

容易求得一个特解  $y^* = e^t$ ,于是得(10)的通解为

$$y = C_1 e^{-at} + C_2 e^{at} + C_3 \cos \beta t + C_4 \sin \beta t + e^t. \quad (11)$$

再求  $x$ , 由(9)式, 即有

$$x = -D^3 y - e^t,$$

以(11)式代入上式, 即得

$$x = a^3 C_1 e^{-at} - a^3 C_2 e^{at} - \beta^3 C_3 \sin \beta t + \beta^3 C_4 \cos \beta t - 2e^t. \quad (12)$$

将(11)和(12)两个函数联立, 就是所求方程组的通解.

这里要注意, 在求得一个未知函数以后, 再求另一个未知函数时, 一般不再积分(积分就会出现新的任意常数, 从(11)、(12)两式可知两式中的任意常数之间有着确定的关系).

我们也可用行列式解上述方程组. 由(7)和(8), 有

$$\begin{vmatrix} D^2 - 1 & D \\ D & D^2 + 1 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} D^2 - 1 & e^t \\ D & 0 \end{vmatrix},$$

即

$$(D^4 - D^2 - 1)y = -e^t.$$

这与(10)式是一样的. 但再求  $x$  时, 不宜再次应用行列式. 如再应用行列式, 得

$$\begin{vmatrix} D^2 - 1 & D \\ D & D^2 + 1 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} e^t & D \\ 0 & D^2 + 1 \end{vmatrix},$$

即

$$(D^4 - D^2 - 1)x = 2e^t,$$

解得

$$x = A_1 e^{-at} + A_2 e^{at} + A_3 \cos \beta t + A_4 \sin \beta t - 2e^t,$$

则必须说明  $A_1, A_2, A_3, A_4$  与  $C_1, C_2, C_3, C_4$  之间的关系.

注意这里的“系数行列式”

$$\begin{vmatrix} D^2 - 1 & D \\ D & D^2 + 1 \end{vmatrix} = D^4 - D^2 - 1$$

是  $D$  的四次多项式, 这就标志着微分方程组是四阶的, 它的通解中一定恰含四个任意常数.

### \* 习 题 7-10

1. 求下列微分方程组的通解:

$$(1) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = z, \\ \frac{dz}{dx} = y; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = y, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = x; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = -x + y + 3, \\ \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = x + y - 3; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} \frac{dx}{dt} + 5x + y = e^t, \\ \frac{dy}{dt} - x - 3y = e^{2t}; \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2x + \frac{dy}{dt} + y = t, \\ 5x + \frac{dy}{dt} + 3y = t^2; \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} \frac{dx}{dt} - 3x + 2\frac{dy}{dt} + 4y = 2\sin t, \\ 2\frac{dx}{dt} + 2x + \frac{dy}{dt} - y = \cos t. \end{cases}$$

2. 求下列微分方程组满足所给初始条件的特解:

$$(1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, & x|_{t=0} = 0, \\ \frac{dy}{dt} = -x, & y|_{t=0} = 1; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} - x = 0, & x|_{t=0} = 1, \\ \frac{dx}{dt} + y = 0, & y|_{t=0} = 0; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \frac{dx}{dt} + 3x - y = 0, & x|_{t=0} = 1, \\ \frac{dy}{dt} - 8x + y = 0, & y|_{t=0} = 4; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 2\frac{dx}{dt} - 4x + \frac{dy}{dt} - y = e^t, & x|_{t=0} = \frac{3}{2}, \\ \frac{dx}{dt} + 3x + y = 0, & y|_{t=0} = 0; \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2x - \frac{dy}{dt} = 10\cos t, & x|_{t=0} = 2, \\ \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2y = 4e^{-2t}, & y|_{t=0} = 0; \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} \frac{dx}{dt} - x + \frac{dy}{dt} + 3y = e^{-t} - 1, & x|_{t=0} = \frac{48}{49}, \\ \frac{dx}{dt} + 2x + \frac{dy}{dt} + y = e^{2t} + t, & y|_{t=0} = \frac{95}{98}. \end{cases}$$

## 总习题七

1. 填空:

(1)  $xy''' + 2x^2y'' + x^3y = x^4 + 1$  是\_\_\_\_阶微分方程;

(2) 一阶线性微分方程  $y' + P(x)y = Q(x)$  的通解为\_\_\_\_\_.

(3) 与积分方程  $y = \int_{x_0}^x f(x, y)dx$  等价的微分方程初值问题是\_\_\_\_\_.

(4) 已知  $y = 1$ 、 $y = x$ 、 $y = x^2$  是某二阶非齐次线性微分方程的三个解, 则该方程的通解为\_\_\_\_\_.

2. 求以下列各式所表示的函数为通解的微分方程:

(1)  $(x + C)^2 + y^2 = 1$  (其中  $C$  为任意常数);

(2)  $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$  (其中  $C_1, C_2$  为任意常数).

3. 求下列微分方程的通解:

(1)  $xy' + y = 2\sqrt{xy};$

(2)  $xy'\ln x + y = ax(\ln x + 1);$

(3)  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2(\ln y - x)};$

(4)  $\frac{dy}{dx} + xy - x^3 y^3 = 0;$

(5)  $y'' + y'^2 + 1 = 0;$

(6)  $yy'' - y'^2 - 1 = 0;$

(7)  $y'' + 2y' + 5y = \sin 2x;$

(8)  $y''' + y'' - 2y' = x(e^x + 4);$

\* (9)  $(y^4 - 3x^2)dy + xydx = 0;$

(10)  $y' + x = \sqrt{x^2 + y}.$

4. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

(1)  $y^3 dx + 2(x^2 - xy^2) dy = 0$ ,  $x=1$  时  $y=1$ ;

(2)  $y'' - ay'^2 = 0$ ,  $x=0$  时  $y=0$ ,  $y'= -1$ ;

(3)  $2y'' - \sin 2y = 0$ ,  $x=0$  时  $y=\frac{\pi}{2}$ ,  $y'=1$ ;

(4)  $y'' + 2y' + y = \cos x$ ,  $x=0$  时  $y=0$ ,  $y'=\frac{3}{2}$ .

5. 已知某曲线经过点(1,1),它的切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标,求它的方程.

6. 已知某车间的体积为  $30 \times 30 \times 6 \text{ m}^3$ ,其中的空气含 0.12% 的  $\text{CO}_2$  (以体积计算). 现以含  $\text{CO}_2$  0.04% 的新鲜空气输入,问每分钟应输入多少,才能在 30 min 后使车间空气中  $\text{CO}_2$  的含量不超过 0.06%? (假定输入的新鲜空气与原有空气很快混合均匀后,以相同的流量排出.)

7. 设可导函数  $\varphi(x)$  满足

$$\varphi(x)\cos x + 2 \int_0^x \varphi(t)\sin t dt = x + 1,$$

求  $\varphi(x)$ .

8. 设光滑曲线  $y=\varphi(x)$  过原点,且当  $x>0$  时  $\varphi(x)>0$ . 对应于  $[0, x]$  一段曲线的弧长为  $e^x - 1$ ,求  $\varphi(x)$ .

9. 设  $y_1(x), y_2(x)$  是二阶齐次线性方程  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  的两个解,令

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y'_2(x) - y'_1(x)y_2(x),$$

证明:(1)  $W(x)$  满足方程  $W' + p(x)W = 0$ ;

(2)  $W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x p(r)dr}$ .

10. 求下列欧拉方程的通解:

(1)  $x^2 y'' + 3xy' + y = 0$ ;

(2)  $x^2 y'' - 4xy' + 6y = x$ .

11. 求下列常系数线性微分方程组的通解:

(1)  $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} + y = 0, \\ 3\frac{dx}{dt} + 2x + 4\frac{dy}{dt} + 3y = t; \end{cases}$

(2)  $\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x + \frac{dy}{dt} + y = 0, \\ \frac{dx}{dt} + x + \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = e^t. \end{cases}$

## 附录 I 二阶和三阶行列式简介

给出二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \quad (1)$$

求这方程组的解.

用大家熟知的消元法, 分别消去方程组(1)中的  $x_2$  及  $x_1$ , 得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}. \end{cases} \quad (2)$$

下面引入二阶行列式, 然后利用二阶行列式来进一步讨论上述问题.

设已知四个数排成正方形表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

则数  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$  称为对应于这个表的二阶行列式, 用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (3)$$

表示, 因此

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

数  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$  叫做行列式(3)的元素, 横排叫做行, 坚排叫做列. 元素  $a_{ij}$  中的第一个指标  $i$  和第二个指标  $j$ , 依次表示行数和列数. 例如, 元素  $a_{21}$  在行列式(3)中位于第二行和第一列.

现在, 方程组(2)可利用行列式来表示. 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21},$$

则方程组(2)可写成

$$\begin{cases} Dx_1 = D_1, \\ Dx_2 = D_2. \end{cases} \quad (2')$$

我们注意到,  $D$  就是方程组(1)中  $x_1$  及  $x_2$  的系数构成的行列式, 因此称为系数行列式, 而  $D_1$  和  $D_2$  分别是用方程组(1)右端的常数项代替  $D$  的第一列和第二列而形成的.

若  $D \neq 0$ , 则方程组(2)的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}. \quad (4)$$

把(4)中  $x_1$  及  $x_2$  的值代入方程组(1), 便可证实  $x_1$  及  $x_2$  的这对值也是方程组(1)的解. 另一方面, (2)是由(1)导出的, 因此(1)的解一定是(2)的解. 现在(2)只有一组解(4), 所以(4)是方程组(1)的唯一解. 由此得出结论:

在  $D \neq 0$  的条件下, 方程组(1)有唯一的解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

### 例 1 解方程组

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ x - 2y = -3. \end{cases}$$

解  $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) - 3 \times 1 = -7,$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 8 \times (-2) - 3 \times (-3) = -7,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \times (-3) - 8 \times 1 = -14.$$

因  $D = -7 \neq 0$ , 故所给方程组有唯一解

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-7}{-7} = 1, \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{-14}{-7} = 2.$$

下面介绍三阶行列式概念.

设已知九个数排成正方形表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

则数  $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$  称为对应于这个表的三阶行列式, 用记号

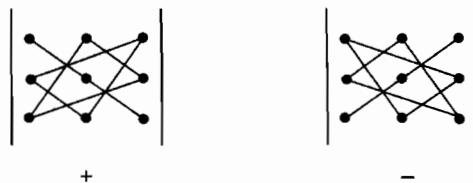
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示, 因此

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \quad (5)$$

关于三阶行列式的元素、行、列等概念，与二阶行列式的相应概念类似，不再重复。

(5)式右端相当复杂，我们可以借助下列图形得出它的计算法则（通常称为对角线法则）：



行列式中从左上角到右下角的直线称为主对角线，从右上角到左下角的直线称为次对角线。主对角线上元素的乘积以及位于主对角线的平行线上的元素与对角上的元素的乘积，前面都取正号。次对角线上元素的乘积以及位于次对角线的平行线上的元素与对角上的元素的乘积，前面都取负号。

例 2  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 2 \times 3 \times 5 + 1 \times 1 \times 2 + 2 \times (-4) \times 3 - 2 \times 3 \times 2 - 1 \times (-4) \times 5 - 2 \times 1 \times 3$$

$$= 30 + 2 - 24 - 12 + 20 - 6 = 10.$$

利用交换律及结合律，可把(5)式改写如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

把上式右端三个括号中的式子表示为二阶行列式，则有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

上式称为三阶行列式按第一行的展开式。

例 3 将例 2 中的行列式按第一行展开并计算它的值。

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \left| \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{array} \right| = 2 \left| \begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc} -4 & 1 \\ 2 & 5 \end{array} \right| + 2 \left| \begin{array}{cc} -4 & 3 \\ 2 & 3 \end{array} \right| \\
 & = 2 \times 12 - (-22) + 2 \times (-18) \\
 & = 24 + 22 - 36 = 10.
 \end{aligned}$$

## 习 题

1. 利用二阶行列式解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} 5x - y = 2, \\ 3x + 2y = 9; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 3x + 4y = 2, \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$$

2. 利用对角线法则, 计算下列各行列式:

$$\begin{aligned}
 (1) & \left| \begin{array}{ccc} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{array} \right|; \quad (2) \left| \begin{array}{ccc} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{array} \right|; \\
 (3) & \left| \begin{array}{ccc} 3 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{array} \right|; \quad (4) \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{array} \right|.
 \end{aligned}$$

3. 将下列行列式按第一行展开并计算它们的值:

$$(1) \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right|; \quad (2) \left| \begin{array}{ccc} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{array} \right|.$$

4. 证明下列等式:

$$\begin{aligned}
 (1) & \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right| = -a_{21} \left| \begin{array}{cc} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{array} \right| + a_{22} \left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{array} \right| - a_{23} \left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{array} \right|; \\
 (2) & \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right| = a_{31} \left| \begin{array}{cc} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{array} \right| - a_{32} \left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{array} \right| + a_{33} \left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right|;
 \end{aligned}$$

[注: 上面这两个等式分别称为三阶行列式按第二行和按第三行的展开式.]

## 答 案

1. (1)  $x=1, y=3$ ; (2)  $x=-22, y=17$ .

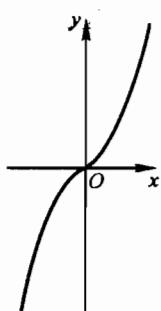
2. (1)  $-4$ ; (2)  $8$ ; (3)  $-48$ ; (4)  $ab$ .

3. (1)  $18$ ; (2)  $27$ .

4. 略.

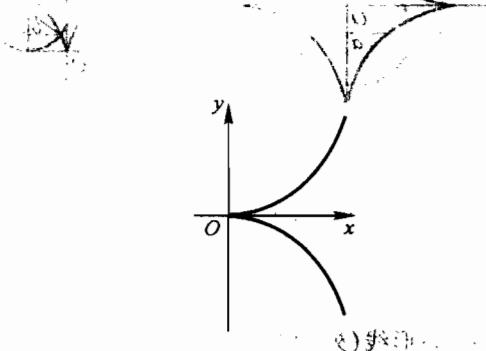
## 附录 II 几种常用的曲线

(1) 三次抛物线



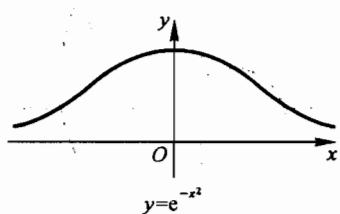
$$y=ax^3$$

(2) 半立方抛物线



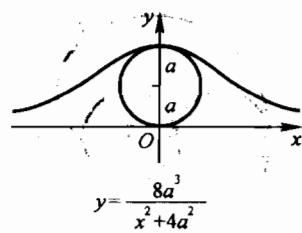
$$y^2=ax^3$$

(3) 概率曲线



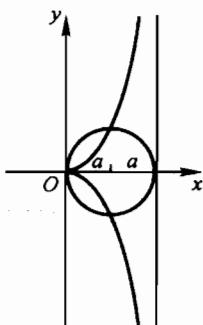
$$y=e^{-x^2}$$

(4) 箕舌线



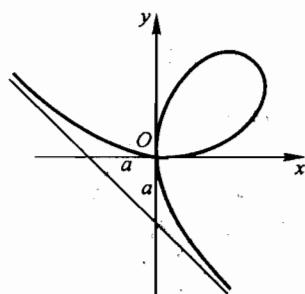
$$y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$$

(5) 蔓叶线



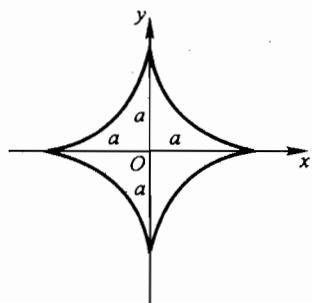
$$y^2(2a-x)=x^3$$

(6) 笛卡儿叶形线



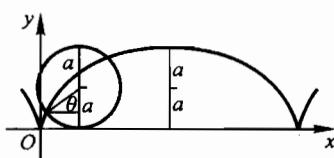
$$\begin{aligned}x^3+y^3-3axy &= 0 \\x &= \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}\end{aligned}$$

(7) 星形线(内摆线的一种)



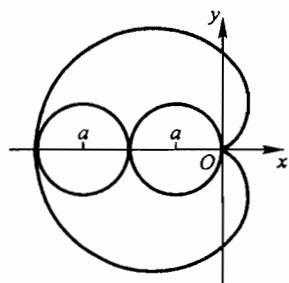
$$\begin{cases} x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \\ x = a \cos^3 \theta \\ y = a \sin^3 \theta \end{cases}$$

(8) 摆线



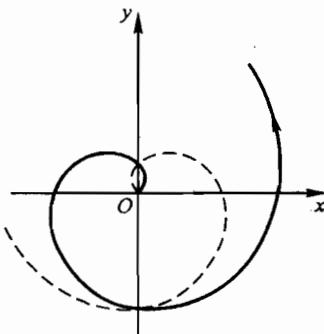
$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta) \\ y = a(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

(9) 心形线(外摆线的一种)



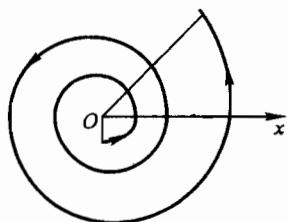
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + ax &= a\sqrt{x^2 + y^2} \\ \rho &= a(1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

(10) 阿基米德螺线



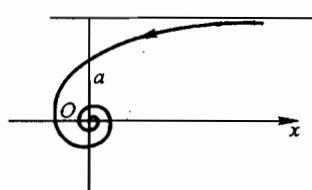
$$\rho = a\theta$$

(11) 对数螺线



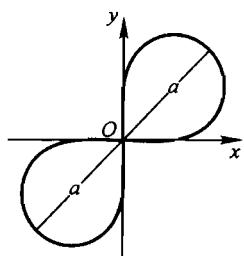
$$\rho = e^{\theta}$$

(12) 双曲螺线



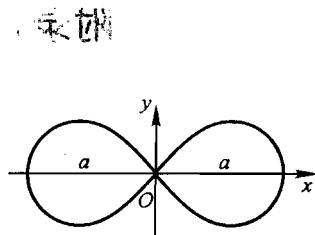
$$\rho\theta = a$$

(13) 伯努利双纽线



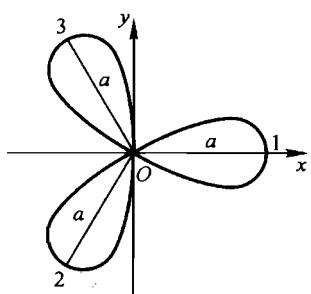
$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$$
$$\rho^2 = a^2 \sin 2\theta$$

(14) 伯努利双纽线



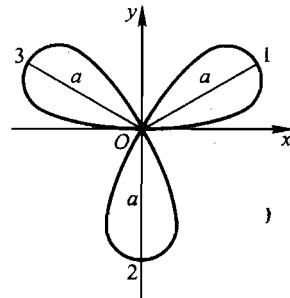
$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$
$$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$$

(15) 三叶玫瑰线



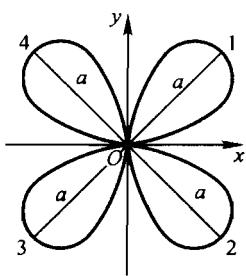
$$\rho = a \cos 3\theta$$

(16) 三叶玫瑰线



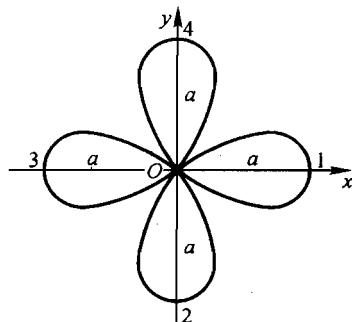
$$\rho = a \sin 3\theta$$

(17) 四叶玫瑰线



$$\rho = a \sin 2\theta$$

(18) 四叶玫瑰线



$$\rho = a \cos 2\theta$$

### 附录III 积 分 表

(一) 含有  $ax + b$  的积分

$$1. \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$$

$$2. \int (ax+b)^\mu dx = \frac{1}{a(\mu+1)} (ax+b)^{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$$

$$3. \int \frac{x}{ax+b} dx = \frac{1}{a^2} (ax+b - b \ln|ax+b|) + C$$

$$4. \int \frac{x^2}{ax+b} dx = \frac{1}{a^3} \left[ \frac{1}{2} (ax+b)^2 - 2b(ax+b) + b^2 \ln|ax+b| \right] + C$$

$$5. \int \frac{dx}{x(ax+b)} = -\frac{1}{b} \ln \left| \frac{ax+b}{x} \right| + C$$

$$6. \int \frac{dx}{x^2(ax+b)} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2} \ln \left| \frac{ax+b}{x} \right| + C$$

$$7. \int \frac{x}{(ax+b)^2} dx = \frac{1}{a^2} \left( \ln|ax+b| + \frac{b}{ax+b} \right) + C$$

$$8. \int \frac{x^2}{(ax+b)^2} dx = \frac{1}{a^3} \left( ax+b - 2b \ln|ax+b| - \frac{b^2}{ax+b} \right) + C$$

$$9. \int \frac{dx}{x(ax+b)^2} = \frac{1}{b(ax+b)} - \frac{1}{b^2} \ln \left| \frac{ax+b}{x} \right| + C$$

(二) 含有  $\sqrt{ax+b}$  的积分

$$10. \int \sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{3a} \sqrt{(ax+b)^3} + C$$

$$11. \int x \sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{15a^2} (3ax-2b) \sqrt{(ax+b)^3} + C$$

$$12. \int x^2 \sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{105a^3} (15a^2x^2 - 12abx + 8b^2) \sqrt{(ax+b)^3} + C$$

$$13. \int \frac{x}{\sqrt{ax+b}} dx = \frac{2}{3a^2} (ax-2b) \sqrt{ax+b} + C$$

$$14. \int \frac{x^2}{\sqrt{ax+b}} dx = \frac{2}{15a^3} (3a^2x^2 - 4abx + 8b^2) \sqrt{ax+b} + C$$

$$15. \int \frac{dx}{x \sqrt{ax+b}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \left| \frac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{b}}{\sqrt{ax+b} + \sqrt{b}} \right| + C & (b>0) \\ \frac{2}{\sqrt{-b}} \arctan \sqrt{\frac{ax+b}{-b}} + C & (b<0) \end{cases}$$

$$16. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b} \int \frac{dx}{x \sqrt{ax+b}}$$

$$17. \int \frac{\sqrt{ax+b}}{x} dx = 2\sqrt{ax+b} + b \int \frac{dx}{x \sqrt{ax+b}}$$

$$18. \int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x} + \frac{a}{2} \int \frac{dx}{x \sqrt{ax+b}}$$

### (三) 含有 $x^2 \pm a^2$ 的积分

$$19. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$20. \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}}$$

$$21. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

### (四) 含有 $ax^2 + b$ ( $a>0$ ) 的积分

$$22. \int \frac{dx}{ax^2 + b} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{ab}} \arctan \sqrt{\frac{a}{b}} x + C & (b>0) \\ \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \ln \left| \frac{\sqrt{ax} - \sqrt{-b}}{\sqrt{ax} + \sqrt{-b}} \right| + C & (b<0) \end{cases}$$

$$23. \int \frac{x}{ax^2 + b} dx = \frac{1}{2a} \ln |ax^2 + b| + C$$

$$24. \int \frac{x^2}{ax^2 + b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{ax^2 + b}$$

$$25. \int \frac{dx}{x(ax^2 + b)} = \frac{1}{2b} \ln \frac{x^2}{|ax^2 + b|} + C$$

$$26. \int \frac{dx}{x^2(ax^2 + b)} = -\frac{1}{bx} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{ax^2 + b}$$

$$27. \int \frac{dx}{x^3(ax^2 + b)} = \frac{a}{2b^2} \ln \frac{|ax^2 + b|}{x^2} - \frac{1}{2bx^2} + C$$

$$28. \int \frac{dx}{(ax^2 + b)^2} = \frac{x}{2b(ax^2 + b)} + \frac{1}{2b} \int \frac{dx}{ax^2 + b}$$

(五) 含有  $ax^2 + bx + c$  ( $a > 0$ ) 的积分

$$29. \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \arctan \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} + C & (b^2 < 4ac) \\ \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right| + C & (b^2 > 4ac) \end{cases}$$

$$30. \int \frac{x}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

(六) 含有  $\sqrt{x^2 + a^2}$  ( $a > 0$ ) 的积分

$$31. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \operatorname{arsh} \frac{x}{a} + C_1 = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$

$$32. \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + a^2)^3}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$33. \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \sqrt{x^2 + a^2} + C$$

$$34. \int \frac{x}{\sqrt{(x^2 + a^2)^3}} dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$35. \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$

$$36. \int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 + a^2)^3}} dx = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$

$$37. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{a} \ln \frac{\sqrt{x^2 + a^2} - a}{|x|} + C$$

$$38. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a^2 x} + C$$

$$39. \int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$

$$40. \int \sqrt{(x^2 + a^2)^3} dx = \frac{x}{8} (2x^2 + 5a^2) \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{3}{8} a^4 \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$

$$41. \int x \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + a^2)^3} + C$$

$$42. \int x^2 \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{8} (2x^2 + a^2) \sqrt{x^2 + a^2} - \frac{a^4}{8} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$

$$43. \int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 + a^2} + a \ln \frac{\sqrt{x^2 + a^2} - a}{|x|} + C$$

$$44. \int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} + \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C$$

(七) 含有  $\sqrt{x^2 - a^2}$  ( $a > 0$ ) 的积分

$$45. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{|x|}{|x|} \operatorname{arcch} \frac{|x|}{a} + C_1 = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

$$46. \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}} = -\frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 - a^2}} + C$$

$$47. \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \sqrt{x^2 - a^2} + C$$

$$48. \int \frac{x}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}} dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} + C$$

$$49. \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

$$50. \int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}} dx = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} + \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

$$51. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \arccos \frac{a}{|x|} + C$$

$$52. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a^2 x} + C$$

$$53. \int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

$$54. \int \sqrt{(x^2 - a^2)^3} dx = \frac{x}{8} (2x^2 - 5a^2) \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{3}{8} a^4 \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

$$55. \int x \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 - a^2)^3} + C$$

$$56. \int x^2 \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{8} (2x^2 - a^2) \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^4}{8} \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

$$57. \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 - a^2} - a \arccos \frac{a}{|x|} + C$$

$$58. \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} + \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

(八) 含有  $\sqrt{a^2 - x^2}$  ( $a > 0$ ) 的积分

$$59. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$60. \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 - x^2}} + C$$

$$61. \int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$62. \int \frac{x}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C$$

$$63. \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$64. \int \frac{x^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} dx = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$65. \int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{|x|} + C$$

$$66. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x} + C$$

$$67. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$68. \int \sqrt{(a^2 - x^2)^3} dx = \frac{x}{8} (5a^2 - 2x^2) \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{3}{8} a^4 \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$69. \int x \sqrt{a^2 - x^2} dx = -\frac{1}{3} \sqrt{(a^2 - x^2)^3} + C$$

$$70. \int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{8} (2x^2 - a^2) \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^4}{8} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$71. \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 - x^2} + a \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{|x|} + C$$

$$72. \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \arcsin \frac{x}{a} + C$$

(九) 含有  $\sqrt{\pm ax^2 + bx + c}$  ( $a > 0$ ) 的积分

$$73. \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln |2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}| + C$$

$$74. \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \frac{2ax + b}{4a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{4ac - b^2}{8\sqrt{a^3}} \ln |2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}| + C$$

$$75. \int \frac{x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{1}{a} \sqrt{ax^2 + bx + c} -$$

$$\frac{b}{2\sqrt{a^3}} \ln |2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}| + C$$

76.  $\int \frac{dx}{\sqrt{c+bx-ax^2}} = -\frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2+4ac}} + C$

77.  $\int \sqrt{c+bx-ax^2} dx = \frac{2ax-b}{4a} \sqrt{c+bx-ax^2} + \frac{b^2+4ac}{8\sqrt{a^3}} \arcsin \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2+4ac}} + C$

78.  $\int \frac{x}{\sqrt{c+bx-ax^2}} dx = -\frac{1}{a} \sqrt{c+bx-ax^2} + \frac{b}{2\sqrt{a^3}} \arcsin \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2+4ac}} + C$

(+) 含有  $\sqrt{\pm \frac{x-a}{x-b}}$  或  $\sqrt{(x-a)(b-x)}$  的积分

79.  $\int \sqrt{\frac{x-a}{x-b}} dx = (x-b) \sqrt{\frac{x-a}{x-b}} + (b-a) \ln(\sqrt{|x-a|} + \sqrt{|x-b|}) + C$

80.  $\int \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx = (x-b) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} + (b-a) \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C$

81.  $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C \quad (a < b)$

82.  $\int \sqrt{(x-a)(b-x)} dx = \frac{2x-a-b}{4} \sqrt{(x-a)(b-x)} + \frac{(b-a)^2}{4} \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C \quad (a < b)$

(十一) 含有三角函数的积分

83.  $\int \sin x dx = -\cos x + C$

84.  $\int \cos x dx = \sin x + C$

85.  $\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C$

86.  $\int \cot x dx = \ln |\sin x| + C$

87.  $\int \sec x dx = \ln \left| \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C = \ln |\sec x + \tan x| + C$

88.  $\int \csc x dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C = \ln |\csc x + \cot x| + C$

89.  $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$

$$90. \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$91. \int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

$$92. \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$

$$93. \int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

$$94. \int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

$$95. \int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

$$96. \int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

$$97. \int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$$

$$98. \int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$$

$$99. \int \cos^n x \sin^n x dx = \frac{1}{m+n} \cos^{m-1} x \sin^{n+1} x + \frac{m-1}{m+n} \int \cos^{m-2} x \sin^n x dx \\ = -\frac{1}{m+n} \cos^{m+1} x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{m+n} \int \cos^m x \sin^{n-2} x dx$$

$$100. \int \sin ax \cos bx dx = -\frac{1}{2(a+b)} \cos(a+b)x - \frac{1}{2(a-b)} \cos(a-b)x + C$$

$$101. \int \sin ax \sin bx dx = -\frac{1}{2(a+b)} \sin(a+b)x + \frac{1}{2(a-b)} \sin(a-b)x + C$$

$$102. \int \cos ax \cos bx dx = \frac{1}{2(a+b)} \sin(a+b)x + \frac{1}{2(a-b)} \sin(a-b)x + C$$

$$103. \int \frac{dx}{a+b \sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \arctan \frac{a \tan \frac{x}{2} + b}{\sqrt{a^2-b^2}} + C \quad (a^2 > b^2)$$

$$104. \int \frac{dx}{a+b \sin x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \left| \frac{a \tan \frac{x}{2} + b - \sqrt{b^2-a^2}}{a \tan \frac{x}{2} + b + \sqrt{b^2-a^2}} \right| + C \quad (a^2 < b^2)$$

$$105. \int \frac{dx}{a+b \cos x} = \frac{2}{a+b} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \arctan \left( \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2} \right) + C \quad (a^2 > b^2)$$

$$106. \int \frac{dx}{a+b \cos x} = \frac{1}{a+b} \sqrt{\frac{a+b}{b-a}} \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{a+b}{b-a}}}{\tan \frac{x}{2} - \sqrt{\frac{a+b}{b-a}}} \right| + C \quad (a^2 < b^2)$$

$$107. \int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{b}{a} \tan x\right) + C$$

$$108. \int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x - b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{2ab} \ln \left| \frac{b \tan x + a}{b \tan x - a} \right| + C$$

$$109. \int x \sin ax dx = \frac{1}{a^2} \sin ax - \frac{1}{a} x \cos ax + C$$

$$110. \int x^2 \sin ax dx = -\frac{1}{a} x^2 \cos ax + \frac{2}{a^2} x \sin ax + \frac{2}{a^3} \cos ax + C$$

$$111. \int x \cos ax dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{1}{a} x \sin ax + C$$

$$112. \int x^2 \cos ax dx = \frac{1}{a} x^2 \sin ax + \frac{2}{a^2} x \cos ax - \frac{2}{a^3} \sin ax + C$$

### (十二) 含有反三角函数的积分(其中 $a > 0$ )

$$113. \int \arcsin \frac{x}{a} dx = x \arcsin \frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$114. \int x \arcsin \frac{x}{a} dx = \left( \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{4} \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$115. \int x^2 \arcsin \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{9} (x^2 + 2a^2) \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$116. \int \arccos \frac{x}{a} dx = x \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$117. \int x \arccos \frac{x}{a} dx = \left( \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) \arccos \frac{x}{a} - \frac{x}{4} \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$118. \int x^2 \arccos \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \arccos \frac{x}{a} - \frac{1}{9} (x^2 + 2a^2) \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$119. \int \arctan \frac{x}{a} dx = x \arctan \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln(a^2 + x^2) + C$$

$$120. \int x \arctan \frac{x}{a} dx = \frac{1}{2} (a^2 + x^2) \arctan \frac{x}{a} - \frac{a}{2} x + C$$

$$121. \int x^2 \arctan \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \arctan \frac{x}{a} - \frac{a}{6} x^2 + \frac{a^3}{6} \ln(a^2 + x^2) + C$$

### (十三) 含有指数函数的积分

$$122. \int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$$

$$123. \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

$$124. \int x e^{ax} dx = \frac{1}{a^2} (ax - 1) e^{ax} + C$$

$$125. \int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx$$

$$126. \int x a^x dx = \frac{x}{\ln a} a^x - \frac{1}{(\ln a)^2} a^x + C$$

$$127. \int x^n a^x dx = \frac{1}{\ln a} x^n a^x - \frac{n}{\ln a} \int x^{n-1} a^x dx$$

$$128. \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx) + C$$

$$129. \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{ax} (b \sin bx + a \cos bx) + C$$

$$130. \int e^{ax} \sin^n bx dx = \frac{1}{a^2 + b^2 n^2} e^{ax} \sin^{n-1} bx (a \sin bx - nb \cos bx) + \\ \frac{n(n-1)b^2}{a^2 + b^2 n^2} \int e^{ax} \sin^{n-2} bx dx$$

$$131. \int e^{ax} \cos^n bx dx = \frac{1}{a^2 + b^2 n^2} e^{ax} \cos^{n-1} bx (a \cos bx + nb \sin bx) + \\ \frac{n(n-1)b^2}{a^2 + b^2 n^2} \int e^{ax} \cos^{n-2} bx dx$$

#### (十四) 含有对数函数的积分

$$132. \int \ln x dx = x \ln x - x + C$$

$$133. \int \frac{dx}{x \ln x} = \ln |\ln x| + C$$

$$134. \int x^n \ln x dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \left( \ln x - \frac{1}{n+1} \right) + C$$

$$135. \int (\ln x)^n dx = x (\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx$$

$$136. \int x^m (\ln x)^n dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1} (\ln x)^n - \frac{n}{m+1} \int x^m (\ln x)^{n-1} dx$$

#### (十五) 含有双曲函数的积分

$$137. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$138. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$139. \int \operatorname{th} x dx = \ln \operatorname{ch} x + C$$

$$140. \int \operatorname{sh}^2 x dx = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + C$$

$$141. \int \operatorname{ch}^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + C$$

### (十六) 定积分

$$142. \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0$$

$$143. \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0$$

$$144. \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

$$145. \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

$$146. \int_0^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \int_0^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi/2, & m = n \end{cases}$$

$$147. I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$$

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$= \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} & (n \text{ 为大于 1 的正奇数}), I_1 = 1 \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} & (n \text{ 为正偶数}), I_0 = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

# 习题答案与提示

## 第一章

### 习题 1-1(第 21 页)

1.  $A \cup B = (-\infty, 3) \cup (5, +\infty)$ ,  $A \cap B = [-10, -5]$ ,

$$A \setminus B = (-\infty, -10) \cup (5, +\infty)$$
,  $A \setminus (A \setminus B) = [-10, -5]$ .

2—3. 略.

4. (1)  $\left[-\frac{2}{3}, +\infty\right)$ ; (2)  $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ ;

(3)  $[-1, 0] \cup (0, 1]$ ; (4)  $(-2, 2)$ ;

(5)  $[0, +\infty)$ ; (6)  $\mathbf{R} \setminus \left\{ \left( k + \frac{1}{2} \right) \pi - 1 \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$ ;

(7)  $[2, 4]$ ; (8)  $(-\infty, 0) \cup (0, 3]$ ;

(9)  $(-1, +\infty)$ ; (10)  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ .

5. 略.

6.  $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ ,  $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\varphi(-2) = 0$ .

7—9. 略.

10. (1) 偶函数; (2) 既非奇函数又非偶函数;

(3) 偶函数; (4) 奇函数;

(5) 既非奇函数又非偶函数; (6) 偶函数.

11. (1) 是周期函数, 周期  $l = 2\pi$ ; (2) 是周期函数, 周期  $l = \frac{\pi}{2}$ ;

(3) 是周期函数, 周期  $l = 2$ ; (4) 不是周期函数;

(5) 是周期函数, 周期  $l = \pi$ .

12. (1)  $y = x^3 - 1$ ; (2)  $y = \frac{1-x}{1+x}$ ;

(3)  $y = \frac{-dx+b}{cx-a}$ ; (4)  $y = \frac{1}{3} \arcsin \frac{x}{2}$ ;

(5)  $y = e^{x-1} - 2$ ; (6)  $y = \log_2 \frac{x}{1-x}$ .

13. 略.

14. (1)  $y = \sin^2 x$ ,  $y_1 = \frac{1}{4}$ ,  $y_2 = \frac{3}{4}$ ;

$$(2) \ y = \sin 2x, y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, y_2 = 1;$$

$$(3) \ y = \sqrt{1+x^2}, y_1 = \sqrt{2}, y_2 = \sqrt{5};$$

$$(4) \ y = e^{x^2}, y_1 = 1, y_2 = e;$$

$$(5) \ y = e^{2x}, y_1 = e^2, y_2 = e^{-2}.$$

$$15. (1) [-1, 1]; \quad (2) \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} [2n\pi, (2n+1)\pi];$$

$$(3) [-a, 1-a];$$

$$(4) \text{ 若 } a \in \left(0, \frac{1}{2}\right], \text{ 则 } D = [a, 1-a];$$

$$\text{若 } a > \frac{1}{2}, \text{ 则 } D = \emptyset.$$

$$16. f[g(x)] = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x > 0; \end{cases} \quad g[f(x)] = \begin{cases} e, & |x| < 1, \\ 1, & |x| = 1, \\ e^{-1}, & |x| > 1. \end{cases}$$

$$17. L = \frac{S_0}{h} + \frac{2 - \cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} h, h \in (0, \sqrt{S_0 \tan 40^\circ}).$$

$$18. (1) p = \begin{cases} 90, & 0 \leq x \leq 100, \\ 90 - (x - 100) \cdot 0.01, & 100 < x < 1600, \\ 75, & x \geq 1600; \end{cases}$$

$$(2) P = (p - 60)x = \begin{cases} 30x, & 0 \leq x \leq 100, \\ 31x - 0.01x^2, & 100 < x < 1600, \\ 15x, & x \geq 1600. \end{cases}$$

$$(3) P = 21000 \text{ 元.}$$

$$19. (1) 90^\circ \text{F} = 32.2^\circ \text{C}, -5^\circ \text{C} = 23^\circ \text{F};$$

$$(2) -40^\circ \text{F} = -40^\circ \text{C}.$$

20. 在 1986 年后的第  $t$  年, 世界人口为  $p(t) = 4936 \cdot (1.018)^t$  (百万),  
2010 年对应  $t = 24$ ,  $p(24) \approx 76$ (亿).

### 习题 1-2(第 30 页)

1. (1) 收敛, 0; (2) 收敛, 0; (3) 收敛, 2; (4) 收敛, 1; (5) 发散; (6) 收敛, 0; (7) 发散; (8) 发散.

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, N = \left[ \frac{1}{\epsilon} \right].$$

3—6. 略.

### 习题 1-3(第 37 页)

1. (1) 0; (2) -1; (3) 不存在, 因为  $f(0^+) \neq f(0^-)$ .

2. (1) 错; (2) 对; (3) 错; (4) 错; (5) 对; (6) 对.

3. (1) 对; (2) 对; (3) 对; (4) 错; (5) 对; (6) 对; (7) 对; (8) 错.

4.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1;$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x)$  不存在.

\* 5—\* 6. 略.

\* 7.  $\delta = 0.0002$ . 提示: 因为  $x \rightarrow 2$ , 所以不妨设  $1 < x < 3$ .

\* 8.  $X \geqslant \sqrt{397}$ .

\* 9—\* 12. 略.

### 习题 1-4(第 42 页)

1. 两个无穷小的商不一定是无穷小, 例如:  $\alpha = 4x, \beta = 2x$ , 当  $x \rightarrow 0$  时都是无穷小, 但  $\frac{\alpha}{\beta}$  当  $x \rightarrow 0$  时不是无穷小.

\* 2. 略.

\* 3.  $0 < |x| < \frac{1}{10^4 + 2}$ .

4. (1) 2, 提示: 应用本节定理 1;

(2) 1, 提示: 应用本节定理 1.

5. 略.

6.  $y = x \cos x$  在  $(-\infty, +\infty)$  上无界, 但当  $x \rightarrow \infty$  时, 此函数不是无穷大.

\* 7. 略.

8. 水平渐近线  $y = 0$ , 铅直渐近线  $x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$ .

### 习题 1-5(第 49 页)

1. (1) -9; (2) 0; (3) 0; (4)  $\frac{1}{2}$ ; (5)  $2x$ ; (6) 2; (7)  $\frac{1}{2}$ ;

(8) 0; (9)  $\frac{2}{3}$ ; (10) 2; (11) 2; (12)  $\frac{1}{2}$ ; (13)  $\frac{1}{5}$ ; (14) -1.

2. (1)  $\infty$ ; (2)  $\infty$ ; (3)  $\infty$ .

3. (1) 0; (2) 0.

4. (1) 错, 例如  $a_n = \frac{1}{n}, b_n = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}^+$ ;

(2) 错,例如  $b_n = \frac{n}{n+1}$ ,  $c_n = (-1)^n n$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$ ;

(3) 错,例如  $a_n = \frac{1}{n^2}$ ,  $c_n = n$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$ ;

(4) 对,因为,假若  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n c_n)$  存在,则  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n c_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n}$  也存在,与已知条件矛盾.

5. (1) 对,因为,假若  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$  存在,则  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  也存在,与已知条件矛盾.

(2) 错,例如  $f(x) = \operatorname{sgn} x$ ,  $g(x) = -\operatorname{sgn} x$  当  $x \rightarrow 0$  时的极限都不存在,但  $f(x) + g(x) \equiv 0$  当  $x \rightarrow 0$  时的极限存在.

(3) 错,例如  $f(x) = x$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ,  $g(x) = \sin \frac{1}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  不存在,但  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} (x \sin \frac{1}{x}) = 0$ .

\* 6. 略.

### 习题 1-6(第 56 页)

1. (1)  $\omega$ ; (2) 3; (3)  $\frac{2}{5}$ ; (4) 1; (5) 2; (6)  $x$ .

2. (1)  $\frac{1}{e}$ ; (2)  $e^2$ ; (3)  $e^2$ ; (4)  $e^{-k}$ .

\* 3. 略.

4. (1) 提示:  $1 < \sqrt{1 + \frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n}$ ;

(2) 提示:  $\frac{n}{n+\pi} \leq n \left( \frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right) \leq \frac{n^2}{n^2 + \pi}$ ;

(3) 提示:  $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$ , 数列  $\{x_n\}$  单调增加且有界;

(4) 提示: 当  $x > 0$  时,  $1 < \sqrt[3]{1+x} < 1+x$ ,

当  $-1 < x < 0$  时,  $1+x < \sqrt[3]{1+x} < 1$ ;

(5) 提示: 当  $x > 0$  时,  $1-x < x \left[ \frac{1}{x} \right] \leq 1$ .

### 习题 1-7(第 59 页)

1. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $x^2 - x^3$  是比  $2x - x^2$  高阶的无穷小.

2. (1) 同阶,不等价; (2) 等价无穷小.

3. 略.

4. (1)  $\frac{3}{2}$ ;

(2) 0 ( $m < n$ ), 1 ( $m = n$ ),  $\infty$  ( $m > n$ );

(3)  $\frac{1}{2}$ ; (4)  $\pm 3$ .

5. 略.

### 习题 1-8(第 64 页)

1.  $x = -1, 0, 1, 2, 3$  均为  $f(x)$  的间断点, 除  $x=0$  外它们均为  $f(x)$  的可去间断点. 补充定义  $f(-1)=f(2)=f(3)=0$ , 修改定义, 使  $f(1)=2$ .

2. (1)  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上连续;

(2)  $f(x)$  在  $(-\infty, -1)$  与  $(-1, +\infty)$  内连续,  $x=-1$  为跳跃间断点.

3. (1)  $x=1$  为可去间断点,  $x=2$  为第二类间断点;

(2)  $x=0$  和  $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$  为可去间断点,  $x=k\pi$  ( $k \neq 0$ ) 为第二类间断点;

(3)  $x=0$  为第二类间断点;

(4)  $x=1$  为第一类间断点.

4.  $f(x) = \begin{cases} x, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -x, & |x| > 1. \end{cases}$   $x=1$  和  $x=-1$  为第一类间断点.

5. (1) 对, 因为  $||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)|$ , 由此可推出结论;

(2) 错, 例如  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases} \forall a \in \mathbb{R}$ .

\*6—\*7. 略.

\*8.  $f(x) = \cot(\pi x) + \cot \frac{\pi}{x}$ .

### 习题 1-9(第 69 页)

1. 连续区间:  $(-\infty, -3), (-3, 2), (2, +\infty)$ ;

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\frac{8}{5}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty.$$

2. 略.

3. (1)  $\sqrt{5}$ ; (2) 1; (3) 0; (4)  $\frac{1}{2}$ ; (5) 2; (6)  $\cos \alpha$ ; (7) 1.

4. (1) 1; (2) 0; (3)  $\sqrt{e}$ ; (4)  $e^3$ ; (5)  $e^{-\frac{3}{2}}$ ; (6)  $\frac{1}{2}$ .

5. (1) 错, 例如  $\varphi(x) = \operatorname{sgn} x$ ,  $f(x) = e^x$ ,  $\varphi[f(x)] \equiv 1$  在  $\mathbf{R}$  上处处连续;  
 (2) 错, 例如  $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ -1, & x \in \mathbf{Q}^c, \end{cases}$   $[\varphi(x)]^2 \equiv 1$  在  $\mathbf{R}$  上处处连续;  
 (3) 对, 例如  $\varphi(x)$  同(2),  $f(x) = |x| + 1$ ,  $f[\varphi(x)] \equiv 2$  在  $\mathbf{R}$  上处处连续;  
 (4) 对, 因为, 若  $F(x) = \frac{\varphi(x)}{f(x)}$  在  $\mathbf{R}$  上连续, 则  $\varphi(x) = F(x)f(x)$  也在  $\mathbf{R}$  上连续, 与已知条件矛盾.
6.  $a = 1$ .

### 习题 1-10(第 74 页)

1—3. 略.

\* 4. 提示: 证明  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续.

5. 提示:  $m \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \leq M$ , 其中  $m, M$  分别为  $f(x)$  在  $[x_1, x_n]$  上的最小值及最大值.

\* 6. 略.

\* 7. 若  $f(a^+)$  及  $f(b^-)$  存在, 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  内一致连续.

### 总习题一(第 74 页)

1. (1) 必要, 充分; (2) 必要, 充分;  
 (3) 必要, 充分; (4) 充分必要.

2. 1.

3. (1) (B); (2) (B).

4. (1)  $(-\infty, 0]$ ; (2)  $[1, e]$ ; (3)  $[0, \tan 1]$ ;

$$(4) \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} \left[ 2n\pi - \frac{\pi}{2}, 2n\pi + \frac{\pi}{2} \right].$$

5.  $f[f(x)] = f(x)$ ,  $g[g(x)] = 0$ ,  $f[g(x)] = 0$ ,  $g[f(x)] = g(x)$ .

6. 略.

$$7. V = \frac{R^3}{24\pi^2} (2\pi - \alpha)^2 \sqrt{4\pi\alpha - \alpha^2} \quad (0 < \alpha < 2\pi).$$

\* 8. 略.

9. (1)  $\infty$ ; (2)  $\frac{1}{2}$ ; (3)  $e$ ; (4)  $\frac{1}{2}$ ; (5)  $\sqrt[3]{abc}$ ; (6) 1.

10.  $a = 0$ .

11.  $x = 1$  是第二类间断点,  $x = 0$  是第一类间断点.

12—13. 略.

14. (1) 略; (2)  $y = 2x + 1$ .

## 第二章

### 习题 2-1(第 86 页)

1.  $\frac{d\theta}{dt} \Big|_{t=t_0}$ .

2.  $\frac{dT}{dt}$ .

3. (1)  $C'(100) = 80$ (元/件);

(2)  $C(101) - C(100) = 79.9$ (元)  $\approx 80$ (元), 边际成本  $C'(x)$  近似于产量达到  $x$  单位时再增加一个单位产品所需的成本.

4. - 20.

5. 略.

6. (1)  $-f'(x_0)$ ; (2)  $f'(0)$ ; (3)  $2f'(x_0)$ .

7. (B).

8. (A).

9. (1)  $4x^3$ ; (2)  $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ ; (3)  $1.6x^{0.6}$ ; (4)  $-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ ;

(5)  $-\frac{2}{x^3}$ ; (6)  $\frac{16}{5}x^{\frac{11}{5}}$ ; (7)  $\frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$ .

10. 12 m/s.

11. 略.

12.  $k_1 = y' \Big|_{x=\frac{2}{3}\pi} = -\frac{1}{2}$ ;  $k_2 = y' \Big|_{x=\pi} = -1$ .

13. 切线方程为  $\frac{\sqrt{3}}{2}x + y - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\pi\right) = 0$ ;

法线方程为  $\frac{2\sqrt{3}}{3}x - y + \frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi = 0$ .

14.  $x - y + 1 = 0$ .

15. (2,4).

16. (1) 在  $x=0$  处连续, 不可导;

(2) 在  $x=0$  处连续且可导.

17.  $a=2, b=-1$ .

18.  $f'_+(0) = 0$ ,  $f'_{-}(0) = -1$ ,  $f'(0)$  不存在.

19.  $f'(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$

20. 略.

### 习题 2-2(第 97 页)

1. 略.

2. (1)  $3x^2 - \frac{28}{x^3} + \frac{2}{x^2}$ ; (2)  $15x^2 - 2^x \ln 2 + 3e^x$ ;

(3)  $\sec x(2\sec x + \tan x)$ ; (4)  $\cos 2x$ ;

(5)  $x(2\ln x + 1)$ ; (6)  $3e^x(\cos x - \sin x)$ ;

(7)  $\frac{1 - \ln x}{x^2}$ ; (8)  $\frac{e^x(x - 2)}{x^3}$ ;

(9)  $2x \ln x \cos x + x \cos x - x^2 \ln x \sin x$ ;

(10)  $\frac{1 + \sin t + \cos t}{(1 + \cos t)^2}$ .

3. (1)  $y'|_{x=\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ ,  $y'|_{x=\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$ ;

(2)  $\frac{\sqrt{2}}{4} \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$ ;

(3)  $f'(0) = \frac{3}{25}$ ,  $f'(2) = \frac{17}{15}$ .

4. (1)  $v(t) = v_0 - gt$ ; (2)  $t = \frac{v_0}{g}$ .

5. 切线方程为  $2x - y = 0$ . 法线方程为  $x + 2y = 0$ .

6. (1)  $8(2x + 5)^3$ ; (2)  $3\sin(4 - 3x)$ ;

(3)  $-6x e^{-3x^2}$ ; (4)  $\frac{2x}{1+x^2}$ ;

(5)  $\sin 2x$ ; (6)  $-\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ ;

(7)  $2x \sec^2(x^2)$ ; (8)  $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$ ;

(9)  $\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ ; (10)  $-\tan x$ .

7. (1)  $-\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ ; (2)  $\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ ;

$$(3) -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(\cos 3x + 6\sin 3x); (4) \frac{|x|}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}};$$

$$(5) -\frac{2}{x(1 + \ln x)^2};$$

$$(6) \frac{2x \cos 2x - \sin 2x}{x^2};$$

$$(7) \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}};$$

$$(8) \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}};$$

$$(9) \sec x;$$

$$(10) \csc x.$$

$$8. (1) \frac{2\arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}};$$

$$(2) \csc x;$$

$$(3) \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}};$$

$$(4) \frac{e^{\arctan \sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(1+x)};$$

$$(5) n \sin^{n-1} x \cos(n+1)x;$$

$$(6) -\frac{1}{1+x^2};$$

$$(7) \frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}(\arccos x)^2};$$

$$(8) \frac{1}{x \ln x \cdot \ln(\ln x)};$$

$$(9) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}+1-x^2};$$

$$(10) -\frac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}.$$

$$9. \frac{f(x)f'(x)+g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}.$$

$$10. (1) 2x f'(x^2);$$

$$(2) \sin 2x [f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)].$$

$$11. (1) e^{-x}(-x^2 + 4x - 5);$$

$$(2) \sin 2x \sin(x^2) + 2x \sin^2 x \cos(x^2);$$

$$(3) \frac{4}{4+x^2} \arctan \frac{x}{2};$$

$$(4) \frac{1-n \ln x}{x^{n+1}};$$

$$(5) \frac{4}{e^{2t} + e^{-2t}} + 2 \text{或} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t};$$

$$(6) \frac{1}{x^2} \tan \frac{1}{x};$$

$$(7) \frac{1}{x^2} \sin \frac{2}{x} \cdot e^{-\sin^2 \frac{1}{x}};$$

$$(8) \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}};$$

$$(9) \arcsin \frac{x}{2};$$

$$(10) y' = \begin{cases} \frac{2}{1+t^2}, & t^2 < 1, \\ -\frac{2}{1+t^2}, & t^2 > 1. \end{cases}$$

$$12. (1) \operatorname{sh}(\operatorname{sh} x) \cdot \operatorname{ch} x;$$

$$(2) e^{\operatorname{ch} x} (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh}^2 x);$$

$$(3) \frac{1}{x \operatorname{ch}^2(\ln x)};$$

$$(4) (3\operatorname{sh} x + 2)\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x;$$

$$(5) -\frac{2x}{\operatorname{ch}^2(1-x^2)};$$

$$(6) \frac{2x}{\sqrt{x^4+2x^2+2}};$$

$$(7) \frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}-1}};$$

$$(8) \frac{1}{1+2\sin^2 x};$$

$$(9) \operatorname{th}^3 x;$$

$$(10) \frac{2}{(x+1)^2} \operatorname{sh}\left(2 \cdot \frac{x-1}{x+1}\right).$$

13.  $f(x)g(x)$  在  $x_0$  处可导, 其导数为  $f'(x_0)g(x_0)$ .

14. 略.

### 习题 2-3(第 103 页)

1. (1)  $4 - \frac{1}{x^2}$ ;

(2)  $4e^{2x-1}$ ;

(3)  $-2\sin x - x\cos x$ ;

(4)  $-2e^{-t}\cos t$ ;

(5)  $-\frac{a^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}$ ;

(6)  $-\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$ ;

(7)  $2\sec^2 x \tan x$ ;

(8)  $\frac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}$ ;

(9)  $2\arctan x + \frac{2x}{1+x^2}$ ;

(10)  $\frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}$ ;

(11)  $2xe^{x^2}(3+2x^2)$ ;

(12)  $-\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$ .

2.  $f'''(2) = 207360$ .

3. (1)  $2f'(x^2) + 4x^2 f''(x^2)$ ;

(2)  $\frac{f''(x)f(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2}$ .

4. 略.

5.  $\frac{d^2 s}{dt^2} = -A\omega^2 \sin \omega t$ .

6. 略.

7.  $\frac{d^2 x}{dt^2} = f(x)f'(x)$ .

8—9. 略.

10. (1)  $-4e^x \cos x$ ;  
(2)  $2^{50}(-x^2 \sin 2x + 50x \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x)$ .

\* 11. (1)  $n!$ ;  
(2)  $2^{n-1} \sin\left[2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right]$ ;

(3)  $(-1)^n \frac{(n-2)!}{x^{n-1}} (n \geq 2)$ ;  
(4)  $e^x(x+n)$ .

\* 12.  $(-1)^{n-1} \frac{n!}{n-2} (n \geq 3)$ .

习题 2-4(第 111 页)

1. (1)  $\frac{y}{y^2 - x}$ ; (2)  $\frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$ ;

(3)  $\frac{e^{x+y} - y}{x - e^{x+y}}$ ; (4)  $-\frac{e^y}{1 + xe^y}$ .

2. 切线方程为  $x + y - \frac{\sqrt{2}}{2}a = 0$ , 法线方程为  $x - y = 0$ .

3. (1)  $-\frac{1}{y^3}$ ; (2)  $-\frac{b^4}{a^2 y^3}$ ;

(3)  $-2\csc^2(x+y)\cot^3(x+y)$ ; (4)  $\frac{e^{2y}(3-y)}{(2-y)^3}$ .

4. (1)  $\left(\frac{x}{1+x}\right)^x \left(\ln \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x}\right)$ ;

(2)  $\frac{1}{5} \sqrt[5]{\frac{x-5}{x^2+2}} \left[ \frac{1}{x-5} - \frac{2x}{5(x^2+2)} \right]$ ;

(3)  $\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5} \left[ \frac{1}{2(x+2)} - \frac{4}{3-x} - \frac{5}{x+1} \right]$ ;

(4)  $\frac{1}{2} \sqrt{x \sin x} \sqrt{1-e^x} \left[ \frac{1}{x} + \cot x - \frac{e^x}{2(1-e^x)} \right]$ .

5. (1)  $\frac{3b}{2a}t$ ; (2)  $\frac{\cos \theta - \theta \sin \theta}{1 - \sin \theta - \theta \cos \theta}$ .

6.  $\sqrt{3}-2$ .

7. (1) 切线方程为  $2\sqrt{2}x + y - 2 = 0$ , 法线方程为  $\sqrt{2}x - 4y - 1 = 0$ ;

(2) 切线方程为  $4x + 3y - 12a = 0$ , 法线方程为  $3x - 4y + 6a = 0$ .

8. (1)  $\frac{1}{t^3}$ ; (2)  $-\frac{b}{a^2 \sin^3 t}$ ;

(3)  $\frac{4}{9}e^{3t}$ ; (4)  $\frac{1}{f''(t)}$ .

\* 9. (1)  $-\frac{3}{8t^5}(1+t^2)$ ; (2)  $\frac{t^4-1}{8t^3}$ .

10.  $144\pi \text{ m}^2/\text{s}$ .

11.  $\frac{16}{25\pi} \approx 0.204 \text{ m/min.}$

12.  $0.64 \text{ cm/min.}$

习题 2-5(第 123 页)

1. 当  $\Delta x = 1$  时,  $\Delta y = 18$ ,  $dy = 11$ ; 当  $\Delta x = 0.1$  时,  $\Delta y = 1.161$ ,  $dy = 1.1$ ; 当

$\Delta x = 0.01$  时,  $\Delta y = 0.110\ 601$ ,  $dy = 0.11$ .

2. (a)  $\Delta y > 0, dy > 0, \Delta y - dy > 0$ ;

(b)  $\Delta y > 0, dy > 0, \Delta y - dy < 0$ ;

(c)  $\Delta y < 0, dy < 0, \Delta y - dy < 0$ ;

(d)  $\Delta y < 0, dy < 0, \Delta y - dy > 0$ .

3. (1)  $\left( -\frac{1}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{x} \right) dx$ ; (2)  $(\sin 2x + 2x \cos 2x) dx$ ;

(3)  $(x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} dx$ ; (4)  $\frac{2\ln(1-x)}{x-1} dx$ ;

(5)  $2x(1+x)e^{2x} dx$ ; (6)  $e^{-x} [\sin(3-x) - \cos(3-x)] dx$ ;

(7)  $dy = \begin{cases} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & -1 < x < 0, \\ -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & 0 < x < 1; \end{cases}$

(8)  $8x \tan(1+2x^2) \sec^2(1+2x^2) dx$ ;

(9)  $-\frac{2x}{1+x^4} dx$ ; (10)  $A\omega \cos(\omega t + \varphi) dt$ .

4. (1)  $2x + C$ ; (2)  $\frac{3}{2}x^2 + C$ ;

(3)  $\sin t + C$ ; (4)  $-\frac{1}{\omega} \cos \omega x + C$ ;

(5)  $\ln(1+x) + C$ ; (6)  $-\frac{1}{2}e^{-2x} + C$ ;

(7)  $2\sqrt{x} + C$ ; (8)  $\frac{1}{3}\tan 3x + C$ ;

5. 约为  $\frac{8f}{3l} \Delta f$ .

6. 约减少  $43.63\text{ cm}^2$ ; 约增加  $104.72\text{ cm}^2$ .

7. (1) 0.874 76; (2) -0.965 09.

8. (1)  $30^\circ 47''$ ; (2)  $60^\circ 2'$ .

9.  $\tan 45' \approx 0.013\ 09$ ;  $\ln 1.002 \approx 0.002$ .

10. (1) 9.986 7; (2) 2.005 2.

\* 11.  $\frac{2}{3}\%$ .

\* 12.  $\delta_\alpha = 0.000\ 56(\text{rad}) = 1'55''$ .

提示: 先求出中心角  $\alpha$  与弦长  $l$  的函数关系式.

## 总习题二(第 125 页)

1. (1) 充分,必要; (2) 充分必要;

(3) 充分必要.

2.  $n!$ .

3. (D).

4.  $\frac{dm}{dx} \Big|_{x=x_0}$ .

5.  $-\frac{1}{x^2}$ .

6. (1)  $f'_-(0) = f'_+(0) = f'(0) = 1$ ;

(2)  $f'_-(0) = 1, f'_+(0) = 0, f'(0)$  不存在.

7. 在  $x=0$  处连续,不可导.

8. (1)  $\frac{\cos x}{|\cos x|}$ ; (2)  $\frac{1}{1+x^2}$ ;

(3)  $\sin x \cdot \ln \tan x$ ; (4)  $\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$ ;

(5)  $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$ .

9. (1)  $-2\cos 2x \cdot \ln x - \frac{2\sin 2x}{x} - \frac{\cos^2 x}{x^2}$ ;

(2)  $\frac{3x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$ .

\* 10. (1)  $\frac{1}{m} \left( \frac{1}{m} - 1 \right) \cdots \left( \frac{1}{m} - n + 1 \right) (1+x)^{\frac{1}{m}-n}$ ;

(2)  $(-1)^n \frac{2 \cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$ .

11.  $y''(0) = \frac{1}{e^2}$ .

12. (1)  $\frac{dy}{dx} = -\tan \theta, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3a} \sec^4 \theta \csc \theta$ ;

(2)  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{t}, \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1+t^2}{t^3}$ .

13. 切线方程为  $x + 2y - 4 = 0$ , 法线方程为  $2x - y - 3 = 0$ .

14. 切线方程为  $y = 2x - 12$ .

**提示:**先求  $f(1), f'(1)$ , 再利用周期性, 求  $f(6), f'(6)$ .

15.  $y = H \left[ 2 \left( \frac{x}{L} \right)^3 + 3 \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right]$ .

16.  $-2.8 \text{ km/h.}$   
 17. 1.007.  
 18. 约需加长 2.23 cm.

### 第三章

#### 习题 3-1(第 134 页)

- 1—4. 略.  
 5. 有分别位于区间(1,2),(2,3)及(3,4)内的三个根.  
 6—\* 13. 略.  
 14. 提示:令  $\varphi(x) = f(x)e^{-x}$ , 先证明  $\varphi(x)$  为常数.  
 \* 15. 略.

#### 习题 3-2(第 138 页)

1. (1) 1; (2) 2; (3)  $\cos a$ ;  
 (4)  $-\frac{3}{5}$ ; (5)  $-\frac{1}{8}$ ; (6)  $\frac{m}{n}a^{m-n}$ ;  
 (7) 1; (8) 3; (9) 1;  
 (10) 1; (11)  $\frac{1}{2}$ ; (12)  $\infty$ ;  
 (13)  $-\frac{1}{2}$ ; (14)  $e^a$ ; (15) 1;  
 (16) 1.

- 2—3. 略.  
 \* 4. 连续.

#### 习题 3-3(第 145 页)

1.  $f(x) = -56 + 21(x-4) + 37(x-4)^2 + 11(x-4)^3 + (x-4)^4$ .  
 2.  $f(x) = x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 45x^3 + 30x^2 - 9x + 1$ .  
 3.  $\sqrt{x} = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3 - \frac{15(x-4)^4}{4! \cdot 16[4+\theta(x-4)]^{\frac{7}{2}}} \quad (0 < \theta < 1)$ .  
 4.  $\ln x = \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{2^3}(x-2)^2 + \frac{1}{3 \cdot 2^3}(x-2)^3 - \cdots +$

$$(-1)^{n-1} \frac{1}{n \cdot 2^n} (x-2)^n + o((x-2)^n).$$

$$5. \frac{1}{x} = -[1 + (x+1) + (x+1)^2 + \cdots + (x+1)^n] + (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^{n+1}}{[-1+\theta(x+1)]^{n+2}} \quad (0 < \theta < 1).$$

$$6. \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

$$7. x e^x = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{(n-1)!} + o(x^n) \quad (0 < \theta < 1).$$

$$8. \sqrt{e} \approx 1.645.$$

$$9. (1) \sqrt[3]{30} \approx 3.10724, |R_3| < 1.88 \times 10^{-5};$$

$$(2) \sin 18^\circ \approx 0.3090, |R_3| < 1.3 \times 10^{-4}.$$

$$10. (1) \frac{3}{2}; (2) \frac{1}{6}; (3) -\frac{1}{12}.$$

### 习题 3-4(第 152 页)

1. 单调减少.

2. 单调增加.

3. (1) 在  $(-\infty, -1]$ ,  $[3, +\infty)$  内单调增加, 在  $[-1, 3]$  上单调减少;

(2) 在  $(0, 2]$  内单调减少, 在  $[2, +\infty)$  内单调增加;

(3) 在  $(-\infty, 0)$ ,  $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ ,  $[1, +\infty)$  内单调减少, 在  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$  上单调增加;

(4) 在  $(-\infty, +\infty)$  内单调增加;

(5) 在  $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$  内单调减少, 在  $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$  内单调增加;

(6) 在  $\left(-\infty, \frac{2}{3}a\right]$ ,  $[a, +\infty)$  内单调增加, 在  $\left[\frac{2}{3}a, a\right]$  上单调减少;

(7) 在  $[0, n]$  上单调增加, 在  $[n, +\infty)$  内单调减少;

(8) 在  $\left[\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right]$  上单调增加, 在  $\left[\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right]$  上单调减少  
 $(k \in \mathbf{Z}).$

4. (D).

5. 略.

6. (I)  $a > \frac{1}{e}$  时没有实根,

(II)  $0 < a < \frac{1}{e}$  时有两个实根,

(Ⅲ)  $a = \frac{1}{e}$  时只有  $x = e$  一个实根.

7. 不一定.  $f(x) = x + \sin x$  在  $(-\infty, +\infty)$  内单调, 但  $f'(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内不单调.

8. (1) 是凸的;

(2) 在  $(-\infty, 0]$  内是凸的, 在  $[0, +\infty)$  内是凹的;

(3) 是凹的; (4) 是凸的.

9. (1) 拐点  $\left(\frac{5}{3}, \frac{20}{27}\right)$ , 在  $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$  内是凸的, 在  $\left[\frac{5}{3}, +\infty\right)$  内是凹的;

(2) 拐点  $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$ , 在  $(-\infty, 2]$  内是凸的, 在  $[2, +\infty)$  内是凹的;

(3) 没有拐点, 处处是凹的;

(4) 拐点  $(-1, \ln 2), (1, \ln 2)$ , 在  $(-\infty, -1], [1, +\infty)$  内是凸的, 在  $[-1, 1]$  上是凹的;

(5) 拐点  $\left(\frac{1}{2}, e^{\frac{\arctan 1}{2}}\right)$ , 在  $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$  内是凹的, 在  $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$  内是凸的;

(6) 拐点  $(1, -7)$ , 在  $(0, 1]$  内是凸的, 在  $[1, +\infty)$  内是凹的.

10. 略.

\* 11. 拐点:  $(-1, -1), \left(2 - \sqrt{3}, \frac{1 - \sqrt{3}}{4(2 - \sqrt{3})}\right), \left(2 + \sqrt{3}, \frac{1 + \sqrt{3}}{4(2 + \sqrt{3})}\right)$ .

12.  $a = -\frac{3}{2}, b = \frac{9}{2}$ .

13.  $a = 1, b = -3, c = -24, d = 16$ .

14.  $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{8}$ .

\* 15.  $(x_0, f(x_0))$  为拐点.

### 习题 3-5(第 162 页)

1. (1) 极大值  $f(-1) = 17$ , 极小值  $f(3) = -47$ ;

(2) 极小值  $f(0) = 0$ ;

(3) 极大值  $f(\pm 1) = 1$ , 极小值  $f(0) = 0$ ;

(4) 极大值  $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4}$ ;

(5) 极大值  $f\left(\frac{12}{5}\right) = \frac{1}{10}\sqrt{205}$ ;

(6) 极大值  $f(0) = 4$ , 极小值  $f(-2) = \frac{8}{3}$ ;

$$(7) \text{ 极大值 } f\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}, \text{ 极小值 } f\left(\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi} \quad (k \in \mathbf{Z});$$

$$(8) \text{ 极大值 } f(e) = e^{\frac{1}{e}};$$

(9) 没有极值;

(10) 没有极值.

2. 略.

$$3. a = 2, f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \text{ 为极大值.}$$

$$4. (1) \text{ 最大值 } f(4) = 80, \text{ 最小值 } f(-1) = -5;$$

$$(2) \text{ 最大值 } f(3) = 11, \text{ 最小值 } f(2) = -14;$$

$$(3) \text{ 最大值 } f\left(\frac{3}{4}\right) = 1.25, \text{ 最小值 } f(-5) = -5 + \sqrt{6}.$$

5. 当  $x = 1$  时函数有最大值 29.

6. 当  $x = -3$  时函数有最小值 27.

7. 当  $x = 1$  时函数有最大值  $\frac{1}{2}$ .

8. 长为 10 m, 宽为 5 m.

$$9. r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, h = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}; d:h = 1:1.$$

$$10. \text{ 底宽为 } \sqrt{\frac{40}{4+\pi}} = 2.366(\text{m}).$$

11. 当  $\alpha = \arctan \mu = \arctan 0.25 \approx 14^\circ 2'$  时, 可使力  $F$  最小.

12. 杆长为 1.4 m.

$$13. \varphi = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi.$$

14. 当  $\varphi = 54^\circ 13'$  时, 屋架可吊到最大高度 7.506 m, 而柱子高只有 6 m, 所以能吊得上去.

**提示:** 设吊臂对地面的倾角为  $\varphi$  时, 屋架吊起的高度为  $h$ , 建立  $h$  与  $\varphi$  间的函数关系式, 然后求出  $h$  的最大值.

15. 1 800 元.

16. 60 元.

### 习题 3-6(第 169 页)

1. 在  $(-\infty, -2]$  内单调减少, 在  $[-2, +\infty)$  内单调增加; 在  $(-\infty, -1]$ ,

$[1, +\infty)$  内是凹的, 在  $[-1, 1]$  上是凸的; 拐点  $(-1, -\frac{6}{5})$ ,  $(1, 2)$ ; 极小值  $f(-2) = -\frac{17}{5}$ .

2. 对称于原点; 在  $(-\infty, -1]$ ,  $[1, +\infty)$  内单调减少, 在  $[-1, 1]$  上单调增加; 在  $(-\infty, -\sqrt{3}]$ ,  $[\sqrt{3}, +\infty)$  上是凸的, 在  $[-\sqrt{3}, 0]$ ,  $[\sqrt{3}, +\infty)$  内是凹的; 拐点  $(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4})$ ,  $(0, 0)$ ,  $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ ; 极小值  $f(-1) = -\frac{1}{2}$ , 极大值  $f(1) = \frac{1}{2}$ ; 水平渐近线  $y = 0$ .

3. 在  $(-\infty, 1]$  内单调增加, 在  $[1, +\infty)$  内单调减少; 在  $\left(-\infty, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ ,  $\left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$  内是凹的, 在  $\left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$  上是凸的; 拐点  $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ ,  $\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ ; 极大值  $f(1) = 1$ ; 水平渐近线  $y = 0$ .

4. 在  $(-\infty, 0)$ ,  $\left(0, \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right]$  内单调减少, 在  $\left[\frac{\sqrt[3]{4}}{2}, +\infty\right)$  内单调增加; 在  $(-\infty, -1]$ ,  $(0, +\infty)$  内是凹的, 在  $[-1, 0)$  内是凸的; 拐点  $(-1, 0)$ ; 极小值  $f\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right) = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$ ; 铅直渐近线  $x = 0$ .

5. 定义域为  $x \neq \left(\frac{k}{2} + \frac{1}{4}\right)\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ); 周期为  $2\pi$ ; 图形对称于  $y$  轴; 在  $[0, \pi]$  部分: 在  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ ,  $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ ,  $\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$  内单调增加; 在  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$  内是凹的, 在  $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$  内是凸的, 在  $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$  内是凹的, 在  $\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$  内是凸的; 拐点  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ; 极小值  $f(0) = 1$ , 极大值  $f(\pi) = -1$ ; 铅直渐近线  $x = \frac{\pi}{4}$ ,  $x = \frac{3\pi}{4}$ .

### 习题 3-7(第 177 页)

1.  $K = 2$ .

2.  $K = |\cos x|$ ,  $\rho = |\sec x|$ .

3.  $K = 2$ ,  $\rho = \frac{1}{2}$ .

4.  $K = \left|\frac{2}{3a \sin 2t_0}\right|$ .

5.  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\ln 2}{2}\right)$  处曲率半径有最小值  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

6. 略.

7. 约 1 246 N.

提示: 沿曲线运动的物体所受的向心力为  $F = \frac{mv^2}{\rho}$ , 这里  $m$  为物体的质量,  $v$  为它的速度,  $\rho$  为运动轨迹的曲率半径.

8. 约 45 400 N.

参看上题提示.

\* 9.  $(\xi - 3)^2 + (\eta + 2)^2 = 8$ .

\* 10.  $\left(\xi - \frac{\pi - 10}{4}\right)^2 + \left(\eta - \frac{9}{4}\right)^2 = \frac{125}{16}$ .

\* 11. 
$$\begin{cases} \alpha = \frac{3y^2}{2p} + p, \\ \beta = -\frac{y^3}{p^2} \end{cases}$$
 或  $27p\beta^2 = 8(\alpha - p)^3$ .

### 习题 3-8(第 182 页)

1.  $0.18 < \xi < 0.19$ .

2.  $-0.20 < \xi < -0.19$ .

3.  $0.32 < \xi < 0.33$ .

4.  $2.50 < \xi < 2.51$ .

### 总习题三(第 182 页)

1. 2.

2. (1) (B); (2) (D).

3.  $f(x) = |x|, x \in [-1, 1]$ .

4.  $ka$ .

5—9. 略.

10. (1) 2; (2)  $\frac{1}{2}$ ; (3)  $e^{-\frac{2}{k}}$ ; (4)  $a_1 a_2 \cdots a_n$ .

11. 略.

12.  $a = e^e$ , 最小值  $1 - \frac{1}{e}$ .

13. (1, 2) 和 (-1, -2).

14.  $\sqrt[3]{3}$ .

15.  $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$  处曲率半径有最小值 1.

16.  $2.414 < x_0 < 2.415$ .

\* 17. 提示: 可以先用一次洛必达法则.

\* 18. 提示: 先对  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^n}$  接连  $n - 1$  次使用洛必达法则.

19. 提示: 记  $x_0 = (1 - t)x_1 + tx_2$ , 先证

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

然后在上式中分别令  $x = x_1$  及  $x = x_2$ , 可得两个不等式, 由此推出结论.

20.  $a = \frac{4}{3}, b = -\frac{1}{3}$ .

## 第四章

### 习题 4-1(第 192 页)

1. 略.

2. (1)  $-\frac{1}{x} + C$ ; (2)  $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$ ;  
(3)  $2\sqrt{x} + C$ ; (4)  $\frac{3}{10}x^{\frac{10}{3}} + C$ ;  
(5)  $-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}} + C$ ; (6)  $\frac{m}{m+n}x^{\frac{m+n}{m}} + C$ ;  
(7)  $\frac{5}{4}x^4 + C$ ; (8)  $\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$ ;  
(9)  $\sqrt{\frac{2h}{g}} + C$ ; (10)  $\frac{x^5}{5} + \frac{2}{3}x^3 + x + C$ ;  
(11)  $\frac{x^3}{3} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x + C$ ; (12)  $2\sqrt{x} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$ ;  
(13)  $2e^x + 3\ln|x| + C$ ; (14)  $3\arctan x + 2\arcsin x + C$ ;  
(15)  $e^x - 2\sqrt{x} + C$ ; (16)  $\frac{3^x e^x}{\ln 3 + 1} + C$ ;  
(17)  $2x - \frac{5\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln 2 - \ln 3} + C$ ; (18)  $\tan x - \sec x + C$ ;  
(19)  $\frac{x + \sin x}{2} + C$ ; (20)  $\frac{1}{2}\tan x + C$ ;  
(21)  $\sin x - \cos x + C$ ; (22)  $-(\cot x + \tan x) + C$ ;

$$(23) -\cot x = x + C;$$

$$(24) -\cos \theta + \theta + C;$$

$$(25) x = \arctan x + C;$$

$$(26) x^3 - x + \arctan x + C.$$

$$3. (1) y = \frac{1}{3}(x^3 - 6x^2 + 12x - 8); \quad (2) x = \frac{1}{t} + 2t - 2.$$

$$4. (1) s = 20t - \frac{1}{2}kt^2; \quad (2) t = \frac{20}{k}, s = \frac{200}{k}; \quad (3) k = 4.$$

答: 刹车加速度为  $-4 \text{ m/s}^2$ .

$$5. y = \ln x + 1.$$

$$6. (1) 27 \text{ m}; \quad (2) \sqrt[3]{360} \approx 7.11(\text{s}).$$

7. 略.

### 习题 4-2(第 207 页)

$$1. (1) \frac{1}{a}; \quad (2) \frac{1}{7}; \quad (3) \frac{1}{2}; \quad (4) \frac{1}{10};$$

$$(5) -\frac{1}{2}; \quad (6) \frac{1}{12}; \quad (7) \frac{1}{2}; \quad (8) -2; \quad \text{略.}$$

$$(9) -\frac{2}{3}; \quad (10) \frac{1}{5}; \quad (11) -\frac{1}{5}; \quad (12) \frac{1}{3};$$

$$(13) -1; \quad (14) -1.$$

$$2. (1) \frac{1}{5}e^{5t} + C; \quad (2) -\frac{1}{8}(3-2x)^4 + C;$$

$$(3) -\frac{1}{2}\ln|1-2x| + C; \quad (4) -\frac{1}{2}(2-3x)^{\frac{2}{3}} + C;$$

$$(5) -\frac{1}{a}\cos ax + b e^{\frac{x}{b}} + C; \quad (6) -2\cos\sqrt{t} + C;$$

$$(7) -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C; \quad (8) \frac{1}{2}\sin(x^2) + C;$$

$$(9) -\frac{1}{3}(2-3x^2)^{\frac{1}{2}} + C; \quad (10) \frac{3}{4}\ln|1-x^4| + C;$$

$$(11) \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + C; \quad (12) -\frac{1}{3\omega}\cos^3(\omega t + \varphi) + C;$$

$$(13) \frac{1}{2\cos^2 x} + C; \quad (14) \frac{3}{2}\sqrt[3]{(\sin x - \cos x)^2} + C;$$

$$(15) \frac{1}{11}\tan^{11} x + C; \quad (16) \ln|\ln \ln x| + C;$$

$$(17) -\frac{1}{\arcsin x} + C; \quad (18) -\frac{10^2 \arccos x}{2\ln 10} + C;$$

$$(19) -\ln|\cos \sqrt{1+x^2}| + C; \quad (20) (\arctan \sqrt{x})^2 + C;$$

- (21)  $-\frac{1}{x \ln x} + C$ ; (22)  $\ln|\tan x| + C$ ;
- (23)  $\frac{1}{2}(\ln \tan x)^2 + C$ ; (24)  $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$ ;
- (25)  $\frac{t}{2} + \frac{1}{4\omega} \sin 2(\omega t + \varphi) + C$ ; (26)  $\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{10} \cos 5x + C$ ;
- (27)  $\frac{1}{3} \sin \frac{3x}{2} + \sin \frac{x}{2} + C$ ; (28)  $\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{24} \sin 12x + C$ ;
- (29)  $\frac{1}{3} \sec^3 x - \sec x + C$ ; (30)  $\arctan e^x + C$ ;
- (31)  $\frac{1}{2} \arcsin \frac{2x}{3} + \frac{1}{4} \sqrt{9 - 4x^2} + C$ ;
- (32)  $\frac{x^2}{2} - \frac{9}{2} \ln(x^2 + 9) + C$ ; (33)  $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}x - 1}{\sqrt{2}x + 1} \right| + C$ ;
- (34)  $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x - 2}{x + 1} \right| + C$ ; (35)  $\frac{2}{3} \ln|x - 2| + \frac{1}{3} \ln|x + 1| + C$ ;
- (36)  $\frac{a^2}{2} \left( \arcsin \frac{x}{a} - \frac{x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2} \right) + C$ ;
- (37)  $\arccos \frac{1}{|x|} + C$ ; (38)  $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$ ;
- (39)  $\sqrt{x^2 - 9} - 3 \arccos \frac{3}{|x|} + C$ ; (40)  $\sqrt{2x} - \ln(1 + \sqrt{2x}) + C$ ;
- (41)  $\arcsin x - \frac{x}{1 + \sqrt{1-x^2}} + C$ ;
- (42)  $\frac{1}{2} (\arcsin x + \ln|x + \sqrt{1-x^2}|) + C$ .
- (43)  $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 3) - \sqrt{2} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$ ;
- (44)  $\frac{1}{2} \left( \frac{x+1}{x^2+1} + \ln(x^2 + 1) + \arctan x \right) + C$ .

### 习题 4-3(第 212 页)

1.  $-x \cos x + \sin x + C$ .

2.  $x(\ln x - 1) + C$ .

3.  $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$ .

4.  $-e^{-x}(x+1) + C$ .

5.  $\frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$ .

$$6. \frac{e^{-x}}{2}(\sin x - \cos x) + C.$$

$$7. -\frac{2}{17}e^{-2x}\left(\cos \frac{x}{2} + 4\sin \frac{x}{2}\right) + C.$$

$$8. 2x\sin \frac{x}{2} + 4\cos \frac{x}{2} + C.$$

$$9. \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + C.$$

$$10. -\frac{1}{2}x^2 + x \tan x + \ln|\cos x| + C.$$

$$11. x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\sin x + C.$$

$$12. -\frac{e^{-2t}}{2}\left(t + \frac{1}{2}\right) + C.$$

$$13. x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C.$$

$$14. -\frac{1}{4}x \cos 2x + \frac{1}{8} \sin 2x + C.$$

$$15. \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x^2 \sin x + x \cos x - \sin x + C.$$

$$16. \frac{1}{2}(x^2 - 1)\ln(x - 1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + C.$$

$$17. -\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{3}{2}\right)\cos 2x + \frac{x}{2} \sin 2x + C.$$

$$18. -\frac{1}{x}(\ln^3 x + 3\ln^2 x + 6\ln x + 6) + C.$$

$$19. 3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2) + C.$$

$$20. \frac{x}{2}(\cos \ln x + \sin \ln x) + C.$$

$$21. x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C.$$

$$22. \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{5}e^x \sin 2x - \frac{1}{10}e^x \cos 2x + C.$$

$$23. \frac{1}{2}x^2\left(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2}\right) + C.$$

$$24. \frac{2}{3}(\sqrt{3x+9} - 1)e^{\sqrt{3x+9}} + C.$$

#### 习题 4-4(第 218 页)

$$1. \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 9x - 27\ln|x+3| + C.$$

$$2. \ln|x-2| + \ln|x+5| + C.$$

$$3. \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 5) + \arctan \frac{x-1}{2} + C.$$

$$4. \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C.$$

$$5. \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln(x^2 - x + 1) + \sqrt{3} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$6. \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| + C.$$

$$7. 2\ln|x+2| - \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{3}{2} \ln|x+3| + C.$$

$$8. \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 8\ln|x| - 4\ln|x+1| - 3\ln|x-1| + C.$$

$$9. \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln(x^2 + 1) - \frac{1}{2} \arctan x + C.$$

$$10. \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \arctan x + C.$$

$$11. -\frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$12. \arctan x - \frac{1}{x^2 + 1} + C.$$

$$13. -\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$14. \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \frac{2\tan x}{\sqrt{3}} + C.$$

$$15. \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + C.$$

$$16. \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2\tan \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$17. \ln \left| 1 + \tan \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$18. \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{3\tan \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C.$$

$$19. \frac{3}{2} \sqrt[3]{(1+x)^2} - 3 \sqrt[3]{x+1} + 3\ln|1 + \sqrt[3]{1+x}| + C.$$

$$20. \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + x - 4\sqrt{x} + 4\ln(\sqrt{x} + 1) + C.$$

$$21. x - 4\sqrt{x+1} + 4\ln(\sqrt{1+x} + 1) + C.$$

$$22. 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln(\sqrt[4]{x} + 1) + C.$$

$$23. \ln \left| \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}} \right| + 2\arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C$$

$$\text{或 } \ln \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{|x|} - \arcsin x + C.$$

$$24. -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C.$$

#### 习题 4-5(第 221 页)

$$1. \frac{1}{2}\ln|2x + \sqrt{4x^2 - 9}| + C.$$

$$2. \frac{1}{2}\arctan \frac{x+1}{2} + C.$$

$$3. \ln[(x-2) + \sqrt{5-4x+x^2}] + C.$$

$$4. \frac{x}{2}\sqrt{2x^2+9} + \frac{9\sqrt{2}}{4}\ln(\sqrt{2}x + \sqrt{2x^2+9}) + C.$$

$$5. \frac{x}{2}\sqrt{3x^2-2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\ln|\sqrt{3}x + \sqrt{3x^2-2}| + C.$$

$$6. \frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C.$$

$$7. \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)\arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{4}\sqrt{4-x^2} + C.$$

$$8. \frac{x}{18(9+x^2)} + \frac{1}{54}\arctan \frac{x}{3} + C.$$

$$9. -\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$10. -\frac{e^{-2x}}{13}(2\sin 3x + 3\cos 3x) + C.$$

$$11. -\frac{\sin 8x}{16} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

$$12. x\ln^3 x - 3x\ln^2 x + 6x\ln x - 6x + C.$$

$$13. -\frac{1}{x} - \ln \left| \frac{1-x}{x} \right| + C.$$

$$14. 2\sqrt{x-1} - 2\arctan \sqrt{x-1} + C.$$

$$15. \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x + C.$$

$$16. \arccos \frac{1}{|x|} + C.$$

$$17. \frac{1}{9} \left( \ln |2+3x| + \frac{2}{2+3x} \right) + C.$$

$$18. \frac{\cos^5 x \sin x}{6} + \frac{5 \cos^3 x \sin x}{24} + \frac{5}{32} (2x + \sin 2x) + C.$$

$$19. \frac{x(x^2-1)\sqrt{x^2-2}}{4} - \frac{1}{2} \ln|x + \sqrt{x^2-2}| + C.$$

$$20. \frac{1}{\sqrt{21}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} \tan \frac{x}{2} + \sqrt{7}}{\sqrt{3} \tan \frac{x}{2} - \sqrt{7}} \right| + C.$$

$$21. \frac{\sqrt{2x-1}}{x} + 2 \arctan \sqrt{2x-1} + C.$$

$$22. \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$23. \frac{1}{2} \ln|x^2 - 2x - 1| + \frac{3}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x-1-\sqrt{2}}{x-1+\sqrt{2}} \right| + C.$$

$$24. -\sqrt{1+x-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C.$$

$$25. \frac{1}{12}x^3 - \frac{25}{16}x + \frac{125}{32} \arctan \frac{2x}{5} + C.$$

#### 总习题四(第 221 页)

$$1. \frac{1}{2} \ln \frac{|e^x - 1|}{e^x + 1} + C.$$

$$2. \frac{1}{2(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} + C.$$

$$3. \frac{1}{6a^3} \ln \left| \frac{a^3 + x^3}{a^3 - x^3} \right| + C.$$

$$4. \ln|x + \sin x| + C.$$

$$5. \ln x (\ln \ln x - 1) + C.$$

$$6. \frac{1}{2} \arctan \sin^2 x + C.$$

$$7. \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + C.$$

$$8. \frac{1}{8} \left( \frac{1}{3} \cos 6x - \frac{1}{2} \cos 4x - \cos 2x \right) + C.$$

$$9. \frac{1}{4} \ln|x| - \frac{1}{24} \ln(x^6 + 4) + C.$$

$$10. a \arcsin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

$$11. \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x(x+1)} \right| + C.$$

$$12. \frac{1}{4}x^2 + \frac{x}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x + C.$$

$$13. \frac{1}{a^2 + b^2} e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx) + C.$$

$$14. \ln \frac{\sqrt{1+e^x} - 1}{\sqrt{1+e^x} + 1} + C.$$

$$15. \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + C.$$

$$16. \frac{1}{3a^4} \left[ \frac{3x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{x^3}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} \right] + C.$$

$$17. -\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.$$

$$18. (4-2x) \cos \sqrt{x} + 4\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + C.$$

$$19. x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \arctan x + C.$$

$$20. \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + C.$$

$$21. (x+1) \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + C.$$

$$22. \sqrt{2} \ln \left( \left| \csc \frac{x}{2} \right| - \left| \cot \frac{x}{2} \right| \right) + C.$$

$$23. \frac{x^4}{8(1+x^8)} + \frac{1}{8} \arctan x^4 + C.$$

$$24. \frac{x^4}{4} + \ln \frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x^4+2} + C.$$

$$25. \frac{1}{32} \ln \left| \frac{2+x}{2-x} \right| + \frac{1}{16} \arctan \frac{x}{2} + C.$$

$$26. \frac{2}{1 + \tan \frac{x}{2}} + x + C \text{ 或 } \sec x + x - \tan x + C.$$

$$27. x \tan \frac{x}{2} + C.$$

$$28. e^{\sin x} (x - \sec x) + C.$$

$$29. \ln \frac{x}{(\sqrt[6]{x+1})^6} + C.$$

$$30. \frac{1}{1+e^x} + \ln \frac{e^x}{1+e^x} + C.$$

$$31. \arctan(e^x - e^{-x}) + C.$$

$$32. \frac{xe^x}{e^x + 1} - \ln(1 + e^x) + C.$$

$$33. x \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 2x + C.$$

$$34. \frac{x \ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$$

$$35. \frac{1}{4}(\arcsin x)^2 + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} \arcsin x - \frac{x^2}{4} + C.$$

$$36. -\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}(x^2+2)\arccos x - \frac{1}{9}x(x^2+6) + C.$$

$$37. -\ln|\csc x + 1| + C.$$

$$38. \ln|\tan x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C.$$

$$39. \frac{1}{3}\ln(2+\cos x) - \frac{1}{2}\ln(1+\cos x) + \frac{1}{6}\ln(1-\cos x) + C.$$

$$40. \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\tan(x/2)-1+\sqrt{2}}{\tan(x/2)-1-\sqrt{2}}\right| + C.$$

## 第五章

### 习题 5-1(第 234 页)

\* 1.  $\frac{1}{3}(b^3 - a^3) + b - a.$

\* 2. (1)  $\frac{1}{2}(b^2 - a^2);$  (2)  $e \approx 1.$

3. 略.

4. (1)  $\frac{1}{2}t^2;$  (2) 21; (3)  $\frac{5}{2};$  (4)  $\frac{9\pi}{2}.$

5.  $a = 0, b = 1.$

6.  $\ln 2 \approx 0.6931.$

7. (1) 6; (2) -2; (3) -3; (4) 5.

8. 88.2 kN.

9. 略.

10. (1)  $6 \leq \int_1^4 (x^2 + 1) dx \leq 51$ ;

(2)  $\pi \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (1 + \sin^2 x) dx \leq 2\pi$ ;

(3)  $\frac{\pi}{9} \leq \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x \arctan x dx \leq \frac{2}{3}\pi$ ;

(4)  $-2e^2 \leq \int_2^0 e^{x^2-x} dx \leq -2e^{-\frac{1}{4}}$ .

11. 提示: 设  $\int_0^1 f(x) dx = a$ , 有  $\int_0^1 [f(x) - a]^2 dx \geq 0$ .

12. 略.

13. (1)  $\int_0^1 x^2 dx$  较大; (2)  $\int_1^2 x^3 dx$  较大;

(3)  $\int_1^2 \ln x dx$  较大; (4)  $\int_0^1 x dx$  较大;

(5)  $\int_0^1 e^x dx$  较大.

### 习题 5-2(第 243 页)

1.  $0, \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

2.  $\cot t$ .

3.  $\frac{\cos x}{\sin x - 1}$ .

4. 当  $x=0$  时.

5. (1)  $2x \sqrt{1+x^4}$ ; (2)  $\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$ ;

(3)  $(\sin x + \cos x) \cdot \cos(\pi \sin^2 x)$ .

6. (1)  $a \left( a^2 - \frac{a}{2} + 1 \right)$ ; (2)  $\frac{21}{8}$ ; (3)  $\frac{271}{6}$ ;

(4)  $\frac{\pi}{6}$ ; (5)  $\frac{\pi}{3}$ ; (6)  $\frac{\pi}{3a}$ ;

(7)  $\frac{\pi}{6}$ ; (8)  $\frac{\pi}{4} + 1$ ; (9)  $-1$ ;

(10)  $1 - \frac{\pi}{4}$ ; (11) 4; (12)  $\frac{8}{3}$ .

7. 略.

8. 提示:应用三角学中的积化和差公式.

9. (1) 1; (2) 2.

$$10. \Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & x \in [0, 1), \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}, & x \in [1, 2]. \end{cases} \quad \Phi(x) \text{ 在 } (0, 2) \text{ 内连续.}$$

$$11. \Phi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}(1 - \cos x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$$

12. 略.

13. 1.

14. 1.

### 习题 5-3(第 253 页)

1. (1) 0; (2)  $\frac{51}{512}$ ; (3)  $\frac{1}{4}$ ;  
(4)  $\pi - \frac{4}{3}$ ; (5)  $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$ ; (6)  $\frac{\pi}{2}$ ;  
(7)  $\sqrt{2}(\pi + 2)$ ; (8)  $1 + \frac{\pi}{4}$ ; (9)  $\frac{\pi}{16}a^4$ ;  
(10)  $\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ; (11)  $\frac{1}{6}$ ; (12)  $2 + 2\ln \frac{2}{3}$ ;  
(13)  $1 - 2\ln 2$ ; (14)  $(\sqrt{3} - 1)a$ ; (15)  $1 - e^{-\frac{1}{2}}$ ;  
(16)  $2(\sqrt{3} - 1)$ ; (17)  $\frac{\pi}{2}$ ; (18)  $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ ;  
(19) 0; (20)  $\frac{3}{2}\pi$ ; (21)  $\frac{\pi^3}{324}$ ;  
(22) 0; (23)  $\frac{2}{3}$ ; (24)  $\frac{4}{3}$ ;  
(25)  $2\sqrt{2}$ ; (26) 4.

2—6. 略.

7. (1)  $1 - \frac{2}{e}$ ; (2)  $\frac{1}{4}(e^2 + 1)$ ;  
(3)  $-\frac{2\pi}{\omega^2}$ ; (4)  $\left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{9}\right)\pi + \frac{1}{2}\ln \frac{3}{2}$ ;  
(5)  $4(2\ln 2 - 1)$ ; (6)  $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ ;

$$(7) \frac{1}{5}(e^x - 2); \quad (8) 2 - \frac{3}{4\ln 2};$$

$$(9) \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}; \quad (10) \frac{1}{2}(e \sin 1 - e \cos 1 + 1);$$

$$(11) 2\left(1 - \frac{1}{e}\right);$$

$$(12) \begin{cases} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots m}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (m+1)} \cdot \frac{\pi}{2}, & m \text{ 为奇数,} \\ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (m+1)}, & m \text{ 为偶数;} \end{cases}$$

$$(13) J_m = \begin{cases} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots m} \cdot \frac{\pi^2}{2}, & m \text{ 为偶数,} \\ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (m-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots m} \pi, & m \text{ 为大于 1 的奇数,} \end{cases}$$

$$J_1 = \pi.$$

#### 习题 5-4(第 260 页)

1. (1)  $\frac{1}{3}$ ; (2) 发散; (3)  $\frac{1}{a}$ ; (4)  $\frac{\pi}{4}$ ;

(5)  $\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ ; (6)  $\pi$ ; (7) 1; (8) 发散;

(9)  $\frac{8}{3}$ ; (10)  $\frac{\pi}{2}$ .

2. 当  $k > 1$  时收敛于  $\frac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}$ ; 当  $k \leq 1$  时发散; 当  $k = 1 - \frac{1}{\ln \ln 2}$  时

取得最小值.

3.  $n!$ .

#### \* 习题 5-5(第 268 页)

1. (1) 收敛; (2) 收敛; (3) 收敛; (4) 发散;  
(5) 收敛; (6) 发散; (7) 收敛; (8) 收敛.

2. 略.

3. (1)  $\frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right), n > 0$ ; (2)  $\Gamma(p+1), p > -1$ ;

(3)  $\frac{1}{|n|} \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right), \frac{m+1}{n} > 0$ .

4—5. 略.

## 总习题五(第 268 页)

1. (1) 必要,充分; (2) 充分必要; (3) 收敛; (4) 不一定.
2. (1) 表示曲线  $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$  和直线  $x = a$ 、 $x = b$  所围图形的面积;
- (2) 表示曲线  $y = f(x)$  和直线  $y = 0$ 、 $x = a$ 、 $x = b$  所围曲边梯形绕  $x$  轴旋转所得旋转体的体积;
- (3) 表示  $[t_1, t_2]$  这段时间内流入水池的水量;
- (4) 表示  $[T_1, T_2]$  这段时期内该国人口增加的数量;
- (5) 表示公司经营该种产品自第 1001 件至第 2000 件所得利润.

\* 3. (1)  $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$ ; (2)  $\frac{1}{p+1}$ .

4. (1)  $af(a)$ ; (2)  $\frac{\pi^2}{4}$ .

5—6. 略.

7. 提示:  $1 - x^p < \frac{1}{1+x^p} < 1$ .

8. 提示:(1) 对任意实数  $t$ ,

$$\int_a^b f^2(x)dx + 2t \int_a^b f(x)g(x)dx + t^2 \int_a^b g^2(x)dx \geq 0;$$

(2) 利用柯西-施瓦茨不等式.

9. 提示: 利用柯西-施瓦茨不等式.

10. (1)  $\frac{\pi}{2}$ ; (2)  $\frac{\pi}{8} \ln 2$ , 提示: 令  $x = \frac{\pi}{4} - u$ ;

(3)  $\frac{\pi}{4}$ ; (4)  $2(\sqrt{2}-1)$ ;

(5)  $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ ; (6)  $\frac{\pi}{2}$ ;

(7)  $\frac{\pi^2}{2} + 2\pi - 4$ ; (8)  $e^{-2} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan e^{-1} \right)$ ;

(9)  $\frac{\pi}{2} + \ln(2 + \sqrt{3})$ ; (10) 
$$\begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}, & \text{当 } x < -1, \\ x, & \text{当 } -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{4}, & \text{当 } x > 1. \end{cases}$$

11—12. 略.

13.  $1 + \ln(1 + e^{-1})$ .

14—\* 15. 略.

\* 16. (1) 收敛; (2) 收敛;

(3) 收敛, 提示: 先分部积分, 再判别;

(4) 收敛.

\* 17. (1)  $-\frac{\pi}{2} \ln 2$ , 提示:  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx$ ;

(2)  $\frac{\pi}{4}$ , 提示: 令  $x = \frac{1}{t}$ .

## 第六章

### 习题 6-2(第 284 页)

1. (1)  $\frac{1}{6}$ ; (2) 1;

(3)  $\frac{32}{3}$ ; (4)  $\frac{32}{3}$ .

2. (1)  $2\pi + \frac{4}{3}$ ,  $6\pi - \frac{4}{3}$ ; (2)  $\frac{3}{2} - \ln 2$ ;

(3)  $e + \frac{1}{e} - 2$ ; (4)  $b - a$ .

3.  $\frac{9}{4}$ .

4.  $\frac{16}{3}p^2$ .

5. (1)  $\pi a^2$ ; (2)  $\frac{3}{8}\pi a^2$ ; (3)  $18\pi a^2$ .

6.  $3\pi a^2$ .

7.  $\frac{a^2}{4}(e^{2\pi} - e^{-2\pi})$ .

8. (1)  $\frac{5}{4}\pi$ ; (2)  $\frac{\pi}{6} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ .

9.  $\frac{e}{2}$ .

10.  $\frac{8}{3}a^2$ .

11.  $2\pi a x_0^2$ .

$$12. \frac{128}{7}\pi, \frac{64}{5}\pi.$$

$$13. \frac{32}{105}\pi a^3.$$

14. 略.

$$15. (1) \frac{3}{10}\pi; \quad (2) \frac{\pi^3}{4} - 2\pi;$$

$$(3) 160\pi^2; \quad (4) 7\pi^2 a^3.$$

$$16. 2\pi^2 a^2 b.$$

$$17. \frac{1}{6}\pi h [2(ab + AB) + aB + bA].$$

$$18. \frac{4\sqrt{3}}{3}R^3.$$

19. 略

$$20. 2\pi^2.$$

$$21. 1 + \frac{1}{2}\ln \frac{3}{2}.$$

$$22. 2\sqrt{3} - \frac{4}{3}.$$

$$23. \frac{8}{9} \left[ \left( \frac{5}{2} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right].$$

$$24. \frac{y}{2p}\sqrt{p^2 + y^2} + \frac{p}{2}\ln \frac{y + \sqrt{p^2 + y^2}}{p}.$$

$$25. 6a.$$

$$26. \frac{a}{2}\pi^2.$$

$$27. \left( \left( \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)a, \frac{3}{2}a \right).$$

$$28. \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}(e^{a\varphi} - 1).$$

$$29. \ln \frac{3}{2} + \frac{5}{12}.$$

$$30. 8a.$$

### 习题 6 - 3(第 291 页)

$$1. 0.18k \text{ J.}$$

$$2. 800\pi \ln 2 \text{ J.}$$

3. (1) 略; (2)  $9.72 \times 10^5$  kJ.

4.  $\frac{27}{7}kc^{\frac{2}{3}}a^{\frac{7}{3}}$  (其中  $k$  为比例常数).

5.  $(\sqrt{2}-1)$  cm.

6. 57 697.5 kJ.

7. 205.8 kN.

8. 17.3 kN.

9. 14 373 kN.

10. 1.65 N.

11. 取  $y$  轴通过细直棒,

$$F_y = Gm\mu \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + l^2}} \right), F_x = -\frac{Gm\mu l}{a \sqrt{a^2 + l^2}}.$$

12. 引力的大小为  $\frac{2Gm\mu}{R} \sin \frac{\varphi}{2}$ , 方向为  $M$  指向圆弧的中点.

### 总习题六(第 292 页)

1.  $\frac{5}{4}$  m.

2.  $\frac{\pi-1}{4}a^2$ .

3.  $a = -\frac{5}{3}$ ,  $b = 2$ ,  $c = 0$ .

4.  $\frac{512}{7}\pi$ .

5.  $4\pi^2$ .

6.  $\sqrt{6} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ .

7.  $\frac{4}{3}\pi r^4 g$ .

8.  $\frac{1}{2}\rho gab(2h + b \sin \alpha)$ .

9.  $F_x = \frac{3}{5}Ga^2$ ,  $F_y = \frac{3}{5}Ga^2$ .

## 第七章

### 习题 7-1(第 298 页)

1. (1) 一阶; (2) 二阶; (3) 三阶;

- (4) 一阶; (5) 二阶; (6) 一阶. ) (6)  
 2. (1) 是; (2) 是; (3) 不是; (4) 是.

3. 略.

4. (1)  $y^2 - x^2 = 25$ ; (2)  $y = xe^{2x}$ ; (3)  $y = -\cos x$ .  
 5. (1)  $y' = x^2$ ; (2)  $yy' + 2x = 0$ .  
 6.  $\frac{dp}{dT} = k \frac{p}{T^2}$ ,  $k$  为比例系数.

### 习题 7-2(第304页)

1. (1)  $y = e^{Cx}$ ; (2)  $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x^3 + C$ ;  
 (3)  $\arcsin y = \arcsin x + C$ ; (4)  $\frac{1}{y} = a \ln |x + a - 1| + C$ ;  
 (5)  $\tan x \tan y = C$ ; (6)  $10^{-y} + 10^x = C$ ;  
 (7)  $(e^x + 1)(e^y - 1) = C$ ; (8)  $\sin x \sin y = C$ ;  
 (9)  $3x^4 + 4(y+1)^3 = C$ ; (10)  $(x-4)y^4 = Cx$ .  
 2. (1)  $e^y = \frac{1}{2}(e^{2x} + 1)$ ; (2)  $\cos x - \sqrt{2}\cos y = 0$ ;  
 (3)  $\ln y = \tan \frac{x}{2}$ ; (4)  $(1 + e^x)\sec y = 2\sqrt{2}$ ;  
 (5)  $x^2 y = 4$ .  
 3.  $t = -0.0305 h^{\frac{5}{2}} + 9.64$ , 水流完所需的时间约为 10 s.  
 4.  $v = \sqrt{72500} \approx 269.3$  (cm/s).  
 5.  $R = R_0 e^{-0.000433t}$ , 时间以年为单位.  
 6.  $xy = 6$ .  
 7. 取  $O$  为原点, 河岸朝顺水方向为  $x$  轴,  $y$  轴指向对岸, 则所求航线为

$$x = \frac{k}{a} \left( \frac{h}{2} y^2 + \frac{1}{3} y^3 \right).$$

### 习题 7-3(第309页)

1. (1)  $y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^2$ ; (2)  $\ln \frac{y}{x} = Cx + 1$ ;  
 (3)  $y^2 = x^2(2 \ln |x| + C)$ ; (4)  $x^3 - 2y^3 = Cx$ ;  
 (5)  $x^2 = C \sin^3 \frac{y}{x}$ ; (6)  $x + 2ye^{\frac{x}{y}} = C$ .  
 2. (1)  $y^3 = y^2 - x^2$ ; (2)  $y^2 = 2x^2(\ln x + 2)$ ;  
 (3)  $\frac{x+y}{x^2+y^2} = 1$ .  
 3.  $y = x(1 - 4 \ln x)$ .

\* 4. (1)  $(4y - x - 3)(y + 2x - 3)^2 = C$ ;

(2)  $\ln [4y^2 + (x - 1)^2] + \arctan \frac{2y}{x - 1} = C$ ;

(3)  $(y - x + 1)^2(y + x - 1)^5 = C$ ;

(4)  $x + 3y + 2\ln |x + y - 2| = C$ .

习题 7-4(第315页)

1. (1)  $y = e^{-x}(x + C)$ ;

(2)  $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 + \frac{C}{x}$ ;

(3)  $y = (x + C)e^{-\sin x}$ ;

(4)  $y = C \cos x - 2 \cos^2 x$ ;

(5)  $y = \frac{\sin x + C}{x^2 - 1}$ ;

(6)  $3\rho = 2 + Ce^{-3\theta}$ ;

(7)  $y = 2 + Ce^{-x^2}$ ;

(8)  $2x \ln y = \ln^2 y + C$ ;

(9)  $y = (x - 2)^3 + C(x - 2)$ ;

(10)  $x = Cy^3 + \frac{1}{2}y^2$ .

2. (1)  $y = \frac{x}{\cos x}$ ;

(2)  $y = \frac{\pi - 1 - \cos x}{x}$ ;

(3)  $y \sin x + 5e^{\cos x} = 1$ ;

(4)  $y = \frac{2}{3}(4 - e^{-3x})$ ;

(5)  $2y = x^3 - x^3 e^{x^2 - 1}$ .

3.  $y = 2(e^x - x - 1)$ .

4.  $v = \frac{k_1}{k_2}t - \frac{k_1 m}{k_2^2}(1 - e^{-\frac{k_2}{m}t})$ .

5.  $i = e^{-5t} + \sqrt{2} \sin \left(5t - \frac{\pi}{4}\right)$  (A).

6.  $\ln |x| + \int \frac{g(v)dv}{v[f(v) - g(v)]} = C$ , 求出后将  $v = xy$  代回, 得通解.

7. (1)  $y = -x + \tan(x + C)$ ;

(2)  $(x - y)^2 = -2x + C$ ;

(3)  $y = \frac{1}{x}e^{Cx}$ ;

(4)  $y = 1 - \sin x - \frac{1}{x+C}$ ;

(5)  $2x^2 y^2 \ln |y| - 2xy - 1 = Cx^2 y^2$ .

\* 8. (1)  $\frac{1}{y} = -\sin x + Ce^x$ ;

(2)  $\frac{3}{2}x^2 + \ln \left|1 + \frac{3}{y}\right| = C$ ;

(3)  $\frac{1}{y^3} = Ce^x - 1 - 2x$ ;

(4)  $\frac{1}{y^4} = -x + \frac{1}{4} + Ce^{-4x}$ ;

(5)  $\frac{x^2}{y^2} = -\frac{2}{3}x^3 \left(\frac{2}{3} + \ln x\right) + C$ .

习题 7-5(第323页)

1. (1)  $y = \frac{1}{6}x^3 - \sin x + C_1x + C_2$ ;  
 (2)  $y = (x-3)e^x + C_1x^2 + C_2x + C_3$ ;  
 (3)  $y = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1x + C_2$ ;  
 (4)  $y = -\ln|\cos(x+C_1)| + C_2$ ;  
 (5)  $y = C_1e^x - \frac{1}{2}x^2 - x + C_2$ ;  
 (6)  $y = C_1\ln|x| + C_2$ ;  
 (7)  $y^3 = C_1x + C_2$ ;  
 (8)  $C_1y^2 - 1 = (C_1x + C_2)^2$ ;  
 (9)  $x + C_2 = \pm \left[ \frac{2}{3}(\sqrt{y} + C_1)^{\frac{3}{2}} - 2C_1\sqrt{\sqrt{y} + C_1} \right]$ ;  
 (10)  $y = \arcsin(C_2e^x) + C_1$ .

2. (1)  $y = \sqrt{2x-x^2}$ ; (2)  $y = -\frac{1}{a}\ln(ax+1)$ ;  
 (3)  $y = \frac{1}{a^3}e^{ax} - \frac{e^a}{2a}x^2 + \frac{e^a}{a^2}(a-1)x + \frac{e^a}{2a^3}(2a-a^2-2)$ ;  
 (4)  $y = \ln \sec x$ ; (5)  $y = \left(\frac{1}{2}x+1\right)^4$ ;  
 (6)  $y = \ln(e^x + e^{-x}) - \ln 2$ .

3.  $y = \frac{x^3}{6} + \frac{x}{2} + 1$ .

4.  $s = \frac{mg}{c} \left( t + \frac{m}{c} e^{-\frac{ct}{m}} - \frac{m}{c} \right)$ .

### 习题 7-6(第331页)

1. (1) 线性无关; (2) 线性相关; (3) 线性相关;  
 (4) 线性无关; (5) 线性无关; (6) 线性无关;  
 (7) 线性相关; (8) 线性无关; (9) 线性无关;  
 (10) 线性无关.

2.  $y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$ .

3.  $y = (C_1 + C_2x)e^x$ .

4. 略.

5.  $y = C_1e^x + C_2(2x+1)$ .

6.  $y = C_1x + C_2x^2 + x^3$ .

7.  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x + \cos x \ln |\cos x|$ .

