Kim, Dae Ho (Mokwon University)
mis@mokwon.ac.kr / mis@acm.org

04 CHAPTER

随机变量的期望

1

第4-2章
随机变量的期望

1. 随机变量的期望
2. 方差与标准差
3. 协方差
4. 相关系数
5. 动差生成函数*

2/11

2

Kim, Dae Ho (Mokwon University)
mis@mokwon.ac.kr / mis@acm.org

1.1 期望的概念

- 随机变量的结果值乘以该随机变量的概率分布的均值
- 无数次地进行随机试验时，观测到的随机变量值的平均

[定义 5-1] 随机变量的期望(expected value)

– 离散型

– 连续型

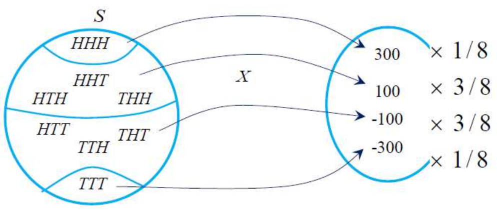
$$\mu_X = E(X) = \sum_x xf(x)$$

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

3/11

3

[例 5-1] 根据三次扔硬币出现的结果(正面的个数 – 反面的个数)，每次给出或得到100元的游戏中，收益X的期望



$$\Rightarrow E(X) = \sum_x xf(x) = \frac{300-300+300-300}{8} = 0$$

[例 5-2] 连续型随机变量X的期望 $f(x) = 2e^{-2x}$, $(0 < x < \infty)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} 2xe^{-2x}dx = \left[-xe^{-2x}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}(-e^{-2x})dx$$

$$= 0 - \frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}$$

4/11

4

Kim, Dae Ho (Mokwon University)
mis@mokwon.ac.kr / mis@acm.org

1.2 随机变量函数的期望, Y=g(X)

- 离散型 $E(Y)=E[g(X)]=\sum_x g(x)f(x)$
- 连续型 $E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$

[例 5-3] 根据三次扔硬币时出现反面的个数X的平方来获得相应分红的游戏中， 分红的期望

$$f(0)=\frac{1}{8},\ f(1)=\frac{3}{8},\ f(2)=\frac{3}{8},\ f(3)=\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow E(Y)=E(X^2)=\sum_x x^2 f(x)=\frac{0+3+2^2\times 3+3^2}{8}=\frac{24}{8}=3$$

例 5-4] 连续型随机变量, Y=3X-3 $f(x)=2e^{-2x}$， $0<x<\infty$

$$\Rightarrow E(Y)=E(3X-3)=\int_0^{\infty}(3x-3)\times 2e^{-2x}dx$$

$$=\left[-3xe^{-2x}\right]_0^{\infty}-\int_0^{\infty}(-3e^{-2x})dx-\left[3e^{-2x}\right]_0^{\infty}=0-\frac{3}{2}(0-1)-3=-\frac{3}{2}$$

$$E(Y)=3E(X)-3=\frac{3}{2}-3=-\frac{3}{2}$$

5/11

5

1.4 期望的特征

[定理 5-1] 期望的特征

(1) $E(aX+b)=aE(X)+b$

$$E(aX+b)=\int_{-\infty}^{\infty}(ax+b)f(x)dx$$

$$=a\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx+b\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=aE(X)+b$$

(2) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

$$E(X+Y)=\int\int(x+y)f(x,y)dxdy$$

$$=\int x\int f(x,y)dydx+\int y\int f(x,y)dxdy$$

$$=\int xf_X(x)dx+\int yf_Y(y)dy=E(X)+E(Y)$$

6/11

6

Kim, Dae Ho (Mokwon University)
mis@mokwon.ac.kr / mis@acm.org

1.4 期望的特征

[定理 5-1] 期望的特征(接上)

