第一章　定解问题

一、基本要求

1．掌握用数理方程描绘研究物理问题的一般步骤。

2．掌握三类典型数理方程的推导过程和建立（导出）数理方程的一般方法、步骤。

3．正确写出一些典型物理问题的定解问题和定解条件。

二、内容提要

（一）基本概念

1．数理方程的分类

数理方程按其所代表的物理过程可分为如下三类：

（1）描绘振动和波动特征的波动过程

$$u_u = a^2\Delta u + f$$

（2）反映输运过程的扩散（或热传导）方程

$$u_t = D\Delta u + f$$

（3）描绘稳定过程或状态的 Poisson 方程

$$\Delta u = -h$$

其中，$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$；而未知函数 $u_u = \frac{\partial u}{\partial t}$ 在三类方程中分别表示位移、浓度（或温度）和稳定现象特征；a 和 D 分别表示波速和扩散（热传导）系数；f 和 h 是与源有关的已知函数，当 f=0 或 h=0 时，相应的方程被称为齐次方程。对于二维和一维问题，Δ 分别退化为 $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 和 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$

2．用数理方程研究物理问题的步骤

用数理方程研究物理问题一般需经历以下三个步骤

（1）导出或写出定解问题，它包括数理方程和定解条件两部分。

（2）求解已导出或写出的定解问题。

（3）对求得的解答讨论其实定性（即解是否存在、唯一且稳定）并作适当的物理解释。

3．求解数理方程的方法

求解数理方程的方法大致可归纳为如下几种

（1）行波法（又称 dAlembert 解法）；

（2）分离变量法；

（3）积分变换法；

（4）Green 函数法；

（5）保角变换法；

（6）复变函数法；

（7）变分法。

在本篇以后各章中将逐一加以介绍。

（二）数理方程的建立（导出）

1．建立（导出）数理方程的步骤

建立（导出）数理方程一般要经历以下三个步骤

（1）从所研究的系统中划出以小部分，分析邻近部分与这一部分的相互作用；

（2）根据物理学的规律（如，牛顿第二定律、能量守恒定律、奥-高定律等），以算式表达这个作用；

（3）化简、整理，即得所研究问题满足的数理问题。

按照以上步骤，可导出不同物理问题所满足的数理方程。如，（小振幅的）弦的横振动的方程是

$$u_{u}=a^{2}u_{xx}+f(x,t)$$

这是一个一维的波动方程。其中，$a^{2}=T/\rho, f(x,t)=F(x,t)/\rho$；而 T 为弦线所受张力，$\rho$为弦的线密度，F(x,t)为单位长弦线所受外力。又如，均匀细杆的热传导的方程是

$$u_{t}=Du_{xx}+f(x,t)$$

这是一维的热传导方程。其中，$D=\frac{k}{c\rho}, f(x,t)=F/c\rho$；而 k 为杆的导热率（与材料有关），c 为杆的比热容（即，单位物质升高单位温度所需的热量。与材料有关），ρ为杆的体密度，F 为热源密度（即，单位时间内单位体积所放出的热量）。

2．建立（导出）方程时常用到的物理学定律

（1）Newton 第二定律　　F=ma

（2）Fourier 实验定律（即热传导定律）　当物体内存在温差时，会产生热量的流动。热流密度 q（即单位时间内流过横截面积的热量），与温度的下降率成正比。即

$$q=-k\nabla u \qquad (2.1.6)$$

其中，k 为热传导系数，负号表示温度下降的方向。写成分量式即

$$q_{x}=-k\frac{\partial u}{\partial x}, q_{y}=-k\frac{\partial u}{\partial y}, q_{z}=-k\frac{\partial u}{\partial z} \qquad (2.1.7)$$

（3）Newton 冷却定律　物体冷却时放出的热量$-k\nabla u$与物体外界的

温度差$(u|_{边}-u_0)$ 成正比，其中u_0为周围介质的温度。

（4）电荷守恒定律　电荷既不能创造，也不能消灭，他们只能从一个物体转移到另一个物体，或者从物体的一部分转移到另一部分，或者说，在任何物理过程中，电荷的代数和是守恒的。

（5）热量（质量）守恒定律　物体内部温度升高所吸收的热量（浓度增加所需要的质量），等于流入物体内部的净热量（质量）与物体内部的源所产生的热量（质量）之和。

（6）Fick 定律（即扩散定律）　当物体内浓度分布不均匀时会引起物质的扩散运动。粒子流密度 q（即，单位时间内流过单位面积的粒子数）与浓度的下降率成正比。即

$$q=-D\nabla_u \qquad (2.1.8)$$

其中，D 为扩散系数，负号表示浓度减小的方向。写成分量式即

$$q_x=-D\frac{\partial u}{\partial x},q_y=-D\frac{\partial u}{\partial y},q_z=-D\frac{\partial u}{\partial z} \qquad (2.1.9)$$

（7）Gauss 定律　通过一个任意闭合曲面的电流通，等于这个闭曲面所包围的自由电荷的电量的$\frac{1}{\varepsilon}$倍。即

$$\int_s E.ds=\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau \rho d\tau \qquad (2.1.10)$$

其中，ε为介电常数，ρ为体电荷密度。

（8）Joule-Lenz 定律　电流通过纯电阻的导体时所放出的热量跟电流强度 I 的平方、导线的电阻 R 和通电的时间 t 成正比。即

$$Q=I^2Rt \qquad (2.1.11)$$

（9）Kirchhoff 定律　第一定律：会和在节点的电流代数和为零（规

定流入节点的为正，流出节点的为负）。即

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0 \qquad (2.1.12)$$

第二定律：沿任一闭合回路的电势增量的代数和为零（规定沿回路顺时针方向的电动势和电流都为正，反之为负）。即

$$\sum_{k=1}^{n} I_k R_k = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \qquad (2.1.13)$$

（10） Faraday 电磁感应定律 不论任何原因使通过回路面积的磁通量发生变化时，回路中产生的感应电动势与磁通量对时间的变化率的负值成正比。即

$$\xi = -N \frac{d\phi}{dt} \qquad (2.1.14)$$

其中，N 为感应回路串联线圈的匝数。此即法拉第电子感应定律。由该定律知，当闭合回路（或线圈）中的电流发生变化而引起自身回路的磁通量而产生的自感电动势为

$$\xi = -L \frac{dI}{dt} \qquad (2.1.15)$$

其中,L 为自感系数。

（11） Hooke 定律 在弹性限度内，弹性体的弹力和弹性体的形变量成正比。即

$$f=-kx \qquad (2.1.16)$$

其中，k 为弹性体的劲度系数，负号表示弹力的方向和形变量的方向相反。

应力=杨氏模量×相对伸长

（三） 定解条件

定解条件是确定数理方程解中所含的任意函数或常数，使解具有惟一的充分而且必要的条件。它又分为初始条件和边界条件两种。若所研究的系数是由几种不同介质组成的，则在两种介质的交界面定解条件还应当有衔接条件

