DATA
STRUCTURES
USING C++

04 CHAPTER

离散型概率分布

1

第4-3章 离散型概率分布

1. 离散均衡分布
2. 二项分布
3. 超几何分布
4. 泊松分布
5. 几何分布
6. 负二项分布*
7. 多项分布*

2/31

2

1. 离散均衡分布

[定义 6-1] 离散均衡分布(discrete uniform distribution)
n 个结果值以均衡的概率出项的概率分布

- pdf $f(x)=\frac{1}{n},\ x=1,2,\ldots,n$
- 期望 $E(X)=\sum_{x=1}^{n}x\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}$
- 方差 $E(X^2)=\sum_{x=1}^{n}x^2\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\Rightarrow Var(X)=E(X^2)-E(X)^2$$
$$=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=\frac{(n+1)(n-1)}{12}$$

3/31

3

1. 离散均衡分布

[例 6-1] 装着20个标有1到20号的球， 从中随机抽取一个，出现的号码X

(1) X的概率分布函数 $f(x)=\frac{1}{20},\ x=1,2,\ldots,20$

(2) X的期望与方差 $E(X)=\frac{20+1}{2}=10.5$

$$Var(X)=\frac{(20+1)(20-1)}{12}=33.25$$

(3) 大于15号以上的概率

$$P(X\geq 15)=\sum_{x=15}^{20}\frac{1}{20}=\frac{6}{20}=0.3$$

4/31

4

2. 二项分布

[定义 6-2] 伯努利分布(Bernoulli distribution) $X \sim B(1, p)$

: 在一次成功概率一定的试验中，出现的成功次数的概率分布

- pdf $f(x) = \begin{cases} p, & x = 1 \\ 1-p, & x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = p^x (1-p)^{1-x},\ x = 0,1$
- 期望 $E(X) = \sum_{x=0}^{1} x f(x) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$
- 方差 $E(X^2) = \sum_{x=0}^{1} x^2 f(x) = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p = p$

  $\Rightarrow Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1-p)$
- MGF $m(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{1} e^{tx} f(x) = e^0 \times (1-p) + e^t \times p = 1 - p + pe^t$

  $\Rightarrow E(X) = m'(0) = pe^0 = p \quad E(X^2) = m''(0) = pe^0 = p$

  $\Rightarrow Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1-p)$

5/31

5

2. 二项分布

[定义 6-3] 二项分布(binomial distribution) $X \sim B(n, p)$

: 在n次成功概率一定的试验中，出现成功次数的概率分布

- Pdf $f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x},\ x = 0,1,2,\ldots,n$

  $X_1, X_2, \cdots, X_n \overset{iid}{\sim} B(1,p) \Rightarrow X \equiv \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n,p)$
- 期望 $E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np$
- 方差 $Var(X) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p(1-p) = np(1-p)$
- MGF $m(t) = m_{X_1}(t) \times m_{X_2}(t) \times \cdots \times m_{X_n}(t) = (1 - p + pe^t)^n$

6/31

6

$X \sim B(5, p)$ $f(x) = \binom{5}{x} p^x (1-p)^{5-x},\ x = 0, 1, 2, \ldots, 5$

시행 결과 ●=성공, ○=실패	확률 $P(X=x)$	시행 결과 ●=성공, ○=실패	확률 $P(X=x)$
○○○○○	$f(0) = \binom{5}{0}(1-p)^5$	●●●●●	$f(5) = \binom{5}{5}p^5$
●○○○○	$f(1) = \binom{5}{1}p(1-p)^4 = 5p(1-p)^4$	●●●●○	$f(4) = \binom{5}{4}p^4(1-p) = 5p^4(1-p)$
○●○○○		●●●○●	
○○●○○		●●○●●	
○○○●○		●○●●●	
○○○○●		○●●●●	
●●○○○	$f(2) = \binom{5}{2}p^2(1-p)^3 = 10p^2(1-p)^3$	●●●○○	$f(3) = \binom{5}{3}p^3(1-p)^2 = 10p^3(1-p)^2$
●○●○○		●●○●○	
●○○●○		●●○○●	
●○○○●		●○●●○	
○●●○○		●○●○●	
○●○●○		●○○●●	
○●○○●		○●●●○	
○○●●○		○●●○●	
○○●○●		○●○●●	
○○○●●		○○●●●	

