04 CHAPTER

离散型概率分布

1

第4-3章
离散型概率分布

1. 离散均衡分布
2. 二项分布
3. 超几何分布
4. 泊松分布
5. 几何分布*
6. 负二项分布*
7. 多项分布*

2

1. 离散均衡分布

[定义 6-1] 离散均衡分布(discrete uniform distribution)
n 个结果值以均衡的概率出项的概率分布

- pdf $f(x)=\frac{1}{n},\ x=1,2,\dots,n$
- 期望 $E(X)=\sum_{x=1}^{n}x\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}$
- 方差 $E(X^2)=\sum_{x=1}^{n}x^2\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\Rightarrow Var(X)=E(X^2)-E(X)^2$$
$$=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=\frac{(n+1)(n-1)}{12}$$

3/30

3

1. 离散均衡分布

[例 6-1] 装着20个标有1到20号的球， 从中随机抽取一个，出现的号码X

(1) X的概率分布函数 $f(x)=\frac{1}{20},\ x=1,2,\dots,20$

(2) X的期望与方差 $E(X)=\frac{20+1}{2}=10.5$

$$Var(X)=\frac{(20+1)(20-1)}{12}=33.25$$

(3) 大于15号以上的概率

$$P(X\geq 15)=\sum_{x=15}^{20}\frac{1}{20}=\frac{6}{20}=0.3$$

4/30

4

2. 二项分布

[定义 6-2] 伯努利分布(Bernoulli distribution) $X \sim B(1, p)$

：在一次成功概率一定的试验中，出现的成功次数的概率分布

- pdf $f(x) = \begin{cases} p, & x = 1 \\ 1-p, & x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = p^x(1-p)^{1-x},\ x = 0,1$
- 期望 $E(X) = \sum_{x=0}^{1} x f(x) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$
- 方差 $E(X^2) = \sum_{x=0}^{1} x^2 f(x) = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p = p$

  $\Rightarrow Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1-p)$
- MGF $m(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{1} e^{tx} f(x) = e^0 \times (1-p) + e^t \times p = 1 - p + pe^t$

  $\Rightarrow E(X) = m'(0) = pe^0 = p \quad E(X^2) = m''(0) = pe^0 = p$

  $\Rightarrow Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1-p)$

5/30

5

2. 二项分布

[定义 6-3] 二项分布(binomial distribution) $X \sim B(n, p)$

：在n次成功概率一定的试验中，出现成功次数的概率分布

- Pdf $f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x},\ x = 0,1,2,\ldots,n$

  $X_1, X_2, \cdots, X_n \overset{iid}{\sim} B(1, p) \Rightarrow X \equiv \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, p)$
- 期望 $E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np$
- 方差 $Var(X) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p(1-p) = np(1-p)$
- MGF $m(t) = m_{X_1}(t) \times m_{X_2}(t) \times \cdots \times m_{X_n}(t) = (1 - p + pe^t)^n$

6/30

6

$X \sim B(5, p)$ $\quad f(x) = \binom{5}{x} p^x (1-p)^{5-x}, \ x = 0, 1, 2, \ldots, 5$

시행 결과 ●=성공, ○=실패	확률 $P(X=x)$	시행 결과 ●=성공, ○=실패	확률 $P(X=x)$
○○○○○	$f(0) = \binom{5}{0}(1-p)^5$	●●●●●	$f(5) = \binom{5}{5}p^5$
●○○○○ ○●○○○ ○○●○○ ○○○●○ ○○○○●	$f(1) = \binom{5}{1}p(1-p)^4$ $= 5p(1-p)^4$	●●●●○ ●●●○● ●●○●● ●○●●● ○●●●●	$f(4) = \binom{5}{4}p^4(1-p)$ $= 5p^4(1-p)$
●●○○○ ●○●○○ ●○○●○ ●○○○● ○●●○○ ○●○●○ ○●○○● ○○●●○ ○○●○● ○○○●●	$f(2) = \binom{5}{2}p^2(1-p)^3$ $= 10p^2(1-p)^3$	●●●○○ ●●○●○ ●●○○● ●○●●○ ●○●○● ●○○●● ○●●●○ ○●●○● ○●○●● ○○●●●	$f(3) = \binom{5}{3}p^3(1-p)^2$ $= 10p^3(1-p)^2$

7/30

7

2. 二项分布

\# 二项分布 R函数

\# 概率分布函数 (size=n=样本大小, prob=p=成功概率)
dbinom(x, size, prob)
\# Excel 函数 = BINOM.DIST(x, size, prob, FALSE)

