CHAPTER

05

连续型概率分布

1

第5章
连续型概率分布

1. 均衡分布
2. 指数分布
3. 伽马分布*

2/16

2

1. 均衡分布

[定义 7-1] 均衡分布(uniform distribution) $X \sim U(a,b)$

：在有限的实数区间[a, b]内，观测到的概率相同的随机变量的分布

- 概率密度函数 $f(x) = \dfrac{1}{b-a}, a < x < b$
- 期望与方差 $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ $Var(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$E(X^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$\Rightarrow Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

3/16

3

1. 均衡分布

```
# 均衡分布的R函数

# 概率密度函数 (min=a=下限, max=b=上限)
# 若省略min, max，将以[0,1]计算
dunif(x, min = 0, max = 1)

# 累积分布函数 (q=分位数)
punif(q, min = 0, max = 1, lower.tail = TRUE)

# 分位数 (p=累积概率)
qunif(p, min = 0, max = 1, lower.tail = TRUE)

# 均衡随机变量 (n=随机数的个数)
runif(n, min = 0, max = 1)
# Excel函数 = RANDBETWEEN(min, max) ⇒ 只生成1个随机数
```

4/16

4

1. 均衡分布

[例 7-1] 当随机变量X的随机分布为f(x)=1, 0≤x≤1时， 求X的期望与方差；
当Y=2+4X时，求Y的随机分布、期望以及方差。

- X的期望与方差 $E(X)=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$ $Var(X)=\frac{(1-0)^2}{12}=\frac{1}{12}$
- X의 CDF $F_X(x)=x,\ 0\le x\le 1$
- Y의 CDF $F_Y(y)=P(2+4X\le y)=P(X\le (y-2)/4)$
  $=F_X((y-2)/4)=(y-2)/4,\ 2\le y\le 6$
- Y의 pdf $f_Y(y)=\frac{1}{4},\ \ 2\le y\le 6$ $\Rightarrow Y\sim U(2,6)$
- Y의 期望与方差 $E(Y)=\frac{2+6}{2}=4$ $Var(Y)=\frac{(6-2)^2}{12}=\frac{4}{3}$
- 直接计算 $E(Y)=2+4E(X)=4$ $Var(Y)=4^2Var(X)=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$

5/16

5

2. 指数分布

[定义 7-2] 指数分布(exponential distribution) $X\sim Exp(\lambda)$
：概率密度函数以指数减小的随机分布

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x},\ x>0$$

- 累积分布函数 $F(x)=P(X\le x)=\int_0^x \lambda e^{-\lambda y}dy=1-e^{-\lambda x},\ \ x>0$
- 动差生成函数 $m(t)=E(e^{tX})=\int_0^\infty e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}dx=\lambda\int_0^\infty e^{(t-\lambda)x}dx$
  $=\left[\frac{\lambda}{t-\lambda}e^{(t-\lambda)x}\right]_0^\infty=\frac{\lambda}{\lambda-t},\ \ t<\lambda$
- 期望与方差 $m'(t)=\lambda(\lambda-t)^{-2},\ m''(t)=2\lambda(\lambda-t)^{-3}$
  $E(X)=m'(0)=\lambda\lambda^{-2}=\frac{1}{\lambda}$ $E(X^2)=m''(0)=2\lambda\lambda^{-3}=\frac{2}{\lambda^2}$
  $Var(X)=m''(0)-E(X)^2=\frac{2}{\lambda^2}-(\frac{1}{\lambda})^2=\frac{1}{\lambda^2}$