2. 二项分布

\# 二项分布 R函数
\# 概率分布函数 (size=n=样本大小, prob=p=成功概率)
dbinom(x, size, prob)
\# Excel 函数 = BINOM.DIST(x, size, prob, FALSE)

\# 累积分布函数 (q=分位数, lower.tail=TRUE=由下向上累积)
pbinom(q, size, prob, lower.tail = TRUE)
\# Excel 函数 = BINOM.DIST(x, size, prob, TRUE)

\# 分位数 (p=累积概率)
qbinom(p, size, prob, lower.tail = TRUE)
\# Excel 函数 = BINOM.INV(size, prob, p)

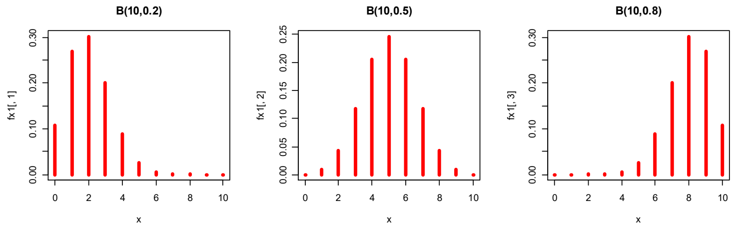
\# 二项随机变量(n=随机数的个数)
rbinom(n, size, prob)
\# 虽然没有相应的Excel函数, 但可用下面的指令生成一个随机数
= BINOM.INV(size, prob, RAND( ))

[例 6-2] 在成功概率分别为0.2, 0.5, 0.8的总体中，各抽出10个样本时，出现的成功次数的概率分布

(1) p=0.2 $X \sim B(10, 0.2)$ $\qquad f(x) = \binom{10}{x}(0.2)^x(0.8)^{10-x},\ x = 0,1,2,\ldots,10$

(2) p=0.5 $X \sim B(10, 0.5)$ $\qquad f(x) = \binom{10}{x}(0.5)^x(0.5)^{10-x},\ x = 0,1,2,\ldots,10$

(3) p=0.8 $X \sim B(10, 0.8)$ $\qquad f(x) = \binom{10}{x}(0.8)^x(0.2)^{10-x},\ x = 0,1,2,\ldots,10$



2. 二项分布

[例 6-3] 在不合格率为0.03的工艺中，抽取20个样本进行检查，发现不合格品的个数X $X \sim B(20, 0.03)$

(1) 概率分布函数 $f(x) = \binom{20}{x}(0.03)^x(0.97)^{20-x},\ x = 0,1,2,\ldots,20$

(2) 均值与方差 $E(X) = 20 \times 0.03 = 0.6 \qquad Var(X) = 20 \times 0.03 \times 0.97 = 0.582$

(3) P(X = 2) $f(2) = \binom{20}{2}(0.03)^2(0.97)^{20-2} = 190 \times (0.03)^2(0.97)^{18} \doteq 0.099$

(4) P($X \geq$ 3)

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X \leq 2) = 1 - \left[f(0) + f(1) + f(2)\right] \\ &= 1 - \left[{}_{20}C_0(0.03)^0(0.97)^{20} + {}_{20}C_1(0.03)^1(0.97)^{19} + {}_{20}C_2(0.03)^2(0.97)^{18}\right] \\ &= 1 - \left[(0.97)^{20} + 20 \times 0.03 \times (0.97)^{19} + 190 \times (0.03)^2(0.97)^{18}\right] \\ &\doteq 1 - (0.544 + 0.336 + 0.099) = 1 - 0.979 = 0.021 \end{aligned}$$

```
dbinom(0:2, 20, 0.03)
[1] 0.54379434 0.33636763 0.09882967
1-sum(dbinom(0:2, 20, 0.03)); pbinom(2, 20, 0.03, lower=F)
[1] 0.02100836        [1] 0.02100836
```

