05 CHAPTER

연속형 확률분포

1

제5장
연속형 확률분포

1. 균일분포
2. 지수분포
3. 감마분포*

2

1. 균일분포

[정의 7-1] 균일분포(uniform distribution) $X \sim U(a,b)$

: 유한한 실수 구간 [a, b]에서 동일한 확률로 관측되는 확률변수의 분포

- 확률밀도함수 $f(x) = \frac{1}{b-a}, a < x < b$
- 기대값과 분산 $E(X) = \frac{a+b}{2}$ $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$E(X^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$\Rightarrow Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

3/16

3

1. 균일분포

```
# 균일분포의 R 함수

# 확률밀도함수 (min=a=하한, max=b=상한)
# min, max를 생략하면 [0,1]로 계산함
dunif(x, min = 0, max = 1)

# 누적분포함수 (q=분위수)
punif(q, min = 0, max = 1, lower.tail = TRUE)

# 분위수 (p=누적확률)
qunif(p, min = 0, max = 1, lower.tail = TRUE)

# 균일 확률변수 (n=난수의 개수)
runif(n, min = 0, max = 1)
# Excel 함수 = RANDBETWEEN(min, max) ⇒ 난수 1개만 생성
```

4/16

4

1. 균일분포

[예 7-1] 확률변수 X의 확률분포가 f(x)=1, 0≤x≤1 일 때, X의 기대값과 분산, Y=2+4X라 할 때, Y의 확률분포, 기대값, 분산

- X의 기대값과 분산 $E(X)=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$ $Var(X)=\frac{(1-0)^2}{12}=\frac{1}{12}$
- X의 CDF $F_X(x)=x,\ 0\le x\le 1$
- Y의 CDF $F_Y(y)=P(2+4X\le y)=P(X\le (y-2)/4)$
  $=F_X((y-2)/4)=(y-2)/4,\ 2\le y\le 6$
- Y의 pdf $f_Y(y)=\frac{1}{4},\ \ 2\le y\le 6 \quad \Rightarrow Y\sim U(2,6)$
- Y의 기대값과 분산 $E(Y)=\frac{2+6}{2}=4$ $Var(Y)=\frac{(6-2)^2}{12}=\frac{4}{3}$
- 직접 계산 $E(Y)=2+4E(X)=4$ $Var(Y)=4^2Var(X)=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$

5/16

5

2. 지수분포

[정의 7-2] 지수분포(exponential distribution) $X\sim Exp(\lambda)$
: 확률밀도함수가 지수적으로 감소하는 확률분포

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x},\ x>0$$

- 누적분포함수 $F(x)=P(X\le x)=\int_0^x \lambda e^{-\lambda y}dy=1-e^{-\lambda x},\ \ x>0$
- 모멘트생성함수 $m(t)=E(e^{tX})=\int_0^\infty e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}dx=\lambda\int_0^\infty e^{(t-\lambda)x}dx$
  $=\left[\frac{\lambda}{t-\lambda}e^{(t-\lambda)x}\right]_0^\infty=\frac{\lambda}{\lambda-t},\ \ t<\lambda$
- 기대값과 분산 $m'(t)=\lambda(\lambda-t)^{-2},\ m''(t)=2\lambda(\lambda-t)^{-3}$
  $E(X)=m'(0)=\lambda\lambda^{-2}=\frac{1}{\lambda}$ $E(X^2)=m''(0)=2\lambda\lambda^{-3}=\frac{2}{\lambda^2}$
  $Var(X)=m''(0)-E(X)^2=\frac{2}{\lambda^2}-(\frac{1}{\lambda})^2=\frac{1}{\lambda^2}$