\* 8.  $y = C_1 x + C_2 x \ln|x| + \frac{1}{2} x \ln^2|x|.$

习题 7-7(第340页)

1. (1)  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x};$  (2)  $y = C_1 + C_2 e^{4x};$
- (3)  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x;$  (4)  $y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x);$
- (5)  $x = (C_1 + C_2 t)e^{\frac{t}{2}};$  (6)  $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x);$
- (7)  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x;$
- (8)  $y = (C_1 + C_2 x) \cos x + (C_3 + C_4 x) \sin x;$
- (9)  $y = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x) e^x;$
- (10)  $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x.$

2. (1)  $y = 4e^x + 2e^{3x};$  (2)  $y = (2+x)e^{-\frac{x}{2}};$
- (3)  $y = e^{-x} - e^{4x};$  (4)  $y = 3e^{-2x} \sin 5x;$
- (5)  $y = 2\cos 5x + \sin 5x;$  (6)  $y = e^{2x} \sin 3x.$

3.  $x = \frac{v_0}{\sqrt{k_2^2 + 4k_1}}(1 - e^{-\sqrt{k_2^2 + 4k_1}t})e^{(-\frac{k_2}{2} + \frac{\sqrt{k_2^2 + 4k_1}}{2})t}.$

4.  $u_C(t) = \frac{10}{9}(19e^{-10^3 t} - e^{-1.9 \times 10^4 t})(V);$

$i(t) = \frac{19}{18} \times 10^{12} (-e^{-10^3 t} + e^{-1.9 \times 10^4 t})(A).$

5.  $M = 195 \text{ kg.}$

习题 7-8(第347页)

1. (1)  $y = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 e^{-x} + e^x,$
- (2)  $y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + \frac{e^x}{1+a^2};$
- (3)  $y = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}x} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x;$
- (4)  $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \left(\frac{3}{2}x^2 - 3x\right)e^{-x};$
- (5)  $y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - \frac{1}{4}x e^x \cos 2x;$
- (6)  $y = (C_1 + C_2 x)e^{3x} + \frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{3}x + 1\right)e^{3x};$
- (7)  $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x} + \frac{11}{8} - \frac{1}{2}x;$
- (8)  $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{3}x \cos x + \frac{2}{9} \sin x;$

$$(9) \quad y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{e^x}{2} + \frac{x}{2} \sin x;$$

$$(10) \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \cos 2x, \text{ 提示: } \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x).$$

$$2. (1) \quad y = -\cos x - \frac{1}{3} \sin x + \frac{1}{3} \sin 2x;$$

$$(2) \quad y = -5e^x + \frac{7}{2}e^{2x} + \frac{5}{2};$$

$$(3) \quad y = \frac{1}{2}(e^{9x} + e^x) - \frac{1}{7}e^{2x};$$

$$(4) \quad y = e^x - e^{-x} + e^x(x^2 - x);$$

$$(5) \quad y = \frac{11}{16} + \frac{5}{16}e^{4x} - \frac{5}{4}x.$$

3. 取炮口为原点, 炮弹前进的水平方向为  $x$  轴, 铅直向上为  $y$  轴, 弹道曲线为

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \alpha \cdot t, \\ y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2. \end{cases}$$

$$4. \quad u_C(t) = 20 - 20e^{-5 \times 10^3 t} [\cos(5 \times 10^3 t) + \sin(5 \times 10^3 t)] (\text{V});$$

$$i(t) = 4 \times 10^{-2} e^{-5 \times 10^3 t} \sin(5 \times 10^3 t) (\text{A}),$$

提示: 电路方程参见第六节例 2.

$$5. (1) \quad t = \sqrt{\frac{10}{g}} \ln(5 + 2\sqrt{6}) \text{ s}; \quad (2) \quad t = \sqrt{\frac{10}{g}} \ln\left(\frac{19 + 4\sqrt{22}}{3}\right) \text{ s}.$$

$$6. \quad \varphi(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x + e^x).$$

### \* 习题 7-9(第349页)

$$1. \quad y = C_1 x + \frac{C_2}{x}.$$

$$2. \quad y = x(C_1 + C_2 \ln|x|) + x \ln^2|x|.$$

$$3. \quad y = C_1 x + C_2 x \ln|x| + C_3 x^{-2}.$$

$$4. \quad y = C_1 x + C_2 x^2 + \frac{1}{2}(\ln^2 x + \ln x) + \frac{1}{4}.$$

$$5. \quad y = C_1 x^2 + C_2 x^{-2} + \frac{1}{5}x^3.$$

$$6. \quad y = x[C_1 \cos(\sqrt{3} \ln x) + C_2 \sin(\sqrt{3} \ln x)] + \frac{1}{2}x \sin(\ln x).$$

$$7. \quad y = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x + x + \frac{1}{6}x^2 \ln^3 x.$$

$$8. y = C_1 x + x [C_2 \cos(\ln x) + C_3 \sin(\ln x)] + \frac{1}{2} x^2 (\ln x - 2) + 3x \ln x.$$

### 习题 7-10(第352页)

$$1. (1) \begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \\ z = C_1 e^x - C_2 e^{-x}; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t, \\ y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - C_3 \cos t - C_4 \sin t; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x = 3 + C_1 \cos t + C_2 \sin t, \\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x = C_1 e^{(-1+\sqrt{15})t} + C_2 e^{(-1-\sqrt{15})t} + \frac{2}{11} e^t + \frac{1}{6} e^{2t}, \\ y = (-4 - \sqrt{15}) C_1 e^{(-1+\sqrt{15})t} - (4 - \sqrt{15}) C_2 e^{(-1-\sqrt{15})t} - \frac{e^t}{11} - \frac{7}{6} e^{2t}; \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} x = \frac{C_1 - 3C_2}{5} \sin t - \frac{3C_1 + C_2}{5} \cos t - t^2 + t + 3, \\ y = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 2t^2 - 3t - 4; \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} x = C_1 e^{-5t} + C_2 e^{-\frac{t}{3}} + \frac{8 \sin t + \cos t}{65}, \\ y = -\frac{4}{3} C_1 e^{-5t} + C_2 e^{-\frac{t}{3}} + \frac{61 \sin t - 33 \cos t}{130}. \end{cases}$$

$$2. (1) \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos t; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t; \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x = e^t, \\ y = 4e^t; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x = 2 \cos t + 4 \sin t - \frac{1}{2} e^t, \\ y = 14 \sin t - 2 \cos t + 2 e^t; \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} x = 4 \cos t + 3 \sin t - 2 e^{-2t} - 2 e^{-t} \sin t, \\ y = \sin t - 2 \cos t + 2 e^{-t} \cos t; \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} x = \frac{12}{17} e^{-\frac{7}{3}t} + \frac{5}{17} e^{2t} + \frac{3}{7} t - \frac{1}{49}, \\ y = \frac{18}{17} e^{-\frac{7}{3}t} - \frac{1}{17} e^{2t} + \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{7} t - \frac{26}{49}. \end{cases}$$

### 总习题七(第353页)

$$1. (1) 3; \quad (2) y = e^{-\int P(x)dx} \left( \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C \right);$$

$$(3) y' = f(x, y), \quad y \Big|_{x=x_0} = 0;$$

$$(4) \quad y = C_1(x - 1) + C_2(x^2 - 1) + 1.$$

$$2. \quad (1) \quad y^2(y'^2 + 1) = 1; \quad (2) \quad y'' - 3y' + 2y = 0.$$

$$3. \quad (1) \quad x - \sqrt{xy} = C; \quad (2) \quad y = ax + \frac{C}{\ln x};$$

$$(3) \quad x = Cy^{-2} + \ln y - \frac{1}{2}; \quad (4) \quad y^{-2} = Ce^{x^2} + x^2 + 1;$$

$$(5) \quad y = \ln |\cos(x + C_1)| + C_2; \quad (6) \quad y = \frac{1}{2C_1}(e^{C_1x + C_2} + e^{-C_1x - C_2});$$

$$(7) \quad y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - \frac{4}{17}\cos 2x + \frac{1}{17}\sin 2x;$$

$$(8) \quad y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-2x} + \left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{4}{9}x\right)e^x - x^2 - x;$$

$$\cdot (9) \quad x^2 = Cy^6 + y^4; \quad (10) \quad \sqrt{(x^2 + y)^3} = x^3 + \frac{3}{2}xy + C.$$

$$4. \quad (1) \quad x(1 + 2\ln y) - y^2 = 0; \quad (2) \quad y = -\frac{1}{a}\ln(ax + 1);$$

$$(3) \quad y = 2\arctan e^x; \quad (4) \quad y = xe^{-x} + \frac{1}{2}\sin x.$$

$$5. \quad y = x - x \ln x.$$

$$6. \quad \text{约 } 250 \text{ m}^3.$$

$$7. \quad \varphi(x) = \cos x + \sin x.$$

$$8. \quad \varphi(x) = \sqrt{e^{2x} - 1} - \arctan \sqrt{e^{2x} - 1}.$$

9. 略.

$$\cdot 10. \quad (1) \quad y = \frac{1}{x}(C_1 + C_2 \ln|x|); \quad (2) \quad y = C_1 x^2 + C_2 x^3 + \frac{1}{2}x.$$

$$\cdot 11. \quad (1) \quad \begin{cases} x = (C_1 + C_2 t)e^{-t} + \frac{1}{2}t, \\ y = -(C_1 + C_2 + C_2 t)e^{-t} - \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{-t} + C_3 e^{-2t} - \frac{1}{6}e^t, \\ y = C_4 e^{-t} - C_1 + C_3 e^{-2t} + \frac{1}{3}e^t. \end{cases}$$

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

# 高等数学

第六版 下册

同济大学数学系 编

高等教育出版社

# 目 录

<b>第八章 空间解析几何与向量代数</b> .....	1
<b>第一节 向量及其线性运算</b> .....	1
一、向量概念(1)   二、向量的线性运算(2)   三、空间直角坐标系(6)	
四、利用坐标作向量的线性运算(7)   五、向量的模、方向角、投影(9)	
习题 8-1(12)	
<b>第二节 数量积 向量积 “混合积”</b> .....	13
一、两向量的数量积(13)   二、两向量的向量积(17)   三、向量的混合积(20)   习题 8-2(22)	
<b>第三节 曲面及其方程</b> .....	23
一、曲面方程的概念(23)   二、旋转曲面(25)   三、柱面(26)   四、二次曲面(28)   习题 8-3(31)	
<b>第四节 空间曲线及其方程</b> .....	32
一、空间曲线的一般方程(32)   二、空间曲线的参数方程(33)   三、空间曲线在坐标面上的投影(35)   习题 8-4(37)	
<b>第五节 平面及其方程</b> .....	38
一、平面的点法式方程(38)   二、平面的一般方程(39)   三、两平面的夹角(40)   习题 8-5(42)	
<b>第六节 空间直线及其方程</b> .....	43
一、空间直线的一般方程(43)   二、空间直线的对称式方程与参数方程(43)   三、两直线的夹角(45)   四、直线与平面的夹角(46)	
五、杂例(47)   习题 8-6(49)	
<b>总习题八</b> .....	50
<b>第九章 多元函数微分法及其应用</b> .....	52
<b>第一节 多元函数的基本概念</b> .....	52
一、平面点集 “ $n$ 维空间(52)   二、多元函数概念(55)   三、多元函数的极限(58)   四、多元函数的连续性(60)   习题 9-1(62)	
<b>第二节 偏导数</b> .....	63
一、偏导数的定义及其计算法(63)   二、高阶偏导数(67)   习题 9-2(69)	
<b>第三节 全微分</b> .....	70
一、全微分的定义(70)   二、全微分在近似计算中的应用(73)   习题 9-3(75)	
<b>第四节 多元复合函数的求导法则</b> .....	76

习题 9-4(82)	
<b>第五节 隐函数的求导公式</b>	.....
一、一个方程的情形(83) 二、方程组的情形(86) 习题 9-5(89)	
<b>第六节 多元函数微分学的几何应用</b>	..... 90
一、一元向量值函数及其导数(90) 二、空间曲线的切线与法平面(94)	
三、曲面的切平面与法线(97) 习题 9-6(100)	
<b>第七节 方向导数与梯度</b>	..... 101
一、方向导数(101) 二、梯度(103) 习题 9-7(108)	
<b>第八节 多元函数的极值及其求法</b>	..... 109
一、多元函数的极值及最大值、最小值(109) 二、条件极值 拉格朗日乘数法(113) 习题 9-8(118)	
<b>第九节 二元函数的泰勒公式</b>	..... 119
一、二元函数的泰勒公式(119) 二、极值充分条件的证明(122)	
习题 9-9(124)	
<b>第十节 最小二乘法</b>	..... 124
习题 9-10(129)	
<b>总习题九</b>	..... 129
<b>第十章 重积分</b>	..... 132
<b>第一节 二重积分的概念与性质</b>	..... 132
一、二重积分的概念(132) 二、二重积分的性质(135) 习题 10-1(136)	
<b>第二节 二重积分的计算法</b>	..... 137
一、利用直角坐标计算二重积分(138) 二、利用极坐标计算二重积分(144) *三、二重积分的换元法(149) 习题 10-2(153)	
<b>第三节 三重积分</b>	..... 157
一、三重积分的概念(157) 二、三重积分的计算(158) 习题 10-3(164)	
<b>第四节 重积分的应用</b>	..... 165
一、曲面的面积(165) 二、质心(169) 三、转动惯量(172)	
四、引力(173) 习题 10-4(175)	
<b>第五节 含参变量的积分</b>	..... 176
习题 10-5(181)	
<b>总习题十</b>	..... 181
<b>第十一章 曲线积分与曲面积分</b>	..... 185
<b>第一节 对弧长的曲线积分</b>	..... 185
一、对弧长的曲线积分的概念与性质(185) 二、对弧长的曲线积分的计算法(187) 习题 11-1(190)	
<b>第二节 对坐标的曲线积分</b>	..... 191
一、对坐标的曲线积分的概念与性质(191) 二、对坐标的曲线积分	

	的计算法(194) 三、两类曲线积分之间的联系(199) 习题 11-2(200)
<b>第三节</b>	<b>格林公式及其应用</b> ..... 201
	一、格林公式(201) 二、平面上曲线积分与路径无关的条件(205)
	三、二元函数的全微分求积(208) 四、曲线积分的基本定理(212)
	习题 11-3(213)
<b>第四节</b>	<b>对面积的曲面积分</b> ..... 215
	一、对面积的曲面积分的概念与性质(215) 二、对面积的曲面积分的计算法(216) 习题 11-4(219)
<b>第五节</b>	<b>对坐标的曲面积分</b> ..... 220
	一、对坐标的曲面积分的概念与性质(220) 二、对坐标的曲面积分的计算法(224) 三、两类曲面积分之间的联系(226) 习题 11-5(228)
<b>第六节</b>	<b>高斯公式 “通量与散度”</b> ..... 229
	一、高斯公式(229) 二、沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件(233)
	三、通量与散度(234) 习题 11-6(236)
<b>第七节</b>	<b>斯托克斯公式 “环流量与旋度”</b> ..... 237
	一、斯托克斯公式(237) 二、空间曲线积分与路径无关的条件(241)
	三、环流量与旋度(243) 习题 11-7(245)
	总习题十一 ..... 246
<b>第十二章</b>	<b>无穷级数</b> ..... 248
<b>第一节</b>	<b>常数项级数的概念和性质</b> ..... 248
	一、常数项级数的概念(248) 二、收敛级数的基本性质(251)
	三、柯西审敛原理(254) 习题 12-1(254)
<b>第二节</b>	<b>常数项级数的审敛法</b> ..... 256
	一、正项级数及其审敛法(256) 二、交错级数及其审敛法(262)
	三、绝对收敛与条件收敛(263) 四、绝对收敛级数的性质(265)
	习题 12-2(268)
<b>第三节</b>	<b>幂级数</b> ..... 269
	一、函数项级数的概念(269) 二、幂级数及其收敛性(270) 三、幂级数的运算(274) 习题 12-3(277)
<b>第四节</b>	<b>函数展开成幂级数</b> ..... 278
	习题 12-4(285)
<b>第五节</b>	<b>函数的幂级数展开式的应用</b> ..... 285
	一、近似计算(285) 二、微分方程的幂级数解法(289) 三、欧拉公式(291)
	习题 12-5(293)
<b>第六节</b>	<b>函数项级数的一致收敛性及一致收敛级数的基本性质</b> ..... 293
	一、函数项级数的一致收敛性(293) 二、一致收敛级数的基本性质(297) 习题 12-6(301)

第七节 傅里叶级数 .....	302
一、三角级数 三角函数系的正交性(302)	
二、函数展开成傅里叶级数(304)	
三、正弦级数和余弦级数(310)	
习题 12-7(315)	
第八节 一般周期函数的傅里叶级数 .....	316
一、周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数(316)	
二、傅里叶级数的复数形式(319)	
习题 12-8(322)	
总习题十二 .....	322
习题答案与提示 .....	324

# 第八章 空间解析几何与向量代数

在平面解析几何中,通过坐标法把平面上的点与一对有次序的数对应起来,把平面上的图形和方程对应起来,从而可以用代数方法来研究几何问题.空间解析几何也是按照类似的方法建立起来的.

正像平面解析几何的知识对学习一元函数微积分是不可缺少的一样,空间解析几何的知识对学习多元函数微积分也是必要的.

本章先引进向量的概念,根据向量的线性运算建立空间坐标系,然后利用坐标讨论向量的运算,并介绍空间解析几何的有关内容.

## 第一节 向量及其线性运算

### 一、向量概念

客观世界中有这样一类量,它们既有大小,又有方向,例如位移、速度、加速度、力、力矩等等,这一类量叫做向量(或矢量).

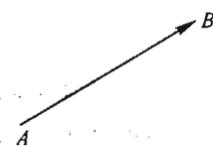
在数学上,常用一条有方向的线段,即有向线段来表示向量.有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向.以  $A$  为起点、 $B$  为终点的有向线段所表示的向量记作  $\overrightarrow{AB}$  (图 8-1).有时也用一个黑体字母(书写时,在字母上面加箭头)来表示向量,例如  $\mathbf{a}、\mathbf{r}、\mathbf{v}、\mathbf{F}$  或  $\vec{a}、\vec{r}、\vec{v}、\vec{F}$  等等.

在实际问题中,有些向量与其起点有关(例如质点运动的速度与该质点的位置有关,一个力与该力的作用点的位置有关),有些向量与其起点无关.由于一切向量的共性是它们都有大小和方向,因此在数学上我们只研究与起点无关的向量,并称这种向量为自由向量(以后简称向量),即只考虑向量的大小和方向,而不论它的起点在什么地方.当遇到与起点有关的向量时,可在一般原则下作特别处理.

由于我们只讨论自由向量,所以如果两个向量  $a$  和  $b$  的大小相等,且方向相同,我们就说向量  $a$  和  $b$  是相等的,记作  $a = b$ .这就是说,经过平行移动后能完全重合的向量是相等的.

向量的大小叫做向量的模.向量  $\overrightarrow{AB}、\mathbf{a}、\vec{a}$  的模依次记作  $|\overrightarrow{AB}|、|\mathbf{a}|、|\vec{a}|$ .模等于 1 的向量叫做单位向量.模等于零的向量叫做零向量,记作  $\mathbf{0}$  或  $\vec{0}$ .零向

图 8-1



量的起点和终点重合,它的方向可以看做是任意的.

设有两个非零向量  $a, b$ ,任取空间一点  $O$ ,作  $\overrightarrow{OA} = a, \overrightarrow{OB} = b$ ,规定不超过  $\pi$  的  $\angle AOB$  (设  $\varphi = \angle AOB, 0 \leq \varphi \leq \pi$ ) 称为向量  $a$  与  $b$

的夹角 (图 8-2),记作  $(\hat{a}, \hat{b})$  或  $(\hat{b}, \hat{a})$ ,即  $(\hat{a}, \hat{b}) = \varphi$ .

如果向量  $a$  与  $b$  中有一个是零向量,规定它们的夹角可以在 0 到  $\pi$  之间任意取值.

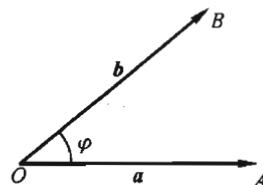


图 8-2

如果  $(\hat{a}, \hat{b}) = 0$  或  $\pi$ ,就称向量  $a$  与  $b$  平行,记作  $a \parallel b$ .如果  $(\hat{a}, \hat{b}) = \frac{\pi}{2}$ ,就称向量  $a$  与  $b$  垂直,记作  $a \perp b$ .

由于零向量与另一向量的夹角可以在 0 到  $\pi$  之间任意取值,因此可以认为零向量与任何向量都平行,也可以认为零向量与任何向量都垂直.

当两个平行向量的起点放在同一点时,它们的终点和公共起点应在一条直线上.因此,两向量平行,又称两向量共线.

类似还有向量共面的概念.设有  $k$  ( $k \geq 3$ ) 个向量,当把它们的起点放在同一点时,如果  $k$  个终点和公共起点在一个平面上,就称这  $k$  个向量共面.

## 二、向量的线性运算

### 1. 向量的加减法

向量的加法运算规定如下:

设有两个向量  $a$  与  $b$ ,任取一点  $A$ ,作  $\overrightarrow{AB} = a$ ,再以  $B$  为起点,作  $\overrightarrow{BC} = b$ ,连接  $AC$  (图 8-3),那么向量  $\overrightarrow{AC} = c$  称为向量  $a$  与  $b$  的和,记作  $a + b$ ,即

$$c = a + b.$$

上述作出两向量之和的方法叫做向量相加的三角形法则.

力学上有求合力的平行四边形法则,仿此,我们也有向量相加的平行四边形法则.这就是:当向量  $a$  与  $b$  不平行时,作  $\overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{AD} = b$ ,以  $AB, AD$  为边作一平行四边形  $ABCD$ ,连接对角线  $AC$  (图 8-4),显然向量  $\overrightarrow{AC}$  即等于向量  $a$  与  $b$  的和  $a + b$ .

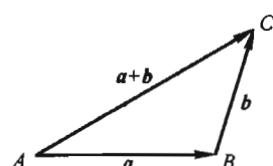


图 8-3

向量的加法符合下列运算规律:

- (1) 交换律  $a + b = b + a$ ;
- (2) 结合律  $(a + b) + c = a + (b + c)$ .

这是因为,按向量加法的规定(三角形法则),从图 8-4 可见:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \mathbf{c},$$

$$\mathbf{b} + \mathbf{a} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} = \mathbf{c},$$

所以符合交换律.又如图 8-5 所示,先作  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  再加上  $\mathbf{c}$ ,即得和  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ ,如果以  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b} + \mathbf{c}$  相加,则得同一结果,所以符合结合律.

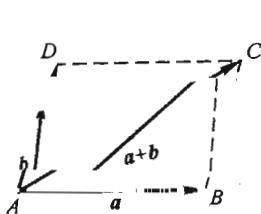


图 8-4

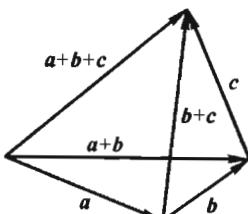


图 8-5

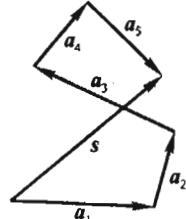


图 8-6

由于向量的加法符合交换律与结合律,故  $n$  个向量  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  ( $n \geq 3$ ) 相加可写成

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_n,$$

并按向量相加的三角形法则,可得  $n$  个向量相加的法则如下:使前一向量的终点作为次一向量的起点,相继作向量  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ ,再以第一向量的起点为起点,最后一向量的终点为终点作一向量,这个向量即为所求的和.如图 8-6,有

$$\mathbf{s} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_5.$$

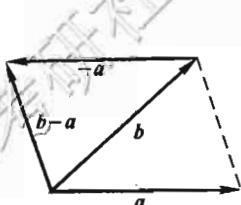
设  $\mathbf{a}$  为一向量,与  $\mathbf{a}$  的模相同而方向相反的向量叫做  $\mathbf{a}$  的负向量,记作  $-\mathbf{a}$ .由此,我们规定两个向量  $\mathbf{b}$  与  $\mathbf{a}$  的差

$$\mathbf{b} - \mathbf{a} = \mathbf{b} + (-\mathbf{a}).$$

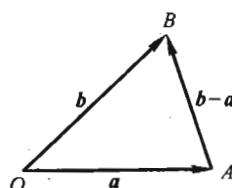
即把向量  $-\mathbf{a}$  加到向量  $\mathbf{b}$  上,便得  $\mathbf{b}$  与  $\mathbf{a}$  的差  $\mathbf{b} - \mathbf{a}$  (图 8-7(a)).

特别地,当  $\mathbf{b} = \mathbf{a}$  时,有

$$\mathbf{a} - \mathbf{a} = \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}.$$



(a)



(b)

图 8-7

显然,任给向量  $\overrightarrow{AB}$  及点  $O$ ,有

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA},$$

因此,若把向量  $a$  与  $b$  移到同一起点  $O$ ,则从  $a$  的终点  $A$  向  $b$  的终点  $B$  所引向量  $\overrightarrow{AB}$  便是向量  $b$  与  $a$  的差  $b - a$  (图 8-7(b)).

由三角形两边之和大于第三边,有

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad \text{及} \quad |a - b| \leq |a| + |b|,$$

其中等号在  $a$  与  $b$  同向或反向时成立.

## 2. 向量与数的乘法

向量  $a$  与实数  $\lambda$  的乘积记作  $\lambda a$ , 规定  $\lambda a$  是一个向量, 它的模

$$|\lambda a| = |\lambda| |a|,$$

它的方向当  $\lambda > 0$  时与  $a$  相同, 当  $\lambda < 0$  时与  $a$  相反.

当  $\lambda = 0$  时,  $|\lambda a| = 0$ , 即  $\lambda a$  为零向量, 这时它的方向可以是任意的.

特别地, 当  $\lambda = \pm 1$  时, 有

$$1a = a, (-1)a = -a.$$

向量与数的乘积符合下列运算规律:

(1) 结合律  $\lambda(\mu a) = \mu(\lambda a) = (\lambda\mu)a$ ;

这是因为由向量与数的乘积的规定可知, 向量  $\lambda(\mu a)$ 、 $\mu(\lambda a)$ 、 $(\lambda\mu)a$  都是平行的向量, 它们的指向也是相同的, 而且

$$|\lambda(\mu a)| = |\mu(\lambda a)| = |(\lambda\mu)a| = |\lambda\mu| |a|,$$

所以

$$\lambda(\mu a) = \mu(\lambda a) = (\lambda\mu)a.$$

(2) 分配律  $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ ; (1)

$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ . (2)

这个规律同样可以按向量与数的乘积的规定来证明, 这里从略了.

向量相加及数乘向量统称为向量的线性运算.

例 1 在平行四边形  $ABCD$  中, 设  $\overrightarrow{AB} = a$ ,  $\overrightarrow{AD} = b$ . 试用  $a$  和  $b$  表示向量  $\overrightarrow{MA}$ 、 $\overrightarrow{MB}$ 、 $\overrightarrow{MC}$  和  $\overrightarrow{MD}$ , 这里  $M$  是平行四边形对角线的交点(图 8-8).

解 由于平行四边形的对角线互相平分, 所以

$$a + b = \overrightarrow{AC} = 2 \overrightarrow{AM},$$

即

$$-(a + b) = 2 \overrightarrow{MA},$$

于是

$$\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}(a + b).$$

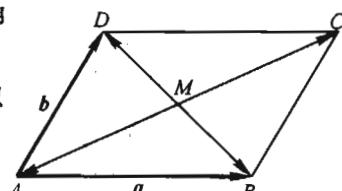


图 8-8

因为  $\overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MA}$ , 所以  $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}(a + b)$ .

又因  $-a + b = \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MD}$ , 所以  $\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}(b - a)$ .

由于  $\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MD}$ , 所以  $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}(a - b)$ .

前面已经讲过, 模等于 1 的向量叫做单位向量. 设  $e_a$  表示与非零向量  $a$  同方向的单位向量, 那么按照向量与数的乘积的规定, 由于  $|a| > 0$ , 所以  $|a|e_a$  与  $e_a$  的方向相同, 即  $|a|e_a$  与  $a$  的方向相同. 又因  $|a|e_a$  的模是

$$|a||e_a| = |a| \cdot 1 = |a|,$$

即  $|a|e_a$  与  $a$  的模也相同, 因此,

$$a = |a|e_a.$$

我们规定, 当  $\lambda \neq 0$  时,  $\frac{a}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}a$ . 由此, 上式又可写成

$$\frac{a}{|a|} = e_a.$$

这表示一个非零向量除以它的模的结果是一个与原向量同方向的单位向量.

由于向量  $\lambda a$  与  $a$  平行, 因此我们常用向量与数的乘积来说明两个向量的平行关系. 即有

**定理 1** 设向量  $a \neq 0$ , 那么, 向量  $b$  平行于  $a$  的充分必要条件是: 存在唯一的实数  $\lambda$ , 使  $b = \lambda a$ .

证 条件的充分性是显然的, 下面证明条件的必要性.

设  $b \parallel a$ . 取  $|\lambda| = \frac{|b|}{|a|}$ , 当  $b$  与  $a$  同向时  $\lambda$  取正值, 当  $b$  与  $a$  反向时  $\lambda$  取负值, 即有  $b = \lambda a$ . 这是因为此时  $b$  与  $\lambda a$  同向, 且

$$|\lambda a| = |\lambda||a| = \frac{|b|}{|a|}|a| = |b|.$$

再证数  $\lambda$  的唯一性. 设  $b = \lambda a$ , 又设  $b = \mu a$ , 两式相减, 便得

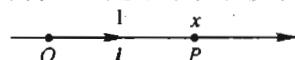
$$(\lambda - \mu)a = \mathbf{0}, \text{ 即 } |\lambda - \mu||a| = 0.$$

因  $|a| \neq 0$ , 故  $|\lambda - \mu| = 0$ , 即  $\lambda = \mu$ .

定理证毕.

定理 1 是建立数轴的理论依据. 我们知道, 给定一个点、一个方向及单位长度, 就确定了一条数轴. 由于一个单位向量既确定了方向, 又确定了单位长度, 因此, 给定一个点及一个单位向量就确定了一条数轴.

设点  $O$  及单位向量  $i$  确定了数轴  $Ox$  (图 8-9), 对于



轴上任一点  $P$ , 对应一个向量  $\overrightarrow{OP}$ , 由于  $\overrightarrow{OP} \parallel i$ , 根据

图 8-9

定理 1, 必有唯一的实数  $x$ , 使  $\overrightarrow{OP} = xi$  (实数  $x$  叫做轴上有向线段  $\overrightarrow{OP}$  的值), 并知  $\overrightarrow{OP}$  与实数  $x$  一一对应. 于是

$$\text{点 } P \longleftrightarrow \text{向量 } \overrightarrow{OP} = xi \longleftrightarrow \text{实数 } x,$$

从而轴上的点  $P$  与实数  $x$  有一一对应的关系. 据此, 定义实数  $x$  为轴上点  $P$  的坐标.

由此可知, 轴上点  $P$  的坐标为  $x$  的充分必要条件是

$$\overrightarrow{OP} = xi.$$

### 三、空间直角坐标系

在空间取定一点  $O$  和三个两两垂直的单位向量  $i, j, k$ , 就确定了三条都以  $O$  为原点的两两垂直的数轴, 依次记为  $x$  轴(横轴)、 $y$  轴(纵轴)、 $z$  轴(竖轴), 统称坐标轴. 它们构成一个空间直角坐标系, 称为  $Oxyz$  坐标系或  $[O; i, j, k]$  坐标系(图 8-10). 通常把  $x$  轴和  $y$  轴配置在水平面上, 而  $z$  轴则是铅垂线; 它们的正向通常符合右手规则, 即以右手握住  $z$  轴, 当右手的四个手指从正向  $x$  轴以  $\frac{\pi}{2}$  角度转向正向  $y$  轴时, 大拇指的指向就是  $z$  轴的正向, 如图 8-11.

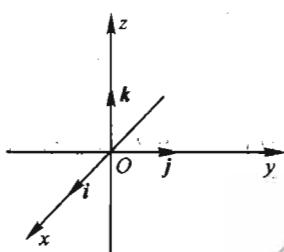


图 8-10

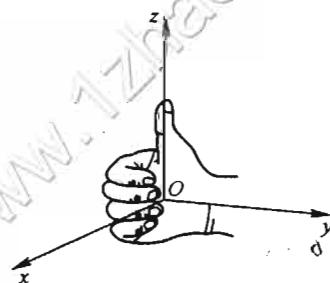


图 8-11

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面, 这样定出的三个平面统称为坐标面.  $x$  轴及  $y$  轴所确定的坐标面叫做  $xOy$  面, 另两个由  $y$  轴及  $z$  轴和由  $z$  轴及  $x$  轴所确定的坐标面, 分别叫做  $yOz$  面及  $zOx$  面. 三个坐标面把空间分成八个部分, 每一部分叫做一个卦限. 含有  $x$  轴、 $y$  轴与  $z$  轴正半轴的那个卦限叫做第一卦限, 其他第二、第三、第四卦限, 在  $xOy$  面的上方, 按逆时针方向确定. 第五至第八卦限, 在  $xOy$  面的下方, 由第一卦限之下的第五卦限, 按逆时针方向确定, 这八个卦限分别用字母 I、II、III、IV、V、VI、VII、VIII 表示(图 8-12).

任给向量  $r$ , 有对应点  $M$ , 使  $\overrightarrow{OM} = r$ . 以  $OM$  为对角线、三条坐标轴为棱作

长方体  $RHMK - OPNQ$ , 如图 8-13 所示, 有

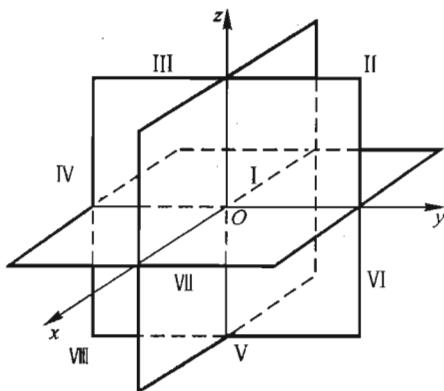


图 8-12

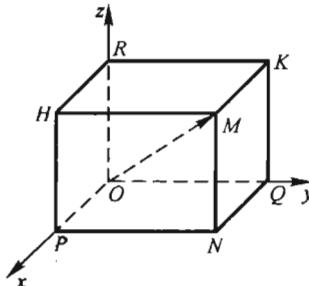


图 8-13

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR},$$

设

$$\overrightarrow{OP} = xi, \quad \overrightarrow{OQ} = yj, \quad \overrightarrow{OR} = zk,$$

则

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OM} = xi + yj + zk.$$

上式称为向量  $\mathbf{r}$  的坐标分解式,  $xi, yj, zk$  称为向量  $\mathbf{r}$  沿三个坐标轴方向的分向量.

显然, 给定向量  $\mathbf{r}$ , 就确定了点  $M$  及  $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$  三个分向量, 进而确定了  $x, y, z$  三个有序数; 反之, 给定三个有序数  $x, y, z$ , 也就确定了向量  $\mathbf{r}$  与点  $M$ . 于是点  $M$ 、向量  $\mathbf{r}$  与三个有序数  $x, y, z$  之间有一一对应的关系

$$M \longleftrightarrow \mathbf{r} = \overrightarrow{OM} = xi + yj + zk \longleftrightarrow (x, y, z),$$

据此, 定义: 有序数  $x, y, z$  称为向量  $\mathbf{r}$  (在坐标系  $Oxyz$  中) 的坐标, 记作  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ; 有序数  $x, y, z$  也称为点  $M$  (在坐标系  $Oxyz$  中) 的坐标, 记作  $M(x, y, z)$ .

向量  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$  称为点  $M$  关于原点  $O$  的向径. 上述定义表明, 一个点与该点的向径有相同的坐标. 记号  $(x, y, z)$  既表示点  $M$ , 又表示向量  $\overrightarrow{OM}$ .

坐标面上和坐标轴上的点, 其坐标各有一定的特征. 例如: 如果点  $M$  在  $yOz$  面上, 则  $x=0$ ; 同样, 在  $zOx$  面上的点, 有  $y=0$ ; 在  $xOy$  面上的点, 有  $z=0$ . 如果点  $M$  在  $x$  轴上, 则  $y=z=0$ ; 同样, 在  $y$  轴上的点, 有  $z=x=0$ ; 在  $z$  轴上的点, 有  $x=y=0$ . 如点  $M$  为原点, 则  $x=y=z=0$ .

#### 四、利用坐标作向量的线性运算

利用向量的坐标, 可得向量的加法、减法以及向量与数的乘法的运算如下:

设  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z), \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ ,

即  $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$ .

利用向量加法的交换律与结合律以及向量与数的乘法的结合律与分配律, 有

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x) \mathbf{i} + (a_y + b_y) \mathbf{j} + (a_z + b_z) \mathbf{k},$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_x - b_x) \mathbf{i} + (a_y - b_y) \mathbf{j} + (a_z - b_z) \mathbf{k},$$

$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_x) \mathbf{i} + (\lambda a_y) \mathbf{j} + (\lambda a_z) \mathbf{k} (\lambda \text{ 为实数}),$$

即  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z),$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z),$$

$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

由此可见, 对向量进行加、减及与数相乘, 只需对向量的各个坐标分别进行相应的数量运算就行了.

定理 1 指出, 当向量  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  时, 向量  $\mathbf{b} // \mathbf{a}$  相当于  $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$ , 坐标表示式为

$$(b_x, b_y, b_z) = \lambda (a_x, a_y, a_z),$$

这也就相当于向量  $\mathbf{b}$  与  $\mathbf{a}$  对应的坐标成比例

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}. \quad (3)$$

例 2 求解以向量为未知元的线性方程组

$$\begin{cases} 5x - 3y = a, \\ 3x - 2y = b, \end{cases}$$

其中  $\mathbf{a} = (2, 1, 2), \mathbf{b} = (-1, 1, -2)$ .

解 如同解以实数为未知元的线性方程组一样, 可解得

$$x = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}, \quad y = 3\mathbf{a} - 5\mathbf{b}.$$

以  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  的坐标表示式代入, 即得

$$x = 2(2, 1, 2) - 3(-1, 1, -2) = (7, -1, 10),$$

$$y = 3(2, 1, 2) - 5(-1, 1, -2) = (11, -2, 16).$$

例 3 已知两点  $A(x_1, y_1, z_1)$  和  $B(x_2, y_2, z_2)$  以及实数  $\lambda \neq -1$ , 在直线  $AB$  上求点  $M$ , 使

① 当  $a_x, a_y, a_z$  有一个为零, 例如  $a_x = 0, a_y, a_z \neq 0$ , 这时(3)式应理解为

$$\begin{cases} b_x = 0, \\ \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}; \end{cases}$$

当  $a_x, a_y, a_z$  有两个为零, 例如  $a_x = a_y = 0, a_z \neq 0$ , 这时(3)式应理解为

$$\begin{cases} b_x = 0, \\ b_y = 0. \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}.$$

解 如图 8-14 所示. 由于

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM},$$

因此  $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}),$

从而  $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}).$

以  $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$  的坐标(即点 A、点 B 的坐标)代入, 即得

$$\overrightarrow{OM} = \left( \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \right),$$

这就是点 M 的坐标.

本例中的点 M 叫做有向线段  $\overrightarrow{AB}$  的  $\lambda$  分点. 特别地, 当  $\lambda = 1$  时, 得线段 AB 的中点为

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

通过本例, 我们应注意以下两点:(1) 由于点 M 与向量  $\overrightarrow{OM}$  有相同的坐标, 因此, 求点 M 的坐标, 就是求  $\overrightarrow{OM}$  的坐标.(2) 记号  $(x, y, z)$  既可表示点 M, 又可表示向量  $\overrightarrow{OM}$ , 在几何中点与向量是两个不同的概念, 不可混淆. 因此, 在看到记号  $(x, y, z)$  时, 须从上下文去认清它究竟表示点还是表示向量. 当  $(x, y, z)$  表示向量时, 可对它进行运算; 当  $(x, y, z)$  表示点时, 就不能进行运算.

## 五、向量的模、方向角、投影

### 1. 向量的模与两点间的距离公式

设向量  $r = (x, y, z)$ , 作  $\overrightarrow{OM} = r$ , 如图 8-13 所示, 有

$$r = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR},$$

按勾股定理可得

$$|r| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{OQ}|^2 + |\overrightarrow{OR}|^2}.$$

由  $\overrightarrow{OP} = xi$ ,  $\overrightarrow{OQ} = yj$ ,  $\overrightarrow{OR} = zk$ ,

有  $|\overrightarrow{OP}| = |x|$ ,  $|\overrightarrow{OQ}| = |y|$ ,  $|\overrightarrow{OR}| = |z|$ ,

于是得向量模的坐标表示式

$$|r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

设有点  $A(x_1, y_1, z_1)$  和点  $B(x_2, y_2, z_2)$ , 则点 A 与点 B 间的距离  $|AB|$  就是向量  $\overrightarrow{AB}$  的模. 由

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1)$$

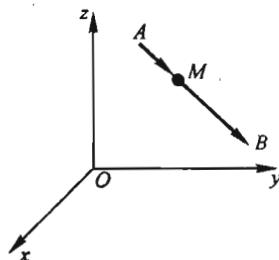


图 8-14

$$= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

即得  $A, B$  两点间的距离

$$|AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

例 4 求证以  $M_1(4, 3, 1)$ 、 $M_2(7, 1, 2)$ 、 $M_3(5, 2, 3)$  三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

解 因为

$$|M_1 M_2|^2 = (7-4)^2 + (1-3)^2 + (2-1)^2 = 14,$$

$$|M_2 M_3|^2 = (5-7)^2 + (2-1)^2 + (3-2)^2 = 6,$$

$$|M_3 M_1|^2 = (4-5)^2 + (3-2)^2 + (1-3)^2 = 6,$$

所以  $|M_2 M_3| = |M_3 M_1|$ , 即  $\triangle M_1 M_2 M_3$  为等腰三角形.

例 5 在  $z$  轴上求与两点  $A(-4, 1, 7)$  和  $B(3, 5, -2)$  等距离的点.

解 因为所求的点  $M$  在  $z$  轴上, 所以设该点为  $M(0, 0, z)$ , 依题意有

$$|MA| = |MB|,$$

即

$$\begin{aligned} & \sqrt{(0+4)^2 + (0-1)^2 + (z-7)^2} \\ & = \sqrt{(3-0)^2 + (5-0)^2 + (-2-z)^2}. \end{aligned}$$

两边去根号, 解得

$$z = \frac{14}{9},$$

因此, 所求的点为  $M\left(0, 0, \frac{14}{9}\right)$ .

例 6 已知两点  $A(4, 0, 5)$  和  $B(7, 1, 3)$ , 求与  $\overrightarrow{AB}$  方向相同的单位向量  $e$ .

解 因为

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (7, 1, 3) - (4, 0, 5) = (3, 1, -2),$$

所以

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14},$$

于是

$$e = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, 1, -2).$$

## 2. 方向角与方向余弦

非零向量  $r$  与三条坐标轴的夹角  $\alpha, \beta, \gamma$  称为向量  $r$  的方向角. 从图 8-15 可见, 设  $\overrightarrow{OM} = r = (x, y, z)$ , 由于  $x$  是有向线段  $OP$  的值,  $MP \perp OP$ , 故

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{x}{|r|},$$

类似可知

$$\cos \beta = \frac{y}{|r|}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{|r|}.$$

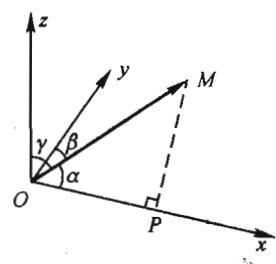


图 8-15

从而  $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left( \frac{x}{|\mathbf{r}|}, \frac{y}{|\mathbf{r}|}, \frac{z}{|\mathbf{r}|} \right)$

$$= \frac{1}{|\mathbf{r}|}(x, y, z) = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \mathbf{e}_r.$$

$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  称为向量  $\mathbf{r}$  的方向余弦. 上式表明, 以向量  $\mathbf{r}$  的方向余弦为坐标的向量就是与  $\mathbf{r}$  同方向的单位向量  $\mathbf{e}_r$ . 并由此可得

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

**例 7** 已知两点  $M_1(2, 2, \sqrt{2})$  和  $M_2(1, 3, 0)$ , 计算向量  $\overrightarrow{M_1 M_2}$  的模、方向余弦和方向角.

解

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = (1 - 2, 3 - 2, 0 - \sqrt{2})$$

$$= (-1, 1, -\sqrt{2}),$$

$$|\overrightarrow{M_1 M_2}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-\sqrt{2})^2} \\ = \sqrt{1 + 1 + 2} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2}, \cos \beta = \frac{1}{2}, \cos \gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{3}, \gamma = \frac{3\pi}{4}.$$

**例 8** 设点  $A$  位于第 I 卦限, 向径  $\overrightarrow{OA}$  与  $x$  轴、 $y$  轴的夹角依次为  $\frac{\pi}{3}$  和  $\frac{\pi}{4}$ , 且  $|\overrightarrow{OA}| = 6$ , 求点  $A$  的坐标.

解  $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4}$ . 由关系式  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ , 得

$$\cos^2 \gamma = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

因点  $A$  在第 I 卦限, 知  $\cos \gamma > 0$ , 故

$$\cos \gamma = \frac{1}{2}.$$

于是  $\overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OA}| \mathbf{e}_{\overrightarrow{OA}} = 6 \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} \right) = (3, 3\sqrt{2}, 3),$

这就是点  $A$  的坐标.

### 3. 向量在轴上的投影

如果撇开  $y$  轴和  $z$  轴, 单独考虑  $x$  轴与向量  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$  的关系, 那么从图 8-15 可见, 过点  $M$  作与  $x$  轴垂直的平面, 此平面与  $x$  轴的交点即是点  $P$ . 作出点  $P$ , 即得向量  $\mathbf{r}$  在  $x$  轴上的分向量  $\overrightarrow{OP}$ , 进而由  $\overrightarrow{OP} = xi$ , 便得向量在  $x$  轴上的

坐标  $x$ , 且  $x = |\mathbf{r}| \cos \alpha$ .

一般的, 设点  $O$  及单位向量  $\mathbf{e}$  确定  $u$  轴(图 8-16). 任给向量  $\mathbf{r}$ , 作  $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}$ , 再过点  $M$  作与  $u$  轴垂直的平面交  $u$  轴于点  $M'$  (点  $M'$  叫做点  $M$  在  $u$  轴上的投影), 则向量  $\overrightarrow{OM'}$  称为向量  $\mathbf{r}$  在  $u$  轴上的分向量. 设  $\overrightarrow{OM'} = \lambda \mathbf{e}$ , 则数  $\lambda$  称为向量  $\mathbf{r}$  在  $u$  轴上的投影, 记作  $\text{Pr}_{\mathbf{u}} \mathbf{r}$  或  $(\mathbf{r})_u$ .

按此定义, 向量  $\mathbf{a}$  在直角坐标系  $Oxyz$  中的坐标  $a_x, a_y, a_z$  就是  $\mathbf{a}$  在三条坐标轴上的投影, 即

$$a_x = \text{Pr}_{\mathbf{x}} \mathbf{a}, \quad a_y = \text{Pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{a}, \quad a_z = \text{Pr}_{\mathbf{z}} \mathbf{a},$$

或记作  $a_x = (\mathbf{a})_x, a_y = (\mathbf{a})_y, a_z = (\mathbf{a})_z$ .

由此可知, 向量的投影具有与坐标相同的性质:

**性质 1**  $(\mathbf{a})_u = |\mathbf{a}| \cos \varphi$  (即  $\text{Pr}_{\mathbf{u}} \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \varphi$ ),

其中  $\varphi$  为向量  $\mathbf{a}$  与  $u$  轴的夹角;

**性质 2**  $(\mathbf{a} + \mathbf{b})_u = (\mathbf{a})_u + (\mathbf{b})_u$  (即  $\text{Pr}_{\mathbf{u}}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{Pr}_{\mathbf{u}} \mathbf{a} + \text{Pr}_{\mathbf{u}} \mathbf{b}$ );

**性质 3**  $(\lambda \mathbf{a})_u = \lambda (\mathbf{a})_u$  (即  $\text{Pr}_{\mathbf{u}}(\lambda \mathbf{a}) = \lambda \text{Pr}_{\mathbf{u}} \mathbf{a}$ ).

**例 9** 设立方体的一条对角线为  $OM$ , 一条棱为  $OA$ , 且  $|OA| = a$ , 求  $\overrightarrow{OA}$  在  $\overrightarrow{OM}$  方向上的投影  $\text{Pr}_{\overrightarrow{OM}} \overrightarrow{OA}$ . ①

解 如图 8-17 所示, 记  $\angle MOA = \varphi$ , 有

$$\cos \varphi = \frac{|OA|}{|OM|} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

于是

$$\text{Pr}_{\overrightarrow{OM}} \overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OA}| \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

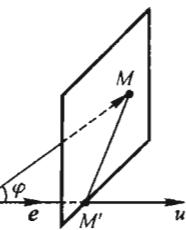


图 8-16

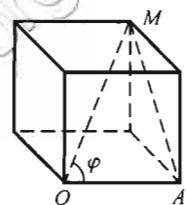


图 8-17

## 习题 8-1

- 设  $\mathbf{u} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\mathbf{c}, \mathbf{v} = -\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - \mathbf{c}$ . 试用  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  表示  $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$ .
- 如果平面上一个四边形的对角线互相平分, 试用向量证明它是平行四边形.
- 把  $\triangle ABC$  的  $BC$  边五等分, 设分点依次为  $D_1, D_2, D_3, D_4$ , 再把各分点与点  $A$  连接. 试以  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}, \overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$  表示向量  $\overrightarrow{D_1 A}, \overrightarrow{D_2 A}, \overrightarrow{D_3 A}$  和  $\overrightarrow{D_4 A}$ .
- 已知两点  $M_1(0, 1, 2)$  和  $M_2(1, -1, 0)$ . 试用坐标表示式表示向量  $\overrightarrow{M_1 M_2}$  及  $-2\overrightarrow{M_1 M_2}$ .
- 求平行于向量  $\mathbf{a} = (6, 7, -6)$  的单位向量.

① 向量  $\mathbf{r}$  在向量  $\mathbf{a}$  ( $\mathbf{a} \neq 0$ ) 的方向上的投影  $\text{Pr}_{\mathbf{a}} \mathbf{r}$  是指  $\mathbf{r}$  在某条与  $\mathbf{a}$  同方向的轴上的投影.

6. 在空间直角坐标系中,指出下列各点在哪个卦限?

$$A(1, -2, 3); B(2, 3, -4); C(2, -3, -4); D(-2, -3, 1).$$

7. 在坐标面上和在坐标轴上的点的坐标各有什么特征? 指出下列各点的位置:

$$A(3, 4, 0); B(0, 4, 3); C(3, 0, 0); D(0, -1, 0).$$

8. 求点  $(a, b, c)$  关于(1)各坐标面;(2) 各坐标轴;(3) 坐标原点的对称点的坐标.

9. 自点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  分别作各坐标面和各坐标轴的垂线,写出各垂足的坐标.

10. 过点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  分别作平行于  $z$  轴的直线和平行于  $xOy$  面的平面,问在它们上面的点的坐标各有什么特点?

11. 一边长为  $a$  的立方体放置在  $xOy$  面上,其底面的中心在坐标原点,底面的顶点在  $x$  轴和  $y$  轴上,求它各顶点的坐标.

12. 求点  $M(4, -3, 5)$  到各坐标轴的距离.

13. 在  $yOz$  面上,求与三点  $A(3, 1, 2)$ 、 $B(4, -2, -2)$  和  $C(0, 5, 1)$  等距离的点.

14. 试证明以三点  $A(4, 1, 9)$ 、 $B(10, -1, 6)$ 、 $C(2, 4, 3)$  为顶点的三角形是等腰直角三角形.

15. 设已知两点  $M_1(4, \sqrt{2}, 1)$  和  $M_2(3, 0, 2)$ ,计算向量  $\overrightarrow{M_1 M_2}$  的模、方向余弦和方向角.

16. 设向量的方向余弦分别满足(1)  $\cos \alpha = 0$ ; (2)  $\cos \beta = 1$ ; (3)  $\cos \alpha = \cos \beta = 0$ ,问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何?

17. 设向量  $r$  的模是 4, 它与  $u$  轴的夹角是  $\frac{\pi}{3}$ , 求  $r$  在  $u$  轴上的投影.

18. 一向量的终点在点  $B(2, -1, 7)$ , 它在  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴上的投影依次为 4, -4 和 7. 求这向量的起点  $A$  的坐标.

19. 设  $m = 3i + 5j + 8k$ ,  $n = 2i - 4j - 7k$  和  $p = 5i + j - 4k$ , 求向量  $a = 4m + 3n - p$  在  $x$  轴上的投影及在  $y$  轴上的分向量.

## 第二节 数量积 向量积 \* 混合积

### 一、两向量的数量积

设一物体在恒力  $F$  作用下沿直线从点  $M_1$  移动到点  $M_2$ , 以  $s$  表示位移  $\overrightarrow{M_1 M_2}$ . 由物理学知道, 力  $F$  所作的功为

$$W = |F| |s| \cos \theta,$$

其中  $\theta$  为  $F$  与  $s$  的夹角(图 8-18).

从这个问题看出, 我们有时要对两个向量  $a$  和  $b$  作这样的运算, 运算的结果是一个数, 它等于  $|a|, |b|$  及它们的夹角  $\theta$  的余弦的乘积. 我们把它

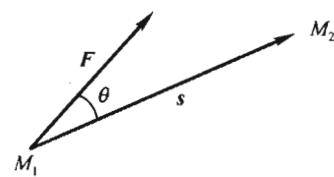


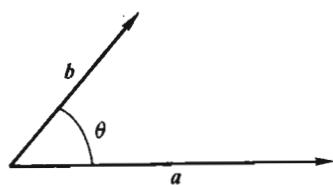
图 8-18

叫做向量  $a$  与  $b$  的数量积, 记作  $a \cdot b$  (图 8-19), 即

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \theta.$$

根据这个定义, 上述问题中力所作的功  $W$  是力  $F$  与位移  $s$  的数量积, 即

$$W = F \cdot s.$$



由于  $|b| \cos \theta = |\hat{b}| \cos(\hat{a}, \hat{b})$ , 当  $a \neq 0$  时是向量  $b$  在向量  $a$  的方向上的投影, 用  $\text{Prj}_a b$  来表示这个投影, 便有

$$a \cdot b = |a| \text{Prj}_a b,$$

同理, 当  $b \neq 0$  时有

$$a \cdot b = |b| \text{Prj}_b a.$$

这就是说, 两向量的数量积等于其中一个向量的模和另一个向量在这向量的方向上的投影的乘积.

由数量积的定义可以推得:

$$(1) a \cdot a = |a|^2.$$

这是因为夹角  $\theta = 0$ , 所以

$$a \cdot a = |a|^2 \cos 0 = |a|^2.$$

(2) 对于两个非零向量  $a, b$ , 如果  $a \cdot b = 0$ , 那么  $a \perp b$ ; 反之, 如果  $a \perp b$ , 那么  $a \cdot b = 0$ .

这是因为如果  $a \cdot b = 0$ , 由于  $|a| \neq 0, |b| \neq 0$ , 所以  $\cos \theta = 0$ , 从而  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , 即  $a \perp b$ ; 反之, 如果  $a \perp b$ , 那么  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos \theta = 0$ , 于是  $a \cdot b = |a| |b| \cos \theta = 0$ .

由于可以认为零向量与任何向量都垂直, 因此, 上述结论可叙述为: 向量  $a \perp b$  的充分必要条件是  $a \cdot b = 0$ .

数量积符合下列运算规律:

$$(1) \text{交换律 } a \cdot b = b \cdot a.$$

证 根据定义有

$$a \cdot b = |a| |b| \cos(\hat{a}, \hat{b}), \quad b \cdot a = |b| |a| \cos(\hat{b}, \hat{a}),$$

而  $|a| |b| = |b| |a|$ , 且  $\cos(\hat{a}, \hat{b}) = \cos(\hat{b}, \hat{a})$ ,  
所以  $a \cdot b = b \cdot a.$

$$(2) \text{分配律 } (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

证 当  $c = 0$  时, 上式显然成立; 当  $c \neq 0$  时, 有

$$(a + b) \cdot c = |c| \text{Prj}_c(a + b),$$

由投影性质 2, 可知

$$\text{Pr}_{\mathbf{j}_c}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{Pr}_{\mathbf{j}_c}\mathbf{a} + \text{Pr}_{\mathbf{j}_c}\mathbf{b},$$

所以

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= |\mathbf{c}|(\text{Pr}_{\mathbf{j}_c}\mathbf{a} + \text{Pr}_{\mathbf{j}_c}\mathbf{b}) \\ &= |\mathbf{c}|\text{Pr}_{\mathbf{j}_c}\mathbf{a} + |\mathbf{c}|\text{Pr}_{\mathbf{j}_c}\mathbf{b} \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}. \end{aligned}$$

(3) 数量积还符合如下的结合律:

$$(\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \quad \lambda \text{ 为数.}$$

证 当  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$  时, 上式显然成立; 当  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$  时, 按投影性质 3, 可得

$$(\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{b}|\text{Pr}_{\mathbf{j}_b}(\lambda\mathbf{a}) = |\mathbf{b}|\lambda\text{Pr}_{\mathbf{j}_b}\mathbf{a} = \lambda|\mathbf{b}|\text{Pr}_{\mathbf{j}_b}\mathbf{a} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

由上述结合律, 利用交换律, 容易推得

$$\mathbf{a} \cdot (\lambda\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \text{ 及 } (\lambda\mathbf{a}) \cdot (\mu\mathbf{b}) = \lambda\mu(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

这是因为

$$\mathbf{a} \cdot (\lambda\mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = \lambda(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b});$$

$$(\lambda\mathbf{a}) \cdot (\mu\mathbf{b}) = \lambda[\mathbf{a} \cdot (\mu\mathbf{b})] = \lambda[\mu(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})] = \lambda\mu(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

例 1 试用向量证明三角形的余弦定理.

证 设在  $\triangle ABC$  中,  $\angle BCA = \theta$  (图 8-20),  $|BC| = a$ ,  $|CA| = b$ ,  $|AB| = c$ , 要证

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta.$$

记  $\overrightarrow{CB} = \mathbf{a}$ ,  $\overrightarrow{CA} = \mathbf{b}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$ , 则有

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b},$$

从而

$$\begin{aligned} |\mathbf{c}|^2 &= \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ &= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}). \end{aligned}$$

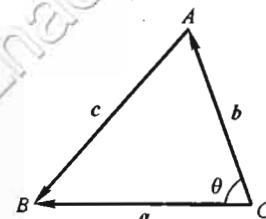


图 8-20

由  $|\mathbf{a}| = a$ ,  $|\mathbf{b}| = b$ ,  $|\mathbf{c}| = c$  及  $(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) = \theta$ , 即得

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta.$$

下面我们来推导数量积的坐标表示式.

设  $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$ . 按数量积的运算规律可得

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &\neq (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \cdot (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) \\ &= a_x\mathbf{i} \cdot (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) + a_y\mathbf{j} \cdot (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) + a_z\mathbf{k} \cdot (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) \\ &= a_xb_x\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + a_xb_y\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + a_xb_z\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} + \\ &\quad a_yb_x\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + a_yb_y\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + a_yb_z\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} + \\ &\quad a_zb_x\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} + a_zb_y\mathbf{k} \cdot \mathbf{j} + a_zb_z\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}. \end{aligned}$$

由于  $i, j, k$  互相垂直, 所以  $i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0, j \cdot i = k \cdot j = i \cdot k = 0$ . 又由于  $i, j, k$  的模均为 1, 所以  $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$ . 因而得

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

这就是两个向量的数量积的坐标表示式.

由于  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$ , 所以当  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  都不是零向量时, 有

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}.$$

以数量积的坐标表示式及向量的模的坐标表示式代入上式, 就得

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}},$$

这就是两向量夹角余弦的坐标表示式.

**例 2** 已知三点  $M(1, 1, 1)$ 、 $A(2, 2, 1)$  和  $B(2, 1, 2)$ , 求  $\angle AMB$ .

解 作向量  $\overrightarrow{MA}$  及  $\overrightarrow{MB}$ ,  $\angle AMB$  就是向量  $\overrightarrow{MA}$  与  $\overrightarrow{MB}$  的夹角. 这里,  $\overrightarrow{MA} = (1, 1, 0)$ ,  $\overrightarrow{MB} = (1, 0, 1)$ , 从而

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 1 = 1;$$

$$|\overrightarrow{MA}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}; |\overrightarrow{MB}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

代入两向量夹角余弦的表达式, 得

$$\cos \angle AMB = \frac{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}| |\overrightarrow{MB}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

由此得

$$\angle AMB = \frac{\pi}{3}$$

**例 3** 设液体流过平面  $S$  上面积为  $A$  的一个区域, 液体在这区域上各点处的流速均为(常向量)  $v$ . 设  $n$  为垂直于  $S$  的单位向量(图 8-21(a)), 计算单位时间内经过这区域流向  $n$  所指一侧的液体的质量  $m$ (液体的密度为  $\rho$ ).

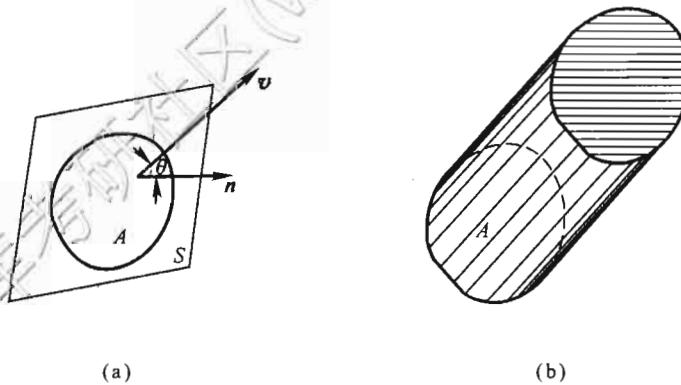


图 8-21

解 单位时间内流过这区域的液体组成一个底面积为  $A$ 、斜高为  $|\mathbf{v}|$  的斜柱体(图 8-21(b)). 这柱体的斜高与底面的垂线的夹角就是  $\mathbf{v}$  与  $\mathbf{n}$  的夹角  $\theta$ , 所以这柱体的高为  $|\mathbf{v}| \cos \theta$ , 体积为

$$A |\mathbf{v}| \cos \theta = A \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}.$$

从而, 单位时间内经过这区域流向  $\mathbf{n}$  所指一侧的液体的质量为

$$m = \rho A \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}.$$

## 二、两向量的向量积

在研究物体转动问题时, 不但要考虑这物体所受的力, 还要分析这些力所产生的力矩. 下面就举一个简单的例子来说明表达力矩的方法.

设  $O$  为一根杠杆  $L$  的支点. 有一个力  $\mathbf{F}$  作用于这杠杆上  $P$  点处.  $\mathbf{F}$  与  $\overrightarrow{OP}$  的夹角为  $\theta$  (图 8-22). 由力学规定, 力  $\mathbf{F}$  对支点  $O$  的力矩是一向量  $\mathbf{M}$ , 它的模

$$|\mathbf{M}| = |OQ| |\mathbf{F}| = |\overrightarrow{OP}| |\mathbf{F}| \sin \theta,$$

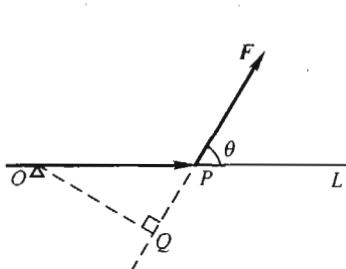


图 8-22

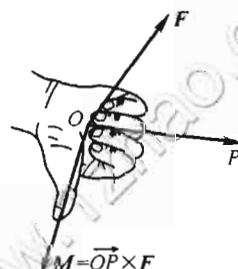


图 8-23

而  $\mathbf{M}$  的方向垂直于  $\overrightarrow{OP}$  与  $\mathbf{F}$  所决定的平面,  $\mathbf{M}$  的指向是按右手规则从  $\overrightarrow{OP}$  以不超过  $\pi$  的角转向  $\mathbf{F}$  来确定的, 即当右手的四个手指从  $\overrightarrow{OP}$  以不超过  $\pi$  的角转向  $\mathbf{F}$  握拳时, 大拇指的指向就是  $\mathbf{M}$  的指向(图 8-23).

这种由两个已知向量按上面的规则来确定另一个向量的情况, 在其他力学和物理问题中也会遇到. 于是从中抽象出两个向量的向量积概念.

设向量  $\mathbf{c}$  由两个向量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  按下列方式定出:

$\mathbf{c}$  的模  $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$ , 其中  $\theta$  为  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  间的夹角;

$\mathbf{c}$  的方向垂直于  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  所决定的平面(即  $\mathbf{c}$  既垂直于  $\mathbf{a}$ , 又垂直于  $\mathbf{b}$ ),  $\mathbf{c}$  的指向按右手规则从  $\mathbf{a}$  转向  $\mathbf{b}$  来确定(图 8-24), 那么, 向量  $\mathbf{c}$  叫做向量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的向量积, 记作  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , 即

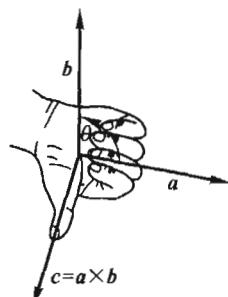


图 8-24

$$c = a \times b.$$

按此定义,上面的力矩  $M$  等于  $\overrightarrow{OP}$  与  $F$  的向量积,即

$$M = \overrightarrow{OP} \times F.$$

由向量积的定义可以推得:

(1)  $a \times a = \mathbf{0}$ .

这是因为夹角  $\theta = 0$ , 所以  $|a \times a| = |a|^2 \sin 0 = 0$ .

(2) 对于两个非零向量  $a, b$ , 如果  $a \times b = \mathbf{0}$ , 那么  $a \parallel b$ ; 反之, 如果  $a \parallel b$ , 那么  $a \times b = \mathbf{0}$ .

这是因为如果  $a \times b = \mathbf{0}$ , 由于  $|a| \neq 0, |b| \neq 0$ , 故必有  $\sin \theta = 0$ , 于是  $\theta = 0$  或  $\pi$ , 即  $a \parallel b$ ; 反之, 如果  $a \parallel b$ , 那么  $\theta = 0$  或  $\pi$ , 于是  $\sin \theta = 0$ , 从而  $|a \times b| = 0$ , 即  $a \times b = \mathbf{0}$ .

由于可以认为零向量与任何向量都平行, 因此, 上述结论可叙述为: 向量  $a \parallel b$  的充分必要条件是  $a \times b = \mathbf{0}$ .

向量积符合下列运算规律:

(1)  $b \times a = -a \times b$ .

这是因为按右手规则从  $b$  转向  $a$  定出的方向恰好与按右手规则从  $a$  转向  $b$  定出的方向相反. 它表明交换律对向量积不成立.

(2) 分配律  $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$ .

(3) 向量积还符合如下的结合律:

$$(\lambda a) \times b = a \times (\lambda b) = \lambda(a \times b) \quad (\lambda \text{ 为数}).$$

这两个规律这里不予证明.

下面来推导向量积的坐标表示式.

设  $a = a_x i + a_y j + a_z k$ ,  $b = b_x i + b_y j + b_z k$ . 那么, 按上述运算规律, 得

$$\begin{aligned} a \times b &= (a_x i + a_y j + a_z k) \times (b_x i + b_y j + b_z k) \\ &= a_x i \times (b_x i + b_y j + b_z k) + \\ &\quad a_y j \times (b_x i + b_y j + b_z k) + a_z k \times (b_x i + b_y j + b_z k) + \\ &= a_x b_x (i \times i) + a_x b_y (i \times j) + a_x b_z (i \times k) + \\ &\quad a_y b_x (j \times i) + a_y b_y (j \times j) + a_y b_z (j \times k) + \\ &\quad a_z b_x (k \times i) + a_z b_y (k \times j) + a_z b_z (k \times k). \end{aligned}$$

由于  $i \times i = j \times j = k \times k = \mathbf{0}$ ,  $i \times j = k$ ,  $j \times k = i$ ,  $k \times i = j$ ,  $j \times i = -k$ ,  $k \times j = -i$ ,  $i \times k = -j$ , 所以

$$a \times b = (a_y b_z - a_z b_y) i + (a_z b_x - a_x b_z) j + (a_x b_y - a_y b_x) k.$$

为了帮助记忆, 利用三阶行列式, 上式可写成

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

例 4 设  $\mathbf{a} = (2, 1, -1)$ ,  $\mathbf{b} = (1, -1, 2)$ , 计算  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ .

解  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = i - 5j - 3k.$

例 5 已知三角形 ABC 的顶点分别是 A(1, 2, 3)、B(3, 4, 5) 和 C(2, 4, 7), 求三角形 ABC 的面积.

解 根据向量积的定义, 可知三角形 ABC 的面积

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin \angle A \\ &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|. \end{aligned}$$

由于  $\overrightarrow{AB} = (2, 2, 2)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (1, 2, 4)$ , 因此

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4i - 6j + 2k,$$

于是

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |4i - 6j + 2k| = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{14}.$$

例 6 设刚体以等角速度  $\omega$  绕  $l$  轴旋转, 计算刚体上一点 M 的线速度.

解 刚体绕  $l$  轴旋转时, 我们可以用在  $l$  轴上的一个向量  $\omega$  表示角速度, 它的大小等于角速度的大小, 它的方向由右手规则定出: 即以右手握住  $l$  轴, 当右手的四个手指的转向与刚体的旋转方向一致时, 大拇指的指向就是  $\omega$  的方向(图 8-25).

设点 M 到旋转轴  $l$  的距离为  $a$ , 再在  $l$  轴上任取一点 O 作向量  $r = \overrightarrow{OM}$ , 并以  $\theta$  表示  $\omega$  与  $r$  的夹角, 那么

$$a = |\mathbf{r}| \sin \theta.$$

设点 M 的线速度为  $v$ , 由物理学上线速度与角速度间的关系可知,  $v$  的大小为

$$|\mathbf{v}| = |\omega| a = |\omega| |\mathbf{r}| \sin \theta;$$

$v$  的方向垂直于通过 M 点与  $l$  轴的平面, 即  $v$  垂直于  $\omega$  与  $r$ ; 又  $v$  的指向是使  $\omega$ 、

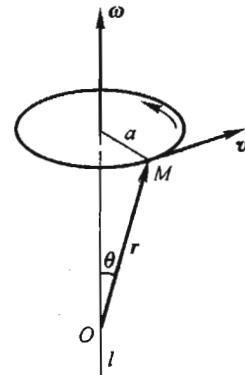


图 8-25

$r$ 、 $v$  符合右手规则, 因此有

$$v = \omega \times r.$$

### \* 三、向量的混合积

设已知三个向量  $a$ 、 $b$  和  $c$ . 如果先作两向量  $a$  和  $b$  的向量积  $a \times b$ , 把所得得到的向量与第三个向量  $c$  再作数量积  $(a \times b) \cdot c$ , 这样得到的数量叫做三向量  $a$ 、 $b$ 、 $c$  的混合积, 记作  $[abc]$ .

下面我们来推出三向量的混合积的坐标表示式.

设  $a = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $b = (b_x, b_y, b_z)$ ,  $c = (c_x, c_y, c_z)$ ,

$$\begin{aligned} \text{因为 } a \times b &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} k, \end{aligned}$$

再按两向量的数量积的坐标表示式, 便得

$$\begin{aligned} [abc] &= (a \times b) \cdot c \\ &= c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

向量的混合积有下述几何意义:

向量的混合积  $[abc] = (a \times b) \cdot c$  是这样一个数, 它的绝对值表示以向量  $a$ 、 $b$ 、 $c$  为棱的平行六面体的体积. 如果向量  $a$ 、 $b$ 、 $c$  组成右手系(即  $c$  的指向按右手规则从  $a$  转向  $b$  来确定), 那么混合积的符号是正的; 如果  $a$ 、 $b$ 、 $c$  组成左手系(即  $c$  的指向按左手规则从  $a$  转向  $b$  来确定), 那么混合积的符号是负的.

事实上, 设  $\overrightarrow{OA} = a$ ,  $\overrightarrow{OB} = b$ ,  $\overrightarrow{OC} = c$ . 按向量积的定义, 向量积  $a \times b = f$  是一个向量, 它的模在数值上等于以向量  $a$  和  $b$  为边所作平行四边形  $OADB$  的面积, 它的方向垂直于这平行四边形的平面, 且当  $a$ 、 $b$ 、 $c$  组成右手系时, 向量  $f$  与向量  $c$  朝着这平面的同侧(图 8-26); 当  $a$ 、 $b$ 、 $c$  组成左手系时, 向量  $f$  与向量  $c$  朝着

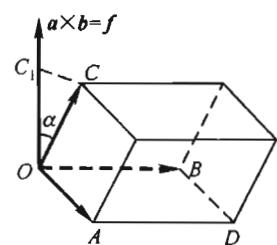


图 8-26

这平面的异侧. 所以, 如设  $f$  与  $c$  的夹角为  $\alpha$ , 那么当  $a, b, c$  组成右手系时,  $\alpha$  为锐角; 当  $a, b, c$  组成左手系时,  $\alpha$  为钝角. 由于

$$[a \ b \ c] = (a \times b) \cdot c = |a \times b| |c| \cos \alpha,$$

所以当  $a, b, c$  组成右手系时,  $[abc]$  为正; 当  $a, b, c$  组成左手系时,  $[abc]$  为负.

因为以向量  $a, b, c$  为棱的平行六面体的底(平行四边形  $OADB$ )的面积  $S$  在数值上等于  $|a \times b|$ , 它的高  $h$  等于向量  $c$  在向量  $f$  上的投影的绝对值, 即

$$h = |\text{Pr}_{f^{\perp}} c| = |c| |\cos \alpha|,$$

所以平行六面体的体积

$$V = Sh = |a \times b| |c| |\cos \alpha| = |[a \ b \ c]|.$$

由上述混合积的几何意义可知, 若混合积  $[a \ b \ c] \neq 0$ , 则能以  $a, b, c$  三向量为棱构成平行六面体, 从而  $a, b, c$  三向量不共面; 反之, 若  $a, b, c$  三向量不共面, 则必能以  $a, b, c$  为棱构成平行六面体, 从而  $[a \ b \ c] \neq 0$ . 于是有下述结论:

三向量  $a, b, c$  共面的充分必要条件是它们的混合积  $[a \ b \ c] = 0$ , 即

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

**例 7** 已知不在一平面上的四点:  $A(x_1, y_1, z_1)$ 、 $B(x_2, y_2, z_2)$ 、 $C(x_3, y_3, z_3)$ 、 $D(x_4, y_4, z_4)$ . 求四面体  $ABCD$  的体积.

**解** 由立体几何知道, 四面体的体积  $V$  等于以向量  $\vec{AB}$ 、 $\vec{AC}$  和  $\vec{AD}$  为棱的平行六面体的体积的六分之一. 因而

$$V = \frac{1}{6} |[\vec{AB} \ \vec{AC} \ \vec{AD}]|.$$

由于

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

$$\vec{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1),$$

$$\vec{AD} = (x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1),$$

所以

$$V = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix},$$

上式中符号的选择必须和行列式的符号一致.

**例 8** 已知  $A(1, 2, 0)$ 、 $B(2, 3, 1)$ 、 $C(4, 2, 2)$ 、 $M(x, y, z)$  四点共面, 求点  $M$  的坐标  $x, y, z$  所满足的关系式.

解  $A, B, C, M$  四点共面相当于  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  三向量共面, 这里  $\overrightarrow{AM} = (x-1, y-2, z)$ ,  $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (3, 0, 2)$ . 按三向量共面的充分必要条件, 可得

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$2x + y - 3z - 4 = 0.$$

这就是点  $M$  的坐标所满足的关系式.

## 习 题 8-2

1. 设  $a = 3i - j - 2k, b = i + 2j - k$ , 求

(1)  $a \cdot b$  及  $a \times b$ ; (2)  $(-2a) \cdot 3b$  及  $a \times b$ ; (3)  $a, b$  的夹角的余弦.

2. 设  $a, b, c$  为单位向量, 且满足  $a + b + c = 0$ , 求  $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$ .

3. 已知  $M_1(1, -1, 2), M_2(3, 3, 1)$  和  $M_3(3, 1, 3)$ . 求与  $\overrightarrow{M_1 M_2}, \overrightarrow{M_2 M_3}$  同时垂直的单位向量.

4. 设质量为 100 kg 的物体从点  $M_1(3, 1, 8)$  沿直线移动到点  $M_2(1, 4, 2)$ , 计算重力所作的功(坐标系长度单位为 m, 重力方向为  $z$  轴负方向).

5. 在杠杆上支点  $O$  的一侧与点  $O$  的距离为  $x_1$  的点  $P_1$  处, 有一与  $\overrightarrow{OP_1}$  成角  $\theta_1$  的力  $F_1$  作用着; 在  $O$  的另一侧与点  $O$  的距离为  $x_2$  的点  $P_2$  处, 有一与  $\overrightarrow{OP_2}$  成角  $\theta_2$  的力  $F_2$  作用着(图 8-27). 问  $\theta_1, \theta_2, x_1, x_2, |F_1|, |F_2|$  符合怎样的条件才能使杠杆保持平衡?



图 8-27

6. 求向量  $a = (4, -3, 4)$  在向量  $b = (2, 2, 1)$  上的投影.

7. 设  $a = (3, 5, -2), b = (2, 1, 4)$ , 问  $\lambda$  与  $\mu$  有怎样的关系, 能使得  $\lambda a + \mu b$  与  $z$  轴垂直?

8. 试用向量证明直径所对的圆周角是直角.

9. 已知向量  $a = 2i - 3j + k, b = i - j + 3k$  和  $c = i - 2j$ , 计算:

(1)  $(a \cdot b)c - (a \cdot c)b$ ; (2)  $(a + b) \times (b + c)$ ; (3)  $(a \times b) \cdot c$ .

10. 已知  $\overrightarrow{OA} = i + 3k, \overrightarrow{OB} = j + 3k$ , 求  $\triangle OAB$  的面积.

11. 已知  $a = (a_x, a_y, a_z), b = (b_x, b_y, b_z), c = (c_x, c_y, c_z)$ , 试利用行列式的性质证明:

$$(a \times b) \cdot c = (b \times c) \cdot a = (c \times a) \cdot b.$$

12. 试用向量证明不等式:

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \geq |a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3|,$$

其中  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  为任意实数. 并指出等号成立的条件.

### 第三节 曲面及其方程

#### 一、曲面方程的概念

在日常生活中, 我们经常会遇到各种曲面, 例如反光镜的镜面、管道的外表而以及锥面等等.

像在平面解析几何中把平面曲线当作动点的轨迹一样, 在空间解析几何中, 任何曲面都看做点的几何轨迹. 在这样的意义下, 如果曲面  $S$  与三元方程

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

有下述关系:

(1) 曲面  $S$  上任一点的坐标都满足方程(1);

(2) 不在曲面  $S$  上的点的坐标都不满足方程(1),

那么, 方程(1)就叫做曲面  $S$  的方程, 而曲面  $S$  就叫做方程(1)的图形(图 8-28).

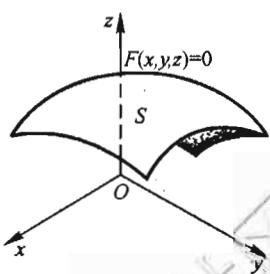


图 8-28

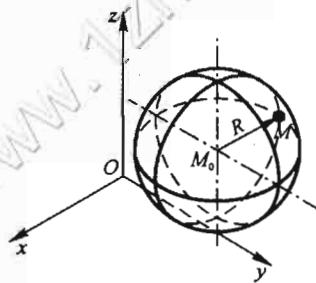


图 8-29

现在我们来建立几个常见曲面的方程.

**例 1** 建立球心在点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 、半径为  $R$  的球面的方程.

解 设  $M(x, y, z)$  是球面上的任一点(图 8-29), 那么

$$|M_0 M| = R.$$

由于

$$|M_0 M| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

所以

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R,$$

或

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2. \quad (2)$$

这就是球面上的点的坐标所满足的方程. 而不在球面上的点的坐标都不满足这方程. 所以方程(2)就是以  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  为球心、 $R$  为半径的球面方程.

如果球心在原点, 那么  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ , 从而球面方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

**例 2** 设有点  $A(1, 2, 3)$  和  $B(2, -1, 4)$ , 求线段  $AB$  的垂直平分面的方程.

解 由题意知道, 所求的平面就是与  $A$  和  $B$  等距离的点的几何轨迹. 设  $M(x, y, z)$  为所求平面上的任一点, 由于

$$|AM| = |BM|,$$

所以

$$\begin{aligned} &\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} \\ &= \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2}. \end{aligned}$$

等式两边平方, 然后化简便得

$$2x - 6y + 2z - 7 = 0.$$

这就是所求平面上的点的坐标所满足的方程, 而不在此平面上的点的坐标都不满足这个方程, 所以这个方程就是所求平面的方程.

以上表明作为点的几何轨迹的曲面可以用它的点的坐标间的方程来表示. 反之, 变量  $x$ 、 $y$  和  $z$  间的方程通常表示一个曲面. 因此在空间解析几何中关于曲面的研究, 有下列两个基本问题:

(1) 已知一曲面作为点的几何轨迹时, 建立这曲面的方程;

(2) 已知坐标  $x$ 、 $y$  和  $z$  间的一个方程时, 研究这方程所表示的曲面的形状.

上述例 1、例 2 是从已知曲面建立其方程的例子. 下面举一个由已知方程研究它所表示的曲面的例子.

**例 3** 方程  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y = 0$  表示怎样的曲面?

解 通过配方, 原方程可以改写成

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 5.$$

与(2)式比较, 就知道原方程表示球心在点  $M_0(1, -2, 0)$ 、半径为  $R = \sqrt{5}$  的球面.

一般的, 设有三元二次方程

$$Ax^2 + Ay^2 + Az^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0,$$

这个方程的特点是缺  $xy$ ,  $yz$ ,  $zx$  各项, 而且平方项系数相同, 只要将方程经过配方可以化成方程(2)的形式, 那么它的图形就是一个球面.

下面, 作为基本问题(1)的例子, 我们讨论旋转曲面; 作为基本问题(2)的例子, 我们讨论柱面. 第四目中对二次曲面的讨论, 也可看做基本问题(2)的例子.

## 二、旋转曲面

以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面叫做旋转曲面,旋转曲线和定直线依次叫做旋转曲面的母线和轴.

设在  $yOz$  坐标面上有一已知曲线  $C$ ,它的方程为

$$f(y, z) = 0,$$

把这曲线绕  $z$  轴旋转一周,就得到一个以  $z$  轴为轴的旋转曲面(图 8-30).它的方程可以求得如下:

设  $M_1(0, y_1, z_1)$  为曲线  $C$  上的任一点,那么有

$$f(y_1, z_1) = 0. \quad (3)$$

当曲线  $C$  绕  $z$  轴旋转时,点  $M_1$  绕  $z$  轴转到另一点  $M(x, y, z)$ ,这时  $z = z_1$  保持不变,且点  $M$  到  $z$  轴的距离

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = |y_1|.$$

将  $z_1 = z$ ,  $y_1 = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$  代入(3)式,就有

$$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0, \quad (4)$$

这就是所求旋转曲面的方程.

由此可知,在曲线  $C$  的方程  $f(y, z) = 0$  中将  $y$  改成  $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$ ,便得曲线  $C$  绕  $z$  轴旋转所成的旋转曲面的方程.

同理,曲线  $C$  绕  $y$  轴旋转所成的旋转曲面的方程为

$$f(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0. \quad (5)$$

**例 4** 直线  $L$  绕另一条与  $L$  相交的直线旋转一周,所得旋转曲面叫做圆锥面.两直线的交点叫做圆锥面的顶点,两直线的夹角  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ) 叫做圆锥面的半顶角.试建立顶点在坐标原点  $O$ ,旋转轴为  $z$  轴,半顶角为  $\alpha$  的圆锥面(图8-31)的方程.

解 在  $yOz$  坐标面上,直线  $L$  的方程为

$$z = y \cot \alpha, \quad (6)$$

因为旋转轴为  $z$  轴,所以只要将方程(6)中的  $y$  改成  $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$ ,便得到这圆锥面的方程

$$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2} \cot \alpha$$

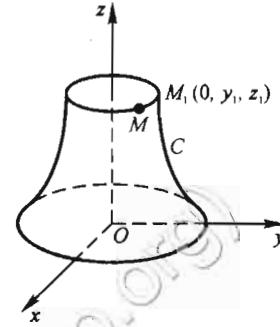


图 8-30

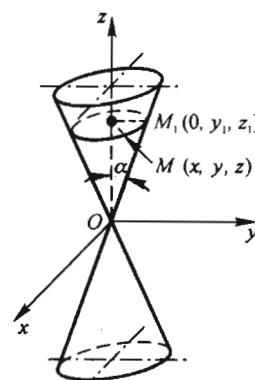


图 8-31

或

$$z^2 = a^2(x^2 + y^2), \quad (7)$$

其中  $a = \cot \alpha$ .

显然,圆锥面上任一点  $M$  的坐标一定满足方程(7).如果点  $M$  不在圆锥面上,那么直线  $OM$  与  $z$  轴的夹角就不等于  $\alpha$ ,于是点  $M$  的坐标就不满足方程(7).

例 5 将  $xOz$  坐标面上的双曲线

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

分别绕  $z$  轴和  $x$  轴旋转一周,求所生成的旋转曲面的方程.

解 绕  $z$  轴旋转所成的旋转曲面叫做旋转单叶双曲面(图 8-32),它的方程为

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

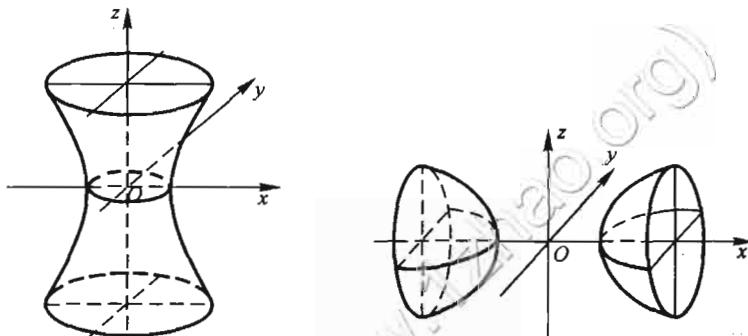


图 8-32

图 8-33

绕  $x$  轴旋转所成的旋转曲面叫做旋转双叶双曲面(图 8-33),它的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1.$$

### 三、柱面

我们先分析一个具体的例子.

例 6 方程  $x^2 + y^2 = R^2$  表示怎样的曲面?

解 方程  $x^2 + y^2 = R^2$  在  $xOy$  面上表示圆心在原点  $O$ 、半径为  $R$  的圆.在空间直角坐标系中,这方程不含竖坐标  $z$ ,即不论空间点的竖坐标  $z$  怎样,只要它的横坐标  $x$  和纵坐标  $y$  能满足这方程,那么这些点就在这曲面上.这就是说,

凡是通过  $xOy$  面内圆  $x^2 + y^2 = R^2$  上一点  $M(x, y, 0)$ , 且平行于  $z$  轴的直线  $l$  都在这曲面上, 因此, 这曲面可以看做是由平行于  $z$  轴的直线  $l$  沿  $xOy$  面上的圆  $x^2 + y^2 = R^2$  移动而形成的. 这曲面叫做圆柱面(图 8-34),  $xOy$  面上的圆  $x^2 + y^2 = R^2$  叫做它的准线, 这平行于  $z$  轴的直线  $l$  叫做它的母线.

一般的, 直线  $L$  沿定曲线  $C$  平行移动形成的轨迹叫做柱面, 定曲线  $C$  叫做柱面的准线, 动直线  $L$  叫做柱面的母线.

上面我们看到, 不含  $z$  的方程  $x^2 + y^2 = R^2$  在空间直角坐标系中表示圆柱面, 它的母线平行于  $z$  轴, 它的准线是  $xOy$  面上的圆  $x^2 + y^2 = R^2$ .

类似地, 方程  $y^2 = 2x$  表示母线平行于  $z$  轴的柱面, 它的准线是  $xOy$  面上的抛物线  $y^2 = 2x$ , 该柱面叫做抛物柱面(图 8-35).

又如, 方程  $x - y = 0$  表示母线平行于  $z$  轴的柱面, 其准线是  $xOy$  面上的直线  $x - y = 0$ , 所以它是过  $z$  轴的平面(图 8-36).

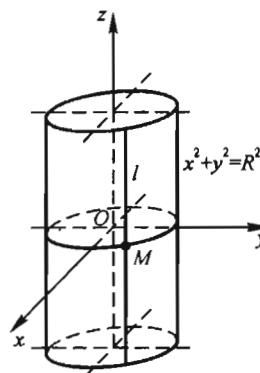


图 8-34

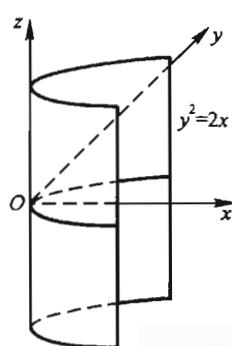


图 8-35

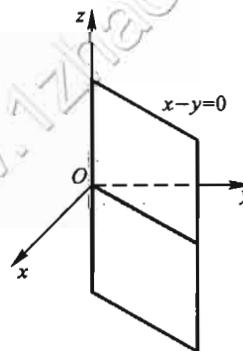


图 8-36

一般的, 只含  $x, y$  而缺  $z$  的方程  $F(x, y) = 0$  在空间直角坐标系中表示母线平行于  $z$  轴的柱面, 其准线是  $xOy$  面上的曲线  $C: F(x, y) = 0$  (图 8-37).

类似可知, 只含  $x, z$  而缺  $y$  的方程  $G(x, z) = 0$  和只含  $y, z$  而缺  $x$  的方程  $H(y, z) = 0$  分别表示母线平行于  $y$  轴和  $x$  轴的柱面.

例如, 方程  $x - z = 0$  表示母线平行于  $y$  轴的柱面, 其准线是  $xOz$  面上的直线  $x - z = 0$ . 所以它是过  $y$  轴的平面(图 8-38).

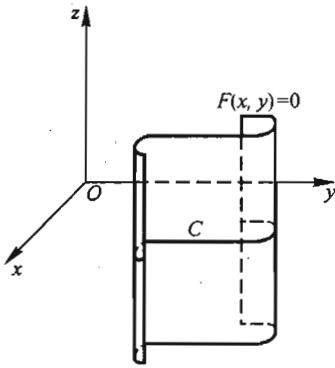


图 8-37

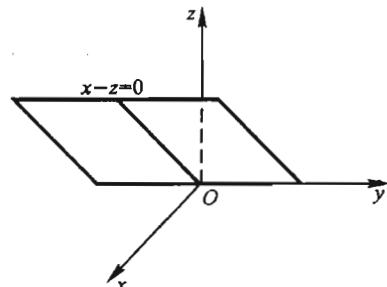


图 8-38

#### 四、二次曲面

与平面解析几何中规定的二次曲线相类似, 我们把三元二次方程  $F(x, y, z) = 0$  所表示的曲面称为二次曲面, 而把平面称为一次曲面.

二次曲面有九种, 适当选取空间直角坐标系, 可得它们的标准方程. 下面就九种二次曲面的标准方程来讨论二次曲面的形状.

$$(1) \text{ 椭圆锥面 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$$

以垂直于  $z$  轴的平面  $z = t$  截此曲面, 当  $t = 0$  时得一点  $(0, 0, 0)$ ; 当  $t \neq 0$  时, 得平面  $z = t$  上的椭圆

$$\frac{x^2}{(at)^2} + \frac{y^2}{(bt)^2} = 1.$$

当  $t$  变化时, 上式表示一族长短轴比例不变的椭圆, 当  $|t|$  从大到小并变为 0 时, 这族椭圆从大到小并缩为一点. 综合上述讨论, 可得椭圆锥面 (1) 的形状如图 8-39 所示.

平面  $z = t$  与曲面  $F(x, y, z) = 0$  的交线称为截痕. 通过综合截痕的变化来了解曲面形状的方法称为截痕法.

我们还可以用伸缩变形的方法来得出椭圆锥面 (1) 的形状.

先说明  $xOy$  平面上的图形伸缩变形的方法. 在  $xOy$  平面上, 把点  $M(x, y)$  变为点  $M'(x, \lambda y)$ , 从而把点  $M$  的轨迹  $C$  变为点  $M'$  的轨迹  $C'$ , 称为把图形  $C$  沿  $y$  轴方向伸缩  $\lambda$  倍变成图形  $C'$ . 假如  $C$  为曲线  $F(x, y) = 0$ , 点  $M(x_1, y_1) \in C$ , 点  $M'$

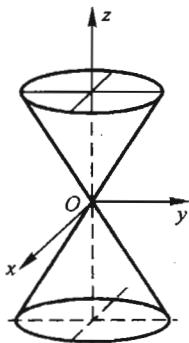


图 8-39

变为点  $M'(x_2, y_2)$ , 其中  $x_2 = x_1$ ,  $y_2 = \lambda y_1$ , 即  $x_1 = x_2$ ,  $y_1 = \frac{1}{\lambda}y_2$ , 因点  $M \in C$ , 有  $F(x_1, y_1) = 0$ , 故  $F\left(x_2, \frac{1}{\lambda}y_2\right) = 0$ , 因此点  $M'(x_2, y_2)$  的轨迹  $C'$  的方程为  $F\left(x, \frac{1}{\lambda}y\right) = 0$ . 例如把圆  $x^2 + y^2 = a^2$  沿  $y$  轴方向伸缩  $\frac{b}{a}$  倍, 就变为椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (图 8-40).

类似地, 把空间图形沿  $y$  轴方向伸缩  $\frac{b}{a}$  倍, 那么圆锥面  $\frac{x^2 + y^2}{a^2} = z^2$  (图 8-31) 即变为椭圆锥面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$  (图 8-39).

利用圆锥面(旋转曲面)的伸缩变形来得出椭圆锥面的形状, 这种方法是研究曲面形状的一种较方便的方法.

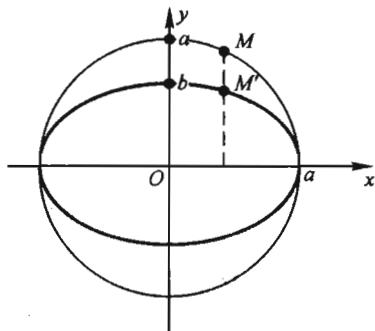


图 8-40

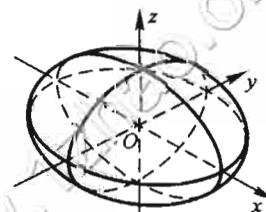


图 8-41

$$(2) \text{ 椭球面 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

把  $xOz$  面上的椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  绕  $z$  轴旋转, 所得曲面称为旋转椭球面, 其

方程为

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

再把旋转椭球面沿  $y$  轴方向伸缩  $\frac{b}{a}$  倍, 便得椭球面(2)的形状如图 8-41 所示.

当  $a = b = c$  时, 椭球面(2)成为  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , 这是球心在原点、半径为  $a$  的球面. 显然, 球面是旋转椭球面的特殊情形, 旋转椭球面是椭球面的特殊情形. 把球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  沿  $z$  轴方向伸缩  $\frac{c}{a}$  倍, 即得旋转椭球面  $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

$\frac{z^2}{c^2} = 1$ ; 再沿  $y$  轴方向伸缩  $\frac{b}{a}$  倍, 即得椭球面(2).

$$(3) \text{ 单叶双曲面 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

把  $xOz$  面上的双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  绕  $z$  轴旋转, 得旋转单叶双曲面  $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  (图 8-32). 把此旋转曲面沿  $y$  轴方向伸缩  $\frac{b}{a}$  倍, 即得单叶双曲面(3).

$$(4) \text{ 双叶双曲面 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

把  $xOz$  面上的双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  绕  $x$  轴旋转, 得旋转双叶双曲面  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1$  (图 8-33), 把此旋转曲面沿  $y$  轴方向伸缩  $\frac{b}{c}$  倍, 即得双叶双曲面(4).

$$(5) \text{ 椭圆抛物面 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$

把  $xOz$  面上的抛物线  $\frac{x^2}{a^2} = z$  绕  $z$  轴旋转, 所得曲面叫做旋转抛物面, 如图 8-42 所示. 把此旋转曲面沿  $y$  轴方向伸缩  $\frac{b}{a}$  倍, 即得椭圆抛物面(5).

$$(6) \text{ 双曲抛物面 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

双曲抛物面又称马鞍面, 我们用截痕法来讨论它的形状.

用平面  $x = t$  截此曲面, 所得截痕  $l$  为平面  $x = t$  上的抛物线

$$-\frac{y^2}{b^2} = z - \frac{t^2}{a^2},$$

此抛物线开口朝下, 其顶点坐标为

$$x = t, y = 0, z = \frac{t^2}{a^2}.$$

当  $t$  变化时,  $l$  的形状不变, 位置只作平移, 而  $l$  的顶点的轨迹  $L$  为平面  $y = 0$  上的抛物线

$$z = \frac{x^2}{a^2}.$$

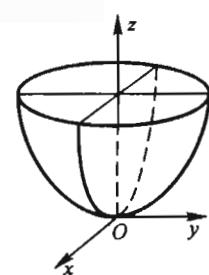


图 8-42

因此,以  $l$  为母线,  $L$  为准线, 母线  $l$  的顶点在准线  $L$  上滑动, 且母线作平行移动, 这样得到的曲面便是双曲抛物面(6), 如图 8-43 所示.

还有三种二次曲面是以三种二次曲线为  
准线的柱面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x^2 = ay,$$

依次称为椭圆柱面、双曲柱面、抛物柱面. 柱面的形状在第三目中已经讨论过, 这里不再赘述.

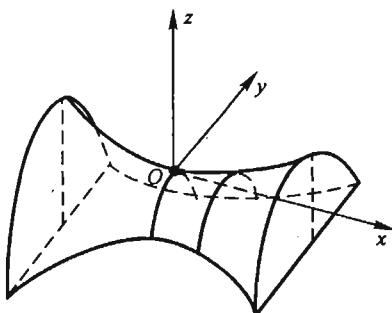


图 8-43

### 习题 8-3

1. 一动点与两定点  $(2, 3, 1)$  和  $(4, 5, 6)$  等距离, 求这动点的轨迹方程.
2. 建立以点  $(1, 3, -2)$  为球心, 且通过坐标原点的球面方程.
3. 方程  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z = 0$  表示什么曲面?
4. 求与坐标原点  $O$  及点  $(2, 3, 4)$  的距离之比为  $1:2$  的点的全体所组成的曲面的方程, 它表示怎样的曲面?
5. 将  $xOz$  坐标面上的抛物线  $z^2 = 5x$  绕  $x$  轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.
6. 将  $xOz$  坐标面上的圆  $x^2 + z^2 = 9$  绕  $z$  轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.
7. 将  $xOy$  坐标面上的双曲线  $4x^2 - 9y^2 = 36$  分别绕  $x$  轴及  $y$  轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.
8. 画出下列各方程所表示的曲面:
  - (1)  $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ ;      (2)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ ;
  - (3)  $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ ;      (4)  $y^2 - z = 0$ ;
  - (5)  $z = 2 - x^2$ .
9. 指出下列方程在平面解析几何中和在空间解析几何中分别表示什么图形:
  - (1)  $x = 2$ ;      (2)  $y = x + 1$ ;
  - (3)  $x^2 + y^2 = 4$ ;      (4)  $x^2 - y^2 = 1$ .
10. 说明下列旋转曲面是怎样形成的:
  - (1)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$ ;      (2)  $x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ ;
  - (3)  $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ ;      (4)  $(z - a)^2 = x^2 + y^2$ .
11. 画出下列方程所表示的曲面:
  - (1)  $4x^2 + y^2 - z^2 = 4$ ;      (2)  $x^2 - y^2 - 4z^2 = 4$ ;
  - (3)  $\frac{z}{3} = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ .

## 第四节 空间曲线及其方程

### 一、空间曲线的一般方程

空间曲线可以看做两个曲面的交线. 设

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{和} \quad G(x, y, z) = 0$$

是两个曲面的方程, 它们的交线为  $C$  (图 8-44). 因为曲线  $C$  上的任何点的坐标应同时满足这两个曲面的方程, 所以应满足方程组

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

反过来, 如果点  $M$  不在曲线  $C$  上, 那么它不可能同时在两个曲面上, 所以它的坐标不满足方程组(1). 因此, 曲线  $C$  可以用方程组(1)来表示. 方程组(1)叫做空间曲线  $C$  的一般方程.

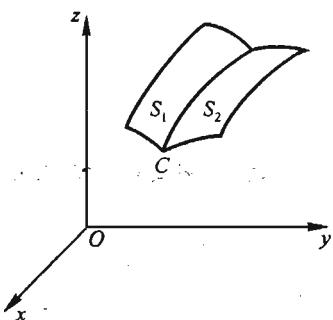


图 8-44

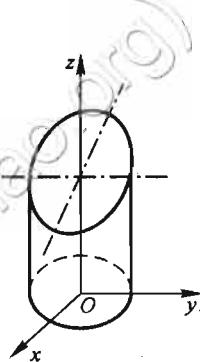


图 8-45

#### 例 1 方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 2x + 3z = 6 \end{cases}$$

表示怎样的曲线?

解 方程组中第一个方程表示母线平行于  $z$  轴的圆柱面, 其准线是  $xOy$  面上的圆, 圆心在原点  $O$ , 半径为 1. 方程组中第二个方程表示一个母线平行于  $y$  轴的柱面, 由于它的准线是  $zOx$  面上的直线, 因此它是一个平面. 方程组就表示上述平面与圆柱面的交线, 如图 8-45 所示.

#### 例 2 方程组

$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \\ \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \end{cases}$$

表示怎样的曲线?

解 方程组中第一个方程表示球心在坐标原点  $O$ , 半径为  $a$  的上半球面. 第二个方程表示母线平行于  $z$  轴的圆柱面, 它的准线是  $xOy$  面上的圆, 这圆的圆心在点  $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ , 半径为  $\frac{a}{2}$ . 方程组就表示上述半球面与圆柱面的交线, 如图8-46所示.

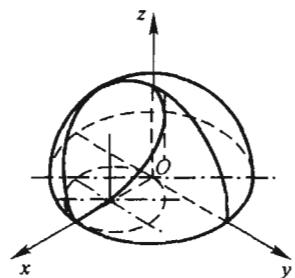


图 8-46

## 二、空间曲线的参数方程

空间曲线  $C$  的方程除了一般方程之外, 也可以用参数形式表示, 只要将  $C$  上动点的坐标  $x, y, z$  表示为参数  $t$  的函数:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \quad (2)$$

当给定  $t = t_1$  时, 就得到  $C$  上的一个点  $(x_1, y_1, z_1)$ ; 随着  $t$  的变动便可得曲线  $C$  上的全部点. 方程组(2)叫做空间曲线的参数方程.

例 3 如果空间一点  $M$  在圆柱面  $x^2 + y^2 = a^2$  上以角速度  $\omega$  绕  $z$  轴旋转, 同时又以线速度  $v$  沿平行于  $z$  轴的正方向上升(其中  $\omega, v$  都是常数), 那么点  $M$  构成的图形叫做螺旋线. 试建立其参数方程.

解 取时间  $t$  为参数. 设当  $t = 0$  时, 动点位于  $x$  轴上的一点  $A(a, 0, 0)$  处. 经过时间  $t$ , 动点由  $A$  运动到  $M(x, y, z)$  (图 8-47). 记  $M$  在  $xOy$  面上的投影为  $M'$ ,  $M'$  的坐标为  $x, y, 0$ . 由于动点在圆柱面上以角速度  $\omega$  绕  $z$  轴旋转, 所以经过时间  $t$ ,  $\angle AOM' = \omega t$ . 从而

$$x = |OM'| \cos \angle AOM' = a \cos \omega t,$$

$$y = |OM'| \sin \angle AOM' = a \sin \omega t.$$

由于动点同时以线速度  $v$  沿平行于  $z$  轴的正方向上升, 所以

$$z = M'M = vt.$$

因此螺旋线的参数方程为

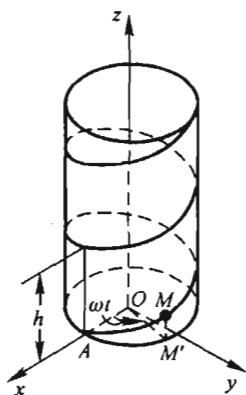


图 8-47

$$\begin{cases} x = a \cos \omega t, \\ y = a \sin \omega t, \\ z = vt. \end{cases}$$

也可以用其他变量作参数. 例如令  $\theta = \omega t$ , 则螺旋线的参数方程可写为

$$\begin{cases} x = a \cos \theta, \\ y = a \sin \theta, \\ z = b\theta. \end{cases}$$

这里  $b = \frac{v}{\omega}$ , 而参数为  $\theta$ .

螺旋线是实践中常用的曲线. 例如, 平头螺丝钉的外缘曲线就是螺旋线. 当我们拧紧平头螺丝钉时, 它的外缘曲线上的任一点  $M$ , 一方面绕螺丝钉的轴旋转, 另一方面又沿平行于轴线的方向前进, 点  $M$  就走出一段螺旋线.

螺旋线有一个重要性质: 当  $\theta$  从  $\theta_0$  变到  $\theta_0 + \alpha$  时,  $z$  由  $b\theta_0$  变到  $b\theta_0 + b\alpha$ . 这说明当  $OM'$  转过角  $\alpha$  时,  $M$  点沿螺旋线上升了高度  $b\alpha$ , 即上升的高度与  $OM'$  转过的角度成正比. 特别是当  $OM'$  转过一周, 即  $\alpha = 2\pi$  时,  $M$  点就上升固定的高度  $h = 2\pi b$ . 这个高度  $h = 2\pi b$  在工程技术上叫做螺距.

### \* 曲面的参数方程

下面顺便介绍一下曲面的参数方程. 曲面的参数方程通常是含两个参数的方程, 形如

$$\begin{cases} x = x(s, t), \\ y = y(s, t), \\ z = z(s, t). \end{cases} \quad (3)$$

例如空间曲线  $\Gamma$

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \omega(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

绕  $z$  轴旋转, 所得旋转曲面的方程为

$$\begin{cases} x = \sqrt{[\varphi(t)]^2 + [\psi(t)]^2} \cos \theta, \\ y = \sqrt{[\varphi(t)]^2 + [\psi(t)]^2} \sin \theta, \\ z = \omega(t) \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha \leq t \leq \beta, \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad (4)$$

这是因为, 固定一个  $t$ , 得  $\Gamma$  上一点  $M_1(\varphi(t), \psi(t), \omega(t))$ , 点  $M_1$  绕  $z$  轴旋转, 得空间的一个圆, 该圆在平面  $z = \omega(t)$  上, 其半径为点  $M_1$  到  $z$  轴的距离  $\sqrt{[\varphi(t)]^2 + [\psi(t)]^2}$ , 因此, 固定  $t$  的方程(4)就是该圆的参数方程. 再令  $t$  在  $[\alpha, \beta]$  内变动, 方程(4)便是旋转曲面的方程.

例如直线

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = t, \\ z = 2t \end{cases}$$

绕  $z$  轴旋转所得旋转曲面(图 8-48)的方程为

$$\begin{cases} x = \sqrt{1+t^2} \cos \theta, \\ y = \sqrt{1+t^2} \sin \theta, \\ z = 2t \end{cases}$$

(上式消去  $t$  和  $\theta$ , 得曲面的直角坐标方程为  $x^2 + y^2 = 1 + \frac{z^2}{4}$ ).

又如球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  可看成  $zOx$  面上的半圆周

$$\begin{cases} x = a \sin \varphi, \\ y = 0, & 0 \leq \varphi \leq \pi \\ z = a \cos \varphi, \end{cases}$$

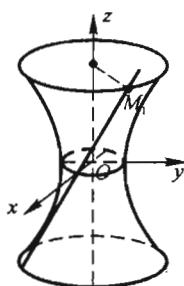


图 8-48

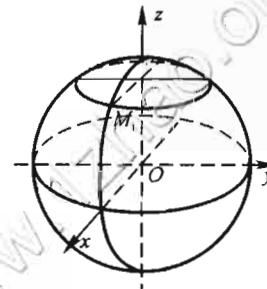


图 8-49

绕  $z$  轴旋转所得(图 8-49), 故球面方程为

$$\begin{cases} x = a \sin \varphi \cos \theta, & 0 \leq \varphi \leq \pi, \\ y = a \sin \varphi \sin \theta, & 0 \leq \theta \leq 2\pi. \\ z = a \cos \varphi, \end{cases}$$

### 三、空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线  $C$  的一般方程为

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

现在来研究由方程组(5)消去变量  $z$  后所得的方程

$$H(x, y) = 0. \quad (6)$$

由于方程(6)是由方程组(5)消去  $z$  后所得的结果,因此当  $x, y$  和  $z$  满足方程组(5)时,前两个数  $x, y$  必定满足方程(6),这说明曲线  $C$  上的所有点都在由方程(6)所表示的曲面上.

由上节知道,方程(6)表示一个母线平行于  $z$  轴的柱面.由上面的讨论可知,这柱面必定包含曲线  $C$ .以曲线  $C$  为准线、母线平行于  $z$  轴(即垂直于  $xOy$  面)的柱面叫做曲线  $C$  关于  $xOy$  面的投影柱面,投影柱面与  $xOy$  面的交线叫做空间曲线  $C$  在  $xOy$  面上的投影曲线,或简称投影.因此,方程(6)所表示的柱面必定包含投影柱面,而方程

$$\begin{cases} H(x, y) = 0, \\ z = 0 \end{cases}$$

所表示的曲线必定包含空间曲线  $C$  在  $xOy$  面上的投影.

同理,消去方程组(5)中的变量  $x$  或变量  $y$ ,再分别和  $x = 0$  或  $y = 0$  联立,我们就可得到包含曲线  $C$  在  $yOz$  面或  $xOz$  面上的投影的曲线方程:

$$\begin{cases} R(y, z) = 0, \\ x = 0, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} T(x, z) = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

**例 4** 已知两球面的方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (7)$$

和

$$x^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1, \quad (8)$$

求它们的交线  $C$  在  $xOy$  面上的投影方程.

**解** 先求包含交线  $C$  而母线平行于  $z$  轴的柱面方程.因此要由方程(7)、(8)消去  $z$ ,为此可先从(7)式减去(8)式并化简,得到

$$y + z = 1.$$

再以  $z = 1 - y$  代入方程(7)或(8)即得所求的柱面方程为

$$x^2 + 2y^2 - 2y = 0.$$

容易看出,这就是交线  $C$  关于  $xOy$  面的投影柱面方程,于是两球面的交线在  $xOy$  面上的投影方程是

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

在重积分和曲面积分的计算中,往往需要确定一个立体或曲面在坐标面上的投影,这时要利用投影柱面和投影曲线.

**例 5** 设一个立体由上半球面  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$  和锥面  $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$  所围成(图 8-50),求它在  $xOy$  面上的投影.

**解** 半球面和锥面的交线为

$$C: \begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \\ z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}. \end{cases}$$

由上列方程组消去  $z$ , 得到  $x^2 + y^2 = 1$ . 这是一个母线平行于  $z$  轴的圆柱面, 容易看出, 这恰好是交线  $C$  关于  $xOy$  面的投影柱面, 因此交线  $C$  在  $xOy$  面上的投影曲线为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

这是  $xOy$  面上的一个圆, 于是所求立体在  $xOy$  面上的投影, 就是该圆在  $xOy$  面上所围的部分:  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

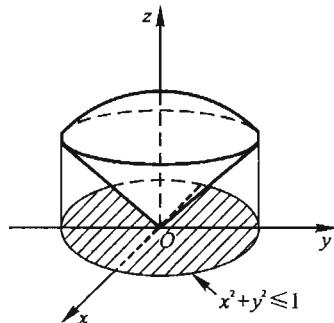


图 8-50

### 习题 8-4

1. 画出下列曲线在第一卦限内的图形:

$$(1) \begin{cases} x = 1, \\ y = 2; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \\ x - y = 0; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ x^2 + z^2 = a^2. \end{cases}$$

2. 指出下列方程组在平面解析几何中与在空间解析几何中分别表示什么图形:

$$(1) \begin{cases} y = 5x + 1, \\ y = 2x - 3; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \\ y = 3. \end{cases}$$

3. 分别求母线平行于  $x$  轴及  $y$  轴而且通过曲线  $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ x^2 + z^2 - y^2 = 0 \end{cases}$  的柱面方程.

4. 求球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  与平面  $x + z = 1$  的交线在  $xOy$  面上的投影的方程.

5. 将下列曲线的一般方程化为参数方程:

$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ y = x; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 4, \\ z = 0. \end{cases}$$

6. 求螺旋线  $\begin{cases} x = a \cos \theta, \\ y = a \sin \theta, \\ z = b\theta \end{cases}$  在三个坐标面上的投影曲线的直角坐标方程.

7. 求上半球  $0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  与圆柱体  $x^2 + y^2 \leq ax$  ( $a > 0$ ) 的公共部分在  $xOy$  面和  $xOz$  面上的投影.

8. 求旋转抛物面  $z = x^2 + y^2$  ( $0 \leq z \leq 4$ ) 在三坐标面上的投影.

## 第五节 平面及其方程

在本节和下一节里,我们将以向量为工具,在空间直角坐标系中讨论最简单的曲面和曲线——平面和直线.

### 一、平面的点法式方程

如果一非零向量垂直于一平面,这向量就叫做该平面的法线向量.容易知道,平面上的任一向量均与该平面的法线向量垂直.