6/16

6

2. 指数分布

指数分布的R函数

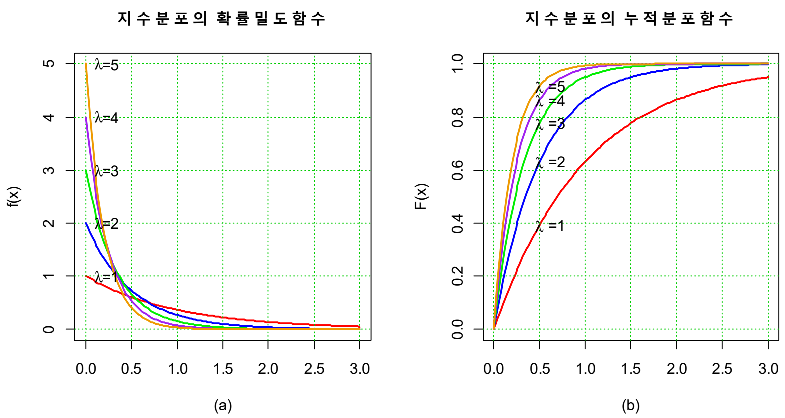
# 概率密度函数f(x) (rate=λ)，初始值 (rate = 1)
dexp(x, rate = 1)
# Excel函数 = EXPON.DIST(x, rate, FALSE)

# 累积分布函数 (q=分位数)
pexp(q, rate = 1, lower.tail = TRUE)
# Excel函数 = EXPON.DIST(x, rate, TRUE)

# 分位数 (p=累积概率)
qexp(p, rate = 1, lower.tail = TRUE)

# 指数随机变量 (n=随机数的个数)
rexp(n, rate = 1)

[例 7-2] 请绘制λ=1,2,3,4,5的指数分布的概率密度函数和累积分布函数图。



2. 指数分布

[定理 7-1] 指数分布的无记忆性(memoryless)特点

$$P(X > x + y \mid X > y) = P(X > x)$$

$$P(X > x + y \mid X > y) = \frac{P(X > x + y)}{P(X > y)} = \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} = e^{-\lambda x} = P(X > x)$$

[例 7-3] 遵循平均使用寿命为10년的指数分布的产品在5年间无故障使用后，后续3年也无故障使用的概率是多少?

$$P(X > 5+3 \mid X > 5) = \frac{P(X > 8)}{P(X > 5)} = \frac{e^{-8\lambda}}{e^{-5\lambda}} = e^{-3\lambda} = e^{-0.3} \doteq 0.7408$$

[例 7-4] 遵循平均寿命为10,000小时的指数分布的系统，求其无故障使用时概率为90%的时间。

$$P(X > x) = e^{-x/10,000} = 0.9 \;\Rightarrow x = -(\ln 0.9) \times 10,000 \doteq 1,054(hr)$$

[例 7-5] 对使用寿命遵循指数分布的系统 ，若要求其使用10,000小时的概率为90%以上时， 求λ的范围?

$$P(X > 10,000) = e^{-10,000\lambda} \geq 0.9 \;\Rightarrow \lambda \leq -\frac{\ln 0.9}{10,000} \doteq 1.054 \times 10^{-5} (/hr)$$

9 9/16

9

3. 伽马分布*

[定义 7-3] 伽马函数(gamma function)

$$\Gamma(\alpha) \equiv \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy$$

$$\Gamma(\alpha) = \left[-y^{\alpha-1}e^{-y}\right]_0^\infty + (\alpha-1)\int_0^\infty y^{\alpha-2}e^{-y}dy = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty y^{1-1}e^{-y}dy = 1$$

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = (n-1)(n-2)\cdots\times 2\times 1 = (n-1)!$$

[定义 7-4] 伽马分布(gamma distribution)

$$f(x) = \frac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta},\; x > 0;\; \alpha, \theta > 0$$

$$f(x) = C \times x^{\alpha-1} e^{-x/\theta},\; x > 0;\; \alpha, \theta > 0$$

$$C\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x/\theta}dx = C\int_0^\infty (\theta y)^{\alpha-1}e^{-y}\theta dy = C\theta^\alpha \int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-y}dy \equiv 1$$

$$\Rightarrow C = 1/[\theta^\alpha \Gamma(\alpha)]$$

10/16

10

3. 伽马分布*

伽马分布 R函数

# 概率密度函数 f(x) (shape=, rate=, scale= 选其一输入)
# 初始值 (rate = 1, scale = 1/rate)
dgamma(x, shape, (rate), scale)
# Excel函数 = GAMMA.DIST(x, shape, scale, FALSE)