\# 累积分布函数 (q=分位数, lower.tail=TRUE=由下向上累积)
pbinom(q, size, prob, lower.tail = TRUE)
\# Excel 函数 = BINOM.DIST(x, size, prob, TRUE)

\# 分位数 (p=累积概率)
qbinom(p, size, prob, lower.tail = TRUE)
\# Excel 函数 = BINOM.INV(size, prob, p)

\# 二项随机变量(n=随机数的个数)
rbinom(n, size, prob)
\# 虽然没有相应的Excel函数, 但可用下面的指令生成一个随机数
= BINOM.INV(size, prob, RAND( ))

8/30

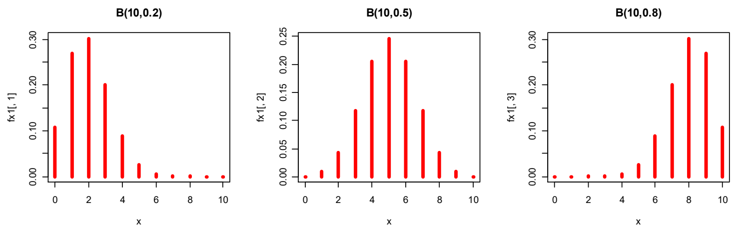
8

[例 6-2] 在成功概率分别为0.2, 0.5, 0.8的总体中，各抽出10个样本时，出现的成功次数的概率分布

(1) p=0.2 $X \sim B(10, 0.2)$ $f(x) = \binom{10}{x}(0.2)^x(0.8)^{10-x},\ x = 0, 1, 2, \ldots, 10$

(2) p=0.5 $X \sim B(10, 0.5)$ $f(x) = \binom{10}{x}(0.5)^x(0.5)^{10-x},\ x = 0, 1, 2, \ldots, 10$

(3) p=0.8 $X \sim B(10, 0.8)$ $f(x) = \binom{10}{x}(0.8)^x(0.2)^{10-x},\ x = 0, 1, 2, \ldots, 10$



9/30

9

2. 二项分布

[例 6-3] 在不良率为0.03的工艺中，抽取20个样本进行检查，发现不良品的个数X $X \sim B(20, 0.03)$

(1) 概率分布函数 $f(x) = \binom{20}{x}(0.03)^x(0.97)^{20-x},\ x = 0, 1, 2, \ldots, 20$

(2) 均值与方差 $E(X) = 20 \times 0.03 = 0.6 \quad Var(X) = 20 \times 0.03 \times 0.97 = 0.582$

(3) P(X = 2) $f(2) = \binom{20}{2}(0.03)^2(0.97)^{20-2} = 190 \times (0.03)^2(0.97)^{18} \doteq 0.099$

(4) P($X \geq$ 3)

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - [f(0) + f(1) + f(2)]$$
$$= 1 - \left[{}_{20}C_0(0.03)^0(0.97)^{20} + {}_{20}C_1(0.03)^1(0.97)^{19} + {}_{20}C_2(0.03)^2(0.97)^{18}\right]$$
$$= 1 - \left[(0.97)^{20} + 20 \times 0.03 \times (0.97)^{19} + 190 \times (0.03)^2(0.97)^{18}\right]$$
$$\doteq 1 - (0.544 + 0.336 + 0.099) = 1 - 0.979 = 0.021$$

```
dbinom(0:2, 20, 0.03)
[1] 0.54379434 0.33636763 0.09882967
1-sum(dbinom(0:2, 20, 0.03)); pbinom(2, 20, 0.03, lower=F)
[1] 0.02100836       [1] 0.02100836
```

10/30

10

3. 超几何分布

[定义 6-4] 超几何分布(hypergeometric distribution) $HG(n,N,r)$

：在由具有两种属性的个体组成的有限总体中抽取一定个数的样本且不放回时，具有某种属性的个体数的概率分布。

- Pdf $$f(x)=\frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}},\ \max(0,n-N+r)\le x\le \min(n,r)$$
- 期望 $$E(X)=n\times(\text{성공확률})=n\times\frac{r}{N}=\frac{nr}{N}$$
- 方差 $$E[X(X-1)]=\frac{nr}{N}\times\frac{(n-1)(r-1)}{N-1}$$
$$Var(X)=E(X^2)-E(X)^2=E[X(X-1)]+E(X)-E(X)^2$$
$$=\frac{nr}{N}\times\frac{(n-1)(r-1)}{N-1}+\frac{nr}{N}-\left(\frac{nr}{N}\right)^2=n\frac{r}{N}\left(1-\frac{r}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