因为过空间一点可以作而且只能作一平面垂直于一已知直线,所以当平面 $\Pi$ 上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和它的一个法线向量 $n = (A, B, C)$ 为已知时,平面 $\Pi$ 的位置就完全确定了.下面我们来建立平面 $\Pi$ 的方程.

设 $M(x, y, z)$ 是平面 $\Pi$ 上的任一点(图 8-51).那么向量 $\overrightarrow{M_0 M}$ 必与平面 $\Pi$ 的法线向量 $n$ 垂直,即它们的数量积等于零

$$n \cdot \overrightarrow{M_0 M} = 0.$$

由于  $n = (A, B, C)$ ,  $\overrightarrow{M_0 M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ , 所以有

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (1)$$

这就是平面 $\Pi$ 上任一点 $M$ 的坐标 $x, y, z$ 所满足的方程.

反过来,如果 $M(x, y, z)$ 不在平面 $\Pi$ 上,那么向量 $\overrightarrow{M_0 M}$ 与法线向量 $n$ 不垂直,从而 $n \cdot \overrightarrow{M_0 M} \neq 0$ ,即不在平面 $\Pi$ 上的点 $M$ 的坐标 $x, y, z$ 不满足方程(1).

由此可知,平面 $\Pi$ 上的任一点的坐标 $x, y, z$ 都满足方程(1);不在平面 $\Pi$ 上的点的坐标都不满足方程(1).这样,方程(1)就是平面 $\Pi$ 的方程,而平面 $\Pi$ 就是方程(1)的图形.由于方程(1)是由平面 $\Pi$ 上的一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 及它的一个法线向量 $n = (A, B, C)$ 确定的,所以方程(1)叫做平面的点法式方程.

例 1 求过点 $(2, -3, 0)$ 且以 $n = (1, -2, 3)$ 为法线向量的平面的方程.

解 根据平面的点法式方程(1),得所求平面的方程为

$$(x - 2) - 2(y + 3) + 3z = 0,$$

即  $x - 2y + 3z - 8 = 0.$

例 2 求过三点 $M_1(2, -1, 4)$ 、 $M_2(-1, 3, -2)$ 和 $M_3(0, 2, 3)$ 的平面的方程.

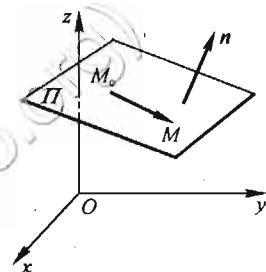


图 8-51

解 先找出这平面的法线向量  $n$ . 由于向量  $n$  与向量  $\overrightarrow{M_1 M_2}, \overrightarrow{M_1 M_3}$  都垂直, 而  $\overrightarrow{M_1 M_2} = (-3, 4, -6), \overrightarrow{M_1 M_3} = (-2, 3, -1)$ , 所以可取它们的向量积为  $n$ , 即

$$\begin{aligned} n &= \overrightarrow{M_1 M_2} \times \overrightarrow{M_1 M_3} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 14i + 9j - k, \end{aligned}$$

根据平面的点法式方程(1), 得所求平面的方程为

$$14(x - 2) + 9(y + 1) - (z - 4) = 0,$$

即  $14x + 9y - z - 15 = 0.$

## 二、平面的一般方程

由于平面的点法式方程(1)是  $x, y, z$  的一次方程, 而任一平面都可以用它上面的一点及它的法线向量来确定, 所以任一平面都可以用三元一次方程来表示.

反过来, 设有三元一次方程

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (2)$$

我们任取满足该方程的一组数  $x_0, y_0, z_0$ , 即

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (3)$$

把上述两等式相减, 得

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (4)$$

把它和平面的点法式方程(1)作比较, 可以知道方程(4)是通过点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  且以  $n = (A, B, C)$  为法线向量的平面方程. 但方程(2)与方程(4)同解, 这是因为由(2)减去(3)即得(4), 又由(4)加上(3)就得(2). 由此可知, 任一三元一次方程(2)的图形总是一个平面. 方程(2)称为平面的一般方程, 其中  $x, y, z$  的系数就是该平面的一个法线向量  $n$  的坐标, 即  $n = (A, B, C)$ .

例如, 方程

$$3x - 4y + z - 9 = 0.$$

表示一个平面,  $n = (3, -4, 1)$  是这平面的一个法线向量.

对于一些特殊的三元一次方程, 应该熟悉它们的图形的特点.

当  $D = 0$  时, 方程(2)成为  $Ax + By + Cz = 0$ , 它表示一个通过原点的平面.

当  $A = 0$  时, 方程(2)成为  $By + Cz + D = 0$ , 法线向量  $n = (0, B, C)$  垂直于  $x$  轴, 方程表示一个平行于  $x$  轴的平面.

同样,方程  $Ax + Cz + D = 0$  和  $Ax + By + D = 0$ ,分别表示一个平行于  $y$  轴和  $z$  轴的平面.

当  $A = B = 0$  时,方程(2)成为  $Cz + D = 0$  或  $z = -\frac{D}{C}$ ,法线向量  $\mathbf{n} = (0, 0, C)$  同时垂直  $x$  轴和  $y$  轴,方程表示一个平行于  $xOy$  面的平面.

同样,方程  $Ax + D = 0$  和  $By + D = 0$  分别表示一个平行于  $yOz$  面和  $xOz$  面的平面.

**例 3** 求通过  $x$  轴和点  $(4, -3, -1)$  的平面的方程.

**解** 由于平面通过  $x$  轴,从而它的法线向量垂直于  $x$  轴,于是法线向量在  $x$  轴上的投影为零,即  $A = 0$ ;又由平面通过  $x$  轴,它必通过原点,于是  $D = 0$ .因此可设这平面的方程为

$$By + Cz = 0.$$

又因这平面通过点  $(4, -3, -1)$ ,所以有

$$-3B - C = 0,$$

或

$$C = -3B.$$

以此代入所设方程并除以  $B$  ( $B \neq 0$ ),便得所求的平面方程为

$$y - 3z = 0.$$

**例 4** 设一平面与  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴的交点依次为  $P(a, 0, 0)$ 、 $Q(0, b, 0)$ 、 $R(0, 0, c)$  三点(图 8-52),求这平面的方程(其中  $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ ).

**解** 设所求平面的方程为

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

因  $P(a, 0, 0)$ 、 $Q(0, b, 0)$ 、 $R(0, 0, c)$  三点都在这平面上,所以点  $P$ 、 $Q$ 、 $R$  的坐标都满足方程(2);即有

$$\begin{cases} aA + D = 0, \\ bB + D = 0, \\ cC + D = 0, \end{cases}$$

得  $A = -\frac{D}{a}$ ,  $B = -\frac{D}{b}$ ,  $C = -\frac{D}{c}$ .

以此代入(2)并除以  $D$  ( $D \neq 0$ ),便得所求的平面方程为

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (5)$$

方程(5)叫做平面的截距式方程,而  $a$ 、 $b$ 、 $c$  依次叫做平面在  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴上的截距.

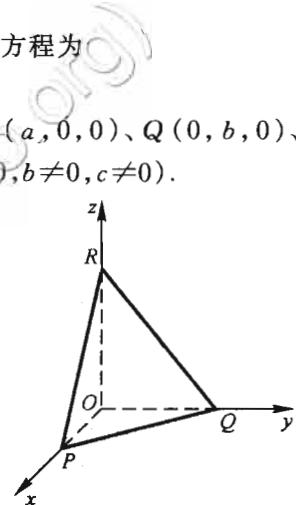


图 8-52

### 三、两平面的夹角

两平面的法线向量的夹角(通常指锐角)称为两平面的夹角.

设平面  $\Pi_1$  和  $\Pi_2$  的法线向量依次为  $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$  和  $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ , 那么平面  $\Pi_1$  和  $\Pi_2$  的夹角  $\theta$  (图 8-53) 应是  $(\hat{\mathbf{n}_1}, \hat{\mathbf{n}_2})$  和  $(-\hat{\mathbf{n}_1}, \hat{\mathbf{n}_2}) = \pi - (\hat{\mathbf{n}_1}, \hat{\mathbf{n}_2})$  两者中的锐角, 因此,  $\cos \theta = |\cos (\hat{\mathbf{n}_1}, \hat{\mathbf{n}_2})|$ . 按两向量夹角余弦的坐标表示式, 平面  $\Pi_1$  和平面  $\Pi_2$  的夹角  $\theta$  可由

$$\cos \theta = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (6)$$

来确定.

从两向量垂直、平行的充分必要条件立即推得下列结论:

$\Pi_1, \Pi_2$  互相垂直相当于  $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$ ;

$\Pi_1, \Pi_2$  互相平行或重合相当于  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ .

例 5 求两平面  $x - y + 2z - 6 = 0$  和  $2x + y + z - 5 = 0$  的夹角.

解 由公式(6)有

$$\cos \theta = \frac{|1 \times 2 + (-1) \times 1 + 2 \times 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2},$$

因此, 所求夹角  $\theta = \frac{\pi}{3}$ .

例 6 一平面通过两点  $M_1(1, 1, 1)$  和  $M_2(0, 1, -1)$  且垂直于平面  $x + y + z = 0$ , 求它的方程.

解 设所求平面的一个法线向量为

$$\mathbf{n} = (A, B, C).$$

因  $\overrightarrow{M_1 M_2} = (-1, 0, -2)$  在所求平面上, 它必与  $\mathbf{n}$  垂直, 所以有

$$-A - 2C = 0. \quad (7)$$

又因所求的平面垂直于已知平面  $x + y + z = 0$ , 所以又有

$$A + B + C = 0. \quad (8)$$

由(7)、(8)得到

$$A = -2C,$$

$$B = C.$$

由平面的点法式方程可知, 所求平面方程为

$$A(x - 1) + B(y - 1) + C(z - 1) = 0.$$

将  $A = -2C$  及  $B = C$  代入上式, 并约去  $C$  ( $C \neq 0$ ), 便得

$$-2(x - 1) + (y - 1) + (z - 1) = 0,$$

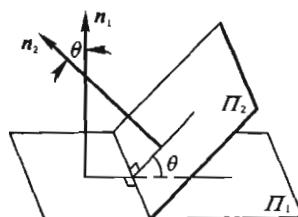


图 8-53

或

$$2x - y - z = 0.$$

这就是所求的平面方程.

例 7 设  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  是平面  $Ax + By + Cz + D = 0$  外一点, 求  $P_0$  到这平面的距离(图 8-54).

解 在平面上任取一点  $P_1(x_1, y_1, z_1)$ , 并作一法线向量  $n$ , 由图 8-54, 并考虑到  $\overrightarrow{P_1 P_0}$  与  $n$  的夹角  $\theta$  也可能是钝角, 得所求的距离

$$d = |\text{Prj}_n \overrightarrow{P_1 P_0}|.$$

设  $e_n$  为与向量  $n$  方向一致的单位向量, 那么有

$$\text{Prj}_n \overrightarrow{P_1 P_0} = \overrightarrow{P_1 P_0} \cdot e_n,$$

而

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} (A, B, C),$$

$$\overrightarrow{P_1 P_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1),$$

得 
$$\begin{aligned} \text{Prj}_n \overrightarrow{P_1 P_0} &= \frac{A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ &= \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned}$$

由于

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0,$$

所以

$$\text{Prj}_n \overrightarrow{P_1 P_0} = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

由此得点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  到平面  $Ax + By + Cz + D = 0$  的距离公式

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (9)$$

例如, 求点  $(2, 1, 1)$  到平面  $x + y - z + 1 = 0$  的距离, 可利用公式(9), 便得

$$d = \frac{|1 \times 2 + 1 \times 1 - 1 \times 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

### 习题 8-5

1. 求过点  $(3, 0, -1)$  且与平面  $3x - 7y + 5z - 12 = 0$  平行的平面方程.
2. 求过点  $M_0(2, 9, -6)$  且与连接坐标原点及点  $M_0$  的线段  $OM_0$  垂直的平面方程.
3. 求过  $(1, 1, -1)$ 、 $(-2, -2, 2)$  和  $(1, -1, 2)$  三点的平面方程.
4. 指出下列各平面的特殊位置, 并画出各平面:

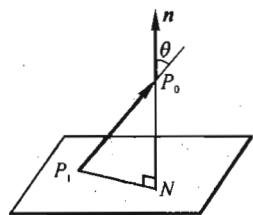


图 8-54

- (1)  $x = 0$ ; (2)  $3y - 1 = 0$ ;  
 (3)  $2x - 3y - 6 = 0$ ; (4)  $x - \sqrt{3}y = 0$ ;  
 (5)  $y + z = 1$ ; (6)  $x - 2z = 0$ ;  
 (7)  $6x + 5y - z = 0$ .
5. 求平面  $2x - 2y + z + 5 = 0$  与各坐标面的夹角的余弦.
6. 一平面过点  $(1, 0, -1)$  且平行于向量  $a = (2, 1, 1)$  和  $b = (1, -1, 0)$ , 试求这平面方程.
7. 求三平面  $x + 3y + z = 1$ ,  $2x - y - z = 0$ ,  $-x + 2y + 2z = 3$  的交点.
8. 分别按下列条件求平面方程:
- (1) 平行于  $xOz$  面且经过点  $(2, -5, 3)$ ;
  - (2) 通过  $z$  轴和点  $(-3, 1, -2)$ ;
  - (3) 平行于  $x$  轴且经过两点  $(4, 0, -2)$  和  $(5, 1, 7)$ .
9. 求点  $(1, 2, 1)$  到平面  $x + 2y + 2z - 10 = 0$  的距离.

## 第六节 空间直线及其方程

### 一、空间直线的一般方程

空间直线  $L$  可以看做是两个平面  $\Pi_1$  和  $\Pi_2$  的交线(图 8-55). 如果两个相交的平面  $\Pi_1$  和  $\Pi_2$  的方程分别为  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  和  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ , 那么直线  $L$  上的任一点的坐标应同时满足这两个平面的方程, 即应满足方程组

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

反过来, 如果点  $M$  不在直线  $L$  上, 那么它不可能同时在平面  $\Pi_1$  和  $\Pi_2$  上, 所以它的坐标不满足方程组(1). 因此, 直线  $L$  可以用方程组(1)来表示. 方程组(1)叫做空间直线的一般方程.

通过空间一直线  $L$  的平面有无限多个, 只要在这无限多个平面中任意选取两个, 把它们的方程联立起来, 所得的方程组就表示空间直线  $L$ .

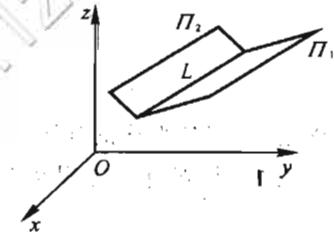


图 8-55

### 二、空间直线的对称式方程与参数方程

如果一个非零向量平行于一条已知直线, 这个向量就叫做这条直线的方向向量.

由于过空间一点可作而且只能作一条直线平行于一已知直线,所以当直线  $L$  上一点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  和它的一方向向量  $s = (m, n, p)$  为已知时,直线  $L$  的位置就完全确定了.下面我们来建立这直线的方程.

设点  $M(x, y, z)$  是直线  $L$  上的任一点,那么向量  $\overrightarrow{M_0 M}$  与  $L$  的方向向量  $s$  平行(图 8-56).所以两向量的对应坐标成比例,由于  $\overrightarrow{M_0 M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ ,  $s = (m, n, p)$ ,从而有

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \quad (2)$$

反过来,如果点  $M$  不在直线  $L$  上,那么由于  $\overrightarrow{M_0 M}$  与  $s$  不平行,这两向量的对应坐标就不成比例.因此方程组(2)就是直线  $L$  的方程,叫做直线的对称式方程或点向式方程.

直线的任一方向向量  $s$  的坐标  $m, n, p$  叫做这直线的一组方向数,而向量  $s$  的方向余弦叫做该直线的方向余弦.

由直线的对称式方程容易导出直线的参数方程.如设

$$\begin{aligned} \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} &= t, \\ \text{那么} \quad \begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} & \end{aligned} \quad (3)$$

方程组(3)就是直线的参数方程.

例 1 用对称式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0, \\ 2x - y + 3z + 4 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

解 先找出这直线上的一点  $(x_0, y_0, z_0)$ .例如,可以取  $x_0 = 1$ ,代入方程组(4),得

$$\begin{cases} y + z = -2, \\ y - 3z = 6. \end{cases}$$

① 当  $m, n, p$  中有一个为零,例如  $m = 0$ ,而  $n, p \neq 0$  时,这方程组应理解为

$$\begin{cases} x - x_0 = 0, \\ \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}; \end{cases}$$

当  $m, n, p$  中有两个为零,例如  $m = n = 0$ ,而  $p \neq 0$  时,这方程组应理解为

$$\begin{cases} x - x_0 = 0, \\ y - y_0 = 0. \end{cases}$$

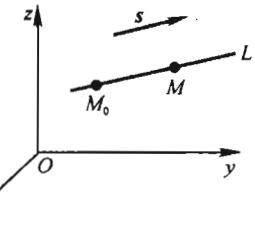


图 8-56

解这个二元一次方程组,得

$$y_0 = 0, z_0 = -2,$$

即 $(1, 0, -2)$ 是这直线上的一点.

下面再找出这直线的方向向量  $s$ . 由于两平面的交线与这两平面的法线向量  $n_1 = (1, 1, 1), n_2 = (2, -1, 3)$  都垂直, 所以可取

$$s = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 4i - j - 3k.$$

因此, 所给直线的对称式方程为

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{-3}.$$

令  $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{-3} = t$ ,

得所给直线的参数方程为

$$\begin{cases} x = 1 + 4t, \\ y = -t, \\ z = -2 - 3t. \end{cases}$$

### 三、两直线的夹角

两直线的方向向量的夹角(通常指锐角)叫做两直线的夹角.

设直线  $L_1$  和  $L_2$  的方向向量依次为  $s_1 = (m_1, n_1, p_1)$  和  $s_2 = (m_2, n_2, p_2)$ ,

那么  $L_1$  和  $L_2$  的夹角  $\varphi$  应是  $(\hat{s}_1, \hat{s}_2)$  和  $(-\hat{s}_1, \hat{s}_2) = \pi - (\hat{s}_1, \hat{s}_2)$  两者中的锐角,

因此  $\cos \varphi = |\cos(\hat{s}_1, \hat{s}_2)|$ . 按两向量的夹角的余弦公式, 直线  $L_1$  和直线  $L_2$  的夹角  $\varphi$  可由

$$\cos \varphi = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \quad (5)$$

来确定.

从两向量垂直、平行的充分必要条件立即推得下列结论:

两直线  $L_1, L_2$  互相垂直相当于  $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$ ;

两直线  $L_1, L_2$  互相平行或重合相当于  $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$ .

**例 2** 求直线  $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z+3}{1}$  和  $L_2: \frac{x}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{-1}$  的夹角.

解 直线  $L_1$  的方向向量为  $s_1 = (1, -4, 1)$ ; 直线  $L_2$  的方向向量为  $s_2 = (2, -2, -1)$ . 设直线  $L_1$  和  $L_2$  的夹角为  $\varphi$ , 那么由公式(5)有

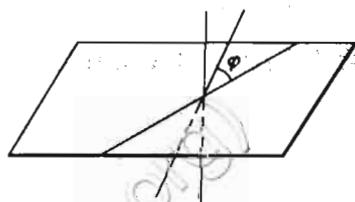
$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{|1 \times 2 + (-4) \times (-2) + 1 \times (-1)|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}},\end{aligned}$$

所以

$$\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

#### 四、直线与平面的夹角

当直线与平面不垂直时, 直线和它在平面上的投影直线的夹角  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) 称为直线与平面的夹角(图 8-57), 当直线与平面垂直时, 规定直线与平面的夹角为  $\frac{\pi}{2}$ .



设直线的方向向量为  $s = (m, n, p)$ , 平面的法线向量为  $n = (A, B, C)$ , 直线与平面的夹角为  $\varphi$ , 那么  $\varphi = \left| \frac{\pi}{2} - \hat{(s, n)} \right|$ , 因此  $\sin \varphi = |\cos(s, n)|$ .

图 8-57

按两向量夹角余弦的坐标表示式, 有

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \quad (6)$$

因为直线与平面垂直相当于直线的方向向量与平面的法线向量平行, 所以, 直线与平面垂直相当于

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \quad (7)$$

因为直线与平面平行或直线在平面上相当于直线的方向向量与平面的法线向量垂直, 所以, 直线与平面平行或直线在平面上相当于

$$Am + Bn + Cp = 0. \quad (8)$$

**例 3** 求过点  $(1, -2, 4)$  且与平面  $2x - 3y + z - 4 = 0$  垂直的直线的方程.

解 因为所求直线垂直于已知平面, 所以可以取已知平面的法线向量  $(2, -3, 1)$  作为所求直线的方向向量. 由此可得所求直线的方程为

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{1}.$$

## 五、杂例

例 4 求与两平面  $x - 4z = 3$  和  $2x - y - 5z = 1$  的交线平行且过点  $(-3, 2, 5)$  的直线的方程.

解法一 因为所求直线与两平面的交线平行, 也就是直线的方向向量  $s$  一定同时与两平面的法线向量  $n_1, n_2$  垂直, 所以可以取

$$s = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -(4i + 3j + k),$$

因此所求直线的方程为

$$\frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-5}{1}.$$

解法二 过点  $(-3, 2, 5)$  且与平面  $x - 4z = 3$  平行的平面的方程为

$$x - 4z = -23,$$

过点  $(-3, 2, 5)$  且与平面  $2x - y - 5z = 1$  平行的平面的方程为

$$2x - y - 5z = -33,$$

所求直线为上述两平面的交线, 故其方程为

$$\begin{cases} x - 4z = -23, \\ 2x - y - 5z = -33. \end{cases}$$

例 5 求直线  $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2}$  与平面  $2x + y + z - 6 = 0$  的交点.

解 所给直线的参数方程为

$$x = 2 + t, \quad y = 3 + t, \quad z = 4 + 2t,$$

代入平面方程中, 得

$$2(2+t) + (3+t) + (4+2t) - 6 = 0.$$

解上列方程, 得  $t = -1$ . 把求得的  $t$  值代入直线的参数方程中, 即得所求交点的坐标为

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 2.$$

例 6 求过点  $(2, 1, 3)$  且与直线  $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$  垂直相交的直线的方程.

解 先作一平面过点  $(2, 1, 3)$  且垂直于已知直线, 那么这平面的方程应为

$$3(x-2) + 2(y-1) - (z-3) = 0. \quad (9)$$

再求已知直线与这平面的交点. 已知直线的参数方程为

$$x = -1 + 3t, \quad y = 1 + 2t, \quad z = -t. \quad (10)$$

把(10)代入(9)中,求得  $t = \frac{3}{7}$ ,从而求得交点为  $\left(\frac{2}{7}, \frac{13}{7}, -\frac{3}{7}\right)$ .

以点  $(2, 1, 3)$  为起点,点  $\left(\frac{2}{7}, \frac{13}{7}, -\frac{3}{7}\right)$  为终点的向量

$$\left(\frac{2}{7} - 2, \frac{13}{7} - 1, -\frac{3}{7} - 3\right) = -\frac{6}{7}(2, -1, 4)$$

是所求直线的一个方向向量,故所求直线的方程为

$$\frac{x - 2}{2} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z - 3}{4}.$$

有时用平面束的方程解题比较方便,现在我们来介绍它的方程.

设直线  $L$  由方程组

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (12)$$

所确定,其中系数  $A_1, B_1, C_1$  与  $A_2, B_2, C_2$  不成比例. 我们建立三元一次方程

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 + \lambda(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0, \quad (13)$$

其中  $\lambda$  为任意常数. 因为  $A_1, B_1, C_1$  与  $A_2, B_2, C_2$  不成比例, 所以对于任何一个  $\lambda$  值, 方程(13)的系数:  $A_1 + \lambda A_2, B_1 + \lambda B_2, C_1 + \lambda C_2$  不全为零, 从而方程(13)表示一个平面, 若一点在直线  $L$  上, 则点的坐标必同时满足方程(11)和(12), 因而也满足方程(13), 故方程(13)表示通过直线  $L$  的平面, 且对应于不同的  $\lambda$  值, 方程(13)表示通过直线  $L$  的不同的平面. 反之, 通过直线  $L$  的任何平面(除平面(12)外)都包含在方程(13)所表示的一族平面内. 通过定直线的所有平面的全体称为平面束, 而方程(13)就作为通过直线  $L$  的平面束的方程(实际上, 方程(13)表示缺少平面(12)的平面束).

例 7 求直线  $\begin{cases} x + y - z - 1 = 0, \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$  在平面  $x + y + z = 0$  上的投影直线的方程.

解 过直线  $\begin{cases} x + y - z - 1 = 0, \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$  的平面束的方程为

$$(x + y - z - 1) + \lambda(x - y + z + 1) = 0,$$

$$\text{即 } (1 + \lambda)x + (1 - \lambda)y + (-1 + \lambda)z + (-1 + \lambda) = 0, \quad (14)$$

其中  $\lambda$  为待定常数. 这平面与平面  $x + y + z = 0$  垂直的条件是

$$(1 + \lambda) \cdot 1 + (1 - \lambda) \cdot 1 + (-1 + \lambda) \cdot 1 = 0,$$

$$\text{即 } \lambda + 1 = 0,$$

$$\text{由此得 } \lambda = -1.$$

代入(14)式, 得投影平面的方程为

$$2y - 2z - 2 = 0,$$

$$y - z - 1 = 0.$$

所以投影直线的方程为

$$\begin{cases} y - z - 1 = 0, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

### 习题 8-6

1. 求过点  $(4, -1, 3)$  且平行于直线  $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{5}$  的直线方程.

2. 求过两点  $M_1(3, -2, 1)$  和  $M_2(-1, 0, 2)$  的直线方程.

3. 用对称式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases} x - y + z = 1, \\ 2x + y + z = 4. \end{cases}$$

4. 求过点  $(2, 0, -3)$  且与直线

$$\begin{cases} x - 2y + 4z - 7 = 0, \\ 3x + 5y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

垂直的平面方程.

5. 求直线  $\begin{cases} 5x - 3y + 3z - 9 = 0, \\ 3x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$  与直线  $\begin{cases} 2x + 2y - z + 2\lambda = 0, \\ 3x + 8y + z - 18 = 0 \end{cases}$  的夹角的余弦.

6. 证明直线  $\begin{cases} x + 2y - z = 7, \\ -2x + y + z = 7 \end{cases}$  与直线  $\begin{cases} 3x + 6y - 3z = 8, \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$  平行.

7. 求过点  $(0, 2, 4)$  且与两平面  $x + 2z = 1$  和  $y - 3z = 2$  平行的直线方程.

8. 求过点  $(3, 1, -2)$  且通过直线  $\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$  的平面方程.

9. 求直线  $\begin{cases} x + y + 3z = 0, \\ x - y - z = 0 \end{cases}$  与平面  $x - y - z + 1 = 0$  的夹角.

10. 试确定下列各组中的直线和平面间的关系:

(1)  $\frac{x+3}{-2} = \frac{y+4}{-7} = \frac{z}{3}$  和  $4x - 2y - 2z = 3$ ;

(2)  $\frac{x}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{7}$  和  $3x - 2y + 7z = 8$ ;

(3)  $\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-4}$  和  $x + y + z = 3$ .

11. 求过点  $(1, 2, 1)$  而与两直线

$$\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0, \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

平行的平面的方程.

12. 求点  $(-1, 2, 0)$  在平面  $x + 2y - z + 1 = 0$  上的投影.

13. 求点  $P(3, -1, 2)$  到直线  $\begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ 2x + y + z - 4 = 0 \end{cases}$  的距离.

14. 设  $M_0$  是直线  $L$  外一点,  $M$  是直线  $L$  上任意一点, 且直线的方向向量为  $s$ , 试证: 点  $M_0$  到直线  $L$  的距离

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0 M} \times s|}{|s|}.$$

15. 求直线  $\begin{cases} 2x - 4y + z = 0, \\ 3x - y - 2z - 9 = 0 \end{cases}$  在平面  $4x - y + z = 1$  上的投影直线的方程.

16. 画出下列各曲面所围成的立体的图形:

$$(1) x = 0, y = 0, z = 0, x = 2, y = 1, 3x + 4y + 2z - 12 = 0;$$

$$(2) x = 0, z = 0, x = 1, y = 2, z = \frac{y}{4};$$

$$(3) z = 0, z = 3, x - y = 0, x - \sqrt{3}y = 0, x^2 + y^2 = 1 \text{ (在第一卦限内);}$$

$$(4) x = 0, y = 0, z = 0, x^2 + y^2 = R^2, y^2 + z^2 = R^2 \text{ (在第一卦限内).}$$

## 总习题八

1. 填空:

(1) 设在坐标系  $[O; i, j, k]$  中点  $A$  和点  $M$  的坐标依次为  $(x_0, y_0, z_0)$  和  $(x, y, z)$ , 则在  $[A; i, j, k]$  坐标系中, 点  $M$  的坐标为 \_\_\_\_\_, 向量  $\overrightarrow{OM}$  的坐标为 \_\_\_\_\_;

(2) 设数  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  不全为 0, 使  $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = \mathbf{0}$ , 则  $a, b, c$  三个向量是 \_\_\_\_\_ 的;

(3) 设  $a = (2, 1, 2), b = (4, -1, 10), c = b - \lambda a$ , 且  $a \perp c$ , 则  $\lambda =$  \_\_\_\_\_;

(4) 设  $|a| = 3, |b| = 4, |c| = 5$ , 且满足  $a + b + c = \mathbf{0}$ , 则  $|a \times b + b \times c + c \times a| =$  \_\_\_\_\_.

2. 在  $y$  轴上求与点  $A(1, -3, 7)$  和点  $B(5, 7, -5)$  等距离的点.

3. 已知  $\triangle ABC$  的顶点为  $A(3, 2, -1), B(5, -4, 7)$  和  $C(-1, 1, 2)$ , 求从顶点  $C$  所引中线的长度.

4. 设  $\triangle ABC$  的三边  $\overrightarrow{BC} = a, \overrightarrow{CA} = b, \overrightarrow{AB} = c$ , 三边中点依次为  $D, E, F$ , 试用向量  $a, b, c$  表示  $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF}$ , 并证明

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \mathbf{0}.$$

5. 试用向量证明三角形两边中点的连线平行于第三边, 且其长度等于第三边长度的一半.

6. 设  $|a + b| = |a - b|, a = (3, -5, 8), b = (-1, 1, z)$ , 求  $z$ .

7. 设  $|a| = \sqrt{3}, |b| = 1, \hat{(a, b)} = \frac{\pi}{6}$ , 求向量  $a + b$  与  $a - b$  的夹角.

8. 设  $a + 3b \perp 7a - 5b, a - 4b \perp 7a - 2b$ , 求  $\hat{(a, b)}$ .

9. 设  $a = (2, -1, -2), b = (1, 1, z)$ , 问  $z$  为何值时  $(a, b)$  最小? 并求出此最小值.

10. 设  $|a|=4$ ,  $|b|=3$ ,  $\hat{a}, b = \frac{\pi}{6}$ , 求以  $a+2b$  和  $a-3b$  为边的平行四边形的面积.

11. 设  $a=(2, -3, 1)$ ,  $b=(1, -2, 3)$ ,  $c=(2, 1, 2)$ , 向量  $r$  满足  $r \perp a$ ,  $r \perp b$ ,  $\text{Proj}_c r = 14$ , 求  $r$ .

12. 设  $a=(-1, 3, 2)$ ,  $b=(2, -3, -4)$ ,  $c=(-3, 12, 6)$ , 证明三向量  $a, b, c$  共面, 并用  $a$  和  $b$  表示  $c$ .

13. 已知动点  $M(x, y, z)$  到  $xOy$  平面的距离与点  $M$  到点  $(1, -1, 2)$  的距离相等, 求点  $M$  的轨迹的方程.

14. 指出下列旋转曲面的一条母线和旋转轴:

$$(1) z=2(x^2+y^2);$$

$$(2) \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=1;$$

$$(3) z^2=3(x^2+y^2);$$

$$(4) x^2-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}=1.$$

15. 求通过点  $A(3, 0, 0)$  和  $B(0, 0, 1)$  且与  $xOy$  面成  $\frac{\pi}{3}$  角的平面的方程.

16. 设一平面垂直于平面  $z=0$ , 并通过从点  $(1, -1, 1)$  到直线  $\begin{cases} y-z+1=0 \\ x=0 \end{cases}$  的垂线, 求此平面的方程.

17. 求过点  $(-1, 0, 4)$ , 且平行于平面  $3x+4y+z-10=0$ , 又与直线  $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$  相交的直线的方程.

18. 已知点  $A(1, 0, 0)$  及点  $B(0, 2, 1)$ , 试在  $z$  轴上求一点  $C$ , 使  $\triangle ABC$  的面积最小.

19. 求曲线  $\begin{cases} z=2-x^2-y^2, \\ z=(x-1)^2+(y-1)^2 \end{cases}$  在三个坐标面上的投影曲线的方程.

20. 求锥面  $z=\sqrt{x^2+y^2}$  与柱面  $z^2=2x$  所围立体在三个坐标面上的投影.

21. 画出下列各曲面所围立体的图形:

(1) 抛物柱面  $2y^2=x$ , 平面  $z=0$  及  $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$ ;

(2) 抛物柱面  $x^2=1-z$ , 平面  $y=0$ ,  $z=0$  及  $x+y=1$ ;

(3) 圆锥面  $z=\sqrt{x^2+y^2}$  及旋转抛物面  $z=2-x^2-y^2$ ;

(4) 旋转抛物面  $x^2+y^2=z$ , 柱面  $y^2=x$ , 平面  $z=0$  及  $x=1$ .

# 第九章 多元函数微分法及其应用

上册中我们讨论的函数都只有一个自变量,这种函数叫做一元函数.但在很多实际问题中往往牵涉到多方面的因素,反映到数学上,就是一个变量依赖于多个变量的情形.这就提出了多元函数以及多元函数的微分和积分问题.本章将在一元函数微分学的基础上,讨论多元函数的微分法及其应用.讨论中我们以二元函数为主,因为从一元函数到二元函数会产生新的问题,而从二元函数到二元以上的多元函数则可以类推.

## 第一节 多元函数的基本概念

### 一、平面点集 \* $n$ 维空间

在讨论一元函数时,一些概念、理论和方法,都是基于  $\mathbf{R}^1$  中的点集、两点间的距离、区间和邻域等概念.为了将一元函数微积分推广到多元的情形,首先需要将上述一些概念加以推广,同时还需涉及一些其他概念.为此先引入平面点集的一些基本概念,将有关概念从  $\mathbf{R}^1$  中的情形推广到  $\mathbf{R}^2$  中;然后引入  $n$  维空间,以便推广到一般的  $\mathbf{R}^n$  中.

#### 1. 平面点集

由平面解析几何知道,当在平面上引入了一个直角坐标系后,平面上的点  $P$  与有序二元实数组  $(x, y)$  之间就建立了一一对应.于是,我们常把有序实数组  $(x, y)$  与平面上的点  $P$  视作是等同的.这种建立了坐标系的平面称为坐标平面.二元有序实数组  $(x, y)$  的全体,即  $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}\}$  就表示坐标平面.

坐标平面上具有某种性质  $P$  的点的集合,称为平面点集,记作

$$E = \{(x, y) | (x, y) \text{ 具有性质 } P\}.$$

例如,平面上以原点为中心、 $r$  为半径的圆内所有点的集合是

$$C = \{(x, y) | x^2 + y^2 < r^2\}.$$

如果以点  $P$  表示  $(x, y)$ ,  $|OP|$  表示点  $P$  到原点  $O$  的距离,那么集合  $C$  也可表示成

$$C = \{P | |OP| < r\}.$$

现在我们来引入  $\mathbf{R}^2$  中邻域的概念.

设  $P_0(x_0, y_0)$  是  $xOy$  平面上的一个点,  $\delta$  是某一正数. 与点  $P_0(x_0, y_0)$  距离小于  $\delta$  的点  $P(x, y)$  的全体, 称为点  $P_0$  的  $\delta$  邻域, 记作  $U(P_0, \delta)$ , 即

$$U(P_0, \delta) = \{P \mid |PP_0| < \delta\},$$

也就是

$$U(P_0, \delta) = \{(x, y) \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}.$$

点  $P_0$  的去心  $\delta$  邻域, 记作  $\overset{\circ}{U}(P_0, \delta)$ , 即

$$\overset{\circ}{U}(P_0, \delta) = \{P \mid 0 < |PP_0| < \delta\}.$$

在几何上,  $U(P_0, \delta)$  就是  $xOy$  平面上以点  $P_0(x_0, y_0)$  为中心,  $\delta > 0$  为半径的圆内部的点  $P(x, y)$  的全体.

如果不需要强调邻域的半径  $\delta$ , 则用  $U(P_0)$  表示点  $P_0$  的某个邻域, 点  $P_0$  的去心邻域记作  $\overset{\circ}{U}(P_0)$ .

下面利用邻域来描述点和点集之间的关系.

任意一点  $P \in \mathbf{R}^2$  与任意一个点集  $E \subset \mathbf{R}^2$  之间必有以下三种关系中的一种:

(1) 内点: 如果存在点  $P$  的某个邻域  $U(P)$ , 使得  $U(P) \subset E$ , 则称  $P$  为  $E$  的内点(如图 9-1 中,  $P_1$  为  $E$  的内点);

(2) 外点: 如果存在点  $P$  的某个邻域  $U(P)$ , 使得  $U(P) \cap E = \emptyset$ , 则称  $P$  为  $E$  的外点(如图 9-1 中,  $P_2$  为  $E$  的外点);

(3) 边界点: 如果点  $P$  的任一邻域内既含有属于  $E$  的点, 又含有不属于  $E$  的点, 则称  $P$  为  $E$  的边界点(如图 9-1 中,  $P_3$  为  $E$  的边界点).

$E$  的边界点的全体, 称为  $E$  的边界, 记作  $\partial E$ .

$E$  的内点必属于  $E$ ;  $E$  的外点必定不属于  $E$ ; 而  $E$  的边界点可能属于  $E$ , 也可能不属于  $E$ .

图 9-1

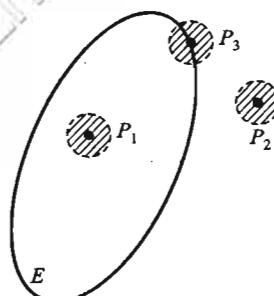
任意一点  $P$  与一个点集  $E$  之间除了上述三种关系之外, 还有另一种关系, 这就是下面定义的聚点.

聚点: 如果对于任意给定的  $\delta > 0$ , 点  $P$  的去心邻域  $\overset{\circ}{U}(P, \delta)$  内总有  $E$  中的点, 则称  $P$  是  $E$  的聚点.

由聚点的定义可知, 点集  $E$  的聚点  $P$  本身, 可以属于  $E$ , 也可以不属于  $E$ .

例如, 设平面点集

$$E = \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}.$$



满足  $1 < x^2 + y^2 < 2$  的一切点  $(x, y)$  都是  $E$  的内点; 满足  $x^2 + y^2 = 1$  的一切点  $(x, y)$  都是  $E$  的边界点, 它们都不属于  $E$ ; 满足  $x^2 + y^2 = 2$  的一切点  $(x, y)$  也是  $E$  的边界点, 它们都属于  $E$ ; 点集  $E$  以及它的边界  $\partial E$  上的一切点都是  $E$  的聚点.

根据点集所属点的特征, 再来定义一些重要的平面点集.

开集: 如果点集  $E$  的点都是  $E$  的内点, 则称  $E$  为开集.

闭集: 如果点集  $E$  的边界  $\partial E \subset E$ , 则称  $E$  为闭集.

例如, 集合  $\{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 < 2\}$  是开集; 集合  $\{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$  是闭集; 而集合  $\{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}$  既非开集, 也非闭集.

连通集: 如果点集  $E$  内任何两点, 都可用折线联结起来, 且该折线上的点都属于  $E$ , 则称  $E$  为连通集.

区域(或开区域): 连通的开集称为区域或开区域.

闭区域: 开区域连同它的边界一起所构成的点集称为闭区域.

例如, 集合  $\{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 < 2\}$  是区域; 而集合  $\{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$  是闭区域.

有界集: 对于平面点集  $E$ , 如果存在某一正数  $r$ , 使得

$$E \subset U(O, r),$$

其中  $O$  是坐标原点, 则称  $E$  为有界集.

无界集: 一个集合如果不是有界集, 就称这集合为无界集.

例如, 集合  $\{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$  是有界闭区域; 集合  $\{(x, y) | x + y > 0\}$  是无界开区域, 集合  $\{(x, y) | x + y \geq 0\}$  是无界闭区域.

## 2. $n$ 维空间

设  $n$  为取定的一个正整数, 我们用  $\mathbf{R}^n$  表示  $n$  元有序实数组  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的全体所构成的集合, 即

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

$\mathbf{R}^n$  中的元素  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  有时也用单个字母  $x$  来表示, 即  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . 当所有的  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 都为零时, 称这样的元素为  $\mathbf{R}^n$  中的零元, 记为  $\mathbf{0}$  或  $O$ . 在解析几何中, 通过直角坐标系,  $\mathbf{R}^2$  (或  $\mathbf{R}^3$ ) 中的元素分别与平面(或空间)中的点或向量建立一一对应, 因而  $\mathbf{R}^n$  中的元素  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  也称为  $\mathbf{R}^n$  中的一个点或一个  $n$  维向量,  $x_i$  称为点  $x$  的第  $i$  个坐标或  $n$  维向量  $x$  的第  $i$  个分量. 特别地,  $\mathbf{R}^n$  中的零元  $\mathbf{0}$  称为  $\mathbf{R}^n$  中的坐标原点或  $n$  维零向量.

为了在集合  $\mathbf{R}^n$  中的元素之间建立联系, 在  $\mathbf{R}^n$  中定义线性运算如下:

设  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  为  $\mathbf{R}^n$  中任意两个元素,  $\lambda \in \mathbf{R}$ , 规定

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

这样定义了线性运算的集合  $\mathbf{R}^n$  称为  $n$  维空间.

$\mathbf{R}^n$  中点  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  和点  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  间的距离, 记作  $\rho(x, y)$ , 规定

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

显然,  $n=1, 2, 3$  时, 上述规定与数轴上、直角坐标系下平面及空间中两点间的距离一致.

$\mathbf{R}^n$  中元素  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  与零元  $\mathbf{0}$  之间的距离  $\rho(x, \mathbf{0})$  记作  $\|x\|$  (在  $\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3$  中, 通常将  $\|x\|$  记作  $|x|$ ), 即

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

采用这一记号, 结合向量的线性运算, 便得

$$\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \rho(x, y).$$

在  $n$  维空间  $\mathbf{R}^n$  中定义了距离以后, 就可以定义  $\mathbf{R}^n$  中变元的极限:

设  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ .

如果

$$\|x - a\| \rightarrow 0,$$

则称变元  $x$  在  $\mathbf{R}^n$  中趋于固定元  $a$ , 记作  $x \rightarrow a$ .

显然,

$$x \rightarrow a \Leftrightarrow x_1 \rightarrow a_1, x_2 \rightarrow a_2, \dots, x_n \rightarrow a_n.$$

在  $\mathbf{R}^n$  中线性运算和距离的引入, 使得前面讨论过的有关平面点集的一系列概念, 可以方便地引入到  $n$  ( $n \geq 3$ ) 维空间中来, 例如,

设  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ ,  $\delta$  是某一正数, 则  $n$  维空间内的点集

$$U(a, \delta) = \{x \mid x \in \mathbf{R}^n, \rho(x, a) < \delta\}$$

就定义为  $\mathbf{R}^n$  中点  $a$  的  $\delta$  邻域. 以邻域为基础, 可以定义点集的内点、外点、边界点和聚点以及开集、闭集、区域等一系列概念. 这里不再赘述.

## 二、多元函数概念

在很多自然现象以及实际问题中, 经常会遇到多个变量之间的依赖关系, 举例如下:

例 1 圆柱体的体积  $V$  和它的底半径  $r$ 、高  $h$  之间具有关系

$$V = \pi r^2 h.$$

这里,当  $r, h$  在集合  $\{(r, h) | r > 0, h > 0\}$  内取定一对值  $(r, h)$  时,  $V$  的对应值就随之确定.

例 2 一定量的理想气体的压强  $p$ 、体积  $V$  和绝对温度  $T$  之间具有关系

$$p = \frac{RT}{V},$$

其中  $R$  为常数. 这里, 当  $V, T$  在集合  $\{(V, T) | V > 0, T > T_0\}$  内取定一对值  $(V, T)$  时,  $p$  的对应值就随之确定.

例 3 设  $R$  是电阻  $R_1, R_2$  并联后的总电阻, 由电学知道, 它们之间具有关系

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

这里, 当  $R_1, R_2$  在集合  $\{(R_1, R_2) | R_1 > 0, R_2 > 0\}$  内取定一对值  $(R_1, R_2)$  时,  $R$  的对应值就随之确定.

上面三个例子的具体意义虽各不相同, 但它们却有共同的性质, 抽出这些共性就可得出以下二元函数的定义.

定义 1 设  $D$  是  $\mathbb{R}^2$  的一个非空子集, 称映射  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  为定义在  $D$  上的二元函数, 通常记为

$$z = f(x, y), (x, y) \in D$$

或

$$z = f(P), P \in D,$$

其中点集  $D$  称为该函数的定义域,  $x, y$  称为自变量,  $z$  称为因变量.

上述定义中, 与自变量  $x, y$  的一对值(即二元有序实数组)  $(x, y)$  相对应的因变量  $z$  的值, 也称为  $f$  在点  $(x, y)$  处的函数值, 记作  $f(x, y)$ , 即  $z = f(x, y)$ . 函数值  $f(x, y)$  的全体所构成的集合称为函数  $f$  的值域, 记作  $f(D)$ , 即

$$f(D) = \{z | z = f(x, y), (x, y) \in D\}.$$

与一元函数的情形相仿, 记号  $f$  与  $f(x, y)$  的意义是有区别的, 但习惯上常用记号 " $f(x, y), (x, y) \in D$ " 或 " $z = f(x, y), (x, y) \in D$ " 来表示  $D$  上的二元函数  $f$ . 表示二元函数的记号  $f$  也是可以任意选取的, 例如也可以记为  $z = \varphi(x, y), z = \psi(x, y)$  等.

类似地可以定义三元函数  $u = f(x, y, z), (x, y, z) \in D$  以及三元以上的函数. 一般地, 把定义 1 中的平面点集  $D$  换成  $n$  维空间  $\mathbb{R}^n$  内的点集  $D$ , 映射  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  就称为定义在  $D$  上的  $n$  元函数, 通常记为

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n), (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D,$$

或简记为

$$u = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D,$$

也可记为

$$u = f(P), P(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D.$$

在  $n=2$  或  $3$  时, 习惯上将点  $(x_1, x_2)$  与点  $(x_1, x_2, x_3)$  分别写成  $(x, y)$  与  $(x, y, z)$ . 这时, 若用字母表示  $\mathbf{R}^2$  或  $\mathbf{R}^3$  中的点, 即写成  $P(x, y)$  或  $M(x, y, z)$ , 则相应的二元函数及三元函数也可简记为  $z = f(P)$  及  $u = f(M)$ .

当  $n=1$  时,  $n$  元函数就是一元函数. 当  $n \geq 2$  时,  $n$  元函数统称为多元函数.

关于多元函数的定义域, 与一元函数相类似, 我们作如下约定: 在一般地讨论用算式表达的多元函数  $u = f(x)$  时, 就以使这个算式有意义的变元  $x$  的值所组成的点集为这个多元函数的自然定义域. 因而, 对这类函数, 它的定义域不再特别标出. 例如, 函数  $z = \ln(x+y)$  的定义域为

$$\{(x, y) | x+y > 0\}$$

(图 9-2), 这是一个无界开区域. 又如, 函数  $z = \arcsin(x^2 + y^2)$  的定义域为

$$\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$$

(图 9-3), 这是一个有界闭区域.

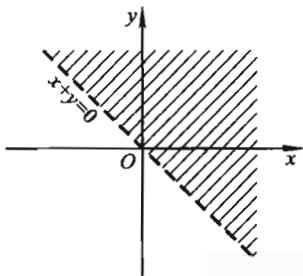


图 9-2

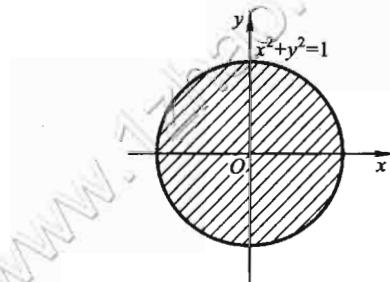


图 9-3

设函数  $z = f(x, y)$  的定义域为  $D$ . 对于任意取定的点  $P(x, y) \in D$ , 对应的函数值为  $z = f(x, y)$ , 这样, 以  $x$  为横坐标、 $y$  为纵坐标、 $z = f(x, y)$  为竖坐标在空间就确定一点  $M(x, y, z)$ . 当  $(x, y)$  遍取  $D$  上的一切点时, 得到一个空间点集

$$\{(x, y, z) | z = f(x, y), (x, y) \in D\},$$

这个点集称为二元函数  $z = f(x, y)$  的图形(图9-4). 通常我们也说二元函数的图形是一张曲面.

例如, 由空间解析几何知道, 线性函数  $z = ax + by + c$  的图形是一张平面, 而函数  $z = x^2 + y^2$  的图形是旋转抛物面.

### 三、多元函数的极限

先讨论二元函数  $z = f(x, y)$  当  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ , 即  $P(x, y) \rightarrow P_0(x_0, y_0)$  时的极限.

这里  $P \rightarrow P_0$  表示点  $P$  以任何方式趋于点  $P_0$ , 也就是点  $P$  与点  $P_0$  间的距离趋于零, 即

$$|PP_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \rightarrow 0.$$

与一元函数的极限概念类似, 如果在  $P(x, y) \rightarrow P_0(x_0, y_0)$  的过程中, 对应的函数值  $f(x, y)$  无限接近于一个确定的常数  $A$ , 就说  $A$  是函数  $f(x, y)$  当  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$  时的极限. 下面用“ $\epsilon - \delta$ ”语言描述这个极限概念.

**定义 2** 设二元函数  $f(P) = f(x, y)$  的定义域为  $D$ ,  $P_0(x_0, y_0)$  是  $D$  的聚点. 如果存在常数  $A$ , 对于任意给定的正数  $\epsilon$ , 总存在正数  $\delta$ , 使得当点  $P(x, y) \in D \cap \dot{U}(P_0, \delta)$  时, 都有

$$|f(P) - A| = |f(x, y) - A| < \epsilon$$

成立, 那么就称常数  $A$  为函数  $f(x, y)$  当  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$  时的极限, 记作

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A \quad \text{或} \quad f(x, y) \rightarrow A \quad ((x, y) \rightarrow (x_0, y_0)),$$

也记作

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A \quad \text{或} \quad f(P) \rightarrow A \quad (P \rightarrow P_0).$$

为了区别于一元函数的极限, 我们把二元函数的极限叫做二重极限.

**例 4** 设  $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$ ,

求证:  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$ .

**证** 这里函数  $f(x, y)$  的定义域为  $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , 点  $O(0, 0)$  为  $D$  的聚点. 因为

$$|f(x, y) - 0| = \left| (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leqslant x^2 + y^2,$$

可见,  $\forall \epsilon > 0$ , 取  $\delta = \sqrt{\epsilon}$ , 则当

$$0 < \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} < \delta,$$

即  $P(x, y) \in D \cap \dot{U}(O, \delta)$  时, 总有

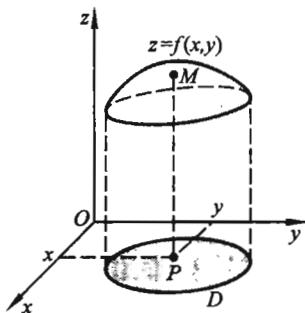


图 9-4

$$|f(x, y) - 0| < \epsilon$$

成立, 所以

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0.$$

必须注意, 所谓二重极限存在, 是指  $P(x, y)$  以任何方式趋于  $P_0(x_0, y_0)$  时,  $f(x, y)$  都无限接近于  $A$ . 因此, 如果  $P(x, y)$  以某一特殊方式, 例如沿着一条定直线或定曲线趋于  $P_0(x_0, y_0)$  时, 即使  $f(x, y)$  无限接近于某一确定值, 我们还不能由此断定函数的极限存在. 但是反过来, 如果当  $P(x, y)$  以不同方式趋于  $P_0(x_0, y_0)$  时,  $f(x, y)$  趋于不同的值, 那么就可以断定这函数的极限不存在. 下面用例子来说明这种情形.

考察函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

显然, 当点  $P(x, y)$  沿  $x$  轴趋于点  $(0, 0)$  时,

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ y=0}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0;$$

又当点  $P(x, y)$  沿  $y$  轴趋于点  $(0, 0)$  时,

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ x=0}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

虽然点  $P(x, y)$  以上述两种特殊方式(沿  $x$  轴或沿  $y$  轴)趋于原点时函数的极限存在并且相等, 但是  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  并不存在. 这是因为当点  $P(x, y)$  沿着直线  $y = kx$  趋于点  $(0, 0)$  时, 有

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ y=kx}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{k}{1+k^2},$$

显然它是随着  $k$  的值的不同而改变的.

以上关于二元函数的极限概念, 可相应地推广到  $n$  元函数  $u = f(P)$ , 即  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  上去.

关于多元函数的极限运算, 有与一元函数类似的运算法则.

**例 5** 求  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 2)} \frac{\sin(xy)}{x}$ .

解 这里函数  $\frac{\sin(xy)}{x}$  的定义域为  $D = \{(x, y) | x \neq 0, y \in \mathbb{R}\}$ ,  $P_0(0, 2)$  为  $D$

的聚点.

由积的极限运算法则, 得

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 2)} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 2)} \left[ \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y \right] = \lim_{xy \rightarrow 0} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim_{y \rightarrow 2} y$$

$$= 1 \cdot 2 = 2.$$

#### 四、多元函数的连续性

明白了函数极限的概念,就不难说明多元函数的连续性.

**定义 3** 设二元函数  $f(P) = f(x, y)$  的定义域为  $D$ ,  $P_0(x_0, y_0)$  为  $D$  的聚点,且  $P_0 \in D$ . 如果

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

则称函数  $f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  连续.

设函数  $f(x, y)$  在  $D$  上有定义,  $D$  内的每一点都是函数定义域的聚点. 如果函数  $f(x, y)$  在  $D$  的每一点都连续,那么就称函数  $f(x, y)$  在  $D$  上连续,或者称  $f(x, y)$  是  $D$  上的连续函数.

以上关于二元函数的连续性概念,可相应地推广到  $n$  元函数  $f(P)$  上去.

下面,我们把一元基本初等函数看成二元函数(即另一个自变量不出现)的特例,来讨论它的连续性.先看一个例子.

**例 6** 设  $f(x, y) = \sin x$ , 证明  $f(x, y)$  是  $\mathbf{R}^2$  上的连续函数.

**证** 设  $P_0(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ .  $\forall \epsilon > 0$ , 由于  $\sin x$  在  $x_0$  处连续,故  $\exists \delta > 0$ , 当  $|x - x_0| < \delta$  时,有

$$|\sin x - \sin x_0| < \epsilon.$$

以上述  $\delta$  作  $P_0$  的  $\delta$  邻域  $U(P_0, \delta)$ , 则当  $P(x, y) \in U(P_0, \delta)$  时,显然

$$|x - x_0| \leq \rho(P, P_0) < \delta,$$

从而

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |\sin x - \sin x_0| < \epsilon,$$

即  $f(x, y) = \sin x$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  连续. 由  $P_0$  的任意性知,  $\sin x$  作为  $x, y$  的二元函数在  $\mathbf{R}^2$  上连续.

类似的讨论可知,一元基本初等函数看成二元函数或二元以上的多元函数时,它们在各自的定义域内都是连续的.

**定义 4** 设函数  $f(x, y)$  的定义域为  $D$ ,  $P_0(x_0, y_0)$  是  $D$  的聚点. 如果函数  $f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  不连续,则称  $P_0(x_0, y_0)$  为函数  $f(x, y)$  的间断点.

例如,前面讨论过的函数

$$f(x, y) = \begin{cases} xy, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ x^2 + y^2, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

其定义域  $D = \mathbf{R}^2$ ,  $O(0, 0)$  是  $D$  的聚点.  $f(x, y)$  当  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  时的极限不存在.

在,所以点  $O(0,0)$ 是该函数的一个间断点;又如函数

$$f(x,y) = \sin \frac{1}{x^2 + y^2 - 1},$$

其定义域为

$$D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \neq 1\},$$

圆周  $C = \{(x,y) | x^2 + y^2 = 1\}$ 上的点都是  $D$  的聚点,而  $f(x,y)$  在  $C$  上没有定义,当然  $f(x,y)$  在  $C$  上各点都不连续,所以圆周  $C$  上各点都是该函数的间断点.

前面已经指出:一元函数中关于极限的运算法则,对于多元函数仍然适用.根据多元函数的极限运算法则,可以证明多元连续函数的和、差、积仍为连续函数;连续函数的商在分母不为零处仍连续;多元连续函数的复合函数也是连续函数.

与一元初等函数相类似,多元初等函数是指可用一个式子表示的多元函数,这个式子是由常数及具有不同自变量的一元基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算而得到的.例如,  $\frac{x+x^2-y^2}{1+y^2}$ ,  $\sin(x+y)$ ,  $e^{x^2+y^2+z^2}$  等都是多元初等函数.

根据上面指出的连续函数的和、差、积、商的连续性以及连续函数的复合函数的连续性,再利用基本初等函数的连续性,我们进一步可以得出如下结论:

一切多元初等函数在其定义区域内是连续的.所谓定义区域是指包含在定义域内的区域或闭区域.

由多元初等函数的连续性,如果要求它在点  $P_0$  处的极限,而该点又在此函数的定义区域内,则极限值就是函数在该点的函数值,即

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0).$$

例 7 求  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{x+y}{xy}$

解 函数  $f(x,y) = \frac{x+y}{xy}$  是初等函数,它的定义域为

$$D = \{(x,y) | x \neq 0, y \neq 0\}.$$

$P_0(1,2)$  为  $D$  的内点,故存在  $P_0$  的某一邻域  $U(P_0) \subset D$ ,而任何邻域都是区域,所以  $U(P_0)$  是  $f(x,y)$  的一个定义区域,因此

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{x+y}{xy} = f(1,2) = \frac{3}{2}.$$

一般地,求  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$  时,如果  $f(P)$  是初等函数,且  $P_0$  是  $f(P)$  的定义域的内点,则  $f(P)$  在点  $P_0$  处连续,于是

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0).$$

例 8 求  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$ .

$$\begin{aligned}\text{解 } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy+1-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{\sqrt{xy+1}+1} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

以上运算的最后一步用到了二元函数  $\frac{1}{\sqrt{xy+1}+1}$  在点  $(0,0)$  的连续性.

与闭区间上一元连续函数的性质相类似, 在有界闭区域上连续的多元函数具有如下性质.

**性质 1(有界性与最大值最小值定理)** 在有界闭区域  $D$  上的多元连续函数, 必定在  $D$  上有界, 且能取得它的最大值和最小值.

性质 1 就是说, 若  $f(P)$  在有界闭区域  $D$  上连续, 则必定存在常数  $M > 0$ , 使得对一切  $P \in D$ , 有  $|f(P)| \leq M$ ; 且存在  $P_1, P_2 \in D$ , 使得

$$f(P_1) = \max\{f(P) | P \in D\}, f(P_2) = \min\{f(P) | P \in D\}.$$

**性质 2(介值定理)** 在有界闭区域  $D$  上的多元连续函数必取得介于最大值和最小值之间的任何值.

**性质 3(一致连续性定理)** 在有界闭区域  $D$  上的多元连续函数必定在  $D$  上一致连续.

性质 3 就是说, 若  $f(P)$  在有界闭区域  $D$  上连续, 则对于任意给定的正数  $\epsilon$ , 总存在正数  $\delta$ , 使得对于  $D$  上的任意两点  $P_1, P_2$ , 只要当  $|P_1 P_2| < \delta$  时, 都有

$$|f(P_1) - f(P_2)| < \epsilon$$

成立.

## 习题 9-1

1. 判定下列平面点集中哪些是开集、闭集、区域、有界集、无界集? 并分别指出它们的聚点所成的点集(称为导集)和边界.

$$(1) \{(x, y) | x \neq 0, y \neq 0\}; \quad (2) \{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 \leq 4\};$$

$$(3) \{(x, y) | y > x^2\};$$

$$(4) \{(x, y) | x^2 + (y-1)^2 \geq 1\} \cap \{(x, y) | x^2 + (y-2)^2 \leq 4\}.$$

$$2. \text{ 已知函数 } f(x, y) = x^2 + y^2 + x \tan \frac{x}{y}, \text{ 试求 } f(tx, ty).$$

$$3. \text{ 试证函数 } F(x, y) = \ln x \cdot \ln y \text{ 满足关系式}$$

$$F(xy, uv) = F(x, u) + F(x, v) + F(y, u) + F(y, v).$$

4. 已知函数  $f(u, v, w) = u^w + w^{u+v}$ , 试求  $f(x+y, x-y, xy)$ .

5. 求下列各函数的定义域:

$$(1) z = \ln(y^2 - 2x + 1);$$

$$(2) z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}};$$

$$(3) z = \sqrt{x - \sqrt{y}};$$

$$(4) z = \ln(y-x) + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}};$$

$$(5) u = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - r^2}} \quad (R > r > 0);$$

$$(6) u = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

6. 求下列各极限:

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{1-xy}{x^2+y^2};$$

$$(2) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$(3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2 - \sqrt{xy+4}}{xy};$$

$$(4) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}}-1};$$

$$(5) \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{\tan(xy)}{y};$$

$$(6) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2+y^2}}.$$

7. 证明下列极限不存在:

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y};$$

$$(2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}.$$

8. 函数  $z = \frac{y^2+2x}{y^2-2x}$  在何处是间断的?

9. 证明  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ .

10. 设  $F(x, y) = f(x)$ ,  $f(x)$  在  $x_0$  处连续, 证明: 对任意  $y_0 \in \mathbb{R}$ ,  $F(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  处连续.

## 第一节 偏 导 数

### 一、偏导数的定义及其计算法

在研究一元函数时, 我们从研究函数的变化率引入了导数概念. 对于多元函数同样需要讨论它的变化率. 但多元函数的自变量不止一个, 因变量与自变量的关系要比一元函数复杂得多. 在这一节里, 我们首先考虑多元函数关于其中一个自变量的变化率. 以二元函数  $z = f(x, y)$  为例, 如果只有自变量  $x$  变化, 而自变量  $y$  固定(即看做常量), 这时它就是  $x$  的一元函数, 这函数对  $x$  的导数, 就称为

二元函数  $z = f(x, y)$  对于  $x$  的偏导数, 即有如下定义:

定义 设函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的某一邻域内有定义, 当  $y$  固定在  $y_0$  而  $x$  在  $x_0$  处有增量  $\Delta x$  时, 相应的函数有增量

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

如果

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}, \quad (1)$$

存在, 则称此极限为函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处对  $x$  的偏导数, 记作

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, z_x \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \quad \text{或} \quad f_x(x_0, y_0). \quad \textcircled{1}$$

例如, 极限(1)可以表为

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}. \quad (2)$$

类似地, 函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处对  $y$  的偏导数定义为

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}, \quad (3)$$

记作  $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, z_y \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \quad \text{或} \quad f_y(x_0, y_0).$

如果函数  $z = f(x, y)$  在区域  $D$  内每一点  $(x, y)$  处对  $x$  的偏导数都存在, 那么这个偏导数就是  $x$ 、 $y$  的函数, 它就称为函数  $z = f(x, y)$  对自变量  $x$  的偏导函数, 记作

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, z_x \quad \text{或} \quad f_x(x, y).$$

类似地, 可以定义函数  $z = f(x, y)$  对自变量  $y$  的偏导函数, 记作

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}, z_y \quad \text{或} \quad f_y(x, y).$$

由偏导函数的概念可知,  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处对  $x$  的偏导数  $f_x(x_0, y_0)$  显然就是偏导函数  $f_x(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处的函数值;  $f_y(x_0, y_0)$  就是偏导函数  $f_y(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处的函数值. 就像一元函数的导函数一样, 以后在不至于混淆的地方也把偏导函数简称为偏导数.

至于实际求  $z = f(x, y)$  的偏导数, 并不需要用新的方法, 因为这里只有一个自变量在变动, 另一个自变量是看做固定的, 所以仍旧是一元函数的微分法问

① 偏导数记号  $z_x, f_x$  也记成  $z'_x, f'_x$ , 下面高阶偏导数的记号也有类似的情形.

题. 求  $\frac{\partial f}{\partial x}$  时, 只要把  $y$  暂时看做常量而对  $x$  求导数; 求  $\frac{\partial f}{\partial y}$  时, 则只要把  $x$  暂时看做常量而对  $y$  求导数.

偏导数的概念还可推广到二元以上的函数. 例如三元函数  $u = f(x, y, z)$  在点  $(x, y, z)$  处对  $x$  的偏导数定义为

$$f_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x},$$

其中  $(x, y, z)$  是函数  $u = f(x, y, z)$  的定义域的内点. 它们的求法也仍旧是一元函数的微分法问题.

**例 1** 求  $z = x^2 + 3xy + y^2$  在点  $(1, 2)$  处的偏导数.

解 把  $y$  看做常量, 得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y;$$

把  $x$  看做常量, 得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y.$$

将  $(1, 2)$  代入上面的结果, 就得

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8,$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7.$$

**例 2** 求  $z = x^2 \sin 2y$  的偏导数.

解  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin 2y,$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 \cos 2y.$$

**例 3** 设  $z = x^y$  ( $x > 0, x \neq 1$ ), 求证:

$$\frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x} \frac{\partial z}{\partial y} = 2z.$$

证 因为  $\frac{\partial z}{\partial x} = y x^{y-1}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$ .

所以  $\frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y} y x^{y-1} + \frac{1}{\ln x} x^y \ln x = x^y + x^y = 2z.$

**例 4** 求  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  的偏导数.

解 把  $y$  和  $z$  都看做常量, 得

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r};$$

由于所给函数关于自变量的对称性<sup>①</sup>, 所以

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

**例 5** 已知理想气体的状态方程  $pV = RT$  ( $R$  为常量), 求证:

$$\frac{\partial p}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = -1.$$

证 因为

$$p = \frac{RT}{V}, \quad \frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{RT}{V^2};$$

$$V = \frac{RT}{p}, \quad \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{R}{p};$$

$$T = \frac{pV}{R}, \quad \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{V}{R};$$

所以

$$\frac{\partial p}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{RT}{V^2} \cdot \frac{R}{p} \cdot \frac{V}{R} = -\frac{RT}{pV} = -1.$$

我们知道, 对一元函数来说,  $\frac{dy}{dx}$  可看做函数的微分  $dy$  与自变量的微分  $dx$  之商. 而上式表明, 偏导数的记号是一个整体记号, 不能看做分子与分母之商.

二元函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的偏导数有下述几何意义.

设  $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  为曲面  $z = f(x, y)$  上的一点, 过  $M_0$  作平面

$y = y_0$ , 截此曲面得一曲线, 此曲线在平面  $z = f(x_0, y)$  上的方程为  $z = f(x, y_0)$ , 则

导数  $\frac{d}{dx}f(x, y_0) \Big|_{x=x_0}$ , 即偏导数  $f_x(x_0, y_0)$ ,

$y_0$ ), 就是这曲线在点  $M_0$  处的切线  $M_0 T_x$  对  $x$  轴的斜率(见图 9-5). 同样, 偏导数  $f_y(x_0, y_0)$  的几何意义是曲面被平面  $x = x_0$  所截得的曲线在点  $M_0$  处的切线  $M_0 T_y$  对  $y$  轴的斜率.

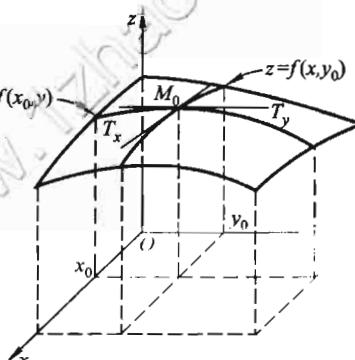


图 9-5

我们已经知道, 如果一元函数在某点具有导数, 则它在该点必定连续. 但对于多元函数来说, 即使各偏导数在某点都存在, 也不能保证函数在该点连续. 这是因为各偏导数存在只能保证点  $P$  沿着平行于坐标轴的方向趋于  $P_0$  时, 函数

① 这就是说, 当函数表达式中任意两个自变量对调后, 仍表示原来的函数.

值  $f(P)$  趋于  $f(P_0)$ , 但不能保证点  $P$  按任何方式趋于  $P_0$  时, 函数值  $f(P)$  都趋于  $f(P_0)$ . 例如, 函数

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

在点  $(0, 0)$  对  $x$  的偏导数为

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0;$$

同样有

$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

但是在第一节中已经知道这函数在点  $(0, 0)$  并不连续.

## 二、高阶偏导数

设函数  $z = f(x, y)$  在区域  $D$  内具有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x, y),$$

那么在  $D$  内  $f_x(x, y), f_y(x, y)$  都是  $x, y$  的函数. 如果这两个函数的偏导数也存在, 则称它们是函数  $z = f(x, y)$  的二阶偏导数. 按照对变量求导次序的不同有下列四个二阶偏导数:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y).$$

其中第二、三两个偏导数称为混合偏导数. 同样可得三阶、四阶、…以及  $n$  阶偏导数. 二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数.

**例 6** 设  $z = x^3 y^2 - 3xy^3 - xy + 1$ , 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  及  $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$ .

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^2 - 3y^3 - y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y - 9xy^2 - x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6x^2 y - 9y^2 - 1;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x^2 y - 9y^2 - 1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^3 - 18xy;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 6y^2.$$

我们看到例 6 中两个二阶混合偏导数相等, 即  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ . 这不是偶然的, 事实上, 有下述定理.

**定理** 如果函数  $z = f(x, y)$  的两个二阶混合偏导数  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$  及  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  在区域  $D$  内连续, 那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等.

换句话说, 二阶混合偏导数在连续的条件下与求导的次序无关. 这定理的证明从略.

对于二元以上的函数, 也可以类似地定义高阶偏导数. 而且高阶混合偏导数在偏导数连续的条件下也与求导的次序无关.

**例 7** 验证函数  $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$  满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

**证** 因为  $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ ,

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{(x^2 + y^2) - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

因此

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

**例 8** 证明函数  $u = \frac{1}{r}$  满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

其中  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

**证**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x}{r^4} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}.$$

由于函数关于自变量的对称性, 所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}.$$

因此

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$= -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3r^2}{r^5} = 0.$$

例 7 和例 8 中的两个方程都叫做拉普拉斯(Laplace)方程, 它是数学物理方程中一种很重要的方程.

## 习 题 9-2

1. 求下列函数的偏导数:

$$(1) z = x^3y - y^3x; \quad (2) s = \frac{u^2 + v^2}{uv};$$

$$(3) z = \sqrt{\ln(xy)}; \quad (4) z = \sin(xy) + \cos^2(xy);$$

$$(5) z = \ln \tan \frac{x}{y}; \quad (6) z = (1 + xy)^y;$$

$$(7) u = x^{\frac{y}{2}}; \quad (8) u = \arctan(x - y)^z.$$

2. 设  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ , 求证  $l \frac{\partial T}{\partial l} + g \frac{\partial T}{\partial g} = 0$ .

3. 设  $z = e^{-(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})}$ , 求证  $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 2z$ .

4. 设  $f(x, y) = x + (y - 1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$ , 求  $f_x(x, 1)$ .

5. 曲线  $\begin{cases} z = \frac{x^2 + y^2}{4}, \\ y = 4 \end{cases}$  在点(2, 4, 5)处的切线对于  $x$  轴的倾角是多少?

6. 求下列函数的  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  和  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ :

$$(1) z = x^4 + y^4 - 4x^2y^2;$$

$$(2) z = \arctan \frac{y}{x};$$

$$(3) z = y^x.$$

7. 设  $f(x, y, z) = xy^2 + yz^2 + zx^2$ , 求  $f_{xx}(0, 0, 1)$ ,  $f_{xy}(1, 0, 2)$ ,  $f_{yz}(0, -1, 0)$  及  $f_{xz}(2, 0, 1)$ .

8. 设  $z = x \ln(xy)$ , 求  $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$  及  $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ .

9. 验证:

$$(1) y = e^{-\lambda t^2} \sin nx \text{ 满足 } \frac{\partial y}{\partial t} = k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2};$$

$$(2) r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ 满足 } \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2}{r}.$$

### 第三节 全微分

#### 一、全微分的定义

由偏导数的定义知道,二元函数对某个自变量的偏导数表示当另一个自变量固定时,因变量相对于该自变量的变化率.根据一元函数微分学中增量与微分的关系,可得

$$\begin{aligned}f(x + \Delta x, y) - f(x, y) &\approx f_x(x, y)\Delta x, \\f(x, y + \Delta y) - f(x, y) &\approx f_y(x, y)\Delta y.\end{aligned}$$

上面两式的左端分别叫做二元函数对  $x$  和对  $y$  的偏增量,而右端分别叫做二元函数对  $x$  和对  $y$  的偏微分.

在实际问题中,有时需要研究多元函数中各个自变量都取得增量时因变量所获得的增量,即所谓全增量的问题.下面以二元函数为例进行讨论.

设函数  $z = f(x, y)$  在点  $P(x, y)$  的某邻域内有定义,  $P'(x + \Delta x, y + \Delta y)$  为这邻域内的任意一点,则称这两点的函数值之差  $f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$  为函数在点  $P$  对应于自变量增量  $\Delta x, \Delta y$  的全增量,记作  $\Delta z$ ,即

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \quad (1)$$

一般说来,计算全增量  $\Delta z$  比较复杂.与一元函数的情形一样,我们希望用自变量的增量  $\Delta x, \Delta y$  的线性函数来近似地代替函数的全增量  $\Delta z$ ,从而引入如下定义.

定义 设函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x, y)$  的某邻域内有定义,如果函数在点  $(x, y)$  的全增量

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

可表示为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \quad (2)$$

其中  $A, B$  不依赖于  $\Delta x, \Delta y$  而仅与  $x, y$  有关,  $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ , 则称函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x, y)$  可微分,而  $A\Delta x + B\Delta y$  称为函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x, y)$  的全微分,记作  $dz$ ,即

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

如果函数在区域  $D$  内各点处都可微分,那么称这函数在  $D$  内可微分.

在第二节中曾指出,多元函数在某点的偏导数存在,并不能保证函数在该点连续.但是,由上述定义可知,如果函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x, y)$  可微分,那么这

函数在该点必定连续.事实上,这时由(2)式可得

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \Delta z = 0,$$

从而<sup>①</sup>

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} f(x + \Delta x, y + \Delta y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} [f(x, y) + \Delta z] = f(x, y).$$

因此函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x, y)$  处连续.

下面讨论函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x, y)$  可微分的条件.

**定理 1(必要条件)** 如果函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x, y)$  可微分, 则该函数在点  $(x, y)$  的偏导数  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$  必定存在, 且函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x, y)$  的全微分为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y. \quad (3)$$

**证** 设函数  $z = f(x, y)$  在点  $P(x, y)$  可微分.于是,对于点  $P$  的某个邻域内的任意一点  $P'(\Delta x, \Delta y)$ , (2)式总成立.特别当  $\Delta y = 0$  时(2)式也应成立,这时  $\rho = |\Delta x|$ , 所以(2)式成为

$$f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = A \cdot \Delta x + o(|\Delta x|).$$

上式两边各除以  $\Delta x$ ,再令  $\Delta x \rightarrow 0$  而取极限,就得

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = A,$$

从而偏导数  $\frac{\partial z}{\partial x}$  存在,且等于  $A$ .同样可证  $\frac{\partial z}{\partial y} = B$ .所以(3)式成立.证毕.

我们知道,一元函数在某点的导数存在是微分存在的充分必要条件.但对于多元函数来说,情形就不同了.当函数的各偏导数都存在时,虽然能形式地写出  $\frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$ ,但它与  $\Delta z$  之差并不一定是较  $\rho$  高阶的无穷小,因此它不一定是函数的全微分.换句话说,各偏导数的存在只是全微分存在的必要条件而不是充分条件.例如,函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在点  $(0,0)$  处有  $f_x(0,0) = 0$  及  $f_y(0,0) = 0$ , 所以

$$\Delta z - [f_x(0,0) \cdot \Delta x + f_y(0,0) \cdot \Delta y] = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}},$$

如果考虑点  $P'(\Delta x, \Delta y)$  沿着直线  $y = x$  趋于  $(0,0)$ , 则

① 这里,  $\rho \rightarrow 0$  与  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)$  相当.

$$\frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \frac{\Delta x \cdot \Delta x}{(\Delta x)^2 + (\Delta x)^2} = \frac{1}{2},$$

它不能随  $\rho \rightarrow 0$  而趋于 0, 这表示  $\rho \rightarrow 0$  时,

$$\Delta z - [f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y]$$

并不是较  $\rho$  高阶的无穷小, 因此函数在点  $(0,0)$  处的全微分并不存在, 即函数在点  $(0,0)$  处是不可微分的.

由定理 1 及这个例子可知, 偏导数存在是可微分的必要条件而不是充分条件. 但是, 如果再假定函数的各个偏导数连续, 则可以证明函数是可微分的, 即有下面的定理.

**定理 2(充分条件)** 如果函数  $z = f(x, y)$  的偏导数  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$  在点  $(x, y)$  连续<sup>①</sup>, 则函数在该点可微分.

**证** 由假定, 函数的偏导数  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$  在点  $P(x, y)$  的某邻域内存在. 设点  $(x + \Delta x, y + \Delta y)$  为这邻域内任意一点, 考察函数的全增量

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + \\ &\quad [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)].\end{aligned}$$

在第一个方括号内的表达式, 由于  $y + \Delta y$  不变, 因而可以看做是  $x$  的一元函数  $f(x, y + \Delta y)$  的增量. 于是, 应用拉格朗日中值定理, 得到

$$\begin{aligned}&f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) \\ &= f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) \Delta x \quad (0 < \theta_1 < 1).\end{aligned}$$

又依假设,  $f_x(x, y)$  在点  $(x, y)$  连续, 所以上式可写为

$$\begin{aligned}&f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) \quad (4) \\ &= f_x(x, y) \Delta x + \epsilon_1 \Delta x,\end{aligned}$$

其中  $\epsilon_1$  为  $\Delta x, \Delta y$  的函数, 且当  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$  时,  $\epsilon_1 \rightarrow 0$ .

同理可证第二个方括号内的表达式可写为

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = f_y(x, y) \Delta y + \epsilon_2 \Delta y, \quad (5)$$

其中  $\epsilon_2$  为  $\Delta y$  的函数, 且当  $\Delta y \rightarrow 0$  时,  $\epsilon_2 \rightarrow 0$ .

由(4)、(5)两式可见, 在偏导数连续的假定下, 全增量  $\Delta z$  可以表示为

$$\Delta z = f_x(x, y) \Delta x + f_y(x, y) \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y. \quad (6)$$

<sup>①</sup> 多元函数的偏导数在一点连续是指: 偏导数在该点的某个邻域内存在, 于是偏导数在这邻域内有定义, 而这个偏导函数在该点连续.

容易看出

$$\left| \frac{\epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y}{\rho} \right| \leq |\epsilon_1| + |\epsilon_2|,$$

它是随着  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$  即  $\rho \rightarrow 0$  而趋于零的.

这就证明了  $z = f(x, y)$  在点  $P(x, y)$  是可微分的.

以上关于二元函数全微分的定义及可微分的必要条件和充分条件, 可以完全类似地推广到三元和三元以上的多元函数.

习惯上, 我们将自变量的增量  $\Delta x, \Delta y$  分别记作  $dx, dy$ , 并分别称为自变量  $x, y$  的微分. 这样, 函数  $z = f(x, y)$  的全微分就可写为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (7)$$

通常把二元函数的全微分等于它的两个偏微分之和这件事称为二元函数的微分符合叠加原理.

叠加原理也适用于二元以上的函数的情形. 例如, 如果三元函数  $u = f(x, y, z)$  可微分, 那么它的全微分就等于它的三个偏微分之和, 即

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

**例 1** 计算函数  $z = x^2 y + y^2$  的全微分.

解 因为  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy, \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y,$

所以  $dz = 2xy dx + (x^2 + 2y) dy.$

**例 2** 计算函数  $z = e^{xy}$  在点  $(2, 1)$  处的全微分.

解 因为  $\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}, \frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy},$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=2 \\ y=1}} = e^2, \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=2 \\ y=1}} = 2e^2,$$

所以  $dz \Big|_{\substack{x=2 \\ y=1}} = e^2 dx + 2e^2 dy.$

**例 3** 计算函数  $u = x + \sin \frac{y}{2} + e^{yz}$  的全微分.

解 因为  $\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \cos \frac{y}{2} + ze^{yz}, \frac{\partial u}{\partial z} = ye^{yz},$

所以  $du = dx + \left( \frac{1}{2} \cos \frac{y}{2} + ze^{yz} \right) dy + ye^{yz} dz.$

## \* 二、全微分在近似计算中的应用

由二元函数的全微分的定义及关于全微分存在的充分条件可知, 当二元函

数  $z = f(x, y)$  在点  $P(x, y)$  的两个偏导数  $f_x(x, y), f_y(x, y)$  连续, 并且  $|\Delta x|, |\Delta y|$  都较小时, 就有近似等式

$$\Delta z \approx dz = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y. \quad (8)$$

上式也可以写成

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y. \quad (9)$$

与一元函数的情形相类似, 可以利用(8)式或(9)式对二元函数作近似计算和误差估计, 举例子下.

**例 4** 有一圆柱体, 受压后发生形变, 它的半径由 20 cm 增大到 20.05 cm, 高度由 100 cm 减少到 99 cm. 求此圆柱体体积变化的近似值.

解 设圆柱体的半径、高和体积依次为  $r, h$  和  $V$ , 则有

$$V = \pi r^2 h.$$

记  $r, h$  和  $V$  的增量依次为  $\Delta r, \Delta h$  和  $\Delta V$ . 应用公式(8), 有

$$\Delta V \approx dz = V_r \Delta r + V_h \Delta h = 2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h.$$

把  $r = 20, h = 100, \Delta r = 0.05, \Delta h = -1$  代入, 得

$$\Delta V \approx 2\pi \times 20 \times 100 \times 0.05 + \pi \times 20^2 \times (-1) = -200\pi (\text{cm}^3).$$

即此圆柱体在受压后体积约减少了  $200\pi \text{ cm}^3$ .

**例 5** 计算  $(1.04)^{2.02}$  的近似值.

解 设函数  $f(x, y) = x^y$ . 显然, 要计算的值就是函数在  $x = 1.04, y = 2.02$  时的函数值  $f(1.04, 2.02)$ .

取  $x = 1, y = 2, \Delta x = 0.04, \Delta y = 0.02$ . 由于

$$f(1, 2) = 1,$$

$$f_x(x, y) = yx^{y-1}, \quad f_y(x, y) = x^y \ln x,$$

$$f_x(1, 2) = 2, \quad f_y(1, 2) = 0,$$

所以, 应用公式(9)便有

$$(1.04)^{2.02} \approx 1 + 2 \times 0.04 + 0 \times 0.02 = 1.08.$$

**例 6** 利用单摆摆动测定重力加速度  $g$  的公式是

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}.$$

现测得单摆摆长  $l$  与振动周期  $T$  分别为  $l = (100 \pm 0.1) \text{ cm}$ 、 $T = (2 \pm 0.004) \text{ s}$ . 问由于测定  $l$  与  $T$  的误差而引起  $g$  的绝对误差和相对误差各为多少<sup>①</sup>?

解 如果把测量  $l$  与  $T$  时所产生的误差当作  $|\Delta l|$  与  $|\Delta T|$ , 则利用上述计算公式所产生的误差就是二元函数  $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$  的全增量的绝对值  $|\Delta g|$ . 由于

① 按第二章第五节的说明, 这里的绝对误差和相对误差各指相应的误差限.

$|\Delta l|$ 、 $|\Delta T|$ 都很小,因此我们可以用  $dg$  来近似地代替  $\Delta g$ . 这样就得到  $g$  的误差为

$$\begin{aligned} |\Delta g| &\approx |dg| = \left| \frac{\partial g}{\partial l} \Delta l + \frac{\partial g}{\partial T} \Delta T \right| \\ &\leq \left| \frac{\partial g}{\partial l} \right| \cdot \delta_l + \left| \frac{\partial g}{\partial T} \right| \cdot \delta_T \\ &= 4\pi^2 \left( \frac{1}{T^2} \delta_l + \frac{2l}{T^3} \delta_T \right), \end{aligned}$$

其中  $\delta_l$  与  $\delta_T$  分别为  $l$  与  $T$  的绝对误差. 把  $l = 100$ ,  $T = 2$ ,  $\delta_l = 0.1$ ,  $\delta_T = 0.004$  代入上式, 得  $g$  的绝对误差约为

$$\delta_g = 4\pi^2 \left( \frac{0.1}{2^2} + \frac{2 \times 100}{2^3} \times 0.004 \right) = 0.5\pi^2 \approx 4.93(\text{cm/s}^2).$$

从而  $g$  的相对误差约为

$$\frac{\delta_g}{g} = \frac{0.5\pi^2}{4\pi^2 \times 100} = \frac{1}{2^2} = 0.5\%.$$

从上面的例子可以看到,对于一般的二元函数  $z = f(x, y)$ , 如果自变量  $x$ 、 $y$  的绝对误差分别为  $\delta_x$ 、 $\delta_y$ , 即

$$|\Delta x| \leq \delta_x, \quad |\Delta y| \leq \delta_y,$$

则  $z$  的误差

$$\begin{aligned} |\Delta z| &\approx |dz| = \left| \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y \right| \\ &\leq \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \cdot |\Delta x| + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| \cdot |\Delta y| \\ &\leq \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \delta_x + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| \delta_y; \end{aligned}$$

从而得到  $z$  的绝对误差约为

$$\delta_z = \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \delta_x + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| \delta_y; \quad (10)$$

$z$  的相对误差约为

$$\frac{\delta_z}{|z|} = \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \frac{\delta_x}{z} + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| \frac{\delta_y}{z}. \quad (11)$$

### 习题 9-3

- 求下列函数的全微分:

$$(1) z = xy + \frac{x}{y};$$

$$(2) z = e^x;$$

$$(3) z = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$(4) u = x^y.$$

2. 求函数  $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$  当  $x = 1, y = 2$  时的全微分.

3. 求函数  $z = \frac{y}{x}$  当  $x = 2, y = 1, \Delta x = 0.1, \Delta y = -0.2$  时的全增量和全微分.

4. 求函数  $z = e^{xy}$  当  $x = 1, y = 1, \Delta x = 0.15, \Delta y = 0.1$  时的全微分.

5. 考虑二元函数  $f(x, y)$  的下面四条性质:

(1)  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  连续;

(2)  $f_x(x, y), f_y(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  连续;

(3)  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  可微分;

(4)  $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$  存在。

若用 " $P \Rightarrow Q$ " 表示可由性质  $P$  推出性质  $Q$ , 则下列四个选项中正确的是( ) .

(A)  $(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$

(B)  $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$

(C)  $(3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$

(D)  $(3) \Rightarrow (1) \Rightarrow (4)$

6. 计算  $\sqrt{(1.02)^3 + (1.97)^3}$  的近似值.

7. 计算  $(1.97)^{1.05}$  的近似值 ( $\ln 2 = 0.693$ ).

8. 已知边长为  $x = 6$  m 与  $y = 8$  m 的矩形, 如果  $x$  边增加 5 cm 而  $y$  边减少 10 cm, 问这个矩形的对角线的近似变化怎样?

9. 设有一无盖圆柱形容器, 容器的壁与底的厚度均为 0.1 cm, 内高为 20 cm, 内半径为 4 cm. 求容器外壳体积的近似值.

10. 设有直角三角形, 测得其两直角边的长分别为  $(7 \pm 0.1)$  cm 和  $(24 \pm 0.1)$  cm. 试求利用上述二值来计算斜边长度时的绝对误差.

11. 测得一块三角形土地的两边边长分别为  $(63 \pm 0.1)$  m 和  $(78 \pm 0.1)$  m, 这两边的夹角为  $60^\circ \pm 1^\circ$ . 试求三角形面积的近似值, 并求其绝对误差和相对误差.

12. 利用全微分证明: 两数之和的绝对误差等于它们各自的绝对误差之和.

13. 利用全微分证明: 乘积的相对误差等于各因子的相对误差之和; 商的相对误差等于被除数及除数的相对误差之和.

## 第四节 多元复合函数的求导法则

现在要将一元函数微分学中复合函数的求导法则推广到多元复合函数的情形. 多元复合函数的求导法则在多元函数微分学中也起着重要作用.

下面按照多元复合函数不同的复合情形, 分三种情形讨论.

### 1. 一元函数与多元函数复合的情形

**定理 1** 如果函数  $u = \varphi(t)$  及  $v = \psi(t)$  都在点  $t$  可导, 函数  $z = f(u, v)$  在

对应点  $(u, v)$  具有连续偏导数, 则复合函数  $z = f[\varphi(t), \psi(t)]$  在点  $t$  可导, 且有

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt}. \quad (1)$$

设  $t$  获得增量  $\Delta t$ , 这时  $u = \varphi(t)$ 、 $v = \psi(t)$  的对应增量为  $\Delta u$ 、 $\Delta v$ , 由此, 函数  $z = f(u, v)$  相应地获得增量  $\Delta z$ . 按假定, 函数  $z = f(u, v)$  在点  $(u, v)$  具有连续偏导数, 这时函数的全增量  $\Delta z$  可表示为

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial z}{\partial v} \Delta v + \epsilon_1 \Delta u + \epsilon_2 \Delta v,$$

这里, 当  $\Delta u \rightarrow 0, \Delta v \rightarrow 0$  时,  $\epsilon_1 \rightarrow 0, \epsilon_2 \rightarrow 0$ . ①

将上式两边各除以  $\Delta t$ , 得

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\Delta u}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\Delta v}{\Delta t} + \epsilon_1 \frac{\Delta u}{\Delta t} + \epsilon_2 \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

因为当  $\Delta t \rightarrow 0$  时,  $\Delta u \rightarrow 0, \Delta v \rightarrow 0, \frac{\Delta u}{\Delta t} \rightarrow \frac{du}{dt}, \frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow \frac{dv}{dt}$ , 所以

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt}.$$

这就证明了复合函数  $z = f[\varphi(t), \psi(t)]$  在点  $t$  可导, 且其导数可用公式(1)计算. 证毕.

用同样的方法, 可把定理推广到复合函数的中间变量多于两个的情形. 例如, 设  $z = f(u, v, w)$ ,  $u = \varphi(t)$ ,  $v = \psi(t)$ ,  $w = \omega(t)$  复合而得复合函数

$$z = f[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)],$$

则在与定理相类似的条件下, 这复合函数在点  $t$  可导, 且其导数可用下列公式计算:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{dw}{dt}. \quad (2)$$

在公式(1)及(2)中的导数  $\frac{dz}{dt}$  称为全导数.

## 2. 多元函数与多元函数复合的情形

**定理 2** 如果函数  $u = \varphi(x, y)$  及  $v = \psi(x, y)$  都在点  $(x, y)$  具有对  $x$  及对  $y$  的偏导数, 函数  $z = f(u, v)$  在对应点  $(u, v)$  具有连续偏导数, 则复合函数  $z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$  在点  $(x, y)$  的两个偏导数都存在, 且有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (3)$$

① 在偏导数连续的条件下, 这一公式成立的证明参见本章第三节定理 2 的证明.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (4)$$

事实上,这里求  $\frac{\partial z}{\partial x}$  时,将  $y$  看做常量,因此  $u = \varphi(x, y)$  及  $v = \psi(x, y)$  仍可看做一元函数而应用定理 1. 但由于复合函数  $z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$  以及  $u = \varphi(x, y)$  和  $v = \psi(x, y)$  都是  $x, y$  的二元函数,所以应把(1)式中的  $d$  改为  $\partial$ , 再把  $t$  换成  $x$ , 这样便由(1)式得(3)式. 同理由(1)式可得(4)式.

类似地, 设  $u = \varphi(x, y)$ 、 $v = \psi(x, y)$  及  $w = \omega(x, y)$  都在点  $(x, y)$  具有对  $x$  及对  $y$  的偏导数, 函数  $z = f(u, v, w)$  在对应点  $(u, v, w)$  具有连续偏导数, 则复合函数

$$z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y), \omega(x, y)]$$

在点  $(x, y)$  的两个偏导数都存在,且可用下列公式计算:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (6)$$

### 3. 其他情形

**定理 3** 如果函数  $u = \varphi(x, y)$  在点  $(x, y)$  具有对  $x$  及对  $y$  的偏导数, 函数  $v = \psi(y)$  在点  $y$  可导, 函数  $z = f(u, v)$  在对应点  $(u, v)$  具有连续偏导数, 则复合函数  $z = f[\varphi(x, y), \psi(y)]$  在点  $(x, y)$  的两个偏导数都存在,且有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dy}. \quad (8)$$

上述情形实际上是情形 2 的一种特例,即在情形 2 中,如变量  $v$  与  $x$  无关,从而  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ ; 在  $v$  对  $y$  求导时,由于  $v = \psi(y)$  是一元函数,故  $\frac{\partial v}{\partial y}$  换成了  $\frac{dv}{dy}$ ,这就得上述结果.

在情形 3 中,还会遇到这样的情形:复合函数的某些中间变量本身又是复合函数的自变量. 例如,设  $z = f(u, x, y)$  具有连续偏导数,而  $u = \varphi(x, y)$  具有偏导数,则复合函数  $z = f[\varphi(x, y), x, y]$  可看做情形 2 中当  $v = x, w = y$  的特殊情形. 因此

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 1.$$

从而复合函数  $z = f[\varphi(x, y), x, y]$  具有对自变量  $x$  及  $y$  的偏导数,且由公式

(5)、(6)得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}.$$

注意 这里  $\frac{\partial z}{\partial x}$  与  $\frac{\partial f}{\partial x}$  是不同的,  $\frac{\partial z}{\partial x}$  是把复合函数  $z = f[\varphi(x, y), x, y]$  中的  $y$  看做不变而对  $x$  的偏导数,  $\frac{\partial f}{\partial x}$  是把  $f(u, x, y)$  中的  $u$  及  $y$  看做不变而对  $x$  的偏导数.  $\frac{\partial z}{\partial y}$  与  $\frac{\partial f}{\partial y}$  也有类似的区别.

例 1 设  $z = e^x \sin v$ , 而  $u = xy$ ,  $v = x + y$ . 求  $\frac{\partial z}{\partial x}$  和  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

$$\begin{aligned}\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin v \cdot y + e^x \cos v \cdot 1 \\ &= e^{xy} [y \sin(x+y) + \cos(x+y)], \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \sin v \cdot x + e^x \cos v \cdot 1 \\ &= e^{xy} [x \sin(x+y) + \cos(x+y)].\end{aligned}$$

例 2 设  $u = f(x, y, z) = e^{x^2 + y^2 + z^2}$ , 而  $z = x^2 \sin y$ . 求  $\frac{\partial u}{\partial x}$  和  $\frac{\partial u}{\partial y}$ .

$$\begin{aligned}\text{解 } \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{x^2 + y^2 + z^2} + 2ze^{x^2 + y^2 + z^2} \cdot 2x \sin y \\ &= 2x(1 + 2x^2 \sin^2 y)e^{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^{x^2 + y^2 + z^2} + 2ze^{x^2 + y^2 + z^2} \cdot x^2 \cos y \\ &= 2(y + x^4 \sin y \cos y)e^{x^2 + y^2 + z^2}.\end{aligned}$$

例 3 设  $z = uv + \sin t$ , 而  $u = e^t$ ,  $v = \cos t$ . 求全导数  $\frac{dz}{dt}$ .

$$\begin{aligned}\text{解 } \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial z}{\partial t} = ve^t - u \sin t + \cos t \\ &= e^t \cos t - e^t \sin t + \cos t = e^t (\cos t - \sin t) + \cos t.\end{aligned}$$

例 4 设  $w = f(x + y + z, xyz)$ ,  $f$  具有二阶连续偏导数, 求  $\frac{\partial w}{\partial x}$  及  $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$ .

解 令  $u = x + y + z$ ,  $v = xyz$ , 则  $w = f(u, v)$ .

为表达简便起见, 引入以下记号:

$$f'_1(u, v) = f_u(u, v), \quad f''_{12}(u, v) = f_{uv}(u, v),$$

这里下标 1 表示对第一个变量  $u$  求偏导数, 下标 2 表示对第二个变量  $v$  求偏导数. 同理有  $f'_2, f''_{11}, f''_{22}$  等等.

因所给函数由  $w = f(u, v)$  及  $u = x + y + z, v = xyz$  复合而成, 根据复合函数求导法则, 有

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = f'_1 + yz f'_2,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (f'_1 + yz f'_2) = \frac{\partial f'_1}{\partial z} + yf'_2 + yz \frac{\partial f'_2}{\partial z}.$$

求  $\frac{\partial f'_1}{\partial z}$  及  $\frac{\partial f'_2}{\partial z}$  时, 应注意  $f'_1(u, v)$  及  $f'_2(u, v)$  中  $u, v$  是中间变量, 根据复合函数求导法则, 有

$$\frac{\partial f'_1}{\partial z} = \frac{\partial f'_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f'_1}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} = f''_{11} + xy f''_{12},$$

$$\frac{\partial f'_2}{\partial z} = \frac{\partial f'_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f'_2}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} = f''_{21} + xy f''_{22}.$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} &= f''_{11} + xy f''_{12} + yf'_2 + yz f''_{21} + xy^2 z f''_{22} \\ &= f''_{11} + y(x+z)f''_{12} + xy^2 z f''_{22} + yf'_2.\end{aligned}$$

**例 5** 设  $u = f(x, y)$  的所有二阶偏导数连续, 把下列表达式转换为极坐标系中的形式:

$$(1) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2; \quad (2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

**解** 由直角坐标与极坐标间的关系式

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta$$

可把函数  $u = f(x, y)$  换成极坐标  $\rho$  及  $\theta$  的函数:

$$u = f(x, y) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = F(\rho, \theta).$$

现在要将式子  $\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$  及  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  用  $\rho, \theta$  及函数  $u = F(\rho, \theta)$  对  $\rho, \theta$  的偏导数来表达. 为此, 要求出  $u = f(x, y)$  的偏导数  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  及  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ . 这里  $u = f(x, y)$  要看做由  $u = F(\rho, \theta)$  及

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x} \quad \text{①}$$

① 当点  $P(x, y)$  在第一、四象限时, 规定  $\theta$  的取值范围为  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ , 则

$$\theta = \arctan \frac{y}{x};$$

当点  $P(x, y)$  在第二、三象限时, 规定  $\theta$  的取值范围为  $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi$ , 则

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} + \pi,$$

此时以下推导仍成立.

复合而成,应用复合函数求导法则,得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{x}{\rho} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{y}{\rho^2} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\rho},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{y}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{x}{\rho^2} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{\rho}.$$

两式平方后相加,得

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \left( \frac{\partial u}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2.$$

再求二阶偏导数,得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\rho} \right) \cdot \cos \theta - \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\rho} \right) \cdot \frac{\sin \theta}{\rho} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{\rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\sin^2 \theta}{\rho}. \end{aligned}$$

同理可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{\rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2 \theta}{\rho^2} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\cos^2 \theta}{\rho}.$$

两式相加,得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\rho} \left[ \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right].$$

全微分形式不变性 设函数  $z = f(u, v)$  具有连续偏导数,则有全微分

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

如果  $u, v$  又是中间变量,即  $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$ ,且这两个函数也具有连续偏导数,则复合函数

$$z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$$

的全微分为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

其中  $\frac{\partial z}{\partial x}$  及  $\frac{\partial z}{\partial y}$  分别由公式(3)及(4)给出.把公式(3)及(4)中的  $\frac{\partial z}{\partial x}$  及  $\frac{\partial z}{\partial y}$  代入上式,

得

$$dz = \left( \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\partial z}{\partial u} \left( \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) + \frac{\partial z}{\partial v} \left( \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \\
 &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.
 \end{aligned}$$

由此可见,无论  $u, v$  是自变量还是中间变量,函数  $z = f(u, v)$  的全微分形式是一样的.这个性质叫做全微分形式不变性.

**例 6 利用全微分形式不变性解本节的例 1.**

解  $dz = d(e^x \sin v) = e^x \sin v du + e^x \cos v dv$ ,

因

$$du = d(xy) = ydx + xdy,$$

$$dv = d(x+y) = dx + dy,$$

代入后归并含  $dx$  及  $dy$  的项,得

$$dz = (e^x \sin v \cdot y + e^x \cos v)dx + (e^x \sin v \cdot x + e^x \cos v)dy,$$

$$\begin{aligned}
 \text{即 } \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy &= e^x [y \sin(x+y) + \cos(x+y)]dx + \\
 &\quad e^x [x \sin(x+y) + \cos(x+y)]dy.
 \end{aligned}$$

比较上式两边的  $dx, dy$  的系数,就同时得到两个偏导数  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ ,它们与例 1 的结果一样.

## 习 题 9-4

1. 设  $z = u^2 + v^2$ , 而  $u = x + y, v = x - y$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ .

2. 设  $z = u^2 \ln v$ , 而  $u = \frac{x}{y}, v = 3x - 2y$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ .

3. 设  $z = e^{x+2y}$ , 而  $x = \sin t, y = t^3$ , 求  $\frac{dz}{dt}$ .

4. 设  $z = \arcsin(x-y)$ , 而  $x = 3t, y = 4t^3$ , 求  $\frac{dz}{dt}$ .

5. 设  $z = \arctan(xy)$ , 而  $y = e^x$ , 求  $\frac{dz}{dx}$ .

6. 设  $u = \frac{e^{xy}(y-z)}{a^2 + 1}$ , 而  $y = a \sin x, z = \cos x$ , 求  $\frac{du}{dx}$ .

7. 设  $z = \arctan \frac{x}{y}$ , 而  $x = u + v, y = u - v$ , 验证

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u-v}{u^2+v^2}.$$

8. 求下列函数的一阶偏导数(其中  $f$  具有一阶连续偏导数):

$$(1) u = f(x^2 - y^2, e^{xy});$$

$$(2) u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right);$$

$$(3) u = f(x, xy, xyz).$$

9. 设  $z = xy + xF(u)$ , 而  $u = \frac{y}{x}$ ,  $F(u)$  为可导函数, 证明

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z + xy.$$

10. 设  $z = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}$ , 其中  $f(u)$  为可导函数, 验证

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

11. 设  $z = f(x^2 + y^2)$ , 其中  $f$  具有二阶导数, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ .

12. 求下列函数的  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  (其中  $f$  具有二阶连续偏导数):

$$(1) z = f(xy, y); \quad (2) z = f\left(x, \frac{x}{y}\right);$$

$$(3) z = f(xy^2, x^2 y); \quad (4) z = f(\sin x, \cos y, e^{x+y}).$$

13. 设  $u = f(x, y)$  的所有二阶偏导数连续, 而

$$x = \frac{s - \sqrt{3}t}{2}, \quad y = \frac{\sqrt{3}s + t}{2},$$

证明

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$$

及

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

## 第五节 隐函数的求导公式

### 一、一个方程的情形

在第二章第四节中我们已经提出了隐函数的概念, 并且指出了不经过显化直接由方程

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

求它所确定的隐函数的导数的方法. 现在介绍隐函数存在定理, 并根据多元复合函数的求导法来导出隐函数的导数公式.

**隐函数存在定理 1** 设函数  $F(x, y)$  在点  $P(x_0, y_0)$  的某一邻域内具有连续偏导数, 且  $F(x_0, y_0) = 0, F_y(x_0, y_0) \neq 0$ , 则方程  $F(x, y) = 0$  在点  $(x_0, y_0)$  的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数  $y = f(x)$ , 它满足

条件  $y_0 = f(x_0)$ , 并有

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}. \quad (2)$$

公式(2)就是隐函数的求导公式.

这个定理我们不证. 现仅就公式(2)作如下推导.

将方程(1)所确定的函数  $y = f(x)$  代入(1), 得恒等式

$$F(x, f(x)) \equiv 0,$$

其左端可以看做是  $x$  的一个复合函数, 求这个函数的全导数, 由于恒等式两端求导后仍然恒等, 即得

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0,$$

由于  $F_y$  连续, 且  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ , 所以存在  $(x_0, y_0)$  的一个邻域, 在这个邻域内  $F_y \neq 0$ , 于是得

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

如果  $F(x, y)$  的二阶偏导数也都连续, 我们可以把等式(2)的两端看做  $x$  的复合函数而再一次求导, 即得

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{F_x}{F_y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{F_x}{F_y} \right) \frac{dy}{dx} \\ &= -\frac{F_{xx}F_y - F_{xy}F_x}{F_y^2} - \frac{F_{xy}F_y - F_{yy}F_x}{F_y^2} \left( -\frac{F_x}{F_y} \right) \\ &= \frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{xy}F_x^2}{F_y^3}. \end{aligned}$$

**例 1** 验证方程  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  在点  $(0, 1)$  的某一邻域内能唯一确定一个有连续导数、当  $x = 0$  时  $y = 1$  的隐函数  $y = f(x)$ , 并求这函数的一阶与二阶导数在  $x = 0$  的值.

解 设  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ , 则  $F_x = 2x$ ,  $F_y = 2y$ ,  $F(0, 1) = 0$ ,  $F_y(0, 1) = 2 \neq 0$ . 因此由定理 1 可知, 方程  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  在点  $(0, 1)$  的某邻域内能唯一确定一个有连续导数、当  $x = 0$  时  $y = 1$  的函数  $y = f(x)$ .

下面求这函数的一阶及二阶导数.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{x}{y}, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = 0;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{y - x \left( -\frac{x}{y} \right)}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3},$$

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = -1.$$

隐函数存在定理还可以推广到多元函数.既然一个二元方程(1)可以确定一个一元隐函数,那么一个三元方程

$$F(x, y, z) = 0 \quad (3)$$

就有可能确定一个二元隐函数.

与定理1一样,我们同样可以由三元函数  $F(x, y, z)$  的性质来断定由方程  $F(x, y, z) = 0$  所确定的二元函数  $z = f(x, y)$  的存在以及这个函数的性质.这就是下面的定理.

**隐函数存在定理2** 设函数  $F(x, y, z)$  在点  $P(x_0, y_0, z_0)$  的某一邻域内具有连续偏导数,且  $F(x_0, y_0, z_0) = 0, F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ ,则方程  $F(x, y, z) = 0$  在点  $(x_0, y_0, z_0)$  的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数  $z = f(x, y)$ ,它满足条件  $z_0 = f(x_0, y_0)$ ,并有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}. \quad (4)$$

这个定理我们不证.与定理1类似,仅就公式(4)作如下推导.

由于  $F(x, y, f(x, y)) \equiv 0$ ,

将上式两端分别对  $x$  和  $y$  求导,应用复合函数求导法则得

$$F_x + F_z \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad F_y + F_z \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

因为  $F_z$  连续,且  $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ ,所以存在点  $(x_0, y_0, z_0)$  的一个邻域,在这个邻域内  $F_z \neq 0$ ,于是得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

**例2** 设  $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$ ,求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ .

解 设  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4z$ ,则  $F_x = 2x, F_z = 2z - 4$ .当  $z \neq 2$  时,应用公式(4),得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{2-z}.$$

再一次对  $x$  求偏导数,得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(2-z) + x \frac{\partial z}{\partial x}}{(2-z)^2} = \frac{(2-z) + x \left( \frac{x}{2-z} \right)}{(2-z)^2} = \frac{(2-z)^2 + x^2}{(2-z)^3}.$$

## 二、方程组的情形

下面我们将隐函数存在定理作另一方面的推广. 我们不仅增加方程中变量的个数, 而且增加方程的个数. 例如, 考虑方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

这时, 在四个变量中, 一般只能有两个变量独立变化, 因此方程组(5)就有可能确定两个二元函数. 在这种情况下, 我们可以由函数  $F, G$  的性质来断定由方程组(5)所确定的两个二元函数的存在以及它们的性质. 我们有下面的定理.

**隐函数存在定理 3** 设  $F(x, y, u, v), G(x, y, u, v)$  在点  $P(x_0, y_0, u_0, v_0)$  的某一邻域内具有对各个变量的连续偏导数, 又  $F(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0, G(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$ , 且偏导数所组成的函数行列式(或称雅可比(Jacobi)式)

$$J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$$

在点  $P(x_0, y_0, u_0, v_0)$  不等于零, 则方程组  $F(x, y, u, v) = 0, G(x, y, u, v) = 0$  在点  $(x_0, y_0, u_0, v_0)$  的某一邻域内恒能唯一确定一组连续且具有连续偏导数的函数  $u = u(x, y), v = v(x, y)$ , 它们满足条件  $u_0 = u(x_0, y_0), v_0 = v(x_0, y_0)$ , 并有

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}.$$

这个定理我们不证. 与前两个定理类似, 下面仅就公式(6)作如下推导.

由于  $F[x, y, u(x, y), v(x, y)] \equiv 0$ ,

$$G[x, y, u(x, y), v(x, y)] \equiv 0,$$

将恒等式两边分别对  $x$  求导, 应用复合函数求导法则得

$$\begin{cases} F_x + F_u \frac{\partial u}{\partial x} + F_v \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ G_x + G_u \frac{\partial u}{\partial x} + G_v \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

这是关于  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$  的线性方程组, 由假设可知在点  $P(x_0, y_0, u_0, v_0)$  的一个邻域内, 系数行列式

$$J = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} \neq 0,$$

从而可解出  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ , 得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)}.$$

同理, 可得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)}.$$

**例 3** 设  $xu - yv = 0, yu + xv = 1$ , 求  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$  和  $\frac{\partial v}{\partial y}$ .

**解** 此题可直接利用公式(6), 但也可依照推导公式(6)的方法来求解. 下面我们用后一种方法来做.

将所给方程的两边对  $x$  求导并移项, 得

$$\begin{cases} x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial v}{\partial x} = -u, \\ y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial v}{\partial x} = -v. \end{cases}$$

在  $J = \begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2 + y^2 \neq 0$  的条件下,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} -u & -y \\ -v & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} x & -u \\ y & -v \\ x & -y \\ y & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & -u \\ y & -v \\ x & -y \\ y & x \end{vmatrix}} = \frac{yu - xv}{x^2 + y^2}.$$

将所给方程的两边对  $y$  求导. 用同样方法在  $J = x^2 + y^2 \neq 0$  的条件下可得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xv - yu}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2}.$$

**例 4** 设函数  $x = x(u, v), y = y(u, v)$  在点  $(u, v)$  的某一邻域内连续且有连续偏导数, 又

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0.$$

(1) 证明方程组

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v) \end{cases} \quad (7)$$

在点  $(x, y, u, v)$  的某一邻域内唯一确定一组连续且具有连续偏导数的反函数  $u = u(x, y), v = v(x, y)$ .

(2) 求反函数  $u = u(x, y), v = v(x, y)$  对  $x, y$  的偏导数.

**解** (1) 将方程组(7)改写成下面的形式

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) \equiv x - x(u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) \equiv y - y(u, v) = 0. \end{cases}$$

则按假设  $J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$ .

由隐函数存在定理 3, 即得所要证的结论.

(2) 将方程组(7)所确定的反函数  $u = u(x, y), v = v(x, y)$  代入(7), 即得

$$\begin{cases} x \equiv x[u(x, y), v(x, y)], \\ y \equiv y[u(x, y), v(x, y)]. \end{cases}$$

将上述恒等式两边分别对  $x$  求偏导数, 得

$$\begin{cases} 1 = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \\ 0 = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

由于  $J \neq 0$ , 故可解得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial u}.$$

同理, 可得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial u}.$$

### 习 题 9-5

1. 设  $\sin y + e^x - xy^2 = 0$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .

2. 设  $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .

3. 设  $x + 2y + z - 2\sqrt{xyz} = 0$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}$  及  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

4. 设  $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}$  及  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

5. 设  $2\sin(x + 2y - 3z) = x + 2y - 3z$ , 证明  $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$ .

6. 设  $x = x(y, z)$ ,  $y = y(x, z)$ ,  $z = z(x, y)$  都是由方程  $F(x, y, z) = 0$  所确定的具有连续偏导数的函数, 证明

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

7. 设  $\Phi(u, v)$  具有连续偏导数, 证明由方程  $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$  所确定的函数  $z = f(x, y)$  满足  $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = c$ .

8. 设  $e^x - xyz = 0$ , 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ .

9. 设  $z^3 - 3xyz = a^3$ , 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

10. 求由下列方程组所确定的函数的导数或偏导数:

(1) 设  $\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20, \end{cases}$  求  $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ ;

(2) 设  $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \end{cases}$  求  $\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}$ ;

(3) 设  $\begin{cases} u = f(ax, v + y), \\ v = g(u - x, v^2 y), \end{cases}$  其中  $f, g$  具有一阶连续偏导数, 求  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ ;

(4) 设  $\begin{cases} x = e^u + u \sin v, \\ y = e^u - u \cos v, \end{cases}$  求  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ .

11. 设  $y = f(x, t)$ , 而  $t = t(x, y)$  是由方程  $F(x, y, t) = 0$  所确定的函数, 其中  $f, F$  都具有一阶连续偏导数. 试证明

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial t}}.$$

## 第六节 多元函数微分学的几何应用

本节先介绍一元向量值函数及其导数,再讨论多元函数微分学的几何应用.

### 一、一元向量值函数及其导数

由空间解析几何知道,空间曲线  $\Gamma$  的参数方程为

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), & t \in [\alpha, \beta], \\ z = \omega(t), \end{cases} \quad (1)$$

方程(1)也可以写成向量形式.若记

$$r = xi + yj + zk, \quad f(t) = \varphi(t)i + \psi(t)j + \omega(t)k,$$

则方程(1)就成为向量方程

$$r = f(t), \quad t \in [\alpha, \beta]. \quad (2)$$

方程(2)确定了一个映射  $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}^3$ . 由于这个映射将每一个  $t \in [\alpha, \beta]$ , 映成一个向量  $f(t) \in \mathbf{R}^3$ , 故称这映射为一元向量值函数. 一般地, 有如下定义。

**定义** 设数集  $D \subset \mathbf{R}$ , 则称映射  $f: D \rightarrow \mathbf{R}^n$  为一元向量值函数, 通常记为

$$r = f(t), \quad t \in D,$$

其中数集  $D$  称为函数的定义域,  $t$  称为自变量,  $r$  称为因变量.

一元向量值函数是普通一元函数的推广. 现在, 自变量  $t$  依然取实数值, 但因变量  $r$  不取实数值, 而取值为  $n$  维向量.

在本教材中, 只讨论一元向量值函数, 并对因变量的取值以  $n=3$  的情形作为代表, 即  $r$  的取值为 3 维向量. 为简单起见, 以下将一元向量值函数简称为向量值函数, 并把普通的实值函数称为数量函数.

在  $\mathbf{R}^3$  中, 若向量值函数  $f(t), t \in D$  的三个分量函数依次为  $f_1(t), f_2(t), f_3(t), t \in D$ , 则向量值函数  $f$  可表示为

$$f(t) = f_1(t)i + f_2(t)j + f_3(t)k, \quad t \in D \quad (3)$$

或

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)), \quad t \in D. \quad (3')$$

设(变)向量  $r$  的起点取在坐标系的原点  $O$  处, 终点在  $M$  处, 即  $r = \overrightarrow{OM}$ (图

9-6). 当  $t$  改变时,  $r$  跟着改变, 从而终点  $M$  也随之改变. 终点  $M$  的轨迹(记作曲线  $\Gamma$ )称为向量值函数  $r = f(t)$ ,  $t \in D$  的终端曲线, 曲线  $\Gamma$  也称为向量值函数  $r = f(t)$ ,  $t \in D$  的图形.

由于向量值函数  $r = f(t)$ ,  $t \in D$  与空间曲线  $\Gamma$  是一一对应的, 因此

$$r = f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)), t \in D \quad (4)$$

称为曲线  $\Gamma$  的向量方程.

根据  $\mathbf{R}^3$  中的向量的线性运算及向量的模的概念, 可以类似于定义数量函数的极限、连续、导数等概念的形式来定义向量值函数的相应概念, 现简述如下.

**定义 1** 设向量值函数  $f(t)$  在点  $t_0$  的某一去心邻域内有定义, 如果存在一个常向量  $r_0$ , 对于任意给定的正数  $\epsilon$ , 总存在正数  $\delta$ , 使得当  $t$  满足  $0 < |t - t_0| < \delta$  时, 对应的函数值  $f(t)$  都满足不等式

$$|f(t) - r_0| < \epsilon,$$

那么, 常向量  $r_0$  就叫做向量值函数  $f(t)$  当  $t \rightarrow t_0$  时的极限, 记作

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = r_0 \quad \text{或} \quad f(t) \rightarrow r_0, t \rightarrow t_0.$$

容易证明: 向量值函数  $f(t)$  当  $t \rightarrow t_0$  时的极限存在的充分必要条件是:  $f(t)$  的三个分量函数  $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$  当  $t \rightarrow t_0$  时的极限都存在; 在函数  $f(t)$  当  $t \rightarrow t_0$  时的极限存在时, 其极限

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \left( \lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t), \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t), \lim_{t \rightarrow t_0} f_3(t) \right). \quad (5)$$

设向量值函数  $f(t)$  在点  $t_0$  的某一邻域内有定义, 若

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0),$$

则称向量值函数  $f(t)$  在  $t_0$  连续.

向量值函数  $f(t)$  在  $t_0$  连续的充分必要条件是:  $f(t)$  的三个分量函数  $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$  都在  $t_0$  连续.

设向量值函数  $f(t)$ ,  $t \in D$ . 若  $D_1 \subset D$ ,  $f(t)$  在  $D_1$  中的每一点处都连续, 则称  $f(t)$  在  $D_1$  上连续, 并称  $f(t)$  是  $D_1$  上的连续函数.

下面, 给出向量值函数的导数(或导向量)的定义.

**定义 2** 设向量值函数  $r = f(t)$  在点  $t_0$  的某一邻域内有定义, 如果

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

存在, 那么就称这个极限向量为向量值函数  $r = f(t)$  在  $t_0$  处的导数或导向量,

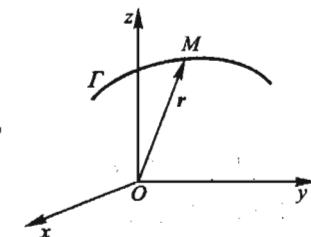


图 9-6

www.bjtu.org

记作  $f'(t_0)$  或  $\left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_{t=t_0}$ .

设向量值函数  $\mathbf{r} = f(t), t \in D$ . 若  $D_1 \subset D, f(t)$  在  $D_1$  中的每一点  $t$  处都存在导向量  $f'(t)$  (或  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ ), 那么就称  $f(t)$  在  $D_1$  上可导.

向量值函数  $f(t)$  在  $t_0$  可导(即存在导数)的充分必要条件是:  $f(t)$  的三个分量函数  $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$  都在  $t_0$  可导; 当  $f(t)$  在  $t_0$  可导时, 其导数

$$f'(t_0) = f'_1(t_0)\mathbf{i} + f'_2(t_0)\mathbf{j} + f'_3(t_0)\mathbf{k}. \quad (6)$$

向量值函数的导数运算法则与数量函数的导数运算法则的形式相同, 现列出如下:

设  $\mathbf{u}(t)、\mathbf{v}(t)$  是可导的向量值函数,  $\mathbf{C}$  是常向量,  $c$  是任一常数,  $\varphi(t)$  是可导的数量函数, 则

$$(1) \frac{d}{dt}\mathbf{C} = \mathbf{0};$$

$$(2) \frac{d}{dt}[c\mathbf{u}(t)] = c\mathbf{u}'(t);$$

$$(3) \frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \pm \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \pm \mathbf{v}'(t);$$

$$(4) \frac{d}{dt}[\varphi(t)\mathbf{u}(t)] = \varphi'(t)\mathbf{u}(t) + \varphi(t)\mathbf{u}'(t);$$

$$(5) \frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t);$$

$$(6) \frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t);$$

$$(7) \frac{d}{dt}\mathbf{u}[\varphi(t)] = \varphi'(t)\mathbf{u}'[\varphi(t)].$$

仿照对数量函数的导数运算法则的证明方法, 或对向量函数的分量运用对应的数量函数的导数运算法则, 可以证明以上法则, 读者可作为练习自行证明.

下面, 讨论向量值函数  $\mathbf{r} = f(t)$  的导向量的几何意义.

设空间曲线  $\Gamma$  是向量值函数  $\mathbf{r} = f(t), t \in D$  的终端曲线, 向量  $\overrightarrow{OM} = f(t_0), \overrightarrow{ON} = f(t_0 + \Delta t)$ , 如图 9-7 所示. 又设导向量  $f'(t_0)$  不是零向量.

当  $\Delta t > 0$  时, 向量  $\Delta\mathbf{r} = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$  的指向与  $t$  增大时点  $M$  移动的走向(以下简称  $t$  的增长方向)一致; 当  $\Delta t < 0$  时, 向量  $\Delta\mathbf{r} = f(t_0 + \Delta t) -$

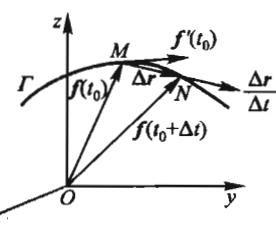


图 9-7

$f(t_0)$  的指向与  $t$  的增长方向相反. 但不论  $\Delta t > 0$  或  $\Delta t < 0$ , 向量  $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \Delta \mathbf{r}$  的

指向总与  $t$  的增长方向一致. 于是, 导向量  $\mathbf{f}'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$  是向量值函数  $\mathbf{r} = f(t)$  的终端曲线  $\Gamma$  在点  $M$  处的一个切向量, 其指向与  $t$  的增长方向一致.

设向量值函数  $\mathbf{r} = f(t)$  是沿空间光滑曲线运动的质点  $M$  的位置向量, 则向量值函数  $\mathbf{r} = f(t)$  的导向量有以下的物理意义:

$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  是质点  $M$  的速度向量, 其方向与曲线相切;

$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$  是质点  $M$  的加速度向量.

例 1 设  $f(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + tk$ , 求  $\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(t)$ .

解 
$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(t) &= \left( \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos t \right) \mathbf{i} + \left( \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin t \right) \mathbf{j} + \left( \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} t \right) \mathbf{k} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{j} + \frac{\pi}{4} \mathbf{k}.\end{aligned}$$

例 2 设空间曲线  $\Gamma$  的向量方程为

$$\mathbf{r} = f(t) = (t^2 + 1, 4t - 3, 2t^2 - 6t), t \in \mathbb{R},$$

求曲线  $\Gamma$  在与  $t_0 = 2$  相应的点处的单位切向量.

解 
$$f'(t) = (2t, 4, 4t - 6), t \in \mathbb{R},$$

$$f'(2) = (4, 4, 2),$$

$$|f'(2)| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = 6.$$

由导向量的几何意义知, 曲线  $\Gamma$  在与  $t=2$  相应的点处的一个单位切向量是  $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ , 其指向与  $t$  的增长方向一致; 另一个单位切向量是  $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ , 其指向与  $t$  的增长方向相反.

例 3 一个人在悬挂式滑翔机上由于快速上升气流而沿位置向量为  $\mathbf{r} = f(t) = (3\cos t)\mathbf{i} + (3\sin t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$  的路径螺旋式向上. 求

(1) 滑翔机在任意时刻  $t$  的速度向量和加速度向量;

(2) 滑翔机在任意时刻  $t$  的速率;

(3) 滑翔机的加速度与速度正交的时刻.

解 (1) 
$$\mathbf{r} = f(t) = (3\cos t)\mathbf{i} + (3\sin t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k},$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-3\sin t)\mathbf{i} + (3\cos t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k},$$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = (-3\cos t)\mathbf{i} - (3\sin t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

(2) 速率是速度  $v$  的大小, 即

$$|v| = \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2 + (2t)^2} = \sqrt{9 + 4t^2}.$$

这一结果表明: 滑翔机沿其路径升高时, 运动得越来越快.

(3) 由  $v \cdot a = 9\sin t \cos t - 9\sin t \cos t + 4t = 0$ , 得  $t = 0$ . 这表明: 加速度与速度正交的唯一时刻是在  $t = 0$ .

## 二、空间曲线的切线与法平面

设空间曲线  $\Gamma$  的参数方程为

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \omega(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]. \quad (7)$$

这里假定(7)式的三个函数都在  $[\alpha, \beta]$  上可导, 且三个导数不同时为零.

现在要求曲线  $\Gamma$  在其上一点  $M(x_0, y_0, z_0)$  处的切线及法平面方程.

设与点  $M$  对应的参数为  $t_0$ , 记  $f(t) = (\varphi(t), \psi(t), \omega(t))$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ . 由向量值函数的导向量的几何意义知, 向量  $\mathbf{T} = f'(t_0) = (\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0))$  就是曲线  $\Gamma$  在点  $M$  处的一个切向量, 从而曲线  $\Gamma$  在点  $M$  处的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z - z_0}{\omega'(t_0)}. \quad (8)$$

通过点  $M$  且与切线垂直的平面称为曲线  $\Gamma$  在点  $M$  处的法平面, 它是通过点  $M(x_0, y_0, z_0)$  且以  $\mathbf{T} = f'(t_0)$  为法向量的平面, 因此法平面方程为

$$\varphi'(t_0)(x - x_0) + \psi'(t_0)(y - y_0) + \omega'(t_0)(z - z_0) = 0. \quad (9)$$

例 4 求曲线  $x = t$ ,  $y = t^2$ ,  $z = t^3$  在点  $(1, 1, 1)$  处的切线及法平面方程.

解 因为  $x'_t = 1$ ,  $y'_t = 2t$ ,  $z'_t = 3t^2$ , 而点  $(1, 1, 1)$  所对应的参数  $t_0 = 1$ , 所以

$$\mathbf{T} = (1, 2, 3).$$

于是, 切线方程为

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 1}{3},$$

法平面方程为

$$(x - 1) + 2(y - 1) + 3(z - 1) = 0,$$

即

$$x + 2y + 3z = 6.$$

现在我们再来讨论空间曲线  $\Gamma$  的方程以另外两种形式给出的情形.

如果空间曲线  $\Gamma$  的方程以

$$\begin{cases} y = \varphi(x), \\ z = \psi(x) \end{cases}$$

的形式给出, 取  $x$  为参数, 它就可以表为参数方程的形式

$$\begin{cases} x = x, \\ y = \varphi(x), \\ z = \psi(x). \end{cases}$$

若  $\varphi(x), \psi(x)$  都在  $x = x_0$  处可导, 那么根据上面的讨论可知,  $\mathbf{T} = (1, \varphi'(x_0), \psi'(x_0))$ , 因此曲线  $\Gamma$  在点  $M(x_0, y_0, z_0)$  处的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{\varphi'(x_0)} = \frac{z - z_0}{\psi'(x_0)}, \quad (10)$$

在点  $M(x_0, y_0, z_0)$  处的法平面方程为

$$(x - x_0) + \varphi'(x_0)(y - y_0) + \psi'(x_0)(z - z_0) = 0. \quad (11)$$

设空间曲线  $\Gamma$  的方程以

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

的形式给出,  $M(x_0, y_0, z_0)$  是曲线  $\Gamma$  上的一个点. 又设  $F, G$  有对各个变量的连续偏导数, 且

$$\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} \neq 0.$$

这时方程组(12)在点  $M(x_0, y_0, z_0)$  的某一邻域内确定了一组函数  $y = \varphi(x)$ ,  $z = \psi(x)$ . 要求曲线  $\Gamma$  在点  $M$  处的切线方程和法平面方程, 只要求出  $\varphi'(x_0)$ ,  $\psi'(x_0)$ , 然后代入(10)、(11)两式就行了. 为此, 我们在恒等式

$$F[x, \varphi(x), \psi(x)] = 0,$$

$$G[x, \varphi(x), \psi(x)] = 0$$

两边分别对  $x$  求全导数, 得

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0. \end{cases}$$

由假设可知, 在点  $M$  的某个邻域内

$$J = \left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} \neq 0,$$

$$\text{故可解得 } \frac{dy}{dx} = \varphi'(x) = \frac{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \\ \hline F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \\ \hline F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}}, \quad \frac{dz}{dx} = \psi'(x) = \frac{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \\ \hline F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \\ \hline F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}}.$$

于是  $\mathbf{T} = (1, \varphi'(x_0), \psi'(x_0))$  是曲线  $\Gamma$  在点  $M$  处的一个切向量, 这里

$$\varphi'(x_0) = \frac{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \\ \hline F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_M}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \\ \hline F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_M}, \quad \psi'(x_0) = \frac{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \\ \hline F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_M}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \\ \hline F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_M},$$

分子分母中带下标  $M$  的行列式表示行列式在点  $M(x_0, y_0, z_0)$  的值. 把上面的切向量  $\mathbf{T}$  乘以  $\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \\ \hline \end{vmatrix}_M$ , 得

$$\mathbf{T}_1 = \left( \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \\ \hline \end{vmatrix}_M, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \\ \hline \end{vmatrix}_M, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \\ \hline \end{vmatrix}_M \right),$$

这也是曲线  $\Gamma$  在点  $M$  处的一个切向量. 由此可写出曲线  $\Gamma$  在点  $M(x_0, y_0, z_0)$  处的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \\ \hline \end{vmatrix}_M} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \\ \hline \end{vmatrix}_M} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \\ \hline \end{vmatrix}_M}, \quad (13)$$

曲线  $\Gamma$  在点  $M(x_0, y_0, z_0)$  处的法平面方程为

$$\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \\ \hline \end{vmatrix}_M (x - x_0) + \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \\ \hline \end{vmatrix}_M (y - y_0) + \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \\ \hline \end{vmatrix}_M (z - z_0) = 0. \quad (14)$$

如果  $\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \Big|_M = 0$  而  $\frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} \Big|_M, \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \Big|_M$  中至少有一个不等于零, 我们可得同样的结果.

**例 5** 求曲线  $x^2 + y^2 + z^2 = 6, x + y + z = 0$  在点  $(1, -2, 1)$  处的切线及法平面方程.

**解** 这里可直接利用公式(13)及(14)来解, 但下面我们依照推导公式的方法来做.

将所给方程的两边对  $x$  求导并移项, 得

$$\begin{cases} y \frac{dy}{dx} + z \frac{dz}{dx} = -x, \\ \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = -1. \end{cases}$$

由此得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} -x & z \\ -1 & 1 \\ y & z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y & -x \\ 1 & -1 \\ y & z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{z-x}{y-z}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} y & -x \\ 1 & -1 \\ y & z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y & z \\ 1 & 1 \\ y & z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{x-y}{y-z}.$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1,-2,1)} = 0, \quad \left. \frac{dz}{dx} \right|_{(1,-2,1)} = -1.$$

从而

$$\mathbf{T} = (1, 0, -1).$$

故所求切线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{-1},$$

法平面方程为

$$(x-1) + 0 \cdot (y+2) - (z-1) = 0,$$

即

$$x - z = 0.$$

### 三、曲面的切平面与法线

我们先讨论由隐式给出曲面方程

$$F(x, y, z) = 0 \tag{15}$$

的情形,然后把由显式给出的曲面方程  $z = f(x, y)$  作为它的特殊情形.

设曲面  $\Sigma$  由方程(15)给出,  $M(x_0, y_0, z_0)$  是曲面  $\Sigma$  上的一点,并设函数  $F(x, y, z)$  的偏导数在该点连续且不同时为零. 在曲面  $\Sigma$  上,通过点  $M$  任意引一条曲线  $\Gamma$  (图 9-8),假定曲线  $\Gamma$  的参数方程为

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \omega(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta), \tag{16}$$

$t = t_0$  对应于点  $M(x_0, y_0, z_0)$  且  $\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0)$  不全为零,则由(8)式可得这曲线的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z - z_0}{\omega'(t_0)}.$$

我们现在要证明,在曲面  $\Sigma$  上通过点  $M$  且在点  $M$  处具有切线的任何曲线,它们在点  $M$  处的切线都在同一个平面上. 事实上,因为曲线  $\Gamma$  完全在曲面  $\Sigma$  上,所以有恒等式

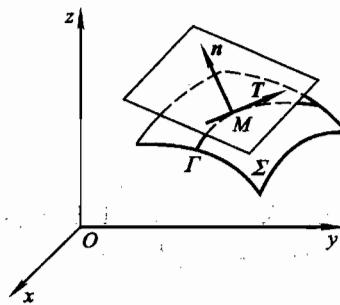


图 9-8

$$F[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)] \equiv 0,$$

又因  $F(x, y, z)$  在点  $(x_0, y_0, z_0)$  处有连续偏导数, 且  $\varphi'(t_0)$ 、 $\psi'(t_0)$  和  $\omega'(t_0)$  存在, 所以这恒等式左边的复合函数在  $t = t_0$  时有全导数, 且这全导数等于零:

$$\frac{d}{dt} F[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)] \Big|_{t=t_0} = 0,$$

即有

$$F_x(x_0, y_0, z_0)\varphi'(t_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)\psi'(t_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)\omega'(t_0) = 0. \quad (17)$$

引入向量

$$\mathbf{n} = (F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0)),$$

则(17)式表示曲线(16)在点  $M$  处的切向量

$$\mathbf{T} = (\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0))$$

与向量  $\mathbf{n}$  垂直. 因为曲线(16)是曲面上通过点  $M$  的任意一条曲线, 它们在点  $M$  的切线都与同一个向量  $\mathbf{n}$  垂直, 所以曲面上通过点  $M$  的一切曲线在点  $M$  的切线都在同一个平面上(图 9-8). 这个平面称为曲面  $\Sigma$  在点  $M$  的切平面. 这切平面的方程是

$$\begin{aligned} & F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \\ & F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

通过点  $M(x_0, y_0, z_0)$  且垂直于切平面(18)的直线称为曲面在该点的法线. 法线方程是

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}. \quad (19)$$

垂直于曲面上切平面的向量称为曲面的法向量. 向量

$$\mathbf{n} = (F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0))$$

就是曲面  $\Sigma$  在点  $M$  处的一个法向量.

现在来考虑曲面方程

$$z = f(x, y). \quad (20)$$

令

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z,$$

可见

$$F_x(x, y, z) = f_x(x, y), \quad F_y(x, y, z) = f_y(x, y),$$

$$F_z(x, y, z) = -1.$$

于是, 当函数  $f(x, y)$  的偏导数  $f_x(x, y)$ 、 $f_y(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  连续时, 曲面(20)在点  $M(x_0, y_0, z_0)$  处的法向量为

$$\mathbf{n} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1),$$

切平面方程为

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

或

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0), \quad (21)$$

而法线方程为

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \quad (22)$$

这里顺便指出, 方程(21)右端恰好是函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的全微分, 而左端是切平面上点的竖坐标的增量. 因此, 函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的全微分, 在几何上表示曲面  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0, z_0)$  处的切平面上点的竖坐标的增量.

如果用  $\alpha, \beta, \gamma$  表示曲面的法向量的方向角, 并假定法向量的方向是向上的, 即使得它与  $z$  轴的正向所成的角  $\gamma$  是一锐角, 则法向量的方向余弦为

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{-f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad \cos \beta = \frac{-f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \\ \cos \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}. \end{aligned}$$

这里, 把  $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$  分别简记为  $f_x, f_y$ .

**例 6** 求球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 14$  在点  $(1, 2, 3)$  处的切平面及法线方程.

解

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14,$$

$$\mathbf{n} = (F_x, F_y, F_z) = (2x, 2y, 2z),$$

$$\mathbf{n}|_{(1,2,3)} = (2, 4, 6).$$

所以在点  $(1, 2, 3)$  处此球面的切平面方程为

$$2(x - 1) + 4(y - 2) + 6(z - 3) = 0,$$

即

$$x + 2y + 3z - 14 = 0.$$

法线方程为

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 3}{3},$$

即

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}.$$

由此可见, 法线经过原点(即球心).

**例 7** 求旋转抛物面  $z = x^2 + y^2 - 1$  在点  $(2, 1, 4)$  处的切平面及法线方程.

解

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1,$$

$$\mathbf{n} = (f_x, f_y, -1) = (2x, 2y, -1),$$

$$\mathbf{n}|_{(2,1,4)} = (4, 2, -1).$$

所以在点  $(2, 1, 4)$  处的切平面方程为

$$4(x-2) + 2(y-1) - (z-4) = 0.$$

即

$$4x + 2y - z - 6 = 0.$$

法线方程为

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{-1}.$$

## 习 题 9-6

1. 设  $\mathbf{f}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{g}(t) = g_1(t)\mathbf{i} + g_2(t)\mathbf{j} + g_3(t)\mathbf{k}$ ,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{u}, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{g}(t) = \mathbf{v},$$

证明

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [\mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}(t)] = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

2. 下列各题中,  $\mathbf{r} = \mathbf{f}(t)$  是空间中的质点  $M$  在时刻  $t$  的位置, 求质点  $M$  在时刻  $t_0$  的速度向量和加速度向量以及在任意时刻  $t$  的速率.

$$(1) \mathbf{r} = \mathbf{f}(t) = (t+1)\mathbf{i} + (t^2-1)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}, t_0 = 1;$$

$$(2) \mathbf{r} = \mathbf{f}(t) = (2\cos t)\mathbf{i} + (3\sin t)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}, t_0 = \frac{\pi}{2};$$

$$(3) \mathbf{r} = \mathbf{f}(t) = (2\ln(t+1))\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}, t_0 = 1.$$

3. 求曲线  $\mathbf{r} = \mathbf{f}(t) = (t - \sin t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j} + (4\sin \frac{t}{2})\mathbf{k}$  在与  $t_0 = \frac{\pi}{2}$  相应的点处的切线及法平面方程.

4. 求曲线  $x = \frac{t}{1+t}$ ,  $y = \frac{1+t}{t}$ ,  $z = t^2$  在对应于  $t_0 = 1$  的点处的切线及法平面方程.

5. 求曲线  $y^2 = 2mx$ ,  $z^2 = m - x$  在点  $(x_0, y_0, z_0)$  处的切线及法平面方程.

6. 求曲线  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 3x = 0, \\ 2x - 3y + 5z - 4 = 0 \end{cases}$  在点  $(1, 1, 1)$  处的切线及法平面方程.

7. 求出曲线  $x = t$ ,  $y = t^2$ ,  $z = t^3$  上的点, 使在该点的切线平行于平面  $x + 2y + z = 4$ .

8. 求曲面  $e^z - z + xy = 3$  在点  $(2, 1, 0)$  处的切平面及法线方程.

9. 求曲面  $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$  在点  $(x_0, y_0, z_0)$  处的切平面及法线方程.

10. 求椭球面  $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$  上平行于平面  $x - y + 2z = 0$  的切平面方程.

11. 求旋转椭球面  $3x^2 + y^2 + z^2 = 16$  上点  $(-1, -2, 3)$  处的切平面与  $xOy$  面的夹角的余弦.

12. 试证曲面  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$  ( $a > 0$ ) 上任何点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于  $a$ .

13. 设  $\mathbf{u}(t)$ 、 $\mathbf{v}(t)$  是可导的向量值函数, 证明:

$$(1) \frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) \pm \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \pm \mathbf{v}'(t);$$

$$(2) \frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t);$$

$$(3) \frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t).$$

## 第七节 方向导数与梯度

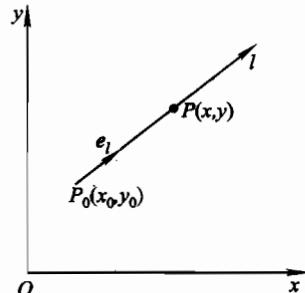
### 一、方向导数

偏导数反映的是函数沿坐标轴方向的变化率.但许多物理现象告诉我们,只考虑函数沿坐标轴方向的变化率是不够的.例如,热空气要向冷的地方流动,气象学中就要确定大气温度、气压沿着某些方向的变化率.因此我们有必要来讨论函数沿任一指定方向的变化率问题.

设  $l$  是  $xOy$  平面上以  $P_0(x_0, y_0)$  为始点的一条射线,  $\mathbf{e}_l = (\cos \alpha, \cos \beta)$  是与  $l$  同方向的单位向量(图 9-9).射线  $l$  的参数方程为

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t \cos \alpha, \quad (t \geq 0), \\ y &= y_0 + t \cos \beta \end{aligned}$$

设函数  $z = f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  的某个邻域  $U(P_0)$  内有定义,  $P(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta)$  为  $l$  上另一点, 且  $P \in U(P_0)$ . 如果函数增量  $f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta) - f(x_0, y_0)$  与  $P$  到  $P_0$  的距离  $|PP_0| = t$  的比值



$$\frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

图 9-9

当  $P$  沿着  $l$  趋于  $P_0$  (即  $t \rightarrow 0^+$ ) 时的极限存在, 则称此极限为函数  $f(x, y)$  在点  $P_0$  沿方向  $l$  的方向导数, 记作  $\frac{\partial f}{\partial l} \Big|_{(x_0, y_0)}$ , 即

$$\frac{\partial f}{\partial l} \Big|_{(x_0, y_0)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta) - f(x_0, y_0)}{t}. \quad (1)$$

从方向导数的定义可知, 方向导数  $\frac{\partial f}{\partial l} \Big|_{(x_0, y_0)}$  就是函数  $f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  处沿方向  $l$  的变化率. 若函数  $f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  的偏导数存在,  $\mathbf{e}_l = \mathbf{i} = (1, 0)$ , 则

$$\frac{\partial f}{\partial l} \Big|_{(x_0, y_0)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = f_x(x_0, y_0);$$

又若  $\mathbf{e}_l = \mathbf{j} = (0, 1)$ , 则

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} = f_y(x_0, y_0).$$

但反之,若  $e_l = i$ ,  $\left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)}$  存在,则  $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}$  未必存在. 例如,  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  在

点  $O(0,0)$  处沿  $l = i$  方向的方向导数  $\left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_{(0,0)} = 1$ , 而偏导数  $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0,0)}$  不存在.

关于方向导数的存在及计算, 我们有以下定理.

**定理** 如果函数  $f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  可微分, 那么函数在该点沿任一方向  $l$  的方向导数存在, 且有

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0) \cos \beta, \quad (2)$$

其中  $\cos \alpha, \cos \beta$  是方向  $l$  的方向余弦.

**证** 由假设,  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  可微分, 故有

$$\begin{aligned} & f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}). \end{aligned}$$

但点  $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$  在以  $(x_0, y_0)$  为始点的射线  $l$  上时, 应有  $\Delta x = t \cos \alpha$ ,  $\Delta y = t \cos \beta$ ,  $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = t$ . 所以

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta) - f(x_0, y_0)}{t} \\ &= f_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0) \cos \beta. \end{aligned}$$

这就证明了方向导数存在, 且其值为

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0) \cos \beta.$$

**例 1** 求函数  $z = xe^{2y}$  在点  $P(1, 0)$  处沿从点  $P(1, 0)$  到点  $Q(2, -1)$  的方向的方向导数.

**解** 这里方向  $l$  即向量  $\overrightarrow{PQ} = (1, -1)$  的方向, 与  $l$  同向的单位向量为  $e_l = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ .

因为函数可微分, 且

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,0)} = e^{2y} \Big|_{(1,0)} = 1,$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1,0)} = 2xe^{2y} \Big|_{(1,0)} = 2,$$

故所求方向导数为

$$\frac{\partial z}{\partial l} \Big|_{(1,0)} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \cdot \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

对于三元函数  $f(x, y, z)$  来说, 它在空间一点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  沿方向  $e_l = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t}. \quad (3)$$

同样可以证明: 如果函数  $f(x, y, z)$  在点  $(x_0, y_0, z_0)$  可微分, 那么函数在该点沿着方向  $e_l = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  的方向导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial l} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} &= f_x(x_0, y_0, z_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0, z_0) \cos \beta + \\ &\quad f_z(x_0, y_0, z_0) \cos \gamma. \end{aligned} \quad (4)$$

**例 2** 求  $f(x, y, z) = xy + yz + zx$  在点  $(1, 1, 2)$  沿方向  $l$  的方向导数, 其中  $l$  的方向角分别为  $60^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ .

解 与  $l$  同向的单位向量

$$e_l = (\cos 60^\circ, \cos 45^\circ, \cos 60^\circ) = \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

因为函数可微分, 且

$$\begin{aligned} f_x(1, 1, 2) &= (y + z) \Big|_{(1, 1, 2)} = 3, \\ f_y(1, 1, 2) &= (x + z) \Big|_{(1, 1, 2)} = 3, \\ f_z(1, 1, 2) &= (y + x) \Big|_{(1, 1, 2)} = 2. \end{aligned}$$

由公式(4), 得

$$\frac{\partial f}{\partial l} \Big|_{(1, 1, 2)} = 3 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(5 + 3\sqrt{2}).$$

## 二、梯度

与方向导数有关联的一个概念是函数的梯度. 在二元函数的情形, 设函数  $f(x, y)$  在平面区域  $D$  内具有一阶连续偏导数, 则对于每一点  $P_0(x_0, y_0) \in D$ , 都可定出一个向量

$$f_x(x_0, y_0) i + f_y(x_0, y_0) j,$$

这向量称为函数  $f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  的梯度, 记作  $\text{grad } f(x_0, y_0)$  或

$\nabla f(x_0, y_0)$ , 即

$$\mathbf{grad} \ f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \mathbf{i} + f_y(x_0, y_0) \mathbf{j}.$$

其中  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j}$  称为 (二维的) 向量微分算子或 Nabla 算子,  $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j}$ .

如果函数  $f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  可微分,  $e_l = (\cos \alpha, \cos \beta)$  是与方向  $l$  同向的单位向量, 则

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial l} \Big|_{(x_0, y_0)} &= f_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0) \cos \beta \\ &= \mathbf{grad} \ f(x_0, y_0) \cdot e_l = |\mathbf{grad} \ f(x_0, y_0)| \cos \theta, \end{aligned}$$

其中  $\theta = \hat{(\mathbf{grad} \ f(x_0, y_0), e_l)}$ .

这一关系式表明了函数在一点的梯度与函数在这点的方向导数间的关系. 特别, 由这关系可知:

(1) 当  $\theta = 0$ , 即方向  $e_l$  与梯度  $\mathbf{grad} \ f(x_0, y_0)$  的方向相同时, 函数  $f(x, y)$  增加最快. 此时, 函数在这个方向的方向导数达到最大值, 这个最大值就是梯度  $\mathbf{grad} \ f(x_0, y_0)$  的模, 即

$$\frac{\partial f}{\partial l} \Big|_{(x_0, y_0)} = |\mathbf{grad} \ f(x_0, y_0)|.$$

这个结果也表示: 函数  $f(x, y)$  在一点的梯度  $\mathbf{grad} \ f$  是这样一个向量, 它的方向是函数在这点的方向导数取得最大值的方向, 它的模就等于方向导数的最大值.

(2) 当  $\theta = \pi$ , 即方向  $e_l$  与梯度  $\mathbf{grad} \ f(x_0, y_0)$  的方向相反时, 函数  $f(x, y)$  减少最快, 函数在这个方向的方向导数达到最小值, 即

$$\frac{\partial f}{\partial l} \Big|_{(x_0, y_0)} = -|\mathbf{grad} \ f(x_0, y_0)|.$$

(3) 当  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , 即方向  $e_l$  与梯度  $\mathbf{grad} \ f(x_0, y_0)$  的方向正交时, 函数的变化率为零, 即

$$\frac{\partial f}{\partial l} \Big|_{(x_0, y_0)} = |\mathbf{grad} \ f(x_0, y_0)| \cos \theta = 0.$$

我们知道, 一般说来二元函数  $z = f(x, y)$  在几何上表示一个曲面, 这曲面被平面  $z = c$  ( $c$  是常数) 所截得的曲线  $L$  的方程为

$$\begin{cases} z = f(x, y), \\ z = c. \end{cases}$$

这条曲线  $L$  在  $xOy$  面上的投影是一条平面曲线  $L'$  (图 9-10), 它在  $xOy$  平面

直角坐标系中的方程为

$$f(x, y) = c.$$

对于曲线  $L^*$  上的一切点, 已给函数的函数值都是  $c$ , 所以我们称平面曲线  $L^*$  为函数  $z = f(x, y)$  的等值线.

若  $f_x, f_y$  不同时为零, 则等值线  $f(x, y) = c$  上任一点  $P_0(x_0, y_0)$  处的一个单位法向量为

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{f_x^2(x_0, y_0) + f_y^2(x_0, y_0)}}(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) \\ &= \frac{\nabla f(x_0, y_0)}{|\nabla f(x_0, y_0)|}. \end{aligned}$$

这表明函数  $f(x, y)$  在一点  $(x_0, y_0)$  的梯度  $\nabla f(x_0, y_0)$  的方向就是等值线  $f(x, y) = c$  在这点的法线方向  $\mathbf{n}$ , 而梯度的模  $|\nabla f(x_0, y_0)|$  就是沿这个法线方向的方向导数  $\frac{\partial f}{\partial n}$ , 于是有

$$\nabla f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial n} \mathbf{n}.$$

上面讨论的梯度概念可以类似地推广到三元函数的情形. 设函数  $f(x, y, z)$  在空间区域  $G$  内具有一阶连续偏导数, 则对于每一点  $P_0(x_0, y_0, z_0) \in G$ , 都可定出一个向量

$$f_x(x_0, y_0, z_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0, z_0)\mathbf{j} + f_z(x_0, y_0, z_0)\mathbf{k},$$

这向量称为函数  $f(x, y, z)$  在点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  的梯度, 将它记作  $\text{grad } f(x_0, y_0, z_0)$  或  $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ , 即

$$\begin{aligned} \text{grad } f(x_0, y_0, z_0) &= \nabla f(x_0, y_0, z_0) \\ &= f_x(x_0, y_0, z_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0, z_0)\mathbf{j} + f_z(x_0, y_0, z_0)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

其中  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$  称为(三维的)向量微分算子或 Nabla 算子,  $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$ .

经过与二元函数的情形完全类似的讨论可知, 三元函数  $f(x, y, z)$  在一点的梯度  $\nabla f$  是这样一个向量, 它的方向是函数  $f(x, y, z)$  在这点的方向导数取得最大值的方向, 它的模就等于方向导数的最大值.

如果我们引进曲面

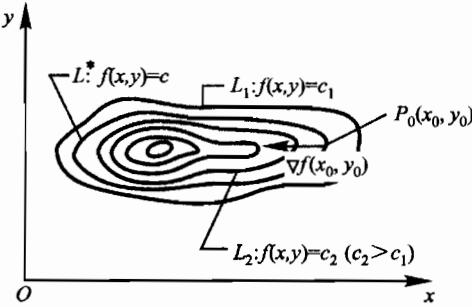


图 9-10

$$f(x, y, z) = c$$

为函数  $f(x, y, z)$  的等值面的概念, 则可得函数  $f(x, y, z)$  在一点  $(x_0, y_0, z_0)$  的梯度  $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$  的方向就是等值面  $f(x, y, z) = c$  在这点的法线方向  $n$ , 而梯度的模  $|\nabla f(x_0, y_0, z_0)|$  就是函数沿这个法线方向的方向导数  $\frac{\partial f}{\partial n}$ .

例 3 求  $\text{grad } \frac{1}{x^2 + y^2}$ .

解 这里

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

因为

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2y}{(x^2 + y^2)^2},$$

所以

$$\text{grad } \frac{1}{x^2 + y^2} = -\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} \mathbf{i} - \frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} \mathbf{j}.$$

例 4 设  $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ,  $P_0(1, 1)$ , 求

(1)  $f(x, y)$  在  $P_0$  处增加最快的方向以及  $f(x, y)$  沿这个方向的方向导数;

(2)  $f(x, y)$  在  $P_0$  处减少最快的方向以及  $f(x, y)$  沿这个方向的方向导数;

(3)  $f(x, y)$  在  $P_0$  处的变化率为零的方向.

解 (1)  $f(x, y)$  在  $P_0$  处沿  $\nabla f(1, 1)$  的方向增加最快,

$$\nabla f(1, 1) = (xi + yj) |_{(1,1)} = i + j,$$

故所求方向可取为

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f(1, 1)}{|\nabla f(1, 1)|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j},$$

方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} |_{(1,1)} = |\nabla f(1, 1)| = \sqrt{2}.$$

(2)  $f(x, y)$  在  $P_0$  处沿  $-\nabla f(1, 1)$  的方向减少最快, 这方向可取为

$$\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j},$$

方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}_1} |_{(1,1)} = -|\nabla f(1, 1)| = -\sqrt{2}.$$

(3)  $f(x, y)$  在  $P_0$  处沿垂直于  $\nabla f(1, 1)$  的方向变化率为零, 这方向是

$$\mathbf{n}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j} \quad \text{或} \quad \mathbf{n}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j}.$$

**例 5** 设  $f(x, y, z) = x^3 - xy^2 - z$ ,  $P_0(1, 1, 0)$ . 问  $f(x, y, z)$  在  $P_0$  处沿什么方向变化最快, 在这个方向的变化率是多少?

$$\text{解 } \nabla f = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k} = (3x^2 - y^2) \mathbf{i} - 2xy \mathbf{j} - \mathbf{k},$$

$$\nabla f(1, 1, 0) = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

$f(x, y, z)$  在  $P_0$  处沿  $\nabla f(1, 1, 0)$  的方向增加最快, 沿  $-\nabla f(1, 1, 0)$  的方向减少最快, 在这两个方向的变化率分别是

$$|\nabla f(1, 1, 0)| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3,$$

$$-|\nabla f(1, 1, 0)| = -3.$$

**例 6** 求曲面  $x^2 + y^2 + z = 9$  在点  $P_0(1, 2, 4)$  的切平面和法线方程.

**解** 设  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$ . 由梯度与等值面的关系可知, 梯度

$$\nabla f|_{P_0} = (2xi + 2yj + k)|_{(1, 2, 4)} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

的方向是等值面  $f(x, y, z) = 9$  在点  $P_0$  的法线方向, 因此切平面方程是

$$2(x - 1) + 4(y - 2) + (z - 4) = 0,$$

即

$$2x + 4y + z = 14,$$

曲面在  $P_0$  处的法线方程是

$$x = 1 + 2t, y = 2 + 4t, z = 4 + t.$$

下面我们简单地介绍数量场与向量场的概念.

如果对于空间区域  $G$  内的任一点  $M$ , 都有一个确定的数量  $f(M)$ , 则称在这空间区域  $G$  内确定了一个数量场(例如温度场、密度场等). 一个数量场可用一个数量函数  $f(M)$  来确定. 如果与点  $M$  相对应的是一个向量  $\mathbf{F}(M)$ , 则称在这空间区域  $G$  内确定了一个向量场(例如力场、速度场等). 一个向量场可用一个向量值函数  $\mathbf{F}(M)$  来确定, 而

$$\mathbf{F}(M) = P(M)\mathbf{i} + Q(M)\mathbf{j} + R(M)\mathbf{k},$$

其中  $P(M), Q(M), R(M)$  是点  $M$  的数量函数.

若向量场  $\mathbf{F}(M)$  是某个数量函数  $f(M)$  的梯度, 则称  $f(M)$  是向量场  $\mathbf{F}(M)$  的一个势函数, 并称向量场  $\mathbf{F}(M)$  为势场. 由此可知, 由数量函数  $f(M)$  产生的梯度场  $\text{grad } f(M)$  是一个势场. 但需注意, 任意一个向量场并不一定都是势场, 因为它不一定是某个数量函数的梯度.

**例 7** 试求数量场  $\frac{m}{r}$  所产生的梯度场, 其中常数  $m > 0$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

为原点  $O$  与点  $M(x, y, z)$  间的距离.

$$\text{解 } \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{m}{r} \right) = -\frac{m}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{mx}{r^3},$$

$$\text{同理 } \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{m}{r} \right) = -\frac{my}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{m}{r} \right) = -\frac{mz}{r^3}.$$

从而

$$\operatorname{grad} \frac{m}{r} = -\frac{m}{r^2} \left( \frac{x}{r} \mathbf{i} + \frac{y}{r} \mathbf{j} + \frac{z}{r} \mathbf{k} \right).$$

如果用  $e_r$  表示与  $\overrightarrow{OM}$  同方向的单位向量，则

$$e_r = \frac{x}{r} \mathbf{i} + \frac{y}{r} \mathbf{j} + \frac{z}{r} \mathbf{k},$$

因此

$$\operatorname{grad} \frac{m}{r} = -\frac{m}{r^2} e_r.$$

上式右端在力学上可解释为，位于原点  $O$  而质量为  $m$  的质点对位于点  $M$  而质量为 1 的质点的引力。这引力的大小与两质点的质量的乘积成正比、而与它们的距离平方成反比，这引力的方向由点  $M$  指向原点。因此数量场  $\frac{m}{r}$  的势场即

梯度场  $\operatorname{grad} \frac{m}{r}$  称为引力场，而函数  $\frac{m}{r}$  称为引力势。

### 习题 9-7

1. 求函数  $z = x^2 + y^2$  在点  $(1, 2)$  处沿从点  $(1, 2)$  到点  $(2, 2 + \sqrt{3})$  的方向的方向导数。
2. 求函数  $z = \ln(x + y)$  在抛物线  $y^2 = 4x$  上点  $(1, 2)$  处，沿着这抛物线在该点处偏向  $x$  轴正向的切线方向的方向导数。
3. 求函数  $z = 1 - \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)$  在点  $\left( \frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}} \right)$  处沿曲线  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  在这点的内法线方向的方向导数。
4. 求函数  $u = xy^2 + z^3 - xyz$  在点  $(1, 1, 2)$  处沿方向角为  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ,  $\beta = \frac{\pi}{4}$ ,  $\gamma = \frac{\pi}{3}$  的方向的方向导数。
5. 求函数  $u = xyz$  在点  $(5, 1, 2)$  处沿从点  $(5, 1, 2)$  到点  $(9, 4, 14)$  的方向的方向导数。
6. 求函数  $u = x^2 + y^2 + z^2$  在曲线  $x = t$ ,  $y = t^2$ ,  $z = t^3$  上点  $(1, 1, 1)$  处，沿曲线在该点的切线正方向(对应于  $t$  增大的方向)的方向导数。
7. 求函数  $u = x + y + z$  在球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  上点  $(x_0, y_0, z_0)$  处，沿球面在该点的外法线方向的方向导数。
8. 设  $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$ , 求  
 $\operatorname{grad} f(0, 0, 0)$  及  $\operatorname{grad} f(1, 1, 1)$ 。
9. 设函数  $u(x, y, z), v(x, y, z)$  的各个偏导数都存在且连续，证明：
  - (1)  $\nabla(cu) = c \nabla u$  (其中  $c$  为常数)；
  - (2)  $\nabla(u \pm v) = \nabla u \pm \nabla v$ ；
  - (3)  $\nabla(uv) = v \nabla u + u \nabla v$ ；

$$(4) \nabla \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{v \nabla u - u \nabla v}{v^2}.$$

10. 求函数  $u = xy^2 z$  在点  $P_0(1, -1, 2)$  处变化最快的方向，并求沿这个方向的方向导数。

## 第八节 多元函数的极值及其求法

### 一、多元函数的极值及最大值、最小值

在实际问题中，往往会遇到多元函数的最大值、最小值问题。与一元函数相类似，多元函数的最大值、最小值与极大值、极小值有密切联系，因此我们以二元函数为例，先来讨论多元函数的极值问题。

**定义** 设函数  $z = f(x, y)$  的定义域为  $D$ ,  $P_0(x_0, y_0)$  为  $D$  的内点。若存在  $P_0$  的某个邻域  $U(P_0) \subset D$ , 使得对于该邻域内异于  $P_0$  的任何点  $(x, y)$ , 都有

$$f(x, y) < f(x_0, y_0),$$

则称函数  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  有极大值  $f(x_0, y_0)$ , 点  $(x_0, y_0)$  称为函数  $f(x, y)$  的极大值点; 若对于该邻域内异于  $P_0$  的任何点  $(x, y)$ , 都有

$$f(x, y) > f(x_0, y_0),$$

则称函数  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  有极小值  $f(x_0, y_0)$ , 点  $(x_0, y_0)$  称为函数  $f(x, y)$  的极小值点. 极大值、极小值统称为极值. 使得函数取得极值的点称为极值点.

**例 1** 函数  $z = 3x^2 + 4y^2$  在点  $(0, 0)$  处有极小值。因为对于点  $(0, 0)$  的任一邻域内异于  $(0, 0)$  的点, 函数值都为正, 而在点  $(0, 0)$  处的函数值为零。从几何上看这是显然的, 因为点  $(0, 0, 0)$  是开口朝上的椭圆抛物面  $z = 3x^2 + 4y^2$  的顶点。

**例 2** 函数  $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$  在点  $(0, 0)$  处有极大值。因为在点  $(0, 0)$  处函数值为零, 而对于点  $(0, 0)$  的任一邻域内异于  $(0, 0)$  的点, 函数值都为负。点  $(0, 0, 0)$  是位于  $xOy$  平面下方的锥面  $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$  的顶点。

**例 3** 函数  $z = xy$  在点  $(0, 0)$  处既不取得极大值也不取得极小值。因为在点  $(0, 0)$  处的函数值为零, 而在点  $(0, 0)$  的任一邻域内, 总有使函数值为正的点, 也有使函数值为负的点。

以上关于二元函数的极值概念, 可推广到  $n$  元函数。设  $n$  元函数  $u = f(P)$  的定义域为  $D$ ,  $P_0$  为  $D$  的内点。若存在  $P_0$  的某个邻域  $U(P_0) \subset D$ , 使得该邻域内异于  $P_0$  的任何点  $P$ , 都有

$$f(P) < f(P_0) \quad (\text{或 } f(P) > f(P_0)),$$

则称函数  $f(P)$  在点  $P_0$  有极大值(或极小值)  $f(P_0)$ .

二元函数的极值问题,一般可以利用偏导数来解决.下面两个定理就是关于这问题的结论.

**定理 1(必要条件)** 设函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  具有偏导数,且在点  $(x_0, y_0)$  处有极值,则有

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

**证** 不妨设  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处有极大值.依极大值的定义,在点  $(x_0, y_0)$  的某邻域内异于  $(x_0, y_0)$  的点  $(x, y)$  都适合不等式

$$f(x, y) < f(x_0, y_0).$$

特殊地,在该邻域内取  $y = y_0$  而  $x \neq x_0$  的点,也应适合不等式

$$f(x, y_0) < f(x_0, y_0).$$

这表明一元函数  $f(x, y_0)$  在  $x = x_0$  处取得极大值,因而必有

$$f_x(x_0, y_0) = 0.$$

类似地可证

$$f_y(x_0, y_0) = 0.$$

从几何上看,这时如果曲面  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0, z_0)$  处有切平面,则切平面

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

成为平行于  $xOy$  坐标面的平面  $z - z_0 = 0$ .

类似地可推得,如果三元函数  $u = f(x, y, z)$  在点  $(x_0, y_0, z_0)$  具有偏导数,则它在点  $(x_0, y_0, z_0)$  具有极值的必要条件为

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = 0, f_y(x_0, y_0, z_0) = 0, f_z(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

仿照一元函数,凡是能使  $f_x(x, y) = 0, f_y(x, y) = 0$  同时成立的点  $(x_0, y_0)$  称为函数  $z = f(x, y)$  的驻点.从定理 1 可知,具有偏导数的函数的极值点必定是驻点.但函数的驻点不一定是极值点,例如,点  $(0, 0)$  是函数  $z = xy$  的驻点,但函数在该点并无极值.

怎样判定一个驻点是否是极值点呢?下面的定理回答了这个问题.

**定理 2(充分条件)** 设函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的某邻域内连续且有一阶及二阶连续偏导数,又  $f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$ ,令

$$f_{xx}(x_0, y_0) = A, f_{xy}(x_0, y_0) = B, f_{yy}(x_0, y_0) = C,$$

则  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  处是否取得极值的条件如下:

(1)  $AC - B^2 > 0$  时具有极值,且当  $A < 0$  时有极大值,当  $A > 0$  时有极小

值；

(2)  $AC - B^2 < 0$  时没有极值；

(3)  $AC - B^2 = 0$  时可能有极值，也可能没有极值，还需另作讨论。

这个定理现在不证<sup>①</sup>。利用定理 1、2，我们把具有二阶连续偏导数的函数  $z = f(x, y)$  的极值的求法叙述如下：

第一步 解方程组

$$f_x(x, y) = 0, \quad f_y(x, y) = 0,$$

求得一切实数解，即可求得一切驻点。

第二步 对于每一个驻点  $(x_0, y_0)$ ，求出二阶偏导数的值  $A$ 、 $B$  和  $C$ 。

第三步 定出  $AC - B^2$  的符号，按定理 2 的结论判定  $f(x_0, y_0)$  是不是极值、是极大值还是极小值。

例 4 求函数  $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$  的极值。

解 先解方程组

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 3x^2 + 6x - 9 = 0, \\ f_y(x, y) = -3y^2 + 6y = 0, \end{cases}$$

求得驻点为  $(1, 0)$ 、 $(1, 2)$ 、 $(-3, 0)$ 、 $(-3, 2)$ 。

再求出二阶偏导数

$$f_{xx}(x, y) = 6x + 6, \quad f_{xy}(x, y) = 0, \quad f_{yy}(x, y) = -6y + 6.$$

在点  $(1, 0)$  处， $AC - B^2 = 12 \cdot 6 > 0$ ，又  $A > 0$ ，所以函数在  $(1, 0)$  处有极小值  $f(1, 0) = -5$ ；

在点  $(1, 2)$  处， $AC - B^2 = 12 \cdot (-6) < 0$ ，所以  $f(1, 2)$  不是极值；

在点  $(-3, 0)$  处， $AC - B^2 = -12 \cdot 6 < 0$ ，所以  $f(-3, 0)$  不是极值；

在点  $(-3, 2)$  处， $AC - B^2 = -12 \cdot (-6) > 0$ ，又  $A < 0$ ，所以函数在  $(-3, 2)$  处有极大值  $f(-3, 2) = 31$ 。

讨论函数的极值问题时，如果函数在所讨论的区域内具有偏导数，则由定理 1 可知，极值只可能在驻点处取得。然而，如果函数在个别点处的偏导数不存在，这些点当然不是驻点，但也可能是极值点。例如在例 2 中，函数  $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$  在点  $(0, 0)$  处的偏导数不存在，但该函数在点  $(0, 0)$  处却具有极大值。因此，在考虑函数的极值问题时，除了考虑函数的驻点外，如果有偏导数不存在的点，那么对这些点也应当考虑。

与一元函数相类似，我们可以利用函数的极值来求函数的最大值和最小值。在第一节中已经指出，如果  $f(x, y)$  在有界闭区域  $D$  上连续，则  $f(x, y)$  在  $D$  上

① 证明见第九节第二目。

必定能取得最大值和最小值. 这种使函数取得最大值或最小值的点既可能在  $D$  的内部, 也可能在  $D$  的边界上. 我们假定, 函数在  $D$  上连续、在  $D$  内可微分且只有有限个驻点, 这时如果函数在  $D$  的内部取得最大值(最小值), 则这个最大值(最小值)也是函数的极大值(极小值). 因此, 在上述假定下, 求函数的最大值和最小值的一般方法是: 将函数  $f(x, y)$  在  $D$  内的所有驻点处的函数值及在  $D$  的边界上的最大值和最小值相互比较, 其中最大的就是最大值, 最小的就是最小值. 但这种做法, 由于要求出  $f(x, y)$  在  $D$  的边界上的最大值和最小值, 所以往往相当复杂. 在通常遇到的实际问题中, 如果根据问题的性质, 知道函数  $f(x, y)$  的最大值(最小值)一定在  $D$  的内部取得, 而函数在  $D$  内只有一个驻点, 那么可以肯定该驻点处的函数值就是函数  $f(x, y)$  在  $D$  上的最大值(最小值).

**例 5** 某厂要用铁板做成一个体积为  $2 \text{ m}^3$  的有盖长方体水箱. 问当长、宽、高各取怎样的尺寸时, 才能使用料最省.

解 设水箱的长为  $x \text{ m}$ , 宽为  $y \text{ m}$ , 则其高应为  $\frac{2}{xy} \text{ m}$ . 此水箱所用材料的面积

$$A = 2 \left( xy + y \cdot \frac{2}{xy} + x \cdot \frac{2}{xy} \right),$$

即  $A = 2 \left( xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y} \right) \quad (x > 0, y > 0).$

可见材料面积  $A = A(x, y)$  是  $x$  和  $y$  的二元函数, 这就是目标函数, 下面求使这函数取得最小值的点  $(x, y)$ .

令  $A_x = 2 \left( y - \frac{2}{x^2} \right) = 0,$   
 $A_y = 2 \left( x - \frac{2}{y^2} \right) = 0.$

解这方程组, 得

$$x = \sqrt[3]{2}, \quad y = \sqrt[3]{2}.$$

根据题意可知, 水箱所用材料面积的最小值一定存在, 并在开区域  $D = \{(x, y) | x > 0, y > 0\}$  内取得. 又函数在  $D$  内只有唯一的驻点  $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$ , 因此可断定当  $x = \sqrt[3]{2}, y = \sqrt[3]{2}$  时,  $A$  取得最小值. 就是说, 当水箱的长为  $\sqrt[3]{2} \text{ m}$ 、宽为  $\sqrt[3]{2} \text{ m}$ 、高为  $\frac{2}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{2} \text{ m}$  时, 水箱所用的材料最省.

从这个例子还可看出, 在体积一定的长方体中, 以立方体的表面积为最小.

**例 6** 有一宽为  $24 \text{ cm}$  的长方形铁板, 把它两边折起来做成一断面为等腰梯形的水槽. 问怎样折法才能使断面的面积最大?

解 设折起来的边长为  $x \text{ cm}$ , 倾角为  $\alpha$  (图 9-11), 那么梯形断面的下底

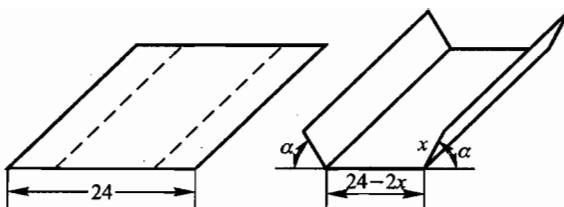


图 9-11

长为  $24 - 2x$ , 上底长为  $24 - 2x + 2x \cos \alpha$ , 高为  $x \sin \alpha$ , 所以断面面积

$$A = \frac{1}{2} (24 - 2x + 2x \cos \alpha + 24 - 2x) \cdot x \sin \alpha,$$

即

$$A = 24x \sin \alpha - 2x^2 \sin \alpha + x^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\left( 0 < x < 12, 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

可见断面面积  $A = A(x, \alpha)$ , 这就是目标函数, 下面求使这函数取得最大值的点  $(x, \alpha)$ .

令

$$\begin{cases} A_x = 24 \sin \alpha - 4x \sin \alpha + 2x \sin \alpha \cos \alpha = 0, \\ A_\alpha = 24x \cos \alpha - 2x^2 \cos \alpha + x^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0. \end{cases}$$

由于  $\sin \alpha \neq 0, x \neq 0$ , 上述方程组可化为

$$\begin{cases} 12 - 2x + x \cos \alpha = 0, \\ 24 \cos \alpha - 2x \cos \alpha + x(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0. \end{cases}$$

解这方程组, 得

$$\alpha = \frac{\pi}{3} = 60^\circ, x = 8 \text{ cm.}$$

根据题意可知断面面积的最大值一定存在, 并且在  $D = \{(x, \alpha) \mid 0 < x < 12, 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}\}$  内取得. 通过计算得知  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  时的函数值比  $\alpha = 60^\circ, x = 8 \text{ cm}$  时的函数值小. 又函数在  $D$  内只有一个驻点, 因此可以断定, 当  $x = 8 \text{ cm}, \alpha = 60^\circ$  时, 就能使断面的面积最大.

## 二、条件极值 拉格朗日乘数法

上面所讨论的极值问题, 对于函数的自变量, 除了限制在函数的定义域内以外, 并无其他条件, 所以有时候称为无条件极值. 但在实际问题中, 有时会遇到对

函数的自变量还有附加条件的极值问题.例如,求表面积为  $a^2$  而体积为最大的长方体的体积问题.设长方体的三棱的长为  $x, y, z$ , 则体积  $V = xyz$ . 又因假定表面积为  $a^2$ , 所以自变量  $x, y, z$  还必须满足附加条件  $2(xy + yz + xz) = a^2$ . 像这种对自变量有附加条件的极值称为条件极值. 对于有些实际问题,可以把条件极值化为无条件极值,然后利用第一目中的方法加以解决. 例如上述问题,可由条件  $2(xy + yz + xz) = a^2$ , 将  $z$  表成  $x, y$  的函数

$$z = \frac{a^2 - 2xy}{2(x+y)}.$$

再把它代入  $V = xyz$  中,于是问题就化为求

$$V = \frac{xy}{2} \left( \frac{a^2 - 2xy}{x+y} \right)$$

的无条件极值.例 5 也是属于把条件极值化为无条件极值的例子.

但在很多情形下,将条件极值化为无条件极值并不这样简单.另有一种直接寻求条件极值的方法,可以不必先把问题化到无条件极值的问题,这就是下面要介绍的拉格朗日乘数法.

现在先来寻求函数

$$z = f(x, y) \quad (1)$$

在条件

$$\varphi(x, y) = 0 \quad (2)$$

下取得极值的必要条件.

如果函数(1)在  $(x_0, y_0)$  取得所求的极值,那么首先有

$$\varphi(x_0, y_0) = 0. \quad (3)$$

我们假定在  $(x_0, y_0)$  的某一邻域内  $f(x, y)$  与  $\varphi(x, y)$  均有连续的一阶偏导数,而  $\varphi_x(x_0, y_0) \neq 0$ . 由隐函数存在定理可知,方程(2)确定一个连续且具有连续导数的函数  $y = \psi(x)$ , 将其代入(1)式,结果得到一个变量  $x$  的函数

$$z = f[x, \psi(x)]. \quad (4)$$

于是函数(1)在  $(x_0, y_0)$  取得所求的极值,也就是相当于函数(4)在  $x = x_0$  取得极值. 由一元可导函数取得极值的必要条件知道

$$\frac{dz}{dx} \Big|_{x=x_0} = f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0) \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0} = 0, \quad (5)$$

而由(2)用隐函数求导公式,有

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0} = - \frac{\varphi_x(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)}.$$

把上式代入(5)式,得

$$f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0) \frac{\varphi_x(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)} = 0. \quad (6)$$

(3)、(6)两式就是函数(1)在条件(2)下在 $(x_0, y_0)$ 取得极值的必要条件.

设 $\frac{f_y(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)} = -\lambda$ , 上述必要条件就变为

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) + \lambda \varphi_x(x_0, y_0) = 0, \\ f_y(x_0, y_0) + \lambda \varphi_y(x_0, y_0) = 0, \\ \varphi(x_0, y_0) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

若引进辅助函数

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y),$$

则不难看出,(7)中前两式就是

$$L_x(x_0, y_0) = 0, \quad L_y(x_0, y_0) = 0.$$

函数 $L(x, y)$ 称为拉格朗日函数,参数 $\lambda$ 称为拉格朗日乘子.

由以上讨论,我们得到以下结论.

**拉格朗日乘数法** 要找函数 $z = f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的可能极值点,可以先作拉格朗日函数

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y),$$

其中 $\lambda$ 为参数.求其对 $x$ 与 $y$ 的一阶偏导数,并使之为零,然后与方程(2)联立起来:

$$\begin{cases} f_x(x, y) + \lambda \varphi_x(x, y) = 0, \\ f_y(x, y) + \lambda \varphi_y(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

由这方程组解出 $x, y$ 及 $\lambda$ ,这样得到的 $(x, y)$ 就是函数 $f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的可能极值点.

这方法还可以推广到自变量多于两个而条件多于一个的情形.例如,要求函数

$$u = f(x, y, z, t)$$

在附加条件

$$\varphi(x, y, z, t) = 0, \quad \psi(x, y, z, t) = 0 \quad (9)$$

下的极值,可以先作拉格朗日函数

$$L(x, y, z, t) = f(x, y, z, t) + \lambda \varphi(x, y, z, t) + \mu \psi(x, y, z, t),$$

其中 $\lambda, \mu$ 均为参数,求其一阶偏导数,并使之为零,然后与(9)中的两个方程联立起来求解,这样得出的 $(x, y, z, t)$ 就是函数 $f(x, y, z, t)$ 在附加条件(9)下的可能极值点.

至于如何确定所求得的点是否极值点,在实际问题中往往可根据问题本身的性质来判定.

例 7 求表面积为  $a^2$  而体积为最大的长方体的体积.

解 设长方体的三棱长为  $x, y, z$ , 则问题就是在条件

$$\varphi(x, y, z) = 2xy + 2yz + 2xz - a^2 = 0 \quad (10)$$

下, 求函数

$$V = xyz \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$$

的最大值. 作拉格朗日函数

$$L(x, y, z) = xyz + \lambda(2xy + 2yz + 2xz - a^2),$$

求其对  $x, y, z$  的偏导数, 并使之为零, 得到

$$\begin{aligned} yz + 2\lambda(y + z) &= 0, \\ xz + 2\lambda(x + z) &= 0, \\ xy + 2\lambda(y + x) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

再与(10)联立求解.

因  $x, y, z$  都不等于零, 所以由(11)可得

$$\frac{x}{y} = \frac{x+z}{y+z}, \quad \frac{y}{z} = \frac{x+y}{x+z}.$$

由以上两式解得

$$x = y = z.$$

将此代入(10)式, 便得

$$x = y = z = \frac{\sqrt{6}}{6}a,$$

这是唯一可能的极值点. 因为由问题本身可知最大值一定存在, 所以最大值就在这个可能的极值点处取得. 也就是说, 表面积为  $a^2$  的长方体中, 以棱长为  $\frac{\sqrt{6}}{6}a$  的正方体的体积为最大, 最大体积  $V = \frac{\sqrt{6}}{36}a^3$ .

例 8 求函数  $u = xyz$  在附加条件

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a} \quad (x > 0, y > 0, z > 0, a > 0) \quad (12)$$

下的极值.

解 作拉格朗日函数

$$L(x, y, z) = xyz + \lambda \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{a} \right).$$

令

$$\begin{aligned} L_x &= yz - \frac{\lambda}{x^2} = 0, \\ L_y &= xz - \frac{\lambda}{y^2} = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$L_z = xy - \frac{\lambda}{z^2} = 0.$$

注意到以上三个方程左端的第一项都是三个变量  $x, y, z$  中某两个变量的乘积, 将各方程两端同乘以相应缺少的那个变量, 使各方程左端的第一项都成为  $xyz$ , 然后将所得的三个方程左、右两端相加, 得

$$3xyz - \lambda \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 0,$$

把(12)代入上式, 得

$$xyz = \frac{\lambda}{3a}.$$

再把这个结果分别代入(13)中各式, 便得  $x = y = z = 3a$ . 由此得到点  $(3a, 3a, 3a)$  是函数  $u = xyz$  在条件(12)下唯一可能的极值点. 把条件(12)确定的隐函数记作  $z = z(x, y)$ , 将目标函数看做  $u = xyz(x, y) = F(x, y)$ , 再应用二元函数极值的充分条件判断, 可知点  $(3a, 3a, 3a)$  是函数  $u = xyz$  在条件(12)下的极小值点. 因此, 目标函数  $u = xyz$  在条件(12)下在点  $(3a, 3a, 3a)$  处取得极小值  $27a^3$ .

下面的问题涉及经济学中的一个最优价格的模型.

在生产和销售商品过程中, 商品销售量、生产成本与销售价格是相互影响的. 厂家要选择合理的销售价格, 才能获得最大利润. 这个价格称为最优价格. 下面的例题就是讨论怎样确定电视机的最优价格.

**例 9** 设某电视机厂生产一台电视机的成本为  $c$ , 每台电视机的销售价格为  $p$ , 销售量为  $x$ . 假设该厂的生产处于平衡状态, 即电视机的生产量等于销售量. 根据市场预测, 销售量  $x$  与销售价格  $p$  之间有下面的关系:

$$x = Me^{-ap} \quad (M > 0, a > 0), \quad (14)$$

其中  $M$  为市场最大需求量,  $a$  是价格系数. 同时, 生产部门根据对生产环节的分析, 对每台电视机的生产成本  $c$  有如下测算:

$$c = c_0 - k \ln x \quad (k > 0, x > 1), \quad (15)$$

其中  $c_0$  是只生产一台电视机时的成本,  $k$  是规模系数.

根据上述条件, 应如何确定电视机的售价  $p$ , 才能使该厂获得最大利润?

**解** 设厂家获得的利润为  $u$ , 每台电视机售价为  $p$ , 每台生产成本为  $c$ , 销售量为  $x$ , 则

$$u = (p - c)x.$$

于是问题化为求利润函数  $u = (p - c)x$  在附加条件(14)、(15)下的极值问题.

作拉格朗日函数

$$L(x, p, c) = (p - c)x + \lambda(x - Me^{-ap}) + \mu(c - c_0 + k \ln x).$$

令

$$L_x = (p - c) + \lambda + k \frac{\mu}{x} = 0,$$

$$L_p = x + \lambda a M e^{-ap} = 0,$$

$$L_c = -x + \mu = 0.$$

将(14)代入(15),得

$$c = c_0 - k(\ln M - ap). \quad (16)$$

$$\text{由(14)及 } L_p = 0 \text{ 知 } \lambda a = -1, \text{ 即 } \lambda = -\frac{1}{a}. \quad (17)$$

$$\text{由 } L_c = 0 \text{ 知 } x = \mu, \text{ 即 } \frac{x}{\mu} = 1. \quad (18)$$

将(16)、(17)、(18)代入  $L_x = 0$ , 得

$$p - c_0 + k(\ln M - ap) - \frac{1}{a} + k = 0,$$

由此得

$$p^* = \frac{c_0 - k \ln M + \frac{1}{a} - k}{1 - ak}.$$

因为由问题本身可知最优价格必定存在, 所以这个  $p^*$  就是电视机的最优价格. 只要确定了规模系数  $k$ , 价格系数  $a$ , 电视机的最优价格问题就解决了.

### 习题 9-8

1. 已知函数  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  的某个邻域内连续, 且

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1,$$

则下述四个选项中正确的是( ).

- (A) 点  $(0, 0)$  不是  $f(x, y)$  的极值点
- (B) 点  $(0, 0)$  是  $f(x, y)$  的极大值点
- (C) 点  $(0, 0)$  是  $f(x, y)$  的极小值点
- (D) 根据所给条件无法判断  $(0, 0)$  是否为  $f(x, y)$  的极值点

2. 求函数  $f(x, y) = 4(x - y) - x^2 - y^2$  的极值.

3. 求函数  $f(x, y) = (6x - x^2)(4y - y^2)$  的极值.

4. 求函数  $f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$  的极值.

5. 求函数  $z = xy$  在适合附加条件  $x + y = 1$  下的极大值.

6. 从斜边之长为  $l$  的一切直角三角形中, 求有最大周长的直角三角形.

7. 要造一个体积等于定数  $k$  的长方体无盖水池, 应如何选择水池的尺寸, 方可使它的表面积最小.

8. 在平面  $xOy$  上求一点,使它到  $x=0, y=0$  及  $x+2y-16=0$  三直线的距离平方之和为最小.

9. 将周长为  $2p$  的矩形绕它的一边旋转而构成一个圆柱体. 问矩形的边长各为多少时, 才可使圆柱体的体积为最大?

10. 求内接于半径为  $a$  的球且有最大体积的长方体.

11. 抛物面  $z=x^2+y^2$  被平面  $x+y+z=1$  截成一椭圆, 求这椭圆上的点到原点的距离的最大值与最小值.

12. 设有一圆板占有平面闭区域  $\{(x,y) | x^2+y^2 \leq 1\}$ . 该圆板被加热, 以致在点  $(x,y)$  的温度是

$$T = x^2 + 2y^2 - x.$$

求该圆板的最热点和最冷点.

13. 形状为椭球  $4x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 16$  的空间探测器进入地球大气层, 其表面开始受热, 1 小时后在探测器的点  $(x,y,z)$  处的温度  $T = 8x^2 + 4yz - 16z + 600$ , 求探测器表面最热的点.

## \* 第九节 二元函数的泰勒公式

### 一、二元函数的泰勒公式

在上册第三章, 我们已经知道: 若函数  $f(x)$  在含有  $x_0$  的某个开区间  $(a, b)$  内具有直到  $(n+1)$  阶的导数, 则当  $x$  在  $(a, b)$  内时, 有下面的  $n$  阶泰勒公式

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \\ &\quad \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \\ &\quad \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1) \end{aligned}$$

成立. 利用一元函数的泰勒公式, 我们可用  $n$  次多项式来近似表达函数  $f(x)$ , 且误差是当  $x \rightarrow x_0$  时比  $(x - x_0)^n$  高阶的无穷小. 对于多元函数来说, 无论是为了理论的或实际计算的目的, 也都有必要考虑用多个变量的多项式来近似表达一个给定的多元函数, 并能具体地估算出误差的大小来. 今以二元函数为例, 设  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的某一邻域内连续且有直到  $(n+1)$  阶的连续偏导数,  $(x_0 + h, y_0 + k)$  为此邻域内任一点, 我们的问题就是要把函数  $f(x_0 + h, y_0 + k)$  近似地表达为  $h = x - x_0, k = y - y_0$  的  $n$  次多项式, 而由此所产生的误差是当  $\rho = \sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0$  时比  $\rho^n$  高阶的无穷小. 为了解决这个问题, 就要把一元函数的泰勒中值定理推广到多元函数的情形.

**定理** 设  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的某一邻域内连续且有直到  $(n+1)$  阶

的连续偏导数,  $(x_0 + h, y_0 + k)$  为此邻域内任一点, 则有

$$\begin{aligned} & f(x_0 + h, y_0 + k) \\ &= f(x_0, y_0) + \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0) + \\ & \quad \frac{1}{2!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x_0, y_0) + \cdots + \frac{1}{n!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x_0, y_0) + \\ & \quad \frac{1}{(n+1)!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \quad (0 < \theta < 1). \end{aligned}$$

其中记号

$$\left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0) \text{ 表示 } hf_x(x_0, y_0) + kf_y(x_0, y_0),$$

$$\left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x_0, y_0) \text{ 表示 } h^2 f_{xx}(x_0, y_0) + 2hk f_{xy}(x_0, y_0) +$$

$$k^2 f_{yy}(x_0, y_0),$$

一般的, 记号

$$\left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^m f(x_0, y_0) \text{ 表示 } \sum_{p=0}^m C_m^p h^p k^{m-p} \frac{\partial^m f}{\partial x^p \partial y^{m-p}} \Big|_{(x_0, y_0)}.$$

证 为了利用一元函数的泰勒公式来进行证明, 我们引入函数

$$\Phi(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt) \quad (0 \leq t \leq 1).$$

显然  $\Phi(0) = f(x_0, y_0)$ ,  $\Phi(1) = f(x_0 + h, y_0 + k)$ . 由  $\Phi(t)$  的定义及多元复合函数的求导法则, 可得

$$\Phi'(t) = hf_x(x_0 + ht, y_0 + kt) + kf_y(x_0 + ht, y_0 + kt)$$

$$= \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0 + ht, y_0 + kt),$$

$$\Phi''(t) = h^2 f_{xx}(x_0 + ht, y_0 + kt) + 2hk f_{xy}(x_0 + ht, y_0 + kt) + k^2 f_{yy}(x_0 + ht, y_0 + kt)$$

$$= \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x_0 + ht, y_0 + kt),$$

$$\Phi^{(n+1)}(t) = \sum_{p=0}^{n+1} C_{n+1}^p h^p k^{n+1-p} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^p \partial y^{n+1-p}} \Big|_{(x_0 + ht, y_0 + kt)}$$

$$= \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x_0 + ht, y_0 + kt).$$

利用一元函数的麦克劳林公式, 得

$$\Phi(1) = \Phi(0) + \Phi'(0) + \frac{1}{2!} \Phi''(0) + \cdots + \frac{1}{n!} \Phi^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!} \Phi^{(n+1)}(\theta), \quad (0 < \theta < 1).$$

将  $\Phi(0) = f(x_0, y_0)$ ,  $\Phi(1) = f(x_0 + h, y_0 + k)$  及上面求得的  $\Phi(t)$  直到  $n$  阶导数在  $t=0$  的值, 以及  $\Phi^{(n+1)}(t)$  在  $t=\theta$  的值代入上式, 即得

$$\begin{aligned} & f(x_0 + h, y_0 + k) \\ &= f(x_0, y_0) + \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x_0, y_0) + \cdots + \\ & \quad \frac{1}{n!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x_0, y_0) + R_n, \end{aligned} \quad (1)$$

其中

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \quad (0 < \theta < 1). \quad (2)$$

定理证毕.

公式(1)称为二元函数  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的  $n$  阶泰勒公式, 而  $R_n$  的表达式(2)称为拉格朗日型余项.

由二元函数的泰勒公式可知, 以(1)式右端  $h$  及  $k$  的  $n$  次多项式近似表达函数  $f(x_0 + h, y_0 + k)$  时, 其误差为  $|R_n|$ . 由假设, 函数的各  $(n+1)$  阶偏导数都连续, 故它们的绝对值在点  $(x_0, y_0)$  的某一邻域内都不超过某一正常数  $M$ . 于是, 有下面的误差估计式:

$$\begin{aligned} |R_n| &\leq \frac{M}{(n+1)!} (|h| + |k|)^{n+1} = \frac{M}{(n+1)!} \rho^{n+1} \left( \frac{|h|}{\rho} + \frac{|k|}{\rho} \right)^{n+1} \\ &\leq \frac{M}{(n+1)!} (\sqrt{2})^{n+1} \rho^{n+1} \text{①}, \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$ .

由(3)式可知, 误差  $|R_n|$  是当  $\rho \rightarrow 0$  时比  $\rho^n$  高阶的无穷小.

当  $n=0$  时, 公式(1)成为

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + hf_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + \\ & \quad kf_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k). \end{aligned} \quad (4)$$

公式(4)称为二元函数的拉格朗日中值公式. 由(4)式即可推得下述结论:

如果函数  $f(x, y)$  的偏导数  $f_x(x, y), f_y(x, y)$  在某一区域内都恒等于零, 则函数  $f(x, y)$  在该区域内为一常数.

**例 1** 求函数  $f(x, y) = \ln(1 + x + y)$  在点  $(0, 0)$  的三阶泰勒公式.

解 因为

$$f_x(x, y) = f_y(x, y) = \frac{1}{1+x+y},$$

① 令  $\frac{|h|}{\rho} = \cos \alpha, \frac{|k|}{\rho} = \sin \alpha$ , 则  $\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{2}$ .

$$f_{xx}(x,y) = f_{xy}(x,y) = f_{yy}(x,y) = -\frac{1}{(1+x+y)^2},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^p \partial y^{3-p}} = \frac{2!}{(1+x+y)^3} \quad (p=0,1,2,3),$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^p \partial y^{4-p}} = -\frac{3!}{(1+x+y)^4} \quad (p=0,1,2,3,4),$$

所以

$$\left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(0,0) = hf_x(0,0) + kf_y(0,0) = h+k,$$

$$\begin{aligned} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(0,0) &= h^2 f_{xx}(0,0) + 2hkf_{xy}(0,0) + k^2 f_{yy}(0,0) \\ &= -(h+k)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f(0,0) &= h^3 f_{xxx}(0,0) + 3h^2 kf_{xxy}(0,0) + 3hk^2 f_{xyy}(0,0) + \\ &\quad k^3 f_{yyy}(0,0) \\ &= 2(h+k)^3. \end{aligned}$$

又  $f(0,0)=0$ , 并将  $h=x, k=y$  代入, 由三阶泰勒公式便得

$$\ln(1+x+y) = x+y - \frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{3}(x+y)^3 + R_3,$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } R_3 &= \frac{1}{4!} \left[ \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^4 f(\theta h, \theta k) \right]_{h=x, k=y} \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{(x+y)^4}{(1+\theta x+\theta y)^4} \quad (0 < \theta < 1). \end{aligned}$$

## 二、极值充分条件的证明

现在来证明第八节中的定理 2.

设函数  $z=f(x,y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  的某邻域  $U_1(P_0)$  内连续且有一阶及二阶连续偏导数, 又  $f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$ .

依二元函数的泰勒公式, 对于任一  $(x_0 + h, y_0 + k) \in U_1(P_0)$  有

$$\Delta f = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0).$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} [h^2 f_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + 2hkf_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + \\ &\quad k^2 f_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)] \quad (0 < \theta < 1). \end{aligned} \tag{5}$$

(1) 设  $AC - B^2 > 0$ , 即

$$f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2 > 0. \tag{6}$$

因  $f(x, y)$  的二阶偏导数在  $U_1(P_0)$  内连续, 由不等式(6)可知, 存在点  $P_0$

的邻域  $U_2(P_0) \subset U_1(P_0)$ , 使得对任一  $(x_0 + h, y_0 + k) \in U_2(P_0)$  有

$$\begin{aligned} & f_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) f_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) - \\ & [f_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)]^2 > 0. \end{aligned} \quad (7)$$

为书写简便起见, 把  $f_{xx}(x, y), f_{xy}(x, y), f_{yy}(x, y)$  在点  $(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$  处的值依次记为  $f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$ . 由(7)式可知, 当  $(x_0 + h, y_0 + k) \in U_2(P_0)$  时,  $f_{xx}$  及  $f_{yy}$  都不等于零且两者同号. 于是(5)式可写成

$$\Delta f = \frac{1}{2f_{xx}} [(hf_{xx} + kf_{xy})^2 + k^2(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)].$$

当  $h, k$  不同时为零且  $(x_0 + h, y_0 + k) \in U_2(P_0)$  时, 上式右端方括号内的值为正, 所以  $\Delta f$  异于零且与  $f_{xx}$  同号. 又由  $f(x, y)$  的二阶偏导数的连续性知  $f_{xx}$  与  $A$  同号, 因此  $\Delta f$  与  $A$  同号. 所以, 当  $A > 0$  时  $f(x_0, y_0)$  为极小值, 当  $A < 0$  时  $f(x_0, y_0)$  为极大值.

(2) 设  $AC - B^2 < 0$ , 即

$$f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2 < 0. \quad (8)$$

先假定  $f_{xx}(x_0, y_0) = f_{yy}(x_0, y_0) = 0$ , 于是由(8)式可知这时  $f_{xy}(x_0, y_0) \neq 0$ .

现在分别令  $k = h$  及  $k = -h$ , 则由(5)式分别得

$$\begin{aligned} \Delta f = & \frac{h^2}{2} [f_{xx}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_1 h) + 2f_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_1 h) + \\ & f_{yy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_1 h)] \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} \Delta f = & \frac{h^2}{2} [f_{xx}(x_0 + \theta_2 h, y_0 - \theta_2 h) - 2f_{xy}(x_0 + \theta_2 h, y_0 - \theta_2 h) + \\ & f_{yy}(x_0 + \theta_2 h, y_0 - \theta_2 h)], \end{aligned}$$

其中  $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$ . 当  $h \rightarrow 0$  时, 以上两式中方括号内的式子分别趋于极限

$$2f_{xy}(x_0, y_0) \text{ 及 } -2f_{xy}(x_0, y_0),$$

从而当  $h$  充分接近零时, 两式中方括号内的值有相反的符号, 因此  $\Delta f$  可取不同符号的值, 所以  $f(x_0, y_0)$  不是极值.

再证  $f_{xx}(x_0, y_0)$  和  $f_{yy}(x_0, y_0)$  不同时为零的情形. 不妨假定  $f_{yy}(x_0, y_0) \neq 0$ . 先取  $k = 0$ , 于是由(5)式得

$$\Delta f = \frac{1}{2} h^2 f_{xx}(x_0 + \theta h, y_0).$$

由此看出, 当  $h$  充分接近零时,  $\Delta f$  与  $f_{xx}(x_0, y_0)$  同号.

但如果取

$$h = -f_{xy}(x_0, y_0)s, \quad k = f_{xx}(x_0, y_0)s, \quad (9)$$

其中  $s$  是异于零但充分接近零的数, 则可发现, 当  $|s|$  充分小时,  $\Delta f$  与  $f_{xx}(x_0, y_0)$  异号. 事实上, 在(5)式中将  $h$  及  $k$  用(9)式给定的值代入, 得

$$\begin{aligned}\Delta f = & \frac{1}{2} s^2 \{ [f_{xy}(x_0, y_0)]^2 f_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) - \\ & 2f_{xy}(x_0, y_0)f_{xx}(x_0, y_0)f_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + \\ & [f_{xx}(x_0, y_0)]^2 f_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)\}. \end{aligned}\quad (10)$$

上式右端花括号内的式子当  $s \rightarrow 0$  时趋于极限

$$f_{xx}(x_0, y_0) \{ f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2 \}.$$

由不等式(8), 上式花括号内的值为负, 因此当  $s$  充分接近零时, (10)式右端(从而  $\Delta f$ ) 与  $f_{xx}(x_0, y_0)$  异号.

以上已经证得: 在点  $(x_0, y_0)$  的任意邻近,  $\Delta f$  可取不同符号的值, 因此  $f(x_0, y_0)$  不是极值.

### (3) 考察函数

$$f(x, y) = x^2 + y^4 \quad \text{及} \quad g(x, y) = x^2 + y^3.$$

容易验证, 这两个函数都以  $(0, 0)$  为驻点, 且在点  $(0, 0)$  处都满足  $AC - B^2 = 0$ . 但  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处有极小值, 而  $g(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处却没有极值.

## \* 习 题 9-9

1. 求函数  $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$  在点  $(1, -2)$  的泰勒公式.
2. 求函数  $f(x, y) = e^x \ln(1+y)$  在点  $(0, 0)$  的三阶泰勒公式.
3. 求函数  $f(x, y) = \sin x \sin y$  在点  $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$  的二阶泰勒公式.
4. 利用函数  $f(x, y) = x^y$  的三阶泰勒公式, 计算  $1.1^{1.02}$  的近似值.
5. 求函数  $f(x, y) = e^{x+y}$  在点  $(0, 0)$  的  $n$  阶泰勒公式.

## \* 第十节 最小二乘法

许多工程问题, 常常需要根据两个变量的几组实验数值——实验数据, 来找出这两个变量的函数关系的近似表达式. 通常把这样得到的函数的近似表达式叫做经验公式. 经验公式建立以后, 就可以把生产或实验中所积累的某些经验, 提高到理论上加以分析. 下面通过举例介绍常用的一种建立经验公式的方法.

**例 1** 为了测定刀具的磨损速度, 我们做这样的实验: 经过一定时间(如每隔一小时), 测量一次刀具的厚度, 得到一组实验数据如下:

顺序编号 $i$	0	1	2	3	4	5	6	7
时间 $t_i/h$	0	1	2	3	4	5	6	7
刀具厚度 $y_i/mm$	27.0	26.8	26.5	26.3	26.1	25.7	25.3	24.8

试根据上面的实验数据建立  $y$  和  $t$  之间的经验公式  $y = f(t)$ . 也就是, 要找出一个能使上述数据大体适合的函数关系  $y = f(t)$ .

解 首先, 要确定  $f(t)$  的类型. 为此, 可按下法处理. 在直角坐标纸上取  $t$  为横坐标,  $y$  为纵坐标, 描出上述各对数据的对应点, 如图 9-12 所示. 从图上可以看出, 这些点的连线大致接近于一条直线. 于是, 就可以认为  $y = f(t)$  是线性函数, 并设

$$f(t) = at + b,$$

其中  $a$  和  $b$  是待定常数.

常数  $a$  和  $b$  如何确定呢? 最理想的情形是选取这样的  $a$  和  $b$ , 能使直线  $y = at + b$  经过图 9-12 中所标出的各点. 但在实际上这是不可能的. 因为这些点本来就不在同一条直线上. 因此, 只能要求选取这样的  $a$ 、 $b$ , 使得  $f(t) = at + b$  在  $t_0$ ,  $t_1, t_2, \dots, t_7$  处的函数值与实验数据  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_7$  相差都很小, 就是要使偏差

$$y_i - f(t_i) \quad (i=0, 1, 2, \dots, 7)$$

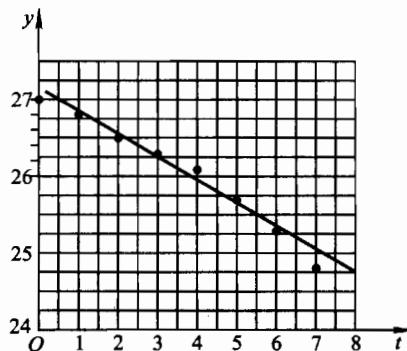


图 9-12

都很小. 那么如何达到这一要求呢? 能否设法使偏差的和

$$\sum_{i=0}^7 [y_i - f(t_i)]$$

很小来保证每个偏差都很小呢? 不能, 因为偏差有正有负, 在求和时, 可能互相抵消. 为了避免这种情形, 可对偏差取绝对值再求和, 只要

$$\sum_{i=0}^7 |y_i - f(t_i)| = \sum_{i=0}^7 |y_i - (at_i + b)|$$

很小, 就可以保证每个偏差的绝对值都很小. 但是这个式子中有绝对值记号, 不便于进一步分析讨论. 由于任何实数的平方都是正数或零, 因此可以考虑选取常数  $a$ 、 $b$ , 使

$$M = \sum_{i=0}^7 [y_i - (at_i + b)]^2$$

最小来保证每个偏差的绝对值都很小. 这种根据偏差的平方和为最小的条件来选择常数  $a$ 、 $b$  的方法叫做最小二乘法. 这种确定常数  $a$ 、 $b$  的方法是通常所采用

的。

现在我们来研究，经验公式  $y = at + b$  中， $a$  和  $b$  符合什么条件时，可以使上述的  $M$  为最小。如果把  $M$  看成与自变量  $a$  和  $b$  相对应的因变量，那么问题就可归结为求函数  $M = M(a, b)$  在哪些点处取得最小值。由第八节中的讨论可知，上述问题可以通过求方程组

$$\begin{cases} M_a(a, b) = 0, \\ M_b(a, b) = 0 \end{cases}$$

的解来解决，即令

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial a} = -2 \sum_{i=0}^7 [y_i - (at_i + b)] t_i = 0, \\ \frac{\partial M}{\partial b} = -2 \sum_{i=0}^7 [y_i - (at_i + b)] = 0; \end{cases}$$

亦即

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^7 t_i [y_i - (at_i + b)] = 0, \\ \sum_{i=0}^7 [y_i - (at_i + b)] = 0. \end{cases}$$

将括号内各项进行整理合并，并把未知数  $a$  和  $b$  分离出来，便得

$$\begin{cases} a \sum_{i=0}^7 t_i^2 + b \sum_{i=0}^7 t_i = \sum_{i=0}^7 y_i t_i, \\ a \sum_{i=0}^7 t_i + 8b = \sum_{i=0}^7 y_i. \end{cases} \quad (1)$$

下面通过列表来计算  $\sum_{i=0}^7 t_i$ ,  $\sum_{i=0}^7 t_i^2$ ,  $\sum_{i=0}^7 y_i$  及  $\sum_{i=0}^7 y_i t_i$ .

	$t_i$	$t_i^2$	$y_i$	$y_i t_i$
	0	0	27.0	0
	1	1	26.8	26.8
	2	4	26.5	53.0
	3	9	26.3	78.9
	4	16	26.1	104.4
	5	25	25.7	128.5
	6	36	25.3	151.8
	7	49	24.8	173.6
$\Sigma$	28	140	208.5	717.0

代入方程组(1),得到

$$\begin{cases} 140a + 28b = 717, \\ 28a + 8b = 208.5. \end{cases}$$

解此方程组,得到  $a = -0.3036, b = 27.125$ . 这样便得到所求经验公式为

$$y = f(t) = -0.3036t + 27.125. \quad (2)$$

由(2)式算出的函数值  $f(t_i)$  与实测的  $y_i$  有一定的偏差. 现列表比较如下:

$t_i$	0	1	2	3	4	5	6	7
实测的 $y_i/\text{mm}$	27.0	26.8	26.5	26.3	26.1	25.7	25.3	24.8
算得的 $f(t_i)/\text{mm}$	27.125	26.821	26.518	26.214	25.911	25.607	25.303	25.000
偏差	-0.125	-0.021	-0.018	0.086	0.189	0.093	-0.003	-0.200

偏差的平方和  $M = 0.108165$ , 它的平方根  $\sqrt{M} = 0.329$ .  $\sqrt{M}$  称为均方误差, 它的大小在一定程度上反映了用经验公式来近似表达原来函数关系的近似程度的好坏.

在例 1 中, 按实验数据描出的图形接近于一条直线. 在这种情形下, 就可认为函数关系是线性函数类型的, 从而问题可化为求解一个二元一次方程组, 计算比较方便. 还有一些实际问题, 经验公式的类型不是线性函数, 但可以设法把它化成线性函数的类型来讨论. 举例说明于下:

例 2 在研究某单分子化学反应速度时, 得到下列数据:

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\tau_i$	3	6	9	12	15	18	21	24
$y_i$	57.6	41.9	31.0	22.7	16.6	12.2	8.9	6.5

其中  $\tau$  表示从实验开始算起的时间,  $y$  表示时刻  $\tau$  反应物的量. 试根据上述数据定出经验公式  $y = f(\tau)$ .

解 由化学反应速度的理论知道,  $y = f(\tau)$  应是指数函数:  $y = ke^{m\tau}$ , 其中  $k$  和  $m$  是待定常数. 对这批数据, 先来验证这个结论. 为此, 在  $y = ke^{m\tau}$  的两边取常用对数, 得

$$\lg y = (m \cdot \lg e) \tau + \lg k.$$

记  $m \cdot \lg e$  即  $0.4343m = a$ ,  $\lg k = b$ , 则上式可写为

$$\lg y = a\tau + b,$$

于是  $\lg y$  就是  $\tau$  的线性函数. 所以, 把表中各对数据  $(\tau_i, y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) 所对应的点描在半对数坐标纸上(半对数坐标纸的横轴上各点处所标明的数字与普通的直角坐标纸相同, 而纵轴上各点处所标明的数字是这样的, 它的常用对数就是该点到原点的距离), 如图 9-13 所示. 从图上看出, 这些点的连线非常接近于一条直线, 这说明  $y = f(\tau)$  确实可以认为是指数函数.

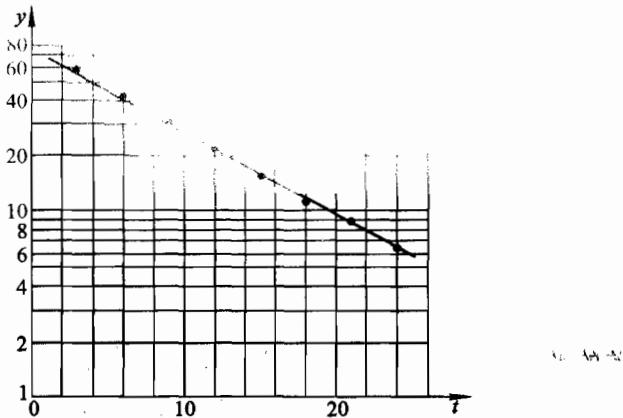


图 9-13

下面来具体定出  $k$  与  $m$  的值.

由于

$$\lg y = a\tau + b,$$

所以可仿照例 1 中的讨论, 通过求方程组

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^8 \tau_i^2 + b \sum_{i=1}^8 \tau_i = \sum_{i=1}^8 \tau_i \lg y_i, \\ a \sum_{i=1}^8 \tau_i + 8b = \sum_{i=1}^8 \lg y_i \end{cases} \quad (3)$$

的解, 把  $a, b$  确定出来.

下面通过列表来计算  $\sum_{i=1}^8 \tau_i$ ,  $\sum_{i=1}^8 \tau_i^2$ ,  $\sum_{i=1}^8 \lg y_i$  及  $\sum_{i=1}^8 \tau_i \lg y_i$ .

	$\tau_i$	$\tau_i^2$	$y_i$	$\lg y_i$	$\tau_i \lg y_i$
	3	9	57.6	1.760 4	5.281 2
	6	36	41.9	1.622 2	9.733 2
	9	81	31.0	1.491 4	13.422 6

续表

	$\tau_i$	$\tau_i^2$	$y_i$	$\lg y_i$	$\tau_i \lg y_i$
	12	144	22.7	1.356 0	16.272 0
	15	225	16.6	1.220 1	18.301 5
	18	324	12.2	1.086 4	19.555 2
	21	441	8.9	0.949 4	19.937 4
	24	576	6.5	0.812 9	19.509 6
$\Sigma$	108	1 836		10.298 8	122.012 7

将它们代入方程组(3)(其中取  $\sum_{i=1}^8 \lg y_i = 10.3$ ,  $\sum_{i=1}^8 \tau_i \lg y_i = 122$ ), 得

$$\begin{cases} 1836a + 108b = 122, \\ 108a + 8b = 10.3. \end{cases}$$

解这方程组, 得

$$\begin{cases} a = 0.4343m = -0.045, \\ b = \lg k = 1.8964, \end{cases}$$

所以

$$m = -0.1036, k = 78.78.$$

因此所求的经验公式为

$$y = 78.78e^{-0.1036\tau}.$$

### \* 习 题 9-10

1. 某种合金的含铅量百分比(%)为  $p$ , 其熔解温度(℃)为  $\theta$ , 由实验测得  $p$  与  $\theta$  的数据如下表:

$p/(%)$	36.9	46.7	63.7	77.8	84.0	87.5
$\theta/^\circ\text{C}$	181	197	235	270	283	292

试用最小二乘法建立  $\theta$  与  $p$  之间的经验公式  $\theta = ap + b$ .

2. 已知一组实验数据为  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ . 现若假定经验公式是

$$y = ax^2 + bx + c.$$

试按最小二乘法建立  $a, b, c$  应满足的三元一次方程组.

### 总习题九

1. 在“充分”、“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内:

(1)  $f(x, y)$  在点  $(x, y)$  可微分是  $f(x, y)$  在该点连续的 \_\_\_\_\_ 条件.  $f(x, y)$  在点  $(x, y)$  连续是  $f(x, y)$  在该点可微分的 \_\_\_\_\_ 条件;

(2)  $z = f(x, y)$  在点  $(x, y)$  的偏导数  $\frac{\partial z}{\partial x}$  及  $\frac{\partial z}{\partial y}$  存在是  $f(x, y)$  在该点可微分的 \_\_\_\_\_ 条件.  $z = f(x, y)$  在点  $(x, y)$  可微分是函数在该点的偏导数  $\frac{\partial z}{\partial x}$  及  $\frac{\partial z}{\partial y}$  存在的 \_\_\_\_\_ 条件;

(3)  $z = f(x, y)$  的偏导数  $\frac{\partial z}{\partial x}$  及  $\frac{\partial z}{\partial y}$  在点  $(x, y)$  存在且连续是  $f(x, y)$  在该点可微分的 \_\_\_\_\_ 条件;

(4) 函数  $z = f(x, y)$  的两个二阶混合偏导数  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  及  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$  在区域  $D$  内连续是这两个二阶混合偏导数在  $D$  内相等的 \_\_\_\_\_ 条件.

2. 选择下述题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设函数  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  的某邻域内有定义, 且  $f_x(0, 0) = 3, f_y(0, 0) = -1$ , 则有 \_\_\_\_\_.

(A)  $dz|_{(0,0)} = 3dx - dy$

(B) 曲面  $z = f(x, y)$  在点  $(0, 0, f(0, 0))$  的一个法向量为  $(3, -1, 1)$

(C) 曲线  $\begin{cases} z = f(x, y), \\ y = 0 \end{cases}$  在点  $(0, 0, f(0, 0))$  的一个切向量为  $(1, 0, 3)$

(D) 曲线  $\begin{cases} z = f(x, y), \\ y = 0 \end{cases}$  在点  $(0, 0, f(0, 0))$  的一个切向量为  $(3, 0, 1)$

3. 求函数  $f(x, y) = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$  的定义域, 并求  $\lim_{(x,y) \rightarrow (\frac{1}{2}, 0)} f(x, y)$ .

4. 证明极限  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$  不存在.

5. 设

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

求  $f_x(x, y)$  及  $f_y(x, y)$ .

6. 求下列函数的一阶和二阶偏导数:

(1)  $z = \ln(x + y^2)$ ; (2)  $z = x^y$ .

7. 求函数  $z = \frac{xy}{x^2 - y^2}$  当  $x = 2, y = 1, \Delta x = 0.01, \Delta y = 0.03$  时的全增量和全微分.

8. 设

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

证明:  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处连续且偏导数存在, 但不可微分.

9. 设  $u = x^y$ , 而  $x = \varphi(t), y = \psi(t)$  都是可微函数, 求  $\frac{du}{dt}$ .

10. 设  $z = f(u, v, w)$  具有连续偏导数, 而

$$u = \eta - \zeta, v = \zeta - \xi, w = \xi - \eta,$$

求  $\frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}, \frac{\partial z}{\partial \zeta}$ .

11. 设  $z = f(u, x, y)$ ,  $u = xe^y$ , 其中  $f$  具有连续的二阶偏导数, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

12. 设  $x = e^u \cos v$ ,  $y = e^u \sin v$ ,  $z = uv$ . 试求  $\frac{\partial z}{\partial x}$  和  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

13. 求螺旋线  $x = a \cos \theta$ ,  $y = a \sin \theta$ ,  $z = b\theta$  在点  $(a, 0, 0)$  处的切线及法平面方程.

14. 在曲面  $z = xy$  上求一点, 使这点处的法线垂直于平面  $x + 3y + z + 9 = 0$ , 并写出这法线的方程.

15. 设  $e_i = (\cos \theta, \sin \theta)$ , 求函数

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2$$

在点  $(1, 1)$  沿方向  $l$  的方向导数, 并分别确定角  $\theta$ , 使这导数有(1)最大值, (2)最小值, (3)等于 0.

解:

16. 求函数  $u = x^2 + y^2 + z^2$  在椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  上点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  处沿外法线方向的方向导数.

17. 求平面  $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1$  和柱面  $x^2 + y^2 = 1$  的交线上与  $xOy$  平面距离最短的点.

18. 在第一卦限内作椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  的切平面, 使该切平面与三坐标面所围成的四面体的体积最小. 求这切平面的切点, 并求此最小体积.

19. 某厂家生产的一种产品同时在两个市场销售, 售价分别为  $p_1$  和  $p_2$ , 销售量分别为  $q_1$  和  $q_2$ , 需求函数分别为

$$q_1 = 24 - 0.2p_1, q_2 = 10 - 0.05p_2,$$

总成本函数为

$$C = 35 + 40(q_1 + q_2).$$

试问: 厂家如何确定两个市场的售价, 能使其获得的总利润最大? 最大总利润为多少?

20. 设有一小山, 取它的底面所在的平面为  $xOy$  坐标面, 其底部所占的闭区域为  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 - xy \leq 75\}$ , 小山的高度函数为  $h = f(x, y) = 75 - x^2 - y^2 + xy$ .

(1) 设  $M(x_0, y_0) \in D$ , 问  $f(x, y)$  在该点沿平面上什么方向的方向导数最大? 若记此方向导数的最大值为  $g(x_0, y_0)$ , 试写出  $g(x_0, y_0)$  的表达式;

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动, 为此需要在山脚找一上山坡度最大的点作为攀岩的起点. 也就是说, 要在  $D$  的边界线  $x^2 + y^2 - xy = 75$  上找出(1)中的  $g(x, y)$  达到最大值的点. 试确定攀岩起点的位置.

# 第十章 重 积 分

本章和下一章是多元函数积分学的内容.在一元函数积分学中我们知道,定积分是某种确定形式的和的极限.这种和的极限的概念推广到定义在区域、曲线及曲面上多元函数的情形,便得到重积分、曲线积分及曲面积分的概念.本章将介绍重积分(包括二重积分和三重积分)的概念、计算法以及它们的一些应用.

## 第一节 二重积分的概念与性质

### 一、二重积分的概念

#### 1. 曲顶柱体的体积

设有一立体,它的底是  $xOy$  面上的闭区域  $D$ <sup>①</sup>,它的侧面是以  $D$  的边界曲线为准线而母线平行于  $z$  轴的柱面,它的顶是曲面  $z = f(x, y)$ ,这里  $f(x, y) \geq 0$  且在  $D$  上连续(图 10-1).这种立体叫做曲顶柱体.现在我们来讨论如何定义并计算上述曲顶柱体的体积  $V$ .

我们知道,平顶柱体的高是不变的,它的体积可以用公式

$$\text{体积} = \text{高} \times \text{底面积}$$

来定义和计算.关于曲顶柱体,当点  $(x, y)$  在区域  $D$  上变动时,高度  $f(x, y)$  是个变量,因此它的体积不能直接用上式来定义和计算.但如果回忆起第五章中求曲边梯形面积的问题,就不难想到,那里所采用的解决办法,原则上可以用来解决目前的问题.

首先,用一组曲线网把  $D$  分成  $n$  个小闭区域

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n.$$

分别以这些小闭区域的边界曲线为准线,作母线平行于  $z$  轴的柱面,这些柱面

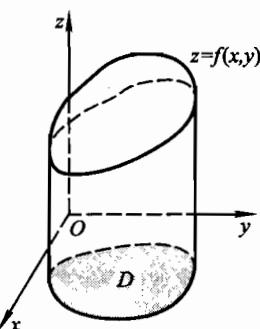


图 10-1

<sup>①</sup> 为简便起见,本章以后除特别说明者外,都假定平面闭区域和空间闭区域是有界的,且平面闭区域有有限面积,空间闭区域有有限体积.

把原来的曲顶柱体分为  $n$  个细曲顶柱体. 当这些小闭区域的直径<sup>①</sup>很小时, 由于  $f(x, y)$  连续, 对同一个小闭区域来说,  $f(x, y)$  变化很小, 这时细曲顶柱体可近似看做平顶柱体. 我们在每个  $\Delta\sigma_i$  (这小闭区域的面积也记作  $\Delta\sigma_i$ ) 中任取一点  $(\xi_i, \eta_i)$ , 以  $f(\xi_i, \eta_i)$  为高而底为  $\Delta\sigma_i$  的平顶柱体(图 10-2)的体积为

$$f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

这  $n$  个平顶柱体体积之和

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

可以认为是整个曲顶柱体体积的近似值. 令  $n$  个小闭区域的直径中的最大值(记作  $\lambda$ )趋于零, 取上述和的极限, 所得的极限便自然地定义为所论曲顶柱体的体积

$V$ , 即

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

## 2. 平面薄片的质量

设有一平面薄片占有  $xOy$  面上的闭区域  $D$ , 它在点  $(x, y)$  处的面密度为  $\mu(x, y)$ , 这里  $\mu(x, y) > 0$  且在  $D$  上连续. 现在要计算该薄片的质量  $M$ .

我们知道, 如果薄片是均匀的, 即面密度是常数, 那么薄片的质量可以用公式

$$\text{质量} = \text{面密度} \times \text{面积}$$

来计算. 现在面密度  $\mu(x, y)$  是变量, 薄片的质量就不能直接用上式来计算. 但是上面用来处理曲顶柱体体积问题的方法完全适用于本问题.

由于  $\mu(x, y)$  连续, 把薄片分成许多小块后, 只要小块所占的小闭区域  $\Delta\sigma_i$  的直径很小, 这些小块就可以近似地看做均匀薄片. 在  $\Delta\sigma_i$  上任取一点  $(\xi_i, \eta_i)$ , 则

$$\mu(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

可看做第  $i$  个小块的质量的近似值(图 10-3). 通过求和、取极限, 便得出

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

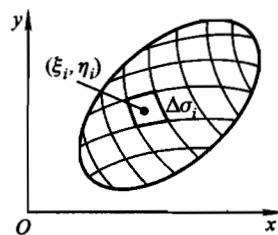


图 10-3

① 一个闭区域的直径是指区域上任意两点间距离的最大者.

上面两个问题的实际意义虽然不同,但所求量都归结为同一形式的和的极限.在物理、力学、几何和工程技术中,有许多物理量或几何量都可归结为这一形式的和的极限.因此我们要一般地研究这种和的极限,并抽象出下述二重积分的定义.

**定义** 设  $f(x, y)$  是有界闭区域  $D$  上的有界函数. 将闭区域  $D$  任意分成  $n$  个小闭区域

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n,$$

其中  $\Delta\sigma_i$  表示第  $i$  个小闭区域, 也表示它的面积. 在每个  $\Delta\sigma_i$  上任取一点  $(\xi_i, \eta_i)$ , 作乘积  $f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 并作和  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ . 如果当各小闭区域的直径中的最大值  $\lambda$  趋于零时, 这和的极限总存在, 则称此极限为函数  $f(x, y)$  在闭区域  $D$  上的二重积分, 记作  $\iint_D f(x, y) d\sigma$ , 即

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i. \quad (1)$$

其中  $f(x, y)$  叫做被积函数,  $f(x, y) d\sigma$  叫做被积表达式,  $d\sigma$  叫做面积元素,  $x$  与  $y$  叫做积分变量,  $D$  叫做积分区域,  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$  叫做积分和.

在二重积分的定义中对闭区域  $D$  的划分是任意的, 如果在直角坐标系中用平行于坐标轴的直线网来划分  $D$ , 那么除了包含边界点的一些小闭区域外<sup>①</sup>, 其余的小闭区域都是矩形闭区域. 设矩形闭区域  $\Delta\sigma_i$  的边长为  $\Delta x_j$  和  $\Delta y_k$ , 则  $\Delta\sigma_i = \Delta x_j \cdot \Delta y_k$ . 因此在直角坐标系中, 有时也把面积元素  $d\sigma$  记作  $dx dy$ , 而把二重积分记作

$$\iint_D f(x, y) dx dy,$$

其中  $dx dy$  叫做直角坐标系中的面积元素.

这里我们要指出, 当  $f(x, y)$  在闭区域  $D$  上连续时, (1)式右端的和的极限必定存在, 也就是说, 函数  $f(x, y)$  在  $D$  上的二重积分必定存在. 我们总假定函数  $f(x, y)$  在闭区域  $D$  上连续, 所以  $f(x, y)$  在  $D$  上的二重积分都是存在的, 以后就不再每次加以说明了.

由二重积分的定义可知, 曲顶柱体的体积是函数  $f(x, y)$  在底  $D$  上的二重积分

<sup>①</sup> 求和的极限时, 这些小闭区域所对应的项的和的极限为零, 因此这些小闭区域可以略去不计.

$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma,$$

平面薄片的质量是它的面密度  $\mu(x, y)$  在薄片所占闭区域  $D$  上的二重积分

$$m = \iint_D \mu(x, y) d\sigma.$$

一般的,如果  $f(x, y) \geq 0$ ,被积函数  $f(x, y)$  可解释为曲顶柱体的顶在点  $(x, y)$  处的竖坐标,所以二重积分的几何意义就是柱体的体积.如果  $f(x, y)$  是负的,柱体就在  $xOy$  面的下方,二重积分的绝对值仍等于柱体的体积,但二重积分的值是负的.如果  $f(x, y)$  在  $D$  的若干部分区域上是正的,而在其他的部分区域上是负的,那么,  $f(x, y)$  在  $D$  上的二重积分就等于  $xOy$  面上方的柱体体积减去  $xOy$  面下方的柱体体积所得之差.

## 二、二重积分的性质

比较定积分与二重积分的定义可以想到,二重积分与定积分有类似性质,现叙述于下.

**性质 1** 设  $\alpha, \beta$  为常数,则

$$\iint_D [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)] d\sigma = \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma + \beta \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

**性质 2** 如果闭区域  $D$  被有限条曲线分为有限个部分闭区域,则在  $D$  上的二重积分等于在各部分闭区域上的二重积分的和.例如  $D$  分为两个闭区域  $D_1$  与  $D_2$ ,则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma.$$

这个性质表示二重积分对于积分区域具有可加性.

**性质 3** 如果在  $D$  上,  $f(x, y) = 1$ ,  $\sigma$  为  $D$  的面积,则

$$\sigma = \iint_D 1 \cdot d\sigma = \iint_D d\sigma.$$

这性质的几何意义是很明显的,因为高为 1 的平顶柱体的体积在数值上就等于柱体的底面积.

**性质 4** 如果在  $D$  上,  $f(x, y) \leq \varphi(x, y)$ , 则有

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D \varphi(x, y) d\sigma.$$

特殊地,由于

$$-|f(x, y)| \leq f(x, y) \leq |f(x, y)|,$$

又有

$$\left| \iint_D f(x, y) d\sigma \right| \leq \iint_D |f(x, y)| d\sigma .$$

**性质 5** 设  $M, m$  分别是  $f(x, y)$  在闭区域  $D$  上的最大值和最小值,  $\sigma$  是  $D$  的面积, 则有

$$m\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M\sigma .$$

上述不等式是对于二重积分估值的不等式. 因为  $m \leq f(x, y) \leq M$ , 所以由性质 4 有

$$\iint_D m d\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D M d\sigma ,$$

再应用性质 1 和性质 3, 便得此估值不等式.