4. 泊松分布

[定义 6-5] 泊松分布(Poisson distribution)　$Poi(\lambda)$

: 单位时间内发生的少数事件数的概率分布

$$f(x) = \lambda^x \frac{e^{-\lambda}}{x!},\ x = 0,1,2,\dots$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty}\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^x$$

$$\lambda = np \Rightarrow p = \frac{\lambda}{n} \quad = \frac{1}{x!}\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-x)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{n^x}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n / \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x$$

$$= \lambda^x \frac{e^{-\lambda}}{x!}$$

4. 泊松分布

- 概率分布函数的条件

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \sum_{x=0}^{\infty}\lambda^x \frac{e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$$

- MGF, 均值与方差

$$m(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\lambda^x\frac{e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t-1)}$$

$$m'(t) = \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)} \Rightarrow E(X) = m'(0) = \lambda e^0 e^0 = \lambda$$

$$m''(t) = \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)} + (\lambda e^t)^2 e^{\lambda(e^t-1)} \Rightarrow E(X^2) = m''(0) = \lambda + \lambda^2$$

$$\Rightarrow Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda$$

4. 泊松分布

泊松分布 R函数

# 概率分布函数 (lambda=期望)
  dpois(x, lambda)
# Excel函数 = POISSON.DIST(x, lambda, FALSE)

# 累积分布函数 (q=分位数, lower.tail=TRUE=由下往上累积)
  ppois(q, lambda, lower.tail = TRUE)
# Excel函数 = POISSON.DIST(x, lambda, TRUE)

# 分位数 (p=累积概率)
  qpois(p, lambda, lower.tail = TRUE)

# 泊松随机变量(n=随机数的个数)
  rpois(n, lambda)

13/31

13

4. 泊松分布

[例 6-6] 从单位时间内平均发生次数分别为2次、5次、8次的三个无限总体中抽取一定单位的样本时，泊松概率分布

(1) 单位时间内平均发生次数为2的情况 $Poi(2)$

$$f(x) = 2^x \frac{e^{-2}}{x!},\ x = 0,1,2,\ldots$$

(2) 单位时间内平均发生次数为5的情况 $Poi(5)$

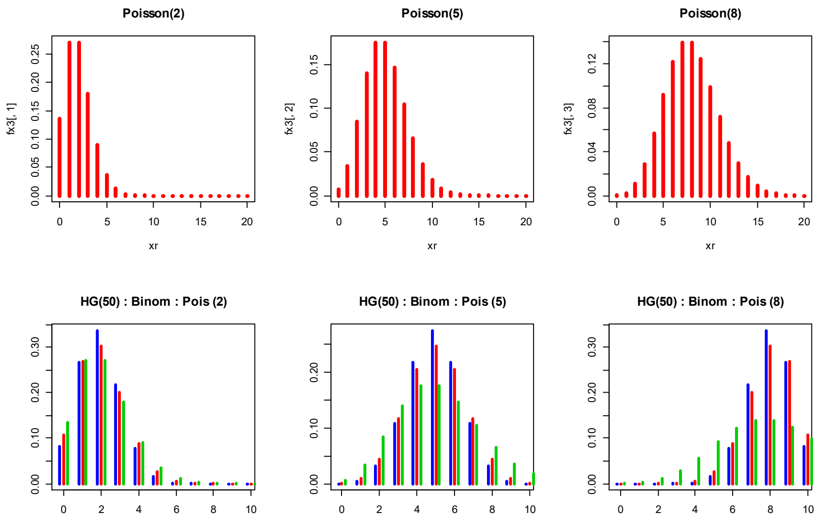
$$f(x) = 5^x \frac{e^{-5}}{x!},\ x = 0,1,2,\ldots$$