3. 超几何分布

$(N=10,\ r=2,\ n=5)$ $HG(5,10,2)$

시행 결과 ●=성공, ○=실패	확률 $P(X=x)$
○○○○○	$f(0)=\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}\times\frac{6}{8}\times\frac{5}{7}\times\frac{4}{6}=\frac{8!/3!}{10!/5!}=\frac{\binom{2}{0}\binom{8}{5}}{\binom{10}{5}}$
●○○○○ ○●○○○ ○○●○○ ○○○●○ ○○○○●	$f(1)=\binom{5}{1}\times\frac{2\times(8\times7\times6\times5)}{10\times9\times8\times7\times6}$ $=2\times\frac{5!}{4!}\times\frac{8!/4!}{10!/5!}=\frac{2\times\frac{8!}{4!4!}}{\frac{10!}{5!5!}}=\frac{\binom{2}{1}\binom{8}{4}}{\binom{10}{5}}$
●●○○○ ●○●○○ ●○○●○ ●○○○● ○●●○○ ○●○●○ ○●○○● ○○●●○ ○○●○● ○○○●●	$f(2)=\binom{5}{2}\times\frac{(2\times1)(8\times7\times6)}{10\times9\times8\times7\times6}$ $=\frac{5!}{3!}\times\frac{8!/5!}{10!/5!}=\frac{\binom{2}{2}\binom{8}{5}}{\binom{10}{5}}$

3. 超几何分布

- 有限总体校正系数(finite population correction factor)

$$Var(X) = n\frac{r}{N}\left(1-\frac{r}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

$$p = \frac{r}{N} \quad \Rightarrow Var(X) = np(1-p)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

- 概率分布函数的其他呈现方式

$$f(x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \ \max(0, n-N+r) \le x \le \min(n, r)$$

$r = pN$

$$f(x) = \frac{\binom{pN}{x}\binom{(1-p)N}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \ \max(0, n-(1-p)N) \le x \le \min(n, pN)$$

3. 超几何分布

```
# 超几何分布R函数

# 概率分布函数 (x=样本成功个数, m=r=总体成功个体数,
                n=N-r=总体失败个体数, k=样本个数)
   dhyper(x, m, n, k)
# Excel函数 = HYPGEOM.DIST(x, k, m, N, FALSE)

# 累积分布函数 (q=分位数, lower.tail=TRUE=由下至上累积)
   phyper(q, m, n, k, lower.tail = TRUE)
# Excel函数 = HYPGEOM.DIST(x, k, m, N, TRUE)

# 分位数 (p=累积概率)
   qhyper(p, m, n, k, lower.tail = TRUE)

# 超几何随机变量(nn=随机数的个数)
   rhyper(nn, m, n, k)
```

3. 超几何分布

[例 6-4] 由50个个体构成的三种有限总体，分别有10个、25个、40个成功个体，从每个总体中抽取10个样本时，求成功个数的概率分布。

(1) 具有10个成功个体的总体的情况 $X \sim HG(10,50,10)$

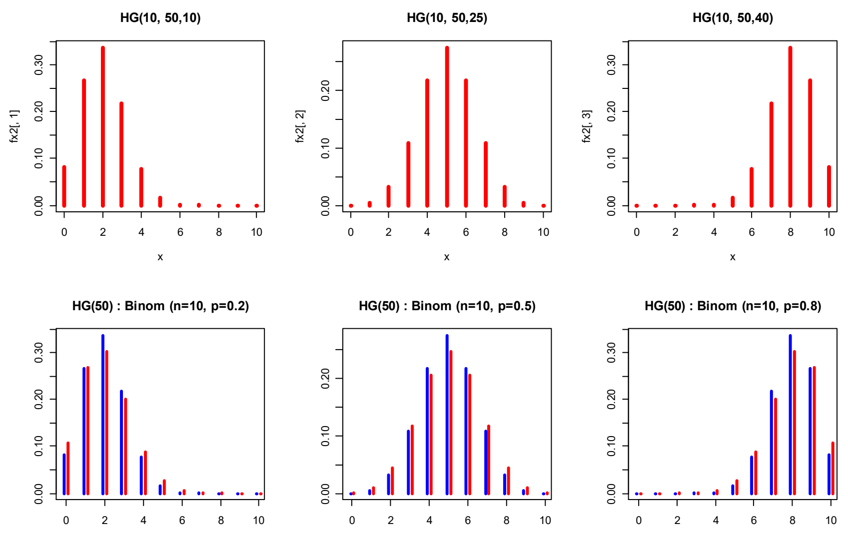
$$f(x)=\frac{\binom{10}{x}\binom{40}{10-x}}{\binom{50}{10}},\ x=0,1,2,\ldots,10$$