**性质 6(二重积分的中值定理)** 设函数  $f(x, y)$  在闭区域  $D$  上连续,  $\sigma$  是  $D$  的面积, 则在  $D$  上至少存在一点  $(\xi, \eta)$ , 使得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot \sigma .$$

**证** 显然  $\sigma \neq 0$ . 把性质 5 中不等式各除以  $\sigma$ , 有

$$m \leq \frac{1}{\sigma} \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M .$$

这就是说, 确定的数值  $\frac{1}{\sigma} \iint_D f(x, y) d\sigma$  是介于函数  $f(x, y)$  的最大值  $M$  与最小值  $m$  之间的. 根据在区闭域上连续函数的介值定理, 在  $D$  上至少存在一点  $(\xi, \eta)$ , 使得函数在该点的值与这个确定的数值相等, 即

$$\frac{1}{\sigma} \iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) .$$

上式两端各乘以  $\sigma$ , 就得所需要证明的公式.

## 习题 10-1

1. 设有一平面薄板(不计其厚度)占有  $xOy$  面上的闭区域  $D$ , 薄板上分布有面密度为  $\mu = \mu(x, y)$  的电荷, 且  $\mu(x, y)$  在  $D$  上连续, 试用二重积分表达该板上的全部电荷  $Q$ .

2. 设  $I_1 = \iint_{D_1} (x^2 + y^2)^3 d\sigma$ , 其中  $D_1 = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$ ;

- 又  $I_2 = \iint_{D_2} (x^2 + y^2)^3 d\sigma$ , 其中  $D_2 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ .

试利用二重积分的几何意义说明  $I_1$  与  $I_2$  之间的关系.

3. 利用二重积分定义证明:

$$(1) \iint_D d\sigma = \sigma \quad (\text{其中 } \sigma \text{ 为 } D \text{ 的面积});$$

$$(2) \iint_D kf(x, y) d\sigma = k \iint_D f(x, y) d\sigma \quad (\text{其中 } k \text{ 为常数});$$

$$(3) \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma,$$

其中  $D = D_1 \cup D_2$ ,  $D_1, D_2$  为两个无公共内点的闭区域.

4. 根据二重积分的性质, 比较下列积分的大小:

(1)  $\iint_D (x+y)^2 d\sigma$  与  $\iint_D (x+y)^3 d\sigma$ , 其中积分区域  $D$  是由  $x$  轴、 $y$  轴与直线  $x+y=1$  所围成;

(2)  $\iint_D (x+y)^2 d\sigma$  与  $\iint_D (x+y)^3 d\sigma$ , 其中积分区域  $D$  是由圆周  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$  所围成;

(3)  $\iint_D \ln(x+y) d\sigma$  与  $\iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$ , 其中  $D$  是三角形闭区域, 三顶点分别为  $(1,0), (1,1), (2,0)$ ;

(4)  $\iint_D \ln(x+y) d\sigma$  与  $\iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$ , 其中  $D = \{(x,y) | 3 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 1\}$ .

5. 利用二重积分的性质估计下列积分的值:

(1)  $I = \iint_D xy(x+y) d\sigma$ , 其中  $D = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ ;

(2)  $I = \iint_D \sin^2 x \sin^2 y d\sigma$ , 其中  $D = \{(x,y) | 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$ ;

(3)  $I = \iint_D (x+y+1) d\sigma$ , 其中  $D = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ ;

(4)  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ , 其中  $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$ .

## 第二节 二重积分的计算法

按照二重积分的定义来计算二重积分, 对少数特别简单的被积函数和积分区域来说是可行的, 但对一般的函数和区域来说, 这不是一种切实可行的方法. 本节介绍一种计算二重积分的方法, 这种方法是把二重积分化为两次单积分(即两次定积分)来计算.

## 一、利用直角坐标计算二重积分

下面用几何观点来讨论二重积分  $\iint_D f(x, y) d\sigma$  的计算问题. 在讨论中我们假定  $f(x, y) \geq 0$ .

设积分区域  $D$  可以用不等式

$$\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b$$

来表示(图 10-4), 其中函数  $\varphi_1(x)$ 、 $\varphi_2(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续.

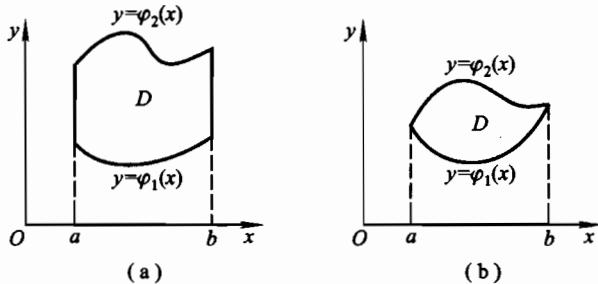


图 10-4

按照二重积分的几何意义, 二重积分  $\iint_D f(x, y) d\sigma$  的值等于以  $D$  为底, 以曲面  $z = f(x, y)$  为顶的曲顶柱体(图 10-5)的体积. 下面我们应用第六章中计算“平行截面面积为已知的立体的体积”的方法来计算这个曲顶柱体的体积.

先计算截面面积. 为此, 在区间  $[a, b]$  上任意取定一点  $x_0$ , 作平行于  $yOz$  面的平面  $x = x_0$ . 这平面截曲顶柱体所得的截面是一个以区间  $[\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0)]$  为底、曲线  $z = f(x_0, y)$  为曲边的曲边梯形(图 10-5 中阴影部分), 所以这截面的面积为

$$A(x_0) = \int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y) dy.$$

一般的, 过区间  $[a, b]$  上任一点  $x$  且平行于  $yOz$  面的平面截曲顶柱体所得截面的面积为

$$A(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

于是, 应用计算平行截面面积为已知的立体体积的方法, 得曲顶柱体体积为

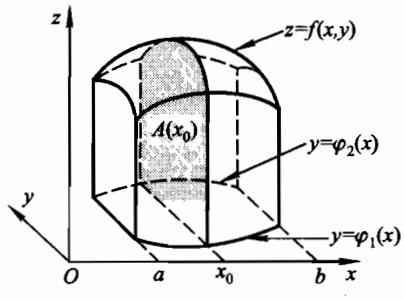


图 10-5

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

这个体积也就是所求二重积分的值,从而有等式

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx. \quad (1)$$

上式右端的积分叫做先对  $y$ 、后对  $x$  的二次积分. 就是说,先把  $x$  看做常数,把  $f(x, y)$  只看做  $y$  的函数,并对  $y$  计算从  $\varphi_1(x)$  到  $\varphi_2(x)$  的定积分;然后把算得的结果(是  $x$  的函数)再对  $x$  计算在区间  $[a, b]$  上的定积分. 这个先对  $y$ 、后对  $x$  的二次积分也常记作

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

因此,等式(1)也写成

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy, \quad (1')$$

这就是把二重积分化为先对  $y$ 、后对  $x$  的二次积分的公式.

在上述讨论中,我们假定  $f(x, y) \geq 0$ ,但实际上公式(1)的成立并不受此条件限制.

类似地,如果积分区域  $D$  可以用不等式

$$\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d$$

来表示(图 10-6),其中函数  $\psi_1(y)$ 、 $\psi_2(y)$  在区间  $[c, d]$  上连续,那么就有

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d \left[ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy. \quad (2)$$

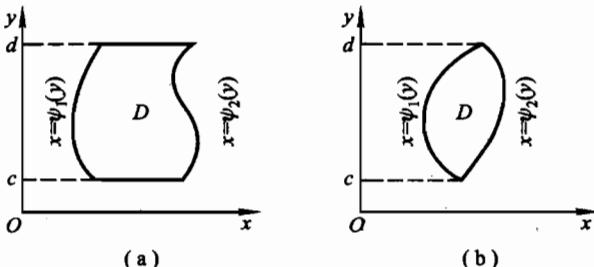


图 10-6

上式右端的积分叫做先对  $x$ 、后对  $y$  的二次积分,这个积分也常记作

$$\int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx.$$

因此,等式(2)也写成

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx, \quad (2')$$

这就是把二重积分化为先对  $x$ 、后对  $y$  的二次积分的公式.

以后我们称图 10-4 所示的积分区域为  $X$  型区域, 图 10-6 所示的积分区域为  $Y$  型区域. 应用公式(1)时, 积分区域必须是  $X$  型区域,  $X$  型区域  $D$  的特点是: 穿过  $D$  内部且平行于  $y$  轴的直线与  $D$  的边界相交不多于两点; 而用公式(2)时, 积分区域必须是  $Y$  型区域,  $Y$  型区域  $D$  的特点是: 穿过  $D$  内部且平行于  $x$  轴的直线与  $D$  的边界相交不多于两点. 如果积分区域  $D$  如图 10-7 那样, 既有一部分使穿过  $D$  内部且平行于  $y$  轴的直线与  $D$  的边界相交多于两点; 又有一部分使穿过  $D$  内部且平行于  $x$  轴的直线与  $D$  的边界相交多于两点, 那么  $D$  既不是  $X$  型区域, 又不是  $Y$  型区域. 对于这种情形, 可以把  $D$  分成几部分, 使每个部分是  $X$  型区域或是  $Y$  型区域. 例如, 在图 10-7 中, 把  $D$  分成三部分, 它们都是  $X$  型区域, 从而在这三部分上的二重积分都可应用公式(1). 各部分上的二重积分求得后, 根据二重积分的性质 2, 它们的和就是在  $D$  上的二重积分.

如果积分区域  $D$  既是  $X$  型的, 可用不等式  $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  表示, 又是  $Y$  型的, 可用不等式  $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$ ,  $c \leq y \leq d$  表示(图 10-8), 则由公式(1')及(2')就得

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx. \quad (3)$$

上式表明, 这两个不同次序的二次积分相等, 因为它们都等于同一个二重积分

$$\iint_D f(x, y) d\sigma.$$

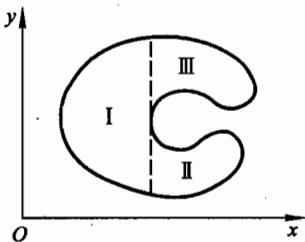


图 10-7

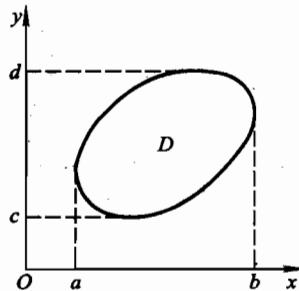


图 10-8

将二重积分化为二次积分时, 确定积分限是一个关键. 积分限是根据积分区域  $D$  来确定的, 先画出积分区域  $D$  的图形. 假如积分区域  $D$  是  $X$  型的, 如图 10-9 所示, 在区间  $[a, b]$  上任意取定一个  $x$  值, 积分区域上以这个  $x$  值为横坐

标的点在一段直线上,这段直线平行于  $y$  轴,该线段上点的纵坐标从  $\varphi_1(x)$  变到  $\varphi_2(x)$ ,这就是公式(1)中先把  $x$  看做常量而对  $y$  积分时的下限和上限.因为上面的  $x$  值是在  $[a, b]$  上任意取定的,所以再把  $x$  看做变量而对  $x$  积分时,积分区间就是  $[a, b]$ .

**例 1** 计算  $\iint_D xy \, d\sigma$ , 其中  $D$  是由直线  $y=1$ 、 $x=2$  及  $y=x$  所围成的闭区域.

**解法 1** 首先画出积分区域  $D$  (图 10-10).  $D$  是  $X$  型的,  $D$  上的点的横坐标的变动范围是区间  $[1, 2]$ . 在区间  $[1, 2]$  上任意取定一个  $x$  值, 则  $D$  上以这个  $x$  值为横坐标的点在一段直线上, 这段直线平行于  $y$  轴, 该线段上点的纵坐标从  $y=1$  变到  $y=x$ . 利用公式(1)得

$$\begin{aligned} \iint_D xy \, d\sigma &= \int_1^2 \left[ \int_1^x xy \, dy \right] dx = \int_1^2 \left[ x \cdot \frac{y^2}{2} \right]_1^x dx \\ &= \int_1^2 \left( \frac{x^3}{2} - \frac{x}{2} \right) dx = \left[ \frac{x^4}{8} - \frac{x^2}{4} \right]_1^2 = \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

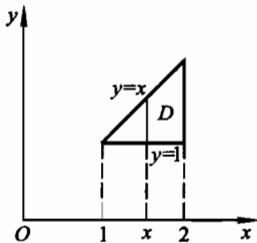


图 10-10

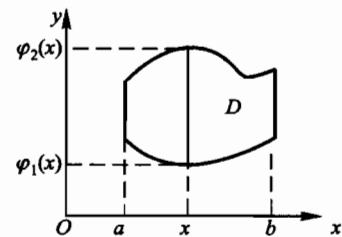


图 10-9

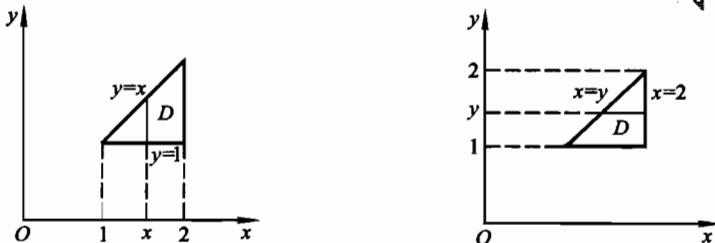


图 10-11

**解法 2** 如图 10-11, 积分区域  $D$  是  $Y$  型的,  $D$  上的点的纵坐标的变动范围是区间  $[1, 2]$ . 在区间  $[1, 2]$  上任意取定一个  $y$  值, 则  $D$  上以这个  $y$  值为纵坐标的点在一段直线上, 这段直线平行于  $x$  轴, 该线段上点的横坐标从  $x=y$  变到  $x=2$ . 于是, 利用公式(2)得

$$\begin{aligned} \iint_D xy \, d\sigma &= \int_1^2 \left[ \int_y^2 xy \, dx \right] dy = \int_1^2 \left[ y \cdot \frac{x^2}{2} \right]_y^2 dy \\ &= \int_1^2 \left( 2y - \frac{y^3}{2} \right) dy = \left[ y^2 - \frac{y^4}{8} \right]_1^2 = \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

**例 2** 计算  $\iint_D y \sqrt{1+x^2-y^2} \, d\sigma$ , 其中  $D$  是由直线  $y=x$ 、 $x=-1$  和  $y=1$  所围成的闭区域.

解 画出积分区域  $D$  如图 10-12 所示.  $D$  既是 X 型的, 又是 Y 型的. 若利用公式(1), 得

$$\begin{aligned} \iint_D y \sqrt{1+x^2-y^2} d\sigma &= \int_{-1}^1 \left[ \int_x^1 y \sqrt{1+x^2-y^2} dy \right] dx \\ &= -\frac{1}{3} \int_{-1}^1 [(1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}]_x^1 dx \\ &= -\frac{1}{3} \int_{-1}^1 (|x|^3 - 1) dx \\ &= -\frac{2}{3} \int_0^1 (x^3 - 1) dx = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

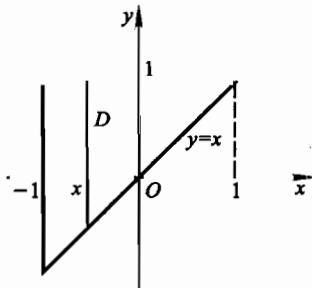


图 10-12

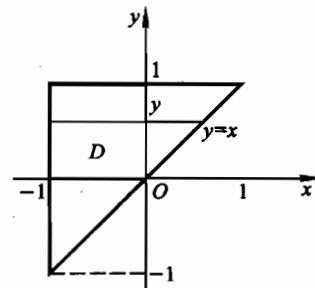


图 10-13

若利用公式(2)(图 10-13), 就有

$$\iint_D y \sqrt{1+x^2-y^2} d\sigma = \int_{-1}^1 y \left[ \int_{-y}^y \sqrt{1+x^2-y^2} dx \right] dy,$$

其中关于  $x$  的积分计算比较麻烦. 所以这里用公式(1)计算较为方便.

**例 3** 计算  $\iint_D xy d\sigma$ , 其中  $D$  是由抛物线  $y^2 = x$  及直线  $y = x - 2$  所围成的闭区域.

解 画出积分区域  $D$  如图 10-14 所示.  $D$  既是 X 型的, 又是 Y 型的. 若利用公式(2), 得

$$\begin{aligned} \iint_D xy d\sigma &= \int_{-1}^2 \left[ \int_{y^2}^{y+2} xy dx \right] dy \\ &= \int_{-1}^2 \left[ \frac{x^2}{2} y \right]_{y^2}^{y+2} dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 [y(y+2)^2 - y^5] dy \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{y^4}{4} + \frac{4}{3} y^3 + 2y^2 - \frac{y^6}{6} \right]_{-1}^2 = \frac{45}{8}. \end{aligned}$$

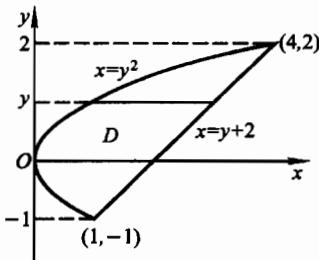


图 10-14

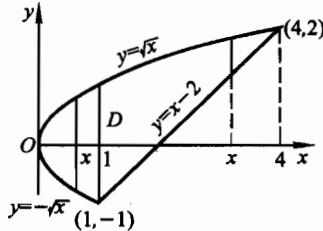


图 10-15

若利用公式(1)来计算,则由于在区间 $[0, 1]$ 及 $[1, 4]$ 上表示 $\varphi_1(x)$ 的式子不同,所以要用经过交点 $(1, -1)$ 且平行于 $y$ 轴的直线 $x=1$ 把区域 $D$ 分成 $D_1$ 和 $D_2$ 两部分(图 10-15),其中

$$\begin{aligned}D_1 &= \{(x, y) \mid -\sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1\}, \\D_2 &= \{(x, y) \mid x - 2 \leq y \leq \sqrt{x}, 1 \leq x \leq 4\}.\end{aligned}$$

因此,根据二重积分的性质 2,就有

$$\begin{aligned}\iint_D xy \, d\sigma &= \iint_{D_1} xy \, d\sigma + \iint_{D_2} xy \, d\sigma \\&= \int_0^1 \left[ \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy \, dy \right] dx + \int_1^4 \left[ \int_{x-2}^{\sqrt{x}} xy \, dy \right] dx.\end{aligned}$$

由此可见,这里用公式(1)来计算比较麻烦.

上述几个例子说明,在化二重积分为二次积分时,为了计算简便,需要选择恰当的二次积分的次序.这时,既要考虑积分区域 $D$ 的形状,又要考虑被积函数 $f(x, y)$ 的特性.

**例 4** 求两个底圆半径都等于 $R$ 的直交圆柱面所围成的立体的体积.

解 设这两个圆柱面的方程分别为

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{及} \quad x^2 + z^2 = R^2.$$

利用立体关于坐标平面的对称性,只要算出它在第一卦限部分(图 10-16(a))的体积 $V_1$ ,然后再乘以 8 就行了.

所求立体在第一卦限部分可以看成是一个曲顶柱体,它的底为

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}, 0 \leq x \leq R\},$$

如图 10-16(b)所示.它的顶是柱面 $z = \sqrt{R^2 - x^2}$ .于是,

$$V_1 = \iint_D \sqrt{R^2 - x^2} \, d\sigma.$$

利用公式(1),得

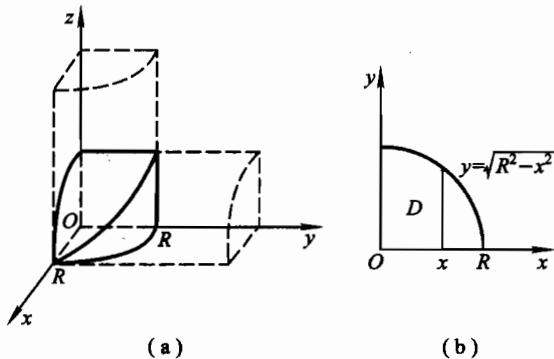


图 10-16

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \iint_D \sqrt{R^2 - x^2} d\sigma = \int_0^R \left[ \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \sqrt{R^2 - x^2} dy \right] dx \\
 &= \int_0^R [\sqrt{R^2 - x^2} y]_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = \int_0^R (R^2 - x^2) dx = \frac{2}{3} R^3.
 \end{aligned}$$

从而所求立体的体积为

$$V = 8 V_1 = \frac{16}{3} R^3.$$

## 二、利用极坐标计算二重积分

有些二重积分, 积分区域  $D$  的边界曲线用极坐标方程来表示比较方便, 且被积函数用极坐标变量  $\rho, \theta$  表达比较简单. 这时, 就可以考虑利用极坐标来计算二重积分  $\iint_D f(x, y) d\sigma$ .

按二重积分的定义

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i,$$

下面我们来研究这个和的极限在极坐标系中的形式.

假定从极点  $O$  出发且穿过闭区域  $D$  内部的射线与  $D$  的边界曲线相交不多于两点. 我们用以极点为中心的一族同心圆:  $\rho = \text{常数}$  以及从极点出发的一族射线:  $\theta = \text{常数}$ , 把  $D$  分成  $n$  个小闭区域(图10-17). 除了包含边界点的一些小

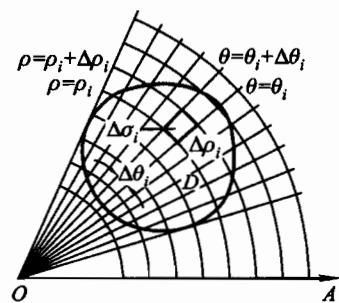


图 10-17

闭区域外, 小闭区域的面积  $\Delta\sigma_i$  可计算如下:

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_i &= \frac{1}{2}(\rho_i + \Delta\rho_i)^2 \cdot \Delta\theta_i - \frac{1}{2}\rho_i^2 \cdot \Delta\theta_i \\ &= \frac{1}{2}(2\rho_i + \Delta\rho_i)\Delta\rho_i \cdot \Delta\theta_i \\ &= \frac{\rho_i + (\rho_i + \Delta\rho_i)}{2} \cdot \Delta\rho_i \cdot \Delta\theta_i \\ &= \bar{\rho}_i \cdot \Delta\rho_i \cdot \Delta\theta_i,\end{aligned}$$

其中  $\bar{\rho}_i$  表示相邻两圆弧的半径的平均值. 在这小闭区域内取圆周  $\rho = \bar{\rho}_i$  上的一点  $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i)$ , 该点的直角坐标设为  $\xi_i, \eta_i$ , 则由直角坐标与极坐标之间的关系有  $\xi_i = \bar{\rho}_i \cos \bar{\theta}_i, \eta_i = \bar{\rho}_i \sin \bar{\theta}_i$ . 于是

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{\rho}_i \cos \bar{\theta}_i, \bar{\rho}_i \sin \bar{\theta}_i) \bar{\rho}_i \cdot \Delta\rho_i \cdot \Delta\theta_i,$$

即  $\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta.$

这里我们把点  $(\rho, \theta)$  看做是在同一平面上的点  $(x, y)$  的极坐标表示, 所以上式右端的积分区域仍然记作  $D$ . 由于在直角坐标系中  $\iint_D f(x, y) d\sigma$  也常记作  $\iint_D f(x, y) dx dy$ , 所以上式又可写成

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta. \quad (4)$$

这就是二重积分的变量从直角坐标变换为极坐标的变换公式, 其中  $\rho d\rho d\theta$  就是极坐标系中的面积元素.

公式(4)表明, 要把二重积分中的变量从直角坐标变换为极坐标, 只要把被积函数中的  $x, y$  分别换成  $\rho \cos \theta, \rho \sin \theta$ , 并把直角坐标系中的面积元素  $dx dy$  换成极坐标系中的面积元素  $\rho d\rho d\theta$ .

极坐标系中的二重积分, 同样可以化为二次积分来计算.

设积分区域  $D$  可以用不等式

$$\varphi_1(\theta) \leq \rho \leq \varphi_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta$$

来表示(图 10-18), 其中函数  $\varphi_1(\theta), \varphi_2(\theta)$  在区间  $[\alpha, \beta]$  上连续.

先在区间  $[\alpha, \beta]$  上任意取定一个  $\theta$  值. 对应于这个  $\theta$  值,  $D$  上的点(图 10-19 中这些点在线段  $EF$  上)的极径  $\rho$  从  $\varphi_1(\theta)$  变到  $\varphi_2(\theta)$ . 又  $\theta$  是在  $[\alpha, \beta]$  上任意取定的, 所以  $\theta$  的变化范围是区间  $[\alpha, \beta]$ . 这样就可看出, 极坐标系中的二重积分化为二次积分的公式为

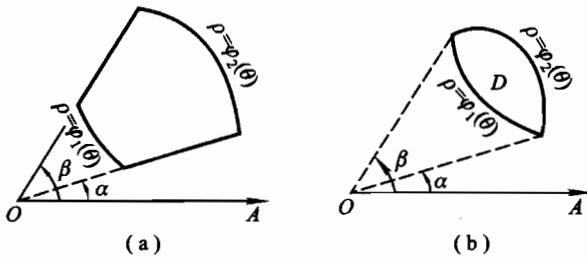


图 10-18

$$\iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \int_a^\beta \left[ \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho \right] d\theta. \quad (5)$$

上式也写成

$$\iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \int_a^\beta d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho. \quad (5')$$

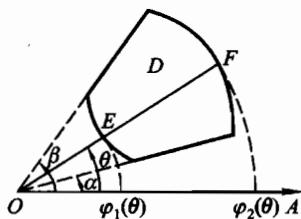


图 10-19

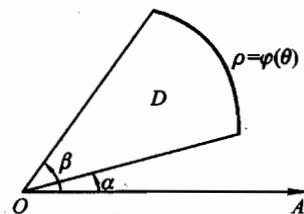


图 10-20

如果积分区域  $D$  是图 10-20 所示的曲边扇形, 那么可以把它看做图 10-18(a) 中当  $\varphi_1(\theta) \equiv 0, \varphi_2(\theta) = \varphi(\theta)$  时的特例. 这时闭区域  $D$  可以用不等式

$$0 \leq \rho \leq \varphi(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta$$

来表示, 而公式(5')成为

$$\iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \int_a^\beta d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

如果积分区域  $D$  如图 10-21 所示, 极点在  $D$  的内部, 那么可以把它看做图 10-20 中当  $\alpha = 0, \beta = 2\pi$  时的特例. 这时闭区域  $D$  可以用不等式

$$0 \leq \rho \leq \varphi(\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

来表示, 而公式(5')成为

$$\begin{aligned} & \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho. \end{aligned}$$

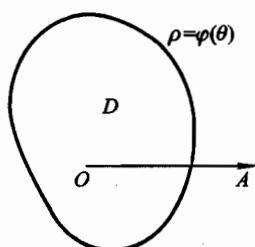


图 10-21

由二重积分的性质 3, 闭区域  $D$  的面积  $\sigma$  可以表示为

$$\sigma = \iint_D d\sigma.$$

在极坐标系中, 面积元素  $d\sigma = \rho d\rho d\theta$ , 上式成为

$$\sigma = \iint_D \rho d\rho d\theta.$$

如果闭区域  $D$  如图 10-18(a) 所示, 则由公式(5')有

$$\sigma = \iint_D \rho d\rho d\theta = \int_a^\beta d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} \rho d\rho = \frac{1}{2} \int_a^\beta [\varphi_2^2(\theta) - \varphi_1^2(\theta)] d\theta.$$

特别地, 如果闭区域  $D$  如图 10-20 所示, 则  $\varphi_1(\theta) = 0$ ,  $\varphi_2(\theta) = \varphi(\theta)$ . 于是

$$\sigma = \frac{1}{2} \int_a^\beta \varphi^2(\theta) d\theta.$$

**例 5** 计算  $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$ , 其中  $D$  是由中心在原点、半径为  $a$  的圆周所围成的闭区域.

解 在极坐标系中, 闭区域  $D$  可表示为

$$0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

由公式(4)及(5)有

$$\begin{aligned} \iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy &= \iint_D e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^a e^{-\rho^2} \rho d\rho \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right]_0^a d\theta = \frac{1}{2} (1 - e^{-a^2}) \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \pi(1 - e^{-a^2}). \end{aligned}$$

本题如果用直角坐标计算, 由于积分  $\int e^{-x^2} dx$  不能用初等函数表示, 所以算不出来. 现在我们利用上面的结果来计算工程上常用的反常积分  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ .

设

$$D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\},$$

$$D_2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2R^2, x \geq 0, y \geq 0\},$$

$$S = \{(x, y) | 0 \leq x \leq R, 0 \leq y \leq R\}.$$

显然  $D_1 \subset S \subset D_2$  (图 10-22). 由于  $e^{-x^2-y^2} > 0$ , 从而在这些闭区域上的二重积分之间有不等式

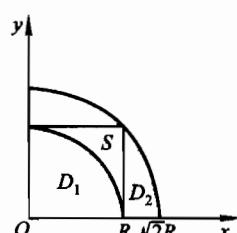


图 10-22

$$\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2} dx dy < \iint_S e^{-x^2-y^2} dx dy < \iint_{D_2} e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

因为

$$\begin{aligned}\iint_S e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_0^R e^{-x^2} dx \cdot \int_0^R e^{-y^2} dy \\ &= \left( \int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2,\end{aligned}$$

又应用上面已得的结果有

$$\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2} dx dy = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}),$$

$$\iint_{D_2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2R^2}),$$

于是上面的不等式可写成

$$\frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}) < \left( \int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2 < \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2R^2}).$$

令  $R \rightarrow +\infty$ , 上式两端趋于同一极限  $\frac{\pi}{4}$ , 从而

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

**例 6** 求球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$  被圆柱面  $x^2 + y^2 = 2ax$  ( $a > 0$ ) 所截得的 (含在圆柱面内的部分) 立体的体积 (图 10-23).

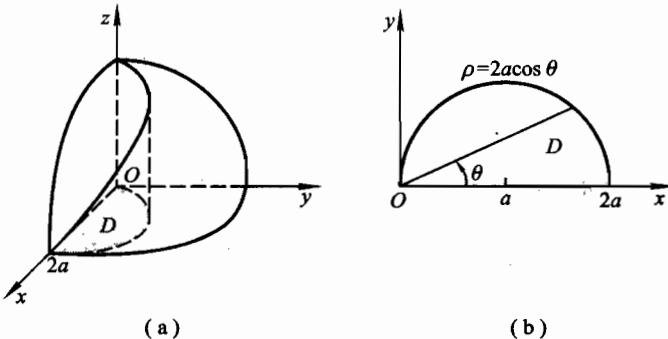


图 10-23

解 由对称性,

$$V = 4 \iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} dx dy,$$

其中  $D$  为半圆周  $y = \sqrt{2ax - x^2}$  及  $x$  轴所围成的闭区域. 在极坐标系中, 闭区域

$D$  可用不等式

$$0 \leq \rho \leq 2a \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

来表示. 于是

$$\begin{aligned} V &= 4 \iint_D \sqrt{4a^2 - \rho^2} \rho d\rho d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \sqrt{4a^2 - \rho^2} \rho d\rho \\ &= \frac{32}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta = \frac{32}{3} a^3 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right). \end{aligned}$$

### \* 三、二重积分的换元法

上一目得到的二重积分的变量从直角坐标变换为极坐标的变换公式, 是二重积分换元法的一种特殊情形. 在那里, 我们把平面上同一个点  $M$ , 既用直角坐标  $(x, y)$  表示, 又用极坐标  $(\rho, \theta)$  表示, 它们间的关系为

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta. \end{cases} \quad (6)$$

也就是说, 由(6)式联系的点  $(x, y)$  和点  $(\rho, \theta)$  看成是同一个平面上的同一个点, 只是采用不同的坐标罢了. 现在, 我们采用另一种观点来加以解释. 把(6)式看成是从直角坐标平面  $\rho O\theta$  到直角坐标平面  $xOy$  的一种变换, 即对于  $\rho O\theta$  平面上的一点  $M'(\rho, \theta)$ , 通过变换(6), 变成  $xOy$  平面上的一点  $M(x, y)$ . 在两个平面各自限定的某个范围内, 这种变换还是一对一的(即是一一映射). 下面就采用这种观点来讨论二重积分换元法的一般情形.

**定理** 设  $f(x, y)$  在  $xOy$  平面上的闭区域  $D$  上连续, 变换

$$T: x = x(u, v), y = y(u, v) \quad (7)$$

将  $uOv$  平面上的闭区域  $D'$  变为  $xOy$  平面上的  $D$ , 且满足

(1)  $x(u, v), y(u, v)$  在  $D'$  上具有一阶连续偏导数;

(2) 在  $D'$  上雅可比式

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0;$$

(3) 变换  $T: D' \rightarrow D$  是一对一的,

则有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f[x(u, v), y(u, v)] |J(u, v)| du dv. \quad (8)$$

公式(8)称为二重积分的换元公式.

**证** 显然, 在定理的假设下, (8)式两端的二重积分都存在. 由于二重积分与

积分区域的分法无关, 我们用平行于坐标轴的直线网来分割  $D'$ , 使得除去包含边界点的小闭区域外, 其余的小闭区域都为边长是  $h$  的正方形闭区域. 任取一个这样得到的正方形闭区域, 设其顶点为  $M'_1(u, v), M'_2(u+h, v), M'_3(u+h, v+h), M'_4(u, v+h)$ , 其面积为  $\Delta\sigma' = h^2$  (图 10-24(a)). 正方形闭区域  $M'_1 M'_2 M'_3 M'_4$  经变换(7)变成  $xOy$  平面上的一个曲边四边形  $M_1 M_2 M_3 M_4$ , 它的四个顶点的坐标是

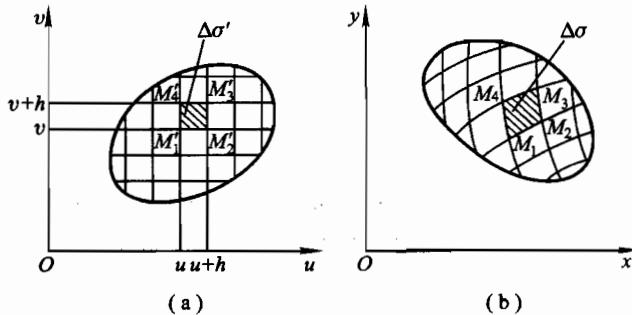


图 10-24

$$M_1: x_1 = x(u, v), y_1 = y(u, v);$$

$$M_2: x_2 = x(u+h, v) = x(u, v) + x_u(u, v)h + o(h),$$

$$y_2 = y(u+h, v) = y(u, v) + y_u(u, v)h + o(h);$$

$$M_3: x_3 = x(u+h, v+h) = x(u, v) + x_u(u, v)h + x_v(u, v)h + o(h),$$

$$y_3 = y(u+h, v+h) = y(u, v) + y_u(u, v)h + y_v(u, v)h + o(h);$$

$$M_4: x_4 = x(u, v+h) = x(u, v) + x_v(u, v)h + o(h),$$

$$y_4 = y(u, v+h) = y(u, v) + y_v(u, v)h + o(h),$$

其面积为  $\Delta\sigma$  (图 10-24(b)). 可以证明, 曲边四边形  $M_1 M_2 M_3 M_4$  的面积与直边四边形  $M_1 M_2 M_3 M_4$  (四个顶点用直线相连) 的面积当  $h \rightarrow 0$  时只相差高阶无穷小. 又由上面这些坐标表示式可知, 若不计高阶无穷小, 则有

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_4, y_2 - y_1 = y_3 - y_4,$$

$$x_4 - x_1 = x_3 - x_2, y_4 - y_1 = y_3 - y_2,$$

这表示, 直边四边形  $M_1 M_2 M_3 M_4$  的对边的长度可看做两两相等. 因此, 若不计高阶无穷小, 曲边四边形  $M_1 M_2 M_3 M_4$  可看做平行四边形, 于是它的面积  $\Delta\sigma$  近似等于  $\triangle M_1 M_2 M_3$  的面积的两倍. 根据解析几何,  $\triangle M_1 M_2 M_3$  的面积的两倍等于行列式

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_2 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_2 \end{vmatrix}$$

的绝对值,由于

$$x_2 - x_1 = x_u(u, v)h + o(h), x_3 - x_2 = x_v(u, v)h + o(h),$$

$$y_2 - y_1 = y_u(u, v)h + o(h), y_3 - y_2 = y_v(u, v)h + o(h),$$

因此上面的行列式与行列式

$$\begin{vmatrix} x_u(u, v)h & x_v(u, v)h \\ y_u(u, v)h & y_v(u, v)h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_u(u, v) & x_v(u, v) \\ y_u(u, v) & y_v(u, v) \end{vmatrix} h^2$$

只相差一个比  $h^2$  高阶的无穷小.于是

$$\Delta\sigma = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta\sigma' + o(\Delta\sigma') \quad (h \rightarrow 0).$$

把  $f(x, y) = f[x(u, v), y(u, v)]$  的两端分别与上式两端相乘,得

$$f(x, y)\Delta\sigma = f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta\sigma' + \\ f[x(u, v), y(u, v)] \cdot o(\Delta\sigma').$$

上式对一切小正方形闭区域取和并令  $h \rightarrow 0$  求极限,由于上式右端第二项的和的极限为零,于是得公式(8).定理证毕.

这里我们指出,如果雅可比式  $J(u, v)$  只在  $D'$  内个别点上,或一条曲线上为零,而在其他点上不为零,那么换元公式(8)仍成立.

在变换为极坐标  $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$  的特殊情形下,雅可比式

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho,$$

它仅在  $\rho = 0$  处为零,故不论闭区域  $D'$  是否含有极点,换元公式仍成立.即有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta,$$

这里  $D'$  是  $D$  在直角坐标平面  $\rho O\theta$  上的对应区域.在上一目内所证得的相同的公式中用的是  $D$  而不是  $D'$ ,当积分区域  $D$  用极坐标表示时,其形式就与上式右端的形式完全等同了.

**例 7** 计算  $\iint_D e^{\frac{y-x}{x+y}} dx dy$ , 其中  $D$  是由  $x$  轴、 $y$  轴和直线  $x + y = 2$  所围成的

闭区域.

**解** 令  $u = y - x, v = y + x$ , 则  $x = \frac{v - u}{2}, y = \frac{v + u}{2}$ .

作变换  $x = \frac{v-u}{2}$ ,  $y = \frac{v+u}{2}$ , 则  $xOy$  平面上的闭区域  $D$  和它在  $uOv$  平面上的对应区域  $D'$  如图 10-25 所示.

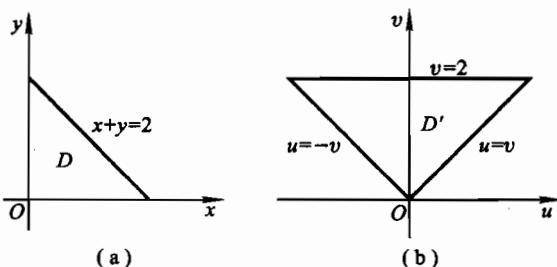


图 10-25

雅可比式为

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

利用公式(8), 得

$$\begin{aligned} \iint_D e^{\frac{y-x}{x+y}} dx dy &= \iint_{D'} e^{\frac{u}{v}} \left| -\frac{1}{2} \right| du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 dv \int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 (e - e^{-1}) v dv = e - e^{-1}. \end{aligned}$$

**例 8** 求由直线  $x + y = c$ ,  $x + y = d$ ,  $y = ax$ ,  $y = bx$  ( $0 < c < d$ ,  $0 < a < b$ ) 所围成的闭区域  $D$  (图 10-26(a)) 的面积.

解 所求面积为

$$\iint_D dx dy.$$

上述二重积分直接化为二次积分计算比较麻烦. 现采用换元法. 令  $u = x + y$ ,  $v = \frac{y}{x}$ , 则  $x = \frac{u}{1+v}$ ,  $y = \frac{uv}{1+v}$ . 在这变换下,  $D$  的边界  $x + y = c$ ,  $x + y = d$ ,  $y = ax$ ,  $y = bx$  依次与  $u = c$ ,  $u = d$ ,  $v = a$ ,  $v = b$  对应. 后者构成与  $D$  对应的闭区域  $D'$  的边界. 于是

$$D' = \{(u, v) | c \leq u \leq d, a \leq v \leq b\},$$

如图 10-26(b) 所示. 又雅可比式

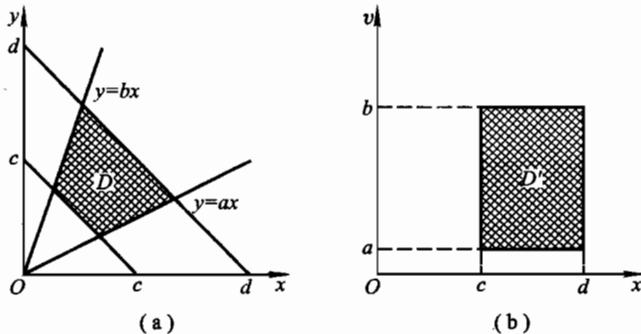


图 10-26

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{u}{(1+v)^2} \neq 0, (u, v) \in D'.$$

从而所求面积为

$$\begin{aligned} \iint_D dx dy &= \iint_{D'} \frac{u}{(1+v)^2} du dv = \int_a^b \frac{dv}{(1+v)^2} \int_c^d u du \\ &= \frac{(b-a)(d^2 - c^2)}{2(1+a)(1+b)}. \end{aligned}$$

**例 9** 计算  $\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$ , 其中  $D$  为椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  所围成的闭区域.

**解** 作广义极坐标变换

$$\begin{cases} x = a\rho \cos \theta, \\ y = b\rho \sin \theta, \end{cases}$$

其中  $a > 0, b > 0, \rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ . 在这变换下, 与  $D$  对应的闭区域为  $D' = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ , 雅可比式

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} = ab\rho.$$

$J$  在  $D'$  内仅当  $\rho = 0$  处为零, 故换元公式仍成立, 从而有

$$\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy = \iint_{D'} \sqrt{1 - \rho^2} ab\rho d\rho d\theta = \frac{2}{3}\pi ab.$$

## 习题 10-2

1. 计算下列二重积分:

$$(1) \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma, \text{ 其中 } D = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\};$$

$$(2) \iint_D (3x + 2y) d\sigma, \text{ 其中 } D \text{ 是由两坐标轴及直线 } x + y = 2 \text{ 所围成的闭区域};$$

$$(3) \iint_D (x^3 + 3x^2y + y^3) d\sigma, \text{ 其中 } D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\};$$

$$(4) \iint_D x \cos(x+y) d\sigma, \text{ 其中 } D \text{ 是顶点分别为 } (0,0), (\pi,0) \text{ 和 } (\pi,\pi) \text{ 的三角形闭区域}.$$

2. 画出积分区域, 并计算下列二重积分:

$$(1) \iint_D x \sqrt{y} d\sigma, \text{ 其中 } D \text{ 是由两条抛物线 } y = \sqrt{x}, y = x^2 \text{ 所围成的闭区域};$$

$$(2) \iint_D xy^2 d\sigma, \text{ 其中 } D \text{ 是由圆周 } x^2 + y^2 = 4 \text{ 及 } y \text{ 轴所围成的右半闭区域};$$

$$(3) \iint_D e^{x+y} d\sigma, \text{ 其中 } D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\};$$

$$(4) \iint_D (x^2 + y^2 - x) d\sigma, \text{ 其中 } D \text{ 是由直线 } y = 2, y = x \text{ 及 } y = 2x \text{ 所围成的闭区域}.$$

3. 如果二重积分  $\iint_D f(x, y) dx dy$  的被积函数  $f(x, y)$  是两个函数  $f_1(x)$  及  $f_2(y)$  的乘积, 即  $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ , 积分区域  $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ , 证明这个二重积分等于两个单积分的乘积, 即

$$\iint_D f_1(x) \cdot f_2(y) dx dy = \left[ \int_a^b f_1(x) dx \right] \cdot \left[ \int_c^d f_2(y) dy \right].$$

4. 化二重积分

$$I = \iint_D f(x, y) d\sigma$$

为二次积分(分别列出对两个变量先后次序不同的两个二次积分), 其中积分区域  $D$  是:

(1) 由直线  $y = x$  及抛物线  $y^2 = 4x$  所围成的闭区域;

(2) 由  $x$  轴及半圆周  $x^2 + y^2 = r^2 \quad (y \geq 0)$  所围成的闭区域;

(3) 由直线  $y = x, x = 2$  及双曲线  $y = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$  所围成的闭区域;

(4) 环形闭区域  $\{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ .

5. 设  $f(x, y)$  在  $D$  上连续, 其中  $D$  是由直线  $y = x, y = a$  及  $x = b \quad (b > a)$  所围成的闭区域, 证明

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx.$$

6. 改换下列二次积分的积分次序:

$$(1) \int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx;$$

$$(2) \int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx;$$

$$(3) \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx;$$

$$(4) \int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy;$$

$$(5) \int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy;$$

$$(6) \int_0^\pi dx \int_{-\sin \frac{x}{2}}^{\sin x} f(x, y) dy.$$

7. 设平面薄片所占的闭区域  $D$  由直线  $x + y = 2$ ,  $y = x$  和  $x$  轴所围成, 它的面密度  $\mu(x, y) = x^2 + y^2$ , 求该薄片的质量.

8. 计算由四个平面  $x = 0, y = 0, x = 1, y = 1$  所围成的柱体被平面  $z = 0$  及  $2x + 3y + z = 6$  截得的立体的体积.

9. 求由平面  $x = 0, y = 0, x + y = 1$  所围成的柱体被平面  $z = 0$  及抛物面  $x^2 + y^2 = 6 - z$  截得的立体的体积.

10. 求由曲面  $z = x^2 + 2y^2$  及  $z = 6 - 2x^2 - y^2$  所围成的立体的体积.

11. 画出积分区域, 把积分  $\iint_D f(x, y) dxdy$  表示为极坐标形式的二次积分, 其中积分区域  $D$  是:

$$(1) \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\} (a > 0);$$

$$(2) \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2x\};$$

$$(3) \{(x, y) | a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}, \text{其中 } 0 < a < b;$$

$$(4) \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq x \leq 1\}.$$

12. 化下列二次积分为极坐标形式的二次积分:

$$(1) \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy.$$

$$(2) \int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy;$$

$$(3) \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy;$$

$$(4) \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy. \quad \text{X}$$

13. 把下列积分化为极坐标形式, 并计算积分值:

$$(1) \int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2 + y^2) dy; \quad (2) \int_0^a dx \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} dy;$$

$$(3) \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} dy; \quad (4) \int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2 + y^2) dx.$$

14. 利用极坐标计算下列各题:

$$(1) \iint_D e^{x^2+y^2} d\sigma, \text{其中 } D \text{ 是由圆周 } x^2 + y^2 = 4 \text{ 所围成的闭区域};$$

$$(2) \iint_D \ln(1 + x^2 + y^2) d\sigma, \text{其中 } D \text{ 是由圆周 } x^2 + y^2 = 1 \text{ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域};$$

$$(3) \iint_D \arctan \frac{y}{x} d\sigma, \text{其中 } D \text{ 是由圆周 } x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 1 \text{ 及直线 } y = 0, y = x \text{ 所围成的在第一象限内的闭区域}.$$

15. 选用适当的坐标计算下列各题:

$$(1) \iint_D \frac{x^2}{y^2} d\sigma, \text{其中 } D \text{ 是由直线 } x = 2, y = x \text{ 及曲线 } xy = 1 \text{ 所围成的闭区域};$$

(2)  $\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} d\sigma$ , 其中  $D$  是由圆周  $x^2 + y^2 = 1$  及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域;

(3)  $\iint_D (x^2 + y^2) d\sigma$ , 其中  $D$  是由直线  $y = x, y = x + a, y = a, y = 3a (a > 0)$  所围成的闭区域;

(4)  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$ , 其中  $D$  是圆环形闭区域  $\{(x, y) | a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$ .

16. 设平面薄片所占的闭区域  $D$  由螺线  $\rho = 2\theta$  上一段弧 ( $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ) 与直线  $\theta = \frac{\pi}{2}$  所围成, 它的面密度为  $\mu(x, y) = x^2 + y^2$ . 求这薄片的质量(图 10-27).

17. 求由平面  $y = 0, y = kx (k > 0), z = 0$  以及球心在原点、半径为  $R$  的上半球面所围成的在第一卦限内的立体的体积(图 10-28).

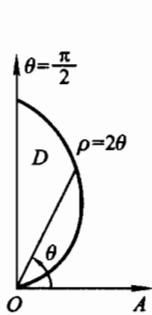


图 10-27

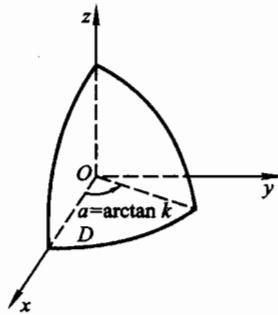


图 10-28

18. 计算以  $xOy$  面上的圆周  $x^2 + y^2 = ax$  围成的闭区域为底, 而以曲面  $z = x^2 + y^2$  为顶的曲顶柱体的体积.

19. 作适当的变换, 计算下列二重积分:

(1)  $\iint_D (x - y)^2 \sin^2(x + y) dx dy$ , 其中  $D$  是平行四边形闭区域, 它的四个顶点是  $(\pi, 0)$ ,  $(2\pi, \pi)$ ,  $(\pi, 2\pi)$  和  $(0, \pi)$ ;

(2)  $\iint_D x^2 y^2 dx dy$ , 其中  $D$  是由两条双曲线  $xy = 1$  和  $xy = 2$ , 直线  $y = x$  和  $y = 4x$  所围成的在第一象限内的闭区域;

(3)  $\iint_D e^{x+y} dx dy$ , 其中  $D$  是由  $x$  轴、 $y$  轴和直线  $x + y = 1$  所围成的闭区域;

(4)  $\iint_D \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy$ , 其中  $D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$ .

20. 求由下列曲线所围成的闭区域  $D$  的面积:

(1)  $D$  是由曲线  $xy = 4, xy = 8, xy^3 = 5, xy^3 = 15$  所围成的第一象限部分的闭区域;

(2)  $D$  是由曲线  $y = x^3, y = 4x^3, x = y^3, x = 4y^3$  所围成的第一象限部分的闭区域.

\* 21. 设闭区域  $D$  是由直线  $x + y = 1, x = 0, y = 0$  所围成, 求证

$$\iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx dy = \frac{1}{2} \sin 1.$$

\* 22. 选取适当的变换, 证明下列等式:

(1)  $\iint_D f(x+y) dx dy = \int_{-1}^1 f(u) du$ , 其中闭区域  $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 1\}$ ;

(2)  $\iint_D f(ax+by+c) dx dy = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} f(u \sqrt{a^2+b^2} + c) du$ , 其中  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ , 且  $a^2 + b^2 \neq 0$ .

### 第三节 三重积分

#### 一、三重积分的概念

定积分及二重积分作为和的极限的概念, 可以很自然地推广到三重积分.

定义 设  $f(x, y, z)$  是空间有界闭区域  $\Omega$  上的有界函数. 将  $\Omega$  任意分成  $n$  个小闭区域

$$\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n,$$

其中  $\Delta v_i$  表示第  $i$  个小闭区域, 也表示它的体积. 在每个  $\Delta v_i$  上任取一点

$(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ , 作乘积  $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 并作和  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$ .

如果当各小闭区域直径中的最大值  $\lambda$  趋于零时这和的极限总存在, 则称此极限

为函数  $f(x, y, z)$  在闭区域  $\Omega$  上的三重积分. 记作  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$ , 即

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i, \quad (1)$$

其中  $dv$  叫做体积元素.

在直角坐标系中, 如果用平行于坐标面的平面来划分  $\Omega$ , 那么除了包含  $\Omega$  的边界点的一些不规则小闭区域外, 得到的小闭区域  $\Delta v_i$  为长方体. 设长方体小闭区域  $\Delta v_i$  的边长为  $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ , 则  $\Delta v_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$ . 因此在直角坐标系中, 有时也把体积元素  $dv$  记作  $dxdydz$ , 而把三重积分记作

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dxdydz,$$

其中  $dxdydz$  叫做直角坐标系中的体积元素.

当函数  $f(x, y, z)$  在闭区域  $\Omega$  上连续时,(1)式右端的和的极限必定存在,也就是函数  $f(x, y, z)$  在闭区域  $\Omega$  上的三重积分必定存在.以后我们总假定函数  $f(x, y, z)$  在闭区域  $\Omega$  上是连续的.关于二重积分的一些术语,例如被积函数、积分区域等,也可相应地用到三重积分上.三重积分的性质也与第一节中所叙述的二重积分的性质类似,这里不再重复了.

如果  $f(x, y, z)$  表示某物体在点  $(x, y, z)$  处的密度,  $\Omega$  是该物体所占有的空间闭区域,  $f(x, y, z)$  在  $\Omega$  上连续, 则  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$  是该物体的质量  $m$  的近似值, 这个和当  $\lambda \rightarrow 0$  时的极限就是该物体的质量  $m$ , 所以

$$m = \iiint_n f(x, y, z) dv.$$

## 二、三重积分的计算

计算三重积分的基本方法是将三重积分化为三次积分来计算.下面按利用不同的坐标来分别讨论将三重积分化为三次积分的方法,且只限于叙述方法.

### 1. 利用直角坐标计算三重积分

假设平行于  $z$  轴且穿过闭区域  $\Omega$  内部的直线与闭区域  $\Omega$  的边界曲面  $S$  相交不多于两点.把闭区域  $\Omega$  投影到  $xOy$  面上, 得一平面闭区域  $D_{xy}$  (图 10-29). 以  $D_{xy}$  的边界为准线作母线平行于  $z$  轴的柱面. 这柱面与曲面  $S$  的交线从  $S$  中分出的上、下两部分, 它们的方程分别为

$$S_1: z = z_1(x, y),$$

$$S_2: z = z_2(x, y),$$

其中  $z_1(x, y)$  与  $z_2(x, y)$  都是  $D_{xy}$  上的连续函数, 且  $z_1(x, y) \leq z_2(x, y)$ . 过  $D_{xy}$  内任一点  $(x, y)$  作平行于  $z$  轴的直线, 这直线通过曲面  $S_1$  穿入  $\Omega$  内, 然后通过曲面  $S_2$  穿出  $\Omega$  外, 穿入点与穿出点的竖坐标分别为  $z_1(x, y)$  与  $z_2(x, y)$ .

在这种情形下, 积分区域  $\Omega$  可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy}\}.$$

先将  $x, y$  看做定值, 将  $f(x, y, z)$  只看做  $z$  的函数, 在区间  $[z_1(x, y), z_2(x, y)]$  上对  $z$  积分. 积分的结果是  $x, y$  的函数, 记为  $F(x, y)$ , 即

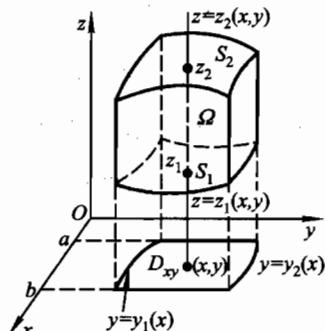


图 10-29

$$F(x, y) = \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

然后计算  $F(x, y)$  在闭区域  $D_{xy}$  上的二重积分

$$\iint_{D_{xy}} F(x, y) d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left[ \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] d\sigma.$$

假如闭区域

$$D_{xy} = \{(x, y) \mid y_1(x) \leq y \leq y_2(x), a \leq x \leq b\},$$

把这个二重积分化为二次积分,于是得到三重积分的计算公式

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (2)$$

公式(2)把三重积分化为先对  $z$ 、次对  $y$ 、最后对  $x$  的三次积分.

如果平行于  $x$  轴或  $y$  轴且穿过闭区域  $\Omega$  内部的直线与  $\Omega$  的边界曲面  $S$  相交不多于两点,也可把闭区域  $\Omega$  投影到  $yOz$  面上或  $xOz$  面上,这样便可把三重积分化为按其他顺序的三次积分.如果平行于坐标轴且穿过闭区域  $\Omega$  内部的直线与边界曲面  $S$  的交点多于两个,也可像处理二重积分那样,把  $\Omega$  分成若干部分,使  $\Omega$  上的三重积分化为各部分闭区域上的三重积分的和.

**例 1** 计算三重积分  $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  为三个坐标面及平面  $x + 2y + z = 1$  所围成的闭区域.

解 作闭区域  $\Omega$  如图 10-30 所示.

将  $\Omega$  投影到  $xOy$  面上,得投影区域  $D_{xy}$  为三角形闭区域  $OAB$ . 直线  $OA$ 、 $OB$  及  $AB$  的方程依次为  $y = 0$ 、 $x = 0$  及  $x + 2y = 1$ , 所以

$$D_{xy} = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{1-x}{2}, 0 \leq x \leq 1\}.$$

在  $D_{xy}$  内任取一点  $(x, y)$ , 过此点作平行于  $z$  轴的直线, 该直线通过平面  $z = 0$  穿入  $\Omega$  内, 然后通过平面  $z = 1 - x - 2y$  穿出  $\Omega$  外.

于是,由公式(2)得

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} x dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} dy \int_0^{1-x-2y} x dz \\ &= \int_0^1 x dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} (1-x-2y) dy \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 (x-2x^2+x^3) dx = \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

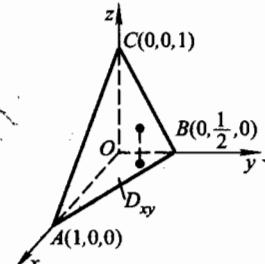


图 10-30

有时,我们计算一个三重积分也可以化为先计算一个二重积分、再计算一个定积分,即有下述计算公式.

设空间闭区域

$$\Omega = \{(x, y, z) | (x, y) \in D_z, c_1 \leq z \leq c_2\},$$

其中  $D_z$  是竖坐标为  $z$  的平面截闭区域  $\Omega$  所得到的一个平面闭区域(图 10-31),则有

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_{c_1}^{c_2} dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy. \quad (3)$$

例 2 计算三重积分  $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由

椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  所围成的空间闭区域.

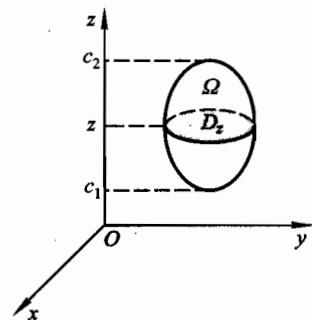


图 10-31

解 空间闭区域  $\Omega$  可表示为

$$\left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{z^2}{c^2}, -c \leq z \leq c \right\},$$

如图 10-32 所示. 由公式(3)得

$$\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz = \int_{-c}^c z^2 dz \iint_{D_z} dx dy = \pi ab \int_{-c}^c \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) z^2 dz = \frac{4}{15} \pi abc^3.$$

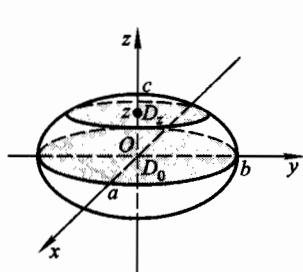


图 10-32

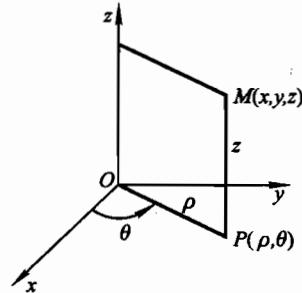


图 10-33

## 2. 利用柱面坐标计算三重积分

设  $M(x, y, z)$  为空间内一点, 并设点  $M$  在  $xOy$  面上的投影  $P$  的极坐标为  $\rho, \theta$ , 则这样的三个数  $\rho, \theta, z$  就叫做点  $M$  的柱面坐标(图 10-33), 这里规定  $\rho$ 、

$\theta, z$  的变化范围为:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \rho < +\infty, \\ 0 &\leq \theta \leq 2\pi, \\ -\infty &< z < +\infty. \end{aligned}$$

三组坐标面分别为

$\rho = \text{常数}$ , 即以  $z$  轴为轴的圆柱面;

$\theta = \text{常数}$ , 即过  $z$  轴的半平面;

$z = \text{常数}$ , 即与  $xOy$  面平行的平面.

显然, 点  $M$  的直角坐标与柱面坐标的关系为

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \\ z = z. \end{cases} \quad (4)$$

现在要把三重积分  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) d\tau$  中的变量变换

为柱面坐标. 为此, 用三组坐标面  $\rho = \text{常数}, \theta = \text{常数}, z = \text{常数}$  把  $\Omega$  分成许多小闭区域, 除了含  $\Omega$  的边界点的一些不规则小闭区域外, 这种小闭区域都是柱体. 今考虑由  $\rho, \theta, z$  各取得微小增量  $d\rho, d\theta, dz$  所成的柱体的体积(图 10-34). 这个体积等于高与底面积的乘积. 现在高为  $dz$ 、底面积在不计高阶无穷小时为  $\rho d\rho d\theta$  (即极坐标系中的面积元素), 于是得

$$d\tau = \rho d\rho d\theta dz,$$

这就是柱面坐标系中的体积元素. 再注意到关系式(4), 就有

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} F(\rho, \theta, z) \rho d\rho d\theta dz, \quad (5)$$

其中  $F(\rho, \theta, z) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)$ . (5)式就是把三重积分的变量从直角坐标变换为柱面坐标的公式. 至于变量变换为柱面坐标后的三重积分的计算, 则可化为三次积分来进行. 化为三次积分时, 积分限是根据  $\rho, \theta, z$  在积分区域  $\Omega$  中的变化范围来确定的, 下面通过例子来说明.

**例 3** 利用柱面坐标计算三重积分  $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = x^2 + y^2$  与平面  $z = 4$  所围成的闭区域.

解 把闭区域  $\Omega$  投影到  $xOy$  面上, 得半径为 2 的圆形闭区域

$$D_{xy} = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

在  $D_{xy}$  内任取一点  $(\rho, \theta)$ , 过此点作平行于  $z$  轴的直线, 此直线通过曲面  $z = x^2 + y^2$  穿入  $\Omega$  内, 然后通过平面  $z = 4$  穿出  $\Omega$  外. 因此闭区域  $\Omega$  可用不等式

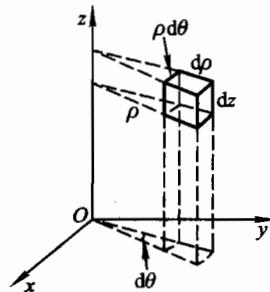


图 10-34

$$\rho^2 \leq z \leq 4, 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

来表示. 于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dx dy dz &= \iiint_{\Omega} z \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_{\rho^2}^4 z dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho (16 - \rho^4) d\rho = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \left[ 8\rho^2 - \frac{1}{6}\rho^6 \right]_0^2 = \frac{64}{3}\pi. \end{aligned}$$

### \*3. 利用球面坐标计算三重积分

设  $M(x, y, z)$  为空间内一点, 则点  $M$  也可用这样三个有次序的数  $r, \varphi, \theta$  来确定, 其中  $r$  为原点  $O$  与点  $M$  间的距离,  $\varphi$  为有向线段  $\overrightarrow{OM}$  与  $z$  轴正向所夹的角,  $\theta$  为从正  $z$  轴来看自  $x$  轴按逆时针方向转到有向线段  $\overrightarrow{OP}$  的角, 这里  $P$  为点  $M$  在  $xOy$  面上的投影(图 10-35). 这样的三个数  $r, \varphi, \theta$  叫做点  $M$  的球面坐标, 这里  $r, \varphi, \theta$  的变化范围为

$$\begin{aligned} 0 &\leq r < +\infty, \\ 0 &\leq \varphi \leq \pi, \\ 0 &\leq \theta \leq 2\pi. \end{aligned}$$

三组坐标面分别为

$r = \text{常数}$ , 即以原点为心的球面;

$\varphi = \text{常数}$ , 即以原点为顶点、 $z$  轴为轴的圆锥面;

$\theta = \text{常数}$ , 即过  $z$  轴的半平面.

设点  $M$  在  $xOy$  面上的投影为  $P$ , 点  $P$  在  $x$  轴上的投影为  $A$ , 则  $OA = x, AP = y, PM = z$ . 又

$$OP = r \sin \varphi, z = r \cos \varphi.$$

因此, 点  $M$  的直角坐标与球面坐标的关系为

$$\begin{cases} x = OP \cos \theta = r \sin \varphi \cos \theta, \\ y = OP \sin \theta = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z = r \cos \varphi. \end{cases} \quad (6)$$

为了把三重积分中的变量从直角坐标变换为球面坐标, 用三组坐标面  $r = \text{常数}, \varphi = \text{常数}, \theta = \text{常数}$  把积分区域  $\Omega$  分成许多小闭区域. 考虑由  $r, \varphi, \theta$  各取得微小增量  $dr, d\varphi, d\theta$  所成的六面体的体积(图 10-36). 不计高阶无穷小, 可把这个六面体看做长方体, 其经线方向的长为  $rd\varphi$ , 纬线方向的宽为  $r \sin \varphi d\theta$ , 向径方向的高为  $dr$ , 于是得

$$dv = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta,$$

这就是球面坐标系中的体积元素. 再注意到关系式

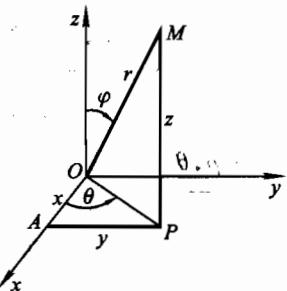


图 10-35

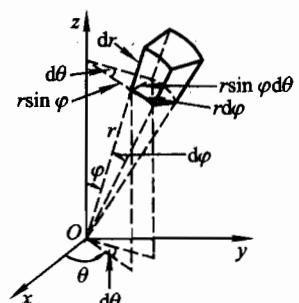


图 10-36

(6), 就有

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} F(r, \varphi, \theta) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta, \quad (7)$$

其中  $F(r, \varphi, \theta) = f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi)$ . (7)式就是把三重积分的变量从直角坐标变换为球面坐标的公式.

要计算变量变换为球面坐标后的三重积分, 可把它化为对  $r$ 、对  $\varphi$  及对  $\theta$  的三次积分.

若积分区域  $\Omega$  的边界曲面是一个包围原点在内的闭曲面, 其球面坐标方程为  $r = r(\varphi, \theta)$ , 则

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} F(r, \varphi, \theta) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi, \theta)} F(r, \varphi, \theta) r^2 \sin \varphi dr. \end{aligned}$$

当积分区域  $\Omega$  为球面  $r = a$  所围成时, 则

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^a F(r, \varphi, \theta) r^2 \sin \varphi dr.$$

特别地, 当  $F(r, \varphi, \theta) = 1$  时, 由上式即得球的体积

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^a r^2 dr = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{4}{3}\pi a^3,$$

这是我们所熟知的结果.

**例 4** 求半径为  $a$  的球面与半顶角为  $\alpha$  的内接锥面所围成的立体(图 10-37)的体积.

**解** 设球面通过原点  $O$ , 球心在  $z$  轴上, 又内接锥面的顶点在原点  $O$ , 其轴与  $z$  轴重合, 则球面方程

为  $r = 2a \cos \varphi$ , 锥面方程为  $\varphi = \alpha$ . 因为立体所占有的空间闭区域  $\Omega$  可用不等式

$$0 \leq r \leq 2a \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \alpha, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

来表示, 所以

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\alpha} d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} r^2 \sin \varphi dr \\ &= 2\pi \int_0^{\alpha} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} r^2 dr = \frac{16\pi a^3}{3} \int_0^{\alpha} \cos^3 \varphi \sin \varphi d\varphi \\ &= \frac{4\pi a^3}{3} (1 - \cos^4 \alpha). \end{aligned}$$

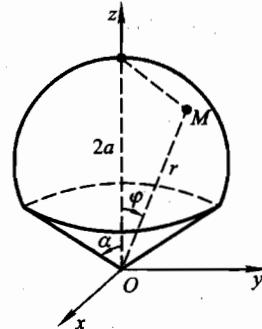


图 10-37

### 习 题 10 - 3

1. 化三重积分  $I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$  为三次积分, 其中积分区域  $\Omega$  分别是:

- (1) 由双曲抛物面  $xy = z$  及平面  $x + y - 1 = 0, z = 0$  所围成的闭区域;
- (2) 由曲面  $z = x^2 + y^2$  及平面  $z = 1$  所围成的闭区域;
- (3) 由曲面  $z = x^2 + 2y^2$  及  $z = 2 - x^2$  所围成的闭区域;
- (4) 由曲面  $cz = xy (c > 0), \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$  所围成的第一卦限内的闭区域.

2. 设有一物体, 占有空间闭区域  $\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ , 在点  $(x, y, z)$  处的密度为  $\rho(x, y, z) = x + y + z$ , 计算该物体的质量.

3. 如果三重积分  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$  的被积函数  $f(x, y, z)$  是三个函数  $f_1(x), f_2(y), f_3(z)$  的乘积, 即  $f(x, y, z) = f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z)$ , 积分区域  $\Omega = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, l \leq z \leq m\}$ , 证明这个三重积分等于三个单积分的乘积,

$$\iiint_{\Omega} f_1(x) f_2(y) f_3(z) dx dy dz = \int_a^b f_1(x) dx \int_c^d f_2(y) dy \int_l^m f_3(z) dz.$$

4. 计算  $\iiint_{\Omega} xy^2 z^3 dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = xy$  与平面  $y = x, x = 1$  和  $z = 0$  所围成的闭区域.

5. 计算  $\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$ , 其中  $\Omega$  为平面  $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$  所围成的四面体.

6. 计算  $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  及三个坐标面所围成的第一卦限内的闭区域.

7. 计算  $\iiint_{\Omega} xz dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由平面  $z=0, z=y, y=1$  以及抛物柱面  $y=x^2$  所围成的闭区域.

8. 计算  $\iiint_{\Omega} zdxdydz$ , 其中  $\Omega$  是由锥面  $z = \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}$  与平面  $z=h (R>0, h>0)$  所围成的闭区域.

9. 利用柱面坐标计算下列三重积分:

(1)  $\iiint_{\Omega} zdv$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = \sqrt{2-x^2-y^2}$  及  $z = x^2 + y^2$  所围成的闭区域;

(2)  $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $x^2 + y^2 = 2z$  及平面  $z=2$  所围成的闭区域.

10. 利用球面坐标计算下列三重积分:

$$(1) \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv, \text{ 其中 } \Omega \text{ 是由球面 } x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ 所围成的闭区域;}$$

$$(2) \iiint_{\Omega} z dv, \text{ 其中闭区域 } \Omega \text{ 由不等式 } x^2 + y^2 + (z - a)^2 \leq a^2, x^2 + y^2 \leq z^2 \text{ 所确定.}$$

11. 选用适当的坐标计算下列三重积分:

$$(1) \iiint_{\Omega} xy dv, \text{ 其中 } \Omega \text{ 为柱面 } x^2 + y^2 = 1 \text{ 及平面 } z = 1, z = 0, x = 0, y = 0 \text{ 所围成的在第一卦限内的闭区域;}$$

$$(2) \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv, \text{ 其中 } \Omega \text{ 是由球面 } x^2 + y^2 + z^2 = z \text{ 所围成的闭区域;}$$

$$(3) \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv, \text{ 其中 } \Omega \text{ 是由曲面 } 4z^2 = 25(x^2 + y^2) \text{ 及平面 } z = 5 \text{ 所围成的闭区域;}$$

$$(4) \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv, \text{ 其中闭区域 } \Omega \text{ 由不等式 } 0 < a \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq A, z \geq 0 \text{ 所确定.}$$

12. 利用三重积分计算下列由曲面所围成的立体的体积:

$$(1) z = 6 - x^2 - y^2 \text{ 及 } z = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$(2) x^2 + y^2 + z^2 = 2az (a > 0) \text{ 及 } x^2 + y^2 = z^2 \text{ (含有 } z \text{ 轴的部分);}$$

$$(3) z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ 及 } z = x^2 + y^2;$$

$$(4) z = \sqrt{5 - x^2 - y^2} \text{ 及 } x^2 + y^2 = 4z.$$

13. 求球体  $r \leq a$  位于锥面  $\varphi = \frac{\pi}{3}$  和  $\varphi = \frac{2}{3}\pi$  之间的部分的体积。

14. 求上、下分别为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$  和抛物面  $z = x^2 + y^2$  所围立体的体积。

15. 球心在原点、半径为  $R$  的球体,在其上任意一点的密度的大小与这点到球心的距离成正比,求这球体的质量。

## 第四节 重积分的应用

由前面的讨论可知,曲顶柱体的体积、平面薄片的质量可用二重积分计算,空间物体的质量可用三重积分计算.本节中我们将把定积分应用中的元素法推广到重积分的应用中,利用重积分的元素法来讨论重积分在几何、物理上的一些其他应用.

### 一、曲面的面积

设曲面  $S$  由方程

$$z = f(x, y)$$

给出, $D$  为曲面  $S$  在  $xOy$  面上的投影区域,函数  $f(x, y)$  在  $D$  上具有连续偏导数  $f_x(x, y)$  和  $f_y(x, y)$ .要计算曲面  $S$  的面积  $A$ .

在闭区域  $D$  上任取一直径很小的闭区域  $d\sigma$  (这小闭区域的面积也记作  $d\sigma$ ). 在  $d\sigma$  上取一点  $P(x, y)$ , 对应地曲面  $S$  上有一点  $M(x, y, f(x, y))$ , 点  $M$  在  $xOy$  面上的投影即点  $P$ . 点  $M$  处曲面  $S$  的切平面设为  $T$  (图 10-38). 以小闭区域  $d\sigma$  的边界为准线作母线平行于  $z$  轴的柱面, 这柱面在曲面  $S$  上截下一小片曲面, 在切平面  $T$  上截下一小片平面. 由于  $d\sigma$  的直径很小, 切平面  $T$  上的那一小片平面的面积  $dA$  可以近似代替相应的那小片曲面的面积. 设点  $M$  处曲面  $S$  上的法线(指向朝上)与  $z$  轴所成的角为  $\gamma$ , 则

$$dA = \frac{d\sigma}{\cos \gamma} \quad ①.$$

因为

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}},$$

所以

$$dA = \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} d\sigma.$$

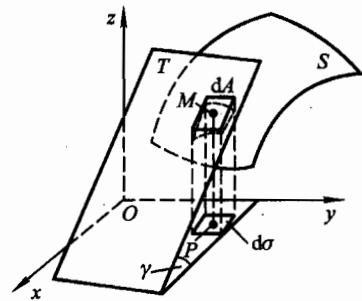


图 10-38

① 设两平面  $\Pi_1, \Pi_2$  的夹角为  $\theta$  (取锐角),  $\Pi_1$  上的闭区域  $D$  在  $\Pi_2$  上的投影区域为  $D_0$ , 则  $D$  的面积  $A$  与  $D_0$  的面积  $\sigma$  之间有下列关系:

$$A = \frac{\sigma}{\cos \theta}.$$

事实上, 先假定  $D$  是矩形闭区域, 且其一边平行于平面  $\Pi_1, \Pi_2$  的交线  $l$ , 边长为  $a$ , 另一边长为  $b$  (图 10-39), 则  $D_0$  也是矩形闭区域, 且边长分别为  $a$  及  $b \cos \theta$ , 从而

$$\sigma = ab \cos \theta = A \cos \theta,$$

即

$$A = \frac{\sigma}{\cos \theta}.$$

在一般情况, 可把  $D$  分成上述类型的  $m$  个小矩形闭区域(不计含边界点的不规则部分), 则小矩形闭区域

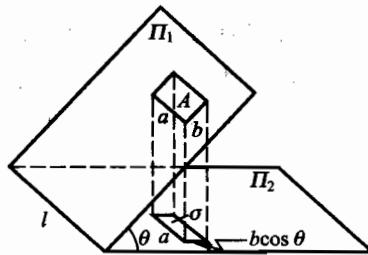


图 10-39

的面积  $A_k$  及其投影区域的面积  $\sigma_k$  之间符合  $A_k = \frac{\sigma_k}{\cos \theta}$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ), 从而  $\sum_{k=1}^m A_k = \frac{\sum_{k=1}^m \sigma_k}{\cos \theta}$ . 使各小

闭区域的直径中的最大者趋于零, 取极限便得  $A = \frac{\sigma}{\cos \theta}$ .

这就是曲面  $S$  的面积元素, 以它为被积表达式在闭区域  $D$  上积分, 得

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} d\sigma.$$

上式也可写成

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

这就是计算曲面面积的公式.

设曲面的方程为  $x = g(y, z)$  或  $y = h(z, x)$ , 可分别把曲面投影到  $yOz$  面上(投影区域记作  $D_{yz}$ )或  $zOx$  面上(投影区域记作  $D_{zx}$ ), 类似地可得

$$A = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz,$$

或  $A = \iint_{D_{zx}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} dz dx.$

**例 1** 求半径为  $a$  的球的表面积.

**解** 取上半球面方程为  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ , 则它在  $xOy$  面上的投影区域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}$ .

由  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ ,

得  $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$

因为这函数在闭区域  $D$  上无界, 我们不能直接应用曲面面积公式. 所以先取区域  $D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq b^2\}$  ( $0 < b < a$ ) 为积分区域, 算出相应于  $D_1$  上的球面面积  $A_1$  后, 令  $b \rightarrow a$  取  $A_1$  的极限<sup>①</sup> 就得半球面的面积.

$$A_1 = \iint_{D_1} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy,$$

利用极坐标, 得

$$\begin{aligned} A_1 &= \iint_{D_1} \frac{a}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \rho d\rho d\theta = a \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^b \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \\ &= 2\pi a \int_0^b \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = 2\pi a (a - \sqrt{a^2 - b^2}). \end{aligned}$$

① 这极限就是函数  $\frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$  在闭区域  $D$  上的所谓反常二重积分.

于是  $\lim_{b \rightarrow a} A_1 = \lim_{b \rightarrow a} 2\pi a(a - \sqrt{a^2 - b^2}) = 2\pi a^2$ .

这就是半个球面的面积,因此整个球面的面积为

$$A = 4\pi a^2.$$

**例 2** 设有一颗地球同步轨道通信卫星,距地面的高度为  $h = 36000 \text{ km}$ ,运行的角速度与地球自转的角速度相同.试计算该通信卫星的覆盖面积与地球表面积的比值(地球半径  $R = 6400 \text{ km}$ ).

解 取地心为坐标原点,地心到通信卫星中心的连线为  $z$  轴,建立坐标系,如图 10-40 所示.

通信卫星覆盖的曲面  $\Sigma$  是上半球面被半顶角为  $\alpha$  的圆锥面所截得的部分.  $\Sigma$  的方程为

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq R^2 \sin^2 \alpha.$$

于是通信卫星的覆盖面积为

$$\begin{aligned} A &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy. \end{aligned}$$

其中  $D_{xy}$  是曲面  $\Sigma$  在  $xOy$  面上的投影区域,  
 $D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2 \sin^2 \alpha\}$ .

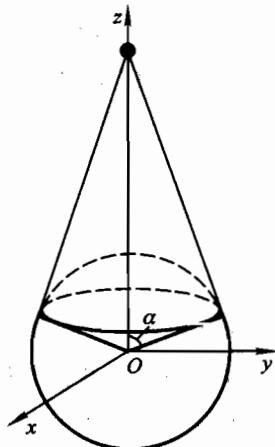


图 10-40

利用极坐标,得

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R \sin \alpha} \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \rho d\rho = 2\pi R \int_0^{R \sin \alpha} \frac{\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} d\rho \\ &= 2\pi R^2 (1 - \cos \alpha). \end{aligned}$$

由于  $\cos \alpha = \frac{R}{R+h}$ ,代入上式得

$$A = 2\pi R^2 \left(1 - \frac{R}{R+h}\right) = 2\pi R^2 \cdot \frac{h}{R+h}.$$

由此得这颗通信卫星的覆盖面积与地球表面积之比为

$$\frac{A}{4\pi R^2} = \frac{h}{2(R+h)} = \frac{36 \cdot 10^6}{2(36+6.4) \cdot 10^6} \approx 42.5\%.$$

由以上结果可知,卫星覆盖了全球三分之一以上的面积,故使用三颗相隔  $\frac{2}{3}\pi$  角度的通信卫星就可以覆盖几乎地球全部表面.

#### \* 利用曲面的参数方程求曲面的面积

若曲面  $S$  由参数方程

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in D$$

给出,其中  $D$  是一个平面有界闭区域,又  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  在  $D$  上具有连续的一阶偏导数,且

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}$$

不全为零,则曲面  $S$  的面积

$$A = \iint_D \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv,$$

其中

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2,$$

$$F = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v + z_u \cdot z_v,$$

$$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2.$$

下面我们对例 2 用球面的参数方程按上述公式来进行计算.

$\Sigma$  的参数方程为

$$\begin{cases} x = R \sin \varphi \cos \theta, \\ y = R \sin \varphi \sin \theta, \\ z = R \cos \varphi, \end{cases} \quad (\varphi, \theta) \in D_{\varphi\theta}.$$

这里  $D_{\varphi\theta} = \{(\varphi, \theta) | 0 \leq \varphi \leq \alpha, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ .

由于

$$\sqrt{EG - F^2} = R^2 \sin \varphi,$$

于是

$$\begin{aligned} A &= \iint_{D_{\varphi\theta}} \sqrt{EG - F^2} \, d\varphi \, d\theta \\ &= \iint_{D_{\varphi\theta}} R^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta = R^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\alpha \sin \varphi \, d\varphi. \\ &= 2\pi R^2 (1 - \cos \alpha) = 2\pi R^2 \cdot \frac{h}{R + h}. \end{aligned}$$

## 二、质心

先讨论平面薄片的质心.

设在  $xOy$  平面上有  $n$  个质点, 它们分别位于点  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  处, 质量分别为  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . 由力学知道, 该质点系的质心的坐标为

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i},$$

其中  $M = \sum_{i=1}^n m_i$  为该质点系的总质量,

$$M_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad M_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i,$$

分别为该质点系对  $y$  轴和  $x$  轴的静矩.

设有一平面薄片, 占有  $xOy$  面上的闭区域  $D$ , 在点  $(x, y)$  处的面密度为  $\mu(x, y)$ , 假定  $\mu(x, y)$  在  $D$  上连续. 现在要找该薄片的质心的坐标.

在闭区域  $D$  上任取一直径很小的闭区域  $d\sigma$  (这小闭区域的面积也记作  $d\sigma$ ),  $(x, y)$  是这小闭区域上的一个点. 由于  $d\sigma$  的直径很小, 且  $\mu(x, y)$  在  $D$  上连续, 所以薄片中相应于  $d\sigma$  的部分的质量近似等于  $\mu(x, y)d\sigma$ , 这部分质量可近似看做集中在点  $(x, y)$  上, 于是可写出静矩元素  $dM_y$  及  $dM_x$ :

$$dM_y = x\mu(x, y)d\sigma, \quad dM_x = y\mu(x, y)d\sigma.$$

以这些元素为被积表达式, 在闭区域  $D$  上积分, 便得

$$M_y = \iint_D x\mu(x, y)d\sigma, \quad M_x = \iint_D y\mu(x, y)d\sigma.$$

又由第一节知道, 薄片的质量为

$$M = \iint_D \mu(x, y)d\sigma.$$

所以, 薄片的质心的坐标为

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D x\mu(x, y)d\sigma}{\iint_D \mu(x, y)d\sigma}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D y\mu(x, y)d\sigma}{\iint_D \mu(x, y)d\sigma}.$$

如果薄片是均匀的, 即面密度为常量, 则上式中可把  $\mu$  提到积分记号外面并从分子、分母中约去, 这样便得均匀薄片的质心的坐标为

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_D x d\sigma, \quad \bar{y} = \frac{1}{A} \iint_D y d\sigma, \tag{1}$$

其中  $A = \iint_D d\sigma$  为闭区域  $D$  的面积. 这时薄片的质心完全由闭区域  $D$  的形状所

决定. 我们把均匀平面薄片的质心叫做这平面薄片所占的平面图形的形心. 因此, 平面图形  $D$  的形心的坐标, 就可用公式(1)计算.

**例 3** 求位于两圆  $\rho = 2\sin \theta$  和  $\rho = 4\sin \theta$  之间的均匀薄片的质心(图10-41).

**解** 因为闭区域  $D$  对称于  $y$  轴, 所以质心  $C(\bar{x}, \bar{y})$  必位于  $y$  轴上, 于是  $\bar{x} = 0$ .

再按公式

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \iint_D y d\sigma$$

计算  $\bar{y}$ . 由于闭区域  $D$  位于半径为 1 与半径为 2 的两圆之间, 所以它的面积等于这两个圆的面积之差, 即  $A = 3\pi$ . 再利用极坐标计算积分

$$\begin{aligned} \iint_D y d\sigma &= \iint_D \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_{2\sin \theta}^{4\sin \theta} \rho^2 d\rho \\ &= \frac{56}{3} \int_0^\pi \sin^4 \theta d\theta = 7\pi. \end{aligned}$$

因此  $\bar{y} = \frac{7\pi}{3\pi} = \frac{7}{3}$ ,

所求质心是  $C\left(0, \frac{7}{3}\right)$ .

类似地, 占有空间有界闭区域  $\Omega$ 、在点  $(x, y, z)$  处的密度为  $\rho(x, y, z)$  (假定  $\rho(x, y, z)$  在  $\Omega$  上连续) 的物体的质心坐标是

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} x \rho(x, y, z) dv, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} y \rho(x, y, z) dv, \quad \bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} z \rho(x, y, z) dv,$$

其中  $M = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dv$ .

**例 4** 求均匀半球体的质心.

**解** 取半球体的对称轴为  $z$  轴, 原点取在球心上, 又设球半径为  $a$ , 则半球体所占空间闭区域

$$\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0\}.$$

显然, 质心在  $z$  轴上, 故  $\bar{x} = \bar{y} = 0$ .

$$\bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} z \rho dv = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} z dv,$$

其中  $V = \frac{2}{3}\pi a^3$  为半球体的体积.

$$\iiint_{\Omega} z dv = \iiint_{\Omega} r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^a r^3 dr$$

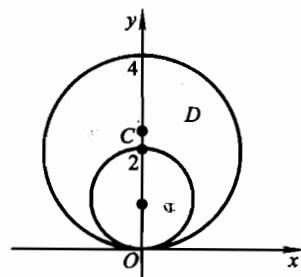


图 10-41

$$= 2\pi \cdot \left[ \frac{\sin^2 \varphi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{a^4}{4} = \frac{\pi a^4}{4}.$$

因此,  $\bar{z} = \frac{3}{8}a$ , 质心为  $(0, 0, \frac{3}{8}a)$ .

### 三、转动惯量

先讨论平面薄片的转动惯量.

设在  $xOy$  平面上有  $n$  个质点, 它们分别位于点  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  处, 质量分别为  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . 由力学知道, 该质点系对于  $x$  轴以及对于  $y$  轴的转动惯量依次为

$$I_x = \sum_{i=1}^n y_i^2 m_i, \quad I_y = \sum_{i=1}^n x_i^2 m_i.$$

设有一薄片, 占有  $xOy$  面上的闭区域  $D$ , 在点  $(x, y)$  处的面密度为  $\mu(x, y)$ , 假定  $\mu(x, y)$  在  $D$  上连续. 现在要求该薄片对于  $x$  轴的转动惯量  $I_x$  以及对于  $y$  轴的转动惯量  $I_y$ .

应用元素法. 在闭区域  $D$  上任取一直径很小的闭区域  $d\sigma$  (这小闭区域的面积也记作  $d\sigma$ ),  $(x, y)$  是这小闭区域上的一个点. 因为  $d\sigma$  的直径很小, 且  $\mu(x, y)$  在  $D$  上连续, 所以薄片中相应于  $d\sigma$  部分的质量近似等于  $\mu(x, y)d\sigma$ , 这部分质量可近似看做集中在点  $(x, y)$  上, 于是可写出薄片对于  $x$  轴以及对于  $y$  轴的转动惯量元素:

$$dI_x = y^2 \mu(x, y) d\sigma, \quad dI_y = x^2 \mu(x, y) d\sigma.$$

以这些元素为被积表达式, 在闭区域  $D$  上积分, 便得

$$I_x = \iint_D y^2 \mu(x, y) d\sigma, \quad I_y = \iint_D x^2 \mu(x, y) d\sigma.$$

**例 5** 求半径为  $a$  的均匀半圆薄片(面密度为常量  $\mu$ )对于其直径边的转动惯量.

解 取坐标系如图 10-42 所示, 则薄片所占闭区域

$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0\},$$

而所求转动惯量即半圆薄片对于  $x$  轴的转动惯量  $I_x$ .

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D \mu y^2 d\sigma = \mu \iint_D \rho^3 \sin^2 \theta d\rho d\theta \\ &= \mu \int_0^\pi d\theta \int_0^a \rho^3 \sin^2 \theta d\rho \end{aligned}$$

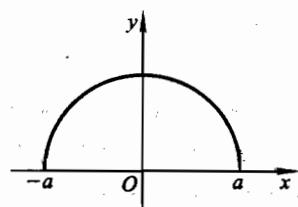


图 10-42

$$= \mu \cdot \frac{a^4}{4} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \\ = \frac{1}{4} \mu a^4 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4} M a^2,$$

其中  $M = \frac{1}{2} \pi a^2 \mu$  为半圆薄片的质量.

类似地, 占有空间有界闭区域  $\Omega$ 、在点  $(x, y, z)$  处的密度为  $\rho(x, y, z)$  (假定  $\rho(x, y, z)$  在  $\Omega$  上连续) 的物体对于  $x, y, z$  轴的转动惯量为

$$I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dv,$$

$$I_y = \iiint_{\Omega} (z^2 + x^2) \rho(x, y, z) dv,$$

$$I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dv.$$

**例 6** 求密度为  $\rho$  的均匀球体对于过球心的一条轴  $l$  的转动惯量.

解 取球心为坐标原点,  $z$  轴与轴  $l$  重合, 又设球的半径为  $a$ , 则球体所占空间闭区域

$$\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}.$$

所求转动惯量即球体对于  $z$  轴的转动惯量为

$$I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho dv \\ = \rho \iiint_{\Omega} (r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ = \rho \iiint_{\Omega} r^4 \sin^3 \varphi dr d\varphi d\theta = \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin^3 \varphi d\varphi \int_0^a r^4 dr \\ = \rho \cdot 2\pi \cdot \frac{a^5}{5} \int_0^\pi \sin^3 \varphi d\varphi \\ = \frac{2}{5} \pi a^5 \rho \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{5} a^2 M,$$

其中  $M = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho$  为球体的质量.

#### 四、引力

下面讨论空间一物体对于物体外一点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  处的单位质量的质点的引力问题.

设物体占有空间有界闭区域  $\Omega$ , 它在点  $(x, y, z)$  处的密度为  $\rho(x, y, z)$ , 并

假定  $\rho(x, y, z)$  在  $\Omega$  上连续. 在物体内任取一直径很小的闭区域  $dv$  (这闭区域的体积也记作  $dv$ ),  $(x, y, z)$  为这一小块中的一点. 把这一小块物体的质量  $\rho dv$  近似地看做集中在点  $(x, y, z)$  处. 于是按两质点间的引力公式, 可得这一小块物体对位于  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  处的单位质量的质点的引力近似地为

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= (dF_x, dF_y, dF_z) \\ &= \left( G \frac{\rho(x, y, z)(x - x_0)}{r^3} dv, G \frac{\rho(x, y, z)(y - y_0)}{r^3} dv, \right. \\ &\quad \left. G \frac{\rho(x, y, z)(z - z_0)}{r^3} dv \right), \end{aligned}$$

其中  $dF_x, dF_y, dF_z$  为引力元素  $d\mathbf{F}$  在三个坐标轴上的分量,  $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ ,  $G$  为引力常数. 将  $dF_x, dF_y, dF_z$  在  $\Omega$  上分别积分, 即得

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (F_x, F_y, F_z) \\ &= \left( \iiint_{\Omega} \frac{G\rho(x, y, z)(x - x_0)}{r^3} dv, \iiint_{\Omega} \frac{G\rho(x, y, z)(y - y_0)}{r^3} dv, \right. \\ &\quad \left. \iiint_{\Omega} \frac{G\rho(x, y, z)(z - z_0)}{r^3} dv \right). \end{aligned}$$

如果考虑平面薄片对薄片外一点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  处的单位质量的质点的引力, 设平面薄片占有  $xOy$  平面上的有界闭区域  $D$ , 其面密度为  $\mu(x, y)$ , 那么只要将上式中的密度  $\rho(x, y, z)$  换成面密度  $\mu(x, y)$ , 将  $\Omega$  上的三重积分换成  $D$  上的二重积分, 就可得到相应的计算公式.

**例 7** 设半径为  $R$  的匀质球占有空间闭区域  $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ . 求它对位于  $M_0(0, 0, a)$  ( $a > R$ ) 处的单位质量的质点的引力.

**解** 设球的密度为  $\rho_0$ , 由球体的对称性及质量分布的均匀性知  $F_x = F_y = 0$ , 所求引力沿  $z$  轴的分量为

$$\begin{aligned} F_z &= \iiint_{\Omega} G\rho_0 \frac{z - a}{[x^2 + y^2 + (z - a)^2]^{\frac{3}{2}}} dv \\ &= G\rho_0 \int_{-R}^R (z - a) dz \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2 - z^2} \frac{dx dy}{[x^2 + y^2 + (z - a)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &= G\rho_0 \int_{-R}^R (z - a) dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} \frac{\rho d\rho}{[\rho^2 + (z - a)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &= 2\pi G\rho_0 \int_{-R}^R (z - a) \left( \frac{1}{a - z} - \frac{1}{\sqrt{R^2 - 2az + a^2}} \right) dz \\ &= 2\pi G\rho_0 \left[ -2R + \frac{1}{a} \int_{-R}^R (z - a) d\sqrt{R^2 - 2az + a^2} \right] \end{aligned}$$

$$= 2\pi G \rho_0 \left( -2R + 2R - \frac{2R^3}{3a^2} \right) \\ = -G \cdot \frac{4\pi R^3}{3} \rho_0 \cdot \frac{1}{a^2} = -G \frac{M}{a^2},$$

其中  $M = \frac{4\pi R^3}{3} \rho_0$  为球的质量. 上述结果表明: 匀质球对球外一质点的引力如同球的质量集中于球心时两质点间的引力.

### 习 题 10-4

1. 求球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  含在圆柱面  $x^2 + y^2 = ax$  内部的那部分面积.
2. 求锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  被柱面  $z^2 = 2x$  所割下部分的曲面面积.
3. 求底圆半径相等的两个直交圆柱面  $x^2 + y^2 = R^2$  及  $x^2 + z^2 = R^2$  所围立体的表面积.
4. 设薄片所占的闭区域  $D$  如下, 求均匀薄片的质心:
  - (1)  $D$  由  $y = \sqrt{2px}$ ,  $x = x_0$ ,  $y = 0$  所围成;
  - (2)  $D$  是半椭圆形闭区域  $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, y \geq 0 \right\}$ ;
  - (3)  $D$  是介于两个圆  $\rho = a \cos \theta$ ,  $\rho = b \cos \theta$  ( $0 < a < b$ ) 之间的闭区域.
5. 设平面薄片所占的闭区域  $D$  由抛物线  $y = x^2$  及直线  $y = x$  所围成, 它在点  $(x, y)$  处的面密度  $\mu(x, y) = x^2 y$ , 求该薄片的质心.
6. 设有一等腰直角三角形薄片, 腰长为  $a$ , 各点处的面密度等于该点到直角顶点的距离的平方, 求这薄片的质心.
7. 利用三重积分计算下列由曲面所围立体的质心(设密度  $\rho = 1$ ):
  - (1)  $z^2 = x^2 + y^2$ ,  $z = 1$ ;
  - (2)  $z = \sqrt{A^2 - x^2 - y^2}$ ,  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  ( $A > a > 0$ ),  $z = 0$ ;
  - (3)  $z = x^2 + y^2$ ,  $x + y = a$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .
8. 设球体占有闭区域  $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz\}$ , 它在内部各点处的密度的大小等于该点到坐标原点的距离的平方. 试求这球体的质心.
9. 设均匀薄片(面密度为常数 1)所占闭区域  $D$  如下, 求指定的转动惯量:
  - (1)  $D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$ , 求  $I_y$ ;
  - (2)  $D$  由抛物线  $y^2 = \frac{9}{2}x$  与直线  $x = 2$  所围成, 求  $I_x$  和  $I_y$ ;
  - (3)  $D$  为矩形闭区域  $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ , 求  $I_x$  和  $I_y$ .
10. 已知均匀矩形板(面密度为常量  $\mu$ )的长和宽分别为  $b$  和  $h$ , 计算此矩形板对于通过其形心且分别与一边平行的两轴的转动惯量.
11. 一均匀物体(密度  $\rho$  为常量)占有的闭区域  $\Omega$  由曲面  $z = x^2 + y^2$  和平面  $z = 0$ ,

$|x| = a$ ,  $|y| = a$  所围成,

- (1) 求物体的体积;
- (2) 求物体的质心;
- (3) 求物体关于  $z$  轴的转动惯量.

12. 求半径为  $a$ 、高为  $h$  的均匀圆柱体对于过中心而平行于母线的轴的转动惯量(设密度  $\rho = 1$ ).

13. 设面密度为常量  $\mu$  的匀质半圆环形薄片占有闭区域  $D = \{(x, y, 0) | R_1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R_2, x \geq 0\}$ , 求它对位于  $z$  轴上点  $M_0(0, 0, a)$  ( $a > 0$ ) 处单位质量的质点的引力  $\mathbf{F}$ .

14. 设均匀柱体密度为  $\rho$ , 占有闭区域  $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\}$ , 求它对位于点  $M_0(0, 0, a)$  ( $a > h$ ) 处的单位质量的质点的引力.

## \* 第五节 含参变量的积分

设  $f(x, y)$  是矩形(闭区域)  $R = [a, b] \times [c, d]$  上的连续函数. 在  $[a, b]$  上任意取定  $x$  的一个值, 于是  $f(x, y)$  是变量  $y$  在  $[c, d]$  上的一个一元连续函数, 从而积分

$$\int_c^d f(x, y) dy$$

存在, 这个积分的值依赖于取定的  $x$  值. 当  $x$  的值改变时, 一般说来这个积分的值也跟着改变. 这个积分确定一个定义在  $[a, b]$  上的  $x$  的函数, 把它记作  $\varphi(x)$ , 即

$$\varphi(x) = \int_c^d f(x, y) dy \quad (a \leq x \leq b). \quad (1)$$

这里变量  $x$  在积分过程中是一个常量, 通常称它为 参变量, 因此(1)式右端是一个含参变量  $x$  的积分, 这积分确定  $x$  的一个函数  $\varphi(x)$ , 下面讨论关于  $\varphi(x)$  的一些性质.

**定理 1** 如果函数  $f(x, y)$  在矩形  $R = [a, b] \times [c, d]$  上连续, 那么由积分(1)确定的函数  $\varphi(x)$  在  $[a, b]$  上也连续.

**证** 设  $x$  和  $x + \Delta x$  是  $[a, b]$  上的两点, 则

$$\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \int_c^d [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)] dy. \quad (2)$$

由于  $f(x, y)$  在闭区域  $R$  上连续, 从而一致连续. 因此对于任意取定的  $\epsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得对于  $R$  内的任意两点  $(x_1, y_1)$  及  $(x_2, y_2)$ , 只要它们之间的距离小于  $\delta$ , 即

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} < \delta,$$

就有

$$|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| < \epsilon.$$

因为点  $(x + \Delta x, y)$  与  $(x, y)$  的距离等于  $|\Delta x|$ , 所以当  $|\Delta x| < \delta$  时, 就有

$$|f(x + \Delta x, y) - f(x, y)| < \epsilon,$$

于是由(2)式有

$$\begin{aligned} & |\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)| \\ & \leq \int_c^d |f(x + \Delta x, y) - f(x, y)| dy < \epsilon(d - c). \end{aligned}$$

所以  $\varphi(x)$  在  $[a, b]$  上连续.

既然函数  $\varphi(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 那么它在  $[a, b]$  上的积分存在, 这个积分可以写为

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

右端积分是函数  $f(x, y)$  先对  $y$  后对  $x$  的二次积分. 当  $f(x, y)$  在矩形  $R$  上连续时,  $f(x, y)$  在  $R$  上的二重积分  $\iint_R f(x, y) dxdy$  是存在的, 这个二重积分化为二次积分来计算时, 如果先对  $y$  后对  $x$  积分, 就是上面的这个二次积分. 但二重积分  $\iint_R f(x, y) dxdy$  也可化为先对  $x$  后对  $y$  的二次积分  $\int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy$ ,

因此有下面的定理 2.

**定理 2** 如果函数  $f(x, y)$  在矩形  $R = [a, b] \times [c, d]$  上连续, 则

$$\int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy. \quad (3)$$

公式(3)也可写成

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad (3')$$

下面考虑由积分(1)确定的函数  $\varphi(x)$  的微分问题.

**定理 3** 如果函数  $f(x, y)$  及其偏导数  $f_x(x, y)$  都在矩形  $R = [a, b] \times [c, d]$  上连续, 那么由积分(1)确定的函数  $\varphi(x)$  在  $[a, b]$  上可微分, 并且

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d f_x(x, y) dy. \quad (4)$$

证 因为  $\varphi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}$ , 为了求  $\varphi'(x)$ , 先利用公式(2)

作出增量之比

$$\frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \int_c^d \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} dy. \quad (5)$$

由拉格朗日中值定理以及  $f_x(x, y)$  的一致连续性, 可得

$$\begin{aligned}\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} &= f_x(x + \theta \Delta x, y) \\ &= f_x(x, y) + \eta(x, y, \Delta x),\end{aligned}\quad (6)$$

其中  $0 < \theta < 1$ ,  $|\eta|$  可小于任意给定的正数  $\epsilon$ , 只要  $|\Delta x|$  小于某个正数  $\delta$ . 因此

$$\left| \int_c^d \eta(x, y, \Delta x) dy \right| < \int_c^d \epsilon dy = \epsilon(d - c) \quad (|\Delta x| < \delta),$$

这就是说  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_c^d \eta(x, y, \Delta x) dy = 0$ .

由(5)及(6)有

$$\frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \int_c^d f_x(x, y) dy + \int_c^d \eta(x, y, \Delta x) dy,$$

令  $\Delta x \rightarrow 0$  取上式的极限, 即得公式(4).

在积分(1)中积分限  $c$  与  $d$  都是常数. 但在实际应用中还会遇到对于参变量  $x$  的不同的值, 积分限也不同的情形, 即以下的积分

$$\Phi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy. \quad (7)$$

下面我们考虑这种更为广泛地依赖于参变量的积分的某些性质.

**定理 4** 如果函数  $f(x, y)$  在矩形  $R = [a, b] \times [c, d]$  上连续, 函数  $\alpha(x)$  与  $\beta(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 且

$$c \leq \alpha(x) \leq d, c \leq \beta(x) \leq d \quad (a \leq x \leq b),$$

则由积分(7)确定的函数  $\Phi(x)$  在  $[a, b]$  上也连续.

**证** 设  $x$  和  $x + \Delta x$  是  $[a, b]$  上的两点, 则

$$\begin{aligned}&\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) \\ &= \int_{\alpha(x+\Delta x)}^{\beta(x+\Delta x)} f(x + \Delta x, y) dy - \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{因为 } &\int_{\alpha(x+\Delta x)}^{\beta(x+\Delta x)} f(x + \Delta x, y) dy \\ &= \int_{\alpha(x+\Delta x)}^{\alpha(x)} f(x + \Delta x, y) dy + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x + \Delta x, y) dy + \int_{\beta(x)}^{\beta(x+\Delta x)} f(x + \Delta x, y) dy,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{所以 } &\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_{\alpha(x+\Delta x)}^{\alpha(x)} f(x + \Delta x, y) dy + \\ &\quad \int_{\beta(x)}^{\beta(x+\Delta x)} f(x + \Delta x, y) dy + \\ &\quad \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)] dy.\end{aligned}\quad (8)$$

当  $\Delta x \rightarrow 0$  时, 上式右端最后一个积分的积分限不变, 根据证明定理 1 时同样的理由, 这个积分趋于零. 又

$$\left| \int_{\alpha(x+\Delta x)}^{\alpha(x)} f(x+\Delta x, y) dy \right| \leq M |\alpha(x+\Delta x) - \alpha(x)|,$$

$$\left| \int_{\beta(x)}^{\beta(x+\Delta x)} f(x+\Delta x, y) dy \right| \leq M |\beta(x+\Delta x) - \beta(x)|,$$

其中  $M$  是  $|f(x, y)|$  在矩形  $R$  上的最大值. 根据  $\alpha(x)$  与  $\beta(x)$  在  $[a, b]$  上连续的假定, 由以上两式可见, 当  $\Delta x \rightarrow 0$  时, (8) 式右端的前两个积分都趋于零. 于是, 当  $\Delta x \rightarrow 0$  时,

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) \rightarrow 0 \quad (a \leq x \leq b),$$

所以函数  $\Phi(x)$  在  $[a, b]$  上连续.

关于函数  $\Phi(x)$  的微分, 有下列定理.

**定理 5** 如果函数  $f(x, y)$  及其偏导数  $f_x(x, y)$  都在矩形  $R = [a, b] \times [c, d]$  上连续, 函数  $\alpha(x)$  与  $\beta(x)$  都在区间  $[a, b]$  上可微, 且

$$c \leq \alpha(x) \leq d, c \leq \beta(x) \leq d \quad (a \leq x \leq b),$$

则由积分(7)确定的函数  $\Phi(x)$  在  $[a, b]$  上可微, 且

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= \frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \\ &= \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(x, y) dy + f[x, \beta(x)]\beta'(x) - f[x, \alpha(x)]\alpha'(x). \end{aligned} \quad (9)$$

证 由(8)式有

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} &= \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} dy + \\ &\quad \frac{1}{\Delta x} \int_{\beta(x)}^{\beta(x + \Delta x)} f(x + \Delta x, y) dy - \\ &\quad \frac{1}{\Delta x} \int_{\alpha(x)}^{\alpha(x + \Delta x)} f(x + \Delta x, y) dy. \end{aligned} \quad (10)$$

当  $\Delta x \rightarrow 0$  时, 上式右端的第一个积分的积分限不变, 根据证明定理 3 时同样的理由, 有

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} dy \rightarrow \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(x, y) dy.$$

对于(10)式右端的第二项, 应用积分中值定理得

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{\beta(x)}^{\beta(x + \Delta x)} f(x + \Delta x, y) dy = \frac{1}{\Delta x} [\beta(x + \Delta x) - \beta(x)] f(x + \Delta x, \eta),$$

其中  $\eta$  在  $\beta(x)$  与  $\beta(x + \Delta x)$  之间. 当  $\Delta x \rightarrow 0$  时,

$$\frac{1}{\Delta x} [\beta(x + \Delta x) - \beta(x)] \rightarrow \beta'(x), f(x + \Delta x, \eta) \rightarrow f[x, \beta(x)].$$

于是  $\frac{1}{\Delta x} \int_{\beta(x)}^{\beta(x + \Delta x)} f(x + \Delta x, y) dy \rightarrow f[x, \beta(x)]\beta'(x).$

类似地可证,当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时,

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{\alpha(x)}^{\alpha(x+\Delta x)} f(x + \Delta x, y) dy \rightarrow f[x, \alpha(x)] \alpha'(x).$$

因此,令 $\Delta x \rightarrow 0$ ,取(10)式的极限便得公式(9).

公式(9)称为莱布尼茨公式.

例1 设 $\Phi(x) = \int_x^{x^2} \frac{\sin(xy)}{y} dy$ ,求 $\Phi'(x)$ .

解 应用莱布尼茨公式,得

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= \int_x^{x^2} \cos(xy) dy + \frac{\sin x^3}{x^2} \cdot 2x - \frac{\sin x^2}{x} \cdot 1 \\ &= \left[ \frac{\sin(xy)}{x} \right]_x^{x^2} + 2\sin x^3 - \frac{\sin x^2}{x} = \frac{3\sin x^3 - 2\sin x^2}{x}.\end{aligned}$$

例2 求 $I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$  ( $0 < a < b$ ).

解 因为

$$\int_a^b x^y dy = \left[ \frac{x^y}{\ln x} \right]_a^b = \frac{x^b - x^a}{\ln x},$$

所以

$$I = \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy.$$

这里函数 $f(x, y) = x^y$ 在矩形 $R = [0, 1] \times [a, b]$ 上连续,根据定理2,可交换积分次序,由此有

$$I = \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx = \int_a^b \left[ \frac{x^{y+1}}{y+1} \right]_0^1 dy = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy = \ln \frac{b+1}{a+1}.$$

例3 计算定积分 $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$ .

解 考虑含参变量 $\alpha$ 的积分所确定的函数

$$\varphi(\alpha) = \int_0^1 \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2} dx.$$

显然, $\varphi(0) = 0$ , $\varphi(1) = I$ .根据公式(4)得

$$\varphi'(\alpha) = \int_0^1 \frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)} dx.$$

把被积函数分解为部分分式,得到

$$\frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)} = \frac{1}{1+\alpha^2} \left[ \frac{-\alpha}{1+\alpha x} + \frac{x}{1+x^2} + \frac{\alpha}{1+x^2} \right].$$

于是

$$\varphi'(\alpha) = \frac{1}{1+\alpha^2} \left[ \int_0^1 \frac{-\alpha dx}{1+\alpha x} + \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^2} + \int_0^1 \frac{\alpha dx}{1+x^2} \right]$$

$$= \frac{1}{1+\alpha^2} \left[ -\ln(1+\alpha) + \frac{1}{2} \ln 2 + \alpha \cdot \frac{\pi}{4} \right],$$

上式在  $[0,1]$  上对  $\alpha$  积分, 得到

$$\begin{aligned}\varphi(1) - \varphi(0) \\ = - \int_0^1 \frac{\ln(1+\alpha)}{1+\alpha^2} d\alpha + \frac{1}{2} \ln 2 \int_0^1 \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} + \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{\alpha}{1+\alpha^2} d\alpha,\end{aligned}$$

即

$$I = - I + \frac{\ln 2}{2} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\ln 2}{2} = - I + \frac{\pi}{4} \ln 2.$$

从而

$$I = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

### \* 习 题 10-5

1. 求下列含参变量的积分所确定的函数的极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{1+x} \frac{dy}{1+x^2+y^2}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2+y^2} dy;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^2 y^2 \cos(xy) dy.$$

2. 求下列函数的导数:

$$(1) \varphi(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} (y^2 \sin x - y^3) dy; \quad (2) \varphi(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+xy)}{y} dy;$$

$$(3) \varphi(x) = \int_{x^2}^{x^3} \arctan \frac{y}{x} dy; \quad (4) \varphi(x) = \int_x^{x^2} e^{-xy^2} dy.$$

3. 设  $F(x) = \int_0^x (x+y) f(y) dy$ , 其中  $f(y)$  为可微分的函数, 求  $F''(x)$ .

4. 应用对参数的微分法, 计算下列积分:

$$(1) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x} \quad (|a| < 1);$$

$$(2) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + a^2 \sin^2 x) dx \quad (a > 0).$$

5. 计算下列积分:

$$(1) \int_0^1 \frac{\arctan x}{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(2) \int_0^1 \sin \left( \ln \frac{1}{x} \right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (0 < a < b).$$

### 总习题十

1. 选择以下各题中给出的四个结论中一个正确的结论:

(1) 设有空间闭区域  $\Omega_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$ ,  $\Omega_2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ , 则有 \_\_\_\_\_;

(A)  $\iiint_{\Omega_1} x \, d\sigma = 4 \iiint_{\Omega_2} x \, d\sigma$

(B)  $\iiint_{\Omega_1} y \, d\sigma = 4 \iiint_{\Omega_2} y \, d\sigma$

(C)  $\iiint_{\Omega_1} z \, d\sigma = 4 \iiint_{\Omega_2} z \, d\sigma$

(D)  $\iiint_{\Omega_1} xyz \, d\sigma = 4 \iiint_{\Omega_2} xyz \, d\sigma$

(2) 设有平面闭区域  $D = \{(x, y) \mid -a \leq x \leq a, x \leq y \leq a\}$ ,  $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, x \leq y \leq a\}$ , 则  $\iint_D (xy + \cos x \sin y) \, dx \, dy = \text{_____}$ ;

(A)  $2 \iint_{D_1} \cos x \sin y \, dx \, dy$

(B)  $2 \iint_{D_1} xy \, dx \, dy$

(C)  $4 \iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y) \, dx \, dy$

(D) 0

(3) 设  $f(x)$  为连续函数,  $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) \, dx$ , 则  $F'(2) = \text{_____}$ .

- (A)  $2f(2)$       (B)  $f(2)$       (C)  $-f(2)$       (D) 0

2. 计算下列二重积分:

(1)  $\iint_D (1+x) \sin y \, d\sigma$ , 其中  $D$  是顶点分别为  $(0,0), (1,0), (1,2)$  和  $(0,1)$  的梯形闭区域;

(2)  $\iint_D (x^2 - y^2) \, d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sin x, 0 \leq x \leq \pi\}$ ;

(3)  $\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \, d\sigma$ , 其中  $D$  是圆周  $x^2 + y^2 = Rx$  所围成的闭区域;

(4)  $\iint_D (y^2 + 3x - 6y + 9) \, d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ .

3. 交换下列二次积分的次序:

(1)  $\int_0^4 dy \int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y-4)} f(x, y) \, dx$ ;

(2)  $\int_0^1 dy \int_0^{2y} f(x, y) \, dx + \int_1^3 dy \int_0^{3-y} f(x, y) \, dx$ ;

(3)  $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x, y) \, dy$ .

4. 证明:

$$\int_0^a dy \int_0^y e^{m(a-x)} f(x) \, dx = \int_0^a (a-x) e^{m(a-x)} f(x) \, dx.$$

5. 把积分  $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$  表为极坐标形式的二次积分, 其中积分区域  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}$ .

6. 设  $f(x, y)$  在闭区域  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq v, x \geq 0\}$  上连续, 且

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} - \frac{8}{\pi} \iint_D f(x, y) dx dy,$$

求  $f(x, y)$ .

7. 把积分  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$  化为三次积分, 其中积分区域  $\Omega$  是由曲面  $z = x^2 + y^2$ ,  $y = x^2$  及平面  $y = 1, z = 0$  所围成的闭区域.

8. 计算下列三重积分:

(1)  $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是两个球:  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  和  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$  ( $R > 0$ ) 的公共部分;

(2)  $\iiint_{\Omega} \frac{z \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dv$ , 其中  $\Omega$  是由球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  所围成的闭区域;

(3)  $\iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) dv$ , 其中  $\Omega$  是由  $xOy$  平面上曲线  $y^2 = 2x$  绕  $x$  轴旋转而成的曲面与平面  $x = 5$  所围成的闭区域.

\*9. 设函数  $f(x)$  连续且恒大于零,

$$F(t) = \frac{\iiint_{\Omega(t)} f(x^2 + y^2 + z^2) dv}{\iint_{D(t)} f(x^2 + y^2) d\sigma},$$

$$G(t) = \frac{\iint_{D(t)} f(x^2 + y^2) d\sigma}{\int_{-t}^t f(x^2) dx},$$

其中  $\Omega(t) = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2\}$ ,  $D(t) = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq t^2\}$ .

(1) 讨论  $F(t)$  在区间  $(0, +\infty)$  内的单调性;

(2) 证明当  $t > 0$  时,  $F(t) > \frac{2}{\pi} G(t)$ .

10. 求平面  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  被三坐标面所割出的有限部分的面积.

11. 在均匀的半径为  $R$  的半圆形薄片的直径上, 要接上一个一边与直径等长的同样材料的均匀矩形薄片, 为了使整个均匀薄片的质心恰好落在圆心上, 间接上去的均匀矩形薄片另一边的长度应是多少?

12. 求由抛物线  $y = x^2$  及直线  $y = 1$  所围成的均匀薄片(面密度为常数  $\mu$ )对于直线  $y = -1$  的转动惯量.

13. 设在  $xOy$  面上有一质量为  $M$  的匀质半圆形薄片, 占有平面闭区域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}$ , 过圆心  $O$  垂直于薄片的直线上有一质量为  $m$  的质点  $P$ ,  $OP = a$ . 求半圆形薄片对质点  $P$  的引力.

14. 求质量分布均匀的半个旋转椭球体  $\Omega = \left\{ (x, y, z) | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, z \geq 0 \right\}$  的

质心.

\*15. 一球形行星的半径为  $R$ , 其质量为  $M$ , 其密度呈球对称分布, 并向着球心线性增加. 若行星表面的密度为零, 那么行星中心的密度是多少?

# 第十一章 曲线积分与曲面积分

上一章已经把积分概念从积分范围为数轴上一个区间的情形推广到积分范围为平面或空间内的一个闭区域的情形.本章将把积分概念推广到积分范围为一段曲线弧或一片曲面<sup>①</sup>的情形(这样推广后的积分称为曲线积分和曲面积分),并阐明有关这两种积分的一些基本内容.

## 第一节 对弧长的曲线积分

### 一、对弧长的曲线积分的概念与性质

**曲线形构件的质量** 在设计曲线形构件时,为了合理使用材料,应该根据构件各部分受力情况,把构件上各点处的粗细程度设计得不完全一样.因此,可以认为这构件的线密度(单位长度的质量)是变量.假设这构件所处的位置在  $xOy$  面内的一段曲线弧  $L$  上,它的端点是  $A, B$ ,在  $L$  上任一点  $(x, y)$  处,它的线密度为  $\mu(x, y)$ .现在要计算这构件的质量  $m$  (图 11-1).

如果构件的线密度为常量,那么这构件的质量就等于它的线密度与长度的乘积.现在构件上各点处的线密度是变量,就不能直接用上述方法来计算.为了克服这个困难,可以用  $L$  上的点  $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$  把  $L$  分成  $n$  个小段,取其中一小段构件  $\widehat{M_{i-1}M_i}$  来分析.在线密度连续变化的前提下,只要这小段很短,就可以用这小段上任一点  $(\xi_i, \eta_i)$  处的线密度代替这小段上其他各点处的线密度,从而得到这小段构件的质量的近似值为

$$\mu(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i,$$

其中  $\Delta s_i$  表示  $\widehat{M_{i-1}M_i}$  的长度.于是整个曲线形构件的质量

$$m \approx \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i.$$

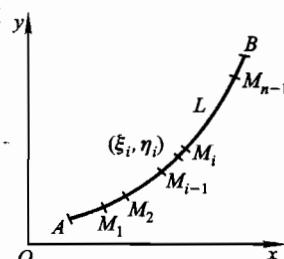


图 11-1

① 本章讨论的都是具有有限长度的曲线和具有有限面积的曲面.

用  $\lambda$  表示  $n$  个小弧段的最大长度. 为了计算  $m$  的精确值, 取上式右端之和当  $\lambda \rightarrow 0$  时的极限, 从而得到

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i.$$

这种和的极限在研究其他问题时也会遇到. 现在引进下面的定义.

**定义** 设  $L$  为  $xOy$  面内的一条光滑曲线弧, 函数  $f(x, y)$  在  $L$  上有界. 在  $L$  上任意插入一点列  $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ , 把  $L$  分成  $n$  个小段. 设第  $i$  个小段的长度为  $\Delta s_i$ . 又  $(\xi_i, \eta_i)$  为第  $i$  个小段上任意取定的一点, 作乘积  $f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 并作和  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$ , 如果当各小弧段的长度的最大值  $\lambda \rightarrow 0$  时, 这和的极限总存在, 则称此极限为函数  $f(x, y)$  在曲线弧  $L$  上对弧长的曲线积分或第一类曲线积分, 记作  $\int_L f(x, y) ds$ , 即

$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i,$$

其中  $f(x, y)$  叫做被积函数,  $L$  叫做积分弧段.

在第二目中我们将看到, 当  $f(x, y)$  在光滑曲线弧  $L$  上连续时, 对弧长的曲线积分  $\int_L f(x, y) ds$  是存在的. 以后我们总假定  $f(x, y)$  在  $L$  上是连续的.

根据这个定义, 前述曲线形构件的质量  $m$  当线密度  $\mu(x, y)$  在  $L$  上连续时, 就等于  $\mu(x, y)$  对弧长的曲线积分, 即

$$m = \int_L \mu(x, y) ds.$$

上述定义可以类似地推广到积分弧段为空间曲线弧  $\Gamma$  的情形, 即函数  $f(x, y, z)$  在曲线弧  $\Gamma$  上对弧长的曲线积分

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i.$$

如果  $L$  (或  $\Gamma$ ) 是分段光滑的<sup>①</sup>, 我们规定函数在  $L$  (或  $\Gamma$ ) 上的曲线积分等于函数在光滑的各段上的曲线积分之和. 例如, 设  $L$  可分成两段光滑曲线弧  $L_1$  及  $L_2$  (记作  $L = L_1 + L_2$ ), 就规定

$$\int_{L_1 + L_2} f(x, y) ds = \int_{L_1} f(x, y) ds + \int_{L_2} f(x, y) ds.$$

如果  $L$  是闭曲线, 那么函数  $f(x, y)$  在闭曲线  $L$  上对弧长的曲线积分记为

<sup>①</sup> 就是说,  $L$  (或  $\Gamma$ ) 可以分成有限段, 而每一段都是光滑的. 以后我们总假定  $L$  (或  $\Gamma$ ) 是光滑的或分段光滑的.

$$\oint_L f(x, y) ds.$$

由对弧长的曲线积分的定义可知, 它有以下性质.

**性质 1** 设  $\alpha, \beta$  为常数, 则

$$\int_L [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)] ds = \alpha \int_L f(x, y) ds + \beta \int_L g(x, y) ds.$$

**性质 2** 若积分弧段  $L$  可分成两段光滑曲线弧  $L_1$  和  $L_2$ , 则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{L_1} f(x, y) ds + \int_{L_2} f(x, y) ds.$$

**性质 3** 设在  $L$  上  $f(x, y) \leq g(x, y)$ , 则

$$\int_L f(x, y) ds \leq \int_L g(x, y) ds.$$

特别地, 有

$$\left| \int_L f(x, y) ds \right| \leq \int_L |f(x, y)| ds.$$

## 二、对弧长的曲线积分的计算法

**定理** 设  $f(x, y)$  在曲线弧  $L$  上有定义且连续,  $L$  的参数方程为

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta),$$

其中  $\varphi(t), \psi(t)$  在  $[\alpha, \beta]$  上具有一阶连续导数, 且  $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) \neq 0$ , 则曲线积分  $\int_L f(x, y) ds$  存在, 且

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \quad (\alpha < \beta). \quad (1)$$

**证** 假定当参数  $t$  由  $\alpha$  变至  $\beta$  时,  $L$  上的点  $M(x, y)$  依点  $A$  至点  $B$  的方向描出曲线  $L$ . 在  $L$  上取一列点

$$A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, M_n = B,$$

它们对应于一列单调增加的参数值

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta.$$

根据对弧长的曲线积分的定义, 有

$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i.$$

设点  $(\xi_i, \eta_i)$  对应于参数值  $\tau_i$ , 即  $\xi_i = \varphi(\tau_i), \eta_i = \psi(\tau_i)$ , 这里  $t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$ . 由于

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt,$$

应用积分中值定理, 有

$$\Delta s_i = \sqrt{\varphi'^2(\tau'_i) + \psi'^2(\tau'_i)} \Delta t_i,$$

其中  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}, t_{i-1} \leq \tau'_i \leq t_i$ . 于是

$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f[\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)] \sqrt{\varphi'^2(\tau'_i) + \psi'^2(\tau'_i)} \Delta t_i.$$

由于函数  $\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$  在闭区间  $[\alpha, \beta]$  上连续, 我们可以把上式中的  $\tau'_i$  换成  $\tau_i$ <sup>①</sup>, 从而

$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f[\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)] \sqrt{\varphi'^2(\tau_i) + \psi'^2(\tau_i)} \Delta t_i.$$

上式右端的和的极限就是函数  $f[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$  在区间  $[\alpha, \beta]$  上的定积分, 由于这个函数在  $[\alpha, \beta]$  上连续, 所以这个定积分是存在的, 因此上式左端的曲线积分  $\int_L f(x, y) ds$  也存在, 并且有

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \quad (\alpha < \beta). \quad (1)$$

公式(1)表明, 计算对弧长的曲线积分  $\int_L f(x, y) ds$  时, 只要把  $x, y, ds$  依

次换为  $\varphi(t), \psi(t), \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$ , 然后从  $\alpha$  到  $\beta$  作定积分就行了, 这里必须注意, 定积分的下限  $\alpha$  一定要小于上限  $\beta$ . 这是因为, 从上述推导中可以看出, 由于小弧段的长度  $\Delta s_i$  总是正的, 从而  $\Delta t_i > 0$ , 所以定积分的下限  $\alpha$  一定小于上限  $\beta$ .

如果曲线  $L$  由方程

$$y = \psi(x) \quad (x_0 \leqslant x \leqslant X)$$

给出, 那么可以把这种情形看做是特殊的参数方程

$$x = t, y = \psi(t) \quad (x_0 \leqslant t \leqslant X)$$

的情形, 从而由公式(1)得出

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{x_0}^X f[x, \psi(x)] \sqrt{1 + \psi'^2(x)} dx \quad (x_0 < X). \quad (2)$$

类似地, 如果曲线  $L$  由方程

$$x = \varphi(y) \quad (y_0 \leqslant y \leqslant Y)$$

给出, 则有

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{y_0}^Y f[\varphi(y), y] \sqrt{1 + \varphi'^2(y)} dy \quad (y_0 < Y). \quad (3)$$

公式(1)可推广到空间曲线弧  $\Gamma$  由参数方程

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \omega(t) \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

给出的情形, 这时有

$$\int_L f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t)} dt$$

① 它的证明要用到函数  $\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$  在闭区间  $[\alpha, \beta]$  上的一致连续性, 这里从略.

$$(\alpha < \beta). \quad (4)$$

**例 1** 计算  $\int_L \sqrt{y} ds$ , 其中  $L$  是抛物线  $y = x^2$  上点  $O(0,0)$  与点  $B(1,1)$  之间的一段弧(图 11-2).

解 由于  $L$  由方程

$$y = x^2 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

给出,因此

$$\begin{aligned}\int_L \sqrt{y} ds &= \int_0^1 \sqrt{x^2} \sqrt{1 + (x^2)^2} dx \\ &= \int_0^1 x \sqrt{1 + 4x^2} dx \\ &= \left[ \frac{1}{12} (1 + 4x^2)^{3/2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1).\end{aligned}$$

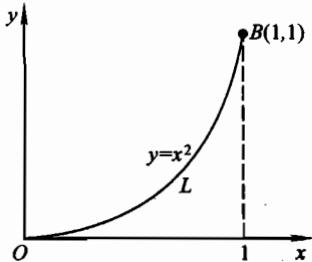


图 11-2

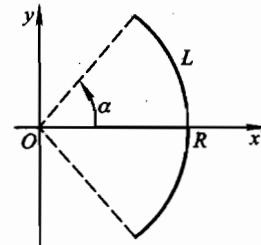


图 11-3

**例 2** 计算半径为  $R$ 、中心角为  $2\alpha$  的圆弧  $L$  对于它的对称轴的转动惯量  $I$  (设线密度  $\mu = 1$ ).

解 取坐标系如图 11-3 所示,则

$$I = \int_L y^2 ds.$$

为了便于计算,利用  $L$  的参数方程

$$x = R \cos \theta, y = R \sin \theta \quad (-\alpha \leq \theta \leq \alpha).$$

于是

$$\begin{aligned}I &= \int_L y^2 ds = \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \sin^2 \theta \sqrt{(-R \sin \theta)^2 + (R \cos \theta)^2} d\theta \\ &= R^3 \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2 \theta d\theta = \frac{R^3}{2} \left[ \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_{-\alpha}^{\alpha} \\ &= \frac{R^3}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha) = R^3 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha).\end{aligned}$$

**例 3** 计算曲线积分  $\int_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2) ds$ , 其中  $\Gamma$  为螺旋线  $x = a \cos t, y =$

$a \sin t, z = kt$  上相应于  $t$  从 0 到  $2\pi$  的一段弧.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \int_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2) ds \\
 &= \int_0^{2\pi} [(a \cos t)^2 + (a \sin t)^2 + (kt)^2] \cdot \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + k^2} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (a^2 + k^2 t^2) \sqrt{a^2 + k^2} dt \\
 &= \sqrt{a^2 + k^2} \left[ a^2 t + \frac{k^2}{3} t^3 \right]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{2}{3} \pi \sqrt{a^2 + k^2} (3a^2 + 4\pi^2 k^2).
 \end{aligned}$$

### 习题 11-1

1. 设在  $xOy$  面内有一分布着质量的曲线弧  $L$ , 在点  $(x, y)$  处它的线密度为  $\mu(x, y)$ . 用对弧长的曲线积分分别表达:

(1) 这曲线弧对  $x$  轴、对  $y$  轴的转动惯量  $I_x, I_y$ ;

(2) 这曲线弧的质心坐标  $\bar{x}, \bar{y}$ .

2. 利用对弧长的曲线积分的定义证明性质 3.

3. 计算下列对弧长的曲线积分:

(1)  $\oint_L (x^2 + y^2)^n ds$ , 其中  $L$  为圆周  $x = a \cos t, y = a \sin t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ );

(2)  $\int_L (x + y) ds$ , 其中  $L$  为连接  $(1, 0)$  及  $(0, 1)$  两点的直线段;

(3)  $\oint_L x ds$ , 其中  $L$  为由直线  $y = x$  及抛物线  $y = x^2$  所围成的区域的整个边界;

(4)  $\oint_L e^{\sqrt{x^2 + y^2}} ds$ , 其中  $L$  为圆周  $x^2 + y^2 = a^2$ , 直线  $y = x$  及  $x$  轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界;

(5)  $\int_{\Gamma} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} ds$ , 其中  $\Gamma$  为曲线  $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t$  上相应于  $t$  从 0 变到 2 的这段弧;

(6)  $\int_{\Gamma} x^2 y z ds$ , 其中  $\Gamma$  为折线  $ABCD$ , 这里  $A, B, C, D$  依次为点  $(0, 0, 0), (0, 0, 2), (1, 0, 2), (1, 3, 2)$ ;

(7)  $\int_L y^2 ds$ , 其中  $L$  为摆线的一拱  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ );

(8)  $\int_L (x^2 + y^2) ds$ , 其中  $L$  为曲线  $x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t)$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ).

4. 求半径为  $a$ 、中心角为  $2\varphi$  的均匀圆弧(线密度  $\mu = 1$ )的质心.

5. 设螺旋形弹簧一圈的方程为  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = kt$ , 其中  $0 \leq t \leq 2\pi$ , 它的线密

度  $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ . 求:

- (1) 它关于  $z$  轴的转动惯量  $I_z$ ;
- (2) 它的质心.

## 第二节 对坐标的曲线积分

### 一、对坐标的曲线积分的概念与性质

变力沿曲线所作的功 设一个质点在  $xOy$  面内受到力

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$$

的作用, 从点  $A$  沿光滑曲线弧  $L$  移动到点  $B$ , 其中函数  $P(x, y), Q(x, y)$  在  $L$  上连续. 要计算在上述移动过程中变力  $\mathbf{F}(x, y)$  所作的功(图 11-4).

我们知道, 如果力  $\mathbf{F}$  是恒力, 且质点从  $A$  沿直线移动到  $B$ , 那么恒力  $\mathbf{F}$  所作的功  $W$  等于向量  $\mathbf{F}$  与向量  $\overrightarrow{AB}$  的数量积, 即

$$W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

现在  $\mathbf{F}(x, y)$  是变力, 且质点沿曲线  $L$  移动, 功  $W$  不能直接按以上公式计算. 然而第一节中用来处理曲线形构件质量问题的方法, 原则上也适用于目前的问题.

先用曲线弧  $L$  上的点  $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \dots, M_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$  把  $L$  分成  $n$  个小弧段, 取其中一个有向小弧段  $\widehat{M_{i-1}M_i}$  来分析: 由于  $\widehat{M_{i-1}M_i}$  光滑而且很短, 可以用有向线段

$$\overrightarrow{M_{i-1}M_i} = (\Delta x_i)\mathbf{i} + (\Delta y_i)\mathbf{j}$$

来近似代替它, 其中  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ . 又由于函数  $P(x, y), Q(x, y)$  在  $L$  上连续, 可以用  $\widehat{M_{i-1}M_i}$  上任意取定的一点  $(\xi_i, \eta_i)$  处的力

$$\mathbf{F}(\xi_i, \eta_i) = P(\xi_i, \eta_i)\mathbf{i} + Q(\xi_i, \eta_i)\mathbf{j}$$

来近似代替这小弧段上各点处的力. 这样, 变力  $\mathbf{F}(x, y)$  沿有向小弧段  $\widehat{M_{i-1}M_i}$  所作的功  $\Delta W_i$  可以认为近似地等于恒力  $\mathbf{F}(\xi_i, \eta_i)$  沿  $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$  所作的功:

$$\Delta W_i \approx \mathbf{F}(\xi_i, \eta_i) \cdot \overrightarrow{M_{i-1}M_i},$$

即

$$\Delta W_i \approx P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i.$$

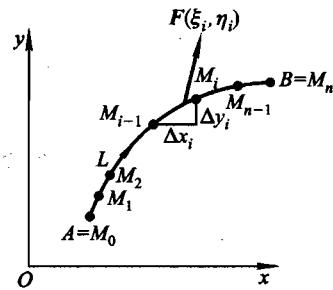


图 11-4

于是  $W = \sum_{i=1}^n \Delta W_i \approx \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i].$

用  $\lambda$  表示  $n$  个小弧段的最大长度, 令  $\lambda \rightarrow 0$  取上述和的极限, 所得到的极限自然地被认作变力  $F$  沿有向曲线弧所作的功, 即

$$W = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i].$$

这种和的极限在研究其他问题时也会遇到. 现在引进下面的定义.

**定义** 设  $L$  为  $xOy$  面内从点  $A$  到点  $B$  的一条有向光滑曲线弧, 函数  $P(x, y), Q(x, y)$  在  $L$  上有界. 在  $L$  上沿  $L$  的方向任意插入一点列  $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \dots, M_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$ , 把  $L$  分成  $n$  个有向小弧段

$$\widehat{M_{i-1} M_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n; M_0 = A, M_n = B).$$

设  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ , 点  $(\xi_i, \eta_i)$  为  $\widehat{M_{i-1} M_i}$  上任意取定的点. 如果当各小弧段长度的最大值  $\lambda \rightarrow 0$  时,  $\sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i$  的极限总存在, 则称此极限为函数  $P(x, y)$  在有向曲线弧  $L$  上对坐标  $x$  的曲线积分, 记作  $\int_L P(x, y) dx$ .

类似地, 如果  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i$  总存在, 则称此极限为函数  $Q(x, y)$  在有向曲线弧  $L$  上对坐标  $y$  的曲线积分, 记作  $\int_L Q(x, y) dy$ . 即

$$\int_L P(x, y) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i,$$

$$\int_L Q(x, y) dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i,$$

其中  $P(x, y), Q(x, y)$  叫做被积函数,  $L$  叫做积分弧段.

以上两个积分也称为第二类曲线积分.

在第二目中我们将看到, 当  $P(x, y), Q(x, y)$  在有向光滑曲线弧  $L$  上连续时, 对坐标的曲线积分  $\int_L P(x, y) dx$  及  $\int_L Q(x, y) dy$  都存在. 以后我们总假定  $P(x, y), Q(x, y)$  在  $L$  上连续.

上述定义可以类似地推广到积分弧段为空间有向曲线弧  $\Gamma$  的情形:

$$\int_{\Gamma} P(x, y, z) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i,$$

$$\int_{\Gamma} Q(x, y, z) dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta y_i,$$

$$\int_R R(x, y, z) dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta z_i.$$

应用上经常出现的是

$$\int_L P(x, y) dx + \int_L Q(x, y) dy$$

这种合并起来的形式,为简便起见,把上式写成

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

也可写成向量形式

$$\int_L \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{r},$$

其中  $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$  为向量值函数,  $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$ .

例如,本目开始时讨论过的变力  $\mathbf{F}$  所作的功可以表达成

$$W = \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

或

$$W = \int_L \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{r}.$$

类似地,把

$$\int_R P(x, y, z) dx + \int_R Q(x, y, z) dy + \int_R R(x, y, z) dz$$

简写成

$$\int_R P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz,$$

或

$$\int_R \mathbf{A}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r},$$

其中  $\mathbf{A}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ ,  $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ .

如果  $L$  (或  $\Gamma$ )是分段光滑的,我们规定函数在有向曲线弧  $L$  (或  $\Gamma$ )上对坐标的曲线积分等于在光滑的各段上对坐标的曲线积分之和.

根据上述曲线积分的定义,可以导出对坐标的曲线积分的一些性质.为了表达简便起见,我们用向量形式表达,并假定其中的向量值函数在曲线  $L$  上连续<sup>①</sup>.

**性质 1** 设  $\alpha, \beta$  为常数,则

① 向量值函数  $\mathbf{F}(x, y)$  在曲线  $L$  上连续是指:对  $L$  上任意点  $M_0(x_0, y_0)$ ,当  $L$  上的动点  $M(x, y)$  沿  $L$  趋于  $M_0$  时,有  $|\mathbf{F}(x, y) - \mathbf{F}(x_0, y_0)| \rightarrow 0$ .若  $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ ,则  $\mathbf{F}(x, y)$  在  $L$  上连续等价于  $P(x, y), Q(x, y)$  均在  $L$  上连续.

$$\begin{aligned} & \int_L [\alpha \mathbf{F}_1(x, y) + \beta \mathbf{F}_2(x, y)] \cdot d\mathbf{r} \\ &= \alpha \int_L \mathbf{F}_1(x, y) \cdot d\mathbf{r} + \beta \int_L \mathbf{F}_2(x, y) \cdot d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

**性质 2** 若有向曲线弧  $L$  可分成两段光滑的有向曲线弧  $L_1$  和  $L_2$ , 则

$$\int_L \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{r} = \int_{L_1} \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{r} + \int_{L_2} \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{r}.$$

**性质 3** 设  $L$  是有向光滑曲线弧,  $L^-$  是  $L$  的反向曲线弧, 则

$$\int_{L^-} \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{r} = - \int_L \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{r}.$$

**证** 把  $L$  分成  $n$  小段, 相应的  $L^-$  也分成  $n$  小段. 对于每一个小弧段来说, 当曲线弧的方向改变时, 有向弧段在坐标轴上的投影, 其绝对值不变, 但要改变符号, 因此性质 3 成立.

性质 3 表示, 当积分弧段的方向改变时, 对坐标的曲线积分要改变符号. 因此关于对坐标的曲线积分, 我们必须注意积分弧段的方向.

这一性质是对坐标的曲线积分所特有的, 对弧长的曲线积分不具有这一性质. 而对弧长的曲线积分所具有的性质 3, 对坐标的曲线积分也不具有类似的性质.

## 二、对坐标的曲线积分的计算法

**定理** 设  $P(x, y), Q(x, y)$  在有向曲线弧  $L$  上有定义且连续,  $L$  的参数方程为

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

当参数  $t$  单调地由  $\alpha$  变到  $\beta$  时, 点  $M(x, y)$  从  $L$  的起点  $A$  沿  $L$  运动到终点  $B$ ,  $\varphi(t), \psi(t)$  在以  $\alpha$  及  $\beta$  为端点的闭区间上具有一阶连续导数, 且  $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) \neq 0$ , 则曲线积分  $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  存在, 且

$$\begin{aligned} & \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \{P[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)]\psi'(t)\} dt. \end{aligned} \quad (1)$$

**证** 在  $L$  上取一列点

$$A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, M_n = B,$$

它们对应于一列单调变化的参数值

$$\alpha = t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n = \beta.$$

根据对坐标的曲线积分的定义,有

$$\int_L P(x, y) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i.$$

设点  $(\xi_i, \eta_i)$  对应于参数值  $\tau_i$ , 即  $\xi_i = \varphi(\tau_i)$ ,  $\eta_i = \psi(\tau_i)$ , 这里  $\tau_i$  在  $t_{i-1}$  与  $t_i$  之间. 由于

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}),$$

应用微分中值定理, 有

$$\Delta x_i = \varphi'(\tau'_i) \Delta t_i,$$

其中  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ ,  $\tau'_i$  在  $t_{i-1}$  与  $t_i$  之间. 于是

$$\int_L P(x, y) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P[\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)] \varphi'(\tau'_i) \Delta t_i.$$

因为函数  $\varphi'(t)$  在闭区间  $[\alpha, \beta]$  (或  $[\beta, \alpha]$ ) 上连续, 我们可以把上式中的  $\tau'_i$  换成  $\tau_i$ <sup>①</sup>, 从而

$$\int_L P(x, y) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P[\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)] \varphi'(\tau_i) \Delta t_i.$$

上式右端的和的极限就是定积分  $\int_a^\beta P[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) dt$ , 由于函数  $P[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t)$  连续, 这个定积分是存在的, 因此上式左端的曲线积分  $\int_L P(x, y) dx$  也存在, 并且有

$$\int_L P(x, y) dx = \int_a^\beta P[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) dt.$$

同理可证

$$\int_L Q(x, y) dy = \int_a^\beta Q[\varphi(t), \psi(t)] \psi'(t) dt,$$

把以上两式相加, 得

$$\begin{aligned} & \int_L P(x, y) dx + \int_L Q(x, y) dy \\ &= \int_a^\beta \{P[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)] \psi'(t)\} dt, \end{aligned}$$

这里下限  $a$  对应于  $L$  的起点, 上限  $\beta$  对应于  $L$  的终点.

公式(1)表明, 计算对坐标的曲线积分

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

① 它的证明要用到函数  $\varphi'(t)$  在闭区间上的一致连续性, 这里从略.

时,只要把  $x, y, dx, dy$  依次换为  $\varphi(t), \psi(t), \varphi'(t)dt, \psi'(t)dt$ , 然后从  $L$  的起点所对应的参数值  $\alpha$  到  $L$  的终点所对应的参数值  $\beta$  作定积分就行了, 这里必须注意, 下限  $\alpha$  对应于  $L$  的起点, 上限  $\beta$  对应于  $L$  的终点,  $\alpha$  不一定小于  $\beta$ .

如果  $L$  由方程  $y = \psi(x)$  或  $x = \varphi(y)$  给出, 可以看做参数方程的特殊情形. 例如, 当  $L$  由  $y = \psi(x)$  给出时, 公式(1)成为

$$\begin{aligned} & \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy \\ &= \int_a^b \{P[x, \psi(x)] + Q[x, \psi(x)]\psi'(x)\}dx, \end{aligned}$$

这里下限  $a$  对应  $L$  的起点, 上限  $b$  对应  $L$  的终点.

公式(1)可推广到空间曲线  $\Gamma$  由参数方程

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \omega(t)$$

给出的情形, 这样便得到

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \\ &= \int_a^b \{P[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)]\varphi'(t) + \\ & \quad Q[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)]\psi'(t) + R[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)]\omega'(t)\}dt, \end{aligned}$$

这里下限  $a$  对应  $\Gamma$  的起点, 上限  $b$  对应  $\Gamma$  的终点.

**例 1** 计算  $\int_L xydx$ , 其中  $L$  为抛物线  $y^2 = x$  上从点  $A(1, -1)$  到点  $B(1, 1)$  的一段弧(图 11-5).

**解法一** 将所给积分化为对  $x$  的定积分来计算. 由于  $y = \pm\sqrt{x}$  不是单值函数, 所以要把  $L$  分为  $AO$  和  $OB$  两部分. 在  $AO$  上,  $y = -\sqrt{x}$ ,  $x$  从 1 变到 0; 在  $OB$  上,  $y = \sqrt{x}$ ,  $x$  从 0 变到 1. 因此

$$\begin{aligned} \int_L xydx &= \int_{AO} xydx + \int_{OB} xydx \\ &= \int_1^0 x(-\sqrt{x})dx + \int_0^1 x\sqrt{x}dx \\ &= 2 \int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

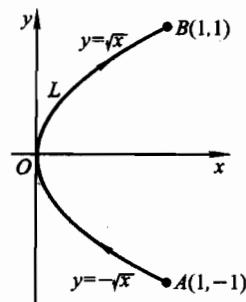


图 11-5

**解法二** 将所给积分化为对  $y$  的定积分来计算, 现在  $x = y^2$ ,  $y$  从 -1 变到 1. 因此

$$\int_L xydx = \int_{-1}^1 y^2 y(y^2)'dy = 2 \int_{-1}^1 y^4 dy = 2 \left[ \frac{y^5}{5} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{5}.$$

例 2 计算  $\int_L y^2 dx$  其中  $L$  为(图 11-6):

- (1) 半径为  $a$ 、圆心为原点、按逆时针方向绕行的上半圆周;
- (2) 从点  $A(a, 0)$  沿  $x$  轴到点  $B(-a, 0)$  的直线段.

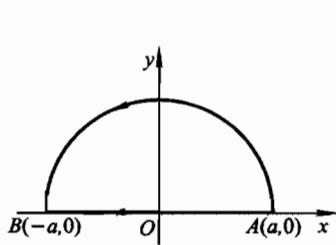


图 11-6

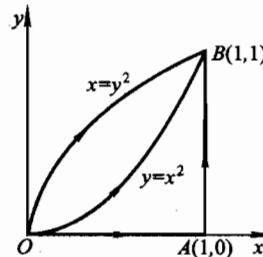


图 11-7

解 (1)  $L$  是参数方程

$$x = a \cos \theta, \quad y = a \sin \theta$$

当参数  $\theta$  从 0 变到  $\pi$  的曲线弧. 因此

$$\begin{aligned} \int_L y^2 dx &= \int_0^\pi a^2 \sin^2 \theta (-a \sin \theta) d\theta = a^3 \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) d(\cos \theta) \\ &= a^3 \left[ \cos \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^\pi = -\frac{4}{3} a^3. \end{aligned}$$

(2)  $L$  的方程为  $y=0$ ,  $x$  从  $a$  变到  $-a$ . 所以

$$\int_L y^2 dx = \int_a^{-a} 0 dx = 0.$$

从例 2 看出, 虽然两个曲线积分的被积函数相同, 起点和终点也相同, 但沿不同路径得出的积分值并不相等.

例 3 计算  $\int_L 2xy dx + x^2 dy$ , 其中  $L$  为(图11-7):

- (1) 抛物线  $y=x^2$  上从  $O(0,0)$  到  $B(1,1)$  的一段弧;
- (2) 抛物线  $x=y^2$  上从  $O(0,0)$  到  $B(1,1)$  的一段弧;
- (3) 有向折线  $OAB$ , 这里  $O, A, B$  依次是点  $(0,0), (1,0), (1,1)$ .

解 (1) 化为对  $x$  的定积分.  $L: y=x^2$ ,  $x$  从 0 变到 1. 所以

$$\int_L 2xy dx + x^2 dy = \int_0^1 (2x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x) dx = 4 \int_0^1 x^3 dx = 1.$$

(2) 化为对  $y$  的定积分.  $L: x=y^2$ ,  $y$  从 0 变到 1. 所以

$$\int_L 2xy dx + x^2 dy = \int_0^1 (2y^2 \cdot y \cdot 2y + y^4) dy = 5 \int_0^1 y^4 dy = 1.$$

$$(3) \int_L 2xydx + x^2 dy = \int_{OA} 2xydx + x^2 dy + \int_{AB} 2xydx + x^2 dy,$$

在  $OA$  上,  $y=0$ ,  $x$  从 0 变到 1, 所以

$$\int_{OA} 2xydx + x^2 dy = \int_0^1 (2x \cdot 0 + x^2 \cdot 0) dx = 0.$$

在  $AB$  上,  $x=1$ ,  $y$  从 0 变到 1, 所以

$$\int_{AB} 2xydx + x^2 dy = \int_0^1 (2y \cdot 0 + 1) dy = 1.$$

从而

$$\int_L 2xydx + x^2 dy = 0 + 1 = 1.$$

从例 3 可以看出, 虽然沿不同路径, 曲线积分的值可以相等.

**例 4** 计算  $\int_{\Gamma} x^3 dx + 3zy^2 dy - x^2 y dz$ , 其中  $\Gamma$  是从点  $A(3, 2, 1)$  到点  $B(0, 0, 0)$  的直线段  $AB$ .

解 直线段  $AB$  的方程是

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1},$$

化为参数方程得

$$x = 3t, y = 2t, z = t, t \text{ 从 } 1 \text{ 变到 } 0.$$

所以

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} x^3 dx + 3zy^2 dy - x^2 y dz \\ &= \int_1^0 [(3t)^3 \cdot 3 + 3t(2t)^2 \cdot 2 - (3t)^2 \cdot 2t] dt \\ &= 87 \int_1^0 t^3 dt = -\frac{87}{4}. \end{aligned}$$

**例 5** 设一个质点在点  $M(x, y)$  处受到力  $F$  的作用,  $F$  的大小与点  $M$  到原点  $O$  的距离成正比,  $F$  的方向恒指向原点. 此质点由点  $A(a, 0)$  沿椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  按逆时针方向移动到点  $B(0, b)$ , 求力  $F$  所作的功  $W$ .

$$\text{解 } \overrightarrow{OM} = xi + yj, |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

由假设有  $F = -k(xi + yj)$ , 其中  $k > 0$  是比例常数. 于是

$$W = \int_{AB} F \cdot d\mathbf{r} = \int_{AB} -kx dx - ky dy = -k \int_{AB} x dx + y dy.$$

利用椭圆的参数方程  $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases}$  起点  $A$ 、终点  $B$  分别对应参数  $t = 0, \frac{\pi}{2}$ . 于是

$$W = -k \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-a^2 \cos t \sin t + b^2 \sin t \cos t) dt$$

$$= k(a^2 - b^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt = \frac{k}{2}(a^2 - b^2).$$

### 三、两类曲线积分之间的联系

设有向曲线弧  $L$  的起点为  $A$ , 终点为  $B$ . 曲线弧  $L$  由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

给出, 起点  $A$ 、终点  $B$  分别对应参数  $\alpha, \beta$ . 不妨设  $\alpha < \beta$  (若  $\alpha > \beta$ , 可令  $s = -t$ ,  $A, B$  对应  $s = -\alpha, s = -\beta$ , 就有  $(-\alpha) < (-\beta)$ ), 把下面的讨论对参数  $s$  进行即可), 并设函数  $\varphi(t), \psi(t)$  在闭区间  $[\alpha, \beta]$  上具有一阶连续导数, 且  $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) \neq 0$ , 又函数  $P(x, y), Q(x, y)$  在  $L$  上连续. 于是, 由对坐标的曲线积分计算公式(1)有

$$\begin{aligned} & \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \{P[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)]\psi'(t)\} dt. \end{aligned}$$

我们知道, 向量  $\tau = \varphi'(t)i + \psi'(t)j$  是曲线弧  $L$  在点  $M(\varphi(t), \psi(t))$  处的一个切向量, 它的指向与参数  $t$  的增长方向一致, 当  $\alpha < \beta$  时, 这个指向就是有向曲线弧  $L$  的方向. 以后, 我们称这种指向与有向曲线弧的方向一致的切向量为有向曲线弧的切向量. 于是, 有向曲线弧  $L$  的切向量为

$$\tau = \varphi'(t)i + \psi'(t)j,$$

它的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}}, \cos \beta = \frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}}.$$

由对弧长的曲线积分的计算公式可得

$$\begin{aligned} & \int_L [P(x, y)\cos \alpha + Q(x, y)\cos \beta] ds \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ P[\varphi(t), \psi(t)] \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}} + \right. \\ & \quad \left. Q[\varphi(t), \psi(t)] \frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}} \right\} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \{P[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)]\psi'(t)\} dt. \end{aligned}$$

由此可见, 平面曲线  $L$  上的两类曲线积分之间有如下联系:

$$\int_L P dx + Q dy = \int_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta) ds, \quad (2)$$

其中  $\alpha(x, y), \beta(x, y)$  为有向曲线弧  $L$  在点  $(x, y)$  处的切向量的方向角.

类似地可知, 空间曲线  $\Gamma$  上的两类曲线积分之间有如下联系:

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \int_{\Gamma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds, \quad (3)$$

其中  $\alpha(x, y, z), \beta(x, y, z), \gamma(x, y, z)$  为有向曲线弧  $\Gamma$  在点  $(x, y, z)$  处的切向量的方向角.

两类曲线积分之间的联系也可用向量的形式表达. 例如, 空间曲线  $\Gamma$  上的两类曲线积分之间的联系可写成如下形式:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \tau ds \quad (4)$$

或

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} \mathbf{A}_{\tau} ds, \quad (4')$$

其中  $\mathbf{A} = (P, Q, R), \tau = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  为有向曲线弧  $\Gamma$  在点  $(x, y, z)$  处的单位切向量,  $d\mathbf{r} = \tau ds = (dx, dy, dz)$ , 称为有向曲线元,  $\mathbf{A}_{\tau}$  为向量  $\mathbf{A}$  在向量  $\tau$  上的投影.

## 习题 11-2

1. 设  $L$  为  $xOy$  面内直线  $x=a$  上的一段, 证明:

$$\int_L P(x, y) dx = 0.$$

2. 设  $L$  为  $xOy$  面内  $x$  轴上从点  $(a, 0)$  到点  $(b, 0)$  的一段直线, 证明:

$$\int_L P(x, y) dx = \int_a^b P(x, 0) dx.$$

3. 计算下列对坐标的曲线积分:

(1)  $\int_L (x^2 - y^2) dx$ , 其中  $L$  是抛物线  $y=x^2$  上从点  $(0, 0)$  到点  $(2, 4)$  的一段弧;

(2)  $\oint_L xy dx$ , 其中  $L$  为圆周  $(x-a)^2 + y^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) 及  $x$  轴所围成的在第一象限内的区域的整个边界(按逆时针方向绕行);

(3)  $\int_L y dx + x dy$ , 其中  $L$  为圆周  $x=R \cos t, y=R \sin t$  上对应  $t$  从  $0$  到  $\frac{\pi}{2}$  的一段弧;

(4)  $\oint_L \frac{(x+y) dx - (x-y) dy}{x^2 + y^2}$ , 其中  $L$  为圆周  $x^2 + y^2 = a^2$  (按逆时针方向绕行);

(5)  $\int_{\Gamma} x^2 dx + z dy - y dz$ , 其中  $\Gamma$  为曲线  $x=k\theta, y=a \cos \theta, z=a \sin \theta$  上对应  $\theta$  从  $0$  到  $\pi$

的一段弧;

(6)  $\int_{\Gamma} x dx + y dy + (x+y-1) dz$ , 其中  $\Gamma$  是从点(1,1,1)到点(2,3,4)的一段直线;

(7)  $\oint_{\Gamma} dx - dy + y dz$ , 其中  $\Gamma$  为有向闭折线 ABCA, 这里的 A、B、C 依次为点(1,0,0)、(0,1,0)、(0,0,1);

(8)  $\int_L (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$ , 其中 L 是抛物线  $y = x^2$  上从点(-1,1)到点(1,1)的一段弧.

4. 计算  $\int_L (x+y) dx + (y-x) dy$ , 其中 L 是:

(1) 抛物线  $y^2 = x$  上从点(1,1)到点(4,2)的一段弧;

(2) 从点(1,1)到点(4,2)的直线段;

(3) 先沿直线从点(1,1)到点(1,2), 然后再沿直线到点(4,2)的折线;

(4) 曲线  $x = 2t^2 + t + 1, y = t^2 + 1$  上从点(1,1)到点(4,2)的一段弧.

5. 一力场由沿横轴正方向的恒力 F 所构成. 试求当一质量为 m 的质点沿圆周  $x^2 + y^2 = R^2$  按逆时针方向移过位于第一象限的那一段弧时场力所作的功.

6. 设 z 轴与重力的方向一致, 求质量为 m 的质点从位置  $(x_1, y_1, z_1)$  沿直线移到  $(x_2, y_2, z_2)$  时重力所作的功.

7. 把对坐标的曲线积分  $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$  化成对弧长的曲线积分, 其中 L 为:

(1) 在 xOy 面内沿直线从点(0,0)到点(1,1);

(2) 沿抛物线  $y = x^2$  从点(0,0)到点(1,1);

(3) 沿上半圆周  $x^2 + y^2 = 2x$  从点(0,0)到点(1,1).

8. 设  $\Gamma$  为曲线  $x = t, y = t^2, z = t^3$  上相应于 t 从 0 变到 1 的曲线弧. 把对坐标的曲线积分  $\int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz$  化成对弧长的曲线积分.

### 第三节 格林公式及其应用

#### 一、格林公式

在一元函数积分学中, 牛顿-莱布尼茨公式

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

表示:  $F'(x)$  在区间  $[a, b]$  上的积分可以通过它的原函数  $F(x)$  在这个区间端点上的值来表达.

下面要介绍的格林(Green)公式告诉我们, 在平面闭区域 D 上的二重积分可以通过沿闭区域 D 的边界曲线 L 上的曲线积分来表达.

现在先介绍平面单连通区域的概念. 设  $D$  为平面区域, 如果  $D$  内任一闭曲线所围的部分都属于  $D$ , 则称  $D$  为平面单连通区域, 否则称为复连通区域. 通俗地说, 平面单连通区域就是不含有“洞”(包括点“洞”)的区域, 复连通区域是含有“洞”(包括点“洞”)的区域. 例如, 平面上的圆形区域  $\{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ 、上半平面  $\{(x, y) | y > 0\}$  都是单连通区域, 圆环形区域  $\{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ 、 $\{(x, y) | 0 < x^2 + y^2 < 2\}$  都是复连通区域.

对平面区域  $D$  的边界曲线  $L$ , 我们规定  $L$  的正向如下: 当观察者沿  $L$  的这个方向行走时,  $D$  在他近处的那一部分总在他的左边. 例如,  $D$  是边界曲线  $L$  及  $l$  所围成的复连通区域(图 11-8), 作为  $D$  的正向边界,  $L$  的正向是逆时针方向, 而  $l$  的正向是顺时针方向.

**定理 1** 设闭区域  $D$  由分段光滑的曲线  $L$  围成, 函数  $P(x, y)$  及  $Q(x, y)$  在  $D$  上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy, \quad (1)$$

其中  $L$  是  $D$  的取正向的边界曲线.

公式(1)叫做格林公式.

**证** 先假设穿过区域  $D$  内部且平行坐标轴的直线与  $D$  的边界曲线  $L$  的交点恰好为两点, 即区域  $D$  既是  $X$  型又是  $Y$  型的情形.

图 11-9、图 11-10 所示的区域都属于这种情形. 例如, 图 11-9 所示的区域  $D$  显然是  $X$  型的, 事实上  $D$  又是  $Y$  型的. 若设有向曲线弧  $\widehat{FGAE}$  为  $L'_1: x = \psi_1(y)$ ,  $\widehat{EBCF}$  为  $L'_2: x = \psi_2(y)$ , 则  $D$  可表达成

$$D = \{(x, y) | \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\},$$

即  $D$  又是  $Y$  型的.

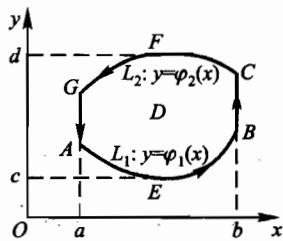


图 11-9

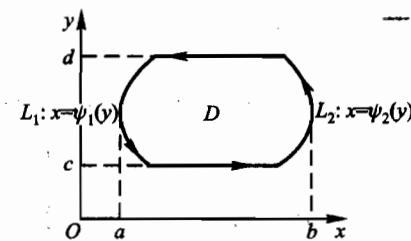


图 11-10

设  $D$  如图 11-9 所示, 于是  $D = \{(x, y) | \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\}$ .

因为  $\frac{\partial P}{\partial y}$  连续, 所以由二重积分的计算法有

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy \right\} dx \\ &= \int_a^b |P[x, \varphi_2(x)] - P[x, \varphi_1(x)]| dx. \end{aligned}$$

另一方面, 由对坐标的曲线积分的性质及计算法有

$$\begin{aligned} \oint_L P dx &= \int_{L_1} P dx + \int_{BC} P dx + \int_{L_2} P dx + \int_{CA} P dx \\ &= \int_{L_1} P dx + \int_{L_2} P dx = \int_a^b P[x, \varphi_1(x)] dx + \int_b^a P[x, \varphi_2(x)] dx \\ &= \int_a^b |P[x, \varphi_1(x)] - P[x, \varphi_2(x)]| dx, \end{aligned}$$

因此,

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_L P dx. \quad (2)$$

又由于  $D = \{(x, y) | \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\}$ , 故有

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_c^d \left[ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right] dy \\ &= \int_c^d |Q[\psi_2(y), y] - Q[\psi_1(y), y]| dy \\ &= \int_{L'_2} Q dy + \int_{L'_1} Q dy = \oint_L Q dy. \end{aligned} \quad (3)$$

由于对区域  $D$ , (2)、(3) 同时成立, 合并后即得公式(1). 对于如图 11-10 所示的区域  $D$ , 完全类似地可证(1)成立.

再考虑一般情形. 如果闭区域  $D$  不满足以上条件, 那么可以在  $D$  内引进一条或几条辅助曲线把  $D$  分成有限个部分闭区域, 使得每个部分闭区域都满足上述条件. 例如, 就图 11-11 所示的闭区域  $D$  来说, 它的边界曲线  $L$  为  $MNPM$ , 引进一条辅助线  $ABC$ , 把  $D$  分成  $D_1, D_2, D_3$  三部分. 应用公式(1)于每个部分, 得

$$\iint_{D_1} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{MCBAM} P dx + Q dy,$$

$$\iint_{D_2} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{ABPA} P dx + Q dy, \quad Q6$$

$$\iint_{D_3} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{BCNB} P dx + Q dy.$$

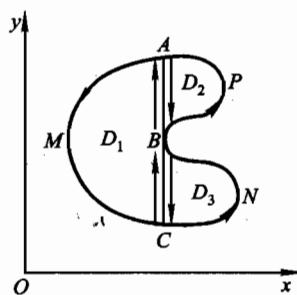


图 11-11

把这三个等式相加,注意到相加时沿辅助曲线来回的曲线积分相互抵消,便得

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy.$$

其中  $L$  的方向对  $D$  来说为正方向.一般的,公式(1)对于由分段光滑曲线围成的闭区域都成立.证毕.

注意,对于复连通区域  $D$ ,格林公式(1)右端应包括沿区域  $D$  的全部边界的曲线积分,且边界的 direction 对区域  $D$  来说都是正向.

下面说明格林公式的一个简单应用.

在公式(1)中取  $P = -y, Q = x$ ,即得

$$2 \iint_D dx dy = \oint_L x dy - y dx.$$

上式左端是闭区域  $D$  的面积  $A$  的两倍,因此有

$$A = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx. \quad (4)$$

例 1 求椭圆  $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$  所围成图形的面积  $A$ .

解 根据公式(4)有

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \cos^2 \theta + ab \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} d\theta = \pi ab. \end{aligned}$$

例 2 设  $L$  是任意一条分段光滑的闭曲线,证明

$$\oint_L 2xy dx + x^2 dy = 0.$$

证 令  $P = 2xy, Q = x^2$ ,则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2x = 0.$$

因此,由公式(1)有

$$\oint_L 2xy dx + x^2 dy = \pm \iint_D 0 dx dy = 0.$$

例 3 计算  $\iint_D e^{-y^2} dx dy$ ,其中  $D$  是以  $O(0,0), A(1,1), B(0,1)$  为顶点的三角形闭区域(图 11-12).

解 令  $P = 0, Q = x e^{-y^2}$ ,则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = e^{-y^2}.$$

因此,由公式(1)有

$$\iint_D e^{-y^2} dx dy = \int_{OA+AB+BO} xe^{-y^2} dy = \int_{OA} xe^{-y^2} dy = \int_0^1 xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2}(1 - e^{-1}).$$

例 4 计算  $\oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ , 其中  $L$  为一条无重点<sup>①</sup>、分段光滑且不经过原点的连续闭曲线,  $L$  的方向为逆时针方向.

解 令  $P = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ ,  $Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$ . 则当  $x^2 + y^2 \neq 0$  时, 有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

记  $L$  所围成的闭区域为  $D$ . 当  $(0,0) \notin D$  时, 由公式(1)便得

$$\oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0;$$

当  $(0,0) \in D$  时, 选取适当小的  $r > 0$ , 作位于  $D$  内的圆周  $l: x^2 + y^2 = r^2$ . 记  $L$  和  $l$  所围成的闭区域为  $D_1$  (图 11-13). 对复连通区域  $D_1$  应用格林公式, 得

$$\oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} - \oint_l \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0,$$

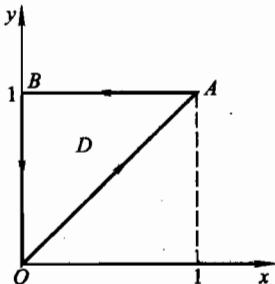


图 11-12

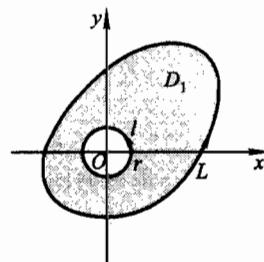


图 11-13

其中  $l$  的方向取逆时针方向. 于是

$$\oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \oint_l \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}{r^2} d\theta = 2\pi.$$

## 二、平面上曲线积分与路径无关的条件

在物理、力学中要研究所谓势场, 就是要研究场力所作的功与路径无关的情形. 在什么条件下场力所作的功与路径无关? 这个问题在数学上就是要研究曲

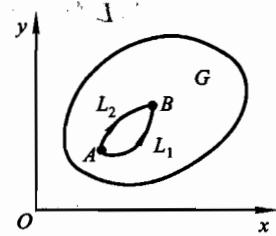
<sup>①</sup> 对于连续曲线  $L: x = \varphi(t), y = \psi(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , 如果除了  $t = a, t = b$  外, 当  $t_1 \neq t_2$  时,  $(\varphi(t_1), \psi(t_1))$  与  $(\varphi(t_2), \psi(t_2))$  总是相异的, 则称  $L$  是无重点的曲线.

线积分与路径无关的条件.为了研究这个问题,先要明确什么叫做曲线积分  
 $\int_L Pdx + Qdy$  与路径无关.

设  $G$  是一个区域, $P(x,y)$  以及  $Q(x,y)$  在区域  $G$  内具有一阶连续偏导数.如果对于  $G$  内任意指定的两个点  $A, B$  以及  $G$  内从点  $A$  到点  $B$  的任意两条曲线  $L_1, L_2$  (图 11-14), 等式

$$\int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$$

恒成立,就说曲线积分  $\int_L Pdx + Qdy$  在  $G$  内与路径无



关,否则便说与路径有关.

图 11-14

在以上叙述中注意到,如果曲线积分与路径无关,那么

$$\int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy.$$

由于

$$\int_{L_2} Pdx + Qdy = - \int_{L_2^-} Pdx + Qdy,$$

所以  $\int_{L_1} Pdx + Qdy + \int_{L_2^-} Pdx + Qdy = 0$ ,

从而  $\oint_{L_1 + L_2^-} Pdx + Qdy = 0$ ,

这里  $L_1 + L_2^-$  是一条有向闭曲线.因此,在区域  $G$  内由曲线积分与路径无关可推得在  $G$  内沿闭曲线的曲线积分为零.反过来,如果在区域  $G$  内沿任意闭曲线的曲线积分为零,也可推得在  $G$  内曲线积分与路径无关.由此得出结论:曲线积分  $\int_L Pdx + Qdy$  在  $G$  内与路径无关相当于沿  $G$  内任意闭曲线  $C$  的曲线积分  $\oint_C Pdx + Qdy$  等于零.

**定理 2** 设区域  $G$  是一个单连通域,函数  $P(x,y), Q(x,y)$  在  $G$  内具有一阶连续偏导数,则曲线积分  $\int_L Pdx + Qdy$  在  $G$  内与路径无关(或沿  $G$  内任意闭曲线的曲线积分为零)的充分必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (5)$$

在  $G$  内恒成立.

**证** 先证条件(5)是充分的.在  $G$  内任取一条闭曲线  $C$ ,要证当条件(5)成立时有  $\oint_C Pdx + Qdy = 0$ .因为  $G$  是单连通的,所以闭曲线  $C$  所围成的闭区域

$D$  全部在  $G$  内, 于是(5)式在  $D$  上恒成立. 应用格林公式, 有

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C P dx + Q dy.$$

上式左端的二重积分等于零 (因为被积函数  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$  在  $D$  上恒为零), 从而右端的曲线积分也等于零.

再证条件(5)是必要的. 现在要证的是: 如果沿  $G$  内任意闭曲线的曲线积分为零, 那么(5)式在  $G$  内恒成立. 用反证法来证. 假设上述论断不成立, 那么  $G$  内至少有一点  $M_0$ , 使

$$\left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)_{M_0} \neq 0.$$

不妨假定

$$\left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)_{M_0} = \eta > 0.$$

由于  $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$  在  $G$  内连续, 可以在  $G$  内取得一个以  $M_0$  为圆心、半径足够小的圆形闭区域  $K$ , 使得在  $K$  上恒有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \geq \frac{\eta}{2}.$$

于是由格林公式及二重积分的性质就有

$$\oint_K P dx + Q dy = \iint_K \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \geq \frac{\eta}{2} \cdot \sigma,$$

这里  $\gamma$  是  $K$  的正向边界曲线,  $\sigma$  是  $K$  的面积. 因为  $\eta > 0, \sigma > 0$ , 从而

$$\oint_\gamma P dx + Q dy > 0.$$

这结果与沿  $G$  内任意闭曲线的曲线积分为零的假定相矛盾, 可见  $G$  内使(5)式不成立的点不可能存在, 即(5)式在  $G$  内处处成立. 证毕.

在第二节第二目例 3 中我们看到, 起点与终点相同的三个曲线积分  $\int_L 2xy dx + x^2 dy$  相等. 由定理 2 来看, 这不是偶然的, 因为这里  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 2x$

在整个  $xOy$  面内恒成立, 而整个  $xOy$  面是单连通域, 因此曲线积分  $\int_L 2xy dx + x^2 dy$  与路径无关.

在定理 2 中, 要求区域  $G$  是单连通区域, 且函数  $P(x, y), Q(x, y)$  在  $G$  内具有一阶连续偏导数. 如果这两个条件之一不能满足, 那么定理的结论不能保证成立. 例如, 在例 4 中我们已经看到, 当  $L$  所围成的区域含有原点时, 虽然除去原点外, 恒有  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ , 但沿闭曲线的积分  $\oint_L P dx + Q dy \neq 0$ , 其原因在于区域

内含有破坏函数  $P, Q$  及  $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$  连续性条件的点  $O$ , 这种点通常称为奇点.

### 三、二元函数的全微分求积

现在要讨论: 函数  $P(x, y), Q(x, y)$  满足什么条件时, 表达式  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  才是某个二元函数  $u(x, y)$  的全微分; 当这样的二元函数存在时把它求出来.

**定理 3** 设区域  $G$  是一个单连通域, 函数  $P(x, y), Q(x, y)$  在  $G$  内具有一阶连续偏导数, 则  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  在  $G$  内为某一函数  $u(x, y)$  的全微分的充分必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (5)$$

在  $G$  内恒成立.

**证** 先证必要性. 假设存在着某一函数  $u(x, y)$ , 使得

$$du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

则必有  $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y).$

从而  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$

由于  $P, Q$  具有一阶连续偏导数, 所以  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$  连续, 因此  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ , 即

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ . 这就证明了条件(5)是必要的.

再证充分性. 设已知条件(5)在  $G$  内恒成立, 则由定理 2 可知, 起点为  $M_0(x_0, y_0)$ , 终点为  $M(x, y)$  的曲线积分在区域  $G$  内与路径无关, 于是可把这个曲线积分写作

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

当起点  $M_0(x_0, y_0)$  固定时, 这个积分的值取决于终点  $M(x, y)$ , 因此, 它是  $x, y$  的函数, 把这函数记作  $u(x, y)$ , 即

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \text{ ①}. \quad (6)$$

下面来证明这函数  $u(x, y)$  的全微分就是  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ . 因为

① 为区别函数的自变量与积分变量, 可记

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(s, t)ds + Q(s, t)dt.$$

$P(x, y)$ 、 $Q(x, y)$ 都是连续的,因此只要证明

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y).$$

按偏导数的定义,有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x}.$$

由(6)式,得

$$u(x + \Delta x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x + \Delta x, y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

由于这里的曲线积分与路径无关,可以取先从  $M_0$  到  $M$ ,然后沿平行于  $x$  轴的直线段从  $M$  到  $N$  作为上式右端曲线积分的路径(图 11-15). 这样就有

$$u(x + \Delta x, y) = u(x, y) + \int_{(x, y)}^{(x + \Delta x, y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

从而

$$u(x + \Delta x, y) - u(x, y) = \int_{(x, y)}^{(x + \Delta x, y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

因为直线段  $MN$  的方程为  $y = \text{常数}$ ,按对坐标的曲线积分的计算法,上式成为

$$u(x + \Delta x, y) - u(x, y) = \int_x^{x + \Delta x} P(x, y) dx.$$

应用定积分中值定理,得

$$u(x + \Delta x, y) - u(x, y) = P(x + \theta \Delta x, y) \Delta x \quad (0 \leq \theta \leq 1).$$

上式两边除以  $\Delta x$ ,并令  $\Delta x \rightarrow 0$  取极限. 由于  $P(x, y)$  的偏导数在  $G$  内连续, $P(x, y)$  本身也一定连续,于是得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y).$$

同理可证

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y).$$

这就证明了条件(5)是充分的. 证毕.

由定理 2 及定理 3,立即可得如下推论.

**推论** 设区域  $G$  是一个单连通域,函数  $P(x, y)$ 、 $Q(x, y)$  在  $G$  内具有一阶连续偏导数,则曲线积分  $\int_L P dx + Q dy$  在  $G$  内与路径无关的充分必要条件是:在  $G$  内存在函数  $u(x, y)$ ,使  $du = P dx + Q dy$ .

根据上述定理,如果函数  $P(x, y)$ 、 $Q(x, y)$  在单连通域  $G$  内具有一阶连续

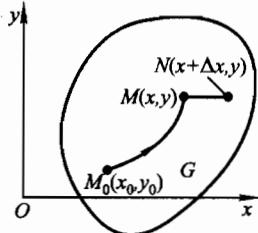


图 11-15

偏导数,且满足条件(5),那么  $Pdx + Qdy$  是某个函数的全微分,这函数可用公式(6)来求出.因为公式(6)中的曲线积分与路径无关,为计算简便起见,可以选择平行于坐标轴的直线段连成的折线  $M_0RM$  或  $M_0SM$  作为积分路线(图 11-16),当然要假定这些折线完全位于  $G$  内.

在公式(6)中取  $M_0RM$  为积分路线,得

$$u(x,y) = \int_{x_0}^x P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x,y)dy.$$

在公式(6)中取  $M_0SM$  为积分路线,则函数  $u$  也可表为

$$u(x,y) = \int_{y_0}^y Q(x_0,y)dy + \int_{x_0}^x P(x,y)dx.$$

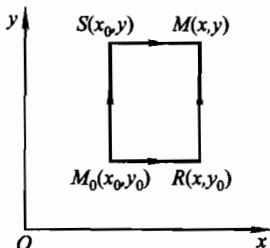


图 11-16

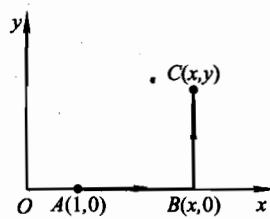


图 11-17

**例 5** 验证:  $\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$  在右半平面( $x > 0$ )内是某个函数的全微分,并求出一个这样的函数.

解 在例 4 中已经知道,令

$$P = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

就有

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

在右半平面内恒成立,因此在右半平面内,  $\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$  是某个函数的全微分.

取积分路线如图 11-17 所示,利用公式(6)得所求函数为

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \\ &= \int_{AB} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} + \int_{BC} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \\ &= 0 + \int_0^y \frac{x dy}{x^2 + y^2} = \left[ \arctan \frac{y}{x} \right]_0^y = \arctan \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

**例 6** 验证: 在整个  $xOy$  面内,  $xy^2 dx + x^2 y dy$  是某个函数的全微分, 并求出一个这样的函数.

解 现在  $P = xy^2$ ,  $Q = x^2 y$ , 且

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

在整个  $xOy$  面内恒成立, 因此在整个  $xOy$  面内,  $xy^2 dx + x^2 y dy$  是某个函数的全微分.

取积分路线如图 11-18 所示, 利用公式(6)得所求函数为

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} xy^2 dx + x^2 y dy \\ &= \int_{OA} xy^2 dx + x^2 y dy + \int_{AB} xy^2 dx + x^2 y dy \\ &= 0 + \int_0^y x^2 y dy = x^2 \int_0^y y dy = \frac{x^2 y^2}{2}. \end{aligned}$$

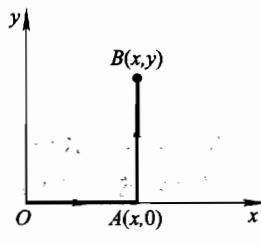


图 11-18

### 全微分方程

利用二元函数的全微分求积, 还可以用来求解下面一类一阶微分方程.

一个微分方程写成

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (7)$$

形式后, 如果它的左端恰好是某一个函数  $u(x, y)$  的全微分:

$$du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

那么方程(7)就叫做全微分方程.

容易知道, 如果方程(7)的左端是函数  $u(x, y)$  的全微分, 那么

$$u(x, y) = C$$

就是全微分方程(7)的隐式通解, 其中  $C$  是任意常数.

由定理 3 及公式(6)可知, 当  $P(x, y), Q(x, y)$  在单连通域  $G$  内具有一阶连续偏导数时, 方程(7)成为全微分方程的充分必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

在区域  $G$  内恒成立, 且当此条件满足时, 全微分方程(7)的通解为

$$u(x, y) \equiv \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = C, \quad (8)$$

其中  $x_0, y_0$  是在区域  $G$  内适当选定的点  $M_0$  的坐标.

### 例 7 求解方程

$$(5x^4 + 3xy^2 - y^3)dx + (3x^2y - 3xy^2 + y^2)dy = 0.$$

解 设  $P(x, y) = 5x^4 + 3xy^2 - y^3$ ,  $Q(x, y) = 3x^2y - 3xy^2 + y^2$ , 则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6xy - 3y^2 = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

因此,所给方程是全微分方程.

取  $x_0 = 0, y_0 = 0$ , 根据公式(8), 有

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (5x^4 + 3xy^2 - y^3) dx + (3x^2y - 3xy^2 + y^2) dy \\ &= \int_0^x (5x^4 + 3xy^2 - y^3) dx + \int_0^y y^2 dy \\ &= x^5 + \frac{3}{2}x^2y^2 - xy^3 + \frac{1}{3}y^3. \end{aligned}$$

于是, 方程的通解为

$$x^5 + \frac{3}{2}x^2y^2 - xy^3 + \frac{1}{3}y^3 = C.$$

除了利用公式(8)以外, 还可以用下面的方法求解全微分方程.

以上面的方程为例. 因为要求的方程通解为  $u(x, y) = C$ , 其中  $u(x, y)$  满足

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 5x^4 + 3xy^2 - y^3,$$

故

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int (5x^4 + 3xy^2 - y^3) dx \\ &= x^5 + \frac{3}{2}x^2y^2 - xy^3 + \varphi(y), \end{aligned}$$

这里  $\varphi(y)$  是以  $y$  为自变量的待定函数. 由此, 得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2y - 3xy^2 + \varphi'(y).$$

又  $u(x, y)$  必须满足

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2y - 3xy^2 + y^2.$$

故

$$3x^2y - 3xy^2 + \varphi'(y) = 3x^2y - 3xy^2 + y^2.$$

从而  $\varphi'(y) = y^2, \quad \varphi(y) = \frac{1}{3}y^3 + C.$

所以, 所给方程的通解为

$$x^5 + \frac{3}{2}x^2y^2 - xy^3 + \frac{1}{3}y^3 = C.$$

#### \* 四、曲线积分的基本定理

若曲线积分  $\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  在区域  $G$  内与积分路径无关, 则称向量场  $\mathbf{F}$  为保守场.

下面的定理给出了平面曲线积分与路径无关的另一种形式的条件，并为计算保守场中的曲线积分提供了一种简便的方法.

**定理4(曲线积分的基本定理)** 设  $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$  是平面区域  $G$  内的一个向量场,  $P(x, y), Q(x, y)$  都在  $G$  内连续, 且存在一个数量函数  $f(x, y)$ , 使得  $\mathbf{F} = \nabla f$ , 则曲线积分  $\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  在  $G$  内与路径无关, 且

$$\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A), \quad (9)$$

其中  $L$  是位于  $G$  内起点为  $A$ 、终点为  $B$  的任一分段光滑曲线.

**证** 设  $L$  的向量方程为

$$\mathbf{r} = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j}, t \in [\alpha, \beta],$$

起点  $A$  对应参数  $t = \alpha$ , 终点  $B$  对应参数  $t = \beta$ .

由假设,  $f_x = P, f_y = Q, P, Q$  连续, 从而  $f$  可微, 且

$$\frac{df}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} = \nabla f \cdot \left( \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} \right) = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

于是

$$\begin{aligned} \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^\beta \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_a^\beta \frac{df}{dt} dt = f[\varphi(t), \psi(t)] \Big|_a^\beta \\ &= f(B) - f(A), \end{aligned}$$

证毕.

定理 4 表明, 对于势场  $\mathbf{F}$ , 曲线积分  $\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  的值仅依赖于它的势函数  $f$  在路径  $L$  的两端点的值, 而不依赖于两点间的路径, 即积分  $\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  在  $G$  内与路径无关. 也就是说: 势场是保守场.

公式(9)是与微积分基本公式

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

(其中  $F'(x) = f(x)$ ) 完全类似的向量微积分的相应公式, 称为曲线积分的基本公式.

### 习题 11-3

1. 计算下列曲线积分, 并验证格林公式的正确性:

(1)  $\oint_L (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$ , 其中  $L$  是由抛物线  $y = x^2$  和  $y^2 = x$  所围成的区域的正向边界曲线;

(2)  $\oint_L (x^2 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy$ , 其中  $L$  是四个顶点分别为  $(0, 0), (2, 0), (2, 2)$  和  $(0, 2)$  的正方形区域的正向边界.

2. 利用曲线积分,求下列曲线所围成的图形的面积:

(1) 星形线  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ ;

(2) 椭圆  $9x^2 + 16y^2 = 144$ ;

(3) 圆  $x^2 + y^2 = 2ax$ .

3. 计算曲线积分  $\oint_L \frac{ydx - xdy}{2(x^2 + y^2)}$ , 其中  $L$  为圆周  $(x - 1)^2 + y^2 = 2$ ,  $L$  的方向为逆时针方向.

4. 证明下列曲线积分在整个  $xOy$  面内与路径无关,并计算积分值:

(1)  $\int_{(1,1)}^{(2,3)} (x+y)dx + (x-y)dy$ ;

(2)  $\int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2y - 3xy^2)dy$ ;

(3)  $\int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy - y^4 + 3)dx + (x^2 - 4xy^3)dy$ .

5. 利用格林公式,计算下列曲线积分:

(1)  $\oint_L (2x - y + 4)dx + (5y + 3x - 6)dy$ , 其中  $L$  为三顶点分别为  $(0,0)$ 、 $(3,0)$  和  $(3,2)$  的三角形正向边界;

(2)  $\oint_L (x^2 y \cos x + 2x y \sin x - y^2 e^x)dx + (x^2 \sin x - 2y e^x)dy$ , 其中  $L$  为正向星形线  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$  ( $a > 0$ );

(3)  $\int_L (2xy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2)dy$ , 其中  $L$  为在抛物线  $2x = \pi y^2$  上由点  $(0,0)$  到  $(\frac{\pi}{2}, 1)$  的一段弧;

(4)  $\int_L (x^2 - y)dx - (x + \sin^2 y)dy$ , 其中  $L$  是在圆周  $y = \sqrt{2x - x^2}$  上由点  $(0,0)$  到点  $(1,1)$  的一段弧.

6. 验证下列  $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$  在整个  $xOy$  平面内是某一函数  $u(x,y)$  的全微分, 并求这样的一个  $u(x,y)$ :

(1)  $(x+2y)dx + (2x+y)dy$ ;

(2)  $2xydx + x^2 dy$ ;

(3)  $4\sin x \sin 3y \cos x dx - 3\cos 3y \cos 2x dy$ ;

(4)  $(3x^2 y + 8xy^2)dx + (x^3 + 8x^2 y + 12ye^y)dy$ ;

(5)  $(2x \cos y + y^2 \cos x)dx + (2y \sin x - x^2 \sin y)dy$ .

7. 设有一变力在坐标轴上的投影为  $X = x + y^2$ ,  $Y = 2xy - 8$ , 这变力确定了一个力场. 证明质点在此场内移动时, 场力所作的功与路径无关.

\* 8. 判别下列方程中哪些是全微分方程? 对于全微分方程, 求出它的通解.

(1)  $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2 y + 4y^2)dy = 0$ ;

(2)  $(a^2 - 2xy - y^2)dx - (x + y)^2 dy = 0$  ( $a$  为常数);

(3)  $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$ ;

(4)  $(x \cos y + \cos x)y' - y \sin x + \sin y = 0$ ;

- (5)  $(x^2 - y)dx - xdy = 0;$
- (6)  $y(x - 2y)dx - x^2 dy = 0;$
- (7)  $(1 + e^{2\theta})d\rho + 2\rho e^{2\theta} d\theta = 0;$
- (8)  $(x^2 + y^2)dx + xydy = 0.$

9. 确定常数  $\lambda$ , 使在右半平面  $x > 0$  上的向量  $A(x, y) = 2xy(x^4 + y^2)^{\lambda} \mathbf{i} - x^2(x^4 + y^2)^{\lambda} \mathbf{j}$  为某二元函数  $u(x, y)$  的梯度, 并求  $u(x, y)$ .

## 第四节 对面积的曲面积分

### 一、对面积的曲面积分的概念与性质

在本章第一节第一目的质量问题中, 如果把曲线改为曲面<sup>①</sup>, 并相应地把线密度  $\mu(x, y)$  改为面密度  $\mu(x, y, z)$ , 小段曲线的弧长  $\Delta s_i$  改为小块曲面的面积  $\Delta S_i$ , 而第  $i$  小段曲线上的一点  $(\xi_i, \eta_i)$  改为第  $i$  小块曲面上的一点  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ , 那么, 在面密度  $\mu(x, y, z)$  连续的前提下, 所求的质量  $m$  就是下列和的极限:

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i,$$

其中  $\lambda$  表示  $n$  小块曲面的直径<sup>②</sup>的最大值.

这样的极限还会在其他问题中遇到. 抽去它们的具体意义, 就得出对面积的曲面积分的概念.

**定义** 设曲面  $\Sigma$  是光滑的<sup>③</sup>, 函数  $f(x, y, z)$  在  $\Sigma$  上有界. 把  $\Sigma$  任意分成  $n$  小块  $\Delta S_i$  ( $\Delta S_i$  同时也代表第  $i$  小块曲面的面积), 设  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  是  $\Delta S_i$  上任意取定的一点, 作乘积  $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ), 并作和  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$ , 如果当各小块曲面的直径的最大值  $\lambda \rightarrow 0$  时, 这和的极限总存在, 则称此极限为函数  $f(x, y, z)$  在曲面  $\Sigma$  上对面积的曲面积分或第一类曲面积分, 记作  $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$ , 即

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i,$$

① 以后都假定曲面的边界曲线是分段光滑的闭曲线, 且曲面有界.

② 曲面的直径是指曲面上任意两点间距离的最大者.

③ 所谓曲面是光滑的, 就是说, 曲面上各点处都具有切平面, 且当点在曲面上连续移动时, 切平面也连续转动.

其中  $f(x, y, z)$  叫做被积函数,  $\Sigma$  叫做积分曲面.

我们指出, 当  $f(x, y, z)$  在光滑曲面  $\Sigma$  上连续时, 对面积的曲面积分是存在的. 今后总假定  $f(x, y, z)$  在  $\Sigma$  上连续.

根据上述定义, 面密度为连续函数  $\mu(x, y, z)$  的光滑曲面  $\Sigma$  的质量  $m$ , 可表示为  $\mu(x, y, z)$  在  $\Sigma$  上对面积的曲面积分:

$$m = \iint_{\Sigma} \mu(x, y, z) dS.$$

如果  $\Sigma$  是分片光滑的<sup>①</sup>, 我们规定函数在  $\Sigma$  上对面积的曲面积分等于函数在光滑的各片曲面上对面积的曲面积分之和. 例如, 设  $\Sigma$  可分成两片光滑曲面  $\Sigma_1$  及  $\Sigma_2$  (记作  $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$ ), 就规定

$$\iint_{\Sigma_1 + \Sigma_2} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_2} f(x, y, z) dS.$$

由对面积的曲面积分的定义可知, 它具有与对弧长的曲线积分相类似的性质, 这里不再赘述.

## 二、对面积的曲面积分的计算法

设积分曲面  $\Sigma$  由方程  $z = z(x, y)$  给出,  $\Sigma$  在  $xOy$  面上的投影区域为  $D_{xy}$  (图 11-19), 函数  $z = z(x, y)$  在  $D_{xy}$  上具有连续偏导数, 被积函数  $f(x, y, z)$  在  $\Sigma$  上连续.

按对面积的曲面积分的定义, 有

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i. \quad (1)$$

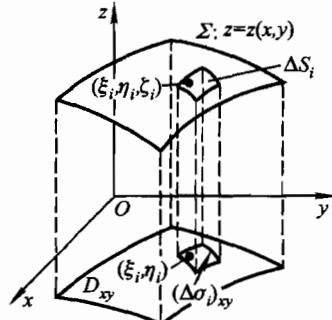


图 11-19

设  $\Sigma$  上第  $i$  小块曲面  $\Delta S_i$  (它的面积也记作  $\Delta S_i$ ) 在  $xOy$  面上的投影区域为  $(\Delta\sigma_i)_{xy}$  (它的面积也记作  $(\Delta\sigma_i)_{xy}$ ), 则(1)式中的  $\Delta S_i$  可表示为二重积分

$$\Delta S_i = \iint_{(\Delta\sigma_i)_{xy}} \sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)} dx dy.$$

利用二重积分的中值定理, 上式又可写成

$$\Delta S_i = \sqrt{1 + z_x^2(\xi'_i, \eta'_i) + z_y^2(\xi'_i, \eta'_i)} (\Delta\sigma_i)_{xy},$$

其中  $(\xi'_i, \eta'_i)$  是小闭区域  $(\Delta\sigma_i)_{xy}$  上的一点. 又因  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  是  $\Sigma$  上的一点, 故

<sup>①</sup> 分片光滑的曲面是指由有限个光滑曲面所组成的曲面. 以后我们总假定曲面是光滑的或分片光滑的.

$\zeta_i = z(\xi_i, \eta_i)$ , 这里  $(\xi_i, \eta_i, 0)$  也是小闭区域  $(\Delta\sigma_i)_{xy}$  上的点. 于是

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i \\ &= \sum_{i=1}^n f[\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i)] \sqrt{1 + z_x^2(\xi'_i, \eta'_i) + z_y^2(\xi'_i, \eta'_i)} (\Delta\sigma_i)_{xy}. \end{aligned}$$

由于函数  $f[x, y, z(x, y)]$  以及函数  $\sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)}$  都在闭区域  $D_{xy}$  上连续, 可以证明, 当  $\lambda \rightarrow 0$  时, 上式右端的极限与

$$\sum_{i=1}^n f[\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i)] \sqrt{1 + z_x^2(\xi_i, \eta_i) + z_y^2(\xi_i, \eta_i)} (\Delta\sigma_i)_{xy}$$

的极限相等. 这个极限在本目开始所给的条件下是存在的, 它等于二重积分

$$\iint_{D_{xy}} f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)} dx dy,$$

因此左端的极限即曲面积分  $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$  也存在, 且有

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS \\ &= \iint_{D_{xy}} f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)} dx dy. \quad (2) \end{aligned}$$

这就是把对面积的曲面积分化为二重积分的公式. 这公式是容易记忆的, 因为曲面  $\Sigma$  的方程是  $z = z(x, y)$ , 而曲面积分记号中的  $dS$  就是  $\sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)} dx dy$ . 在计算时, 只要把变量  $z$  换为  $z(x, y)$ ,  $dS$  换为  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$ , 再确定  $\Sigma$  在  $xOy$  面上的投影区域  $D_{xy}$ , 这样就把对面积的曲面积分化为二重积分了.

如果积分曲面  $\Sigma$  由方程  $x = x(y, z)$  或  $y = y(z, x)$  给出, 也可类似地把对面积的曲面积分化为相应的二重积分.

**例 1** 计算曲面积分  $\iint_{\Sigma} \frac{dS}{z}$ , 其中  $\Sigma$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  被平面  $z = h$  ( $0 < h < a$ ) 截出的顶部(图 11-20).

解  $\Sigma$  的方程为

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

$\Sigma$  在  $xOy$  面上的投影区域  $D_{xy}$  为圆形闭区域  $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2 - h^2\}$ . 又

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

根据公式(2), 有

$$\iint_{\Sigma} \frac{dS}{z} = \iint_{D_{xy}} \frac{a dx dy}{a^2 - x^2 - y^2}.$$

利用极坐标, 得

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \frac{dS}{z} &= \iint_{D_{xy}} \frac{a \rho d\rho d\theta}{a^2 - \rho^2} = a \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{a^2 - h^2}} \frac{\rho d\rho}{a^2 - \rho^2} \\ &= 2\pi a \left[ -\frac{1}{2} \ln(a^2 - \rho^2) \right]_0^{\sqrt{a^2 - h^2}} = 2\pi a \ln \frac{a}{h}. \end{aligned}$$

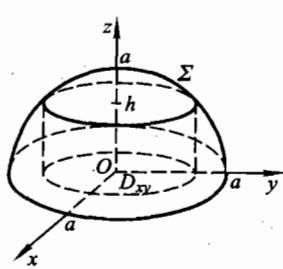


图 11-20

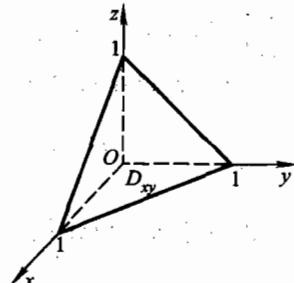


图 11-21

例 2 计算  $\iint_{\Sigma} xyz dS$ <sup>①</sup>, 其中  $\Sigma$  是由平面  $x=0, y=0, z=0$  及  $x+y+z=1$

所围成的四面体的整个边界曲面(图 11-21).

解 整个边界曲面  $\Sigma$  在平面  $x=0, y=0, z=0$  及  $x+y+z=1$  上的部分依次记为  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$  及  $\Sigma_4$ , 于是

$$\iint_{\Sigma} xyz dS = \iint_{\Sigma_1} xyz dS + \iint_{\Sigma_2} xyz dS + \iint_{\Sigma_3} xyz dS + \iint_{\Sigma_4} xyz dS.$$

由于在  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$  上, 被积函数  $f(x, y, z) = xyz$  均为零, 所以

$$\iint_{\Sigma_1} xyz dS = \iint_{\Sigma_2} xyz dS = \iint_{\Sigma_3} xyz dS = 0.$$

在  $\Sigma_4$  上,  $z = 1 - x - y$ , 所以

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3},$$

从而

$$\iint_{\Sigma} xyz dS = \iint_{\Sigma_4} xyz dS = \iint_{D_{xy}} \sqrt{3} xy(1-x-y) dx dy,$$

① 记号  $\iint_{\Sigma}$  表示在闭曲面  $\Sigma$  上积分.

其中  $D_{xy}$  是  $\Sigma_4$  在  $xOy$  面上的投影区域, 即由直线  $x=0$ ,  $y=0$  及  $x+y=1$  所围成的闭区域. 因此

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} xyz dS &= \sqrt{3} \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} y(1-x-y) dy \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 x \left[ (1-x) \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^{1-x} dx \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 x \cdot \frac{(1-x)^3}{6} dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6} \int_0^1 (x - 3x^2 + 3x^3 - x^4) dx = \frac{\sqrt{3}}{120}. \end{aligned}$$

### 习题 11-4

1. 设有一分布着质量的曲面  $\Sigma$ , 在点  $(x, y, z)$  处它的面密度为  $\mu(x, y, z)$ , 用对面积的曲面积分表示这曲面对于  $x$  轴的转动惯量.

2. 按对面积的曲面积分的定义证明公式

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_2} f(x, y, z) dS,$$

其中  $\Sigma$  是由  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  组成的.

3. 当  $\Sigma$  是  $xOy$  面内的一个闭区域时, 曲面积分  $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$  与二重积分有什么关系?

4. 计算曲面积分  $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$ , 其中  $\Sigma$  为抛物面  $z=2-(x^2+y^2)$  在  $xOy$  面上方的部分,  $f(x, y, z)$  分别如下:

- (1)  $f(x, y, z)=1$ ;
- (2)  $f(x, y, z)=x^2+y^2$ ;
- (3)  $f(x, y, z)=3z$ .

5. 计算  $\iint_{\Sigma} (x^2+y^2) dS$ , 其中  $\Sigma$  是:

- (1) 锥面  $z=\sqrt{x^2+y^2}$  及平面  $z=1$  所围成的区域的整个边界曲面;
- (2) 锥面  $z^2=3(x^2+y^2)$  被平面  $z=0$  和  $z=3$  所截得的部分.

6. 计算下列对面积的曲面积分:

- (1)  $\iint_{\Sigma} \left( z+2x+\frac{4}{3}y \right) dS$ , 其中  $\Sigma$  为平面  $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$  在第一卦限中的部分;
- (2)  $\iint_{\Sigma} (2xy-2x^2-x+z) dS$ , 其中  $\Sigma$  为平面  $2x+2y+z=6$  在第一卦限中的部分;
- (3)  $\iint_{\Sigma} (x+y+z) dS$ , 其中  $\Sigma$  为球面  $x^2+y^2+z^2=a^2$  上  $z \geq h$  ( $0 < h < a$ ) 的部分;

(4)  $\iint_{\Sigma} (xy + yz + zx) dS$ , 其中  $\Sigma$  为锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  被柱面  $x^2 + y^2 = 2ax$  所截得的有限部分.

7. 求抛物面壳  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  ( $0 \leq z \leq 1$ ) 的质量, 此壳的面密度为  $\mu = z$ .

8. 求面密度为  $\mu_0$  的均匀半球壳  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  ( $z \geq 0$ ) 对于  $z$  轴的转动惯量.

## 第五节 对坐标的曲面积分

### 一、对坐标的曲面积分的概念与性质

我们对曲面作一些说明. 这里假定曲面是光滑的.

通常我们遇到的曲面都是双侧的. 例如由方程  $z = z(x, y)$  表示的曲面, 有上侧与下侧之分<sup>①</sup>; 又例如, 一张包围某一空间区域的闭曲面, 有外侧与内侧之分. 以后我们总假定所考虑的曲面是双侧的.

在讨论对坐标的曲面积分时, 需要指定曲面的侧. 我们可以通过曲面上法向量的指向来定出曲面的侧. 例如, 对于曲面  $z = z(x, y)$ , 如果取它的法向量  $n$  的指向朝上, 我们就认为取定曲面的上侧; 又如, 对于闭曲面如果取它的法向量的指向朝外, 我们就认为取定曲面的外侧. 这种取定了法向量亦即选定了侧的曲面, 就称为有向曲面.

设  $\Sigma$  是有向曲面. 在  $\Sigma$  上取一小块曲面  $\Delta S$ , 把  $\Delta S$  投影到  $xOy$  面上得一投影区域, 这投影区域的面积记为  $(\Delta\sigma)_{xy}$ . 假定  $\Delta S$  上各点处的法向量与  $z$  轴的夹角  $\gamma$  的余弦  $\cos \gamma$  有相同的符号(即  $\cos \gamma$  都是正的或都是负的). 我们规定  $\Delta S$  在  $xOy$  面上的投影  $(\Delta S)_{xy}$  为

$$(\Delta S)_{xy} = \begin{cases} (\Delta\sigma)_{xy}, & \cos \gamma > 0, \\ -(\Delta\sigma)_{xy}, & \cos \gamma < 0, \\ 0, & \cos \gamma \equiv 0. \end{cases}$$

其中  $\cos \gamma \equiv 0$  也就是  $(\Delta\sigma)_{xy} = 0$  的情形.  $\Delta S$  在  $xOy$  面上的投影  $(\Delta S)_{xy}$  实际就是  $\Delta S$  在  $xOy$  面上的投影区域的面积附以一定的正负号. 类似地可以定义  $\Delta S$  在  $yOz$  面及  $zOx$  面上的投影  $(\Delta S)_{yz}$  及  $(\Delta S)_{zx}$ .

下面讨论一个例子, 然后引进对坐标的曲面积分的概念.

<sup>①</sup> 按惯例, 这里假定  $z$  轴铅直向上.

**流向曲面一侧的流量** 设稳定流动<sup>①</sup>的不可压缩流体(假定密度为1)的速度场由

$$\mathbf{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

给出,  $\Sigma$  是速度场中的一片有向曲面, 函数  $P(x, y, z)$ 、 $Q(x, y, z)$ 、 $R(x, y, z)$  都在  $\Sigma$  上连续, 求在单位时间内流向  $\Sigma$  指定侧的流体的质量, 即流量  $\Phi$ .

如果流体流过平面上面积为  $A$  的一个闭区域, 且流体在这闭区域上各点处的流速为(常向量)  $\mathbf{v}$ , 又设  $\mathbf{n}$  为该平面的单位法向量(图 11-22(a)), 那么在单位时间内流过这闭区域的流体组成一个底面积为  $A$ 、斜高为  $|\mathbf{v}|$  的斜柱体(图 11-22(b)).

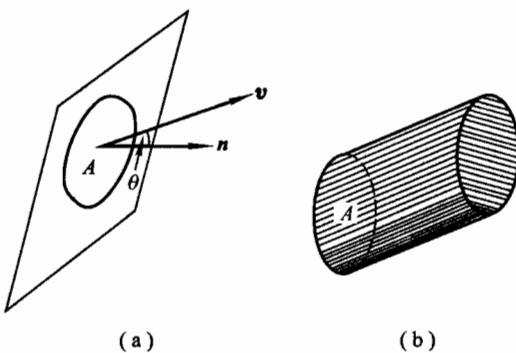


图 11-22

当  $(\hat{\mathbf{v}}, \mathbf{n}) = \theta < \frac{\pi}{2}$  时, 这斜柱体的体积为

$$A |\mathbf{v}| \cos \theta = A \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}.$$

这也就是通过闭区域  $A$  流向  $\mathbf{n}$  所指一侧的流量  $\Phi$ ;

当  $(\hat{\mathbf{v}}, \mathbf{n}) = \frac{\pi}{2}$  时, 显然流体通过闭区域  $A$  流向  $\mathbf{n}$  所指一侧的流量  $\Phi$  为零,

而  $A \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ , 故  $\Phi = A \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ ;

当  $(\hat{\mathbf{v}}, \mathbf{n}) > \frac{\pi}{2}$  时,  $A \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} < 0$ , 这时我们仍把  $A \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  称为流体通过闭区域  $A$  流向  $\mathbf{n}$  所指一侧的流量, 它表示流体通过闭区域  $A$  实际上流向  $-\mathbf{n}$  所指一侧, 且流向  $-\mathbf{n}$  所指一侧的流量为  $-A \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ . 因此, 不论  $(\hat{\mathbf{v}}, \mathbf{n})$  为何值, 流体通过闭区域  $A$  流向  $\mathbf{n}$  所指一侧的流量  $\Phi$  均为  $A \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ .

由于现在所考虑的不是平面闭区域而是一片曲面, 且流速  $\mathbf{v}$  也不是常向量, 因此所求流量不能直接用上述方法计算. 然而过去在引出各类积分概念的例子

① 所谓稳定流动, 就是说, 流速与时间  $t$  无关.

中一再使用过的方法,也可用来解决目前的问题.

把曲面  $\Sigma$  分成  $n$  小块  $\Delta S_i$  ( $\Delta S_i$  同时也代表第  $i$  小块曲面的面积). 在  $\Sigma$  是光滑的和  $v$  是连续的前提下, 只要  $\Delta S_i$  的直径很小, 我们就可以用  $\Delta S_i$  上任一点  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  处的流速

$$v_i = v(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$$

$$= P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) j + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) k$$

代替  $\Delta S_i$  上其他各点处的流速, 以该点

$(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  处曲面  $\Sigma$  的单位法向量

$$n_i = \cos \alpha_i i + \cos \beta_i j + \cos \gamma_i k$$

代替  $\Delta S_i$  上其他各点处的单位法向量(图 11-23). 从而得到通过  $\Delta S_i$  流向指定侧的流量的近似值为

$$v_i \cdot n_i \Delta S_i \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

于是, 通过  $\Sigma$  流向指定侧的流量

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^n v_i \cdot n_i \Delta S_i$$

$$= \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \alpha_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \beta_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \gamma_i] \Delta S_i,$$

但

$$\cos \alpha_i \cdot \Delta S_i \approx (\Delta S_i)_{yx},$$

$$\cos \beta_i \cdot \Delta S_i \approx (\Delta S_i)_{xz}, \quad \cos \gamma_i \cdot \Delta S_i \approx (\Delta S_i)_{xy},$$

因此上式可以写成

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{yx} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xz} + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xy}].$$

令  $\lambda \rightarrow 0$  取上述和的极限, 就得到流量  $\Phi$  的精确值. 这样的极限还会在其他问题中遇到. 抽去它们的具体意义, 就得出下列对坐标的曲面积分的概念.

**定义** 设  $\Sigma$  为光滑的有向曲面, 函数  $R(x, y, z)$  在  $\Sigma$  上有界. 把  $\Sigma$  任意分成  $n$  块小曲面  $\Delta S_i$  ( $\Delta S_i$  同时又表示第  $i$  块小曲面的面积),  $\Delta S_i$  在  $xOy$  面上的投影为  $(\Delta S_i)_{xy}$ ,  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  是  $\Delta S_i$  上任意取定的一点. 如果当各小块曲面的直径的最大值  $\lambda \rightarrow 0$  时,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xy}$$

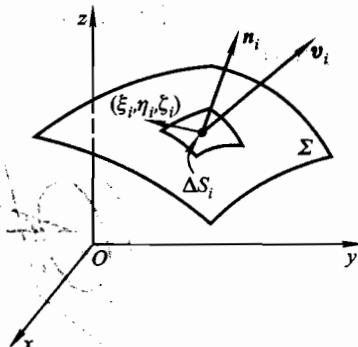


图 11-23

总存在,则称此极限为函数  $R(x, y, z)$  在有向曲面  $\Sigma$  上对坐标  $x, y$  的曲面积分,记作  $\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy$ , 即

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xy},$$

其中  $R(x, y, z)$  叫做被积函数,  $\Sigma$  叫做积分曲面.

类似地可以定义函数  $P(x, y, z)$  在有向曲面  $\Sigma$  上对坐标  $y, z$  的曲面积分  $\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz$  及函数  $Q(x, y, z)$  在有向曲面  $\Sigma$  上对坐标  $z, x$  的曲面积分  $\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx$  分别为

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{yz},$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xz}.$$

以上三个曲面积分也称为第二类曲面积分.

我们指出,当  $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$  在有向光滑曲面  $\Sigma$  上连续时,对坐标的曲面积分是存在的,以后总假定  $P, Q, R$  在  $\Sigma$  上连续.

在应用上出现较多的是

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz + \iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx + \iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy$$

这种合并起来的形式. 为简便起见, 我们把它写成

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy.$$

例如, 上述流向  $\Sigma$  指定侧的流量  $\Phi$  可表示为

$$\Phi = \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy.$$

如果  $\Sigma$  是分片光滑的有向曲面, 我们规定函数在  $\Sigma$  上对坐标的曲面积分等于函数在各片光滑曲面上对坐标的曲面积分之和.

对坐标的曲面积分具有与对坐标的曲线积分相类似的一些性质. 例如:

(1) 如果把  $\Sigma$  分成  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$ , 则

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \\ &= \iint_{\Sigma_1} P dy dz + Q dz dx + R dx dy + \iint_{\Sigma_2} P dy dz + Q dz dx + R dx dy. \quad (1) \end{aligned}$$

公式(1)可以推广到  $\Sigma$  分成  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$  几部分的情形.

(2) 设  $\Sigma$  是有向曲面,  $\Sigma^-$  表示与  $\Sigma$  取相反侧的有向曲面, 则

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz &= - \iint_{\Sigma^-} P(x, y, z) dy dz, \\ \iint_{\Sigma^-} Q(x, y, z) dz dx &= - \iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx, \\ \iint_{\Sigma^-} R(x, y, z) dx dy &= - \iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy.\end{aligned}\quad (2)$$

(2)式表示, 当积分曲面改变为相反侧时, 对坐标的曲面积分要改变符号. 因此关于对坐标的曲面积分, 我们必须注意积分曲面所取的侧.

这些性质的证明从略.

## 二、对坐标的曲面积分的计算法

设积分曲面  $\Sigma$  是由方程  $z = z(x, y)$  所给出的曲面上侧,  $\Sigma$  在  $xOy$  面上的投影区域为  $D_{xy}$ , 函数  $z = z(x, y)$  在  $D_{xy}$  上具有一阶连续偏导数, 被积函数  $R(x, y, z)$  在  $\Sigma$  上连续.

按对坐标的曲面积分的定义, 有

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xy}.$$

因为  $\Sigma$  取上侧,  $\cos \gamma > 0$ , 所以

$$(\Delta S_i)_{xy} = (\Delta \sigma_i)_{xy}.$$

又因  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  是  $\Sigma$  上的一点, 故  $\zeta_i = z(\xi_i, \eta_i)$ . 从而有

$$\sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xy} = \sum_{i=1}^n R[\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i)] (\Delta \sigma_i)_{xy}.$$

令各小块曲面的直径的最大值  $\lambda \rightarrow 0$  取上式两端的极限, 就得到

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dx dy. \quad (3)$$

这就是把对坐标的曲面积分化为二重积分的公式. 公式(3)表明, 计算曲面积分  $\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy$  时, 只需将其中变量  $z$  换为表示  $\Sigma$  的函数  $z(x, y)$ , 然后在  $\Sigma$  的投影区域  $D_{xy}$  上计算二重积分即可.

必须注意, 公式(3)的曲面积分是取在曲面  $\Sigma$  上侧的; 如果曲面积分取在  $\Sigma$  的下侧, 这时  $\cos \gamma < 0$ , 那么

$$(\Delta S_i)_{xy} = -(\Delta \sigma_i)_{xy},$$

从而有

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = - \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dx dy. \quad (3')$$

类似地, 如果  $\Sigma$  由  $x = x(y, z)$  给出, 则有

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} P[x(y, z), y, z] dy dz, \quad (4)$$

等式右端的符号这样决定: 如果积分曲面  $\Sigma$  是由方程  $x = x(y, z)$  所给出的曲面前侧, 即  $\cos \alpha > 0$ , 应取正号; 反之, 如果  $\Sigma$  取后侧, 即  $\cos \alpha < 0$ , 应取负号.

如果  $\Sigma$  由  $y = y(z, x)$  给出, 则有

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx = \pm \iint_{D_{xz}} Q[x, y(z, x), z] dz dx, \quad (5)$$

等式右端的符号这样决定: 如果积分曲面  $\Sigma$  是由方程  $y = y(z, x)$  所给出的曲面右侧, 即  $\cos \beta > 0$ , 应取正号; 反之, 如果  $\Sigma$  取左侧, 即  $\cos \beta < 0$ , 应取负号.

### 例 1 计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy,$$

其中  $\Sigma$  是长方体  $\Omega$  的整个表面的外侧,  $\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}$ .

解 把有向曲面  $\Sigma$  分成以下六部分:

$\Sigma_1 : z = c$  ( $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ ) 的上侧;

$\Sigma_2 : z = 0$  ( $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ ) 的下侧;

$\Sigma_3 : x = a$  ( $0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$ ) 的前侧;

$\Sigma_4 : x = 0$  ( $0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$ ) 的后侧;

$\Sigma_5 : y = b$  ( $0 \leq x \leq a, 0 \leq z \leq c$ ) 的右侧;

$\Sigma_6 : y = 0$  ( $0 \leq x \leq a, 0 \leq z \leq c$ ) 的左侧.

除  $\Sigma_3, \Sigma_4$  外, 其余四片曲面在  $yOz$  面上的投影为零, 因此

$$\iint_{\Sigma} x^2 dy dz = \iint_{\Sigma_3} x^2 dy dz + \iint_{\Sigma_4} x^2 dy dz.$$

应用公式(4)就有

$$\iint_{\Sigma} x^2 dy dz = \iint_{D_{yz}} a^2 dy dz - \iint_{D_{yz}} 0^2 dy dz = a^2 bc.$$

类似地可得

$$\iint_{\Sigma} y^2 dz dx = b^2 ac,$$

$$\iint_{\Sigma} z^2 dx dy = c^2 ab.$$

于是所求曲面积分为  $(a + b + c)abc$ .

**例 2** 计算曲面积分  $\iint_{\Sigma} xyz \, dxdy$ , 其中  $\Sigma$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  外侧在  $x \geq 0, y \geq 0$  的部分.

解 把  $\Sigma$  分为  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  两部分(图 11-24),  $\Sigma_1$  的方程为

$$z_1 = -\sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

$\Sigma_2$  的方程为

$$z_2 = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

$$\iint_{\Sigma} xyz \, dxdy = \iint_{\Sigma_2} xyz \, dxdy + \iint_{\Sigma_1} xyz \, dxdy.$$

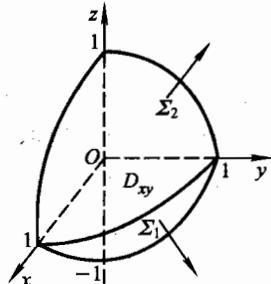


图 11-24

上式右端的第一个积分的积分曲面  $\Sigma_2$  取上侧, 第二个

积分的积分曲面  $\Sigma_1$  取下侧, 因此分别应用公式(3)及(3'), 就有

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} xyz \, dxdy &= \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dxdy - \iint_{D_{xy}} xy (-\sqrt{1 - x^2 - y^2}) \, dxdy \\ &= 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dxdy. \end{aligned}$$

其中  $D_{xy}$  是  $\Sigma_1$  及  $\Sigma_2$  在  $xOy$  面上的投影区域, 就是位于第一象限内的扇形  $x^2 + y^2 \leq 1$  ( $x \geq 0, y \geq 0$ ). 利用极坐标计算这个二重积分如下:

$$\begin{aligned} 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dxdy &= 2 \iint_{D_{xy}} \rho^2 \sin \theta \cos \theta \sqrt{1 - \rho^2} \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta \int_0^1 \rho^3 \sqrt{1 - \rho^2} d\rho \\ &= 1 \cdot \frac{2}{15} = \frac{2}{15}, \end{aligned}$$

从而

$$\iint_{\Sigma} xyz \, dxdy = \frac{2}{15}.$$

### 三、两类曲面积分之间的联系

设有向曲面  $\Sigma$  由方程  $z = z(x, y)$  给出,  $\Sigma$  在  $xOy$  面上的投影区域为  $D_{xy}$ , 函数  $z = z(x, y)$  在  $D_{xy}$  上具有一阶连续偏导数,  $R(x, y, z)$  在  $\Sigma$  上连续. 如果  $\Sigma$  取上侧, 则由对坐标的曲面积分计算公式(3)有

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dx dy.$$

另一方面,因上述有向曲面  $\Sigma$  的法向量的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \cos \beta = \frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},$$

故由对面积的曲面积分计算公式有

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cos \gamma dS = \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dx dy.$$

由此可见,有

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cos \gamma dS. \quad (6)$$

如果  $\Sigma$  取下侧,则由(3')有

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = - \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dx dy.$$

但这时  $\cos \gamma = \frac{-1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$ ,因此(6)式仍成立.

类似地可推得

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz = \iint_{\Sigma} P(x, y, z) \cos \alpha dS, \quad (7)$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx = \iint_{\Sigma} Q(x, y, z) \cos \beta dS. \quad (8)$$

合并(6)、(7)、(8)三式,得两类曲面积分之间的如下联系:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \\ &= \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS, \end{aligned} \quad (9)$$

其中  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  是有向曲面  $\Sigma$  在点  $(x, y, z)$  处的法向量的方向余弦.

两类曲面积分之间的联系也可写成如下的向量形式:

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad (10)$$

或

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma} A_n dS, \quad (10')$$

其中  $\mathbf{A} = (P, Q, R)$ ,  $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  为有向曲面  $\Sigma$  在点  $(x, y, z)$  处的单位法向量,  $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS = (dy dz, dz dx, dx dy)$  称为有向曲面元,  $A_n$  为向量  $\mathbf{A}$  在

向量  $n$  上的投影.

例 3 计算曲面积分  $\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$ , 其中  $\Sigma$  是旋转抛物面  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  介于平面  $z = 0$  及  $z = 2$  之间的部分的下侧.

解 由两类曲面积分之间的联系(9), 可得

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz = \iint_{\Sigma} (z^2 + x) \cos \alpha dS = \iint_{\Sigma} (z^2 + x) \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} dx dy.$$

在曲面  $\Sigma$  上, 有

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \cos \gamma = \frac{-1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

故

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy = \iint_{\Sigma} [(z^2 + x)(-x) - z] dx dy.$$

再按对坐标的曲面积分的计算法, 便得

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy \\ &= - \iint_{D_{xy}} \left\{ \left[ \frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2 + x \right] \cdot (-x) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right\} dx dy. \end{aligned}$$

注意到  $\iint_{D_{xy}} \frac{1}{4}x(x^2 + y^2)^2 dx dy = 0$ , 故

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy &= \iint_{D_{xy}} \left[ x^2 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right] dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \left( \rho^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{2}\rho^2 \right) \rho d\rho = 8\pi. \end{aligned}$$

## 习 题 11-5

1. 按对坐标的曲面积分的定义证明公式

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} [P_1(x, y, z) \pm P_2(x, y, z)] dy dz \\ &= \iint_{\Sigma} P_1(x, y, z) dy dz \pm \iint_{\Sigma} P_2(x, y, z) dy dz. \end{aligned}$$

2. 当  $\Sigma$  为  $xOy$  面内的一个闭区域时, 曲面积分  $\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy$  与二重积分有什么关系?

3. 计算下列对坐标的曲面积分:

(1)  $\iint_{\Sigma} x^2 y^2 z \, dxdy$ , 其中  $\Sigma$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  的下半部分的下侧;

(2)  $\iint_{\Sigma} z \, dxdy + x \, dydz + y \, dzdx$ , 其中  $\Sigma$  是柱面  $x^2 + y^2 = 1$  被平面  $z = 0$  及  $z = 3$  所截得的在第一卦限内的部分的前侧;

(3)  $\iint_{\Sigma} [f(x, y, z) + x] \, dydz + [2f(x, y, z) + y] \, dzdx + [f(x, y, z) + z] \, dxdy$ , 其中  $f(x, y, z)$  为连续函数,  $\Sigma$  是平面  $x - y + z = 1$  在第四卦限部分的上侧;

(4)  $\oint_{\Sigma} xz \, dxdy + xy \, dydz + yz \, dzdx$ , 其中  $\Sigma$  是平面  $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$  所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧.

#### 4. 把对坐标的曲面积分

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) \, dydz + Q(x, y, z) \, dzdx + R(x, y, z) \, dxdy$$

化成对面积的曲面积分, 其中

(1)  $\Sigma$  是平面  $3x + 2y + 2\sqrt{3}z = 6$  在第一卦限的部分的上侧;

(2)  $\Sigma$  是抛物面  $z = 8 - (x^2 + y^2)$  在  $xOy$  面上方的部分的上侧.

## 第六节 高斯公式 \* 通量与散度

### 一、高斯公式

格林公式表达了平面闭区域上的二重积分与其边界曲线上的曲线积分之间的关系, 而高斯(Gauss)公式表达了空间闭区域上的三重积分与其边界曲面上的曲面积分之间的关系, 这个关系可陈述如下:

**定理 1** 设空间闭区域  $\Omega$  是由分片光滑的闭曲面  $\Sigma$  所围成, 函数  $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$  在  $\Omega$  上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iint_{\Sigma} P \, dydz + Q \, dzdx + R \, dxdy, \quad (1)$$

或

$$\iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS, \quad (1')$$

这里  $\Sigma$  是  $\Omega$  的整个边界曲面的外侧,  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  是  $\Sigma$  在点  $(x, y, z)$  处的法向量的方向余弦. 公式(1)或(1')叫做高斯公式.

**证** 由第五节公式(9)可知, 公式(1)及(1')的右端是相等的, 因此这里只要证明公式(1)就可以了.

设闭区域  $\Omega$  在  $xOy$  面上的投影区域为  $D_{xy}$ . 假定穿过  $\Omega$  内部且平行于  $z$  轴的直线与  $\Omega$  的边界曲面  $\Sigma$  的交点恰好是两个. 这样, 可设  $\Sigma$  由  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  和  $\Sigma_3$  三部分组成(图 11-25), 其中  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  分别由方程  $z = z_1(x, y)$  和  $z = z_2(x, y)$  给定, 这里  $z_1(x, y) \leq z_2(x, y)$ ,  $\Sigma_1$  取下侧,  $\Sigma_2$  取上侧;  $\Sigma_3$  是以  $D_{xy}$  的边界曲线为准线而母线平行于  $z$  轴的柱面上的一部分, 取外侧.

根据三重积分的计算法, 有

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dz dv &= \iint_{D_{xy}} \left| \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right| dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} \{R[x, y, z_2(x, y)] - R[x, y, z_1(x, y)]\} dx dy. \end{aligned} \quad (2)$$

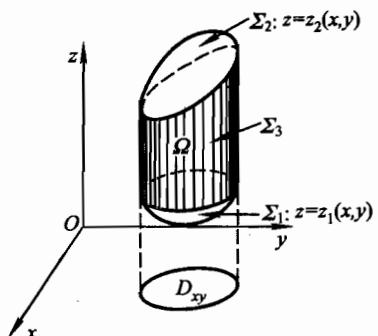


图 11-25

根据曲面积分的计算法, 有

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_1} R(x, y, z) dxdy &= - \iint_{D_{xy}} R[x, y, z_1(x, y)] dxdy. \\ \iint_{\Sigma_2} R(x, y, z) dxdy &= \iint_{D_{xy}} R[x, y, z_2(x, y)] dxdy. \end{aligned}$$

因为  $\Sigma_3$  上任意一块曲面在  $xOy$  面上的投影为零, 所以直接根据对坐标的曲面积分的定义可知

$$\iint_{\Sigma_3} R(x, y, z) dxdy = 0.$$

把以上三式相加, 得

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dxdy = \iint_{D_{xy}} \{R[x, y, z_2(x, y)] - R[x, y, z_1(x, y)]\} dxdy. \quad (3)$$

比较(2)、(3)两式, 得

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dz dv = \iint_{\Sigma} R(x, y, z) dxdy.$$

如果穿过  $\Omega$  内部且平行于  $x$  轴的直线以及平行于  $y$  轴的直线与  $\Omega$  的边界曲面  $\Sigma$  的交点也都恰好是两个, 那么类似地可得

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dz dv = \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz,$$

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dv = \iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx,$$

把以上三式两端分别相加,即得高斯公式(1).

在上述证明中,我们对闭区域  $\Omega$  作了这样的限制,即穿过  $\Omega$  内部且平行于坐标轴的直线与  $\Omega$  的边界曲面  $\Sigma$  的交点恰好是两点.如果  $\Omega$  不满足这样的条件,可以引进几张辅助曲面把  $\Omega$  分为有限个闭区域,使得每个闭区域满足这样的条件,并注意到沿辅助曲面相反两侧的两个曲面积分的绝对值相等而符号相反,相加时正好抵消,因此公式(1)对于这样的闭区域仍然是正确的.

### 例 1 利用高斯公式计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma} (x-y) dx dy + (y-z) x dy dz,$$

其中  $\Sigma$  为柱面  $x^2 + y^2 = 1$  及平面  $z=0, z=3$  所围成的空间闭区域  $\Omega$  的整个边界曲面的外侧(图 11-26).

解 因  $P = (y-z)x, Q = 0, R = x-y$ ,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = y - z, \frac{\partial Q}{\partial y} = 0, \frac{\partial R}{\partial z} = 0,$$

利用高斯公式把所给曲面积分化为三重积分,再利用柱面坐标计算三重积分,得

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} (x-y) dx dy + (y-z) x dy dz \\ &= \iiint_{\Omega} (y-z) dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega} (\rho \sin \theta - z) \rho d\rho d\theta dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_0^3 (\rho \sin \theta - z) dz \\ &= -\frac{9\pi}{2}. \end{aligned}$$

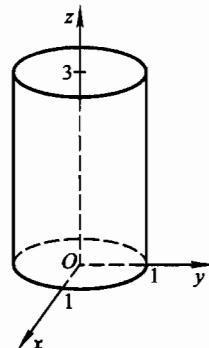


图 11-26

### 例 2 利用高斯公式计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS,$$

其中  $\Sigma$  为锥面  $x^2 + y^2 = z^2$  介于平面  $z=0$  及  $z=h$  ( $h > 0$ ) 之间的部分的下侧,  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  是  $\Sigma$  在点  $(x, y, z)$  处的法向量的方向余弦.

