Kim, Dae Ho (Mokwon University)
mis@mokwon.ac.kr / mis@acm.org

08 CHAPTER

假设检验

1

第8章 假设检验

2/26

2

Kim, Dae Ho (Mokwon University)
mis@mokwon.ac.kr / mis@acm.org

1. 假设检验

[定义 10-3] 统计假设检验(hypothesis testing)
：提出与现有的普遍观念(原假设)相反的新假设(对立假设)，根据所观测到的数据，决定是接受或拒绝原假设的统计过程。

- 原假设(null hypothesis) H_0
  现有的普遍观念，若无明确证据拒绝，则接受。
- 对立假设(alternative hypothesis) H_1
  新的主张，只有从样本数据中获得了确凿的依据才接受。

[定义 10-4] 第1类错误(type 1 error)
：尽管原假设是对的，也将其拒绝的错误

[定义 10-5] 第2类错误(type 2 error)
：尽管对立假设是对的，还是接受原假设的错误

3/26

3

1. 假设检验

检验结果 / 实际情况	原假设正确（无罪）	对立假设正确（有罪）
接受原假设（无罪申报）	正确决定	第2类错误
拒绝原假设（有罪申报）	第1类错误	正确决定

- 显著性水平(significance level)
  第1类错误发生的概率，限制在α以下
- 检验统计量(test statistic)
  为了检验假设而使用的统计量
- 拒绝域(rejection area)
  拒绝原假设的检验统计量的领域
- 临界点(critical point)，临界值(critical value)
  拒绝域的警戒值

4/26

4

Kim, Dae Ho (Mokwon University)
mis@mokwon.ac.kr / mis@acm.org

1. 假设检验

- 统计假设检验过程

① 设定原假设: $H_0 : \theta = \theta_0$

② 设定对立假设: $H_1 : \theta < \theta_0$, $\theta > \theta_0$, $\theta \neq \theta_0$

③ 设定显著性水平α

④ 设定检验统计量与拒绝域

⑤ 根据所观测到的样本数据计算检验统计量的值

⑥ 决定接受或拒绝原假设(H_0)

5/26

5

2. 关于总体均值的检验

6/26

6

Kim, Dae Ho (Mokwon University)
mis@mokwon.ac.kr / mis@acm.org

2.1 总体方差已知情况下的检验

[定理 10-2] 总体均值的检验(总体方差已知的情况)

$$H_0: \mu = \mu_0 \qquad Z_0 \equiv \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1) \Big| H_0$$

① $H_1: \mu > \mu_0 \Rightarrow$ 기각역: $Z_0 > z_{1-\alpha}$

② $H_1: \mu < \mu_0 \Rightarrow$ 기각역: $Z_0 < z_\alpha = -z_{1-\alpha}$

③ $H_1: \mu \neq \mu_0 \Rightarrow$ 기각역: $|Z_0| > z_{1-\alpha/2}$

① 모평균이 커졌다는 주장 $\Rightarrow H_1: \mu > \mu_0$

$P(\text{Reject } H_0 | H_0) = P(Z_0 > c | H_0) = \alpha \quad \Rightarrow c = z_{1-\alpha}$

② 모평균이 작아졌다는 주장 $\Rightarrow H_1: \mu < \mu_0$

$P(\text{Reject } H_0 | H_0) = P(Z_0 < c | H_0) = \alpha \quad \Rightarrow c = z_\alpha = -z_{1-\alpha}$

③ 모평균이 달라졌다는 주장 $\Rightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$

$P(\text{Reject } H_0 | H_0) = P(|Z_0| > c | H_0) = \alpha \quad \Rightarrow c = z_{1-\alpha/2}$

7/26

7

2.1 总体方差已知情况下的检验

[例 10-6] A公司K型号汽车的燃料消耗率均值为12.5(km/l)，标准差为0.5(km/l)，对40台装置最新开发的发动机的汽车的燃料消耗率进行测量，结果显示：样本均值为12.64(km/l)。请在显著性水平为5%的情况下，检验燃料消耗率是否得到改善。