6/16

6

2. 지수분포

지수분포의 R 함수

# 확률밀도함수 f(x) (rate=λ), 초기치 (rate = 1)
dexp(x, rate = 1)
# Excel 함수 = EXPON.DIST(x, rate, FALSE)

# 누적분포함수 (q=분위수)
pexp(q, rate = 1, lower.tail = TRUE)
# Excel 함수 = EXPON.DIST(x, rate, TRUE)

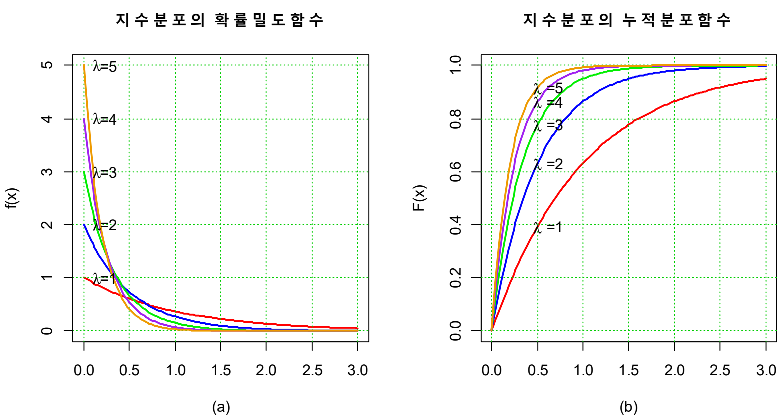
# 분위수 (p=누적확률)
qexp(p, rate = 1, lower.tail = TRUE)

# 지수 확률변수 (n=난수의 개수)
rexp(n, rate = 1)

7/16

7

[예 7-2] λ=1,2,3,4,5인 지수분포의 확률밀도함수와 누적분포함수 그래프를 작성하시오.



8/16

8

2. 지수분포

[정리 7-1] 지수분포의 비기억(memoryless) 특성

$$P(X > x + y \mid X > y) = P(X > x)$$

$$P(X > x + y \mid X > y) = \frac{P(X > x + y)}{P(X > y)} = \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} = e^{-\lambda x} = P(X > x)$$

[예 7-3] 평균수명이 10년인 지수분포를 따르는 제품을 5년간 고장 없이 사용했을 때, 앞으로 3년 더 고장 없이 작동할 확률?

$$P(X > 5 + 3 \mid X > 5) = \frac{P(X > 8)}{P(X > 5)} = \frac{e^{-8\lambda}}{e^{-5\lambda}} = e^{-3\lambda} = e^{-0.3} \doteq 0.7408$$

[예 7-4] 평균수명이 10,000시간인 지수분포를 따르는 시스템에 대하여 90%의 확률로 고장 없이 작동할 시간을 구하시오.

$$P(X > x) = e^{-x/10{,}000} = 0.9 \;\Rightarrow\; x = -(\ln 0.9) \times 10{,}000 \doteq 1{,}054(hr)$$

[예 7-5] 지수수명분포를 따르는 시스템에 대하여 10,000시간 까지 작동할 확률이 90%이상 이길 요구한다면, λ는 얼마 이하?

$$P(X > 10{,}000) = e^{-10{,}000\lambda} \geq 0.9 \;\Rightarrow\; \lambda \leq -\frac{\ln 0.9}{10{,}000} \doteq 1.054 \times 10^{-5}(/hr)$$

9 9/16

9

3. 감마분포*

[정의 7-3] 감마함수(gamma function)

$$\Gamma(\alpha) \equiv \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy$$

$$\Gamma(\alpha) = \left[-y^{\alpha-1}e^{-y}\right]_0^\infty + (\alpha-1)\int_0^\infty y^{\alpha-2}e^{-y}dy = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty y^{1-1}e^{-y}dy = 1$$

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = (n-1)(n-2)\cdots \times 2 \times 1 = (n-1)!$$

[정의 7-4] 감마분포(gamma distribution)

$$f(x) = \frac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta},\; x > 0;\; \alpha, \theta > 0$$

$$f(x) = C \times x^{\alpha-1} e^{-x/\theta},\; x > 0;\; \alpha, \theta > 0$$

$$C\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x/\theta}dx = C\int_0^\infty (\theta y)^{\alpha-1}e^{-y}\theta dy = C\theta^\alpha \int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-y}dy \equiv 1$$

$$\Rightarrow C = 1/[\theta^\alpha \Gamma(\alpha)]$$

10/16

10

3. 감마분포*

감마분포 R 함수

# 확률밀도함수 f(x) (shape=, rate=와 scale= 중 하나만 입력)
# 초기치 (rate = 1, scale = 1/rate)
dgamma(x, shape, (rate), scale)
# Excel 함수 = GAMMA.DIST(x, shape, scale, FALSE)