解 因曲面  $\Sigma$  不是封闭曲面,故不能直接利用高斯公式.若设  $\Sigma_1$  为  $z=h$  ( $x^2 + y^2 \leq h^2$ ) 的上侧,则  $\Sigma$  与  $\Sigma_1$  一起构成一个封闭曲面,记它们围成的空间闭区域为  $\Omega$ ,利用高斯公式,便得

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Sigma + \Sigma_1} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS \\
&= 2 \iint_{\Omega} (x + y + z) dv \\
&= 2 \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^h (x + y + z) dz,
\end{aligned}$$

其中  $D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq h^2\}$ . 注意到

$$\iint_{D_{xy}} dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^h (x + y) dz = 0,$$

即得

$$\iint_{\Sigma + \Sigma_1} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS = \iint_{D_{xy}} (h^2 - x^2 - y^2) dx dy = \frac{1}{2} \pi h^4.$$

而

$$\iint_{\Sigma_1} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS = \iint_{\Sigma_1} z^2 dS = \iint_{D_{xy}} h^2 dx dy = \pi h^4.$$

因此

$$\iint_{\Sigma} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS = \frac{1}{2} \pi h^4 - \pi h^4 = -\frac{1}{2} \pi h^4.$$

**例 3** 设函数  $u(x, y, z)$  和  $v(x, y, z)$  在闭区域  $\Omega$  上具有一阶及二阶连续偏导数, 证明

$$\iiint_{\Omega} u \Delta v dx dy dz = \iint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} dS - \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

其中  $\Sigma$  是闭区域  $\Omega$  的整个边界曲面,  $\frac{\partial v}{\partial n}$  为函数  $v(x, y, z)$  沿  $\Sigma$  的外法线方向

的方向导数, 符号  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , 称为拉普拉斯 (Laplace) 算子. 这个公式叫做格林第一公式.

**证** 因为方向导数

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial v}{\partial z} \cos \gamma,$$

其中  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  是  $\Sigma$  在点  $(x, y, z)$  处的外法线向量的方向余弦. 于是曲面积分

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} dS &= \iint_{\Sigma} u \left( \frac{\partial v}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial v}{\partial z} \cos \gamma \right) dS \\
&= \iint_{\Sigma} \left[ \left( u \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos \alpha + \left( u \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cos \beta + \left( u \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cos \gamma \right] dS.
\end{aligned}$$

利用高斯公式,即得

$$\begin{aligned} & \oint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} dS \\ &= \iiint_n \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( u \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \\ &= \iiint_n u \Delta v dx dy dz + \iiint_n \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz, \end{aligned}$$

将上式右端第二个积分移至左端便得所要证明的等式.

## \* 二、沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件

现在提出与第三节第二目所讨论的问题相类似的问题,这就是:在怎样的条件下,曲面积分

$$\iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

与曲面  $\Sigma$  无关而只取决于  $\Sigma$  的边界曲线? 这问题相当于在怎样的条件下,沿任意闭曲面的曲面积分为零? 这问题可用高斯公式来解决.

先介绍空间二维单连通区域及一维单连通区域的概念. 对空间区域  $G$ ,如果  $G$  内任一闭曲面所围成的区域全属于  $G$ ,则称  $G$  是空间二维单连通区域;如果  $G$  内任一闭曲线总可以张成一片完全属于  $G$  的曲面,则称  $G$  为空间一维单连通区域. 例如球面所围成的区域既是空间二维单连通的,又是空间一维单连通的;环面所围成的区域是空间二维单连通的,但不是空间一维单连通的;两个同心球面之间的区域是空间一维单连通的,但不是空间二维单连通的.

对于沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件,我们有以下结论:

**定理 2** 设  $G$  是空间二维单连通区域,  $P(x, y, z)$ 、 $Q(x, y, z)$ 、 $R(x, y, z)$  在  $G$  内具有一阶连续偏导数,则曲面积分

$$\iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

在  $G$  内与所取曲面  $\Sigma$  无关而只取决于  $\Sigma$  的边界曲线(或沿  $G$  内任一闭曲面的曲面积分为零)的充分必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

在  $G$  内恒成立.

**证** 若等式(4)在  $G$  内恒成立,则由高斯公式(1)立即可看出沿  $G$  内的任意闭曲面的曲面积分为零,因此条件(4)是充分的. 反之,设沿  $G$  内的任一闭曲面的

曲面积分为零,若等式(4)在  $G$  内不恒成立,就是说在  $G$  内至少有一点  $M_0$  使得

$$\left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)_{M_0} \neq 0,$$

仿照第三节第二目中所用的方法,就可得出  $G$  内存在着闭曲面使得沿该闭曲面的曲面积分不等于零,这与假设相矛盾.因此条件(4)是必要的.证毕.

### \* 三、通量与散度

设有向量场

$$\mathbf{A}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

其中函数  $P, Q, R$  均具有一阶连续偏导数,  $\Sigma$  是场内的一片有向曲面,  $\mathbf{n}$  是  $\Sigma$  在点  $(x, y, z)$  处的单位法向量,则积分

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$$

称为向量场  $\mathbf{A}$  通过曲面  $\Sigma$  向着指定侧的通量(或流量).

由两类曲面积分的关系,通量又可表达为

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{D_{xy}} P dy dz + Q dz dx + R dx dy.$$

**例 4** 求向量场  $\mathbf{A} = yz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$  穿过曲面  $\Sigma$  流向上侧的通量,其中  $\Sigma$  为柱面  $y^2 + z^2 = 1$  ( $z \geq 0$ ) 被平面  $x = 0$  及  $x = 1$  截下的有限部分(图 11-27).

**解** 曲面  $\Sigma$  上侧的法向量可以由

$$f(x, y, z) = y^2 + z^2$$

的梯度  $\nabla f$  得出,即

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}}{\sqrt{(2y)^2 + (2z)^2}} \\ &= y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (y^2 + z^2 = 1). \end{aligned}$$

在曲面  $\Sigma$  上,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = y^2 z + z^3 = z(y^2 + z^2) = z.$$

因此,  $\mathbf{A}$  穿过  $\Sigma$  流向上侧的通量为

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS &= \iint_{\Sigma} z dS = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 - y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} dx dy = 2. \end{aligned}$$

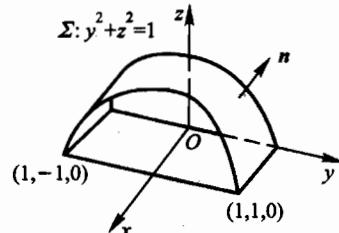


图 11-27

下面我们来解释高斯公式

$$\iiint_a \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \quad (1)$$

的物理意义.

设在闭区域  $\Omega$  上有稳定流动的、不可压缩的流体(假定流体的密度为 1)的速度场

$$\mathbf{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

其中函数  $P, Q, R$  均具有一阶连续偏导数,  $\Sigma$  是闭区域  $\Omega$  的边界曲面的外侧,  $\mathbf{n}$  是曲面  $\Sigma$  在点  $(x, y, z)$  处的单位法向量, 则由第五节第一目知道, 单位时间内流体经过曲面  $\Sigma$  流向指定侧的流体总质量就是

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{\Sigma} v_n dS = \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy.$$

因此, 高斯公式(1)的右端可解释为速度场  $\mathbf{v}$  通过闭曲面  $\Sigma$  流向外侧的通量, 即流体在单位时间内离开闭区域  $\Omega$  的总质量. 由于我们假定流体是不可压缩且流动是稳定的, 因此在流体离开  $\Omega$  的同时,  $\Omega$  内部必须有产生流体的“源头”产生出同样多的流体来进行补充. 所以高斯公式(1)的左端可解释为分布在  $\Omega$  内的源头在单位时间内所产生的流体的总质量.

为简便起见, 把高斯公式(1)改写成

$$\iiint_a \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iint_{\Sigma} v_n dS.$$

以闭区域  $\Omega$  的体积  $V$  除上式两端, 得

$$\frac{1}{V} \iiint_a \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \frac{1}{V} \iint_{\Sigma} v_n dS.$$

上式左端表示  $\Omega$  内的源头在单位时间单位体积内所产生的流体质量的平均值. 应用积分中值定理于上式左端, 得

$$\left. \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \right|_{(\xi, \eta, \zeta)} = \frac{1}{V} \iint_{\Sigma} v_n dS,$$

这里  $(\xi, \eta, \zeta)$  是  $\Omega$  内的某个点. 令  $\Omega$  缩向一点  $M(x, y, z)$ , 取上式的极限, 得

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \lim_{a \rightarrow M} \frac{1}{V} \iint_{\Sigma} v_n dS.$$

上式左端称为速度场  $\mathbf{v}$  在点  $M$  的通量密度或散度, 记作  $\operatorname{div} \mathbf{v}(M)$ , 即

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

$\operatorname{div} \mathbf{v}(M)$  在这里可看做稳定流动的不可压缩流体在点  $M$  的源头强度——在单位时间单位体积内所产生的流体质量. 在  $\operatorname{div} \mathbf{v}(M) > 0$  的点处, 流体从该点向外发散, 表示流体在该点处有正源; 在  $\operatorname{div} \mathbf{v}(M) < 0$  的点处, 流体向该点汇

聚,表示流体在该点处有吸收流体的负源(又称为汇或洞);在  $\operatorname{div} \mathbf{v}(M)=0$  的点处,表示流体在该点处无源.

对于一般的向量场

$$\mathbf{A}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$  叫做向量场  $\mathbf{A}$  的散度,记作  $\operatorname{div} \mathbf{A}$ ,即

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

利用向量微分算子  $\nabla, \mathbf{A}$  的散度  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  也可表达为  $\nabla \cdot \mathbf{A}$ ,即

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}.$$

如果向量场  $\mathbf{A}$  的散度  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  处处为零,则称向量场  $\mathbf{A}$  为无源场.

例 5 求例 4 中的向量场  $\mathbf{A}$  的散度.

$$\text{解 } \operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) = z + 2z = 3z.$$

利用向量场的通量和散度,高斯公式可以写成下面的向量形式

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{A} dv = \iint_{\Sigma} A_n dS \quad (5)$$

或

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{A} dv = \iint_{\Sigma} A_n dS. \quad (5')$$

高斯公式(5)表示:向量场  $\mathbf{A}$  通过闭曲面  $\Sigma$  流向外侧的通量等于向量场  $\mathbf{A}$  的散度在闭曲面  $\Sigma$  所围闭区域  $\Omega$  上的积分.

## 习题 11-6

1. 利用高斯公式计算曲面积分:

$$(1) \iint_{\Sigma} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 为平面 } x=0, y=0, z=0, x=a, y=a, z=a$$

所围成的立体的表面的外侧;

$$• (2) \iint_{\Sigma} x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 为球面 } x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \text{ 的外侧};$$

$$• (3) \iint_{\Sigma} xz^2 dy dz + (x^2 y - z^3) dz dx + (2xy + y^2 z) dx dy, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 为上半球体 } 0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq a^2 \text{ 的表面的外侧};$$

$$(4) \iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 是界于 } z=0 \text{ 和 } z=3 \text{ 之间的圆柱体 } x^2 + y^2 \leq 9$$

的整个表面的外侧；

(5)  $\iint_{\Sigma} 4xz dy dz - y^2 dz dx + yz dx dy$ , 其中  $\Sigma$  是平面  $x=0, y=0, z=0, x=1, y=1, z=1$

所围成的立方体的全表面的外侧。

\* 2. 求下列向量  $A$  穿过曲面  $\Sigma$  流向外侧的通量：

(1)  $A = yzi + xxj + yzk$ ,  $\Sigma$  为圆柱  $x^2 + y^2 \leq a^2$  ( $0 \leq z \leq h$ ) 的全表面，流向外侧；

(2)  $A = (2x - z)i + x^2 yj - xz^2 k$ ,  $\Sigma$  为立方体  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$  的全表面，流向外侧；

(3)  $A = (2x + 3z)i - (xz + y)j + (y^2 + 2z)k$ ,  $\Sigma$  是以点  $(3, -1, 2)$  为球心，半径  $R = 3$  的球面，流向外侧。

\* 3. 求下列向量场  $A$  的散度：

(1)  $A = (x^2 + yz)i + (y^2 + xz)j + (z^2 + xy)k$ ;

(2)  $A = e^{xy}i + \cos(xy)j + \cos(xz^2)k$ ;

(3)  $A = y^2 i + xyj + xzk$ .

4. 设  $u(x, y, z), v(x, y, z)$  是两个定义在闭区域  $\Omega$  上的具有二阶连续偏导数的函数，  
 $\frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial v}{\partial n}$  依次表示  $u(x, y, z), v(x, y, z)$  沿  $\Sigma$  的外法线方向的方向导数。证明

$$\iiint_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx dy dz = \iint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS,$$

其中  $\Sigma$  是空间闭区域  $\Omega$  的整个边界曲面。这个公式叫做格林第二公式。

\* 5. 利用高斯公式推证阿基米德原理：浸没在液体中的物体所受液体的压力的合力（即浮力）的方向铅直向上、其大小等于这物体所排开的液体的重力。

## 第七节 斯托克斯公式 \* 环流量与旋度

### 一、斯托克斯公式

斯托克斯(Stokes)公式是格林公式的推广。格林公式表达了平面闭区域上的二重积分与其边界曲线上的曲线积分间的关系，而斯托克斯公式则把曲面  $\Sigma$  上的曲面积分与沿着  $\Sigma$  的边界曲线的曲线积分联系起来。这个联系可陈述如下：

**定理 1** 设  $\Gamma$  为分段光滑的空间有向闭曲线， $\Sigma$  是以  $\Gamma$  为边界的分片光滑的有向曲面， $\Gamma$  的正向与  $\Sigma$  的侧符合右手规则<sup>①</sup>，函数  $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$  在曲面  $\Sigma$  (连同边界  $\Gamma$ ) 上具有一阶连续偏导数，则有

① 就是说，当右手除拇指外的四指依  $\Gamma$  的绕行方向时，拇指所指的方向与  $\Sigma$  上法向量的指向相同。这时称  $\Gamma$  是有向曲面  $\Sigma$  的正向边界曲线。

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz. \end{aligned} \quad (1)$$

公式(1)叫做斯托克斯公式.

**证** 先假定  $\Sigma$  与平行于  $z$  轴的直线相交不多于一点, 并设  $\Sigma$  为曲面  $z = f(x, y)$  的上侧,  $\Sigma$  的正向边界曲线  $\Gamma$  在  $xOy$  面上的投影为平面有向曲线  $C$ ,  $C$  所围成的闭区域为  $D_{xy}$  (图 11-28).

我们设法把曲面积分

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

化为闭区域  $D_{xy}$  上的二重积分, 然后通过格林公式使它与曲线积分相联系.

根据对面积的和对坐标的曲面积分间的关系, 有

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \iint_{\Sigma} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) dS.$$

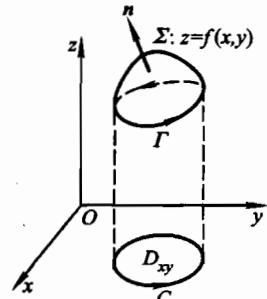


图 11-28

(2)

由第九章第六节知道, 有向曲面  $\Sigma$  的法向量的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \cos \beta = \frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

因此  $\cos \beta = -f_y, \cos \gamma$ , 把它代入(2)式得

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \iint_{\Sigma} \left( \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} f_y \right) \cos \gamma dS,$$

即

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \iint_{\Sigma} \left( \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} f_y \right) dxdy. \quad (3)$$

上式右端的曲面积分化为二重积分时, 应把  $P(x, y, z)$  中的  $z$  用  $f(x, y)$  来代替. 因为由复合函数的微分法, 有

$$\frac{\partial}{\partial y} P[x, y, f(x, y)] = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot f_y.$$

所以, (3)式可写成

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \iint_{D_{xy}} \frac{\partial}{\partial y} P[x, y, f(x, y)] dx dy.$$

根据格林公式,上式右端的二重积分可化为沿闭区域  $D_{xy}$  的边界  $C$  的曲线积分

$$-\iint_{D_{xy}} \frac{\partial}{\partial y} P[x, y, f(x, y)] dx dy = \oint_C P[x, y, f(x, y)] dx,$$

于是

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_C P[x, y, f(x, y)] dx.$$

因为函数  $P[x, y, f(x, y)]$  在曲线  $C$  上点  $(x, y)$  处的值与函数  $P(x, y, z)$  在曲线  $\Gamma$  上对应点  $(x, y, z)$  处的值是一样的, 并且两曲线上的对应小弧段在  $x$  轴上的投影也一样, 根据曲线积分的定义, 上式右端的曲线积分等于曲线  $\Gamma$  上的曲线积分  $\int_{\Gamma} P(x, y, z) dx$ . 因此, 我们证得

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_{\Gamma} P(x, y, z) dx. \quad (4)$$

如果  $\Sigma$  取下侧,  $\Gamma$  也相应的改成相反的方向, 那么(4)式两端同时改变符号, 因此(4)式仍成立.

其次, 如果曲面与平行于  $z$  轴的直线的交点多于一个, 则可作辅助曲线把曲面分成几部分, 然后应用公式(4)并相加. 因为沿辅助曲线而方向相反的两个曲线积分相加时正好抵消, 所以对于这一类曲面公式(4)也成立.

同样可证

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz = \int_{\Gamma} Q dy,$$

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial R}{\partial y} dy dz - \frac{\partial R}{\partial x} dz dx = \int_{\Gamma} R dz.$$

把它们与公式(4)相加即得公式(1). 证毕.

为了便于记忆, 利用行列式记号把斯托克斯公式(1)写成

$$\iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dy dz & dz dx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz,$$

把其中的行列式按第一行展开, 并把  $\frac{\partial}{\partial y}$  与  $R$  的“积”理解为  $\frac{\partial R}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial}{\partial z}$  与  $Q$  的“积”

理解为  $\frac{\partial Q}{\partial z}$  等等, 于是这个行列式就“等于”

$$\left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

这恰好是公式(1)左端的被积表达式.

利用两类曲面积分间的联系, 可得斯托克斯公式的另一形式

$$\iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz,$$

其中  $n = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  为有向曲面  $\Sigma$  在点  $(x, y, z)$  处的单位法向量.

如果  $\Sigma$  是  $xOy$  面上的一块平面闭区域, 斯托克斯公式就变成格林公式. 因此, 格林公式是斯托克斯公式的一种特殊情形.

**例 1** 利用斯托克斯公式计算曲线积分  $\oint_{\Gamma} z dx + x dy + y dz$ , 其中  $\Gamma$  为平面  $x + y + z = 1$  被三个坐标面所截成的三角形的整个边界, 它的正向与这个平面三角形  $\Sigma$  上侧的法向量之间符合右手规则(图 11-29).

解 按斯托克斯公式, 有

$$\oint_{\Gamma} z dx + x dy + y dz = \iint_{\Sigma} dy dz + dz dx + dx dy.$$

而

$$\iint_{\Sigma} dy dz = \iint_{D_{yz}} d\sigma = \frac{1}{2},$$

$$\iint_{\Sigma} dz dx = \iint_{D_{zx}} d\sigma = \frac{1}{2},$$

$$\iint_{\Sigma} dx dy = \iint_{D_{xy}} d\sigma = \frac{1}{2},$$

其中  $D_{yz}$ 、 $D_{zx}$ 、 $D_{xy}$  分别为  $\Sigma$  在  $yOz$ 、 $zOx$ 、 $xOy$  面上的投影区域, 因此

$$\oint_{\Gamma} z dx + x dy + y dz = \frac{3}{2}.$$

**例 2** 利用斯托克斯公式计算曲线积分

$$I = \oint_{\Gamma} (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz,$$

其中  $\Gamma$  是用平面  $x + y + z = \frac{3}{2}$  截立方体  $\{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$  的表面所得的截痕, 若从  $Ox$  轴的正向看去, 取逆时针方向(图 11-30(a)).

解 取  $\Sigma$  为平面  $x + y + z = \frac{3}{2}$  的上侧被  $\Gamma$  所围成的部分,  $\Sigma$  的单位法向量  $n = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ , 即  $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . 按斯托克斯公式, 有

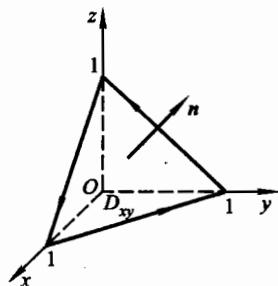


图 11-29

$$I = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix} dS$$

$$= -\frac{4}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (x + y + z) dS.$$

因为在  $\Sigma$  上  $x + y + z = \frac{3}{2}$ , 故

$$I = -\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} \iint_{\Sigma} dS = -2\sqrt{3} \iint_{D_{xy}} \sqrt{3} dx dy = -6\sigma_{xy},$$

其中  $D_{xy}$  为  $\Sigma$  在  $xOy$  平面上的投影区域(图 11-30(b)),  $\sigma_{xy}$  为  $D_{xy}$  的面积, 因

$$\sigma_{xy} = 1 - 2 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$$

故

$$I = -\frac{9}{2}.$$

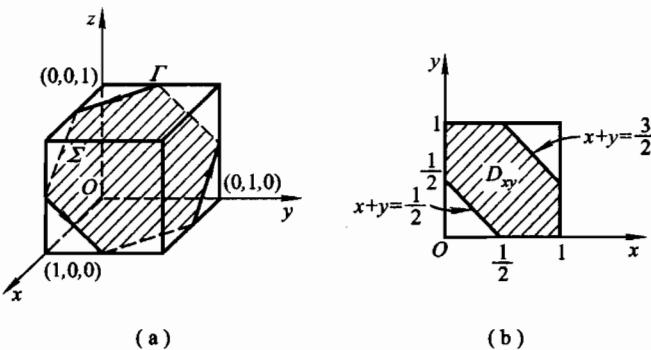


图 11-30

## \* 二、空间曲线积分与路径无关的条件

在第三节中, 利用格林公式推得了平面曲线积分与路径无关的条件. 完全类似地, 利用斯托克斯公式, 可推得空间曲线积分与路径无关的条件.

首先我们指出, 空间曲线积分与路径无关相当于沿任意闭曲线的曲线积分分为零. 关于空间曲线积分在什么条件下与路径无关的问题, 有以下结论:

**定理 2** 设空间区域  $G$  是一维单连通域, 函数  $P(x, y, z)$ 、 $Q(x, y, z)$ 、 $R(x, y, z)$  在  $G$  内具有一阶连续偏导数, 则空间曲线积分  $\int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz$

在  $G$  内与路径无关(或沿  $G$  内任意闭曲线的曲线积分为零)的充分必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \quad (5)$$

在  $G$  内恒成立.

证 如果等式(5)在  $G$  内恒成立, 则由斯托克斯公式(1)立即可看出, 沿闭曲线的曲线积分为零, 因此条件是充分的. 反之, 设沿  $G$  内任意闭曲线的曲线积分为零, 若  $G$  内有一点  $M_0$  使(5)式中的三个等式不完全成立, 例如  $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ . 不妨假定

$$\left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)_{M_0} = \eta > 0.$$

过点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  作平面  $z = z_0$ , 并在这个平面上取一个以  $M_0$  为圆心、半径足够小的圆形闭区域  $K$ , 使得在  $K$  上恒有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \geq \frac{\eta}{2}.$$

设  $\gamma$  是  $K$  的正向边界曲线. 因为  $\gamma$  在平面  $z = z_0$  上, 所以按定义有

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy + R dz = \oint_{\gamma} P dx + Q dy.$$

又由(1)式有

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy + R dz = \iint_K \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \geq \frac{\eta}{2} \cdot \sigma,$$

其中  $\sigma$  是  $K$  的面积, 因为  $\eta > 0, \sigma > 0$ , 从而

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy + R dz > 0.$$

这结果与假设矛盾, 从而(5)式在  $G$  内恒成立. 证毕.

应用定理 2 并仿照第三节定理 3 的证法, 便可以得到

**定理 3** 设区域  $G$  是空间一维单连通区域, 函数  $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$  在  $G$  内具有一阶连续偏导数, 则表达式  $P dx + Q dy + R dz$  在  $G$  内成为某一函数  $u(x, y, z)$  的全微分的充分必要条件是等式(5)在  $G$  内恒成立; 当条件(5)满足时, 这函数(不计一常数之差)可用下式求出:

$$u(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P dx + Q dy + R dz \quad (6)$$

或用定积分表示为(按图 11-31 取积分路径, 且此积分路径在  $G$  内)

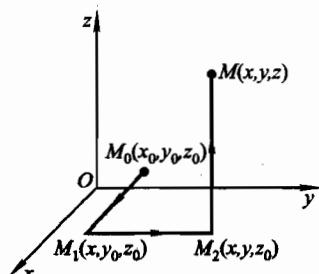


图 11-31

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz. \quad (6')$$

其中  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  为  $G$  内某一定点, 点  $M(x, y, z) \in G$ .

### \* 三、环流量与旋度

设有向量场

$$\mathbf{A}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

其中函数  $P, Q, R$  均连续,  $\Gamma$  是  $\mathbf{A}$  的定义域内的一条分段光滑的有向闭曲线,  $\tau$  是  $\Gamma$  在点  $(x, y, z)$  处的单位切向量, 则积分

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \tau ds$$

称为向量场  $\mathbf{A}$  沿有向闭曲线  $\Gamma$  的环流量.

由两类曲线积分的关系, 环流量又可表达为

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \tau ds = \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot dr = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz.$$

**例 3** 求向量场  $\mathbf{A} = (x^2 - y)\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$  沿闭曲线  $\Gamma$  的环流量, 其中  $\Gamma$  为锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  和平面  $z = 2$  的交线, 从  $z$  轴正向看  $\Gamma$  为逆时针方向.

解  $\Gamma$  的向量方程为

$$r = 2\cos\theta\mathbf{i} + 2\sin\theta\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

于是

$$\mathbf{A} = (x^2 - y)\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} + x^2\mathbf{k} = (4\cos^2\theta - 2\sin\theta)\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 4\cos^2\theta\mathbf{k},$$

$$dr = (-2\sin\theta d\theta)\mathbf{i} + (2\cos\theta d\theta)\mathbf{j},$$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \tau ds = \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot dr = \int_0^{2\pi} (-8\cos^2\theta\sin\theta + 4\sin^2\theta + 16\cos\theta)d\theta = 4\pi.$$

类似于由向量场  $\mathbf{A}$  的通量可以引出向量场  $\mathbf{A}$  在一点的通量密度(即散度)一样, 由向量场  $\mathbf{A}$  沿一闭曲线的环流量可引出向量场  $\mathbf{A}$  在一点的环量密度或旋度. 它是一个向量, 定义如下:

设有一向量场

$$\mathbf{A}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

其中函数  $P, Q, R$  均具有一阶连续偏导数, 则向量

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

称为向量场  $\mathbf{A}$  的旋度, 记作  $\text{rot } \mathbf{A}$ , 即

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (7)$$

利用向量微分算子  $\nabla$ , 向量场  $\mathbf{A}$  的旋度  $\operatorname{rot} \mathbf{A}$  可表示为  $\nabla \times \mathbf{A}$ , 即

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

如果向量场  $\mathbf{A}$  的旋度  $\operatorname{rot} \mathbf{A}$  处处为零, 则称向量场  $\mathbf{A}$  为无旋场. 而一个无源、无旋的向量场称为调和场. 调和场是物理学中另一类重要的向量场, 这种场与调和函数有密切的关系.

**例 4** 求例 3 中的向量场  $\mathbf{A}$  的旋度.

解

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - y & 4z & x^2 \end{vmatrix} = -4\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

设斯托克斯公式中的有向曲面  $\Sigma$  在点  $(x, y, z)$  处的单位法向量为

$$\mathbf{n} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k},$$

则

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

于是, 斯托克斯公式可以写成下面的向量形式

$$\iint_{\Sigma} (\operatorname{rot} \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \tau ds \quad (8)$$

或

$$\iint_{\Sigma} (\operatorname{rot} \mathbf{A})_{\parallel} dS = \oint_{\Gamma} \mathbf{A}_{\parallel} \cdot \tau ds. \quad (8')$$

斯托克斯公式(8)表示: 向量场  $\mathbf{A}$  沿有向闭曲线  $\Gamma$  的环流量等于向量场  $\mathbf{A}$  的旋度通过曲面  $\Sigma$  的通量, 这里  $\Gamma$  的正向与  $\Sigma$  的侧应符合右手规则.

最后, 我们从力学角度来对  $\operatorname{rot} \mathbf{A}$  的含义作些解释.

设有刚体绕定轴  $l$  转动, 角速度为  $\omega$ ,  $M$  为刚体内任意一点. 在定轴  $l$  上任取一点  $O$  为坐标原点, 作空间直角坐标系, 使  $z$  轴与定轴  $l$  重合, 则  $\omega = \omega k$ , 而点  $M$  可用向量  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM} = (x, y, z)$  来确定. 由力学知道, 点  $M$  的线速度  $\mathbf{v}$  可表示为

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

由此有

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-\omega y, \omega x, 0),$$

而

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 2\omega) = 2\boldsymbol{\omega}.$$

从速度场  $\mathbf{v}$  的旋度与旋转角速度的这个关系, 可见“旋度”这一名词的由来.

## 习 题 11-7

1. 试对曲面  $\Sigma: z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1, P = y^2, Q = x, R = z^2$  验证斯托克斯公式.

2. 利用斯托克斯公式, 计算下列曲线积分:

(1)  $\oint_{\Gamma} ydx + zd\mathbf{y} + xdz$ , 其中  $\Gamma$  为圆周  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0$ , 若从  $x$  轴的正向看去, 这圆周是取逆时针方向;

(2)  $\oint_{\Gamma} (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$ , 其中  $\Gamma$  为椭圆  $x^2 + y^2 = a^2, \frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1 (a > 0, b > 0)$ , 若从  $x$  轴正向看去, 这椭圆是取逆时针方向;

(3)  $\oint_{\Gamma} 3ydx - xzdy + yz^2dz$ , 其中  $\Gamma$  是圆周  $x^2 + y^2 = 2z, z = 2$ , 若从  $z$  轴正向看去, 这圆周是取逆时针方向;

(4)  $\oint_{\Gamma} 2ydx + 3xdy - z^2dz$ , 其中  $\Gamma$  是圆周  $x^2 + y^2 + z^2 = 9, z = 0$ , 若从  $z$  轴正向看去, 这圆周是取逆时针方向.

3. 求下列向量场  $\mathbf{A}$  的旋度:

$$(1) \mathbf{A} = (2z - 3y)\mathbf{i} + (3x - z)\mathbf{j} + (y - 2x)\mathbf{k};$$

$$(2) \mathbf{A} = (z + \sin y)\mathbf{i} - (z - x\cos y)\mathbf{j};$$

$$(3) \mathbf{A} = x^2 \sin y\mathbf{i} + y^2 \sin(xz)\mathbf{j} + xy \sin(\cos z)\mathbf{k}.$$

4. 利用斯托克斯公式把曲面积分  $\iint_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$  化为曲线积分, 并计算积分值, 其中  $\mathbf{A}, \Sigma$  及  $\mathbf{n}$  分别如下:

$$(1) \mathbf{A} = y^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + xz\mathbf{k}, \Sigma \text{ 为上半球面 } z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \text{ 的上侧, } \mathbf{n} \text{ 是 } \Sigma \text{ 的单位法向量;}$$

(2)  $\mathbf{A} = (y - z)\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - xz\mathbf{k}, \Sigma \text{ 为立方体 } \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2\} \text{ 的表面外侧去掉 } xOy \text{ 面上的那个底面, } \mathbf{n} \text{ 是 } \Sigma \text{ 的单位法向量.}$

\* 5. 求下列向量场  $\mathbf{A}$  沿闭曲线  $\Gamma$  (从  $z$  轴正向看  $\Gamma$  依逆时针方向)的环流量:

(1)  $\mathbf{A} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + c\mathbf{k}$  ( $c$  为常量),  $\Gamma$  为圆周  $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ ;

解法:

(2)  $\mathbf{A} = (x-z)\mathbf{i} + (x^3 + yz)\mathbf{j} - 3xy^2\mathbf{k}$ , 其中  $\Gamma$  为圆周  $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0$ .

\* 6. 证明  $\text{rot}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{rot } \mathbf{a} + \text{rot } \mathbf{b}$ .

\* 7. 设  $u = u(x, y, z)$  具有二阶连续偏导数, 求  $\text{rot}(\text{grad } u)$ .

## 总习题十一

1. 填空:

(1) 第二类曲线积分  $\int_L P dx + Q dy + R dz$  化成第一类曲线积分是 \_\_\_\_\_,

其中  $\alpha, \beta, \gamma$  为有向曲线弧  $\Gamma$  在点  $(x, y, z)$  处的 \_\_\_\_\_ 的方向角;

(2) 第二类曲面积分  $\iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$  化成第一类曲面积分是 \_\_\_\_\_,

其中  $\alpha, \beta, \gamma$  为有向曲面  $\Sigma$  在点  $(x, y, z)$  处的 \_\_\_\_\_ 的方向角.

2. 选择下述题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设曲面  $\Sigma$  是上半球面:  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  ( $z \geq 0$ ), 曲面  $\Sigma_1$  是曲面  $\Sigma$  在第一卦限中的部分, 则有 \_\_\_\_\_.

(A)  $\iint_{\Sigma} x dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$

(B)  $\iint_{\Sigma} y dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$

(C)  $\iint_{\Sigma} z dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$

(D)  $\iint_{\Sigma} xyz dS = 4 \iint_{\Sigma_1} xyz dS$

3. 计算下列曲线积分:

(1)  $\oint_L \sqrt{x^2 + y^2} ds$ , 其中  $L$  为圆周  $x^2 + y^2 = ax$ ;

(2)  $\int_{\Gamma} z ds$ , 其中  $\Gamma$  为曲线  $x = t \cos t, y = t \sin t, z = t$  ( $0 \leq t \leq t_0$ );

(3)  $\int_L (2a - y) dx + x dy$ , 其中  $L$  为摆线  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$  上对应  $t$  从 0 到  $2\pi$  的一段弧;

(4)  $\int_{\Gamma} (y^2 - z^2) dx + 2yz dy - x^2 dz$ , 其中  $\Gamma$  是曲线  $x = t, y = t^2, z = t^3$  上由  $t_1 = 0$  到  $t_2 = 1$  的一段弧;

(5)  $\int_L (e^x \sin y - 2y) dx + (e^x \cos y - 2) dy$ , 其中  $L$  为上半圆周  $(x - a)^2 + y^2 = a^2, y \geq 0$

沿逆时针方向;

(6)  $\oint_{\Gamma} xyz dz$ , 其中  $\Gamma$  是用平面  $y = z$  截球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  所得的截痕, 从  $z$  轴的正向看去, 沿逆时针方向.

4. 计算下列曲面积分:

$$(1) \iint_S \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2}, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 是界于平面 } z=0 \text{ 及 } z=H \text{ 之间的圆柱面 } x^2 + y^2 = R^2;$$

(2)  $\iint_S (y^2 - z) dy dz + (z^2 - x) dz dx + (x^2 - y) dx dy$ , 其中  $\Sigma$  为锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  ( $0 \leq z \leq h$ ) 的外侧;

$$(3) \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 为半球面 } z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \text{ 的上侧};$$

$$(4) \iint_S xyz dx dy, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 为球面 } x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ } (x \geq 0, y \geq 0) \text{ 的外侧.}$$

5. 证明:  $\frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$  在整个  $xOy$  平面除去  $y$  的负半轴及原点的区域  $G$  内是某个二元函数的全微分, 并求出一个这样的二元函数.

6. 设在半平面  $x > 0$  内有力  $\mathbf{F} = -\frac{k}{\rho^3}(xi + yj)$  构成力场, 其中  $k$  为常数,  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

证明在此力场中场力所作的功与所取的路径无关.

7. 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内具有一阶连续导数,  $L$  是上半平面 ( $y > 0$ ) 内的有向分段光滑曲线, 其起点为  $(a, b)$ , 终点为  $(c, d)$ . 记

$$I = \int_L \frac{1}{y} [1 + y^2 f(xy)] dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] dy,$$

(1) 证明曲线积分  $I$  与路径无关;

(2) 当  $ab = cd$  时, 求  $I$  的值.

8. 求均匀曲面  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  的质心的坐标.

9. 设  $u(x, y), v(x, y)$  在闭区域  $D$  上都具有二阶连续偏导数, 分段光滑的曲线  $L$  为  $D$  的正向边界曲线. 证明:

$$(1) \iint_D v \Delta u dx dy = - \iint_D (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) dx dy + \oint_L v \frac{\partial u}{\partial n} ds;$$

$$(2) \iint_D (u \Delta v - v \Delta u) dx dy = \oint_L \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds,$$

其中  $\frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial v}{\partial n}$  分别是  $u, v$  沿  $L$  的外法线向量  $n$  的方向导数, 符号  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  称二维拉普拉斯算子.

10. 求向量  $\mathbf{A} = x i + y j + z k$  通过闭区域  $\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$  的边界曲面流向外侧的通量.

11. 求力  $\mathbf{F} = y i + z j + x k$  沿有向闭曲线  $\Gamma$  所作的功, 其中  $\Gamma$  为平面  $x + y + z = 1$  被三个坐标面所截成的三角形的整个边界, 从  $z$  轴正向看去, 沿顺时针方向.

# 第十二章 无穷级数

无穷级数是高等数学的一个重要组成部分,它是表示函数、研究函数的性质以及进行数值计算的一种工具.本章先讨论常数项级数,介绍无穷级数的一些基本内容,然后讨论函数项级数,着重讨论如何将函数展开成幂级数和三角级数的问题.

## 第一节 常数项级数的概念和性质

### 一、常数项级数的概念

人们认识事物在数量方面的特性,往往有一个由近似到精确的过程.在这种认识过程中,会遇到由有限个数量相加到无穷多个数量相加的问题.

例如计算半径为  $R$  的圆面积  $A$ ,具体做法如下:作圆的内接正六边形,算出这六边形的面积  $a_1$ ,它是圆面积  $A$  的一个粗糙的近似值.为了比较准确地计算出  $A$  的值,我们以这个正六边形的每一边为底分别作一个顶点在圆周上的等腰三角形(图 12-1),算出这六个等腰三角形的面积之和  $a_2$ .那么  $a_1 + a_2$  (即内接正十二边形的面积)就是  $A$  的一个较好的近似值.同样地,在这正十二边形的每一边上分别作一个顶点在圆周上的等腰三角形,算出这十二个等腰三角形的面积之和  $a_3$ .那么  $a_1 + a_2 + a_3$  (即内接正二十四边形的面积)是  $A$  的一个更好的近似值.如此继续下去,内接正  $3 \times 2^n$  边形的面积就逐步逼近圆面积:

$$A \approx a_1, A \approx a_1 + a_2, A \approx a_1 + a_2 + a_3, \dots,$$

$$A \approx a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

如果内接正多边形的边数无限增多,即  $n$  无限增大,则和  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$  的极限就是所要求的圆面积  $A$ .这时和式中的项数无限增多,于是出现了无穷多个数量依次相加的数学式子.

一般的,如果给定一个数列

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots,$$

则由这数列构成的表达式

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

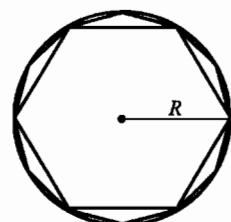


图 12-1

叫做(常数项)无穷级数,简称(常数项)级数,记为  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots,$$

其中第  $n$  项  $u_n$  叫做级数的一般项.

上述级数的定义只是一个形式上的定义,怎样理解无穷级数中无穷多个数量相加呢? 联系上面关于计算圆面积的例子,我们可以从有限项的和出发,观察它们的变化趋势,由此来理解无穷多个数量相加的含义.

作(常数项)级数(1)的前  $n$  项的和

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=1}^n u_i, \quad (2)$$

$s_n$  称为级数(1)的部分和. 当  $n$  依次取  $1, 2, 3, \dots$  时, 它们构成一个新的数列

$$\begin{aligned} s_1 &= u_1, \quad s_2 = u_1 + u_2, \quad s_3 = u_1 + u_2 + u_3, \dots, \\ s_n &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \dots. \end{aligned}$$

根据这个数列有没有极限, 我们引进无穷级数(1)的收敛与发散的概念.

定义 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的部分和数列  $\{s_n\}$  有极限  $s$ , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s,$$

则称无穷级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 这时极限  $s$  叫做这级数的和, 并写成

$$s = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots;$$

如果  $\{s_n\}$  没有极限, 则称无穷级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散.

显然, 当级数收敛时, 其部分和  $s_n$  是级数的和  $s$  的近似值, 它们之间的差值

$$r_n = s - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

叫做级数的余项. 用近似值  $s_n$  代替和  $s$  所产生的误差是这个余项的绝对值, 即误差是  $|r_n|$ .

从上述定义可知, 级数与数列极限有着紧密的联系. 给定级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , 就有部分和数列  $\{s_n = \sum_{i=1}^n u_i\}$ ; 反之, 给定数列  $\{s_n\}$ , 就有以  $\{s_n\}$  为部分和数列的级数

$$s_1 + (s_2 - s_1) + \cdots + (s_n - s_{n-1}) + \cdots$$

$$= s_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (s_n - s_{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

其中  $u_1 = s_1$ ,  $u_n = s_n - s_{n-1}$  ( $n \geq 2$ ). 按定义, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  与数列  $|s_n|$  同时收敛或同时发散, 且在收敛时, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n,$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n u_i.$$

### 例 1 无穷级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots \quad (3)$$

叫做等比级数(又称为几何级数), 其中  $a \neq 0$ ,  $q$  叫做级数的公比. 试讨论级数(3)的收敛性.

解 如果  $q \neq 1$ , 则部分和

$$s_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}.$$

当  $|q| < 1$  时, 由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ , 从而  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a}{1 - q}$ , 因此这时级数(3)收敛, 其和为

$\frac{a}{1 - q}$ . 当  $|q| > 1$  时, 由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$ , 从而  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ , 这时级数(3)发散.

如果  $|q| = 1$ , 则当  $q = 1$  时,  $s_n = na \rightarrow \infty$ , 因此级数(3)发散; 当  $q = -1$  时, 级数(3)成为

$$a - a + a - a + \cdots,$$

显然  $s_n$  随着  $n$  为奇数或为偶数而等于  $a$  或等于零, 从而  $s_n$  的极限不存在, 这时级数(3)也发散.

综合上述结果, 我们得到: 如果等比级数(3)的公比的绝对值  $|q| < 1$ , 则级数收敛; 如果  $|q| \geq 1$ , 则级数发散.

### 例 2 证明级数

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots$$

是发散的.

证 这级数的部分和为

$$s_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

显然,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ , 因此所给级数是发散的.

### 例 3 判定无穷级数

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

的收敛性.

解 由于

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

因此

$$\begin{aligned}s_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\&= 1 - \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

所以这级数收敛,它的和是 1.

## 二、收敛级数的基本性质

根据无穷级数收敛、发散以及和的概念,可以得出收敛级数的几个基本性质.

**性质 1** 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛于和  $s$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$  也收敛,且其和为  $ks$ .

证 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  与级数  $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$  的部分和分别为  $s_n$  与  $\sigma_n$ , 则

$$\sigma_n = ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n = ks_n,$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} ks_n = k \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = ks.$$

这就表明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$  收敛,且和为  $ks$ .

由关系式  $\sigma_n = ks_n$  知道,如果  $\{s_n\}$  没有极限且  $k \neq 0$ ,那么  $\{\sigma_n\}$  也不可能有极限.因此我们得到如下结论:级数的每一项同乘一个不为零的常数后,它的收敛性不会改变.

**性质 2** 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 、 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  分别收敛于和  $s$ 、 $\sigma$ ,则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$  也收敛,且其和为  $s \pm \sigma$ .

证 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 、 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  的部分和分别为  $s_n$ 、 $\sigma_n$ ,则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$  的部分和

$$\begin{aligned}\tau_n &= (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n) \\ &= (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) \pm (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) = s_n \pm \sigma_n,\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n \pm \sigma_n) = s \pm \sigma.$$

这就表明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$  收敛,且其和为  $s \pm \sigma$ .

性质 2 也说成:两个收敛级数可以逐项相加与逐项相减.

**性质 3 在级数中去掉、加上或改变有限项,不会改变级数的收敛性.**

**证** 我们只需证明“在级数的前面部分去掉或加上有限项,不会改变级数的收敛性”,因为其他情形(即在级数中任意去掉、加上或改变有限项的情形)都可以看成在级数的前面部分先去掉有限项,然后再加上有限项的结果.

设将级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_k + u_{k+1} + \cdots + u_{k+n} + \cdots$$

的前  $k$  项去掉,则得级数

$$u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+n} + \cdots.$$

于是新得的级数的部分和为

$$\sigma_n = u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+n} = s_{k+n} - s_k,$$

其中  $s_{k+n}$  是原来级数的前  $k+n$  项的和.因为  $s_k$  是常数,所以当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\sigma_n$  与  $s_{k+n}$  或者同时具有极限,或者同时没有极限.

类似地,可以证明在级数的前面加上有限项,不会改变级数的收敛性.

**性质 4 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛,则对这级数的项任意加括号后所成的级数**

$$(u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots + (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) + \cdots \quad (4)$$

仍收敛,且其和不变.

**证** 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  (相应于前  $n$  项) 的部分和为  $s_n$ , 加括号后所成的级数

(4)(相应于前  $k$  项) 的部分和为  $A_k$ , 则

$$A_1 = u_1 + \cdots + u_{n_1} = s_{n_1},$$

$$A_2 = (u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) = s_{n_2},$$

.....

$$A_k = (u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots + (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) = s_{n_k}$$

.....

可见,数列  $\{A_k\}$  是数列  $\{s_n\}$  的一个子数列.由数列  $\{s_n\}$  的收敛性以及收敛数列与其子数列的关系可知,数列  $\{A_k\}$  必定收敛,且有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n,$$

即加括号后所成的级数收敛,且其和不变.

**注意** 如果加括号后所成的级数收敛,则不能断定去括号后原来的级数也收敛.例如,级数

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \cdots$$

收敛于零,但级数

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

却是发散的.

根据性质 4 可得如下推论:如果加括号后所成的级数发散,则原来级数也发散.事实上,倘若原来级数收敛,则根据性质 4 知道,加括号后的级数就应该收敛了.

**性质 5(级数收敛的必要条件)** 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛,则它的一般项  $u_n$  趋于零,即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

**证** 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的部分和为  $s_n$ ,且  $s_n \rightarrow s (n \rightarrow \infty)$ ,则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

由性质 5 可知,如果级数的一般项不趋于零,则该级数必定发散.例如,级数

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1} + \cdots,$$

它的一般项  $u_n = (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1}$  当  $n \rightarrow \infty$  时不趋于零,因此该级数是发散的.

**注意** 级数的一般项趋于零并不是级数收敛的充分条件.有些级数虽然一般项趋于零,但仍然是发散的.例如,调和级数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots, \quad (5)$$

虽然它的一般项  $u_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ ,但是它是发散的.现在我们用反证法证明

如下:

假若级数(5)收敛,设它的部分和为  $s_n$ ,且  $s_n \rightarrow s (n \rightarrow \infty)$ .显然,对级数(5)的部分和  $s_{2n}$ ,也有  $s_{2n} \rightarrow s (n \rightarrow \infty)$ .于是

$$s_{2n} - s_n \rightarrow s - s = 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

但另一方面

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ 项}} = \frac{1}{2},$$

故

$$s_{2n} - s_n \not\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

与假设级数(5)收敛矛盾. 这矛盾说明级数(5)必定发散.

### \* 三、柯西审敛原理

怎样判定一个级数的收敛性呢? 我们有下述柯西审敛原理.

**定理(柯西审敛原理)** 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛的充分必要条件为: 对于任意给定的正数  $\epsilon$ , 总存在正整数  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 对于任意的正整数  $p$ , 都有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \epsilon$$

成立.

**证** 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的部分和为  $s_n$ , 因为

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| = |s_{n+p} - s_n|,$$

所以由数列的柯西极限存在准则(第一章第六节), 即得本定理结论.

**例 4** 利用柯西审敛原理判定级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  的收敛性.

**解** 因为对任何正整数  $p$ ,

$$\begin{aligned} & |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \\ &< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\ &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

所以对于任意给定的正数  $\epsilon$ , 取正整数  $N \geqslant \frac{1}{\epsilon}$ , 则当  $n > N$  时, 对任何正整数  $p$ , 都有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \epsilon$$

成立. 按柯西审敛原理, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛.

### 习题 12-1

- 写出下列级数的前五项:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{5^n};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

2. 写出下列级数的一般项:

$$(1) 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots;$$

$$(2) \frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \frac{6}{5} - \cdots;$$

$$(3) \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{x}{2 \cdot 4} + \frac{x\sqrt{x}}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{x^2}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \cdots;$$

$$(4) \frac{a^2}{3} - \frac{a^3}{5} + \frac{a^4}{7} - \frac{a^5}{9} + \cdots.$$

3. 根据级数收敛与发散的定义判定下列级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n});$$

$$(2) \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots;$$

$$(3) \sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{2\pi}{6} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{6} + \cdots.$$

4. 判定下列级数的收敛性:

$$(1) -\frac{8}{9} + \frac{8^2}{9^2} - \frac{8^3}{9^3} + \cdots + (-1)^n \frac{8^n}{9^n} + \cdots;$$

$$(2) \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3n} + \cdots;$$

$$(3) \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[n]{3}} + \cdots;$$

$$(4) \frac{3}{2} + \frac{3^2}{2^2} + \frac{3^3}{2^3} + \cdots + \frac{3^n}{2^n} + \cdots;$$

$$(5) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \cdots.$$

\* 5. 利用柯西审敛原理判定下列级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n};$$

$$(2) 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n};$$

$$(4) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3}\right).$$

## 第二节 常数项级数的收敛法

### 一、正项级数及其收敛法

一般的常数项级数,它的各项可以是正数、负数或者零.现在我们先讨论各项都是正数或零的级数,这种级数称为正项级数.这种级数特别重要,以后将看到许多级数的收敛性问题可归结为正项级数的收敛性问题.

设级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \quad (1)$$

是一个正项级数( $u_n \geq 0$ ),它的部分和为 $s_n$ .显然,数列 $\{s_n\}$ 是一个单调增加数列:

$$s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq \cdots.$$

如果数列 $\{s_n\}$ 有界,即 $s_n$ 总不大于某一常数 $M$ ,根据单调有界的数列必有极限的准则,级数(1)必收敛于和 $s$ ,且 $s_n \leq s \leq M$ .反之,如果正项级数(1)收敛于和 $s$ ,即 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ ,根据有极限的数列是有界数列的性质可知,数列 $\{s_n\}$ 有界.因此,我们得到如下重要的结论.

**定理 1** 正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛的充分必要条件是:它的部分和数列 $\{s_n\}$ 有界.

由定理 1 可知,如果正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散,则它的部分和数列  $s_n \rightarrow +\infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ),即  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty$ .

根据定理 1,可得关于正项级数的一个基本的收敛法.

**定理 2(比较收敛法)** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  都是正项级数,且  $u_n \leq v_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛,则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛;反之,若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散,则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  发散.

**证** 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛于和 $\sigma$ ,则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的部分和

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leq v_1 + v_2 + \cdots + v_n \leq \sigma \quad (n = 1, 2, \dots),$$

即部分和数列 $\{s_n\}$ 有界,由定理 1 知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛.

反之,设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散,则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  必发散.因为若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛,由上面已证明的结论,将有级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  也收敛,与假设矛盾.

注意到级数的每一项同乘不为零的常数  $k$  以及去掉级数前面部分的有限项不会影响级数的收敛性,我们可得如下推论:

**推论** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  都是正项级数,如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛,且存在正整数  $N$ ,使当  $n \geq N$  时有  $u_n \leq k v_n$  ( $k > 0$ ) 成立,则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛;如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  发散,且当  $n \geq N$  时有  $u_n \geq k v_n$  ( $k > 0$ ) 成立,则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散.

### 例 1 讨论 $p$ 级数

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots \quad (2)$$

的收敛性,其中常数  $p > 0$ .

**解** 设  $p \leq 1$ . 这时级数的各项不小于调和级数的对应项:  $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$ , 但调和级数发散,因此根据比较审敛法可知,当  $p \leq 1$  时级数(2)发散.

设  $p > 1$ . 因为当  $k - 1 \leq x \leq k$  时,有  $\frac{1}{k^p} \leq \frac{1}{x^p}$ , 所以

$$\frac{1}{k^p} = \int_{k-1}^k \frac{1}{k^p} dx \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x^p} dx \quad (k = 2, 3, \dots),$$

从而级数(2)的部分和

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^p} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x^p} dx = 1 + \int_1^n \frac{1}{x^p} dx \\ &= 1 + \frac{1}{p-1} \left( 1 - \frac{1}{n^{p-1}} \right) < 1 + \frac{1}{p-1} \quad (n = 2, 3, \dots), \end{aligned}$$

这表明数列  $\{s_n\}$  有界,因此级数(2)收敛.

综合上述结果,我们得到: $p$  级数(2)当  $p > 1$  时收敛,当  $p \leq 1$  时发散.

### 例 2 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 是发散的.

**证** 因为  $n(n+1) < (n+1)^2$ , 所以  $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1}$ . 而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} + \cdots$$

是发散的. 根据比较审敛法可知所给级数也是发散的.

为应用上的方便,下面我们给出比较审敛法的极限形式.

**定理3(比较审敛法的极限形式)** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  都是正项级数,

(1) 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$  ( $0 \leq l < +\infty$ ), 且级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛;

(2) 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l > 0$  或  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$ , 且级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  发散, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散.

**证** (1) 由极限定义可知, 对  $\epsilon = 1$ , 存在正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 有

$$\frac{u_n}{v_n} < l + 1,$$

即  $u_n < (l+1)v_n$ . 而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛, 根据比较审敛法的推论, 知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛.

(2) 按已知条件知极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n}$  存在, 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 则由结论(1)必有级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛, 但已知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  发散, 因此级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  不可能收敛, 即级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散.

极限形式的比较审敛法, 在两个正项级数的一般项均趋于零的情况下, 其实是比较它们的一般项作为无穷小量的阶. 定理表明, 当  $n \rightarrow \infty$  时, 如果  $u_n$  是与  $v_n$  同阶或是比  $v_n$  高阶的无穷小, 而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛; 如果  $u_n$  是与  $v_n$  同阶或是比  $v_n$  低阶的无穷小, 而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  发散, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散.

**例3** 判定级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$  的收敛性.

**解** 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 > 0,$$

而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 根据定理3知此级数发散.

用比较审敛法审敛时,需要适当地选取一个已知其收敛性的级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  作为比较的基准. 最常选用作基准级数的是等比级数和  $p$  级数.

将所给正项级数与等比级数比较, 我们能得到在实用上很方便的比值审敛法和根值审敛法.

**定理 4(比值审敛法, 达朗贝尔(d'Alembert)判别法)** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  为正项级数, 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho,$$

则当  $\rho < 1$  时级数收敛;  $\rho > 1$  (或  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$ ) 时级数发散;  $\rho = 1$  时级数可能收敛也可能发散.

**证** (i) 当  $\rho < 1$ . 取一个适当小的正数  $\epsilon$ , 使得  $\rho + \epsilon = r < 1$ , 根据极限定义, 存在正整数  $m$ , 当  $n \geq m$  时有不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \rho + \epsilon = r.$$

因此

$$u_{m+1} < ru_m, u_{m+2} < ru_{m+1} < r^2 u_m, \dots, u_{m+k} < r^k u_m, \dots.$$

而级数  $\sum_{k=1}^{\infty} r^k u_m$  收敛(公比  $r < 1$ ), 根据定理 2 的推论, 知级数  $\sum_{n=m}^{\infty} u_n$  收敛.

(ii) 当  $\rho > 1$ . 取一个适当小的正数  $\epsilon$ , 使得  $\rho - \epsilon > 1$ . 根据极限定义, 当  $n \geq m$  时有不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \rho - \epsilon > 1,$$

也就是

$$u_{n+1} > u_n.$$

所以当  $n \geq m$  时, 级数的一般项  $u_n$  是逐渐增大的, 从而  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ . 根据级数收敛的必要条件可知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散.

类似地, 可以证明当  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散.

(iii) 当  $\rho = 1$  时级数可能收敛也可能发散. 例如  $p$  级数(2), 不论  $p$  为何值都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = 1.$$

但我们知道,当  $p > 1$  时级数收敛,当  $p \leq 1$  时级数发散,因此只根据  $\rho = 1$  不能判定级数的收敛性.

#### 例 4 证明级数

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \cdots$$

是收敛的,并估计以级数的部分和  $s_n$  近似代替和  $s$  所产生的误差.

解 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 < 1,$$

根据比值审敛法可知所给级数收敛.

以这级数的部分和  $s_n$  近似代替和  $s$  所产生的误差为

$$\begin{aligned} |r_n| &= \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots \\ &= \frac{1}{n!} \left( 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots \right) \\ &< \frac{1}{n!} \left( 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{n!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{(n-1)(n-1)!}. \end{aligned}$$

#### 例 5 判定级数

$$\frac{1}{10} + \frac{1 \cdot 2}{10^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{10^3} + \cdots + \frac{n!}{10^n} + \cdots$$

的收敛性.

解 因为

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{n!} = \frac{n+1}{10},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{10} = \infty.$$

根据比值审敛法可知所给级数发散.

\* 定理 5(根值审敛法,柯西判别法) 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  为正项级数,如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho,$$

则当  $\rho < 1$  时级数收敛,  $\rho > 1$  (或  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = +\infty$ ) 时级数发散,  $\rho = 1$  时级数可能收敛也可能发散.

定理 5 的证明与定理 4 相仿,这里从略.

**例 6** 判定级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n}$  的收敛性.

证  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sqrt[n]{2 + (-1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} e^{\frac{1}{n} \ln[2 + (-1)^n]},$

因  $\ln[2 + (-1)^n]$  有界, 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln[2 + (-1)^n] = 0$ , 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2}.$$

因此, 根据根值审敛法知所给级数收敛.

将所给正项级数与  $p$  级数作比较, 可得在实用上较方便的极限审敛法.

**定理 6(极限审敛法)** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  为正项级数,

(1) 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = l > 0$  (或  $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = +\infty$ ), 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散;

(2) 如果  $p > 1$ , 而  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p u_n = l$  ( $0 \leq l < +\infty$ ), 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛.

证 (1) 在极限形式的比较审敛法中, 取  $v_n = \frac{1}{n}$ , 由调和级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 知结论成立.

(2) 在极限形式的比较审敛法中, 取  $v_n = \frac{1}{n^p}$ , 当  $p > 1$  时,  $p$  级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  收敛, 故结论成立.

**例 7** 判定级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$  的收敛性.

解 因  $\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \frac{1}{n^2} = 1,$$

根据极限审敛法, 知所给级数收敛.

**例 8** 判定级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)$  的收敛性.

解 因为

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{2}} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{2}} \sqrt{n+1} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 = \frac{1}{2} \pi^2, \end{aligned}$$

根据极限审敛法, 知所给级数收敛.

## 二、交错级数及其审敛法

所谓交错级数是这样的级数,它的各项是正负交错的,从而可以写成下面的形式:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots, \quad (3)$$

或

$$-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \cdots, \quad (4)$$

其中  $u_1, u_2, \dots$  都是正数. 我们按级数(3)的形式来证明关于交错级数的一个审敛法.

**定理 7(莱布尼茨定理)** 如果交错级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$  满足条件:

$$(1) u_n \geq u_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots);$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0,$$

则级数收敛,且其和  $s \leq u_1$ ,其余项  $r_n$  的绝对值  $|r_n| \leq u_{n+1}$ .

**证** 先证明前  $2n$  项的和  $s_{2n}$  的极限存在. 为此把  $s_{2n}$  写成两种形式:

$$s_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n})$$

及

$$s_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}.$$

根据条件(1)知道所有括号中的差都是非负的. 由第一种形式可见数列  $|s_{2n}|$  是单调增加的,由第二种形式可见  $s_{2n} < u_1$ . 于是,根据单调有界数列必有极限的准则知道,当  $n$  无限增大时,  $s_{2n}$  趋于一个极限  $s$ ,并且  $s$  不大于  $u_1$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = s \leq u_1.$$

再证明前  $2n+1$  项的和  $s_{2n+1}$  的极限也是  $s$ . 事实上,我们有

$$s_{2n+1} = s_{2n} + u_{2n+1}.$$

由条件(2)知  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} = 0$ ,因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{2n} + u_{2n+1}) = s.$$

由于级数的前偶数项的和与奇数项的和趋于同一极限  $s$ ,故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$  的部分和  $s_n$  当  $n \rightarrow \infty$  时具有极限  $s$ . 这就证明了级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$  收敛于和  $s$ ,且  $s \leq u_1$ .

最后,不难看出余项  $r_n$  可以写成

$$r_n = \pm (u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots),$$

其绝对值

$$|r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots,$$

上式右端也是一个交错级数, 它也满足收敛的两个条件, 所以其和小于级数的第一项, 也就是说

$$|r_n| \leq u_{n+1}.$$

证明完毕.

例如, 交错级数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots$$

满足条件

$$(1) \quad u_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = u_{n+1} \quad (n=1, 2, \dots)$$

及

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

所以它是收敛的, 且其和  $s < 1$ . 如果取前  $n$  项的和

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

作为  $s$  的近似值, 所产生的误差  $|r_n| \leq \frac{1}{n+1}$  ( $= u_{n+1}$ ).

### 三、绝对收敛与条件收敛

现在我们讨论一般的级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots,$$

它的各项为任意实数. 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  各项的绝对值所构成的正项级数

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  收敛, 则称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  绝对收敛; 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  收敛, 而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$

发散, 则称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  条件收敛. 容易知道, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$  是绝对收敛级

数, 而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  是条件收敛级数.

级数绝对收敛与级数收敛有以下重要关系:

**定理 8** 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  绝对收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  必定收敛.

证 令

$$v_n = \frac{1}{2} (u_n + |u_n|) \quad (n=1, 2, \dots).$$

显然  $v_n \geq 0$  且  $v_n \leq |u_n|$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). 因级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  收敛, 故由比较审敛法知道, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛, 从而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} 2v_n$  也收敛. 而  $u_n = 2v_n - |u_n|$ , 由收敛级数的基本性质可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2v_n - \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|,$$

所以级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛. 定理证毕.

上述证明中引入的级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ , 其一般项

$$v_n = \frac{1}{2}(u_n + |u_n|) = \begin{cases} u_n, & u_n > 0, \\ 0, & u_n \leq 0, \end{cases}$$

可见级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  是把级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  中的负项换成 0 而得的, 它也就是级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  中的全体正项所构成的级数. 类似可知, 令

$$w_n = \frac{1}{2}(|u_n| - u_n),$$

则  $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$  为级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  中全体负项的绝对值所构成的级数. 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  绝对收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$  都收敛; 如果级数条件收敛 (即  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 而  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  发散), 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$  都发散.

定理 8 说明, 对于一般的级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , 如果我们用正项级数的审敛法判定级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  收敛, 则此级数收敛. 这就使得一大类级数的收敛性判定问题, 转化成为正项级数的收敛性判定问题.

一般说来, 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  发散, 我们不能断定级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  也发散. 但是, 如果我们用比值审敛法或根值审敛法根据  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \rho > 1$  或  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \rho > 1$

判定级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  发散, 则我们可以断定级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  必定发散. 这是因

为从  $\rho > 1$  可推知  $|u_n| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ , 从而  $u_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ , 因此级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  是发散的.

**例 9** 判定级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$  的收敛性.

**解** 因为  $\left| \frac{\sin n\alpha}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ , 而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 所以级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n\alpha}{n^2} \right|$  也收敛. 由定理 8 知, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$  收敛.

**例 10** 判定级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  的收敛性.

**解** 这是交错级数. 记  $u_n = \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , 有

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow \frac{1}{2} e (n \rightarrow \infty),$$

而  $\frac{1}{2} e > 1$ , 可知  $u_n \not\rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ , 因此所给级数发散.

#### \* 四、绝对收敛级数的性质

绝对收敛级数有很多性质是条件收敛级数所没有的, 下面给出关于绝对收敛级数的两个性质.

**定理 9** 绝对收敛级数经改变项的位置后构成的级数也收敛, 且与原级数有相同的和(即绝对收敛级数具有可交换性).

**证** (1) 先证定理对于收敛的正项级数是正确的.

设级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

为收敛的正项级数, 其部分和为  $s_n$ , 和为  $s$ . 并设级数

$$u_1^* + u_2^* + \cdots + u_n^* + \cdots$$

为改变项的位置后构成的级数, 其部分和为  $s_n^*$ .

对于任何  $n$ , 当它固定后, 取  $m$  足够大, 使  $u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*$  各项都出现在  $s_m = u_1 + u_2 + \cdots + u_m$  中, 于是得

$$s_n^* \leq s_m \leq s,$$

所以, 单调增加的数列  $\{s_n^*\}$  不超过定数  $s$ , 根据单调有界数列必有极限的准则(第一章第六节), 可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^*$  存在, 即级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^*$  收敛, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^* = s^* \leq s.$$

另一方面,如果把原来级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  看成是级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^*$  改变项的位置以后所成的级数,则应用刚才证得的结论,又有

$$s \leq s^*.$$

要使得上面两个不等式同时成立,必定有

$$s^* = s.$$

(2) 再证定理对一般的绝对收敛级数是正确的.

设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  收敛. 在定理 8 的证明中已得

$$u_n = 2v_n - |u_n|,$$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  是收敛的正项级数. 故有

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (2v_n - |u_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} 2v_n - \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|.$$

若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  改变项的位置后的级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^*$ , 则相应的  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  改变为

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n^*$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  改变为  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n^*|$ , 由(1)证得的结论可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n^* = \sum_{n=1}^{\infty} v_n^*, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^*|.$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^* = \sum_{n=1}^{\infty} 2v_n^* - \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^*| = \sum_{n=1}^{\infty} 2v_n - \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

证毕.

在给出绝对收敛级数的另一个性质以前, 我们先来讨论级数的乘法运算.

设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  都收敛, 仿照有限项之和相乘的规则, 作出这两个级数的项所有可能的乘积  $u_i v_k$  ( $i, k = 1, 2, 3, \dots$ ), 这些乘积是

$$u_1 v_1, u_1 v_2, u_1 v_3, \dots, u_1 v_i, \dots,$$

$$u_2 v_1, u_2 v_2, u_2 v_3, \dots, u_2 v_i, \dots,$$

$$u_3 v_1, u_3 v_2, u_3 v_3, \dots, u_3 v_i, \dots,$$

.....

$$u_k v_1, u_k v_2, u_k v_3, \dots, u_k v_i, \dots,$$

.....

这些乘积可以用很多的方式将它们排列成一个数列. 例如可以按“对角线法”或按“正方形法”将它们排列成下面形状的数列(图 12-2):

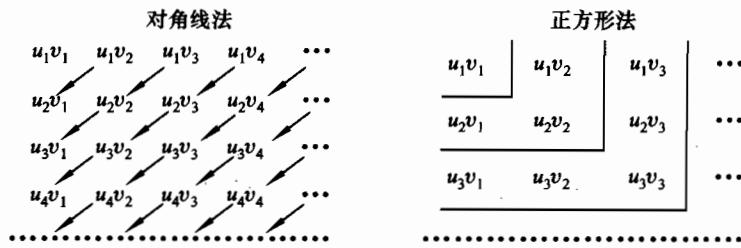


图 12-2

(对角线法)  $u_1v_1; u_1v_2, u_2v_1; u_1v_3, u_2v_2, u_3v_1; \dots$ .

(正方形法)  $u_1v_1; u_1v_2, u_2v_2, u_2v_1; u_1v_3, u_2v_3, u_3v_3, u_3v_2, u_3v_1; \dots$ .

把上面排列好的数列用加号相连, 就组成无穷级数. 我们称按“对角线法”排列所组成的级数

$$u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_1) + \dots + (u_1v_n + u_2v_{n-1} + \dots + u_nv_1) + \dots.$$

为两级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  的柯西乘积.

**定理 10(绝对收敛级数的乘法)** 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  都绝对收敛, 其和分别为  $s$  和  $\sigma$ , 则它们的柯西乘积

$$u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_1) + \dots + (u_1v_n + u_2v_{n-1} + \dots + u_nv_1) + \dots \quad (5)$$

也是绝对收敛的, 且其和为  $s \cdot \sigma$ .

**证** 考虑把级数(5)的括号去掉后所成的级数

$$u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + \dots + u_1v_n + \dots \quad (6)$$

如果级数(6)绝对收敛且其和为  $w$ , 则由收敛级数的基本性质 4 及比较审敛法可知, 级数(5)也绝对收敛且其和为  $w$ . 因此只要证明级数(6)绝对收敛且其和  $w = s \cdot \sigma$  就行了.

(1) 先证级数(6)绝对收敛.

设  $w_m$  为级数(6)的前  $m$  项分别取绝对值后所作成的和, 又设

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |v_n| = B,$$

则显然有

$$w_m \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |v_n| \leq A \cdot B.$$

由此可见单调增加数列  $\{w_m\}$  不超过定数  $AB$ , 所以级数(6)绝对收敛.

(2) 再证级数(6)的和  $w = s \cdot \sigma$ .

把级数(6)的各项位置重新排列并加上括号使它成为按“正方形法”排列所组成的级数

$$\begin{aligned} u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_2 + u_2 v_1) + \cdots \\ + (u_1 v_n + u_2 v_n + \cdots + u_n v_n + u_n v_{n-1} + \cdots + u_n v_1) + \cdots. \end{aligned} \quad (7)$$

根据定理 9 及收敛级数的基本性质 4 可知, 对于绝对收敛级数(6)这样做法是不会改变其和的. 容易看出, 级数(7)的前  $n$  项的和恰好为

$$(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) \cdot (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) = s_n \cdot \sigma_n,$$

因此

$$w = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n \cdot \sigma_n) = s \cdot \sigma.$$

## 习题 12-2

1. 用比较审敛法或极限形式的比较审敛法判定下列级数的收敛性:

$$(1) 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)} + \cdots;$$

$$(2) 1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \cdots + \frac{1+n}{1+n^2} + \cdots;$$

$$(3) \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \cdots;$$

$$(4) \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2^2} + \sin \frac{\pi}{2^3} + \cdots + \sin \frac{\pi}{2^n} + \cdots;$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} \quad (a > 0).$$

2. 用比值审敛法判定下列级数的收敛性:

$$(1) \frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{3^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{3^3}{3 \cdot 2^3} + \cdots + \frac{3^n}{n \cdot 2^n} + \cdots; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

\* 3. 用根值审敛法判定下列级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^n; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\ln(n+1)]^n}; \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{3n-1} \right)^{2n-1};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{b}{a_n} \right)^n, \text{ 其中 } a_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty), a_n, b, a \text{ 均为正数.}$$

4. 判定下列级数的收敛性:

$$(1) \frac{3}{4} + 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \cdots + n\left(\frac{3}{4}\right)^n + \cdots;$$

$$(2) \frac{1^4}{1!} + \frac{2^4}{2!} + \frac{3^4}{3!} + \cdots + \frac{n^4}{n!} + \cdots;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n};$$

$$(5) \sqrt{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \cdots + \sqrt{\frac{n+1}{n}} + \cdots;$$

$$(6) \frac{1}{a+b} + \frac{1}{2a+b} + \cdots + \frac{1}{na+b} + \cdots \quad (a>0, b>0).$$

5. 判定下列级数是否收敛? 如果是收敛的, 是绝对收敛还是条件收敛?

$$(1) 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{3^{n-1}};$$

$$(3) \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^4} + \cdots;$$

$$(4) \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \cdots;$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n!}.$$

### 第三节 幂 级 数

#### 一、函数项级数的概念

如果给定一个定义在区间  $I$  上的函数列

$$u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots, u_n(x), \dots,$$

则由这函数列构成的表达式

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \quad (1)$$

称为定义在区间  $I$  上的函数项无穷级数, 简称函数项级数.

对于每一个确定的值  $x_0 \in I$ , 函数项级数(1)成为常数项级数

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + u_3(x_0) + \cdots + u_n(x_0) + \cdots. \quad (2)$$

这个级数(2)可能收敛也可能发散. 如果级数(2)收敛, 就称点  $x_0$  是函数项级数(1)的收敛点; 如果级数(2)发散, 就称点  $x_0$  是函数项级数(1)的发散点. 函数项级数(1)的收敛点的全体称为它的收敛域, 发散点的全体称为它的发散域.

对应于收敛域内的任意一个数  $x$ , 函数项级数成为一收敛的常数项级数, 因而有一确定的和  $s$ . 这样, 在收敛域上, 函数项级数的和是  $x$  的函数  $s(x)$ , 通常称  $s(x)$  为函数项级数的和函数, 这函数的定义域就是级数的收敛域, 并写成

$$s(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots.$$

把函数项级数(1)的前  $n$  项的部分和记作  $s_n(x)$ , 则在收敛域上有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = s(x).$$

记  $r_n(x) = s(x) - s_n(x)$ ,  $r_n(x)$  叫做函数项级数的余项(当然, 只有  $x$  在收敛域上  $r_n(x)$  才有意义), 并有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0.$$

## 二、幂级数及其收敛性

函数项级数中简单而常见的一类级数就是各项都是幂函数的函数项级数, 即所谓幂级数, 它的形式是<sup>①</sup>

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \quad (3)$$

其中常数  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  叫做幂级数的系数. 例如

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots,$$

$$1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \cdots + \frac{1}{n!} x^n + \cdots$$

都是幂级数.

现在我们来讨论: 对于一个给定的幂级数, 它的收敛域与发散域是怎样的? 即  $x$  取数轴上哪些点时幂级数收敛, 取哪些点时幂级数发散? 这就是幂级数的收敛性问题.

先看一个例子. 考察幂级数

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

的收敛性. 由第一节例 1 知道, 当  $|x| < 1$  时, 这级数收敛于和  $\frac{1}{1-x}$ ; 当  $|x| \geq 1$  时, 这级数发散. 因此, 这幂级数的收敛域是开区间  $(-1, 1)$ , 发散域是  $(-\infty, -1]$  及  $[1, +\infty)$ , 并有

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1).$$

在这个例子中我们看到, 这个幂级数的收敛域是一个区间. 事实上, 这个结论对于一般的幂级数也是成立的. 我们有如下定理.

<sup>①</sup> 幂级数的一般形式是  $a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$ . 只要作代换  $t = x - x_0$ , 就可以把它化成(3)的形式. 所以取(3)式来讨论, 并不影响一般性.

**定理 1(阿贝尔(Abel)定理)** 如果级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  当  $x = x_0$  ( $x_0 \neq 0$ ) 时收敛, 则适合不等式  $|x| < |x_0|$  的一切  $x$  使这幂级数绝对收敛. 反之, 如果级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  当  $x = x_0$  时发散, 则适合不等式  $|x| > |x_0|$  的一切  $x$  使这幂级数发散.

**证** 先设  $x_0$  是幂级数(3)的收敛点, 即级数

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n + \cdots$$

收敛. 根据级数收敛的必要条件, 这时有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0,$$

于是存在一个常数  $M$ , 使得

$$|a_n x_0^n| \leq M \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

这样级数(3)的一般项的绝对值

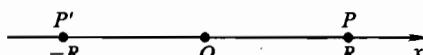
$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n.$$

因为当  $|x| < |x_0|$  时, 等比级数  $\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$  收敛 (公比  $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$ ), 所以级数  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$  收敛, 也就是级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  绝对收敛.

定理的第二部分可用反证法证明. 假设幂级数当  $x = x_0$  时发散而有一点  $x_1$  适合  $|x_1| > |x_0|$  使级数收敛, 则根据本定理的第一部分, 级数当  $x = x_0$  时应收敛, 这与假设矛盾. 定理得证.

定理 1 表明, 如果幂级数在  $x = x_0$  处收敛, 则对于开区间  $(-|x_0|, |x_0|)$  内的任何  $x$ , 幂级数都收敛; 如果幂级数在  $x = x_0$  处发散, 则对于闭区间  $[-|x_0|, |x_0|]$  外的任何  $x$ , 幂级数都发散.

设已给幂级数在数轴上既有收敛点



(不仅是原点)也有发散点. 现在从原点沿数轴向右方走, 最初只遇到收敛点, 然后

图 12-3

就只遇到发散点. 这两部分的界点可能是收敛点也可能是发散点. 从原点沿数轴向左方走情形也是如此. 两个界点  $P$  与  $P'$  在原点的两侧, 且由定理 1 可以证明它们到原点的距离是一样的(图 12-3).

从上面的几何说明, 得到下述重要推论:

**推论** 如果幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  不是仅在  $x = 0$  一点收敛, 也不是在整个数轴上都收敛, 则必有一个确定的正数  $R$  存在, 使得

当  $|x| < R$  时, 幂级数绝对收敛;

当  $|x| > R$  时, 幂级数发散;

当  $x = R$  与  $x = -R$  时, 幂级数可能收敛也可能发散.

正数  $R$  通常叫做幂级数(3)的收敛半径. 开区间  $(-R, R)$  叫做幂级数(3)的收敛区间. 再由幂级数在  $x = \pm R$  处的收敛性就可以决定它的收敛域是  $(-R, R)$ 、 $[-R, R)$ 、 $(-R, R]$  或  $[-R, R]$  这四个区间之一.

如果幂级数(3)只在  $x = 0$  处收敛, 这时收敛域只有一点  $x = 0$ , 但为了方便起见, 规定这时收敛半径  $R = 0$ ; 如果幂级数(3)对一切  $x$  都收敛, 则规定收敛半径  $R = +\infty$ , 这时收敛域是  $(-\infty, +\infty)$ . 这两种情形确实都是存在的, 见下面的例 2 及例 3.

关于幂级数的收敛半径求法, 有下面的定理.

**定理 2** 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho,$$

其中  $a_n, a_{n+1}$  是幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的相邻两项的系数, 则这幂级数的收敛半径

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \rho \neq 0, \\ +\infty, & \rho = 0, \\ 0, & \rho = +\infty. \end{cases}$$

**证** 考察幂级数(3)的各项取绝对值所成的级数

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \cdots + |a_n x^n| + \cdots. \quad (4)$$

这级数相邻两项之比为

$$\frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x|.$$

(1) 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$  ( $\rho \neq 0$ ) 存在, 根据比值审敛法, 则当  $\rho |x| < 1$  即

$|x| < \frac{1}{\rho}$  时, 级数(4)收敛, 从而级数(3)绝对收敛; 当  $\rho |x| > 1$  即  $|x| > \frac{1}{\rho}$  时, 级数(4)发散并且从某一个  $n$  开始

$$|a_{n+1} x^{n+1}| > |a_n x^n|,$$

因此一般项  $|a_n x^n|$  不能趋于零, 所以  $a_n x^n$  也不能趋于零, 从而级数(3)发散. 于是收敛半径  $R = \frac{1}{\rho}$ .

(2) 如果  $\rho = 0$ , 则对任何  $x \neq 0$ , 有  $\frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 所以级数(4)收

敛,从而级数(3)绝对收敛.于是  $R = +\infty$ .

(3) 如果  $\rho = +\infty$ ,则对于除  $x = 0$  外的其他一切  $x$  值,级数(3)必发散,否则由定理 1 知道将有点  $x \neq 0$  使级数(4)收敛.于是  $R = 0$ .

### 例 1 求幂级数

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots$$

的收敛半径与收敛域.

解 因为

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

所以收敛半径

$$R = \frac{1}{\rho} = 1.$$

对于端点  $x = 1$ , 级数成为交错级数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots,$$

此级数收敛;

对于端点  $x = -1$ , 级数成为

$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n} - \cdots,$$

此级数发散.因此,收敛域是  $(-1, 1]$ .

### 例 2 求幂级数

$$1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \cdots + \frac{1}{n!} x^n + \cdots$$

的收敛域.

解 因为

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

所以收敛半径  $R = +\infty$ , 从而收敛域是  $(-\infty, +\infty)$ .

### 例 3 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ 的收敛半径(规定 $0! = 1$ ).

解 因为

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = +\infty,$$

所以收敛半径  $R=0$ , 即级数仅在点  $x=0$  处收敛.

例 4 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$  的收敛半径.

解 级数缺少奇次幂的项, 定理 2 不能直接应用. 我们根据比值审敛法来求收敛半径:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2} x^{2(n+1)}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}} \right| = 4|x|^2.$$

当  $4|x|^2 < 1$  即  $|x| < \frac{1}{2}$  时级数收敛; 当  $4|x|^2 > 1$  即  $|x| > \frac{1}{2}$  时级数发散. 所以收敛半径  $R = \frac{1}{2}$ .

例 5 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n \cdot n}$  的收敛域.

解 令  $t = x - 1$ , 上述级数变为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{2^n \cdot n}.$$

因为

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot n}{2^{n+1} \cdot (n+1)} = \frac{1}{2},$$

所以收敛半径  $R = 2$ . 收敛区间为  $|t| < 2$ , 即  $-1 < x < 3$ .

当  $x = 3$  时, 级数成为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , 这级数发散; 当  $x = -1$  时, 级数成为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ , 这级数收敛. 因此原级数的收敛域为  $[-1, 3)$ .

### 三、幂级数的运算

设幂级数

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

及

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots$$

分别在区间  $(-R, R)$  及  $(-R', R')$  内收敛, 对于这两个幂级数, 可以进行下列四则运算:

加法

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots) + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots) \\ = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n + \cdots.$$

### 减法

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots) - (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots) \\ = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \cdots + (a_n - b_n)x^n + \cdots.$$

根据收敛级数的基本性质 2, 上面两式在  $(-R, R)$  与  $(-R', R')$  中较小的区间内成立.

### 乘法

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots) \cdot (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots) \\ = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots \\ + a_n b_0)x^n + \cdots.$$

这是两个幂级数的柯西乘积. 可以证明上式在  $(-R, R)$  与  $(-R', R')$  中较小的区间内成立.

### 除法

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \\ & b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots \\ & = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots, \end{aligned}$$

这里假设  $b_0 \neq 0$ . 为了决定系数  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ , 可以将级数  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  与  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  相乘, 并令乘积中各项的系数分别等于级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  中同次幂的系数, 即得

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 c_0, \\ a_1 &= b_1 c_0 + b_0 c_1, \\ a_2 &= b_2 c_0 + b_1 c_1 + b_0 c_2, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

由这些方程就可以顺序地求出  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ .

相除后所得的幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  的收敛区间可能比原来两级数的收敛区间小得多<sup>①</sup>.

① 例如

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots.$$

级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + 0x + \cdots + 0x^n + \cdots$  与  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 1 - x + 0x^2 + \cdots + 0x^n + \cdots$  在整个数轴上收敛, 但级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$  仅在区间  $(-1, 1)$  内收敛.

关于幂级数的和函数有下列重要性质①：

**性质 1** 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的和函数  $s(x)$  在其收敛域  $I$  上连续.

**性质 2** 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的和函数  $s(x)$  在其收敛域  $I$  上可积，并有逐项积分公式

$$\begin{aligned}\int_0^x s(x) dx &= \int_0^x \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx \\&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} (x \in I),\end{aligned}\quad (5)$$

逐项积分后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

**性质 3** 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的和函数  $s(x)$  在其收敛区间  $(-R, R)$  内可导，且有逐项求导公式

$$s'(x) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} (|x| < R), \quad (6)$$

逐项求导后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

反复应用上述结论可得：幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的和函数  $s(x)$  在其收敛区间  $(-R, R)$  内具有任意阶导数.

**例 6** 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$  的和函数.

解 先求收敛域. 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 1,$$

得收敛半径  $R = 1$ .

在端点  $x = -1$  处，幂级数成为  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ ，是收敛的交错级数；在端点  $x = 1$  处，幂级数成为  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ ，是发散的. 因此收敛域为  $I = [-1, 1)$ .

设和函数为  $s(x)$ ，即

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}, \quad x \in [-1, 1).$$

于是

$$xs(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

① 证明见本章第六节二.

利用性质 3,逐项求导,并由

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1),$$

得

$$[xs(x)]' = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1).$$

对上式从 0 到  $x$  积分,得

$$xs(x) = \int_0^x \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x) \quad (-1 \leq x < 1).$$

于是,当  $x \neq 0$  时,有  $s(x) = -\frac{1}{x} \ln(1-x)$ .

而  $s(0)$  可由  $s(0) = a_0 = 1$  得出,也可由和函数的连续性得到

$$s(0) = \lim_{x \rightarrow 0} s(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ -\frac{1}{x} \ln(1-x) \right] = 1.$$

故 
$$s(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} \ln(1-x), & x \in [-1, 0) \cup (0, 1), \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

### 习题 12-3

1. 求下列幂级数的收敛区间:

(1)  $x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n + \cdots$ ;

(2)  $1 - x + \frac{x^2}{2^2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n^2} + \cdots$ ;

(3)  $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \frac{x^3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots + \frac{x^n}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} + \cdots$ ;

(4)  $\frac{x}{1 \cdot 3} + \frac{x^2}{2 \cdot 3^2} + \frac{x^3}{3 \cdot 3^3} + \cdots + \frac{x^n}{n \cdot 3^n} + \cdots$ ;

(5)  $\frac{2}{2}x + \frac{2^2}{5}x^2 + \frac{2^3}{10}x^3 + \cdots + \frac{2^n}{n^2 + 1}x^n + \cdots$ ;

(6)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ ;

(7)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$ ;

(8)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$ .

2. 利用逐项求导或逐项积分,求下列级数的和函数.

(1)  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ ;

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1};$$

$$(3) x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots.$$

## 第四节 函数展开成幂级数

前面讨论了幂级数的收敛域及其和函数的性质.但在许多应用中,我们遇到的却是相反的问题:给定函数  $f(x)$ ,要考虑它是否能在某个区间内“展开成幂级数”,就是说,是否能找到这样一个幂级数,它在某区间内收敛,且其和恰好就是给定的函数  $f(x)$ .如果能找到这样的幂级数,我们就说,函数  $f(x)$  在该区间内能展开成幂级数,而这个幂级数在该区间内就表达了函数  $f(x)$ .

假设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某邻域  $U(x_0)$  内能展开成幂级数,即有

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots, \quad x \in U(x_0), \quad (1)$$

那么,根据和函数的性质,可知  $f(x)$  在  $U(x_0)$  内应具有任意阶导数,且

$$f^{(n)}(x) = n! a_n + (n+1)! a_{n+1}(x - x_0) + \frac{(n+2)!}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots,$$

由此可得

$$f^{(n)}(x_0) = n! a_n,$$

于是

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \quad (n=0,1,2,\cdots). \quad (2)$$

这就表明,如果函数  $f(x)$  有幂级数展开式(1),那么该幂级数的系数  $a_n$  由公式(2)确定,即该幂级数必为

$$\begin{aligned} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \cdots \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n, \end{aligned} \quad (3)$$

而展开式必为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n, \quad x \in U(x_0). \quad (4)$$

幂级数(3)叫做函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处的泰勒级数.展开式(4)叫做函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处的泰勒展开式.

由以上讨论可知,函数  $f(x)$  在  $U(x_0)$  内能展开成幂级数的充分必要条件是泰勒展开式(4)成立,也就是泰勒级数(3)在  $U(x_0)$  内收敛,且收敛到  $f(x)$ .

下面讨论泰勒展开式(4)成立的条件.

**定理** 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某一邻域  $U(x_0)$  内具有各阶导数,则  $f(x)$

在该邻域内能展开成泰勒级数的充分必要条件是在该邻域内  $f(x)$  的泰勒公式中的余项  $R_n(x)$  当  $n \rightarrow \infty$  时的极限为零, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \quad x \in U(x_0).$$

证  $f(x)$  的  $n$  阶泰勒公式为(见第三章第三节)

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x),$$

其中  $p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$

叫做函数  $f(x)$  的  $n$  次泰勒多项式, 而

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

就是定理中所指的余项。

由于  $n$  次泰勒多项式  $p_n(x)$  就是级数(3)的前  $n+1$  项部分和, 根据级数收敛的定义, 即有

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n = f(x), \quad x \in U(x_0) \\ \Leftrightarrow & \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = f(x), \quad x \in U(x_0) \\ \Leftrightarrow & \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - p_n(x)] = 0, \quad x \in U(x_0) \\ \Leftrightarrow & \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \quad x \in U(x_0). \end{aligned}$$

下面着重讨论  $x_0 = 0$  的情形. 在(3)式中, 取  $x_0 = 0$ , 得

$$f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n, \quad (5)$$

级数(5)称为函数  $f(x)$  的麦克劳林级数. 如果  $f(x)$  能在  $(-r, r)$  内展开成  $x$  的幂级数, 则有

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n \quad (|x| < r), \quad (6)$$

(6)式称为函数  $f(x)$  的麦克劳林展开式.

要把函数  $f(x)$  展开成  $x$  的幂级数, 可以按照下列步骤进行:

第一步 求出  $f(x)$  的各阶导数  $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x), \dots$ , 如果在  $x = 0$  处某阶导数不存在, 就停止进行, 例如在  $x = 0$  处,  $f(x) = x^{7/3}$  的三阶导数不存在, 它就不能展开为  $x$  的幂级数.

第二步 求出函数及其各阶导数在  $x = 0$  处的值:

$$f(0), f'(0), f''(0), \dots, f^{(n)}(0), \dots$$

第三步 写出幂级数

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots,$$

并求出收敛半径  $R$ .

第四步 利用余项  $R_n(x)$  的表达式  $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) x^{n+1}$

( $0 < \theta < 1$ ), 考察当  $x$  在区间  $(-R, R)$  内时余项  $R_n(x)$  的极限是否为零. 如果为零, 则函数  $f(x)$  在区间  $(-R, R)$  内的幂级数展开式为

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \quad (-R < x < R).$$

例 1 将函数  $f(x) = e^x$  展开成  $x$  的幂级数.

解 所给函数的各阶导数为  $f^{(n)}(x) = e^x$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 因此  $f^{(n)}(0) = 1$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), 这里  $f^{(0)}(0) = f(0)$ . 于是得级数

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

它的收敛半径  $R = +\infty$ .

对于任何有限的数  $x, \xi$  ( $\xi$  在 0 与  $x$  之间), 余项的绝对值为

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < e^{|x|} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

因  $e^{|x|}$  有限, 而  $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$  是收敛级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$  的一般项, 所以当  $n \rightarrow \infty$  时,  $e^{|x|} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$ , 即当  $n \rightarrow \infty$  时, 有  $|R_n(x)| \rightarrow 0$ . 于是得展开式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty). \quad (7)$$

如果在  $x=0$  处附近, 用级数的部分和 (即多项式) 来近似代替  $e^x$ , 那么随着项数的增加, 它们就越来越接近于  $e^x$ , 如图 12-4 所示.

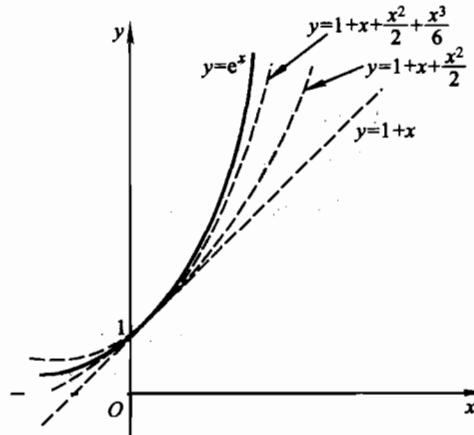


图 12-4

例 2 将函数  $f(x) = \sin x$  展开成  $x$  的幂级数.

解 所给函数的各阶导数为

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$f^{(n)}(0)$  顺序循环地取  $0, 1, 0, -1, \dots$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ), 于是得级数

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots,$$

它的收敛半径  $R = +\infty$ .

对于任何有限的数  $x, \xi$  ( $\xi$  在  $0$  与  $x$  之间), 余项的绝对值当  $n \rightarrow \infty$  时的极限为零:

$$|R_n(x)| = \left| \frac{\sin\left[\xi + \frac{(n+1)\pi}{2}\right]}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

因此得展开式

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty). \quad (8)$$

以上将函数展开成幂级数的例子, 是直接按公式  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$  计算幂级数的系数, 最后考察余项  $R_n(x)$  是否趋于零. 这种直接展开的方法计算量较大, 而且研究余项即使在初等函数中也不是一件容易的事. 下面介绍间接展开的方法, 这就是利用一些已知的函数展开式, 通过幂级数的运算(如四则运算, 逐项求导, 逐项积分)以及变量代换等, 将所给函数展开成幂级数. 这样做不但计算简单, 而且可以避免研究余项.

前面我们已经求得的幂级数展开式有

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad (-\infty < x < +\infty), \quad (7)$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad (-\infty < x < +\infty), \quad (8)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (-1 < x < 1). \quad (9)$$

利用这三个展开式, 可以求得许多函数的幂级数展开式. 例如

对(9)式两边从  $0$  到  $x$  积分, 可得

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (-1 < x \leq 1); \quad (10)$$

对(8)式两边求导, 即得

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad (-\infty < x < +\infty); \quad (11)$$

把(7)式中的  $x$  换成  $x \ln a$ , 可得

$$a^x = e^{x \ln a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n \quad (-\infty < x < +\infty);$$

把(9)式中的  $x$  换成  $x^2$ , 可得

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad (-1 < x < 1);$$

对上式从 0 到  $x$  积分, 可得

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

(7)、(8)、(9)、(10)、(11)等五个幂级数展开式是最常用的, 记住前三个, 后两个也就掌握了.

下面再举几个用间接法把函数展开成幂级数的例子.

**例 3** 把函数  $f(x) = (1-x)\ln(1+x)$  展开成  $x$  的幂级数.

解 由  $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (-1 < x \leq 1)$

得 
$$\begin{aligned} f(x) &= (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} x^n \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{n(n-1)} x^n \quad (-1 < x \leq 1). \end{aligned}$$

**例 4** 将函数  $\sin x$  展开成  $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$  的幂级数.

解 因为

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin \left[ \frac{\pi}{4} + \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ &= \sin \frac{\pi}{4} \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos \frac{\pi}{4} \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \right], \end{aligned}$$

并且有

$$\cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = 1 - \frac{\left( x - \frac{\pi}{4} \right)^2}{2!} + \frac{\left( x - \frac{\pi}{4} \right)^4}{4!} - \dots \quad (-\infty < x < +\infty),$$

$$\sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = \left( x - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\left( x - \frac{\pi}{4} \right)^3}{3!} + \frac{\left( x - \frac{\pi}{4} \right)^5}{5!} - \dots \quad (-\infty < x < +\infty),$$

所以

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ 1 + \left( x - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\left( x - \frac{\pi}{4} \right)^2}{2!} - \frac{\left( x - \frac{\pi}{4} \right)^3}{3!} + \dots \right] \quad (-\infty < x < +\infty).$$

例 5 将函数  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}$  展开成  $(x - 1)$  的幂级数.

解 因为

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2 + 4x + 3} = \frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{2(1+x)} - \frac{1}{2(3+x)} \\ &= \frac{1}{4\left(1+\frac{x-1}{2}\right)} - \frac{1}{8\left(1+\frac{x-1}{4}\right)}, \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\left(1+\frac{x-1}{2}\right)} &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (x-1)^n \quad (-1 < x < 3), \\ \frac{1}{8\left(1+\frac{x-1}{4}\right)} &= \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} (x-1)^n \quad (-3 < x < 5), \end{aligned}$$

所以

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{2n+3}} \right) (x-1)^n \quad (-1 < x < 3).$$

最后, 再举一个用直接法展开的例子.

例 6 将函数  $f(x) = (1+x)^m$  展开成  $x$  的幂级数, 其中  $m$  为任意实数.

解  $f(x)$  的各阶导数为

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1},$$

$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2},$$

.....

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

.....

所以

$$f(0) = 1, f'(0) = m, f''(0) = m(m-1), \dots,$$

$$f^{(n)}(0) = m(m-1)\cdots(m-n+1),$$

.....,

于是得级数

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots.$$

这级数相邻两项的系数之比的绝对值

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{m-n}{n+1} \right| \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty),$$

因此,对于任何实数  $m$  这级数在开区间  $(-1, 1)$  内收敛.

为了避免直接研究余项,设这级数在开区间  $(-1, 1)$  内收敛到函数  $F(x)$ :

$$F(x) = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad (-1 < x < 1),$$

下面证明  $F(x) = (1+x)^m \quad (-1 < x < 1)$ .

逐项求导,得

$$F'(x) = m \left[ 1 + \frac{m-1}{1}x + \dots + \frac{(m-1)\dots(m-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} + \dots \right],$$

两边各乘以  $(1+x)$ ,并把含有  $x^n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) 的两项合并起来. 根据恒等式

$$\begin{aligned} & \frac{(m-1)\dots(m-n+1)}{(n-1)!} + \frac{(m-1)\dots(m-n)}{n!} \\ &= \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} \quad (n=1, 2, \dots), \end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned} & (1+x)F'(x) \\ &= m \left[ 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots \right] \\ &= mF(x) \quad (-1 < x < 1). \end{aligned}$$

现在令

$$\varphi(x) = \frac{F(x)}{(1+x)^m},$$

于是  $\varphi(0) = F(0) = 1$ , 且

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{(1+x)^m F'(x) - m(1+x)^{m-1} F(x)}{(1+x)^{2m}} \\ &= \frac{(1+x)^{m-1} [(1+x)F'(x) - mF(x)]}{(1+x)^{2m}} = 0, \end{aligned}$$

所以  $\varphi(x) = c$  (常数). 但是  $\varphi(0) = 1$ , 从而  $\varphi(x) = 1$ , 即

$$F(x) = (1+x)^m.$$

因此在区间  $(-1, 1)$  内有展开式

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad (-1 < x < 1). \quad (12)$$

在区间的端点,展开式是否成立要看  $m$  的数值而定.

公式(12)叫做二项展开式. 特殊地,当  $m$  为正整数时,级数为  $x$  的  $m$  次多

项式,这就是代数学中的二项式定理.

对应于  $m = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$  的二项展开式分别为

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \dots \quad (-1 \leq x \leq 1),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 - \dots \quad (-1 < x \leq 1).$$

### 习题 12-4

1. 求函数  $f(x) = \cos x$  的泰勒级数,并验证它在整个数轴上收敛于这函数.

2. 将下列函数展开成  $x$  的幂级数,并求展开式成立的区间:

(1)  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad (2) \ln(a+x) \quad (a > 0);$

(3)  $a^x; \quad (4) \sin^2 x;$

(5)  $(1+x)\ln(1+x); \quad (6) \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$

3. 将下列函数展开成  $(x-1)$  的幂级数,并求展开式成立的区间:

(1)  $\sqrt{x^3}; \quad (2) \lg x.$

4. 将函数  $f(x) = \cos x$  展开成  $\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$  的幂级数.

5. 将函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  展开成  $(x-3)$  的幂级数.

6. 将函数  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$  展开成  $(x+4)$  的幂级数.

## 第五节 函数的幂级数展开式的应用

### 一、近似计算

有了函数的幂级数展开式,就可用它来进行近似计算,即在展开式有效的区间上,函数值可以近似地利用这个级数按精确度要求计算出来.

例 1 计算  $\sqrt[5]{240}$  的近似值,要求误差不超过 0.0001.

解 因为

$$\sqrt[5]{240} = \sqrt[5]{243-3} = 3 \left(1 - \frac{1}{3^4}\right)^{1/5},$$

所以在二项展开式(第四节(12)式)中取  $m = \frac{1}{5}$ ,  $x = -\frac{1}{3^4}$ , 即得

$$\sqrt[5]{240} = 3 \left( 1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^4} - \frac{1 \cdot 4}{5^2 \cdot 2!} \cdot \frac{1}{3^8} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 9}{5^3 \cdot 3!} \cdot \frac{1}{3^{12}} - \cdots \right).$$

这个级数收敛很快. 取前两项的和作为  $\sqrt[5]{240}$  的近似值, 其误差(也叫做截断误差)为

$$\begin{aligned} |r_2| &= 3 \left( \frac{1 \cdot 4}{5^2 \cdot 2!} \cdot \frac{1}{3^8} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 9}{5^3 \cdot 3!} \cdot \frac{1}{3^{12}} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 14}{5^4 \cdot 4!} \cdot \frac{1}{3^{16}} + \cdots \right) \\ &< 3 \cdot \frac{1 \cdot 4}{5^2 \cdot 2!} \cdot \frac{1}{3^8} \left[ 1 + \frac{1}{81} + \left( \frac{1}{81} \right)^2 + \cdots \right] \\ &= \frac{6}{25} \cdot \frac{1}{3^8} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{81}} = \frac{1}{25 \cdot 27 \cdot 40} < \frac{1}{20000}. \end{aligned}$$

于是取近似式为

$$\sqrt[5]{240} \approx 3 \left( 1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^4} \right).$$

为了使“四舍五入”引起的误差(叫做舍入误差)与截断误差之和不超过  $10^{-4}$ , 计算时应取五位小数, 然后再四舍五入. 因此最后得

$$\sqrt[5]{240} \approx 2.9926.$$

**例 2** 计算  $\ln 2$  的近似值, 要求误差不超过 0.0001.

**解** 在上节公式(10)中, 令  $x = 1$  可得

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots.$$

如果取这级数前  $n$  项的和作为  $\ln 2$  的近似值, 其误差为

$$|r_n| \leq \frac{1}{n+1}$$

(见第二节第二目). 为了保证误差不超过  $10^{-4}$ , 就需要取级数的前 10000 项进行计算. 这样做计算量太大了, 我们必须用收敛较快的级数来代替它.

把上节公式(10)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad (-1 < x \leq 1)$$

中  $x$  换成  $-x$ , 得

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots \quad (-1 \leq x < 1),$$

两式相减, 得到不含有偶次幂的展开式

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2 \left( x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots \right) \quad (-1 < x < 1).$$

令  $\frac{1+x}{1-x} = 2$ , 解出  $x = \frac{1}{3}$ , 以  $x = \frac{1}{3}$  代入最后一个展开式, 得

$$\ln 2 = 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^7} + \dots \right).$$

如果取前四项作为  $\ln 2$  的近似值, 则误差为

$$\begin{aligned} |r_4| &= 2 \left( \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3^9} + \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{3^{11}} + \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{3^{13}} + \dots \right) < \frac{2}{3^{11}} \left[ 1 + \frac{1}{9} + \left( \frac{1}{9} \right)^2 + \dots \right] \\ &= \frac{2}{3^{11}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{4 \cdot 3^9} < \frac{1}{70\,000}. \end{aligned}$$

于是取  $\ln 2 \approx 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^7} \right)$ .

同样地, 考虑到舍入误差, 计算时应取五位小数:

$$\frac{1}{3} \approx 0.333\,33, \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} \approx 0.012\,35,$$

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} \approx 0.000\,82, \quad \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^7} \approx 0.000\,07.$$

因此得

$$\ln 2 \approx 0.693\,1.$$

**例 3** 利用  $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$  求  $\sin 9^\circ$  的近似值, 并估计误差.

**解** 首先把角度化成弧度,

$$9^\circ = \frac{\pi}{180} \times 9(\text{弧度}) = \frac{\pi}{20}(\text{弧度}),$$

从而

$$\sin \frac{\pi}{20} \approx \frac{\pi}{20} - \frac{1}{3!} \left( \frac{\pi}{20} \right)^3.$$

其次估计这个近似值的精确度. 在  $\sin x$  的幂级数展开式(第四节(8)式)中

令  $x = \frac{\pi}{20}$ , 得

$$\sin \frac{\pi}{20} = \frac{\pi}{20} - \frac{1}{3!} \left( \frac{\pi}{20} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left( \frac{\pi}{20} \right)^5 - \frac{1}{7!} \left( \frac{\pi}{20} \right)^7 + \dots.$$

等式右端是一个收敛的交错级数, 且各项的绝对值单调减少. 取它的前两项之和作为  $\sin \frac{\pi}{20}$  的近似值, 其误差为

$$|r_2| \leq \frac{1}{5!} \left( \frac{\pi}{20} \right)^5 < \frac{1}{120} \cdot (0.2)^5 < \frac{1}{300\,000}.$$

因此取  $\frac{\pi}{20} \approx 0.157\,080, \frac{1}{3!} \left( \frac{\pi}{20} \right)^3 \approx 0.000\,646,$

于是得  $\sin 9^\circ \approx 0.156\,43,$

这时误差不超过  $10^{-5}$ .

利用幂级数不仅可计算一些函数值的近似值,而且可计算一些定积分的近似值.具体地说,如果被积函数在积分区间上能展开成幂级数,则把这个幂级数逐项积分,用积分后的级数就可算出定积分的近似值.

#### 例 4 计算定积分

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx$$

的近似值,要求误差不超过 0.000 1(取  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \approx 0.564 19$ ).

解 将  $e^x$  的幂级数展开式(第四节(7)式)中的  $x$  换成  $-x^2$ ,就得到被积函数的幂级数展开式

$$\begin{aligned} e^{-x^2} &= 1 + \frac{(-x^2)}{1!} + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \quad (-\infty < x < +\infty). \end{aligned}$$

于是,根据幂级数在收敛区间内逐项可积,得

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} \right] dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\frac{1}{2}} x^{2n} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( 1 - \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{2^4 \cdot 5 \cdot 2!} - \frac{1}{2^6 \cdot 7 \cdot 3!} + \dots \right). \end{aligned}$$

取前四项的和作为近似值,其误差为

$$|r_4| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2^8 \cdot 9 \cdot 4!} < \frac{1}{90 000},$$

所以

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( 1 - \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{2^4 \cdot 5 \cdot 2!} - \frac{1}{2^6 \cdot 7 \cdot 3!} \right),$$

算得

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx \approx 0.520 5.$$

#### 例 5 计算积分

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

的近似值,要求误差不超过 0.000 1.

解 由于  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ,因此所给积分不是反常积分.如果定义被积函数在

$x=0$  处的值为 1, 则它在积分区间  $[0, 1]$  上连续.

展开被积函数, 有

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty).$$

在区间  $[0, 1]$  上逐项积分, 得

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{7 \cdot 7!} + \dots$$

因为第四项的绝对值

$$\frac{1}{7 \cdot 7!} < \frac{1}{30000},$$

所以取前两项的和作为积分的近似值:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \approx 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!},$$

算得

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \approx 0.9461.$$

## 二、微分方程的幂级数解法

这里, 我们简单介绍一阶微分方程和二阶齐次线性微分方程的幂级数解法.

为求一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

满足初始条件  $y|_{x=x_0} = y_0$  的特解, 如果其中函数  $f(x, y)$  是  $(x - x_0)$ 、 $(y - y_0)$  的多项式

$$f(x, y) = a_{00} + a_{10}(x - x_0) + a_{01}(y - y_0) + \dots + \\ a_{lm}(x - x_0)^l(y - y_0)^m.$$

那么可以设所求特解可展开为  $x - x_0$  的幂级数:

$$y = y_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots, \quad (2)$$

其中  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  是待定的系数. 把(2)代入(1)中, 便得一恒等式, 比较所得恒等式两端  $x - x_0$  的同次幂的系数, 就可定出常数  $a_1, a_2, \dots$ , 以这些常数为系数的级数(2)在其收敛区间内就是方程(1)满足初始条件  $y|_{x=x_0} = y_0$  的特解.

例 6 求方程  $\frac{dy}{dx} = x + y^2$  满足  $y|_{x=0} = 0$  的特解.

解 这时  $x_0 = 0, y_0 = 0$ , 故设

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \dots,$$

把  $y$  及  $y'$  的幂级数展开式代入原方程, 得

$$\begin{aligned} & a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \cdots \\ &= x + (a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots)^2 \\ &= x + a_1^2x^2 + 2a_1a_2x^3 + (a_2^2 + 2a_1a_3)x^4 + \cdots, \end{aligned}$$

上式为恒等式, 比较上式两端  $x$  的同次幂的系数, 得

$$a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = 0, a_4 = 0, a_5 = \frac{1}{20}, \cdots,$$

于是所求解的幂级数展开式的开始几项为

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{20}x^5 + \cdots.$$

关于二阶齐次线性方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (3)$$

用幂级数求解的问题, 我们先叙述一个定理:

**定理** 如果方程(3)中的系数  $P(x)$  与  $Q(x)$  可在  $-R < x < R$  内展开为  $x$  的幂级数, 那么在  $-R < x < R$  内方程(3)必有形如

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

的解.

这定理的证明从略.

**例 7** 求微分方程

$$y'' - xy = 0$$

满足初始条件

$$y|_{x=0} = 0, \quad y'|_{x=0} = 1$$

的特解.

**解** 这里  $P(x) = 0, Q(x) = -x$  在整个数轴上满足定理的条件. 因此所求的解可在整个数轴上展开成  $x$  的幂级数

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (4)$$

由条件  $y|_{x=0} = 0$ , 得  $a_0 = 0$ . 对级数(4)逐项求导, 有

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1},$$

由条件  $y'|_{x=0} = 1$ , 得  $a_1 = 1$ . 于是所求特解  $y$  及  $y'$  的展开式成为

$$y = x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots = x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n, \quad (5)$$

$$y' = 1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} na_nx^{n-1}. \quad (6)$$

对级数(6)逐项求导,得

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}. \quad (7)$$

把(5)和(7)代入所给方程,并按  $x$  的升幂集项,得

$$2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + (4 \cdot 3a_4 - 1)x^2 + (5 \cdot 4a_5 - a_2)x^3 + \cdots + (6 \cdot 5a_6 - a_3)x^4 + \cdots + [(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}]x^n + \cdots = 0.$$

因为上式是恒等式,所以上式左端各项的系数必全为零,于是有

$$a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = \frac{1}{4 \cdot 3}, a_5 = 0, a_6 = 0, \cdots,$$

一般的

$$(8!) a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \quad (n=3,4,\cdots).$$

从这递推公式可以推得

$$a_7 = \frac{a_4}{7 \cdot 6} = \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}, a_8 = \frac{a_5}{8 \cdot 7} = 0, a_9 = \frac{a_6}{9 \cdot 8} = 0,$$

$$a_{10} = \frac{a_7}{10 \cdot 9} = \frac{1}{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}, \cdots,$$

一般的

$$a_{3m-1} = a_{3m} = 0,$$

$$a_{3m+1} = \frac{1}{(3m+1)3m \cdots 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} \quad (m=1,2,\cdots).$$

于是所求的特解为

$$y = x + \frac{x^4}{4 \cdot 3} + \frac{x^7}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} + \frac{x^{10}}{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} + \cdots + \frac{x^{3m+1}}{(3m+1)3m \cdots 10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} + \cdots.$$

### 三、欧拉公式

设有复数项级数为

$$(u_1 + iv_1) + (u_2 + iv_2) + \cdots + (u_n + iv_n) + \cdots, \quad (8)$$

其中  $u_n, v_n$  ( $n=1,2,3,\cdots$ ) 为实常数或实函数. 如果实部所成的级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \quad (9)$$

收敛于和  $u$ , 并且虚部所成的级数

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots \quad (10)$$

收敛于和  $v$ , 就说级数(8)收敛且其和为  $u + iv$ .

如果级数(8)各项的模所构成的级数

$$\sqrt{u_1^2 + v_1^2} + \sqrt{u_2^2 + v_2^2} + \cdots + \sqrt{u_n^2 + v_n^2} + \cdots$$

收敛,则称级数(8)绝对收敛.如果级数(8)绝对收敛,由于

$$|u_n| \leq \sqrt{u_n^2 + v_n^2}, |v_n| \leq \sqrt{u_n^2 + v_n^2} \quad (n=1,2,3,\dots),$$

那么级数(9),(10)绝对收敛,从而级数(8)收敛.

考察复数项级数

$$1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n + \cdots \quad (z = x + iy). \quad (11)$$

可以证明级数(11)在整个复平面上是绝对收敛的.在  $x$  轴上 ( $z = x$ ) 它表示指数函数  $e^x$ , 在整个复平面上我们用它来定义复变量指数函数, 记作  $e^z$ . 于是  $e^z$  定义为

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n + \cdots \quad (|z| < \infty). \quad (12)$$

当  $x = 0$  时,  $z$  为纯虚数  $iy$ , (12)式成为

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy + \frac{1}{2!}(iy)^2 + \frac{1}{3!}(iy)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(iy)^n + \cdots \\ &= 1 + iy - \frac{1}{2!}y^2 - i\frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{4!}y^4 + i\frac{1}{5!}y^5 - \cdots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{4!}y^4 - \cdots\right) + i\left(y - \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 - \cdots\right) \\ &= \cos y + i \sin y. \end{aligned}$$

把  $y$  换写为  $x$ , 上式变为

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad (13)$$

这就是欧拉(Euler)公式.

应用公式(13), 复数  $z$  可以表示为指数形式:

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}, \quad (14)$$

其中  $\rho = |z|$  是  $z$  的模,  $\theta = \arg z$  是  $z$  的辐角(图 12-5).

在(13)式中把  $x$  换成  $-x$ , 又有

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

与(13)相加、相减, 得

$$\begin{cases} \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \\ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \end{cases} \quad (15)$$

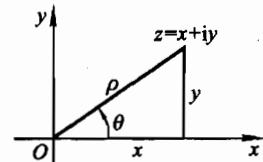


图 12-5

这两个式子也叫做欧拉公式. (13)式或(15)式揭示了三角函数与复变量指数函数之间的一种联系.

最后, 根据定义式(12), 并利用幂级数的乘法, 我们不难验证

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}.$$

特殊地, 取  $z_1$  为实数  $x$ ,  $z_2$  为纯虚数  $iy$ , 则有

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

这就是说, 复变量指数函数  $e^z$  在  $z = x + iy$  处的值是模为  $e^x$ 、辐角为  $y$  的复数.