(3) $E[c_1g_1(X)+\cdots+c_ng_n(X)]=c_1E[g_1(X)]+\cdots+c_nE[g_n(X)]$

$$\begin{aligned}E[c_1g_1(X)+\cdots+c_ng_n(X)]&=\int[c_1g_1(x)+\cdots+c_ng_n(x)]f(x)dx\\&=c_1\int g_1(x)f(x)dx+\cdots+c_n\int g_n(x)f(x)dx\\&=c_1E[g_1(X)]+\cdots+c_nE[g_n(X)]\end{aligned}$$

(4) $X\,\&\,Y\ indep.\ \Rightarrow E(XY)=E(X)E(Y)$

$$\begin{aligned}E(XY)&=\int\int xy\,f(x,y)dxdy\ =\int\int xy\,f_X(x)f_Y(y)dxdy\\&=\int xf_X(x)dx\int yf_Y(y)dy=E(X)E(Y)\end{aligned}$$

2.1 方差的概念

[定理 5-2] 随机变量的方差(variance)

$$Var(X)\equiv\sigma_X^2=E\left[(X-\mu_X)^2\right],\quad \mu_X\equiv E(X)$$

- 离散型 $\sigma_X^2=E\left[(X-\mu_X)^2\right]=\sum_x(x-\mu_X)^2f(x)$
- 连续型 $\sigma_X^2=E\left[(X-\mu_X)^2\right]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_X)^2f(x)dx$
- 简便式 $E\left[(X-\mu_X)^2\right]=E\left[X^2-2\mu_XX+\mu_X^2\right]$

$$=E(X^2)-2\mu_XE(X)+\mu_X^2=E(X^2)-\mu_X^2$$

Kim, Dae Ho (Mokwon University)
mis@mokwon.ac.kr / mis@acm.org

[例 5-7] 在掷一次骰子的试验中出现的点数X的期望与方差

$$\mu_X = E(X) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{7}{2}$$

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2 = \frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

[例 5-8] 连续型随机变量 $f(x) = 2e^{-2x}$, $0 < x < \infty$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} 2xe^{-2x}dx = \left[-xe^{-2x}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}(-e^{-2x})dx = 0 - \frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{\infty} 2x^2e^{-2x}dx = \left[-x^2e^{-2x}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}(-2xe^{-2x})dx$$

$$= \left[-xe^{-2x}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}(-e^{-2x})dx = \int_0^{\infty} e^{-2x}dx = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sigma_X^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

9/11

9

2.2 方差的特征

$$Var(g(X)) = E[g(X)^2] - E[g(X)]^2$$

- 离散型 $Var(g(X)) = \sum_x g(x)^2 f(x) - \left[\sum_x g(x) f(x)\right]^2$
- 连续型 $Var(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)^2 f(x)dx - \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)dx\right]^2$

- [定理 5-2] 方差的特征

$$Var(aX+b) = a^2 Var(X)$$

$$Var(aX+b) = E\left[\{(aX+b) - (a\mu_X + b)\}^2\right]$$

$$= a^2 E\left[(x-\mu_X)^2\right] = a^2 Var(X)$$

10/11

10

Kim, Dae Ho (Mokwon University)
mis@mokwon.ac.kr / mis@acm.org

[例 5-9] 掷一次骰子出现的点数乘以100，然后减400后的结果Y的数学期望与方差

$$Y = 100X - 400 \qquad \mu_X = \frac{7}{2},\ \sigma_X^2 = \frac{35}{12}$$

$$\Rightarrow \mu_Y \equiv E(Y) = 100E(X) - 400 = 350 - 400 = -50$$

$$\Rightarrow \sigma_Y^2 \equiv Var(Y) = 100^2\sigma_X^2 = \frac{350,000}{12} \doteq 29,166.1667$$

[例 5-10] 连续型随机变量 $f(x) = 2e^{-2x},\ 0 < x < \infty$

$$Y = 20X - 10 \qquad \mu_X = \frac{1}{2},\ \sigma_X^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \mu_Y \equiv E(Y) = 20E(X) - 10 = 10 - 10 = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_Y^2 \equiv Var(Y) = 20^2\sigma_X^2 = \frac{400}{4} = 100$$

11/11

11