# 累积分布函数 F(x)
pgamma(x, shape, (rate), scale, lower.tail = TRUE)
# Excel函数 = GAMMA.DIST(x, shape, scale, TRUE)

# 分位数 (p=累累积概率)
qgamma(p, shape, (rate), scale, lower.tail = TRUE)
# Excel函数 = GAMMA.INV(p, shape, scale)

# 伽马随机变量 (n=随机数的个数)
rgamma(n, shape, (rate), scale)
# Excel函数 = GAMMA.INV(RAND( ), shape, scale) ⇒ 生成1个随机数

3. 伽马分布*

- 动差生成函数 $m(t)=E(e^{tX})=\int_0^\infty e^{tx}f(x)dx=C\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{(t-1/\theta)x}dx$

$$m(t)=C\int_0^\infty\left(\frac{\theta y}{1-\theta t}\right)^{\alpha-1}e^{-y}\frac{\theta}{1-\theta t}dy=\left(\frac{\theta}{1-\theta t}\right)^{\alpha}\frac{1}{\theta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-y}dy$$
$$=\left(\frac{1}{1-\theta t}\right)^{\alpha},\ t<\frac{1}{\theta}$$

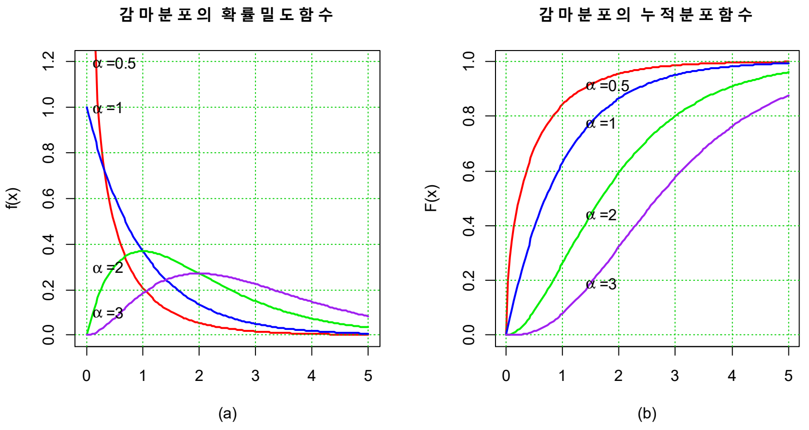
[定义 7-2] 伽马分布与指数分布的关系

$$X_1,X_2,\ldots,X_n\overset{iid}{\sim}Exp(\lambda\equiv\frac{1}{\theta})\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}X_i\sim\Gamma(n,\theta)$$
$$m_{(X_1+\cdots+X_n)}(t)=E(e^{t(X_1+\cdots+X_n)})=E(e^{tX_1})\cdots E(e^{tX_n})=m(t)^n=\left(\frac{1}{1-\theta t}\right)^{n}$$

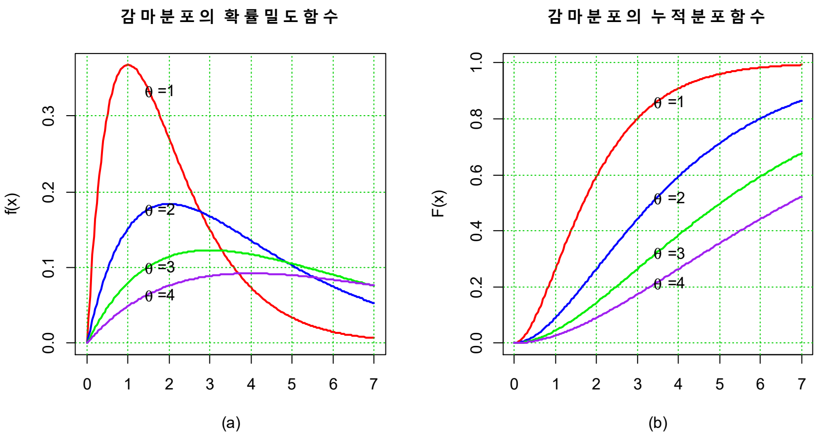
- 期望与方差 $m'(t)=\dfrac{\alpha\theta}{(1-\theta t)^{\alpha+1}}\Rightarrow E(X)=m'(0)=\alpha\theta$