(2) 具有25个成功个体的总体的情况 $X \sim HG(10,50,25)$

$$f(x)=\frac{\binom{25}{x}\binom{25}{10-x}}{\binom{50}{10}},\ x=0,1,2,\ldots,10$$

(3) 具有40个成功个体的总体的情况 $X \sim HG(10,50,40)$

$$f(x)=\frac{\binom{40}{x}\binom{10}{10-x}}{\binom{50}{10}},\ x=0,1,2,\ldots,10$$



[例 6-5] 在不良率为5%且由1000个产品构成的批量货物中抽取30个样本时，求出现不良品个数X

(1) 概率分布函数 $f(x)=\frac{\binom{50}{x}\binom{950}{30-x}}{\binom{1000}{30}},\ x=0,1,2,\dots,30$

(2) 均值与方差 $E(X)=np=30\times 0.05=1.5$

$Var(X)=np(1-p)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)=30\times 0.05\times 0.95\times\frac{970}{999}\doteq 1.384$

(3) P(不良品3个) $f(3)=\frac{\binom{50}{3}\binom{950}{30-3}}{\binom{1000}{30}}\doteq 0.128$

(4) P(不良品低于3个)

$P(X\le 3)=\sum_{x=0}^{3}\frac{\binom{50}{x}\binom{950}{30-x}}{\binom{1000}{30}}\doteq 0.210+0.342+0.263+0.128=0.943$

```
dhyper(0:3, 50, 950, 30)
[1] 0.2096813 0.3415005 0.2631628 0.1277323
sum(dhyper(0:3, 50, 950, 30)); phyper(3, 50, 950, 30)
[1] 0.942077          [1] 0.942077
```

17/30

17

4. 泊松分布

[定义 6-5] 泊松分布(Poisson distribution) $Poi(\lambda)$

: 单位时间内发生的少数事件数的概率分布

$$f(x)=\lambda^x\frac{e^{-\lambda}}{x!},\ x=0,1,2,\dots$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x)=\lim_{n\to\infty}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^x$$

$$\lambda=np\Rightarrow p=\frac{\lambda}{n}\qquad =\frac{1}{x!}\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-x)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$=\frac{\lambda^x}{x!}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{n^x}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n/\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x$$

$$=\lambda^x\frac{e^{-\lambda}}{x!}$$

18/30

18

4. 泊松分布

- 概率分布函数的条件

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \lambda^x \frac{e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

- MGF, 均值与方差

$$m(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \lambda^x \frac{e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

$$m'(t) = \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)} \Rightarrow E(X) = m'(0) = \lambda e^0 e^0 = \lambda$$

$$m''(t) = \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)} + (\lambda e^t)^2 e^{\lambda(e^t-1)} \Rightarrow E(X^2) = m''(0) = \lambda + \lambda^2$$

$$\Rightarrow Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda$$

4. 泊松分布

```
# 泊松分布 R函数

# 概率分布函数 (lambda=期望)
   dpois(x, lambda)
# Excel函数 = POISSON.DIST(x, lambda, FALSE)

# 累积分布函数 (q=分位数, lower.tail=TRUE=由下往上累积)
   ppois(q, lambda, lower.tail = TRUE)
# Excel函数 = POISSON.DIST(x, lambda, TRUE)

# 分位数 (p=累积概率)
   qpois(p, lambda, lower.tail = TRUE)

# 泊松随机变量(n=随机数的个数)
   rpois(n, lambda)
```