귀무가설 $H_0: \mu = 12.5$, 대립가설 $H_1: \mu > 12.5$

기각역은 $Z_0 > z_{0.95} \doteq 1.645$

$$Z_0 = \frac{12.64 - 12.5}{0.5 / \sqrt{40}} \doteq 1.771 > z_{0.95} \doteq 1.645$$

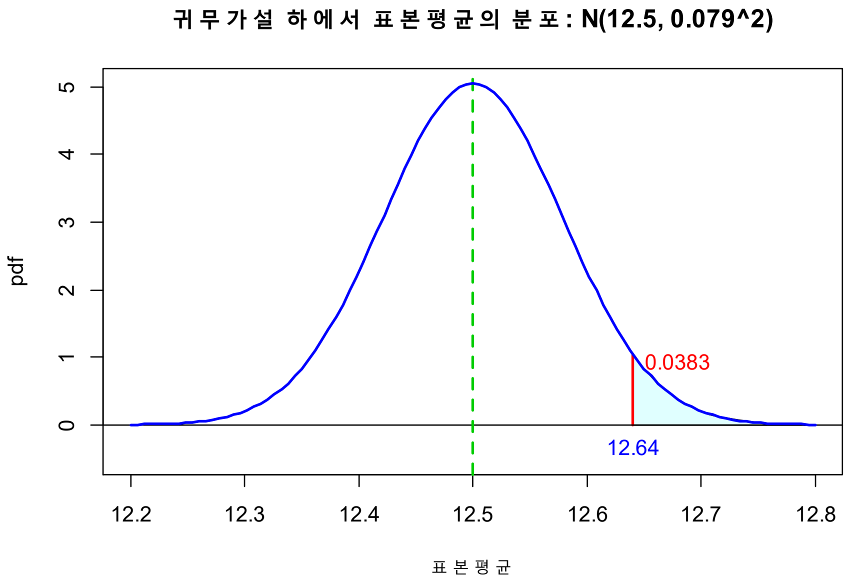
→ 在显著性为5%的情况下，原假设被拒绝

→ 在显著性为5%的情况下，可证明燃料消费率得到改善

8/26

8

목원대학교 MOKWON UNIVERSITY
Kim, Dae Ho (Mokwon University)
mis@mokwon.ac.kr / mis@acm.org



2.1 总体方差已知情况下的检验

[例 10-7] 一个巧克力的重量符合均值为200(g)，标准差为1.8(g)的正态分布。最近生产的50个巧克力重量的样本均值为199.5(g)，请在显著性水平为5%的情况下，检验平均重量是否发生了改变。