## 习 题 12-5

1. 利用函数的幂级数展开式求下列各数的近似值:

(1)  $\ln 3$  (误差不超过 0.000 1);

(2)  $\sqrt{e}$  (误差不超过 0.001);

(3)  $\sqrt[9]{522}$  (误差不超过 0.000 01);

(4)  $\cos 2^\circ$  (误差不超过 0.000 1).

2. 利用被积函数的幂级数展开式求下列定积分的近似值:

(1)  $\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^4} dx$  (误差不超过 0.000 1);

(2)  $\int_0^{0.5} \frac{\arctan x}{x} dx$  (误差不超过 0.001).

3. 试用幂级数求下列各微分方程的解:

(1)  $y' - xy - x = 1$ ;

(2)  $y'' + xy' + y = 0$ ;

(3)  $(1-x)y' = x^2 - y$ .

4. 试用幂级数求下列方程满足所给初始条件的特解:

(1)  $y' = y^2 + x^3, y|_{x=0} = \frac{1}{2}$ ;

(2)  $(1-x)y' + y = 1+x, y|_{x=0} = 0$ .

5. 利用欧拉公式将函数  $e^x \cos x$  展开成  $x$  的幂级数.

## \* 第六节 函数项级数的一致收敛性及 一致收敛级数的基本性质

### 一、函数项级数的一致收敛性

我们知道, 有限个连续函数的和仍然是连续函数, 有限个函数的和的导数及积分也分别等于它们的导数及积分的和. 但是对于无穷多个函数的和是否也具有这些性质呢? 换句话说, 无穷多个连续函数的和  $s(x)$  是否仍然是连续函数? 无穷多个函数的导数及积分的和是否仍然分别等于它们的和函数的导数及积分

呢？我们曾经指出，对于幂级数来说，回答是肯定的。但是，对于一般的函数项级数是否都是如此呢？下面来看一个例子。

### 例 1 函数项级数

$$x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \cdots + (x^n - x^{n-1}) + \cdots$$

的每一项都在  $[0, 1]$  上连续，其前  $n$  项之和为  $s_n(x) = x^n$ ，因此和函数为

$$s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

这和函数  $s(x)$  在  $x = 1$  处间断。由此可见，函数项级数的每一项在  $[a, b]$  上连续，并且级数在  $[a, b]$  上收敛，其和函数不一定在  $[a, b]$  上连续。也可以举出这样的例子，函数项级数的每一项的导数及积分所成的级数的和并不等于它们的和函数的导数及积分。这就提出了这样一个问题：对什么级数，能够从级数每一项的连续性得出它的和函数的连续性，从级数的每一项的导数及积分所成的级数之和得出原来级数的和函数的导数及积分呢？要回答这个问题，就需要引入下面的函数项级数的一致收敛性概念。

设函数项级数

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

在区间  $I$  上收敛于和  $s(x)$ 。也就是对于区间  $I$  上的每一个值  $x_0$ ，数项级数

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$  收敛于  $s(x_0)$ ，即级数的部分和所成的数列

$$s_n(x_0) = \sum_{i=1}^n u_i(x_0) \rightarrow s(x_0) \quad (n \rightarrow \infty).$$

按数列极限的定义，对于任意给定的正数  $\epsilon$  以及区间  $I$  上的每一个值  $x_0$ ，都存在着一个正整数  $N$ ，使得当  $n > N$  时，有不等式

$$|s(x_0) - s_n(x_0)| < \epsilon,$$

即

$$|r_n(x_0)| = \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(x_0) \right| < \epsilon.$$

这个数  $N$  一般说来不仅依赖于  $\epsilon$ ，而且也依赖于  $x_0$ ，我们记它为  $N(x_0, \epsilon)$ 。如果对于某一函数项级数能够找到这样一个正整数  $N$ ，它只依赖于  $\epsilon$  而不依赖于  $x_0$ ，也就是对区间  $I$  上的每一个值  $x_0$  都能适用的  $N(\epsilon)$ ，对这类级数我们给一个特殊的名称以区别于一般的收敛级数，这就是下面的一致收敛的定义。

定义 设有函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 。如果对于任意给定的正数  $\epsilon$ ，都存在着一个只依赖于  $\epsilon$  的正整数  $N$ ，使得当  $n > N$  时，对区间  $I$  上的一切  $x$ ，都有不等式

$$|r_n(x)| = |s(x) - s_n(x)| < \epsilon$$

成立,则称函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在区间  $I$  上一致收敛于和  $s(x)$ ,也称函数序列  $\{s_n(x)\}$  在区间  $I$  上一致收敛于  $s(x)$ .

以上函数项级数一致收敛的定义在几何上可解释为:只要  $n$  充分大( $n > N$ ),在区间  $I$  上所有曲线  $y = s_n(x)$  将位于曲线

$$y = s(x) + \varepsilon$$

与

$$y = s(x) - \varepsilon$$

之间(图 12-6).

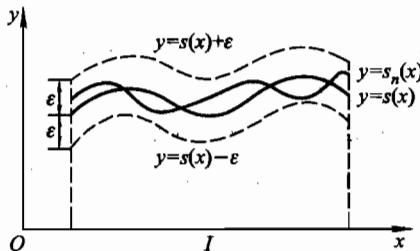


图 12-6

### 例 2 研究级数

$$\frac{1}{x+1} + \left( \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n-1} \right) + \cdots$$

在区间  $[0, +\infty)$  上的一致收敛性.

解 级数的前  $n$  项和  $s_n(x) = \frac{1}{x+n}$ , 因此级数的和

$$s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x+n} = 0 \quad (0 \leq x < +\infty).$$

于是,余项的绝对值

$$|r_n(x)| = |s(x) - s_n(x)| = \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n} \quad (0 \leq x < +\infty).$$

对于任给  $\varepsilon > 0$ , 取自正整数  $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$ , 则当  $n > N$  时, 对于区间  $[0, +\infty)$  上的一切  $x$ , 有

$$|r_n(x)| < \varepsilon.$$

根据定义, 所给级数在区间  $[0, +\infty)$  上一致收敛于  $s(x) \equiv 0$ .

### 例 3 研究例 1 中的级数

$$x + (x^2 - x) + \cdots + (x^n - x^{n-1}) + \cdots$$

在区间  $(0, 1)$  内的一致收敛性.

解 这级数在区间  $(0, 1)$  内处处收敛于和  $s(x) \equiv 0$ , 但并不一致收敛. 事实上, 这个级数的部分和  $s_n(x) = x^n$ , 对于任意一个正整数  $n$ , 取  $x_n = \frac{1}{\sqrt[2^n]{2}}$ , 于是

$$s_n(x_n) = x_n^n = \frac{1}{2},$$

但  $s(x_n) = 0$ , 从而

$$|r_n(x_n)| = |s(x_n) - s_n(x_n)| = \frac{1}{2}.$$

所以, 只要取  $\epsilon < \frac{1}{2}$ , 不论  $n$  多么大, 在  $(0, 1)$  内总存在这样的点  $x_n$ , 使得  $|r_n(x_n)| > \epsilon$ , 因此所给级数在  $(0, 1)$  内不一致收敛. 这表明虽然函数序列  $s_n(x) = x^n$  在  $(0, 1)$  内处处收敛于  $s(x) \equiv 0$ , 但  $s_n(x)$  在  $(0, 1)$  内各点处收敛于零的“快慢”程度是不一致的, 从图 12-7 中我们也可以看出这一情形.

可是对于任意正数  $r < 1$ , 这级数在  $[0, r]$  上一致收敛. 这是因为当  $x = 0$  时, 显然

$$|r_n(x)| = x^n < \epsilon;$$

当  $0 < x \leqslant r$  时, 要使  $x^n < \epsilon$  (不妨设  $\epsilon < 1$ ), 只要  $n \ln x < \ln \epsilon$  或  $n > \frac{\ln \epsilon}{\ln x}$ , 而  $\frac{\ln \epsilon}{\ln x}$  在  $(0, r]$  上的最大值为  $\frac{\ln \epsilon}{\ln r}$ , 故取正整数  $N \geq \frac{\ln \epsilon}{\ln r}$ , 则当  $n > N$  时, 对  $[0, r]$  上的一切  $x$  都有  $x^n < \epsilon$ .

上述例子也说明了一致收敛性与所讨论的区间有关. 以上两例都是直接根据定义来判定级数的一致收敛性的, 现在介绍一个在实用上较方便的判别法.

**定理(魏尔斯特拉斯(Weierstrass)判别法)** 如果函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在区间  $I$  上满足条件:

$$(1) |u_n(x)| \leq a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots);$$

$$(2) \text{ 正项级数 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛,}$$

则函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在区间  $I$  上一致收敛.

**证** 由条件(2), 对任意给定的  $\epsilon > 0$ , 根据柯西审敛原理(第一节第三目)存在正整数  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 对任意的正整数  $p$ , 都有

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} < \frac{\epsilon}{2}.$$

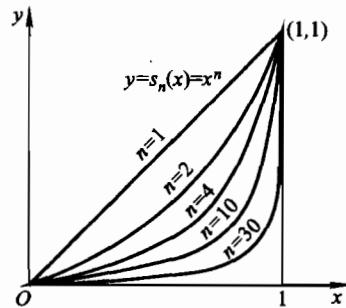


图 12-7

由条件(1), 对任何  $x \in I$ , 都有

$$\begin{aligned} & |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| \\ & \leq |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \cdots + |u_{n+p}(x)| \\ & \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} < \frac{\epsilon}{2}, \end{aligned}$$

令  $p \rightarrow \infty$ , 则由上式得

$$|r_n(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

因此函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在区间  $I$  上一致收敛.

#### 例 4 证明级数

$$\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2^2 x}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n^2 x}{n^2} + \cdots$$

在  $(-\infty, +\infty)$  内一致收敛.

证 因为在  $(-\infty, +\infty)$  内

$$\left| \frac{\sin n^2 x}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 故由魏尔斯特拉斯判别法, 所给级数在  $(-\infty, +\infty)$  内一致收敛.

## 二、一致收敛级数的基本性质

一致收敛级数有如下基本性质.

定理 1 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的各项  $u_n(x)$  在区间  $[a, b]$  上都连续, 且  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在区间  $[a, b]$  上一致收敛于  $s(x)$ , 则  $s(x)$  在  $[a, b]$  上也连续.

证 设  $x_0, x$  为  $[a, b]$  上任意两点. 由等式

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x), \quad s(x_0) = s_n(x_0) + r_n(x_0)$$

得

$$\begin{aligned} |s(x) - s(x_0)| &= |s_n(x) - s_n(x_0) + r_n(x) - r_n(x_0)| \\ &\leq |s_n(x) - s_n(x_0)| + |r_n(x)| + |r_n(x_0)|. \end{aligned} \quad (1)$$

因为级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  一致收敛于  $s(x)$ , 所以对任意给定的正数  $\epsilon$ , 必有正整数  $N = N(\epsilon)$ , 使得当  $n > N$  时, 对  $[a, b]$  上的一切  $x$ , 都有

$$|r_n(x)| < \frac{\epsilon}{3}. \quad (2)$$

当然,也有  $|r_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$ . 选定满足大于  $N$  的  $n$  之后,  $s_n(x)$  是有限项连续函数之和,故  $s_n(x)$  在点  $x_0$  连续,从而必有一个  $\delta > 0$  存在,当  $|x - x_0| < \delta$  时,总有

$$|s_n(x) - s_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}. \quad (3)$$

由(1)、(2)、(3)式可见,对任给  $\epsilon > 0$ ,必有  $\delta > 0$ ,当  $|x - x_0| < \delta$  时,有

$$|s(x) - s(x_0)| < \epsilon.$$

所以  $s(x)$  在点  $x_0$  处连续,而  $x_0$  在  $[a, b]$  上是任意的,因此  $s(x)$  在  $[a, b]$  上连续.

**定理 2** 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的各项  $u_n(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续,且  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛于  $s(x)$ ,则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $[a, b]$  上可以逐项积分,即

$$\int_{x_0}^x s(x) dx = \int_{x_0}^x u_1(x) dx + \int_{x_0}^x u_2(x) dx + \cdots + \int_{x_0}^x u_n(x) dx + \cdots, \quad (4)$$

其中  $a \leq x_0 < x \leq b$ ,并且上式右端的级数在  $[a, b]$  上也一致收敛.

**证** 因为级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛,由定理 1,  $s(x), r_n(x)$  都在  $[a, b]$  上连续,所以积分  $\int_{x_0}^x s(x) dx, \int_{x_0}^x r_n(x) dx$  存在,从而有

$$\left| \int_{x_0}^x s(x) dx - \int_{x_0}^x s_n(x) dx \right| = \left| \int_{x_0}^x r_n(x) dx \right| \leq \int_{x_0}^x |r_n(x)| dx,$$

又由级数的一致收敛性,对任给正数  $\epsilon$ ,必有  $N = N(\epsilon)$ ,使得当  $n > N$  时,对  $[a, b]$  上的一切  $x$ ,都有

$$|r_n(x)| < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

于是,当  $n > N$  时有

$$\left| \int_{x_0}^x s(x) dx - \int_{x_0}^x s_n(x) dx \right| \leq \int_{x_0}^x |r_n(x)| dx < \frac{\epsilon}{b-a} \cdot (x - x_0) \leq \epsilon.$$

根据极限的定义,有

$$\int_{x_0}^x s(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x s_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_{x_0}^x u_i(x) dx,$$

即

$$\int_{x_0}^x s(x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{x_0}^x u_i(x) dx.$$

由于  $N$  只依赖于  $\epsilon$  而与  $x_0, x$  无关, 所以级数  $\sum_{i=1}^{\infty} \int_{x_0}^x u_i(x) dx$  在  $[a, b]$  上一致收敛.

**定理 3** 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在区间  $[a, b]$  上收敛于和  $s(x)$ , 它的各项  $u_n(x)$  都具有连续导数  $u'_n(x)$ , 并且级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $[a, b]$  上也一致收敛, 且可逐项求导, 即

$$s'(x) = u'_1(x) + u'_2(x) + \cdots + u'_n(x) + \cdots. \quad (5)$$

证 先证等式(5). 由于  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛, 设其和为  $\varphi(x)$ , 即  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = \varphi(x)$ , 欲证(5)只需证  $\varphi(x) = s'(x)$  就可以了.

根据定理 1 知,  $\varphi(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 根据定理 2, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$  可逐项积分, 故有

$$\int_{x_0}^x \varphi(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x u'_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(x_0)],$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = s(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = s(x_0),$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(x_0)] = s(x) - s(x_0),$$

从而有

$$\int_{x_0}^x \varphi(x) dx = s(x) - s(x_0),$$

其中  $a \leq x_0 < x \leq b$ . 上式两端求导, 即得关系式

$$\varphi(x) = s'(x).$$

再证级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $[a, b]$  上也一致收敛.

根据定理 2, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x u'_n(x) dx$  在  $[a, b]$  上一致收敛, 而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x u'_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0),$$

$$\text{所以} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x u'_n(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0),$$

由此即得所要证的结论.

必须注意, 级数一致收敛并不能保证可以逐项求导. 例如, 在例 4 中我们已证明了级数

$$\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2^2 x}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n^2 x}{n^2} + \cdots$$

在任何区间  $[a, b]$  上都是一致收敛的, 但逐项求导后的级数

$$\cos x + \cos 2^2 x + \cdots + \cos n^2 x + \cdots,$$

其一般项不趋于零, 所以对任意值  $x$  都是发散的, 因此原级数不可以逐项求导.

下面我们来讨论幂级数的一致收敛性.

**定理 4** 如果幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径为  $R > 0$ , 则此级数在  $(-R, R)$  内的任一闭区间  $[a, b]$  上一致收敛.

**证** 记  $r = \max\{|a|, |b|\}$ , 则对  $[a, b]$  上的一切  $x$ , 都有

$$|a_n x^n| \leq |a_n r^n| \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

而  $0 < r < R$ , 根据第三节定理 1 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$  绝对收敛, 由魏尔斯特拉斯判别法即得所要证的结论.

进一步还可证明, 如果幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在收敛区间的端点收敛, 则一致收敛的区间可扩大到包含端点.

下面我们来证明在第三节中指出的关于幂级数在其收敛区间内的和函数的连续性、逐项可导、逐项可积的结论.

关于和函数的连续性及逐项可积的结论, 由定理 4 和定理 1、2 立即可得. 关于逐项可导的结论, 我们重新叙述成如下定理并给出证明.

**定理 5** 如果幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径为  $R > 0$ , 则其和函数  $s(x)$  在  $(-R, R)$  内可导, 且有逐项求导公式

$$s'(x) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

逐项求导后所得到的幂级数与原级数有相同的收敛半径.

**证** 先证级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$  在  $(-R, R)$  内收敛.

在  $(-R, R)$  内任意取定  $x$ , 再选定  $x_1$ , 使得  $|x| < x_1 < R$ . 记  $q = \frac{|x|}{x_1} < 1$ ,

则

$$|na_nx^{n-1}| = n \left| \frac{x}{x_1} \right|^{n-1} \cdot \frac{1}{x_1} |a_nx_1^n| = nq^{n-1} \cdot \frac{1}{x_1} |a_nx_1^n|,$$

由比值审敛法可知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}$  收敛, 于是  
 $nq^{n-1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$

故数列  $\{nq^{n-1}\}$  有界, 必有  $M > 0$ , 使得

$$nq^{n-1} \cdot \frac{1}{x_1} \leq M \quad (n = 1, 2, \dots).$$

又  $0 < x_1 < R$ , 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_nx_1^n|$  收敛, 由比较审敛法的推论即得级数  $\sum_{n=1}^{\infty} na_nx_1^{n-1}$  收敛.

由定理 4, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$  在  $(-R, R)$  内的任一闭区间  $[a, b]$  上一致收敛, 故幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n$  在  $[a, b]$  上适合定理 3 条件, 从而可逐项求导. 再由  $[a, b]$  在  $(-R, R)$  内的任意性, 即得幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n$  在  $(-R, R)$  内可逐项求导.

设幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$  的收敛半径为  $R'$ . 上面已证得  $R \leq R'$ . 将此幂级数在  $[0, x] (|x| < R')$  上逐项积分即得  $\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n$ , 因逐项积分所得级数的收敛半径不会缩小, 所以  $R' \leq R$ , 于是  $R' = R$ . 定理 5 证毕.

## \* 习 题 12 - 6

1. 已知函数序列  $s_n(x) = \sin \frac{x}{n} (n = 1, 2, 3, \dots)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上收敛于 0,

(1) 问  $N(\epsilon, x)$  取多大, 能使当  $n > N$  时,  $s_n(x)$  与其极限之差的绝对值小于正数  $\epsilon$ ;

(2) 证明  $s_n(x)$  在任一有限区间  $[a, b]$  上一致收敛.

2. 已知级数  $x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots$  在  $(-\infty, +\infty)$  上收敛.

(1) 求出该级数的和;

(2) 问  $N(\epsilon, x)$  取多大, 能使当  $n > N$  时, 级数的余项  $r_n$  的绝对值小于正数  $\epsilon$ ;

(3) 分别讨论级数在区间  $[0, 1], [\frac{1}{2}, 1]$  上的一致收敛性.

3. 按定义讨论下列级数在所给区间上的一致收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{(1+x^2)^n}, -\infty < x < +\infty;$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n, 0 < x < 1.$$

4. 利用魏尔斯特拉斯判别法证明下列级数在所给区间上的一致收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}, -\infty < x < +\infty;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n^4 + x^4}}, -\infty < x < +\infty;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}, 0 \leq x < +\infty;$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n!}, |x| < 10;$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (1 - e^{-nx})}{n^2 + x^2}, 0 \leq x < +\infty.$$

## 第七节 傅里叶级数

从本节开始,我们讨论由三角函数组成的函数项级数,即所谓三角级数,着重研究如何把函数展开成三角级数.

本章

§ 1

### 一、三角级数 三角函数系的正交性

在第一章中,我们介绍过周期函数的概念,周期函数反映了客观世界中的周期运动.

正弦函数是一种常见而简单的周期函数.例如描述简谐振动的函数

$$y = A \sin(\omega t + \varphi)$$

就是一个以  $\frac{2\pi}{\omega}$  为周期的正弦函数.其中  $y$  表示动点的位置,  $t$  表示时间,  $A$  为振幅,  $\omega$  为角频率,  $\varphi$  为初相.

在实际问题中,除了正弦函数外,还会遇到非正弦函数的周期函数,它们反映了较复杂的周期运动.如电子技术中常用的周期为  $T$  的矩形波(图 12-8),就是一个非正弦周期函数的例子.

如何深入研究非正弦周期函数呢?联系到前面介绍过的用函数的幂级数展开式表示与讨论函数,我们也想将周期函数展开成由简单的周期函数例如三角函数组成的级数.具体地说,将周期为  $T$  ( $= \frac{2\pi}{\omega}$ ) 的周期函数用一系列以  $T$  为周

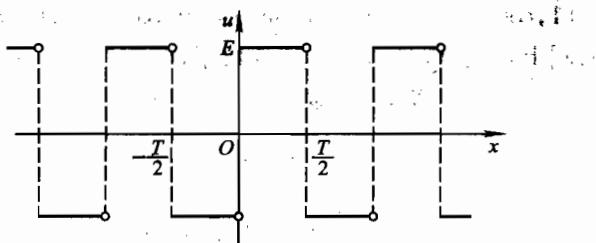


图 12-8

期的正弦函数  $A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$  组成的级数来表示, 记为

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n), \quad (1)$$

其中  $A_0, A_n, \varphi_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) 都是常数.

将周期函数按上述方式展开, 它的物理意义是很明确的, 这就是把一个比较复杂的周期运动看成是许多不同频率的简谐振动的叠加. 在电工学上, 这种展开称为谐波分析. 其中常数项  $A_0$  称为  $f(t)$  的直流分量;  $A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$  称为一次谐波(又叫做基波); 而  $A_2 \sin(2\omega t + \varphi_2), A_3 \sin(3\omega t + \varphi_3), \dots$  依次称为二次谐波, 三次谐波, 等等.

为了以后讨论方便起见, 我们将正弦函数  $A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$  按三角公式变形, 得

$$A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) = A_n \sin \varphi_n \cos n\omega t + A_n \cos \varphi_n \sin n\omega t,$$

并且令  $\frac{a_0}{2} = A_0, a_n = A_n \sin \varphi_n, b_n = A_n \cos \varphi_n, \omega = \frac{\pi}{l}$  (即  $T = 2l$ ), 则(1)式右端的级数就可以改写为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi t}{l}). \quad (2)$$

形如(2)式的级数叫做三角级数, 其中  $a_0, a_n, b_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) 都是常数.

令  $\frac{\pi t}{l} = x$ , (2)式成为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (3)$$

这就把以  $2l$  为周期的三角级数转换成以  $2\pi$  为周期的三角级数.

下面我们讨论以  $2\pi$  为周期的三角级数(3).

如同讨论幂级数时一样, 我们必须讨论三角级数(3)的收敛问题, 以及给定周期为  $2\pi$  的周期函数如何把它展开成三角级数(3). 为此, 我们首先介绍三角函数系的正交性.

所谓三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \quad (4)$$

在区间  $[-\pi, \pi]$  上正交, 就是指在三角函数系(4)中任何不同的两个函数的乘积在区间  $[-\pi, \pi]$  上的积分等于零, 即

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx dx = 0 \quad (k, n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx = 0 \quad (k, n = 1, 2, 3, \dots, k \neq n),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx dx = 0 \quad (k, n = 1, 2, 3, \dots, k \neq n).$$

以上等式, 都可以通过计算定积分来验证, 现将第四式验证如下.

利用三角函数中积化和差的公式

$$\cos kx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(k+n)x + \cos(k-n)x],$$

当  $k \neq n$  时, 有

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k+n)x + \cos(k-n)x] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(k+n)x}{k+n} + \frac{\sin(k-n)x}{k-n} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \quad (k, n = 1, 2, 3, \dots, k \neq n). \end{aligned}$$

其余等式请读者自行验证.

在三角函数系(4)中, 两个相同函数的乘积在区间  $[-\pi, \pi]$  上的积分不等于零, 即

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

## 二、函数展开成傅里叶级数

设  $f(x)$  是周期为  $2\pi$  的周期函数, 且能展开成三角级数:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (5)$$

我们自然要问: 系数  $a_0, a_1, b_1, \dots$  与函数  $f(x)$  之间存在着怎样的关系? 换句话

说,如何利用  $f(x)$  把  $a_0, a_1, b_1, \dots$  表达出来? 为此,我们进一步假设(5)式右端的级数可以逐项积分.

先求  $a_0$ . 对(5)式从  $-\pi$  到  $\pi$  积分,由于假设(5)式右端级数可逐项积分,因此有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx \right].$$

根据三角函数系(4)的正交性,等式右端除第一项外,其余各项均为零,所以

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi,$$

于是得

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

其次求  $a_n$ . 用  $\cos nx$  乘(5)式两端,再从  $-\pi$  到  $\pi$  积分,我们得到

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx dx \right]. \end{aligned}$$

根据三角函数系(4)的正交性,等式右端除  $k=n$  的一项外,其余各项均为零,所以

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = a_n \pi,$$

于是得

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n=1,2,3,\dots).$$

类似地,用  $\sin nx$  乘(5)式的两端,再从  $-\pi$  到  $\pi$  积分,可得

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n=1,2,3,\dots).$$

由于当  $n=0$  时,  $a_n$  的表达式正好给出  $a_0$ ,因此,已得结果可以合并写成

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n=0,1,2,3,\dots), \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n=1,2,3,\dots). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

如果公式(6)中的积分都存在,这时它们定出的系数  $a_0, a_1, b_1, \dots$  叫做函数  $f(x)$  的傅里叶(Fourier)系数,将这些系数代入(5)式右端,所得的三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

叫做函数  $f(x)$  的傅里叶级数.

一个定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上周期为 $2\pi$ 的函数 $f(x)$ ,如果它在一个周期上可积,则一定可以作出 $f(x)$ 的傅里叶级数.然而,函数 $f(x)$ 的傅里叶级数是否一定收敛?如果它收敛,它是否一定收敛于函数 $f(x)$ ?一般说来,这两个问题的答案都不是肯定的.那么, $f(x)$ 在怎样的条件下,它的傅里叶级数不仅收敛,而且收敛于 $f(x)$ ?也就是说, $f(x)$ 满足什么条件可以展开成傅里叶级数?这是我们面临的一个基本问题.

下面我们叙述一个收敛定理(不加证明),它给出关于上述问题的一个重要结论.

**定理(收敛定理,狄利克雷(Dirichlet)充分条件)** 设 $f(x)$ 是周期为 $2\pi$ 的周期函数,如果它满足:

- (1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点,
- (2) 在一个周期内至多只有有限个极值点,

则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛,并且

当 $x$ 是 $f(x)$ 的连续点时,级数收敛于 $f(x)$ ;

当 $x$ 是 $f(x)$ 的间断点时,级数收敛于

$$\frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)].$$

收敛定理告诉我们:只要函数在 $[-\pi, \pi]$ 上至多有有限个第一类间断点,并且不作无限次振动,函数的傅里叶级数在连续点处就收敛于该点的函数值,在间断点处收敛于该点左极限与右极限的算术平均值.可见,函数展开成傅里叶级数的条件比展开成幂级数的条件低得多.记

$$C = \left\{ x \mid f(x) = \frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)] \right\},$$

在 $C$ 上就成立 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad x \in C. \quad (7)$$

**例 1** 设 $f(x)$ 是周期为 $2\pi$ 的周期函数,它在 $[-\pi, \pi]$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

**解** 所给函数满足收敛定理的条件,它在点 $x = k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )处不连续,在其他点处连续,从而由收敛定理知道 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛,并且当 $x = k\pi$ 时级数收敛于

$$\frac{-1 + 1}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = 0,$$

当 $x \neq k\pi$ 时级数收敛于 $f(x)$ .和函数的图形如图 12-9 所示.

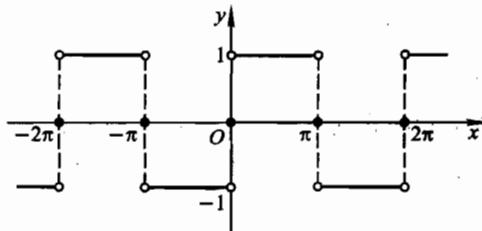


图 12-9

计算傅里叶系数如下：

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \cos nx dx \\
 &= 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots); \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\cos nx}{n} \right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} \\
 &= \frac{1}{n\pi} [1 - \cos n\pi - \cos n\pi + 1] \\
 &= \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n] \\
 &= \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & n = 1, 3, 5, \dots, \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots. \end{cases}
 \end{aligned}$$

将求得的系数代入(7)式，就得到  $f(x)$  的傅里叶级数展开式为

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{4}{\pi} \left[ \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots + \frac{1}{2k-1} \sin (2k-1)x + \dots \right] \\
 &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin (2k-1)x \\
 &\quad (-\infty < x < +\infty; x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots).
 \end{aligned}$$

如果把例 1 中的函数理解为矩形波的波形函数(周期  $T = 2\pi$ , 振幅  $E = 1$ , 自变量  $x$  表示时间), 那么上面所得到的展开式表明：矩形波是由一系列不同频率的正弦波叠加而成的, 这些正弦波的频率依次为基波频率的奇数倍.

**例 2** 设  $f(x)$  是周期为  $2\pi$  的周期函数, 它在  $[-\pi, \pi]$  上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

将  $f(x)$  展开成傅里叶级数.

解 所给函数满足收敛定理的条件, 它在点  $x = (2k+1)\pi$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 处不连续. 因此,  $f(x)$  的傅里叶级数在  $x = (2k+1)\pi$  处收敛于

$$\frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} = \frac{0 - \pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

在连续点  $x$  ( $x \neq (2k+1)\pi$ ) 处收敛于  $f(x)$ . 和函数的图形如图 12-10 所示.

计算傅里叶系数如下:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 x \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right]_{-\pi}^0 \\ &= \frac{1}{n^2 \pi} (1 - \cos n\pi) \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{n^2 \pi}, & n = 1, 3, 5, \dots, \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots; \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 x dx = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^0 = -\frac{\pi}{2};$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 x \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{x \cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \right]_{-\pi}^0 \\ &= -\frac{\cos n\pi}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

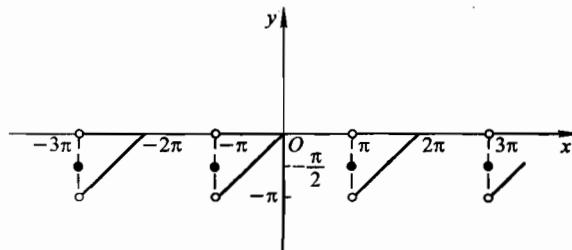


图 12-10

将求得的系数代入(7)式, 得到  $f(x)$  的傅里叶级数展开式为

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{\pi}{4} + \left( \frac{2}{\pi} \cos x + \sin x \right) - \\
&\quad \frac{1}{2} \sin 2x + \left( \frac{2}{3^2 \pi} \cos 3x + \frac{1}{3} \sin 3x \right) - \\
&\quad \frac{1}{4} \sin 4x + \left( \frac{2}{5^2 \pi} \cos 5x + \frac{1}{5} \sin 5x \right) - \dots \\
&= -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x + \\
&\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx \\
&(-\infty < x < +\infty; x \neq \pm\pi, \pm 3\pi, \dots).
\end{aligned}$$

应该注意,如果函数  $f(x)$  只在  $[-\pi, \pi]$  上有定义,并且满足收敛定理的条件,那么  $f(x)$  也可以展开成傅里叶级数.事实上,我们可在  $[-\pi, \pi]$  或  $(-\pi, \pi]$  外补充函数  $f(x)$  的定义,使它拓广成周期为  $2\pi$  的周期函数  $F(x)$ .按这种方式拓广函数的定义域的过程称为周期延拓.再将  $F(x)$  展开成傅里叶级数.最后限制  $x$  在  $(-\pi, \pi)$  内,此时  $F(x) \equiv f(x)$ ,这样便得到  $f(x)$  的傅里叶级数展开式.

根据收敛定理,这级数在区间端点  $x = \pm\pi$  处收敛于  $\frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2}$ .

**例 3** 将函数

$$u(t) = E \left| \sin \frac{t}{2} \right|, -\pi \leq t \leq \pi$$

展开成傅里叶级数,其中  $E$  是正的常数.

**解** 所给函数在区间  $[-\pi, \pi]$  上满足收敛定理的条件,并且拓广为周期函数时,它在每一点  $x$  处都连续(图 12-11),因此拓广的周期函数的傅里叶级数在  $[-\pi, \pi]$  上收敛于  $u(t)$ .

计算傅里叶系数如下:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \cos nt dt = \frac{E}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sin \frac{t}{2} \right| \cos nt dt,$$

因为上列积分中被积函数为偶函数,所以

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2E}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \frac{t}{2} \cos nt dt \\
&= \frac{E}{\pi} \int_0^{\pi} \left[ \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) t - \sin \left( n - \frac{1}{2} \right) t \right] dt \\
&= \frac{E}{\pi} \left[ -\frac{\cos \left( n + \frac{1}{2} \right) t}{n + \frac{1}{2}} + \frac{\cos \left( n - \frac{1}{2} \right) t}{n - \frac{1}{2}} \right]_0^{\pi}
\end{aligned}$$

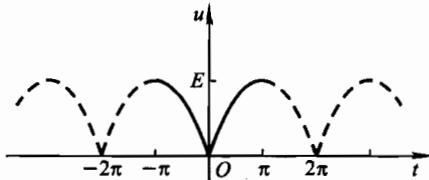


图 12-11

$$= \frac{E}{\pi} \left[ \frac{1}{n + \frac{1}{2}} - \frac{1}{n - \frac{1}{2}} \right] \\ = - \frac{4E}{(4n^2 - 1)\pi} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

$$b_n = \frac{E}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sin \frac{t}{2} \right| \sin nt dt = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

上式等于零是因为被积函数是奇函数.

将求得的系数代入(7)式, 得  $u(t)$  的傅里叶级数展开式为

$$u(t) = \frac{4E}{\pi} \left( \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos nt \right) (-\pi \leq t \leq \pi).$$

### 三、正弦级数和余弦级数

一般说来,一个函数的傅里叶级数既含有正弦项,又含有余弦项(见例2).但是,也有一些函数的傅里叶级数只含有正弦项(见例1)或者只含有常数项和余弦项(见例3).这是什么原因呢?实际上,这些情况是与所给函数  $f(x)$  的奇偶性有密切关系的.对于周期为  $2\pi$  的函数  $f(x)$ ,它的傅里叶系数计算公式为

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

由于奇函数在对称区间上的积分为零,偶函数在对称区间上的积分等于半区间上积分的两倍,因此,

当  $f(x)$  为奇函数时,  $f(x) \cos nx$  是奇函数,  $f(x) \sin nx$  是偶函数,故

$$\left. \begin{aligned} a_n &= 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

即知奇函数的傅里叶级数是只含有正弦项的正弦级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \quad (9)$$

当  $f(x)$  为偶函数时,  $f(x) \cos nx$  是偶函数,  $f(x) \sin nx$  是奇函数,故

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ b_n &= 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

即知偶函数的傅里叶级数是只含常数项和余弦项的余弦级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \quad (11)$$

**例 4** 设  $f(x)$  是周期为  $2\pi$  的周期函数, 它在  $[-\pi, \pi]$  上的表达式为  $f(x) = x$ . 将  $f(x)$  展开成傅里叶级数.

**解** 首先, 所给函数满足收敛定理的条件, 它在点

$$x = (2k+1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

处不连续, 因此  $f(x)$  的傅里叶级数在点  $x = (2k+1)\pi$  处收敛于

$$\frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} = \frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0,$$

在连续点  $x (x \neq (2k+1)\pi)$  处收敛于  $f(x)$ , 和函数的图形如图 12-12 所示.

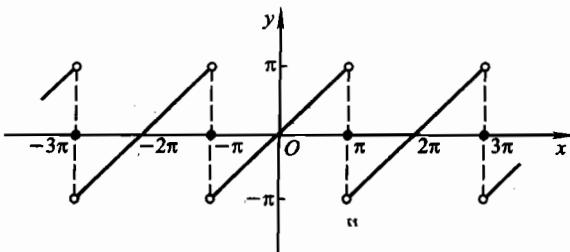


图 12-12

其次, 若不计  $x = (2k+1)\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ , 则  $f(x)$  是周期为  $2\pi$  的奇函数. 显然, 此时(8)式仍成立. 按公式(8)有  $a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$ , 而

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{x \cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \right]_0^\pi \\ &= -\frac{2}{n} \cos n\pi = \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

将求得的  $b_n$  代入正弦级数(9), 得  $f(x)$  的傅里叶级数展开式为

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \left( \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx + \dots \right) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \\ &\quad (-\infty < x < +\infty; x \neq \pm \pi, \pm 3\pi, \dots). \end{aligned}$$

**例 5** 设  $f(x)$  是周期为  $2\pi$  的周期函数, 它在  $[-\pi, \pi]$  上的表达式为  $f(x) = |x|$ , 将  $f(x)$  展开成傅里叶级数.

**解** 所给函数满足收敛定理的条件, 它在整个数轴上连续(图 12-13), 因此  $f(x)$  的傅里叶级数处处收敛于  $f(x)$ .

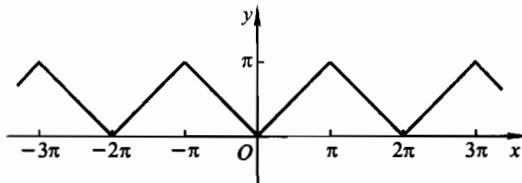


图 12-13

因为  $f(x)$  是偶函数, 所以按公式(10), 有  $b_n = 0$ , 而

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right]_0^\pi \\ &= \frac{2}{\pi n^2} (\cos n\pi - 1) \\ &= \begin{cases} -\frac{4}{\pi n^2}, & n = 1, 3, 5, \dots, \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots; \end{cases} \\ a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \, dx = \pi. \end{aligned}$$

将求得的系数  $a_n$  代入余弦级数(11), 得  $f(x)$  的傅里叶级数展开式为

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} (\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \dots) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x \\ &\quad (-\infty < x < +\infty). \end{aligned}$$

在实际应用(如研究某种波动问题, 热的传导、扩散问题)中, 有时还需要把定义在区间  $[0, \pi]$  上的函数  $f(x)$  展开成正弦级数或余弦级数.

根据前面讨论的结果, 这类展开问题可以按如下的方法解决: 设函数  $f(x)$  定义在区间  $[0, \pi]$  上并且满足收敛定理的条件, 我们在开区间  $(-\pi, 0)$  内补充函数  $f(x)$  的定义, 得到定义在  $(-\pi, \pi]$  上的函数  $F(x)$ , 使它在  $(-\pi, \pi)$  上成为奇函数<sup>①</sup>(偶函数). 按这种方式拓广函数定义域的过程称为奇延拓(偶延拓). 然后将奇延拓(偶延拓)后的函数展开成傅里叶级数, 这个级数必定是正弦级数(余弦

① 补充  $f(x)$  的定义使它在  $(-\pi, \pi)$  上成为奇函数时, 若  $f(0) \neq 0$ , 规定  $F(0) = 0$ .

级数). 再限制  $x$  在  $(0, \pi]$  上, 此时  $F(x) \equiv f(x)$ , 这样便得到  $f(x)$  的正弦级数  
(余弦级数) 展开式.

例如将函数

$$\varphi(x) = x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

作奇延拓, 再作周期延拓, 便成例 4 中的函数, 按例 4 的结果, 有

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \quad (0 \leq x < \pi);$$

将  $\varphi(x)$  作偶延拓, 再作周期延拓, 便成例 5 中的函数, 按例 5 的结果, 有

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

例 6 将函数

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

分别展开成正弦级数和余弦级数.

解 先展开成正弦级数. 为此对函数  $f(x)$  作奇延拓(图 12-14). 按公式(8)有

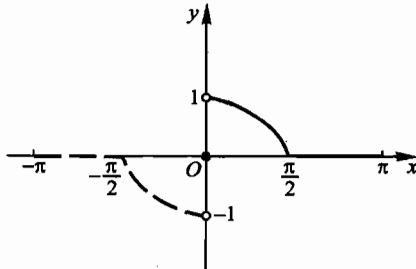


图 12-14

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin nx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(n-1)x + \sin(n+1)x] \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{1}{n-1} \cos(n-1)x - \frac{1}{n+1} \cos(n+1)x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} \cos \frac{n-1}{2}\pi - \frac{1}{n+1} \cos \frac{n+1}{2}\pi \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{2n}{n^2-1} - \frac{1}{n-1} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n+1} \sin \frac{n\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\pi(n^2 - 1)} (n - \sin \frac{n\pi}{2}).$$

以上计算对  $n = 1$  不适合,  $b_1$  需另行计算:

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin x \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x \, dx = \frac{1}{\pi}.$$

将求得的  $b_n$  代入(9)式, 得  $f(x)$  的正弦级数展开式为

$$f(x) = \frac{1}{\pi} [\sin x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} (n - \sin \frac{n\pi}{2}) \sin nx] \quad (0 < x \leq \pi).$$

在端点  $x = 0$  处级数收敛到零, 它不等于  $f(0)$ .

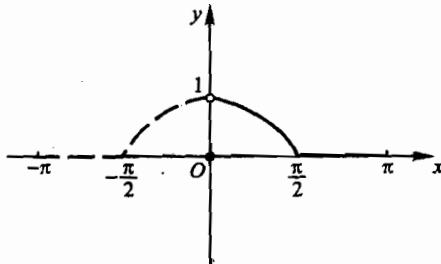


图 12-15

再展开成余弦级数. 为此对函数  $f(x)$  作偶延拓(图 12-15). 按公式(10)有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos nx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos(n-1)x + \cos(n+1)x] \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{n-1} \sin \frac{n-1}{2}\pi + \frac{1}{n+1} \sin \frac{n+1}{2}\pi \right] \\ &= \frac{2}{\pi(n^2-1)} \sin \frac{n-1}{2}\pi \\ &= \begin{cases} 0, & n = 2k-1, \\ \frac{2(-1)^{k-1}}{\pi(4k^2-1)}, & n = 2k. \end{cases} \end{aligned}$$

以上计算对  $n = 1$  不适合,  $a_1$  需另行计算:

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2}.$$

将求得的  $a_n$  代入(11)式, 得  $f(x)$  的余弦级数展开式为

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos x + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{4k^2-1} \cos 2kx \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

利用函数的傅里叶级数展开式,有时可得一些特殊级数的和,例如按例 5 的结果,有

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)x) \quad (-\pi \leq x \leq \pi),$$

在上式中令  $x=0$ ,便得

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

设

$$\sigma = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots,$$

$$\sigma_1 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \left( = \frac{\pi^2}{8} \right),$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots,$$

$$\sigma_3 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots.$$

因为

$$\sigma_2 = \frac{\sigma}{4} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4},$$

所以

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{3} = \frac{\pi^2}{24},$$

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\text{又 } \sigma_3 = 2\sigma_1 - \sigma = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}.$$

### 习题 12-7

1. 下列周期函数  $f(x)$  的周期为  $2\pi$ ,试将  $f(x)$  展开成傅里叶级数,如果  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上的表达式为:

$$(1) f(x) = 3x^2 + 1 \quad (-\pi \leq x < \pi);$$

$$(2) f(x) = e^{2x} \quad (-\pi \leq x < \pi);$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} bx, & -\pi \leq x < 0, \\ ax, & 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad (a, b \text{ 为常数, 且 } a > b > 0).$$

2. 将下列函数  $f(x)$  展开成傅里叶级数:

$$(1) f(x) = 2 \sin \frac{x}{3} \quad (-\pi \leq x \leq \pi);$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} e^x, & -\pi \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

3. 将函数  $f(x) = \cos \frac{x}{2}$  ( $-\pi \leq x \leq \pi$ ) 展开成傅里叶级数.

4. 设  $f(x)$  是周期为  $2\pi$  的周期函数, 它在  $[-\pi, \pi]$  上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}, \\ x, & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi, \end{cases}$$

将  $f(x)$  展开成傅里叶级数.

5. 将函数  $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) 展开成正弦级数.

6. 将函数  $f(x) = 2x^2$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) 分别展开成正弦级数和余弦级数.

7. 设周期函数  $f(x)$  的周期为  $2\pi$ . 证明:

(1) 如果  $f(x - \pi) = -f(x)$ , 则  $f(x)$  的傅里叶系数  $a_0 = 0, a_{2k} = 0, b_{2k} = 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ );

(2) 如果  $f(x - \pi) = f(x)$ , 则  $f(x)$  的傅里叶系数  $a_{2k+1} = 0, b_{2k+1} = 0$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ).

## 第八节 一般周期函数的傅里叶级数

### 一、周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数

上节所讨论的周期函数都是以  $2\pi$  为周期的. 但是实际问题中所遇到的周期函数, 它的周期不一定是  $2\pi$ . 例如上节中提到的矩形波, 它的周期是  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . 因此, 本节我们讨论周期为  $2l$  的周期函数的傅里叶级数. 根据上节讨论的结果, 经过自变量的变量代换, 可得下面的定理.

**定理** 设周期为  $2l$  的周期函数  $f(x)$  满足收敛定理的条件, 则它的傅里叶级数展开式为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) (x \in C), \quad (1)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$
$$C = \{x \mid f(x) = \frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)]\}$$

当  $f(x)$  为奇函数时,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (x \in C), \quad (3)$$

其中

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (4)$$

当  $f(x)$  为偶函数时,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (x \in C), \quad (5)$$

其中

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (6)$$

证 作变量代换  $z = \frac{\pi x}{l}$ , 于是区间  $-l \leq x \leq l$  就变换成了  $-\pi \leq z \leq \pi$ . 设函数

$f(x) = f\left(\frac{lz}{\pi}\right) = F(z)$ , 从而  $F(z)$  是周期为  $2\pi$  的周期函数, 并且它满足收敛定理的条件, 将  $F(z)$  展开成傅里叶级数

$$F(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nz + b_n \sin nz),$$

其中  $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(z) \cos nz dz$ ,  $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(z) \sin nz dz$ .

在以上式子中令  $z = \frac{\pi x}{l}$ , 并注意到  $F(z) = f(x)$ , 于是有

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

而且

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

类似地, 可以证明定理的其余部分.

例 1 设  $f(x)$  是周期为 4 的周期函数, 它在  $[-2, 2]$  上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x < 0, \\ h, & 0 \leq x < 2 \end{cases} \quad (\text{常数 } h \neq 0).$$

将  $f(x)$  展开成傅里叶级数.

解 这时  $l = 2$ , 按公式(2)有

$$a_n = \frac{1}{2} \int_0^2 h \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \left[ \frac{h}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 = 0 \quad (n \neq 0);$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 0 dx + \frac{1}{2} \int_0^2 h dx = h;$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_0^2 h \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \left[ -\frac{h}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2$$

$$= \frac{h}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} \frac{2h}{n\pi}, & n = 1, 3, 5, \dots, \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots. \end{cases}$$

将求得的系数  $a_n, b_n$  代入(1)式, 得

$$f(x) = \frac{h}{2} + \frac{2h}{\pi} \left( \sin \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{2} + \dots \right)$$

$$(-\infty < x < +\infty; x \neq 0, \pm 2, \pm 4, \dots)$$

$f(x)$  的傅里叶级数的和函数的图形如图 12-16 所示.

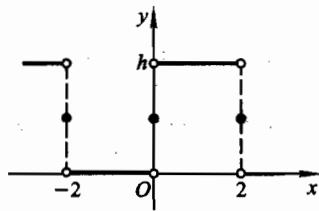


图 12-16

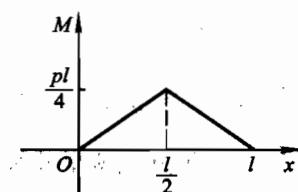


图 12-17

例 2 将如图 12-17 所示的函数

$$M(x) = \begin{cases} \frac{px}{2}, & 0 \leq x < \frac{l}{2}, \\ \frac{p(l-x)}{2}, & \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases}$$

分别展开成正弦级数和余弦级数.

解  $M(x)$  是定义在  $[0, l]$  上的函数, 要将它展开成正弦级数, 必须对  $M(x)$  进行奇延拓. 按公式(4)计算延拓后的函数的傅里叶系数

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l M(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$= \frac{2}{l} \left[ \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{px}{2} \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{p(l-x)}{2} \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right].$$

对上式右端的第二项, 令  $t = l - x$ , 则

$$b_n = \frac{p}{l} \left[ \int_0^{\frac{l}{2}} x \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \int_{\frac{l}{2}}^l t \sin \frac{n\pi(l-t)}{l} (-dt) \right]$$

$$= \frac{p}{l} \left[ \int_0^{\frac{l}{2}} x \sin \frac{n\pi x}{l} dx + (-1)^{n+1} \int_0^{\frac{l}{2}} t \sin \frac{n\pi t}{l} dt \right].$$

当  $n = 2k$  为偶数时,  $b_{2k} = 0$ ; 当  $n = 2k - 1$  为奇数时,

$$\begin{aligned} b_{2k-1} &= \frac{2p}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} x \sin \frac{(2k-1)\pi x}{l} dx = \frac{2pl}{(2k-1)^2 \pi^2} \sin \frac{2k-1}{2}\pi. \\ &= \frac{2pl(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2 \pi^2}. \end{aligned}$$

将求得的  $b_n$  代入(3)式, 得  $M(x)$  的正弦级数展开式为

$$M(x) = \frac{2pl}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{l} \quad (0 \leq x \leq l).$$

再求  $M(x)$  的余弦级数展开式. 为此对  $M(x)$  作偶延拓, 再作周期延拓. 注意到延拓所得周期函数的周期为  $l$ , 知  $M(x)$  可展开成周期为  $l$  的余弦级数. 按公式(6)(将(6)中的  $l$  换成  $\frac{l}{2}$ )计算傅里叶系数:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} M(x) \cos \frac{2n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{4}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{px}{2} \cos \frac{2n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{2p}{l} \left[ \frac{l}{2n\pi} x \sin \frac{2n\pi x}{l} + \left( \frac{l}{2n\pi} \right)^2 \cos \frac{2n\pi x}{l} \right]_0^{\frac{l}{2}} \\ &= \frac{pl}{2n^2 \pi^2} (\cos n\pi - 1) \\ &= \begin{cases} -\frac{pl}{n^2 \pi^2}, & n = 1, 3, 5, \dots, \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots. \end{cases} \\ a_0 &= \frac{4}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{px}{2} dx = \frac{pl}{4}. \end{aligned}$$

将求得的  $a_n$  代入(5)式, 得

$$M(x) = \frac{pl}{8} - \frac{pl}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos \frac{2(2k-1)\pi x}{l} \quad (0 \leq x \leq l).$$

## 二、傅里叶级数的复数形式

傅里叶级数还可以用复数形式表示. 在电子技术中, 经常应用这种形式.

设周期为  $2l$  的周期函数  $f(x)$  的傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (7)$$

其中系数  $a_n, b_n$  为

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

利用欧拉公式

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i},$$

把(7)式化为

$$\begin{aligned} &\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{a_n}{2} (e^{i\frac{n\pi x}{l}} + e^{-i\frac{n\pi x}{l}}) - \frac{ib_n}{2} (e^{i\frac{n\pi x}{l}} - e^{-i\frac{n\pi x}{l}}) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{a_n - ib_n}{2} e^{i\frac{n\pi x}{l}} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-i\frac{n\pi x}{l}} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

记

$$\frac{a_0}{2} = c_0, \quad \frac{a_n - ib_n}{2} = c_n, \quad \frac{a_n + ib_n}{2} = c_{-n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (10)$$

则(9)式就表示为

$$\begin{aligned} &c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}} + c_{-n} e^{-i\frac{n\pi x}{l}}) \\ &= (c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}})_{n=0} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}} + c_{-n} e^{-i\frac{n\pi x}{l}}). \end{aligned}$$

即得傅里叶级数的复数形式为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}. \quad (11)$$

为得出系数  $c_n$  的表达式, 把(8)式代入(10)式, 得

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx; \\ c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx - \frac{i}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right] \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \left( \cos \frac{n\pi x}{l} - i \sin \frac{n\pi x}{l} \right) dx \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i\frac{n\pi x}{l}} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots); \\ c_{-n} &= \frac{a_n + ib_n}{2} \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{i\frac{n\pi x}{l}} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

将已得的结果合并写为

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-\frac{i n \pi x}{l}} dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (12)$$

这就是傅里叶系数的复数形式.

傅里叶级数的两种形式,本质上是一样的,但复数形式比较简洁,且只用一个算式计算系数.

**例 3** 把宽为  $\tau$ 、高为  $h$ , 周期为  $T$  的矩形波(图 12-18)展开成复数形式的傅里叶级数.

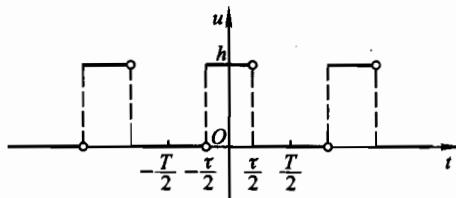


图 12-18

解 在一个周期  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  内矩形波的函数表达式为

$$u(t) = \begin{cases} 0, & -\frac{T}{2} \leq t < -\frac{\tau}{2}, \\ h, & -\frac{\tau}{2} \leq t < \frac{\tau}{2}, \\ 0, & \frac{\tau}{2} \leq t < \frac{T}{2}. \end{cases}$$

按公式(12)有

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) e^{-\frac{2n\pi t}{T}} dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} h e^{-\frac{2n\pi t}{T}} dt \\ &= \frac{h}{T} \left[ \frac{-T}{2n\pi i} e^{-\frac{2n\pi t}{T}} \right]_{-\tau/2}^{\tau/2} \\ &= \frac{h}{n\pi} \sin \frac{n\pi\tau}{T} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots), \\ c_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} h dt = \frac{h\tau}{T}, \end{aligned}$$

将求得的  $c_n$  代入级数(11), 得

$$u(t) = \frac{h\tau}{T} + \frac{h}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi\tau}{T} e^{\frac{2n\pi t}{T}} \left( -\infty < t < +\infty; t \neq nT \pm \frac{\tau}{2}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right).$$

## 习 题 12-8

1. 将下列各周期函数展开成傅里叶级数(下面给出函数在一个周期内的表达式).

$$(1) f(x) = 1 - x^2 \quad \left( -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \right);$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} \leq x < 1; \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & -3 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < 3, \end{cases}$$

2. 将下列函数分别展开成正弦级数和余弦级数:

$$(1) f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \frac{l}{2} \\ l-x, & \frac{l}{2} \leq x \leq l; \end{cases}$$

$$(2) f(x) = x^2 \quad (0 \leq x \leq 2).$$

3. 设  $f(x)$  是周期为 2 的周期函数, 它在  $[-1, 1]$  上的表达式为  $f(x) = e^{-|x|}$ . 试将  $f(x)$  展开成复数形式的傅里叶级数.

4. 设  $u(t)$  是周期为  $T$  的周期函数. 已知它的傅里叶级数的复数形式为(参阅本节例题)

$$u(t) = \frac{h\tau}{T} + \frac{h}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi\tau}{T} e^{\frac{2\pi i n t}{T}} \quad (-\infty < t < +\infty),$$

试写出  $u(t)$  的傅里叶级数的实数形式(即三角形式).

## 总习题十二

1. 填空:

(1) 对级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  是它收敛的\_\_\_\_\_条件, 不是它收敛的\_\_\_\_\_条件;

(2) 部分和数列  $\{s_n\}$  有界是正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛的\_\_\_\_\_条件;

(3) 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  绝对收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  必定\_\_\_\_\_; 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  条件收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  必定\_\_\_\_\_.

2. 判定下列级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^n}; \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n};$$

$$(4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^{10} n}; \quad (5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s} \quad (a>0, s>0).$$

3. 设正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  都收敛, 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$  也收敛.

4. 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$ . 问级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  是否也收敛? 试说明理由.

5. 讨论下列级数的绝对收敛性与条件收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin \frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}.$$

6. 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2}; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} [2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{9}} \cdot 8^{\frac{1}{27}} \cdots (2^n)^{\frac{1}{3^n}}].$$

7. 求下列幂级数的收敛区间:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5^n}{n} x^n; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} n(x+1)^n; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{2^n}.$$

8. 求下列幂级数的和函数:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2(n-1)}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

9. 求下列数项级数的和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}; \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!}.$$

10. 将下列函数展开成  $x$  的幂级数:

$$(1) \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}); \quad (2) \frac{1}{(2-x)^2}.$$

11. 设  $f(x)$  是周期为  $2\pi$  的函数, 它在  $[-\pi, \pi]$  上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, 0), \\ e^x, & x \in [0, \pi). \end{cases}$$

将  $f(x)$  展开成傅里叶级数.

12. 将函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq h, \\ 0, & h < x \leq \pi \end{cases}$$

分别展开成正弦级数和余弦级数.

# 习题答案与提示

## 第八章

### 习题 8-1(第 12 页)

1.  $5\mathbf{a} - 11\mathbf{b} + 7\mathbf{c}$ .

2. 略.

3.  $\overrightarrow{D_1A} = -\left(\mathbf{c} + \frac{1}{5}\mathbf{a}\right)$ ,  $\overrightarrow{D_2A} = -\left(\mathbf{c} + \frac{2}{5}\mathbf{a}\right)$ ,

$$\overrightarrow{D_3A} = -\left(\mathbf{c} + \frac{3}{5}\mathbf{a}\right), \quad \overrightarrow{D_4A} = -\left(\mathbf{c} + \frac{4}{5}\mathbf{a}\right).$$

4.  $(1, -2, -2), (-2, 4, 4)$ .

5.  $\left(\frac{6}{11}, \frac{7}{11}, -\frac{6}{11}\right)$  或  $\left(-\frac{6}{11}, -\frac{7}{11}, \frac{6}{11}\right)$ .

6. A:IV, B:V, C:VII, D:III.

7. A 在  $xOy$  面上, B 在  $yOz$  面上, C 在 x 轴上, D 在 y 轴上.

8. (1)  $(a, b, -c), (-a, b, c), (a, -b, c)$ ;

(2)  $(a, -b, -c), (-a, b, -c), (-a, -b, c)$ ;

(3)  $(-a, -b, -c)$ .

9.  $xOy$  面:  $(x_0, y_0, 0)$ ,  $yOz$  面:  $(0, y_0, z_0)$ ,  $xOz$  面:  $(x_0, 0, z_0)$ ;

x 轴:  $(x_0, 0, 0)$ , y 轴:  $(0, y_0, 0)$ , z 轴:  $(0, 0, z_0)$ .

10. 略.

11.  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{a}, 0, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{a}, 0, 0\right), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{a}, 0\right), \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{a}, 0\right),$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{a}, 0, \mathbf{a}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{a}, 0, \mathbf{a}\right), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{a}, \mathbf{a}\right), \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{a}, \mathbf{a}\right).$$

12. x 轴:  $\sqrt{34}$ , y 轴:  $\sqrt{41}$ , z 轴: 5.

13.  $(0, 1, -2)$ .

14. 略.

15. 模: 2; 方向余弦:  $-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}$ ; 方向角:  $\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ .

16. (1) 垂直于 x 轴, 平行于  $yOz$  平面;

(2) 指向与 y 轴正向一致, 垂直于  $xOz$  平面;

(3) 平行于  $z$  轴, 垂直于  $xOy$  平面.

17. 2.

18.  $A(-2, 3, 0)$ .

19.  $13, 7j$ .

### 习题 8-2(第 22 页)

1. (1)  $3, 5i + j + 7k$ ; (2)  $-18, 10i + 2j + 14k$ ;

(3)  $\cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{3}{2\sqrt{21}}$ .

2.  $-\frac{3}{2}$ .

3.  $\pm \frac{1}{\sqrt{17}}(3i - 2j - 2k)$ .

4.  $5880 J$ .

5.  $|F_1| x_1 \sin \theta_1 = |F_2| x_2 \sin \theta_2$ .

6. 2.

7.  $\lambda = 2\mu$ .

8. 略.

9. (1)  $-8j - 24k$ ; (2)  $-j - k$ ; (3) 2.

10.  $\frac{1}{2}\sqrt{19}$ .

11—12. 略.

### 习题 8-3(第 31 页)

1.  $4x + 4y + 10z - 63 = 0$ .

2.  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4z = 0$ .

3. 以点  $(1, -2, -1)$  为球心, 半径等于  $\sqrt{6}$  的球面.

4.  $\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + (y + 1)^2 + \left(z + \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{116}{9}$ ; 它表示一球面, 球心为点  $\left(-\frac{2}{3}, -1, -\frac{4}{3}\right)$ , 半径等于  $\frac{2}{3}\sqrt{29}$ .

5.  $y^2 + z^2 = 5x$ . 6.  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ .

7. 绕  $x$  轴:  $4x^2 - 9(y^2 + z^2) = 36$ ; 绕  $y$  轴:  $4(x^2 + z^2) - 9y^2 = 36$ .

8—9. 略.

10. (1)  $xOy$  平面上的椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  绕  $x$  轴旋转一周;

(2)  $xOy$  平面上的双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$  绕  $y$  轴旋转一周;

(3)  $xOy$  平面上的双曲线  $x^2 - y^2 = 1$  绕  $x$  轴旋转一周;

(4)  $yOz$  平面上的直线  $z = y + a$  绕  $z$  轴旋转一周.

11. 略.

习题 8-4(第 37 页)

1—2. 略.

3. 母线平行于  $x$  轴的柱面方程:  $3y^2 - z^2 = 16$ ;

母线平行于  $y$  轴的柱面方程:  $3x^2 + 2z^2 = 16$ .

4.  $\begin{cases} 2x^2 - 2x + y^2 = 8, \\ z = 0. \end{cases}$

5. (1)  $\begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos t, \\ y = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos t, \\ z = 3 \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi);$

(2)  $\begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} \cos \theta, \\ y = \sqrt{3} \sin \theta, \\ z = 0 \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi).$

6.  $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ z = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = a \sin \frac{z}{b}, \\ x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = a \cos \frac{z}{b}, \\ y = 0. \end{cases}$

7.  $x^2 + y^2 \leq ax; x^2 + z^2 \leq a^2, x \geq 0, z \geq 0.$

8.  $x^2 + y^2 \leq 4; x^2 \leq z \leq 4; y^2 \leq z \leq 4.$

习题 8-5(第 42 页)

1.  $3x - 7y + 5z - 4 = 0.$

2.  $2x + 9y - 6z - 121 = 0.$

3.  $x - 3y - 2z = 0.$

4. (1) 即  $yOz$  面; (2) 平行于  $xOz$  面的平面;

(3) 平行于  $z$  轴的平面; (4) 通过  $z$  轴的平面;

(5) 平行于  $x$  轴的平面; (6) 通过  $y$  轴的平面;

(7) 通过原点的平面.

5.  $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}.$

6.  $x + y - 3z - 4 = 0.$

7.  $(1, -1, 3).$

8. (1)  $y + 5 = 0$ ; (2)  $x + 3y = 0$ ; (3)  $9y - z - 2 = 0.$

9. 1.

习题 8-6(第 49 页)

1.  $\frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{5}$ .

2.  $\frac{x-3}{-4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$ .

3.  $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{3}$ ;  $\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 1 + t, \\ z = 1 + 3t. \end{cases}$

4.  $16x - 14y - 11z - 65 = 0$ .      5.  $\cos \varphi = 0$ .

6. 略.

7.  $\frac{x}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{1}$ .

8.  $8x - 9y - 22z - 59 = 0$ .

9.  $\varphi = 0$ .

10. (1) 平行; (2) 垂直; (3) 直线在平面上.

11.  $x - y + z = 0$ .

12.  $\left( -\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$ .

13.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ .

14. 略.

15.  $\begin{cases} 17x + 31y - 37z - 117 = 0, \\ 4x - y + z - 1 = 0. \end{cases}$

16. 略.

总习题八(第 50 页)

1. (1)  $M(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ ,  $\overrightarrow{OM} = (x, y, z)$ ;

(2) 共面;

(3) 3;

(4) 36.

2.  $(0, 2, 0)$ .

3.  $\sqrt{30}$ .

4.  $\overrightarrow{AD} = \mathbf{c} + \frac{1}{2}\mathbf{a}$ ,  $\overrightarrow{BE} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$ ,  $\overrightarrow{CF} = \mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$ .

5. 略.

6. 1.

7.  $\arccos \frac{2}{\sqrt{7}}$ .

8.  $\frac{\pi}{3}$ .

9.  $z = -4$ ,  $\theta_{\min} = \frac{\pi}{4}$ .

10. 30.

11.  $(14, 10, 2)$ .

12.  $\mathbf{c} = 5\mathbf{a} + \mathbf{b}$ .

13.  $4(z-1) = (x-1)^2 + (y+1)^2$ .

$$14. (1) \begin{cases} x=0, \\ z=2y^2, \end{cases} z \text{ 轴}; \quad (2) \begin{cases} x=0, \\ \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1, \end{cases} y \text{ 轴};$$

$$(3) \begin{cases} x=0, \\ z=\sqrt{3}y, \end{cases} z \text{ 轴}; \quad (4) \begin{cases} z=0, \\ x^2 - \frac{y^2}{4} = 1, \end{cases} x \text{ 轴}.$$

$$15. x + \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0 \text{ 或 } x - \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0.$$

$$16. x + 2y + 1 = 0.$$

$$17. \frac{x+1}{16} = \frac{y}{19} = \frac{z-4}{28}.$$

$$18. \left(0, 0, \frac{1}{5}\right).$$

$$19. z=0, x^2 + y^2 = x + y;$$

$$x=0, 2y^2 + 2yz + z^2 - 4y - 3z + 2 = 0;$$

$$y=0, 2x^2 + 2xz + z^2 - 4x - 3z + 2 = 0.$$

$$20. z=0, (x-1)^2 + y^2 \leq 1;$$

$$x=0, \left(\frac{z^2}{2} - 1\right)^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0;$$

$$y=0, x \leq z \leq \sqrt{2x}.$$

21. 略.

## 第九章

### 习题 9-1(第 62 页)

1. (1) 开集, 无界集, 导集:  $\mathbf{R}^2$ , 边界:  $\{(x, y) | x=0 \text{ 或 } y=0\}$ ;

(2) 既非开集, 又非闭集, 有界集, 导集:  $\{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ , 边界:  $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) | x^2 + y^2 = 4\}$ ;

(3) 开集, 区域, 无界集, 导集:  $\{(x, y) | y \geq x^2\}$ , 边界:  $\{(x, y) | y = x^2\}$ ;

(4) 闭集, 有界集, 导集: 集合本身, 边界:  $\{(x, y) | x^2 + (y-1)^2 = 1\} \cup \{(x, y) | x^2 + (y-2)^2 = 4\}$ .

2.  $t^2 f(x, y)$ . 3. 略. 4.  $(x+y)^{xy} + (xy)^{2x}$ .

5. (1)  $\{(x, y) | y^2 - 2x + 1 > 0\}$ ;

(2)  $\{(x, y) | x+y > 0, x-y > 0\}$ ;

(3)  $\{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x^2 \geq y\}$ ;

(4)  $\{(x, y) | y-x > 0, x \geq 0, x^2 + y^2 < 1\}$ ;

(5)  $\{(x, y, z) | r^2 < x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ :

$$(6) \{(x, y, z) | x^2 + y^2 - z^2 \geq 0, x^2 + y^2 \neq 0\}.$$

$$6. (1) 1; (2) \ln 2; (3) -\frac{1}{4}; (4) -2; (5) 2; (6) 0.$$

\* 7. 略.

$$8. \{(x, y) | y^2 - 2x = 0\}.$$

$$9. \text{提示: } |xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}. * 10. \text{略.}$$

### 习题 9-2(第 69 页)

$$1. (1) \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y - y^3, \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 - 3xy^2;$$

$$(2) \frac{\partial s}{\partial u} = \frac{1}{v} - \frac{v}{u^2}, \frac{\partial s}{\partial v} = \frac{1}{u} - \frac{u}{v^2};$$

$$(3) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}};$$

$$(4) \frac{\partial z}{\partial x} = y[\cos(xy) - \sin(2xy)], \frac{\partial z}{\partial y} = x[\cos(xy) - \sin(2xy)];$$

$$(5) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{y} \csc \frac{2x}{y}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x}{y^2} \csc \frac{2x}{y};$$

$$(6) \frac{\partial z}{\partial x} = y^2(1+xy)^{y-1}, \frac{\partial z}{\partial y} = (1+xy)^y \left[ \ln(1+xy) + \frac{xy}{1+xy} \right];$$

$$(7) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{z} x^{\frac{y}{z}-1}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{z} x^{\frac{y}{z}} \cdot \ln x, \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} x^{\frac{y}{z}} \cdot \ln x;$$

$$(8) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{(x-y)^z \ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}.$$

2—3. 略.

$$4. f_x(x, 1) = 1.$$

$$5. \frac{\pi}{4}.$$

$$6. (1) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y^2, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 8x^2, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -16xy;$$

$$(2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$(3) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^x \cdot \ln^2 y, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x(x-1)y^{x-2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = y^{x-1}(1+x \ln y).$$

$$7. f_{xx}(0, 0, 1) = 2, f_{xx}(1, 0, 2) = 2, f_{yx}(0, -1, 0) = 0, f_{xxx}(2, 0, 1) = 0.$$

$$8. \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -\frac{1}{y^2}.$$

9. 略.

### 习题 9-3(第 75 页)

$$1. (1) \left(y + \frac{1}{y}\right)dx + x\left(1 - \frac{1}{y^2}\right)dy;$$

$$(2) -\frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}\left(\frac{y}{x}dx - dy\right);$$

$$(3) -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}(ydx - xdy);$$

$$(4) yzx^{y-1}dx + zx^{y-1}\ln xdy + yx^{y-1}\ln xdz.$$

$$2. \frac{1}{3}dx + \frac{2}{3}dy.$$

$$3. \Delta z = -0.119, dz = -0.125.$$

$$4. 0.25e.$$

$$5. (A).$$

$$6. 2.95.$$

$$7. 2.039.$$

$$8. -5 \text{ cm.}$$

$$9. 55.3 \text{ cm}^3.$$

$$10. 0.124 \text{ cm.}$$

$$11. 2128 \text{ m}^2, 27.6 \text{ m}^2, 1.30\%.$$

$$12-13. \text{ 略.}$$

### 习题 9-4(第 82 页)

$$1. \frac{\partial z}{\partial x} = 4x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y.$$

$$2. \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y^2} \ln(3x - 2y) + \frac{3x^2}{(3x - 2y)y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x^2}{y^3} \ln(3x - 2y) - \frac{2x^2}{(3x - 2y)y^2}.$$

$$3. e^{\sin t - 2t^3} (\cos t - 6t^2).$$

$$4. \frac{3(1 - 4t^2)}{\sqrt{1 - (3t - 4t^3)^2}}.$$

$$5. \frac{e^x(1+x)}{1+x^2 e^{2x}}.$$

$$6. e^{ax} \sin x.$$

7. 略.

$$8. (1) \frac{\partial u}{\partial x} = 2xf'_1 + ye^{xy}f'_2, \frac{\partial u}{\partial y} = -2yf'_1 + xe^{xy}f'_2;$$

$$(2) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y}f'_1, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}f'_1 + \frac{1}{z}f'_2, \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2}f'_2;$$

$$(3) \frac{\partial u}{\partial x} = f'_1 + yf'_2 + yzf'_3, \frac{\partial u}{\partial y} = xf'_2 + xzf'_3, \frac{\partial u}{\partial z} = xyf'_3.$$

9—10. 略.

10. 略.

$$11. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f' + 4x^2 f'', \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xyf'', \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2f' + 4y^2 f''.$$

$$12. (1) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 f''_{11}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'_1 + y(xf''_{11} + f''_{12}),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 f''_{11} + 2xf''_{12} + f''_{22};$$

$$(2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{11} + \frac{2}{y}f''_{12} + \frac{1}{y^2}f''_{22},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{x}{y^2} \left( f''_{12} + \frac{1}{y}f''_{22} \right) - \frac{1}{y^2}f'_2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}f'_2 + \frac{x^2}{y^4}f''_{22};$$

$$(3) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2yf'_2 + y^4 f''_{11} + 4xy^3 f''_{12} + 4x^2 y^2 f''_{22},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2yf'_1 + 2xf'_2 + 2xy^3 f''_{11} + 2x^3 yf''_{22} + 5x^2 y^2 f''_{12},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2xf'_1 + 4x^2 y^2 f''_{11} + 4x^3 yf''_{12} + x^4 f''_{22};$$

$$(4) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{x+y}f'_3 - \sin x f'_1 + \cos^2 x f''_{11} + 2e^{x+y} \cos x f''_{13} + e^{2(x+y)} f''_{33},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{x+y}f'_3 - \cos x \sin y f''_{12} + e^{x+y} \cos x f''_{13} - e^{x+y} \sin y f''_{32} + e^{2(x+y)} f''_{33},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{x+y}f'_3 - \cos y f'_2 + \sin^2 y f''_{22} - 2e^{x+y} \sin y f''_{23} + e^{2(x+y)} f''_{33}.$$

13. 略.

### 习题 9-5(第 89 页)

$$1. \frac{y^2 - e^x}{\cos y - 2xy}. \quad 2. \frac{x+y}{x-y}.$$

$$3. \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz - \sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz - 2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy}.$$

$$4. \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x+z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^2}{y(x+z)}.$$

5—7. 略.

$$8. \frac{2y^2ze^z - 2xy^3z - y^2z^2e^z}{(e^z - xy)^3}.$$

$$9. \frac{z(z^4 - 2xyz^2 - x^2y^2)}{(z^2 - xy)^3}.$$

$$10. (1) \frac{dy}{dx} = -\frac{x(6z+1)}{2y(3z+1)}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{x}{3z+1};$$

$$(2) \frac{dx}{dz} = \frac{y-z}{x-y}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{z-x}{x-y};$$

$$(3) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-uf'_1(2yvg'_2 - 1) - f'_2 \cdot g'_1}{(xf'_1 - 1)(2yvg'_2 - 1) - f'_2 \cdot g'_1},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{g'_1(xf'_1 + uf'_1 - 1)}{(xf'_1 - 1)(2yvg'_2 - 1) - f'_2 \cdot g'_1};$$

$$(4) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sin v}{e^v(\sin v - \cos v) + 1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\cos v}{e^v(\sin v - \cos v) + 1},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\cos v - e^v}{u[e^v(\sin v - \cos v) + 1]}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\sin v + e^v}{u[e^v(\sin v - \cos v) + 1]}.$$

11. 略.

### 习题 9-6(第 100 页)

1. 略.

$$2.(1) \mathbf{v}_0 = i + 2j + 2k, \mathbf{a}_0 = 2j, |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{5 + 4t^2};$$

$$(2) \mathbf{v}_0 = -2i + 4k, \mathbf{a}_0 = -3j, |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{20 + 5\cos^2 t};$$

$$(3) \mathbf{v}_0 = i + 2j + k, \mathbf{a}_0 = -\frac{1}{2}i + 2j + k, |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{5t^2 + \frac{4}{(t+1)^2}}.$$

$$3. \text{切线方程: } \frac{x - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}{1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

$$\text{法平面方程: } x + y + \sqrt{2}z = \frac{\pi}{2} + 4.$$

$$4. \text{切线方程: } \frac{x - \frac{1}{2}}{1} = \frac{y - 2}{-4} = \frac{z - 1}{8},$$

$$\text{法平面方程: } 2x - 8y + 16z - 1 = 0.$$

$$5. \text{切线方程: } \frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{-\frac{1}{2}z_0},$$

法平面方程:  $(x - x_0) + \frac{m}{y_0}(y - y_0) - \frac{1}{2z_0}(z - z_0) = 0$ .

6. 切线方程:  $\frac{x-1}{16} = \frac{y-1}{9} = \frac{z-1}{-1}$ ,

法平面方程:  $16x + 9y - z - 24 = 0$ .

7.  $P_1(-1, 1, -1)$  及  $P_2\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}\right)$ .

8. 切平面方程:  $x + 2y - 4 = 0$ , 法线方程:  $\begin{cases} \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2}, \\ z = 0. \end{cases}$

9. 切平面方程:  $ax_0x + by_0y + cz_0z = 1$ ,

法线方程:  $\frac{x-x_0}{ax_0} = \frac{y-y_0}{by_0} = \frac{z-z_0}{cz_0}$ .

10. 切平面方程:  $x - y + 2z = \pm\sqrt{\frac{11}{2}}$ .

11.  $\cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{22}}$ .

### 习题 9-7(第 108 页)

1.  $1 + 2\sqrt{3}$ .

2.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$ .

3.  $\frac{1}{ab}\sqrt{2(a^2 + b^2)}$ .

4. 5.

5.  $\frac{98}{13}$ .

6.  $\frac{6}{7}\sqrt{14}$ .

7.  $x_0 + y_0 + z_0$ .

8.  $\mathbf{grad} f(0, 0, 0) = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{grad} f(1, 1, 1) = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ .

9. 略.

10. 增加最快的方向为  $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{21}}(2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k})$ , 方向导数为  $\sqrt{21}$ ; 减少最快

的方向为  $-\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{21}}(-2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k})$ , 方向导数为  $-\sqrt{21}$ .

### 习题 9-8(第 118 页)

1. (A).

2. 极大值:  $f(2, -2) = 8$ .

3. 极大值:  $f(3, 2) = 36$ .

4. 极小值:  $f\left(\frac{1}{2}, -1\right) = -\frac{e}{2}$ .      5. 极大值:  $z\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ .
6. 当两边都是  $\frac{l}{\sqrt{2}}$  时, 可得最大的周长.
7. 当长、宽都是  $\sqrt[3]{2k}$ , 而高为  $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2k}$  时, 表面积最小.
8.  $\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$ .
9. 当矩形的边长为  $\frac{2p}{3}$  及  $\frac{p}{3}$  时, 绕短边旋转所得圆柱体的体积最大.
10. 当长、宽、高都是  $\frac{2a}{\sqrt{3}}$  时, 可得最大的体积.
11. 最大值为  $\sqrt{9+5\sqrt{3}}$ , 最小值为  $\sqrt{9-5\sqrt{3}}$ .
12. 最热点在  $(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$ , 最冷点在  $(\frac{1}{2}, 0)$ .
13. 最热点在  $(\pm\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$ .

#### · 习题 9-9(第 124 页)

1.  $f(x, y) = 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2$ .

2.  $e^x \ln(1+y) = y + \frac{1}{2!}(2xy - y^2) + \frac{1}{3!}(3x^2y - 3xy^2 + 2y^3) + R_3$ ,

其中  $R_3 = \frac{e^{\theta x}}{24} \left[ x^4 \ln(1+\theta y) + \frac{4x^3 y}{1+\theta y} - \frac{6x^2 y^2}{(1+\theta y)^2} + \frac{8xy^3}{(1+\theta y)^3} - \frac{6y^4}{(1+\theta y)^4} \right]$   
 $(0 < \theta < 1)$ .

3.  $\sin x \sin y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( x - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} \left( y - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{4} \left[ \left( x - \frac{\pi}{4} \right)^2 - 2 \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \left( y - \frac{\pi}{4} \right) + \left( y - \frac{\pi}{4} \right)^2 \right] + R_2$ ,

其中  $R_2 = -\frac{1}{6} \left[ \cos \xi \sin \eta \cdot \left( x - \frac{\pi}{4} \right)^3 + 3 \sin \xi \cos \eta \cdot \left( x - \frac{\pi}{4} \right)^2 \cdot \left( y - \frac{\pi}{4} \right) + 3 \cos \xi \sin \eta \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \left( y - \frac{\pi}{4} \right)^2 + \sin \xi \cos \eta \cdot \left( y - \frac{\pi}{4} \right)^3 \right]$ ,

且  $\xi = \frac{\pi}{4} + \theta \left( x - \frac{\pi}{4} \right)$ ,  $\eta = \frac{\pi}{4} + \theta \left( y - \frac{\pi}{4} \right)$     ( $0 < \theta < 1$ ).

4.  $x^y = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2(y-1) + R_3$ ,

$1.1^{1.02} \approx 1.1021$ .

$$5. e^{x+y} = 1 + (x+y) + \frac{1}{2!}(x^2 + 2xy + y^2) + \dots + \frac{1}{n!}(x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \dots + y^n) + R_n,$$

其中  $R_n = \frac{e^{\theta(x+y)}}{(n+1)!} (x^{n+1} + C_{n+1}^1 x^n y + \dots + y^{n+1})$ ,  $0 < \theta < 1$ .

#### \* 习题 9-10(第 129 页)

1.  $\theta = 2.234 p + 95.33$ .

$$2. \begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + nc = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

#### 总习题九(第 129 页)

1. (1) 充分, 必要; (2) 必要, 充分;

(3) 充分; (4) 充分.

2. (C).

3.  $\{(x, y) | 0 < x^2 + y^2 < 1, y^2 \leq 4x\}$ ,  $\frac{\sqrt{2}}{\ln \frac{3}{4}}$ .

\* 4. 略.

$$5. f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$$

$$f_y(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

6. (1)  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x+y^2}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x+y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x+y^2)^2}$ ,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2y}{(x+y^2)^2}$$
,  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}$ ;

(2)  $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}$ ,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^{y-1}(1+y \ln x)$$
,  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^y(\ln x)^2$ .

7.  $\Delta z = 0.02$ ,  $dz = 0.03$ .

\* 8. 略.

9.  $\frac{du}{dt} = yx^{y-1} \cdot \varphi'(t) + x^y \ln x \cdot \psi'(t)$ .

10.  $\frac{\partial z}{\partial \xi} = -\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial w}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial w}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial \zeta} = -\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}$ .

11.  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = xe^{2y} f''_{uu} + e^y f''_{uy} + xe^y f''_{vu} + f''_{xy} + e^y f''_{uv}$ .

12.  $\frac{\partial z}{\partial x} = (v \cos v - u \sin v) e^{-u}$ ,

$\frac{\partial z}{\partial y} = (u \cos v + v \sin v) e^{-u}$ .

13. 切线方程  $\begin{cases} x = a, \\ by - az = 0; \end{cases}$

法平面方程  $ay + bz = 0$ .

14.  $(-3, -1, 3)$ ,  $\frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{1}$ .

15.  $\frac{\partial f}{\partial l} = \cos \theta + \sin \theta$ , (1)  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , (2)  $\theta = \frac{5\pi}{4}$ , (3)  $\theta = \frac{3\pi}{4}$  及  $\frac{7\pi}{4}$ .

16.  $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{2}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}}$ .

17.  $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{35}{12}\right)$ .

18. 切点  $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$ ,  $V_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{2} abc$ .

19. 当  $p_1 = 80$ ,  $p_2 = 120$  时, 总利润最大; 最大总利润为 605.

20. (1)  $g(x_0, y_0) = \sqrt{5x_0^2 + 5y_0^2 - 8x_0 y_0}$ ;

(2) 攀岩的起点可取为  $M_1(5, -5)$  或  $M_2(-5, 5)$ .

## 第 十 章

### 习题 10-1(第 136 页)

1.  $\iint_D \mu(x, y) d\sigma$ .      2.  $I_1 = 4I_2$ .      3. 略.

4. (1)  $\iint_D (x+y)^2 d\sigma \geq \iint_D (x+y)^3 d\sigma;$   
 (2)  $\iint_D (x+y)^3 d\sigma \geq \iint_D (x+y)^2 d\sigma;$   
 (3)  $\iint_D \ln(x+y) d\sigma \geq \iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma;$   
 (4)  $\iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma \geq \iint_D \ln(x+y) d\sigma.$

5. (1)  $0 \leq I \leq 2;$  (2)  $0 \leq I \leq \pi^2;$   
 (3)  $2 \leq I \leq 8;$  (4)  $36\pi \leq I \leq 100\pi.$

### 习题 10-2(第 153 页)

1. (1)  $\frac{8}{3};$  (2)  $\frac{20}{3};$  (3) 1; (4)  $-\frac{3\pi}{2}.$

2. (1)  $\frac{6}{55};$  (2)  $\frac{64}{15};$  (3)  $e - e^{-1};$  (4)  $\frac{13}{6}.$

3. 略.

4. (1)  $\int_0^4 dx \int_x^{2\sqrt{x}} f(x,y) dy$  或  $\int_0^4 dy \int_{\frac{y}{4}}^y f(x,y) dx;$   
 (2)  $\int_{-r}^r dx \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} f(x,y) dy$  或  $\int_0^r dy \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} f(x,y) dx;$   
 (3)  $\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x f(x,y) dy$  或  $\int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{1}{y}}^2 f(x,y) dx + \int_1^2 dy \int_y^2 f(x,y) dx;$   
 (4)  $\int_{-1}^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y) dy + \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy +$   
 $\int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y) dy + \int_{-1}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y) dy,$   
 或  $\int_{-1}^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y) dx + \int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y) dx +$   
 $\int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx + \int_{-1}^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y) dx.$

5. 略.

6. (1)  $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x,y) dy;$  (2)  $\int_0^4 dx \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y) dy;$

(3)  $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy;$  (4)  $\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx;$

$$(5) \int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx;$$

$$(6) \int_{-1}^0 dy \int_{-2\arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx.$$

$$7. \frac{4}{3}. \quad 8. \frac{7}{2}. \quad 9. \frac{17}{6} \quad 10. 6\pi.$$

$$11. (1) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho;$$

$$(2) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho;$$

$$(3) \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho;$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{(\cos \theta + \sin \theta)^{-1}} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

$$12. (1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sec \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\csc \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho;$$

$$(2) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_0^{2\sec \theta} f(\rho) \rho d\rho;$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{(\cos \theta + \sin \theta)^{-1}}^1 f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho;$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\sec \theta \tan \theta}^{\sec \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

$$13. (1) \frac{3}{4}\pi a^4; \quad (2) \frac{1}{6}a^3[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})];$$

$$(3) \sqrt{2} - 1; \quad (4) \frac{1}{8}\pi a^4.$$

$$14. (1) \pi(e^4 - 1); \quad (2) \frac{\pi}{4}(2\ln 2 - 1);$$

$$(3) \frac{3}{64}\pi^2.$$

$$15. (1) \frac{9}{4}; \quad (2) \frac{\pi}{8}(\pi - 2);$$

$$(3) 14a^4; \quad (4) \frac{2}{3}\pi(b^3 - a^3).$$

$$16. \frac{1}{40}\pi^5. \quad 17. \frac{1}{3}R^3 \arctan k. \quad 18. \frac{3}{32}\pi a^4.$$

$$* 19. (1) \frac{\pi^4}{3}; \quad (2) \frac{7}{3}\ln 2;$$

$$(3) \frac{e-1}{2};$$

$$(4) \frac{1}{2}\pi ab. \text{ 提示: 作变换 } x = a\rho\cos\theta, y = b\rho\sin\theta.$$

$$20. (1) 2\ln 3; \quad (2) \frac{1}{8}.$$

21. 略.

$$22. (1) \text{略}; (2) \text{提示: 作变换 } x = \frac{au - bv}{\sqrt{a^2 + b^2}}, y = \frac{bu + av}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

### 习题 10-3(第 164 页)

$$1. (1) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{xy} f(x, y, z) dz;$$

$$(2) \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^1 f(x, y, z) dz;$$

$$(3) \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+2y^2}^{2-x^2} f(x, y, z) dz;$$

$$(4) \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{1-x^2/a^2}} dy \int_0^{xy/c} f(x, y, z) dz.$$

$$2. \frac{3}{2}. \quad 3. \text{略}. \quad 4. \frac{1}{364}. \quad 5. \frac{1}{2} \left( \ln 2 - \frac{5}{8} \right). \quad 6. \frac{1}{48}. \quad 7. 0. \quad 8. \frac{\pi}{4} h^2 R^2.$$

$$9. (1) \frac{7\pi}{12}; \quad (2) \frac{16}{3}\pi.$$

$$10. (1) \frac{4\pi}{5}; \quad (2) \frac{7}{6}\pi a^4.$$

$$11. (1) \frac{1}{8}; \quad (2) \frac{\pi}{10}; \quad (3) 8\pi; \quad (4) \frac{4\pi}{15}(A^5 - a^5).$$

$$12. (1) \frac{32}{3}\pi; \quad (2) \pi a^3;$$

$$(3) \frac{\pi}{6}; \quad (4) \frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5} - 4).$$

$$13. \frac{2}{3}\pi a^3.$$

$$14. \frac{8\sqrt{2}-7}{6}\pi.$$

$$15. k\pi R^4.$$

习题 10-4(第 175 页)

1.  $2a^2(\pi - 2)$ .      2.  $\sqrt{2}\pi$ .

3.  $16R^2$ .

4. (1)  $\bar{x} = \frac{3}{5}x_0$ ;  $\bar{y} = \frac{3}{8}y_0$ ;      (2)  $\bar{x} = 0$ ,  $\bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$ ;

(3)  $\bar{x} = \frac{b^2 + ab + a^2}{2(a+b)}$ ,  $\bar{y} = 0$ .

5.  $\bar{x} = \frac{35}{48}$ ,  $\bar{y} = \frac{35}{54}$ .      6.  $\bar{x} = \frac{2}{5}a$ ,  $\bar{y} = \frac{2}{5}a$ .

7. (1)  $\left(0, 0, \frac{3}{4}\right)$ ;      (2)  $\left(0, 0, \frac{3(A^4 - a^4)}{8(A^3 - a^3)}\right)$ ;

(3)  $\left(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a, \frac{7}{30}a^2\right)$ .

8.  $\left(0, 0, \frac{5}{4}R\right)$ .

9. (1)  $I_y = \frac{1}{4}\pi a^3 b$ ;      (2)  $I_x = \frac{72}{5}$ ,  $I_y = \frac{96}{7}$ ;

(3)  $I_x = \frac{1}{3}ab^3$ ,  $I_y = \frac{1}{3}ba^3$ .

10.  $\frac{1}{12}Mb^2$ ,  $\frac{1}{12}Mb^2$  ( $M = bh\mu$  为矩形板的质量).

11. (1)  $\frac{8}{3}a^4$ ;      (2)  $\bar{x} = \bar{y} = 0$ ,  $\bar{z} = \frac{7}{15}a^2$ ;      (3)  $\frac{112}{45}a^6\rho$ .

12.  $\frac{1}{2}a^2 M$  ( $M = \pi a^2 h\rho$  为圆柱体的质量).

13.  $F = \left(2G\mu \left( \ln \frac{R_2 + \sqrt{R_2^2 + a^2}}{R_1 + \sqrt{R_1^2 + a^2}} - \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + a^2}} + \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + a^2}} \right),\right.$

$0, \pi Ga\mu \left( \frac{1}{\sqrt{R_2^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_1^2 + a^2}} \right) \right).$

14.  $F_x = F_y = 0$ ,  $F_z = -2\pi G\rho [\sqrt{(h-a)^2 + R^2} - \sqrt{R^2 + a^2} + h]$ .

\* 习题 10-5(第 181 页)

1. (1)  $\frac{\pi}{4}$ ;      (2) 1;      (3)  $\frac{8}{3}$ .

2. (1)  $\frac{1}{3}\cos x(\cos x - \sin x)(1 + 2\sin 2x)$ ;

$$(2) \frac{2}{x} \ln(1+x^2);$$

$$(3) \ln \sqrt{\frac{x^2+1}{x^4+1}} + 3x^2 \arctan x^2 - 2x \arctan x;$$

$$(4) 2x e^{-x^2} - e^{-x^2} - \int_x^{x^2} y^2 e^{-xy^2} dy.$$

$$3. 3f(x) + 2xf'(x).$$

$$4. (1) \pi \arcsin a;$$

$$(2) \pi \ln \frac{1+a}{2}. 提示: 设 \varphi(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + a^2 \sin^2 x) dx, I = \varphi(a).$$

$$5. (1) \frac{\pi}{2} \ln(1+\sqrt{2}); 提示: 利用公式 \frac{\arctan x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2 y^2}.$$

$$(2) \arctan(1+b) - \arctan(1+a). 提示: 利用公式 \frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy.$$

### 总习题十(第 181 页)

$$1. (1) (C); (2) (A); (3) (B).$$

$$2. (1) \frac{3}{2} + \cos 1 + \sin 1 - \cos 2 - 2\sin 2; (2) \pi^2 - \frac{40}{9};$$

$$(3) \frac{1}{3} R^3 \left( \pi - \frac{4}{3} \right); (4) \frac{\pi}{4} R^4 + 9\pi R^2.$$

$$3. (1) \int_{-2}^0 dx \int_{2x+4}^{4-x^2} f(x, y) dy; (2) \int_0^2 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{3-x} f(x, y) dy;$$

$$(3) \int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x, y) dx.$$

4. 略.

$$5. \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sec \theta \tan \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sec \theta \tan \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho +$$

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\theta \int_0^{\sec \theta \tan \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

$$6. f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2} + \frac{8}{9\pi} - \frac{2}{3}.$$

$$7. \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz.$$

$$8. (1) \frac{59}{480}\pi R^5; (2) 0; (3) \frac{250}{3}\pi.$$

\* 9. (1)  $F(t)$  在  $(0, +\infty)$  内单调增加; (2) 略.

10.  $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}$ .

11.  $\sqrt{\frac{2}{3}}R$  ( $R$  为圆的半径).

12.  $I = \frac{368}{105}\mu$ .

13.  $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ , 其中  $F_x = 0$ ,

$$F_x = \frac{4GmM}{\pi R^2} \left( \ln \frac{R + \sqrt{R^2 + a^2}}{a} - \frac{R}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right), \quad F_z = -\frac{2GmM}{R^2} \left( 1 - \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right).$$

14.  $(0, 0, \frac{3}{8}b)$ .

\* 15.  $\mu|_{r=0} = \frac{3M}{\pi R^3}$ .

## 第十一章

### 习题 11-1(第 190 页)

1. (1)  $I_x = \int_L y^2 \mu(x, y) ds$ ,  $I_y = \int_L x^2 \mu(x, y) ds$ ;

(2)  $\bar{x} = \frac{\int_L x \mu(x, y) ds}{\int_L \mu(x, y) ds}$ ,  $\bar{y} = \frac{\int_L y \mu(x, y) ds}{\int_L \mu(x, y) ds}$ .

2. 略.

3. (1)  $2\pi a^{2n+1}$ ; (2)  $\sqrt{2}$ ;

(3)  $\frac{1}{12}(5\sqrt{5} + 6\sqrt{2} - 1)$ ; (4)  $e^a \left( 2 + \frac{\pi}{4}a \right) - 2$ ;

(5)  $\frac{\sqrt{3}}{2}(1 - e^{-2})$ ; (6) 9;

(7)  $\frac{256}{15}a^3$ ; (8)  $2\pi^2 a^3(1 + 2\pi^2)$ .

4. 质心在扇形的对称轴上且与圆心距离  $\frac{a \sin \varphi}{\varphi}$  处.

5. (1)  $I_z = \frac{2}{3}\pi a^2 \sqrt{a^2 + k^2} (3a^2 + 4\pi^2 k^2)$ ;

$$(2) \bar{x} = \frac{6ak^2}{3a^2 + 4\pi^2 k^2}, \bar{y} = \frac{-6\pi ak^2}{3a^2 + 4\pi^2 k^2}, \bar{z} = \frac{3k(\pi a^2 + 2\pi^3 k^2)}{3a^2 + 4\pi^2 k^2}$$

习题 11-2(第 200 页)

1—2. 略.

3. (1)  $-\frac{56}{15}$ ;

(2)  $-\frac{\pi}{2}a^3$ ;

(3) 0;

(4)  $-2\pi$ ;

(5)  $\frac{k^3 \pi^3}{3} - a^2 \pi$ ;

(6) 13;

(7)  $\frac{1}{2}$ ;

(8)  $-\frac{14}{15}$ .

4. (1)  $\frac{34}{3}$ ;

(2) 11;

(3) 14;

(4)  $\frac{32}{3}$ .

5.  $-|\mathbf{F}|R$ .

6.  $mg(z_2 - z_1)$ .

7. (1)  $\int_L \frac{P(x, y) + Q(x, y)}{\sqrt{2}} ds$ ;

(2)  $\int_L \frac{P(x, y) + 2xQ(x, y)}{\sqrt{1+4x^2}} ds$ ;

(3)  $\int_L [\sqrt{2x-x^2} P(x, y) + (1-x)Q(x, y)] ds$ .

8.  $\int_L \frac{P + 2xQ + 3yR}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}} ds$ .

习题 11-3(第 213 页)

1. (1)  $\frac{1}{30}$ ;

(2) 8.

2. (1)  $\frac{3}{8}\pi a^2$ ;

(2)  $12\pi$ ;

(3)  $\pi a^2$ .

3.  $-\pi$ .

4. (1)  $\frac{5}{2}$ ;

(2) 236;

(3) 5.

5. (1) 12;

(2) 0;

(3)  $\frac{\pi^2}{4}$ ;

(4)  $\frac{\sin 2}{4} - \frac{7}{6}$ .

6. (1)  $\frac{1}{2}x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2$ ; (2)  $x^2y$ ;  
 (3)  $-\cos 2x \cdot \sin 3y$ ; (4)  $x^3y + 4x^2y^2 - 12e^y + 12ye^y$ ;  
 (5)  $y^2 \sin x + x^2 \cos y$ .

7. 略.

8. (1)  $x^3 + 3x^2y^2 + \frac{4}{3}y^3 = C$ ; (2)  $a^2x - x^2y - xy^2 - \frac{1}{3}y^3 = C$ ;  
 (3)  $xe^y - y^2 = C$ ; (4)  $x\sin y + y\cos x = C$ ;  
 (5)  $xy - \frac{1}{3}x^3 = C$ ; (6) 不是全微分方程;  
 (7)  $\rho(1 + e^{2\theta}) = C$ ; (8) 不是全微分方程.

9.  $\lambda = -1$ ,  $u(x, y) = -\arctan \frac{y}{x} + C$ .

### 习题 11-4(第 219 页)

1.  $I_x = \iint_S (y^2 + z^2) \mu(x, y, z) dS$ .

2—3. 略.

4. (1)  $\frac{13}{3}\pi$ ; (2)  $\frac{149}{30}\pi$ ; (3)  $\frac{111}{10}\pi$ .

5. (1)  $\frac{1+\sqrt{2}}{2}\pi$ ; (2)  $9\pi$ .

6. (1)  $4\sqrt{61}$ ; (2)  $-\frac{27}{4}$ ; (3)  $\pi a(a^2 - h^2)$ ; (4)  $\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4$ .

7.  $\frac{2\pi}{15}(6\sqrt{3} + 1)$ .

8.  $\frac{4}{3}\mu_0\pi a^4$ .

### 习题 11-5(第 228 页)

1—2. 略.

3. (1)  $\frac{2}{105}\pi R^7$ ; (2)  $\frac{3}{2}\pi$ ;  
 (3)  $\frac{1}{2}$ ; (4)  $\frac{1}{8}$ .

4. (1)  $\iint_S \left( \frac{3}{5}P + \frac{2}{5}Q + \frac{2\sqrt{3}}{5}R \right) dS$ ;

$$(2) \iint_S \frac{2xP + 2yQ + R}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} dS.$$

### 习题 11-6(第 236 页)

1. (1)  $3a^4$ ; (2)  $\frac{12}{5}\pi a^5$ ; (3)  $\frac{2}{5}\pi a^5$ ; (4)  $81\pi$ ; (5)  $\frac{3}{2}$ .
- \* 2. (1) 0; (2)  $a^3 \left(2 - \frac{a^2}{6}\right)$ ; (3)  $108\pi$ .
- \* 3. (1)  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 2x + 2y + 2z$ ;  
 (2)  $\operatorname{div} \mathbf{A} = ye^{xy} - x\sin(xy) - 2xz\sin(xz^2)$ ;  
 (3)  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 2x$ .
4. 略.

\* 5. 提示: 取液面为  $xOy$  面,  $z$  轴铅直向下. 这物体表面  $\Sigma$  上点  $(x, y, z)$  处单位面积上所受液体的压力为  $(-\nu_0 z \cos \alpha, -\nu_0 z \cos \beta, -\nu_0 z \cos \gamma)$ , 其中  $\nu_0$  为液体单位体积的重力,  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  为点  $(x, y, z)$  处  $\Sigma$  的外法线的方向余弦.

### 习题 11-7(第 245 页)

1. 略.
- \* 2. (1)  $-\sqrt{3}\pi a^2$ ; (2)  $-2\pi a(a+b)$ ;  
 (3)  $-20\pi$ ; (4)  $9\pi$ .
- \* 3. (1)  $\operatorname{rot} \mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ ; (2)  $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ ;  
 (3)  $\operatorname{rot} \mathbf{A} = [x\sin(\cos z) - xy^2\cos(xz)]\mathbf{i} - y\sin(\cos z)\mathbf{j} + [y^2z\cos(xz) - x^2\cos y]\mathbf{k}$ .
- \* 4. (1) 0; (2) -4.
- \* 5. (1)  $2\pi$ ; (2)  $12\pi$ .
- \* 6. 略. \* 7. 0.

### 总习题十一(第 246 页)

1. (1)  $\int_P (P\cos \alpha + Q\cos \beta + R\cos \gamma) ds$ , 切向量;

$$(2) \iint_S (P\cos \alpha + Q\cos \beta + R\cos \gamma) dS, \text{ 法向量.}$$

2. (C).

3. (1)  $2a^2$ ; (2)  $\frac{(2+t_0^2)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2}}{3}$ ;

$$(3) -2\pi a^2;$$

$$(4) \frac{1}{35};$$

$$(5) \pi a^2;$$

$$(6) \frac{\sqrt{2}}{16}\pi.$$

$$4. (1) 2\pi \arctan \frac{H}{R};$$

$$(2) -\frac{\pi}{4}h^4;$$

$$(3) 2\pi R^3;$$

$$(4) \frac{2}{15}.$$

$$5. \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2).$$

6. 略.

$$7. (1) \text{略};$$

$$(2) \frac{c}{d} - \frac{a}{b}.$$

$$8. (0, 0, \frac{a}{2}).$$

9. 略.

$$10. 3.$$

$$11. \frac{3}{2}.$$

## 第十二章

### 习题 12-1(第 254 页)

$$1. (1) \frac{1+1}{1+1^2} + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \frac{1+4}{1+4^2} + \frac{1+5}{1+5^2} + \dots; \quad ; \pi 0 \Sigma \dots$$

$$(2) \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \dots;$$

$$(3) \frac{1}{5} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^5} - \dots;$$

$$(4) \frac{1!}{1^1} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{4^4} + \frac{5!}{5^5} + \dots.$$

$$2. (1) \frac{1}{2n-1};$$

$$(2) (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n};$$

$$(3) \frac{x^{\frac{n}{2}}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}; \quad (4) (-1)^{n-1} \frac{a^{n+1}}{2n+1}.$$

3. (1) 发散; (2) 收敛;

(3) 发散. 提示: 先乘以  $2\sin \frac{\pi}{12}$ , 再将一般项分解为两个余弦函数之差.

4. (1) 收敛; (2) 发散; (3) 发散; (4) 发散; (5) 收敛.

5. (1) 收敛; (2) 发散; (3) 收敛; (4) 发散.

### 习题 12-2(第 268 页)

1. (1) 发散; (2) 发散; (3) 收敛;  
(4) 收敛; (5)  $a > 1$  时收敛,  $a \leq 1$  时发散.
2. (1) 发散; (2) 收敛; (3) 收敛; (4) 收敛.
3. (1) 收敛; (2) 收敛; (3) 收敛;  
(4) 当  $b < a$  时收敛, 当  $b > a$  时发散, 当  $b = a$  时不能肯定.
4. (1) 收敛; (2) 收敛; (3) 发散;  
(4) 收敛; (5) 发散; (6) 发散.
5. (1) 条件收敛; (2) 绝对收敛; (3) 绝对收敛; (4) 条件收敛;  
(5) 发散.

### 习题 12-3(第 277 页)

1. (1)  $(-1, 1)$ ; (2)  $(-1, 1)$ ; (3)  $(-\infty, +\infty)$ ;  
(4)  $(-3, 3)$ ; (5)  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ; (6)  $(-1, 1)$ ;  
(7)  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ; (8)  $(4, 6)$ .
2. (1)  $\frac{1}{(1-x)^2}$  ( $-1 < x < 1$ );  
(2)  $\frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x - x$  ( $-1 < x < 1$ );  
(3)  $\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$  ( $-1 < x < 1$ ).

### 习题 12-4(第 285 页)

1.  $\cos x = \cos x_0 + \cos\left(x_0 + \frac{\pi}{2}\right)(x - x_0) + \dots + \frac{\cos\left(x_0 + \frac{n\pi}{2}\right)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$   
 $(-\infty, +\infty)$ .
2. (1)  $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ ,  $(-\infty, +\infty)$ ;  
(2)  $\ln(a+x) = \ln a + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{a}\right)^n$ ,  $(-a, a]$ ;  
(3)  $a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln a)^n}{n!}$ ,  $(-\infty, +\infty)$ ;  
(4)  $\sin^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2x)^{2n}}{2(2n)!}$ ,  $(-\infty, +\infty)$ ;

$$(5) (1+x)\ln(1+x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}, (-1, 1];$$

$$(6) \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}, [-1, 1].$$

$$3. (1) \sqrt{x^3} = 1 + \frac{3}{2}(x-1) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2 (n+1)(n+2)2^n} \left(\frac{x-1}{2}\right)^{n+2}, [0, 2];$$

$$(2) \lg x = \frac{1}{\ln 10} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}, (0, 2].$$

$$4. \cos x = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{\left(x + \frac{\pi}{3}\right)^{2n}}{(2n)!} + \sqrt{3} \frac{\left(x + \frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right], (-\infty, +\infty).$$

$$5. \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{3^n}, (0, 6).$$

$$6. \frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) (x+4)^n, (-6, -2).$$

### 习题 12-5(第 293 页)

$$1. (1) 1.0986; (2) 1.648; (3) 2.00430; (4) 0.9994.$$

$$2. (1) 0.4940; (2) 0.487.$$

$$3. (1) y = Ce^{\frac{x^2}{2}} + \left[ -1 + x + \frac{1}{1 \cdot 3}x^3 + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} + \cdots \right];$$

$$(2) y = a_0 e^{-\frac{x^2}{2}} + a_1 \left[ x - \frac{x^3}{1 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} + \cdots \right];$$

$$(3) y = C(1-x) + x^3 \left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{6}x + \frac{1}{10}x^2 + \cdots + \frac{2}{(n+2)(n+3)}x^n + \cdots \right];$$

$$4. (1) y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{9}{32}x^4 + \cdots;$$

$$(2) y = x + \frac{1}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1}{3 \cdot 4}x^4 + \cdots.$$

$$5. e^x \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4} \cdot \frac{x^n}{n!}, (-\infty, +\infty).$$

提示:  $e^x \cos x = \operatorname{Re} e^{(1+i)x} = \operatorname{Re} e^{\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})x}$ .

### 习题 12-6(第 301 页)

$$1. (1) 取正整数 N \geqslant \frac{|x|}{\epsilon}; (2) 略.$$

$$2. (1) s(x) = \begin{cases} 0, & x=0, \\ 1+x^2, & x \neq 0. \end{cases}$$

(2) 当  $x \neq 0$  时, 取正整数  $N \geq \frac{\ln \frac{1}{\epsilon}}{\ln(1+x^2)}$ ; 当  $x=0$  时, 取  $N=1$ .

(3) 在  $[0,1]$  上不一致收敛, 在  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$  上一致收敛.

3. (1) 一致收敛; (2) 不一致收敛.

4. 略.

### 习题 12-7(第 315 页)

$$1. (1) f(x) = \pi^2 + 1 + 12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx, (-\infty, +\infty);$$

$$(2) f(x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\pi} \left[ \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 4} (2\cos nx - n\sin nx) \right],$$

$(x \neq (2n+1)\pi, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ ;

$$(3) f(x) = \frac{a-b}{4}\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{[1-(-1)^n](b-a)}{n^2\pi} \cos nx + \frac{(-1)^{n-1}(a+b)}{n} \sin nx \right\},$$

$(x \neq (2n+1)\pi, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ .

$$2. (1) 2\sin \frac{x}{3} = \frac{18\sqrt{3}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n \sin nx}{9n^2 - 1}, (-\pi, \pi);$$

$$(2) f(x) = \frac{1+\pi-e^{-x}}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1-(-1)^n e^{-x}}{1+n^2} \cos nx + \left[ \frac{-n+(-1)^n n e^{-x}}{1+n^2} + \frac{1}{n} (1-(-1)^n) \right] \sin nx \right\}, (-\pi, \pi).$$

$$3. \cos \frac{x}{2} = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2 - 1} \cos nx, [-\pi, \pi].$$

$$4. f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{2n} \right] \sin nx$$

$(x \neq (2n+1)\pi, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

$$5. \frac{\pi-x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx, (0, \pi].$$

$$6. 2x^2 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\frac{2}{n^3} + (-1)^n \left( \frac{2}{n^3} - \frac{\pi^2}{n} \right) \right] \sin nx, [0, \pi];$$

$$2x^2 = \frac{2}{3}\pi^2 + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx, [0, \pi].$$

7. 略.

习题 12-8(第 322 页)

$$1. (1) f(x) = \frac{11}{12} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos 2n\pi x, (-\infty, +\infty);$$

$$(2) f(x) = -\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{1 - (-1)^n}{n^2 \pi^2} + \frac{2 \sin \frac{n\pi}{2}}{n\pi} \right] \cos n\pi x + \frac{1 - 2 \cos \frac{n\pi}{2}}{n\pi} \sin n\pi x \right\}, \\ \left( x \neq 2k, 2k + \frac{1}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right);$$

$$(3) f(x) = -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{6}{n^2 \pi^2} [1 - (-1)^n] \cos \frac{n\pi x}{3} + \frac{6}{n\pi} (-1)^{n+1} \sin \frac{n\pi x}{3} \right\}, \\ (x \neq 3(2k+1), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$2. (1) f(x) = \frac{4l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{l}, [0, l],$$

$$f(x) = \frac{l}{4} - \frac{2l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos \frac{2(2k-1)\pi x}{l}, [0, l];$$

$$(2) f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n^3 \pi^2} [(-1)^n - 1] \right\} \sin \frac{n\pi x}{2}, [0, 2],$$

$$f(x) = \frac{4}{3} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{2}, [0, 2].$$

$$3. f(x) = \operatorname{sh} 1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n (1 - i n \pi)}{1 + (n\pi)^2} e^{inx} (x \neq 2k+1, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$4. u(t) = \frac{h\tau}{T} + \frac{2h}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\tau\pi}{T} \cos \frac{2n\pi t}{T} (-\infty, +\infty).$$

总习题十二(第 322 页)

1. (1) 必要, 充分; (2) 充分必要; (3) 收敛, 发散.

2. (1) 发散; (2) 发散; (3) 收敛; (4) 发散;

(5)  $a < 1$  时收敛,  $a > 1$  时发散,  $a = 1$  时,  $s > 1$  收敛,  $s \leq 1$  发散.

3. 略.

4. 不一定. 考虑级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$  及  $\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n})$ .

5. (1)  $p > 1$  时绝对收敛,  $0 < p \leq 1$  时条件收敛,  $p \leq 0$  时发散;

(2) 绝对收敛; (3) 条件收敛; (4) 绝对收敛.

6. (1) 0;

(2)  $\sqrt[4]{8}$ . 提示: 化成  $2^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{n}{3^n} + \dots}$ .

$$7. (1) \left( -\frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right); \quad (2) \left( -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} \right); \\ (3) (-2, 0); \quad (4) (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

$$8. (1) s(x) = \frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}, \quad (-\sqrt{2}, \sqrt{2});$$

$$(2) s(x) = \arctan x, \quad [-1, 1];$$

$$(3) s(x) = \frac{x-1}{(2-x)^2}, \quad (0, 2);$$

$$(4) s(x) = \begin{cases} 1 + \left(\frac{1}{x} - 1\right) \ln(1-x), & x \in [-1, 0) \cup (0, 1), \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

$$9. (1) 2e;$$

$$(2) \frac{1}{2}(\cos 1 + \sin 1). \text{ 提示: 利用 } \cos 1 \text{ 和 } \sin 1 \text{ 的展开式.}$$

$$10. (1) \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1, 1],$$

提示: 利用积分  $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}}$ ;

$$(2) \frac{1}{(2-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}} x^{n-1}, \quad x \in (-2, 2).$$

$$11. f(x) = \frac{e^x - 1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n e^x - 1}{n^2 + 1} \cos nx + \frac{n((-1)^{n+1} e^x + 1)}{n^2 + 1} \sin nx \right], \\ -\infty < x < +\infty \text{ 且 } x \neq n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$12. f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos nh}{n} \sin nx, \quad x \in (0, h) \cup (h, \pi];$$

$$f(x) = \frac{h}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nh}{n} \cos nx, \quad x \in [0, h] \cup (h, \pi].$$