# 누적분포함수 F(x)
pgamma(x, shape, (rate), scale, lower.tail = TRUE)
# Excel 함수 = GAMMA.DIST(x, shape, scale, TRUE)

# 분위수 (p=누적확률)
qgamma(p, shape, (rate), scale, lower.tail = TRUE)
# Excel 함수 = GAMMA.INV(p, shape, scale)

# 감마 확률변수 (n=난수의 개수)
rgamma(n, shape, (rate), scale)
# Excel 함수 = GAMMA.INV(RAND( ), shape, scale) ⇒ 난수 1개 생성

3. 감마분포*

- 모멘트생성함수 $m(t) = E(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx} f(x)dx = C\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{(t-1/\theta)x} dx$

$$m(t) = C\int_0^\infty \left(\frac{\theta y}{1-\theta t}\right)^{\alpha-1} e^{-y} \frac{\theta}{1-\theta t} dy = \left(\frac{\theta}{1-\theta t}\right)^{\alpha} \frac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy$$
$$= \left(\frac{1}{1-\theta t}\right)^{\alpha}, \; t < \frac{1}{\theta}$$

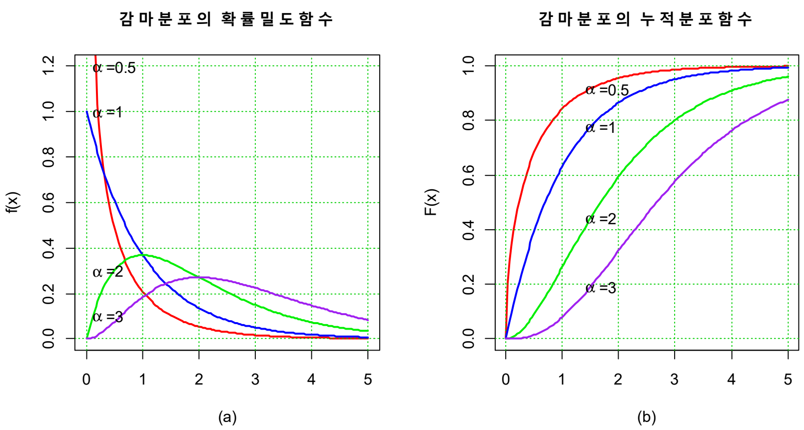
[정리 7-2] 감마분포와 지수분포의 관계

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} Exp(\lambda \equiv \frac{1}{\theta}) \Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(n, \theta)$$
$$m_{(X_1+\cdots+X_n)}(t) = E(e^{t(X_1+\cdots+X_n)}) = E(e^{tX_1}) \cdots E(e^{tX_n}) = m(t)^n = \left(\frac{1}{1-\theta t}\right)^n$$

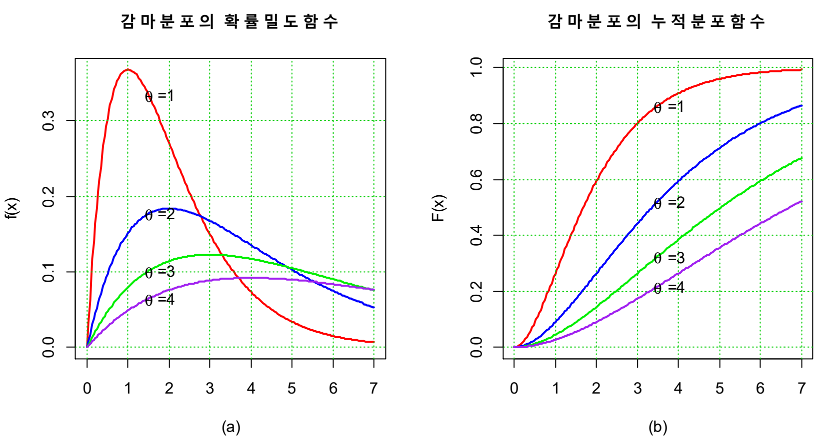
- 기대값과 분산 $m'(t) = \frac{\alpha\theta}{(1-\theta t)^{\alpha+1}} \Rightarrow E(X) = m'(0) = \alpha\theta$