귀무가설 $H_0: \mu = 200$, 대립가설 $H_1: \mu \neq 200$

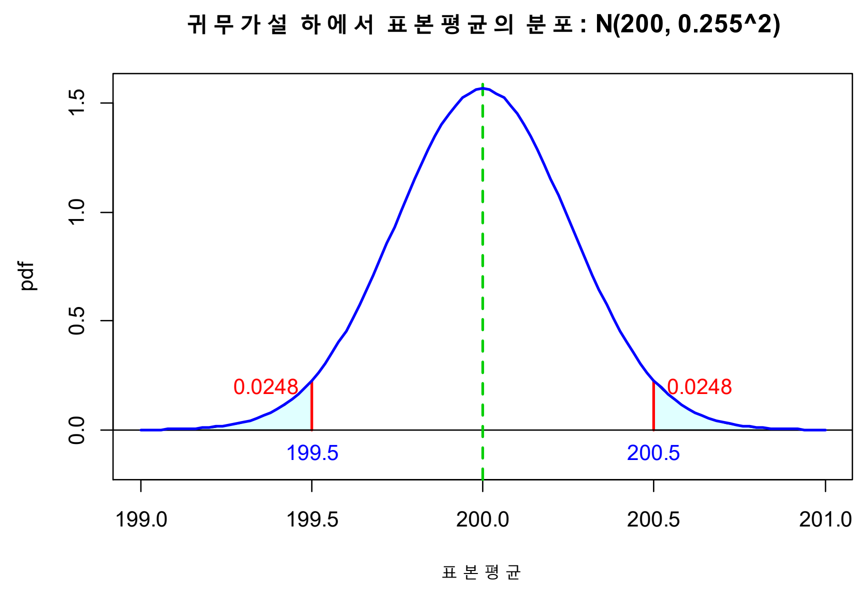
기각역은 $|Z_0| > z_{0.975} \doteq 1.96$

$$|Z_0| = \left| \frac{199.5 - 200}{1.8/\sqrt{50}} \right| \doteq 1.964 > z_{0.975} \doteq 1.96$$

→ 在显著性为5%的情况下，原假设被拒绝

→ 在显著性水平为5%的情况下，可证明平均重量发生了改变

Kim, Dae Ho (Mokwon University)
mis@mokwon.ac.kr / mis@acm.org



11/26

11

2.2 总体方差未知情况下的检验

[定理 10-4] 总体均值的检验(总体方差未知的情况下)

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad T_0 \equiv \frac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1) \,\Big|\, H_0$$

① $H_1 : \mu > \mu_0 \Rightarrow$ 기각역: $T_0 > t_{1-\alpha;\, n-1}$

② $H_1 : \mu < \mu_0 \Rightarrow$ 기각역: $T_0 < t_{\alpha;\, n-1} = -t_{1-\alpha;\, n-1}$

③ $H_1 : \mu \neq \mu_0 \Rightarrow$ 기각역: $|\, T_0 \,| > t_{1-\alpha/2;\, n-1}$

① 모평균이 커졌다는 주장 $\Rightarrow H_1 : \mu > \mu_0$

$$P(\text{Reject } H_0 | H_0) = P(T_0 > c | H_0) = \alpha \quad \Rightarrow c = t_{1-\alpha;n-1}$$

② 모평균이 작아졌다는 주장 $\Rightarrow H_1 : \mu < \mu_0$

$$P(\text{Reject } H_0 | H_0) = P(T_0 < c | H_0) = \alpha \quad \Rightarrow c = t_{\alpha;n-1} = -t_{1-\alpha;n-1}$$

③ 모평균이 달라졌다는 주장 $\Rightarrow H_1 : \mu \neq \mu_0$

$$P(\text{Reject } H_0 | H_0) = P(|T_0| > c | H_0) = \alpha \quad \Rightarrow c = t_{1-\alpha/2;n-1}$$

12/26

12

Kim, Dae Ho (Mokwon University)
mis@mokwon.ac.kr / mis@acm.org

2.2 总体方差未知情况下的检验

[例 10-10] A公司K型号汽车的燃料消耗率均值为12.5(km/l)，测量40台装有最新开发的发动机的汽车的燃料消耗率，结果显示：样本均值为12.65(km/l)，样本标准差为0.57(km/l)。请在显著性水平为5%的情况下，检验燃料消耗率是否得到了改善。