4. 泊松分布

[例 6-6] 从单位时间内平均发生次数分别为2次、5次、8次的三个无限总体中抽取一定单位的样本时，泊松概率分布

(1) 单位时间内平均发生次数为2的情况 $Poi(2)$

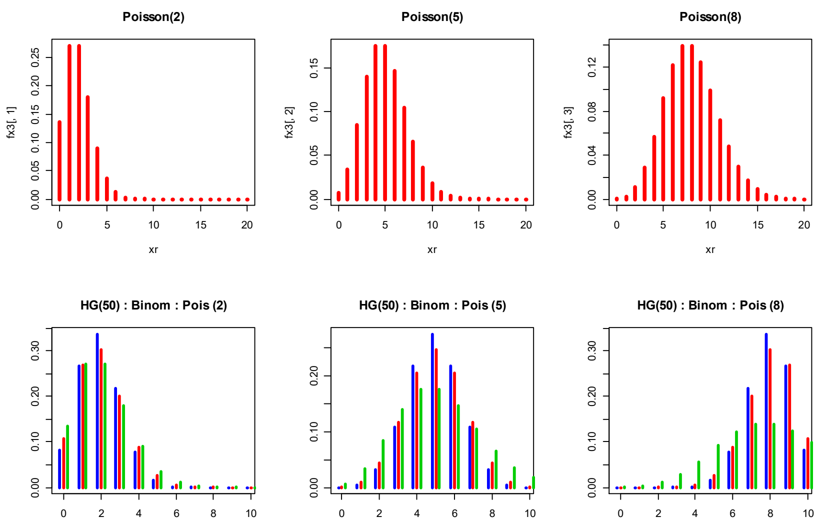
$$f(x) = 2^x \frac{e^{-2}}{x!}, \quad x = 0,1,2,\ldots$$

(2) 单位时间内平均发生次数为5的情况 $Poi(5)$

$$f(x) = 5^x \frac{e^{-5}}{x!}, \quad x = 0,1,2,\ldots$$

(3) 单位时间内平均发生次数为8的情况 $Poi(8)$

$$f(x) = 8^x \frac{e^{-8}}{x!}, \quad x = 0,1,2,\ldots$$



4. 泊松分布

[例 6-7] 对单位时间内平均瑕疵数为1.5的产品生产流程进行抽样

$X \sim Poi(1.5)$

(1) 概率分布函数 $f(x)=(1.5)^x \dfrac{e^{-1.5}}{x!},\ x=0,1,2,\ldots$

(2) 期望 $E(X)=\lambda=1.5$

(3) 方差 $Var(X)=\lambda=1.5$

(4) P(2个) $f(2)=(1.5)^2\dfrac{e^{-1.5}}{2!}\doteq 0.251$

(5) P(3个以上) $P(X\geq 3)=1-P(X\leq 2)=1-e^{-1.5}\times(1+1.5+1.5^2/2)\doteq 0.191$

(6) P(10到20个) $Y\sim Poi(15)\ \Rightarrow\ P(Y=20)=15^{20}\times\dfrac{e^{-15}}{20!}\doteq 0.042$

```
dpois(0:2, 1.5)
[1] 0.2231302 0.3346952 0.2510214
1-sum(dpois(0:2, 1.5)); ppois(2, 1.5, lower=F)
[1] 0.1911532        [1] 0.1911532
```

23/30

23

5. 几何分布

[定义 6-6] 几何分布(geometric distribution) $X\sim G(p)$

：在成功概率一定的试验中，直到出现第一次成功为止，所进行的试验次数的概率分布 $f(x)=(1-p)^{x-1}p,\ x=1,2,\ldots$

첫 번째 성공이 나오기까지 시행 시나리오 (● : 성공 ○ : 실패)	총 시행횟수 (확률변수 X)	확률 $P(X=x)$
●	$X=1$	p
○ ●	$X=2$	$(1-p)p$
○ ○ ●	$X=3$	$(1-p)^2p$
○ ○ ○ ●	$X=4$	$(1-p)^3p$
○ ○ ○ ○ ●	$X=5$	$(1-p)^4p$
○ ○ ○ ○ ○ ●	$X=6$	$(1-p)^5p$
⋮	⋮	⋮
○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ⋯ ○ ●	$X=x$	$(1-p)^{x-1}p$

24/30

24

5. 几何分布

- 概率分布函数的条件

$$\sum_{x=1}^{\infty} f(x)=\sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^{x-1}p=\frac{p}{1-(1-p)}=1$$

- 累积分布函数

$$F(x)\equiv P(X\le x)=\sum_{y=1}^{x}(1-p)^{y-1}p=\frac{p[1-(1-p)^x]}{1-(1-p)}=1-(1-p)^x$$