1. 初始条件

（1）定义　初始条件是物理过程初始状况的数学表达式

（2）初始条件的个数　关于时间 t 的 n 阶偏微分方程，要给出 n 个初始条件才能确定一个特解。故波动方程(2.1.1)仅需给出两个初始条件即：

$$\begin{cases} u(x,y,z,t)|_{t=0} = \varphi(x,y,z) \\ u_t(x,y,z,t)|_{t=0} = \varphi(x,y,z) \end{cases} \qquad (2.1.17)$$

热传导（或扩散）方程（2.1.2），仅需给出一个初始条件，即

$$u(x,y,z;t)|_{t=0} = \varphi(x,y,z) \qquad (2.1.18)$$

而 poission 方程,无需给出任何初始条件,其中$\varphi(x,y,z)$和$\psi(x,y,z)$为已知函数

2. 边界条件

（1）定义 物理过程边界状况的数学表达式称为边界条件

（2）边界条件的种类和个数　　边界条件分为三类 ，设 f(M,t)为任一已知函数。M 为边界上的点，则三类边界条件分别为：

1. 第一类边界条件　$u|_{边}$=f(M,t)　　　(2.1.19)

2. 第二类边界条件 $\frac{\partial u}{\partial n}$|边=f(M,t)　　(2.1.20)

3. 第三类边界条件 [u+h$\frac{\partial u}{\partial n}$]边=f(M,t)（2.1.21）

其中，u|边表未知函数 u 在边界面上的值，$\frac{\partial u}{\partial n}$|边表未知函数沿边界外法向的导数在边界上的值，h 为任意常数。

若 f=0,则以上三类边界条件分别称作第一、第二、第三类齐次边界条件，否则称为相应的非齐次边界条件

除以上三类边界条件以为，由于物理上的合理性的需要，有时还需对方程中的未知函数附加以单值、有限等限制，如

$$u(\varphi+2\pi)=u(\varphi) \qquad (2.1.22)$$

u|边$\rightarrow$有限　　（2.1.23）

等，这类附加条件称为自然边界条件

不管是何类边界条件，类似于初始条件的情况，变量 x 的二阶偏微分方程要求两个边界条件（一段点一个），而 x 的四阶偏微分方程要求四个边界条件（一段点两个）。

3．衔接条件

由不同介质组成的系统，在两种不同介质的交界处需要给定两个衔接条件，如，由两种不同材料连接而成的杆的纵振动问题，在连接点 x=x_0处，其位移和应力均应相等，于是有衔接条件。

$$\begin{cases} u_1|_{x=x_0}=u_2|_{x=x_0} \\ E_1\frac{\partial u_1}{\partial x}|_{x=x_0}=E_2\frac{\partial u_2}{\partial x}|_{x=x_0} \end{cases} \qquad (2.1.24)$$

其中，E_1和E_2分别为两种介质的杨氏模量。

更一般地来说，若在所研究的区域内出现使泛定方程失去意义的

跃变点（或线或面），则在定解条件中必须含有跃变点（或线或面）处的衔接条件。

4．三类定解问题

泛定方程与不同类型的定解条件分别构成了如下三类类型的定解问题

（1）初值问题　是由泛定方程和初始条件构成的定解问题。又叫 Cauchy 问题。

（2）边值问题　是由泛定方程和边界条件构成的定解问题。

（3）混合问题　是由泛定方程、初始条件和边界条件三者构成的一类定解问题。

三、复习思考题

1.何谓数理方程？按其描绘的物理方程，它可分为哪几类？

2.何谓定解问题？它分为哪几类？试写出一维波动方程的 Cauchy 问题的数学表示。

3.何谓定解条件？它包括哪些内容？

4.何谓边界条件？它分为哪几类？一个边界需用几个边界条件来描述？

5.用数理方程来研究物理问题需要经历哪几个步骤？

6.在静电场问题中，由介电常数分别为ε_1和ε_2的两种介质组成的系统的交界面 S 处的衔接条件有几个？应如何表示？

7.如何导出物理模型的数理方程？在推导弦的横振动方程时采用了哪些近似？由小角度近似我们得到什么结论？

8.热传导方程和扩散方程有何共同和不同之处？

第二章　行 波 法

一、基本要求

1.会导出并记住波动方程的通解。

2.掌握 d’Alembert 公式的应用及物理意义。

3.掌握行波法的解题要领并会用之求解某些定解问题。

4.掌握 Poisson 公式的应用及物理意义。

5．学会以下几种处理问题的方法：

（1）用冲量原理，将由源问题化为无源问题；

（2）用平均值方法，将三维问题化为一维问题；

（3）用叠加原理，将较复杂的线性定解问题，分解为若干个易于求解的定解问题。

二、内容提要

（一）d’Alembert 公式

对于一维波动方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}(-\infty<x<\infty,t>0) \\ u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\psi(x) \end{cases}$$

1. 方程（2.2.1）的通解为

$$u(x,t)=f_1(x+at)+f_2(x-at)$$

其中，$f_2(x-at)$是以速度 a 沿 x 轴正向传播的正行波，而 $f_1(x+at)$ 是以速度 a 沿 x 轴负向传播的反行波。

2. 定解问题（2.2.1）～（2.2.2）的特解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\varepsilon)d\varepsilon$$

称为 d’Alembert 公式。它表明弦上的任意扰动，总是以行波的形式分别向正反两个方向以速度 a 传播出去。它在物理上是适应的。

3. 行波法

行波法始源于研究行进波。其解题要领为

（1）引入变量代换，将方程化为变量可积的形式，从而求得其通解；

（2）用定解条件确定通解中的任意函数（或常数），从而求得其特解。

由于大多偏微分方程的通解难以求得，用定解条件定任意常数或函数也绝非易事，故行波法有较大局限性，但对于研究波动问题而言，有它的特殊优点。

（二）反射波

对于一维的半无界的波动问题，我们亦可用行波法求得其解。

1. 一端固定的半无界弦的自由振动

定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}(0<x<\infty,t>0)(2.2.5) \\ u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\psi(x)(0\le x<\infty)(2.2.6) \\ u(0,t)=0(2.2.7) \end{cases}$$

的解为

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi(t\le\frac{x}{a})\\ \frac{1}{2}[\varphi(x+at)-\varphi(at-x)]+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)d\xi(t\ge\frac{x}{a})\end{cases}$$

即，当$t\le\frac{x}{a}$时，和无界区间的 d’Alembert 公式完全相同，这是因为时间短，此时端点的影响还没来得及传到 x 点；而当$t\ge\frac{x}{a}$时，与无界区间的 d’Alembert 公式不同，这表明端点的影响已传到 x 点，这种影响[即$\varphi(at-x)$]称之为反射波。在端点 x=0 处，反射波与入射波的相位相反，u(0,t)=0,即存在半波损失。

2.一端自由的半无界弦的自由振动

定解问题

$$\begin{cases}u_{tt}=u_{xx}(0<x<\infty,t>0)\\ u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\psi(x)(0\le x<\infty)\\ u_x(0,t)=0\end{cases}$$

的解为

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi(t\le\frac{x}{a})\\ \frac{1}{2}[\varphi(x+at)-\varphi(at-x)]+\frac{1}{2a}[\int_{0}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\int_{0}^{at-x}\psi(\xi)d\xi(t>\frac{x}{a})\end{cases}$$