(3) 单位时间内平均发生次数为8的情况 $Poi(8)$

$$f(x) = 8^x \frac{e^{-8}}{x!},\ x = 0,1,2,\ldots$$

14/31

14



15/31

15

4. 泊松分布

[例 6-7] 对单位时间内平均瑕疵数为1.5的产品生产流程进行抽样

$X \sim Poi(1.5)$

(1) 概率分布函数 $f(x) = (1.5)^x \dfrac{e^{-1.5}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$

(2) 期望 $E(X) = \lambda = 1.5$

(3) 方差 $Var(X) = \lambda = 1.5$

(4) P(2个) $f(2) = (1.5)^2 \dfrac{e^{-1.5}}{2!} \doteq 0.251$

(5) P(3个以上) $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - e^{-1.5} \times (1 + 1.5 + 1.5^2 / 2) \doteq 0.191$

(6) P(10到20个) $Y \sim Poi(15) \Rightarrow P(Y = 20) = 15^{20} \times \dfrac{e^{-15}}{20!} \doteq 0.042$

```
dpois(0:2, 1.5)
[1] 0.2231302 0.3346952 0.2510214
1-sum(dpois(0:2, 1.5)); ppois(2, 1.5, lower=F)
[1] 0.1911532        [1] 0.1911532
```

16/31

16

5. 几何分布

[定义 6-6] 几何分布(geometric distribution) $X \sim G(p)$

：在成功概率一定的试验中，直到出现第一次成功为止，所进行的试验次数的概率分布 $f(x) = (1-p)^{x-1}p, \ x = 1, 2, \ldots$

첫 번째 성공이 나오기까지 시행 시나리오 (● : 성공 ○ : 실패)	총 시행횟수 (확률변수 X)	확률 $P(X=x)$
●	$X=1$	p
○ ●	$X=2$	$(1-p)p$
○ ○ ●	$X=3$	$(1-p)^2p$
○ ○ ○ ●	$X=4$	$(1-p)^3p$
○ ○ ○ ○ ●	$X=5$	$(1-p)^4p$
○ ○ ○ ○ ○ ●	$X=6$	$(1-p)^5p$
⋮	⋮	⋮
○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ⋯ ○ ●	$X=x$	$(1-p)^{x-1}p$

17/31

17

5. 几何分布

- 概率分布函数的条件

$$\sum_{x=1}^{\infty} f(x) = \sum_{x=1}^{\infty} (1-p)^{x-1} p = \frac{p}{1-(1-p)} = 1$$

- 累积分布函数

$$F(x) \equiv P(X \le x) = \sum_{y=1}^{x} (1-p)^{y-1} p = \frac{p[1-(1-p)^x]}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^x$$

- 动差生成函数

$$m(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} (1-p)^{x-1} p$$

$x-1 \to y$

$$= pe^t \sum_{y=0}^{\infty} (e^t q)^y = \frac{pe^t}{1-qe^t}, \ qe^t < 1$$

18/31

18

5. 几何分布

- 期望与方差 $E(X)=\dfrac{1}{p}$ $Var(X)=\dfrac{1-p}{p^2}$ $m(t)=\dfrac{pe^t}{1-qe^t}$

$$m'(t)=\frac{pe^t(1-qe^t)+pe^tqe^t}{(1-qe^t)^2}=\frac{pe^t}{1-qe^t}+\frac{pqe^{2t}}{(1-qe^t)^2}$$

$$\Rightarrow E(X)=m'(0)=\frac{p}{p}+\frac{p(1-p)}{p^2}=\frac{1}{p}$$

$$m''(t)=\frac{pe^t(1-qe^t)+pe^tqe^t}{(1-qe^t)^2}+\frac{2pqe^{2t}(1-qe^t)^2+2pqe^{2t}q(1-qe^t)}{(1-qe^t)^4}$$