- 动差生成函数

$$m(t)=E(e^{tX})=\sum_{x=1}^{\infty}e^{tx}(1-p)^{x-1}p$$

$x-1\to y$

$$=pe^t\sum_{y=0}^{\infty}(e^tq)^y=\frac{pe^t}{1-qe^t},\quad qe^t<1$$

25/30

25

5. 几何分布

- 期望与方差 $E(X)=\dfrac{1}{p}$ $Var(X)=\dfrac{1-p}{p^2}$ $m(t)=\dfrac{pe^t}{1-qe^t}$

$$m'(t)=\frac{pe^t(1-qe^t)+pe^tqe^t}{(1-qe^t)^2}=\frac{pe^t}{1-qe^t}+\frac{pqe^{2t}}{(1-qe^t)^2}$$

$$\Rightarrow E(X)=m'(0)=\frac{p}{p}+\frac{p(1-p)}{p^2}=\frac{1}{p}$$

$$m''(t)=\frac{pe^t(1-qe^t)+pe^tqe^t}{(1-qe^t)^2}+\frac{2pqe^{2t}(1-qe^t)^2+2pqe^{2t}q(1-qe^t)}{(1-qe^t)^4}$$

$$\Rightarrow E(X^2)=m''(0)=\frac{p^2+p(1-p)}{p^2}+\frac{2pqp^2+2pq^2p}{p^4}$$

$$=\frac{p}{p^2}+\frac{2p(1-p)+2(1-p)^2}{p^2}=\frac{2-p}{p^2}$$

$$\Rightarrow Var(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}$$

26/30

26

5. 几何分布

几何分布 R函数
Excel函数不存在

```
# 概率分布函数 (x=失败次数, prob=p=成功概率)
   dgeom(x, prob)

# 累积分布函数 (q=分位数, lower.tail=TRUE=由下至上累积)
   pgeom(q, prob, lower.tail = TRUE)

# 分位数 (p=累积概率)
   qgeom(p, prob, lower.tail = TRUE)

# 几何随机变量(n=随机数的个数)
   rgeom(n, prob)
```

27/30

27

5. 几何分布

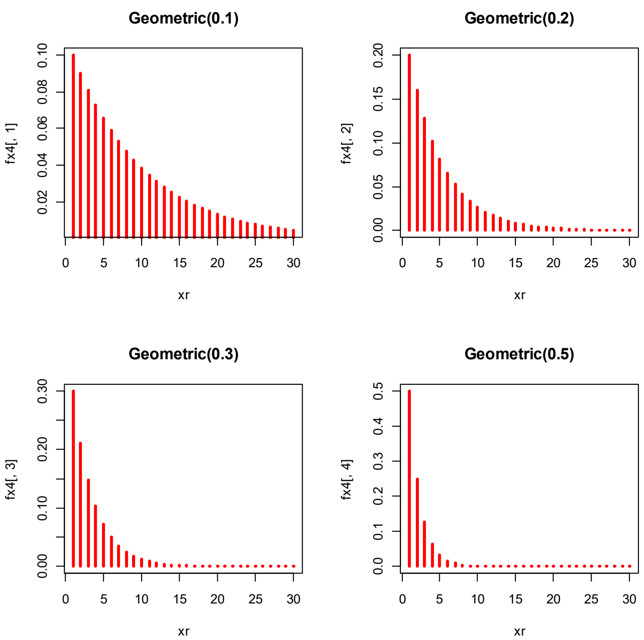
[例 6-8] 在成功概率分别为0.1, 0.2, 0.3, 0.5的四种无限总体中，第一次获得成功的试验

$$f(x) = p(1-p)^{x-1}$$

(1) 成功概率为0.1的情况	$f(x) = 0.1 \times 0.9^{x-1},\ x = 1, 2, 3, \ldots$
(2) 成功概率为0.2的情况	$f(x) = 0.2 \times 0.8^{x-1},\ x = 1, 2, 3, \ldots$
(3) 成功概率为0.3的情况	$f(x) = 0.3 \times 0.7^{x-1},\ x = 1, 2, 3, \ldots$
(4) 成功概率为0.5的情况	$f(x) = 0.5 \times 0.5^{x-1},\ x = 1, 2, 3, \ldots$

28/30

28



29/30

29

5. 几何分布

[例 6-9] 反复掷一个骰子，直到出现点数'6'为止，其总试验次数X

(1) X的概率分布函数 $f(x) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}$, $x = 1, 2, 3, \ldots$

(2) X的期望与方差 $E(X) = \frac{1}{p} = 6$ $Var(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{5/6}{(1/6)^2} = 30$

(3) 3次试验内出现 '6'的概率 $F(3) = 1 - q^3 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216} \doteq 0.421$

- 无记忆性 (memoryless property)

$$P(X > x + y \mid X > x) = P(X > y)$$

$$P(X > x + y \mid X > x) = \frac{P(X > x + y)}{P(X > x)} = \frac{q^{x+y}}{q^x} = q^y = P(X > y)$$

30/30

30