其物理意义与公式（2.2.8）基本相同，但在端点 x=0 处没有半波损失[因为$u(0,t)\ne0$]

(三)Poisson 公式

1.平均值方法

（1）定义 $\bar{u}(r,t)=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{s^{M_0}{}_r}u(M,t)ds=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{s^{M_0}{}_r}u(M,t)d\Omega$

(2.2.13)　为函数 u(M,t)在以M_0为中心，r 为半径的球面$s_r^{m_0}$上的平均值。其中，$d\Omega=\frac{ds}{r^2}=\sin\theta d\varphi$为立体角元。

（2）显然

$$u(M_0,t_0)=\lim_{\substack{r\to 0\\ t\to 0}}\bar{u}(r,t) \qquad (2.2.14)$$

（3）由（2.2.14）式知，引入平均值概念后，求一个一维的未知函数 u(M,t)在任意一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$、任意时刻t_0的值$u(M_0,t_0)$的问题，便可转换为求一维的未知函数——平均值$\bar{u}(r,t)$的问题。这种处理问题的方法称为**平均值法**。

2.三维空间的波动问题

定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2\Delta u(-\infty<x,y,z<\infty,t>0)(2.2.15) \\ \left.\begin{aligned} &u(M,0)=\varphi(M) \\ &u_t(M,0)=\psi(M) \end{aligned}\right\}(2.2.16) \end{cases}$$

的　解　为　$u(M,t)=\frac{1}{4\pi a}[\frac{\partial}{\partial t}\iint_{s_{at}^M}\frac{\varphi(M')}{at}dS+\iint_{s_{at}^M}\frac{\varphi(M')}{at}dS]$

(2.2.17)

称为 Poisson 公式。它表明定解问题（2.2.15）～（2.2.16）的解在 M 点 t 时刻之值,由以 M 为中心 at 为半径的球面S_{at}^M上的初值$\varphi(M')$和$\psi(M')$所确定。即，初始值的影响以速度 a 在时间 t 内从球面S_{at}^M传播到 M 点的。设 d 和 D 分别为 M 与初始扰动区域最近和最远的距离，则

（1）当$t<\frac{d}{a}$时，u(M,t)=0,这表明扰动的“前锋”尚未传到；

（2）当$\frac{d}{a}<t<\frac{D}{a}$时，$u(M,t)\neq 0$这表明扰动正经过 M 点

（3）当$t>\frac{d}{a}$时，u(M,t)=0,这表明扰动的“阵尾”已经过去

（四） 纯强迫振动

1、叠加原理

设 L 为线性微分算符，则线性微分方程和线性定解条件均可表示为

Lu=f

其中，u 为单变量或多变量的未知函数，f 为已知函数或常数。

（1）若$Lu_i=f_i(i=1,2,\ldots,n),u=\sum_{i=1}^{n}c_iu_i$，则有$Lu=\sum_{i=1}^{n}c_iu_i$

（2）若$Lu_i=f_i(i=1,2,\ldots,n),u=\sum_{i=1}^{\infty}c_iu_i$，一致收敛，则有$Lu=\sum_{i=1}^{\infty}c_iu_i$，且右边的级数一致收敛。

（3）若 $Lu\left(M,M_0\right)=f(M,M_0),U=\int u(M,M_0)dM_0$ 一致收敛，则$Lu\left(M,M_0\right)=\int f(M,M_0)dM_0$，且右边的积分一致收敛。其中，$M_0$为参数。

2．冲量原理

欲求解纯强迫力 f(x,t)所引起的振动

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t)(-\infty<x<\infty,t>0)\left(2.2.18\right)\\u(x,,0)=0,u_t(x,0)=0(2.2.19)\end{cases}$$

的解 u(x,t)，只需求一系列前后相继的瞬时冲量$f(x,\tau)\Delta\tau(0<\tau<t)$所引起的振动

$$\begin{cases}v_{tt}-a^2v_{xx}=0(-\infty<x<\infty,\tau<t<\tau+\Delta\tau)(2.2.20)\\v(x,\tau)=0,v_t(x,\tau)=f(x,\tau)(2.2.21)\end{cases}$$

的解 v(x, t ; τ)即可，而

$$u(x,t)=\int_0^t v(x,t;\tau)d\tau \qquad (2.2.22)$$

这种用瞬时冲量的叠加，代替持续作用力来解决定解问题(2.2.18)～（2.2.19）的方法，称为冲量原理。

3. 纯强迫振动的解

定解问题（2.2.18）～（2.2.19）的解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(a,\tau)dad\tau \qquad (2.2.23)$$

4. 一般强迫振动的解

对于定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t)(-\infty<x<\infty,t>0)(2.2.24) \\ u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\psi(x)(2.2.25) \end{cases}$$

按照叠加原理可令其解为

$$u=u^{\mathrm{I}}+u^{\Pi} \qquad (2.2.26)$$

使 u^{I} 满足定解问题（2.2.1）～（2.2.2），u^{Π} 满足定解问题（2.2.18)～(2.2.19)，于是，由公式(2.2.4)～公式(2.2.23)

可求得其解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(a,\tau)dad\tau$$

对于其他任何的线性定解问题，均可采用类似于上面的方法，将之分解为若干个易于求解的定解问题，然后求得其他的解。

（五）有源空间波

1.推迟势

定解问题

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2\Delta u=f(M,t)(-\infty<x,y,z<\infty,t>0)(2.2.28)\\ u(M,0)=0,u_t(M,0)=0(2.2.29)\end{cases}$$

的解

$$u(M,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{T_{at}^M}\frac{[f]}{r}dv \qquad （2.2.30）$$

称为推迟势，其中，T_{at}^M 表示以 M 为中心、at 为半径的球体，而

$$[f]=f(M^{'},t-\frac{a}{r})）$$

由（2.2.30）式可看出，欲求波动问题（2.2.28）～（2.2.29）的解子 M 点处 t 时刻之值,源必须在比 t 早的时刻$\tau=t-\frac{a}{r}$时发出，即，M 点受到源的影响的时刻 i，比源发出的时刻$t-\frac{a}{r}$迟了$\frac{a}{r}$，故称之为推迟势。

2. 一般的有源空间波

由叠加原理和公式（2.2.17)、(2.2.30）易得定解问题

$$\begin{cases}u_{tt}+a^2\Delta u=f(M,t)(-\infty<x,y,z<\infty,t>0)(2.2.31)\\ u(M,0)=\varphi(M),u_t(M,0)=\varphi(M)(2.2.32)\end{cases}$$

的解为

$$u(M,t)=\frac{1}{4\pi a}[\frac{\partial}{\partial t}\iint_{s_{at}^M}\frac{\varphi(M^{'})}{at}dS+\iint_{s_{at}^M}\frac{\varphi(M^{'})}{at}dS]+\frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{T_{at}^M}\frac{[f]}{r}dv$$

(2.2.33)