귀무가설 $H_0: \mu = 12.5$, 대립가설 $H_1: \mu > 12.5$

기각역은 $T_0 > t_{0.95;39} \doteq 1.685$

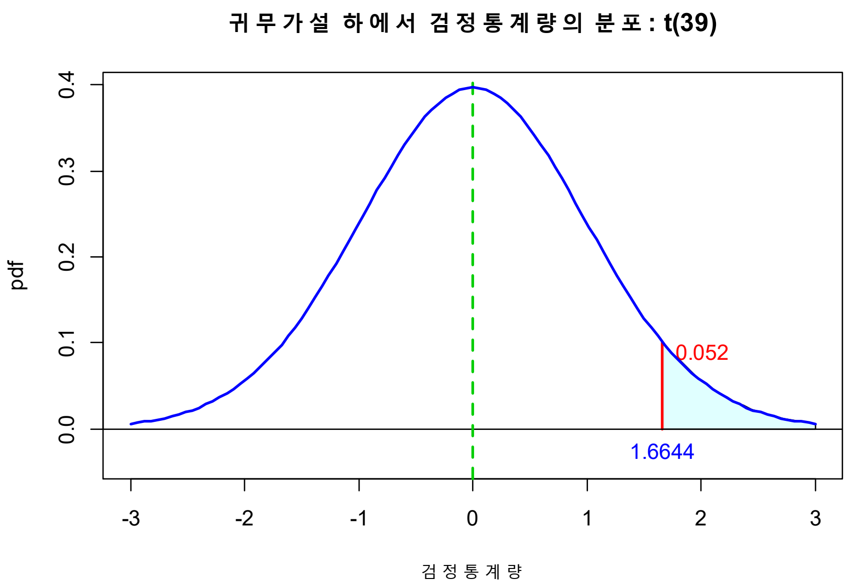
$$T_0 \equiv \frac{12.65 - 12.5}{0.57/\sqrt{40}} \doteq 1.664 < t_{0.95;39} \doteq 1.685$$

→ 在显著性水平为5%的情况下，原假设被接受

→ 在显著性水平为5%的情况下，无充足的证据可证明燃料消费率得到了改善

13/26

13



14/26

14

Kim, Dae Ho (Mokwon University)
mis@mokwon.ac.kr / mis@acm.org

2.2 总体方差未知情况下的检验

[例 10-11 一个巧克力的重量符合均值为200(g)的正态分布。最近生产的50个巧克力重量的样本均值为199.5(g)，标准差为1.8(g)。请在显著性水平为5%的情况下，检验平均重量是否发生了改变。

귀무가설 $H_0: \mu = 200$, 대립가설 $H_1: \mu \neq 200$

기각역은 $|T_0| > t_{0.975;49} \doteq 2.010$

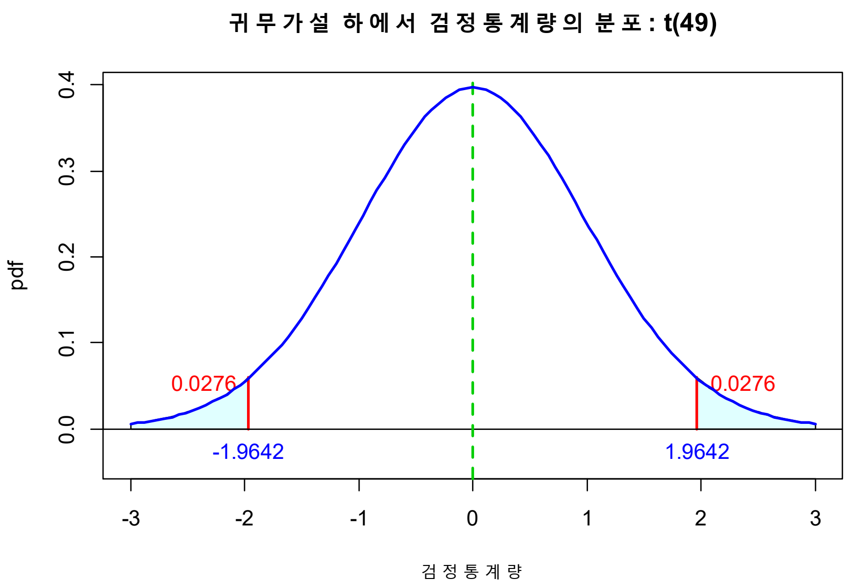
$$|T_0| = \frac{|199.5 - 200|}{1.8/\sqrt{50}} \doteq 1.964 < 2.010$$

→ 在显著性水平为5%的情况下，原假设被接受

→ 在显著性水平为5%的情况下，无充足的证据可证明平均重量发生了改变

15/26

15



16/26

16

Kim, Dae Ho (Mokwon University)
mis@mokwon.ac.kr / mis@acm.org

2.2 总体方差未知情况下的检验

[例 10-12] 巧克力重量符合正态分布，随机抽取50个巧克力进行重量测试，结果如下所示。([例 10-9])，请检验在显著性水平为5%的情况下，是否可以说与总体均值200不一样。