$$\Rightarrow E(X^2)=m''(0)=\frac{p^2+p(1-p)}{p^2}+\frac{2pqp^2+2pq^2p}{p^4}$$

$$=\frac{p}{p^2}+\frac{2p(1-p)+2(1-p)^2}{p^2}=\frac{2-p}{p^2}$$

$$\Rightarrow Var(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}$$

19/31

19

5. 几何分布

\# 几何分布 R函数
\# Excel函数不存在

\# 概率分布函数 (x=失败次数, prob=p=成功概率)
dgeom(x, prob)

\# 累积分布函数 (q=分位数, lower.tail=TRUE=由下至上累积)
pgeom(q, prob, lower.tail = TRUE)

\# 分位数 (p=累积概率)
qgeom(p, prob, lower.tail = TRUE)

\# 几何随机变量(n=随机数的个数)
rgeom(n, prob)

20/31

20

5. 几何分布

[例 6-8] 在成功概率分别为0.1, 0.2, 0.3, 0.5的四种无限总体中，第一次获得成功的试验

$$f(x)=p(1-p)^{x-1}$$

(1) 成功概率为0.1的情况 $f(x)=0.1\times 0.9^{x-1},\ x=1,2,3,\ldots$

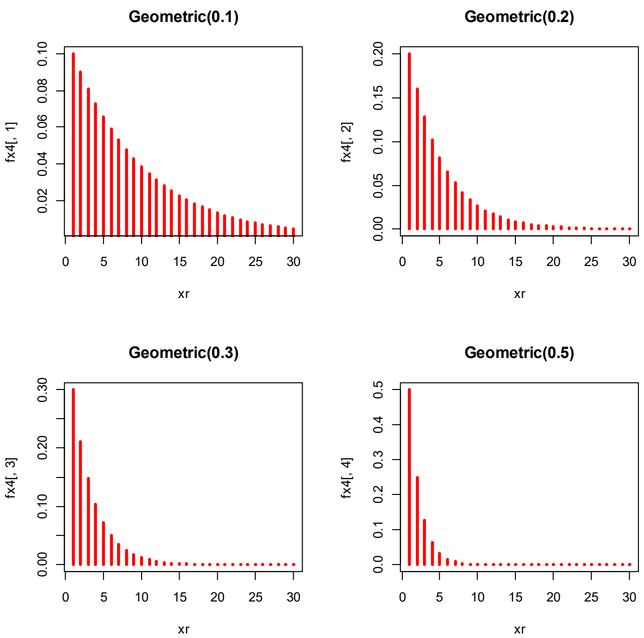
(2) 成功概率为0.2的情况 $f(x)=0.2\times 0.8^{x-1},\ x=1,2,3,\ldots$

(3) 成功概率为0.3的情况 $f(x)=0.3\times 0.7^{x-1},\ x=1,2,3,\ldots$

(4) 成功概率为0.5的情况 $f(x)=0.5\times 0.5^{x-1},\ x=1,2,3,\ldots$

21/31

21



22/31

22

5. 几何分布

[例 6-9] 反复掷一个骰子，直到出现点数'6'为止，其总试验次数X

(1) X的概率分布函数 $f(x) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}$, $x = 1, 2, 3, \ldots$

(2) X的期望与方差 $E(X) = \frac{1}{p} = 6$ $Var(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{5/6}{(1/6)^2} = 30$

(3) 3次试验内出现 '6'的概率 $F(3) = 1 - q^3 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216} \doteq 0.421$

- 无记忆性 (memoryless property)

$$P(X > x + y \mid X > x) = P(X > y)$$

$$P(X > x + y \mid X > x) = \frac{P(X > x + y)}{P(X > x)} = \frac{q^{x+y}}{q^x} = q^y = P(X > y)$$

23/31