三、复习思考题

1.行波法的解题要领是什么？它适合于用来求解哪一类定解问题？为什么？

第三章　分离变量法

一、基本要求

1.掌握分离变量法的精神、解题步骤和适应范围。

2.记住二阶常微分方程几类常见本征值问题的本征值和本征函数。

3．熟练的应用分离变量法求解（带有或不带有初始条件的）各类齐次定解问题，记住并会应用其中某些典型的结论。

4.会用本征函数展开法求解非齐次方程。

5.掌握将具有非齐次边界条件的定解问题化为具有齐次边界条件的定解问题来求解的方法。

6.记住在柱坐标和球坐标的中对 Helmholtz 方程、Loplace 方程分离变量分别会得到哪些方程特别是哪几个特殊函数微分方程。

二、内容提要

（一）分离变量法的精神和解题要领

1.分离变量法的精神

将未知函数按多个单元函数分开，如，令

$$u(x,y,z;t)=X(x)Y(y)Z(z)T(t)$$

从而，将偏微分方程的求解问题，化为若干个常微分方程的定解问题来求解。

2. 分离变量法的解题步骤

用分离变量法求解偏微分方程的定解问题大致分为如下四步：

（1）分离变量。即，将未知函数表示为若干个单元函数的乘积，带入齐次方程和齐次边界条件，得到相应的本征值问题和其他常微分方程。

（2）求解本征值问题。

（3）求解其他常微分方程，并将求得的解与本征函数相乘，得到一系列含有任意常数的分离解（如，$u_n, n=1,2,\ldots$）

（4）叠加（如，令$u=\sum_n u_n$），用初始条件或非齐次的边界条件确定系数（即任意常数），从而得偏微分方程定解问题的解。

3. 本征值问题

在用分离变量法求解偏微分方程的定解问题时，会得到含有参数的齐次常微分方程和齐次边界条件（或自然边界条件）组成的定解问题，这类问题中的参数，必须根据附有的边界条件取某些特定的值才能使方程有非零解。这样的参数，被称为本征值，相应的方程的解，被称为**本征函数**，求解这类本征值和相应的本征函数的问题，被称为**本征值问题**。

求解本征值问题，是分离变量法的关键。用分离变量法求解物理上三类典型方程的定解问题时，常会涉及到以下几种本征值问题：

$$(1)\begin{cases} X''(x)-\mu X(x)=0 \\ X(0)=0, X(l)=0 \end{cases}$$

本征值 $\mu=-\frac{n^2\pi^2}{l^2}$，本征函数 $X_n(x)=C_n\sin\frac{n\pi}{l}x, (n=1,2,\ldots)$

(2) $\begin{cases} X''(x)-\mu X(x)=0 \\ X'(0)=0, X'(l)=0 \end{cases}$

本征值 $\mu=-\frac{n^2\pi^2}{l^2}$，本征函数 $X_n(x)=C_n\cos\frac{n\pi}{l}x,(n=0,1,2,\ldots)$

(3) $\begin{cases} X''(x)-\mu X(x)=0 \\ X(0)=0, X'(l)=0 \end{cases}$

本征值 $\mu=-\frac{(n+\frac{1}{2})^2}{l^2}\pi^2$，本征函数 $X_n(x)=C_n\sin\frac{n+\frac{1}{2}}{l}\pi x,(n=0,1,2,\ldots)$

（4） $\begin{cases} X''(x)-\mu X(x)=0 \\ X'(0)=0, X(l)=0 \end{cases}$

本征值 $\mu=-\frac{(n+\frac{1}{2})^2}{l^2}\pi^2$，本征函数 $X_n(x)=C_n\cos\frac{n+\frac{1}{2}}{l}\pi x,(n=0,1,2,\ldots)$

（5） $\begin{cases} \Phi''(\varphi)-\mu\Phi(\varphi)=0 \\ \Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi) \end{cases}$

本征值 $\mu=-m^2$，本征函数 $\Phi_m(\varphi)=A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi,(m=0,1,2,\ldots)$

4. 有界弦的自由振动的解

定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx},0<x<t,t>0(2.3.1) \\ u(0,t)=0,u(l,t)=0(2.3.2) \\ u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\psi(x)(2.3.3) \end{cases}$$

的解为

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}[A_n\cos\frac{n\pi a}{a}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{a}t]\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (2.3.4)$$

其中，

$$\begin{cases} A_n = \dfrac{2}{l}\int_0^l \varphi(\alpha)\sin\dfrac{n\pi\alpha}{l}d\alpha \\ B_n = \dfrac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(\alpha)\sin\dfrac{n\pi\alpha}{l}d\alpha \end{cases} \quad (2.3.5)$$

若如图 2.18 所示，令 $A_n = N_n\cos\delta_n, B_n = N_n\sin\delta_n$, 而记 $\omega_n = \dfrac{n\pi a}{l}$，则(2.3.4)式可重新表示为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} N_n \cos(\omega_n t - \delta_n)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

这表明有界弦的振动是一系列以不同的固有频率 ω_n、不同的初相位 δ_n、不同的振幅 $N_n\sin\dfrac{n\pi}{l}x$ 振动的简谐振动

$$u_n(x,t) = N_n\cos(\omega_n t - \delta_n) \quad (2.3.6)$$

的叠加。

（二）非齐次方程的求解——本征函数展开法

对于齐次方程的定解问题，我们可用冲量原理或本征函数展开法进行求解。前者已在上章中作过陈述，现以有界弦的纯强迫振动

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), 0 < x < t, t > 0 (2.3.7) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 (2.3.8) \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 (2.3.9) \end{cases}$$

为例，来说明本征函数展开法。

1. 解题思想

通过引入按本征函数展开的试探解，将非齐次的偏微分方程定解问题的求解。

2. 解题步骤

（1）将未知函数和非齐次项按对应的齐次问题的本征函数展开，其展开系数为变量 t（或另一变量）的函数，代入非齐次方程和

初始条件（或另一变量的边界条件）得到变量 t（或另一变量）的非齐次常微分方程的初值（或边值）问题。

如，对于定解问题（2.3.7）～（2.3.9），应该令

$$\begin{cases} u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}(2.3.10) \\ f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}(2.3.11) \end{cases}$$

代入（2.3.7）和（2.3.9）式得

$$\begin{cases} T_n^{''}(t)+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n(t)=f_n(t)(2.3.12) \\ T_n(0)=0,T_n^{'}(0)=0(2.3.13) \end{cases}$$

其中，$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\alpha,t)\sin\frac{n\pi\alpha}{\alpha}d\alpha$　　（2.3.14）

（2）用常数变易法或 Laplace 变换法（见本篇下章）求解非齐次方程的初值（边值）问题，并将求得的解代入未知函数的展开式中，即得原定解问题的解。如，用 Laplace 变换法易于求得定解问题（2.3.12）～（2.3.14）的解为

$$T_n(t)=\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)d\tau \quad (2.3.15)$$

代入展开式（2.3.10），于是得有界弦的纯强迫振动的解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)d\tau]\sin\frac{n\pi x}{l} \quad (2.3.16)$$

当然，对于其他类似的非齐次方程的定解问题，如

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=f(x,y),0<x<a,0<y<b(2.3.17) \\ u(0,y)=u(a,y)=0(2.3.18) \\ u_y(x,0)=u_y(x,b)=0(2.3.19) \end{cases}$$