194	200	207	199	206	191	195	197	210	202
206	198	196	213	196	196	200	198	188	202
203	203	204	198	204	201	204	199	197	197
209	194	197	203	202	198	197	201	194	193
195	201	194	198	195	201	196	199	204	198

귀무가설 $H_0: \mu = 200$, 대립가설 $H_1: \mu \neq 200$

기각역은 $|T_0| > t_{0.975;49} \doteq 2.010$ $\qquad \overline{X} = 199.46, \quad S \doteq 4.933$

$$T_0 = \frac{199.46 - 200}{4.933/\sqrt{50}} \doteq -0.774 \quad \Rightarrow |T_0| \doteq 0.774 < t_{0.975;49} \doteq 2.010$$

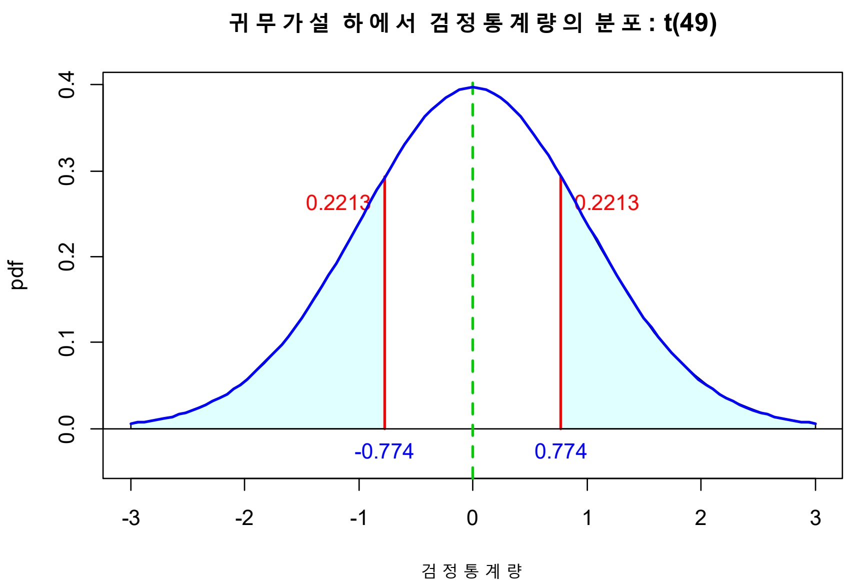
→ 在显著性水平为5%的情况下，原假设被接受

→ 在显著性水平为5%的情况下，无充足的证据可证明平均重量发生了改变

$$\left[199.46 \pm 2.010 \times \frac{4.993}{\sqrt{50}}\right] \doteq [199.46 \pm 1.402] = [198.058, 200.862]$$

17/26

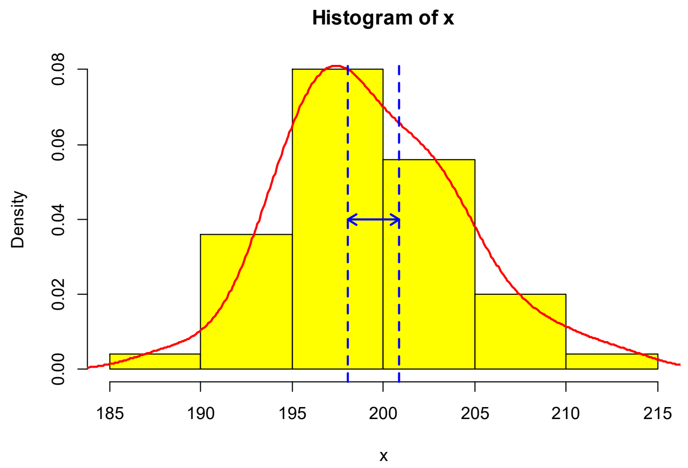
17



18/26

18

探讨下图 ⇒ 置信区间包含200



19/26

19

3. 关于总体比例的检验

$H_0 : p = p_0$

$H_1 : p > p_0,\ p < p_0,\ p \neq p_0$

$X \sim B(n, p_0)\ \big|\ H_0$

[定义 10-6] p-值(p-value)

