04

CHAPTER

확률변수의 기대값

1

제4-2장
확률변수의 기대값

1. 확률변수의 기대값
2. 분산과 표준편차
3. 공분산
4. 상관계수
5 모멘트생성함수*

2

1.1 기대값의 개념

- 확률변수의 결과값을 그 확률변수의 확률분포를 가중치로 평균한 값
- 확률실험을 무한히 반복했을 때 관측되는 확률변수 값들의 평균

[정의 5-1] 확률변수의 기대값(expected value)

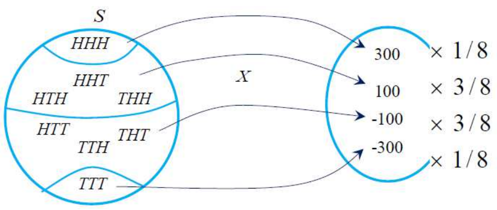
– 이산형 $\mu_X = E(X) = \sum_x x f(x)$

– 연속형 $\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$

3/11

3

[예 5-1] 동전을 세 번 던져 나온 (앞면의 개수 - 뒷면의 개수)만큼 100원씩 주고받는 게임에서 수익 X의 기대값



$$\Rightarrow E(X) = \sum_x x f(x) = \frac{300 - 300 + 300 - 300}{8} = 0$$

[예 5-2] 연속형 확률변수 X의 기대값 $f(x) = 2e^{-2x}$, $(0 < x < \infty)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} 2xe^{-2x} dx = \left[-xe^{-2x}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-e^{-2x}) dx$$
$$= 0 - \frac{1}{2}(0 - 1) = \frac{1}{2}$$

4/11

4

1.2 확률변수 함수의 기대값, Y=g(X)

- 이산형 $E(Y) = E[g(X)] = \sum_x g(x) f(x)$
- 연속형 $E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$

[예 5-3] 동전을 세 번 던져서 나온 뒷면의 개수 X의 제곱에 해당되는 배당금을 받는 게임에서 배당금의 기대값

$$f(0) = \frac{1}{8},\ f(1) = \frac{3}{8},\ f(2) = \frac{3}{8},\ f(3) = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow E(Y) = E(X^2) = \sum_x x^2 f(x) = \frac{0+3+2^2 \times 3+3^2}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

[예 5-4] 연속형 확률변수, Y=3X-3 $f(x) = 2e^{-2x}$, $0 < x < \infty$

$$\Rightarrow E(Y) = E(3X-3) = \int_0^{\infty} (3x-3) \times 2e^{-2x} dx$$

$$= \left[-3xe^{-2x}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-3e^{-2x}) dx - \left[3e^{-2x}\right]_0^{\infty} = 0 - \frac{3}{2}(0-1) - 3 = -\frac{3}{2}$$

$$E(Y) = 3E(X) - 3 = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2}$$

1.4 기대값의 특성

[정리 5-1] 기대값의 특성

(1) $E(aX+b) = aE(X)+b$

$$E(aX+b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b) f(x) dx$$

$$= a\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx + b\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = aE(X)+b$$

(2) $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$

$$E(X+Y) = \int\int (x+y) f(x,y) dxdy$$

$$= \int x \int f(x,y) dydx + \int y \int f(x,y) dxdy$$

$$= \int xf_X(x)dx + \int yf_Y(y)dy = E(X)+E(Y)$$

1.4 기대값의 특성

[정리 5-1] 기대값의 특성 (계속)

(3) $E[c_1 g_1(X)+\cdots+c_n g_n(X)] = c_1 E[g_1(X)]+\cdots+c_n E[g_n(X)]$

$$E[c_1 g_1(X)+\cdots+c_n g_n(X)] = \int [c_1 g_1(x)+\cdots+c_n g_n(x)] f(x)dx$$
$$= c_1 \int g_1(x) f(x)dx + \cdots + c_n \int g_n(x) f(x)dx$$
$$= c_1 E[g_1(X)]+\cdots+c_n E[g_n(X)]$$

(4) $X \,\&\, Y\ indep. \Rightarrow E(XY)=E(X)E(Y)$

$$E(XY)=\int\int xy\, f(x,y)dxdy \;=\int\int xy\, f_X(x) f_Y(y)dxdy$$
$$=\int x f_X(x)dx \int y f_Y(y)dy = E(X)E(Y)$$

7/11

7

2.1 분산의 개념

[정리 5-2] 확률변수의 분산(variance)

$$Var(X) \equiv \sigma_X^2 = E\left[(X-\mu_X)^2\right],\quad \mu_X \equiv E(X)$$

- 이산형 $\sigma_X^2 = E\left[(X-\mu_X)^2\right] = \sum_x (x-\mu_X)^2 f(x)$
- 연속형 $\sigma_X^2 = E\left[(X-\mu_X)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 f(x)dx$
- 간편식 $E\left[(X-\mu_X)^2\right] = E\left[X^2 - 2\mu_X X + \mu_X^2\right]$

$$= E(X^2) - 2\mu_X E(X) + \mu_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2$$

8/11

8

[예 5-7] 주사위를 한 번 던지는 시행에서 나온 눈의 수 X의 기대값과 분산

$$\mu_X = E(X) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{7}{2}$$

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2 = \frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

[예 5-8] 연속형 확률변수 $f(x) = 2e^{-2x}$, $0 < x < \infty$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} 2xe^{-2x}dx = \left[-xe^{-2x}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}(-e^{-2x})dx = 0 - \frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{\infty} 2x^2e^{-2x}dx = \left[-x^2e^{-2x}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}(-2xe^{-2x})dx$$

$$= \left[-xe^{-2x}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}(-e^{-2x})dx = \int_0^{\infty} e^{-2x}dx = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sigma_X^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

9/11

9

2.2 분산의 특성

$$Var(g(X)) = E[g(X)^2] - E[g(X)]^2$$

- 이산형 $Var(g(X)) = \sum_x g(x)^2 f(x) - \left[\sum_x g(x)f(x)\right]^2$
- 연속형 $Var(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)^2 f(x)dx - \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx\right]^2$

- [정리 5-2] 분산의 특성

$$Var(aX+b) = a^2Var(X)$$

$$Var(aX+b) = E\left[\{(aX+b)-(a\mu_X+b)\}^2\right]$$

$$= a^2E\left[(x-\mu_X)^2\right] = a^2Var(X)$$

10/11

10

[예 5-9] 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수에 100을 곱하고 400을 뺀 숫자 Y의 기대값과 분산

$$Y = 100X - 400 \qquad \mu_X = \frac{7}{2},\ \sigma_X^2 = \frac{35}{12}$$

$$\Rightarrow \mu_Y \equiv E(Y) = 100E(X) - 400 = 350 - 400 = -50$$

$$\Rightarrow \sigma_Y^2 \equiv Var(Y) = 100^2 \sigma_X^2 = \frac{350,000}{12} \doteq 29,166.1667$$

[예 5-10] 연속형 확률변수 $f(x) = 2e^{-2x},\ 0 < x < \infty$

$$Y = 20X - 10 \qquad \mu_X = \frac{1}{2},\ \sigma_X^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \mu_Y \equiv E(Y) = 20E(X) - 10 = 10 - 10 = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_Y^2 \equiv Var(Y) = 20^2 \sigma_X^2 = \frac{400}{4} = 100$$