我们亦可用上述思想和求解步骤进行求解，只需将其中的另一变量，视为 y，而求解关于 y 的非齐次常微分方程的边值问题

即可。

3. 具有（类似）非零值初始条件的问题的处理

若定解问题(2.3.7)～(2.3.9)具有非零值的初始条件，即(2.3.9)式变为

$$\begin{cases} u(x,0)=\varphi(x) \\ u_t(x,0)=\psi(x) \end{cases} \qquad (2.3.9)'$$

或定解问题（2.3.17）～（2.3.19）具有变量 y 的非齐次边界条件，如（2.3.19）式变为

$$\begin{cases} u_y(x,0)=h(x) \\ u_y(x,b)=g(x) \end{cases} \qquad (2.3.19)'$$

此时，将未知函数展开式代入方程和初始条件（或非齐次边界条件）得到的二阶常微分方程的初值（或边值）问题直接用常数变异法或 Laplace 变换法来求解较为麻烦，我们可用叠加原理，将之转化为两个易于求解的定解问题来求解。如，对于由（2.3.7），（2.3.8）和（2.3.9）’式组成的定解问题，我们可令

$$u(x,t)=u^{\mathrm{I}}(x,t)+u^{\Pi}(x,t)$$

且

$$\begin{cases} u_{tt}^{\mathrm{I}}=a^2u_{xx}^{\mathrm{I}} \\ u^{\mathrm{I}}(0,t)=u^{\mathrm{I}}(l,t)=0 \\ u^{\mathrm{I}}(x,0)=\varphi(x),u_t^{\mathrm{I}}(x,0)=\psi(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt}^{\Pi}=a^2u_{xx}^{\Pi}+f(x,t) \\ u^{\Pi}(0,t)=u^{\Pi}(l,t)=0 \\ u^{\Pi}(x,0)=u_t^{\Pi}(x,0)=0 \end{cases}$$

用（2.3.4）式（2.3.16）式分别求得 $u^{\mathrm{I}}(x,t)$ 和 $u^{\Pi}(x,t)$ 从而求得 u(x, t)。

（三）非齐次边界条件的处理

对于具有非齐次边界条件的一些定解问题，如

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0(2.3.20) \\ u(0,t)=g(t),u(l,t)=h(t)(2.3.21) \\ u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\psi(x)(2.3.22) \end{cases}$$

由于用分离变量法求解时，无法使边界条件实现变量分离，故必须先将边界条件齐次化。具体做法是

1. 引入新的未知函数 v(x, t)和辅助函数 w(x, t)使

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t) \qquad (2.3.23)$$

2. 适当地选择 w(x, t)，使关于 v(x, t)的定解问题的边界条件齐次化。通常选

$$w(x,t)=A(x,t)+B(x,t) \qquad (2.3.24)$$

或

$$w(x,t)=A(t)x^2+B(t)x+C(t) \qquad (2.3.25)$$

[仅当原定解问题的两个边界条件均为第二类时，才选 w(x, t)为（2.3.25）式的形式]。其中，A(t), B(t)和 C(t)由原定解问题的边界条件确定。如，对于定解问题（2.3.20）～（2.3.22），为使（2.3.23）式代入原边界条件（2.3.21）后

$$v(0,t)=g(t)-w(0,t)=0,v(l,t)=h(t)-w(l,t)=0$$

需

$$\begin{cases} w(0,t)=g(t) \\ w(l,t)=h(t) \end{cases}$$

代入（2.3.24）式知，需选 $A(t)=\dfrac{h(t)-g(t)}{l},B(t)=g(t)$即

$$w(x,t)=\frac{h(t)-g(t)}{l}x+g(t) \qquad (2.3.26)$$

即可。

3. 将原定界问题转化为具有其次边界条件的新的未知函数 v(x,t)的定解问题。如，引入辅助函数（2.3.26）后，定解问题（2.3.20）～（2.3.22）便转化为

$$\begin{cases} v_{xx}-a^2v_{xx}=-(w_{tt}-a^2w_{xx}) \\ v(0,t)=0, v(l,t)=0 \\ v(x,0)=\varphi(x)-w(x,0), v_t(x,0)=\psi(x)-w_t(x,0) \end{cases} \qquad (2.3.27)$$

4. 用本征函数展开法求解 v(x,t)的定解问题,并将求得的解与 w(x,t)相加，即得原定解问题的解。

（四） 正交曲线坐标系中的分离变量

1. 在正交曲线坐标系中的Δu的表示式

（1）在柱坐标(ρ,φ,z)系中

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad (2.3.28)$$

（2）在极坐标(ρ,φ)系中

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} \qquad (2.3.29)$$

（3）在球坐标系(r,θ,φ)中

$$\Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} \qquad (2.3.30)$$

2. 在柱坐标系中两个重要方程的分离变量

（1） Helmholtz 方程的分离变量　在柱坐标中，Helmholtz 方程

$$\Delta u+\lambda u=0$$

即

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\lambda u=0 \qquad (2.3.31)$$

若令

$$u(\rho,\varphi,z)=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z) \qquad (2.3.32)$$

则由（2.3.31）式得

$$\begin{cases} Z''+\mu Z=0(2.3.33) \\ \Phi''+n^2\Phi=0(n=0,1,2,\ldots)(2.3.34) \\ \rho^2R''+\rho R'+[(\lambda-\mu)\rho^2-n^2]R=0(2.3.35) \end{cases}$$

其中，$\mu,n^2,(\lambda-\mu)$为分离变量过程中引入的任意常数，需跟据具体的边界条件取某些特定的值，分别称作方程（2.3.33)、(2.3.34)、(2.3.35）在给定的边界条件下的本征值，相应于不同的本征值方程的解称作本征函数。

（2）Laplace 方程的分离变量　由于 Laplace 方程

$$\Delta u=0 \qquad (2.3.36)$$

只不过是 Helmhotz 方程（2.3.31）当λ=0 的特例，故只要将(2.3.31)式分离变量后所得的三个方程中的λ取零，便可到方程（2.3.36）分离变量的结果。即，若令

$$u(\rho,\varphi,z)=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$$

则由（2.3.36）式得

$$\begin{cases} Z''+\mu Z=0(2.3.33) \\ \Phi''+n^2\Phi=0(n=0,1,2\ldots)(2.3.34) \\ \rho^2R''+\rho R'+[(-\mu)\rho^2-n^2]R=0(2.3.35)' \end{cases}$$

(3)Bessel 方程和虚宗量的 Bessel 方程

方程（2.3.35）和（2.3.35）’均为变系数方程。其中 $\lambda-\mu$ 和 $-\mu$ 的取值均可能大于、等于或小于零。

1 若 $\lambda-\mu$（或 $-\mu$）大于等于零，则记 $\lambda-\mu$（或 $-\mu$）$=k^2$（k 为实数）于是方程（2.3.35）和（2.3.35）’变为

$$\rho^2 R'' + \rho R' + \left(k^2\rho^2 - n^2\right)R = 0 \qquad (2.3.37)$$

若记 $x = k\rho, y(x) = R(\rho)$,则(2.3.37)式又可以写为

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - n^2\right)y = 0 \qquad (2.3.38)$$