：依据检验统计量的观测值而拒绝原假设时，出现错误的概率，即原假设是真的，但偶然出现那样的观测值的概率。

20/26

20

Kim, Dae Ho (Mokwon University)
mis@mokwon.ac.kr / mis@acm.org

3.1 总体比例的检验(样本不大的情况)

$H_0 : p = p_0$

$H_1 : p > p_0,\ p < p_0,\ p \neq p_0$

$X \sim B(n, p_0) \mid H_0$

[定义 10-6] p-值(p-value)

：依据检验统计量的观测值而拒绝原假设时，出现错误的概率，即原假设是真的，但偶然出现那样的观测值的概率。

[定理 10-6] 总体比例的检验(样本不大的情况)

$H_0 : p = p_0$, 성공회수의 관측치 : x

① $H_1 : p > p_0 \Rightarrow$ 기각역: $P(X \geq x \mid H_0) \leq \alpha$

② $H_1 : p < p_0 \Rightarrow$ 기각역: $P(X \leq x \mid H_0) \leq \alpha$

③ $H_1 : p \neq p_0 \Rightarrow$ 기각역: $\min\left[P(X \geq x \mid H_0), P(X \leq x \mid H_0)\right] \leq \alpha/2$

21/26

21

3.1 总体比例的检验(样本不大的情况)

[例 10-16] 从某一工艺流程中，随机抽取10个样本进行检查，结果发现2个不良品。请在显著性水平为10%的情况下，检验是否可以说工艺流程的不良率大于0.1。

귀무가설 $H_0 : p = 0.1$, 대립가설 $H_1 : p > 0.1$

$X \sim B(10, 0.1) \mid H_0$

$P(X \geq 2 \mid H_0) = 1 - P(X \leq 1 \mid H_0) = 1 - [{}_{10}C_0(0.9)^{10} + {}_{10}C_1(0.1)(0.9)^9] \doteq 0.264$

→ 原假设被接受，无充足的证据可证明工艺流程的不良率大于0.1

✓ 如果发现了3个不良品的话

$P(X \geq 3 \mid H_0) = 1 - P(X \leq 2 \mid H_0)$

$= 1 - [{}_{10}C_0(0.9)^{10} + {}_{10}C_1(0.1)(0.9)^9 + {}_{10}C_2(0.1)^2(0.9)^8] \doteq 0.070 < 0.1$