$$m''(t) = \frac{\alpha(\alpha+1)\theta^2}{(1-\theta t)^{\alpha+2}} \Rightarrow Var(X) = m''(0) - E(X)^2$$
$$= \alpha(\alpha+1)\theta^2 - (\alpha\theta)^2 = \alpha\theta^2$$

[예 7-6] θ=1일 때, α=0.5, 1, 2, 3인 감마분포의 확률밀도함수와 누적분포함수 그래프를 작성하시오.



[예 7-7] α=2일 때, θ=1, 2, 3, 4인 감마분포의 확률밀도함수와 누적분포함수 그래프를 작성하시오.



3. 감마분포*

[예 7-8] 어떤 전동안마기의 수명이 평균 10년, 분산 50인 감마분포를 따를 때, 다음을 구하시오. $\alpha\theta=10,\ \alpha\theta^2=50 \Rightarrow \alpha=2,\ \theta=5$

(1) 이 전동안마기가 3년간 고장 없이 작동할 확률

$$P(X>3)=\frac{1}{5^2\Gamma(2)}\int_3^\infty x^{2-1}e^{-x/5}dx=\frac{1}{25}\int_3^\infty xe^{-x/5}dx$$
$$=\frac{1}{25}\left\{\left[-5xe^{-x/5}\right]_3^\infty+\int_3^\infty 5e^{-x/5}dx\right\}$$
$$=\frac{1}{25}\left\{15e^{-3/5}+\left[-25e^{-x/5}\right]_3^\infty\right\}=(\frac{3}{5}+1)e^{-3/5}\doteq 0.8781$$

(2) 이 전동안마기가 8년간 고장 없이 작동할 확률

$$P(X>8)=(\frac{8}{5}+1)e^{-8/5}\doteq 0.5249$$

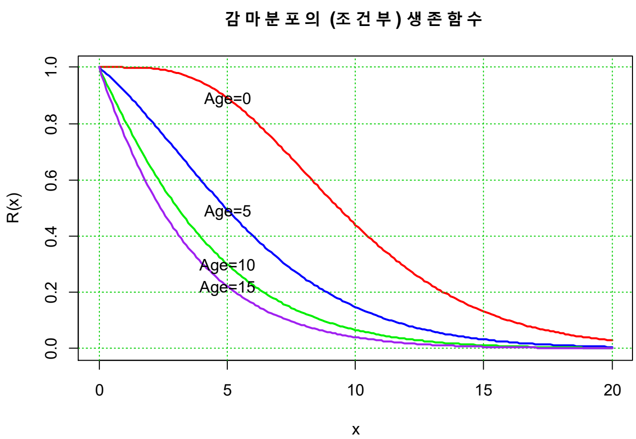
(3) 5년간 고장이 없었을 때, 앞으로 3년 더 고장 없이 작동할 확률

$$P(X>5)=(\frac{5}{5}+1)e^{-5/5}\doteq 0.7358$$
$$P(X>5+3\,|\,X>5)=\frac{P(X>8)}{P(X>5)}\doteq\frac{0.5249}{0.7358}\doteq 0.7134 < P(X>3)\doteq 0.8781$$

15/16

15

[예 7-9] 어떤 제품의 수명이 α=5, θ=2인 감마분포를 따를 때,
(1) 이 제품이 x년간 고장 없이 작동할 확률 (2) 각각 5, 10, 15년간 고장이 없었을 때, 앞으로 x년 더 고장 없이 작동할 확률



16/16

16