方程（2.3.37）和（2.3.38）均称为 n 阶的 Bessel 方程。它是一种特殊函数微分方程。

2 若 $\lambda-\mu$（或 $-\mu$）<0，则记 $\lambda-\mu$（或 $-\mu$）$=-k^2$（k 为实数）于是方程（2.3.35）和（2.3.35）’变为

$$\rho^2 R'' + \rho R' - \left(k^2\rho^2 + n^2\right)R = 0 \qquad (2.3.39)$$

若记 $x = k\rho, y(x) = R(\rho)$,则(2.3.39)式又可以写为

$$x^2 y'' + xy' - \left(x^2 + n^2\right)y = 0 \qquad (2.3.38)$$

方程(2.3.39)和(2.3.40)均称为 n 阶虚宗量的 Bessel 方程。当然也是一种特殊函数微分方程。

Bessel 方程和虚宗量的 Bessel 方程的解，均在第三篇特殊函数中给出。

3. 在极坐标中两个重要方程的分离变量

由于极坐标是柱坐标当 Z=0 的特例，故立即可得

(1) $\Delta u + \lambda u = 0$

即

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\lambda u=0 \qquad (2.3.41)$$

若令

$$u=R(\rho)\Phi(\varphi)$$

则由（2.3.41）式得

$$\begin{cases}\Phi''+n^2\Phi=0\left(n=0,1,2,\ldots\right)(2.3.42)\\ \rho^2R''+\rho R'+[(\lambda-\mu)\rho^2-n^2]R=0(2.3.43)\end{cases}$$

(2) $\Delta u=0$

即

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0 \qquad (2.3.44)$$

若令

$$u(\rho,\varphi)=R(\rho)\Phi(\varphi)$$

则由（2.3.44）式得

$$\begin{cases}\Phi''+n^2\Phi=0\left(n=0,1,2,\ldots\right)(2.3.42)\\ \rho^2R''+\rho R'-n^2R=0(2.3.43)'\end{cases}$$

(2.3.44)是我们所熟悉的 Euler 方程，它的解，只要通过自变数变换 $t=\ln\rho$ 便可求得

4、球坐标中两个重要方程的分离变量

（1）在球坐标系中，$\Delta u+\lambda u=0$

即

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\lambda u=0 \qquad (2.3.45)$$

令

$$u=R(r)\Phi(\varphi)\Theta(\theta)$$

由（2.3.45）式得

$$\begin{cases} r^2\dfrac{d^2R}{dr^2}+2r\dfrac{dR}{dr}+\left[k^2r^2-l\left(l+1\right)\right]R=0(k^2=\lambda)(2.3.46) \\ \Phi^{''}+m^2\Phi=0(m=0,1,2,\ldots)(2.3.47) \\ \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\dfrac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left[l\left(l+1\right)-\dfrac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta=0(2.3.48) \end{cases}$$

其中，l(l+1)、m^2 是分离变量过程中引入的任意常数，需根据具体的边界条件取某些特定的值，称为本征值，相应的方程的解称为本征函数。

(2)　在球坐标中$\Delta u=0$

即

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}=0 \qquad (2.3.49)$$

令

$$u=R\left(r\right)\Phi(\varphi)\Theta\left(\theta\right)$$

由（2.3.49）式得

$$\begin{cases} r^2\dfrac{d^2R}{dr^2}+2r\dfrac{dR}{dr}+\left[k^2r^2-l\left(l+1\right)\right]R=0(2.3.50) \\ \Phi^{''}+m^2\Phi=0(m=0,1,2,\ldots)(2.3.47) \\ \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\dfrac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left[l\left(l+1\right)-\dfrac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta=0(2.3.48) \end{cases}$$

（3）缔合 Legendre 方程、Legendre 方程和球 Bessel 方程

由上已看到，在球坐标系中对$\Delta u+\lambda u=0$和$\Delta u=0$分离变量，所得到的Θ的方程和Φ的方程均是相同的。对Θ的方程（2.3.48）做变换$x=\cos\theta, y\left(x\right)=\Theta(\theta),$则由（2.3.48）式得

$$(1-x^2)y''-2xy'+[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}]y=0 \qquad (2.3.51)$$

方程（2.3.48）和（2.3.51）均称为**缔合 Legendre 方程**

若 m=0, 即问题呈轴对称则由（2.3.48）式得

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+l(l+1)\Theta=0 \qquad (2.3.52)$$

由（2.3.51）式得

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+l(l+1)y=0 \qquad (2.3.53)$$

方程（2.3.52）和（2.3.53）均称为**Legendre 方程**

Δu=0 分离变量后得到的 R(r)的方程(2.3.50)又是一Euler方程，故仍可通过做 Euler 变换$t=\ln r$来求解

而Δu+λu=0 分离变量后所得到的 R(r)的方程（2.3.46）是一种我们未曾见过的变系数方程。作变换 x=kr, $\frac{1}{\sqrt{x}}y(x)=R(r)$, 则（2.3.46）式变为

$$x^2y''+xy'+[x^2-(l+\frac{1}{2})^2]y=0 \qquad (2.3.54)$$

方程（2.3.46）和（2.3.54）均称为**球 Bessel 方程**

缔合 Legendre 方程、Legendre 方程和球 Bessel 方程均是特殊函数微分方程。他们的解在第三篇中给出。

(五)本章常用到的常微分方程的公式

1、一阶常微分方程

$$y'(x)+p(x)y=q(x) \qquad (2.3.55)$$

的通解为

$$y(x)=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{p(x)dx}dx+C\right) \qquad (2.3.56)$$

2、二阶常系数齐次常微分方程

$$y''(x)+py'(x)+qy=0 \quad （2.3.57）$$

的特征方程为

$$r^2+pr+q=0$$

设其特征根为$r_1.r_2$则（2.3.57）的通解由下给出：

（1）$r_1\neq r_2$（实跟）

$$y(x)=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x} \quad (2.3.58)$$

(2) $r_1=r_2=r$ (实跟)

$$y(x)=(C_1+C_2)e^{rx} \quad （2.3.59）$$

（3）$r_1=a+ib, r_2=a-ib$（a, b 为实数）

$$y(x)=e^{ax}(C_1\cos bx+C_2\sin bx) \quad （2.3.60）$$

3、二阶非齐次常微分方程

$$y''(x)+p(x)y'(x)+Q(x)y(x)=f(x) \quad （2.3.61）$$

若所对应的齐次方程有二线性无关的解y_1和y_2，则(2.3.61)的通解

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\overline{y} \quad （2.3.62）$$

其中$\overline{y}$为（2.6.61）的特解，由常数变异法可得

$$\overline{y}=v_1y_1+v_2y_2 \quad （2.6.63）$$

而v_1v_2由下列方程所决定：

$$\begin{cases} v_1'(x)y_1(x)+v_2'(x)y_2(x)=0 \\ v_1'(x)y_1'(x)+v_2'(x)y_2'(x)=f(x) \end{cases} \quad （2.3.64）$$