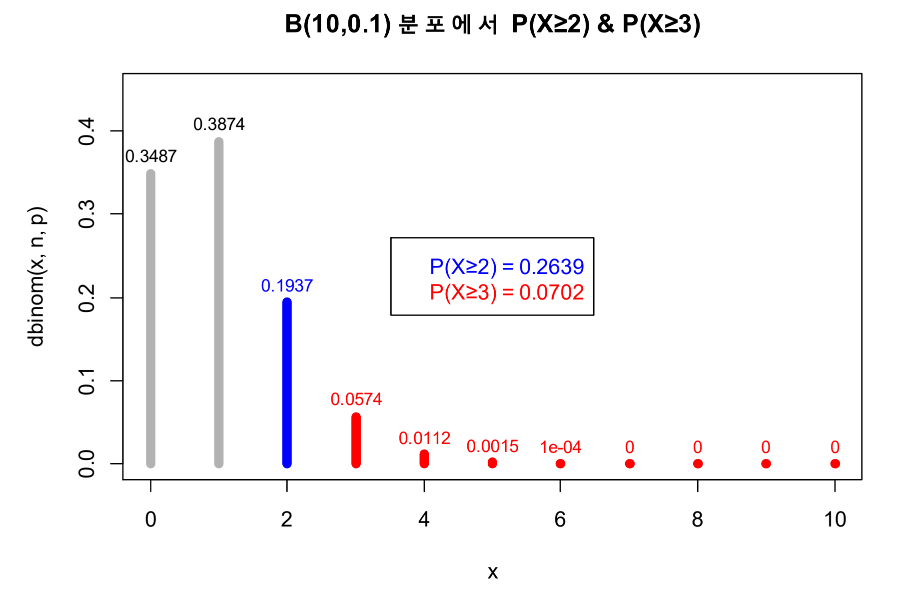
→ 在显著性水平为10%的情况下，原假设被拒绝

→ 可以证明工艺流程的不良率大于0.1

22/26

22

Kim, Dae Ho (Mokwon University)
mis@mokwon.ac.kr / mis@acm.org



23/26

23

3.2 모비율의 검정 (표본이 큰 경우)

[정리 10-7] 모비율의 검정 (표본이 큰 경우)

$$H_0 : p = p_0$$

$$Z_0 \equiv \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} = \frac{X/n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \overset{a}{\sim} N(0,1) \,\Big|\, H_0$$

①	$H_1 : p > p_0 \Rightarrow$ 기각역: $Z_0 > z_{1-\alpha}$
②	$H_1 : p < p_0 \Rightarrow$ 기각역: $Z_0 < z_\alpha = -z_{1-\alpha}$
③	$H_1 : p \neq p_0 \Rightarrow$ 기각역: $\mid Z_0 \mid > z_{1-\alpha/2}$

24/26

24

Kim, Dae Ho (Mokwon University)
mis@mokwon.ac.kr / mis@acm.org

3.2 总体比例的检验(样本比较大的情况)

[例 10-17] 从某一工艺流程中，随机抽取200个样本进行检查，结果发现了15个不良品。请在显著性水平为5%的情况下，检验是否可以说工艺流程的不良率小于0.1。

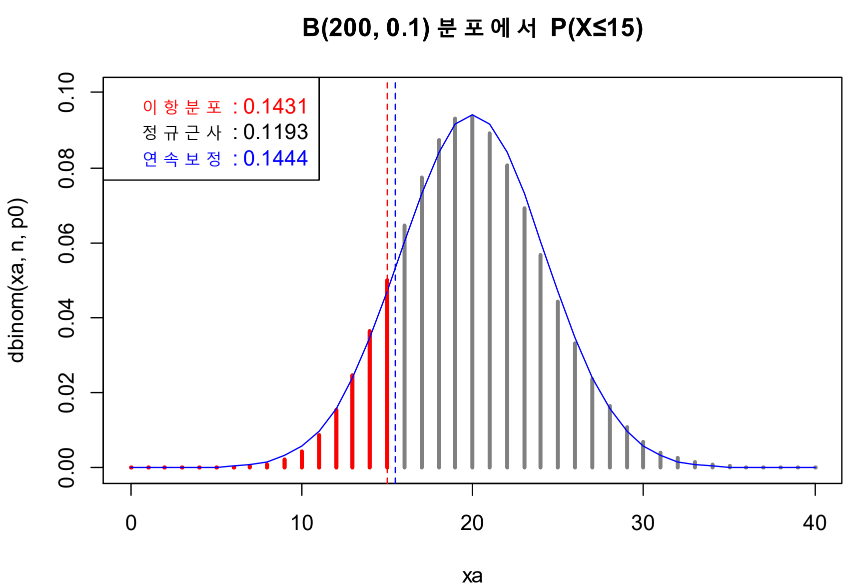
귀무가설 $H_0: p = 0.1$, 대립가설 $H_1: p < 0.1$

$$Z_0 = \frac{15-20}{\sqrt{200(0.1)(0.9)}} \doteq -1.179 > -z_{0.95} \doteq -1.645$$

→ 在显著性水平为5%的情况下，原假设被接受
→ 无充足的证据可证明工艺流程的不良率小于0.1

25/26

25



26/26

26