$$m''(t)=\frac{\alpha(\alpha+1)\theta^2}{(1-\theta t)^{\alpha+2}}\Rightarrow Var(X)=m''(0)-E(X)^2$$
$$=\alpha(\alpha+1)\theta^2-(\alpha\theta)^2=\alpha\theta^2$$

[例 7-6] 若θ=1，请绘制α=0.5, 1, 2, 3时伽马分布的概率密度函数与累积分布函数。



[例 7-7] 若α=2， 请绘制θ=1, 2, 3, 4时伽马分布的概率密度函数与累积分布函数。



3. 伽马分布*

[例 7-8] 某一电动按摩器使用寿命遵循均值为10年，方差为50的伽马分布，请求下列值： $\alpha\theta = 10,\ \alpha\theta^2 = 50 \ \Rightarrow\ \alpha = 2,\ \theta = 5$

(1) 该电动按摩器3年间无故障使用的概率

$$\begin{aligned} P(X>3) &= \frac{1}{5^2\Gamma(2)}\int_3^\infty x^{2-1}e^{-x/5}dx = \frac{1}{25}\int_3^\infty xe^{-x/5}dx \\ &= \frac{1}{25}\left\{\left[-5xe^{-x/5}\right]_3^\infty + \int_3^\infty 5e^{-x/5}dx\right\} \\ &= \frac{1}{25}\left\{15e^{-3/5} + \left[-25e^{-x/5}\right]_3^\infty\right\} = (\frac{3}{5}+1)e^{-3/5} \doteq 0.8781 \end{aligned}$$

(2) 该电动按摩器8年间无故障使用的概率

$$P(X>8) = (\frac{8}{5}+1)e^{-8/5} \doteq 0.5249$$

(3) 在无故障使用了5年的情况下，后续3年间也无故障使用的概率

$$P(X>5) = (\frac{5}{5}+1)e^{-5/5} \doteq 0.7358$$

$$P(X>5+3 \mid X>5) = \frac{P(X>8)}{P(X>5)} \doteq \frac{0.5249}{0.7358} \doteq 0.7134 < P(X>3) \doteq 0.8781$$

15/16

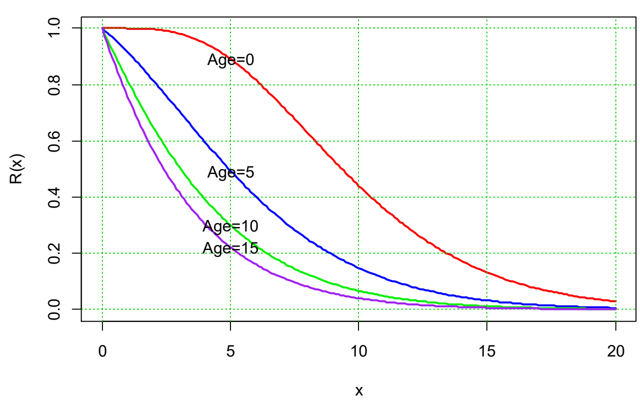
15

[例 7-9] 某一产品的寿命遵循α=5, θ=2的伽马分布时，求：

(1) 该产品x年内无故障使用的概率

(2) 在分别无故障使用了5, 10, 15年的情况下，后续x年间也无故障使用的概率

감마분포의 (조건부) 생존함수



16/16

16