三、复习思考题

1、 分离变量法的背景是什么？为什么能将未知函数表示为单元函数的乘积？

2、 分离变量法适于求解哪些定解问题？能用分离变量法求解无界问题吗？

3、 分离变量法有哪几个求解步骤？其中最关键的哪一步？

4、 何谓本征值问题？以下两个定解问题是否构成本征值问题？

（1）$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t) \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=t} = g(t) \end{cases}$

由边界条件（6）和（7），进而可设

$$w(\rho,\varphi) = C_0 + (C_2\rho^2 + F_2\rho^{-2})\cos 2\varphi \qquad (9)$$

将（6）、（7）分别代入（9）式，分别得

$$C_0 + (C_2a^2 + F_2a^{-2})\cos 2\varphi = 1 - a^4\cos 2\varphi$$

$$(2C_2b - 2F_2b^{-3})\cos 2\varphi = -4b^3\cos 2\varphi$$

故有

$$C_0 = 1, \begin{cases} C_2a^2 + F_2a^{-2} = -a^4 \\ 2C_2b - 2F_2b^{-3} = -4b^3 \end{cases} \qquad (10)$$

解方程组（10）得

$$C_2 = -\frac{a^6 + 2b^6}{a^4 + b^4}, F_2 = \frac{-a^4b^4(a^2 - 2b^2)}{a^4 + b^4}$$

代入（9）式，从而有

$$w(\rho,\varphi) = 1 - [\frac{a^6 + 2b^6}{a^4 + b^4}\rho^2 + \frac{a^4b^4(a^2 - 2b^2)}{a^4 + b^4}\rho^{-2}]\cos 2\varphi$$

于是有

$$u(\rho,\varphi) = v + w = 1 + [\rho^4 - \frac{a^6 + 2b^6}{a^4 + b^4}\rho^2 - \frac{a^4b^4(a^2 - 2b^2)}{a^4 + b^4}\rho^{-2}]\cos 2\varphi$$

第四章　积分变换法

一、基本要求

1.掌握Fourier变换的定义及Laplace变换的定义、存在条件及函数正、反变换的求法。

2.掌握并会应用Fourier变换和Laplace变换的主要性质。

3.学会正确使用积分变换表。

4.掌握用积分变换法求解数理方程的主要精神及一般步骤。重点掌握用Fourier变换法求解无界域中偏微分方程的定解问题和用Laplace变换法求解常微分方程及方程组的初值问题。

二、内容提要

(一)积分变换法

1.积分变换

所谓积分变换，就是把某函数类 A 中的函数 f(x)，经过某种可逆的积分手续

$$F(p)=\int k(x,p)f(x)dx$$

变成另一类函数B中的函数F（p）.其中，F（p）称为f(x)的像函数，f(x)称为原函数，而k(x,p)是p和x的已知函数，称为积分变换核。

2. 积分变换法

对偏微分方程（常微分方程、积分方程）的定解问题中的各项施行积分变换，从而将偏微分方程（常微分方程和积分方程）的求解问题转化为常微分方程（代数方程）的求解问题的方法称之为积分变换法。其中，对各项施行Fourier变换的方法，称为Fourier变换法；而对

各项均施行Laplace变换的方法，称之为Laplace变换法。

Fourier 变换法和 Laplace 变换法是两种常用于求解数理方程的积分变换法。前者多用于求解没有初始条件的无界或半无界问题，而后者多用于求解常微分方程的初值问题。

3．积分变换法的解题步骤

用积分变换法求解数理方程（这里也包括常微分方程和积分方程）大体分为如下三步：

（1）对方程和定界条件中的各项（对某个适当的变量）取变换，得到像函数的常微分方程的定解问题或代数方程。

（2）求解常微分方程的定解问题或代数方程，得到像函数。

（3）求像函数的逆，即得原定解问题的解。

4.用积分变换法求解数理方程时常用到的积分公式

（1）$\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\cos bx dx=\frac{1}{2}e^{-\frac{b^2}{4a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}(a>0)$ （2.4.1）

（2）$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ （2.4.2）

（3）$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}(a>0)$ （2.4.3）

(4) $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$ (2.4.4)

(5) $\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt=\Gamma(x),x>0$ (2.4.5)

(二) Fourier 变换

1、定义

设函数 f(x)在$(-\infty,\infty)$上连续、分段光滑且绝对可积，则称函数

$$G(w)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx \qquad (2.4.6)$$

为函数 f(x)的 Fourier 变换，记作$F\left[f(x)\right]=G(\omega)$, 而称函数

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{i\omega x}d\omega \qquad (2.4.7)$$

为$G(\omega)$的 Fourier 变换，记作$F^{-1}[G(\omega)]=f(x)$

显然

$$F^{-1}F[f(x)]=f(x)$$

类似的，称函数

$$G(w)=\iiint_{-\infty} f(r)e^{-iwr}dr \qquad (2.4.8)$$

即

$$G(\omega_1,\omega_2,\omega_3)=\iiint f(x,y,z)e^{-i(w_1x+w_2y+w_3z)}dxdydz \qquad (2.4.9)$$

为函数 f(r)即 f(x,y,z)的 Fourier 变换，而称函数

$$f(r)=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty} G(\omega)e^{iwr}d\omega \qquad (2.4.10)$$

即

$$f(x,y,z)=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint G(\omega_1,\omega_2,\omega_3)e^{i(w_1x+w_2y+w_3z)}dxdydz \qquad (2.4.11)$$

为函数$G(\omega)$即$G(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$的 Fourier 逆变换，其中

$$\omega=i\omega_1+j\omega_2+k\omega_3, r=ix+jy+kz$$

而 i、j、k 分别为 Descarfes 坐标系中沿 x,y,z 轴的单位向量

$G(\omega)$和$G(\omega)$又分别称作 f(x)和 f(r)的像函数;而 f(x)和 f(r)又分别称作$G(\omega)$和$G(\omega)$的原函数。

2、性质

若记$F\left[f(x)\right]=G(\omega)$，则有

（1）线性性质

$$F\left[\alpha f_1+\beta f_2\right]=\alpha F\left[f_1\right]+\beta F\left[f_2\right] \qquad （2.4.12）$$

（2）延迟性质

$$F\left[f(x-x_0)\right]=e^{-i\omega x_0}F(f(x)) \qquad （2.4.13）$$

（3）位移性质

$$F\left(e^{iw_0x}f(x)\right)=G(\omega-\omega_0) \qquad （2.4.14）$$

（4）相似性质

$$F\left[f(ax)\right]=\frac{1}{|a|}G\left(\frac{\omega}{a}\right) \qquad （2.4.15）$$

（5）微分性质　若当$|x\to\infty|$时，$f^{(n+1)}(x)\to 0, n=1,2,\ldots$则

$$F\left[f^{(n)}(x)\right]=(i\omega)^n F\left[f(x)\right] \qquad （2.4.16）$$

(6)积分性质

$$F\left[\int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi\right]=\frac{1}{i\omega}F\left[f(x)\right] \qquad （2.4.17）$$

（7）卷积性质

$$F\left[f_1(x)*f_2(x)\right]=F\left[f_1(x)\right]\cdot F\left[f_2(x)\right] \qquad （2.4.18）$$

$$F\left[f_1(x)\cdot f_2(x)\right]=\frac{1}{2\pi}F\left[f_1(x)\right]*F\left[f_2(x)\right] \qquad （2.4.19）$$

其中，$\alpha,\beta;\omega_0;x_0;a$均为常数（a≠0）;而

$$f_1(x)*f_2(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)f_2(x-\xi)d\xi \qquad （2.4.20）$$

定义为函数$f_1(x)$和$f_2(x)$的卷积。

3、一些常用函数的 Fourier 变换

表 2.4.1　Fourier 变换简表

原函数	像函数
$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)e^{i\omega x}d\omega$	$G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$
$\frac{\sin ax}{x}$	$\pi,\|\omega\|\le a$ 0, $\|\omega\|>a$
$e^{i\beta x}(a<x<b)$ $0\,(x<a$ 或 $x>b)$	$\frac{i}{\beta-\omega}\left[e^{ia(\beta-\omega)}-e^{ib(\beta-\omega)}\right]$
$e^{-cx+i\beta x}(x>0)$ $0\quad(x<0)$	$\frac{i}{\beta-\omega+ic}$
$e^{-\eta x^2}(\mathrm{Re}\,\eta>0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{\eta}}e^{-\frac{\omega^2}{4\eta}}$
$\cos\eta x^2$	$\sqrt{\frac{\pi}{\eta}}\cos\left(\frac{\omega^2}{4\eta}-\frac{\pi}{4}\right)$
$\sin\eta x^2$	$-\sqrt{\frac{\pi}{\eta}}\sin\left(\frac{\omega^2}{4\eta}-\frac{\pi}{4}\right)$
$\|x\|^{-s}(0<\mathrm{Re}\,s<1)$	$\frac{2}{\|\omega\|^{1-s}}\Gamma(1-s)\sin\frac{1}{2}\pi s$
$\frac{1}{\|x\|}$	$\frac{\sqrt{2\pi}}{\|\omega\|}$
$e^{-a\|x\|}$	$\frac{2a}{\omega^2+a^2}$
$\frac{1}{x^2+a^2},a>0$	$\frac{\pi}{a}e^{-a\|\omega\|}$
$\begin{cases}e^{-ax},x\ge0,\\0,x<0,\end{cases}a>0$	$\frac{1}{a+i\omega}$

$\dfrac{e^{\pi x}}{\left(1+e^{\pi x}\right)^2}$	$\pi^2\dfrac{\omega}{sh\omega}$
$\ln\dfrac{x^2+a^2}{x^2+b^2},a,b\ge 0$	$\dfrac{2\pi}{\lvert\omega\rvert}\left(e^{b\lvert\omega\rvert-a\lvert\omega\rvert}\right)$
$e^{-\frac{x^2}{4a^2}},a>0$	$2a\sqrt{\pi}e^{-a^2\omega^2}$
$\arctan\dfrac{x}{a},a>0$	$i2\dfrac{e^{-a\lvert\omega\rvert}}{\omega}$
$\delta\left(x-x_0\right)$	$e^{-i\omega x_0}$

利用 Fourier 变换（和反变换）的定义、性质和表 2.4.1，采取前面所述用积分变换法解数理方程的三大步骤，便可用 Fourier 变换法求解相关的定解问题（见后面的例题分析）。

（三）Laplace 变换

1. 定义

设函数 $f(t)$ 满足以下条件：

（1） 当 $t<0$ 时，$f(t)=0$；

（2） 当 $t\ge 0$ 时，$f(t)$ 及 $f'(t)$ 除去有限个第一类间断点以外，处处连续；

（3） 当 $t\to\infty$ 时，存在常数 M 及 $\beta_0\ge 0$，使得

$$\left|f(t)\right|\le Me^{\beta_0 t},0<t<\infty$$

则称函数

$$F(p)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt \qquad (2.4.21)$$

为函数 $f(t)$ 的 Laplace **变换**，并记作 $L[f(t)]=F(p)$,而称函数

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(p)e^{pt}dp \qquad (2.4.22)$$

为函数 $F(p)$ 的 Laplace **逆变换，**并记作 $L^{-1}[F(p)]=f(t)$。

$F(p)$ 和 $f(t)$ 又分别互称为**像函数**和**原函数。**

显然 $$L^{-1}L[f(t)]=f(t)$$

2．性质

若记 $L[f(t)]=F(p)$，则有

（1）线性性质

$$L[\alpha f_1+\beta f_2]=\alpha L[f_1]+\beta L[f_2] \qquad (2.4.23)$$

（2）延迟性质

$$L\left[e^{p_0 t}f(t)\right]=F(p-p_0),\mathrm{Re}(p-p_0)>\beta_0 \qquad (2.4.24)$$

（3）位移性质

$$L[f(t-\tau)]=e^{-p\tau}F(p) \qquad (2.4.25)$$

（4）相似性质

$$L\left[f(at)\right]=\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right) \tag{2.4.26}$$

（5）微分性质

$$L\left[f^{(n)}(t)\right]=p^nL\left[f(t)\right]-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0) \tag{2.4.27}$$

（6）积分性质

$$L\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]=\frac{1}{p}L\left[f(t)\right] \tag{2.4.28}$$

（7）卷积性质

$$L\left[f_1(t)*f_2(t)\right]=L\left[f_1(t)\right]\cdot L\left[f_2(t)\right] \tag{2.4.29}$$

其中，α、β、p_0、β_0、a、τ均为常数$(a>0,\tau>0)$,而此处

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \tag{2.4.30}$$

亦称为$f_1(t)$和$f_2(t)$的**卷积。**

3．一些常用函数的 Laplace 变换

表 2.4.2　Laplace 变换简表

原函数	像函数
$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}F(p)e^{pt}dp$	$F(p)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt$

1 或 $H(t)$	$\frac{1}{p}$
t^n （n是正整数）	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$t^\alpha(\alpha>-1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{(\alpha+1)}}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{at}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\frac{a}{p}}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\alpha\sqrt{p}}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-2\alpha\sqrt{t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{\frac{\alpha^2}{p}}erf\left(\frac{\alpha}{\sqrt{p}}\right)$
$erf\left(\sqrt{at}\right)$	$\frac{\sqrt{a}}{p\sqrt{p+a}}$
$erf\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{1}{p}e^{-a\sqrt{p}}\ (a\geq 0)$
$e^t erf\left(\sqrt{t}\right)$	$\frac{1}{p+\sqrt{p}}$
$J_n(t), n>-1$	$\frac{\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^2}{\sqrt{p^2+1}}$

$t^{\nu} J_{\nu}(t), \nu > -\frac{1}{2}$	$\frac{2^{\nu}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\left(p^2+1\right)^{\nu+\frac{1}{2}}}$
$t^{\frac{n}{2}} J_n\left(2\sqrt{t}\right)$	$\frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{1}{p}}$
$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}$	$\ln \frac{p-a}{p-b}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sin \frac{1}{2t}$	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\sqrt{p}} \sin \sqrt{p}$