1 Занятие 15/02/2021: разложение регулярных функций в ряд Лорана

Регулярные функции

Под функцией комплексного переменного $w = f(z)$ будем понимать отображение множества $D \subset \mathbb{C}$ в комплексной z-плоскости в множество $f(D) = G \subset \mathbb{C}$ комплексной w-плоскости. Если записать $z = x + iy$, $w = u + iv$, то задание функции f эквивалентно определению двух вещественных функций $u(x, y)$, $v(x, y)$ вещественных переменных x и y, т. е. $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Можно доказать, что для дифференцируемости функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в точке $z = x + iy$ в комплексном смысле необходимо и достаточно, чтобы она была дифференцируема в вещественном смысле (т.е. дифференцируемы функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$) и выполнялись равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \equiv -\frac{\partial v}{\partial x},$$

которые называются соотношениями Коши-Римана.

Напомним, что функцию f, определенную на открытом множестве $D \subset \mathbb{C}$ будем называть **голоморфной (аналитической, регулярной)** в D, если она дифференцируема в комплексном смысле в каждой точке D. Будем говорить, что f голоморфна на произвольном множестве $E \subset \mathbb{C}$, если она голоморфна на некотором открытом множестве D, содержащем E.

Ряд Лорана

Пусть a — фиксированная точка комплексной плоскости, c_n — заданные комплексные числа. Тогда ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - a)^n$$

называется **рядом Лорана**. Этот ряд называется сходящимся в точке z, если в этой точке сходятся ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z - a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - a)^n}.$$

Область сходимости сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ — круг $|z-a| < R$. При $R = 0$ ряд сходится только при $z = a$, а при $R = \infty$ — во всей комплексной плоскости.

Ряд $\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-a)^n$ сходится в области $|z-a| > \rho$. Если $\rho < R$, то ряд $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ сходится в области $D = \{z \colon \rho < |z - a| < R\}$, то есть в кольце с центром в точке a, которое называется **кольцом сходимости ряда Лорана**.

Сумма ряда Лорана в области $D = \{z \colon \rho < |z - a| < R\}$ является регулярной функцией, а во всяком замкнутом кольце

$$D_1 = \{z \colon \rho < \rho_1 \le |z - a| \le R_1 < R\},$$

где $D_1 \subset D$, ряд $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - a)^n$ сходится равномерно.

Функция $f(z)$, регулярная в кольце D, представляется в этом кольце сходящимся рядом Лорана, то есть

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = R_0} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \rho < R_0 < R,$$

где окружность ориентирована положительно (обход против часовой стрелки).

Задачи для решения на практике

(1) Разложить в ряд Лорана функцию

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)(z+3)}$$

в областях регулярности $D_1 = \{z\colon |z| < 1\}$, $D_2 = \{z\colon 1 < |z| < 3\}$, $D_3 = \{z\colon |z| > 3\}$.

(2) Функция $f(z)$ разложена в ряд Лорана

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n(n+1)}{z^{2n}} - \frac{4^{n+1}}{z^{2n+1}}\right).$$

Разложить ее в ряд Лорана по степеням z в кольце, содержащем $z = 3/2$ и указать границы сходимости.

(3) Разложить в ряд Лорана в кольце с центром в $z = 0$, которому принадлежит точка $z = 3$, функцию

$$f(z) = \frac{3z^3 + 6z^2 - 8}{z^2 - 3z - 4}$$

и указать границы кольца сходимости.

(4) Разложить функцию

$$f(z) = \frac{z^2 + 2}{z(z+2i)}$$

в ряд Лорана по степеням $z - 2i$ в кольце D, которому принадлежит точка $z = 1$ и указать границы кольца сходимости.

(5) Разложить функцию

$$f(z) = \left(\frac{z^2}{2} - 2z + \frac{5}{2}\right)\cos\frac{1}{z-2}$$

в ряд Лорана по степеням $z - 2$ в кольце $D = \{z\colon 0 < |z-2| < \infty\}$.

(6) Найдите область, в которых функция

$$f(z) = x\sin x \operatorname{ch} y - y \operatorname{sh} y \cos x + i(y \sin x \operatorname{ch} y + x \operatorname{sh} y \cos x)$$

регулярна.

(7) Разложите в ряд Лорана функцию

$$f(z) = \frac{z(4+i) + 12i + 3}{z^2 + 2iz + 15} + \frac{3z(i-1) + 6}{z^2 + z(1-3i) - 3i}$$

по степеням z в кольце, которому принадлежит точка $z = 1 + 2i$ и укажите границы кольца сходимости.

Hints

(1) Воспользуйтесь представлением в виде суммы простых дробей

$$f(z) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{z+3}\right)$$

и работайте с каждым слагаемым оттдельно, используя формулу для суммы бесконечной геометрической прогрессии.

При $|z| < 1$ имеем

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

а при $|z| > 1$ имеем

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z(1-1/z)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}.$$

Аналогично при $|z| < 3$ имеем

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{z(1+3/z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}3^{n-1}}{z^n}.$$

Переходим к рассмотрению областей. В D_1 выполнено $|z| < 1$, а значит

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4}\left(1 + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right)z^n,$$

что есть ряд Тейлора для функции $f(z)$, аналогично рассматриваем D_2, D_3.

(2) Заметить, что ряд

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{z^{2n}}$$

сходится при $|z| > 1$, а ряд

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{z^{2n+1}}$$

сходится при $4/z^2 < 1$. Так как точка $z = 3/2$ содержится в кольце $1 < |z| < 2$, то нужно представить $f_2(z)$ рядом по степеням z, сходящимся в области $|z| < 2$. Так как $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = 1/(1-t)$, то

$$f_2(z) = \frac{z}{1-z^2/4},$$

откуда

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{4^n}, \quad |z| < 2,$$

что дает искомое разложение при $1 < |z| < 2$.

(3) Заметим, что

$$f(z) = 3z + 15 + \frac{57z + 52}{(z-4)(z+1)},$$

а затем представим второе слагаемое в виде суммы простых дробей

$$f(z) = 3z + 15 + \frac{56}{z-4} + \frac{1}{z+1}.$$

Функция $f(z)$ регулярна во всей комплексной плоскости с выколотыми точками $z = -1$, $z = 4$. Соответственно, ее можно разложить в ряд по степеням z в областях $|z| < 1$, $1 < |z| < 4$, $|z| > 4$. Используем формулу для суммы бесконечной геометрической прогрессии и раскладываем $56/(z-4)$ по положительным степеням z, а $1/(z+1)$ по отрицательным степеням z, полученный ряд сойдется в кольце $1 < |z| < 4$.

(4) Запишем

$$f(z) = 1 - i\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z+2i}\right).$$

Функция $f(z)$ регулярна во всей комплексной плоскости с выколотыми точками $z = 0$, $z = -2i$. Соответственно, ее можно разложить в ряд по степеням $z - 2i$ в областях $|z-2i| < 2$, $2 < |z-2i| < 4$, $|z-2i| > 4$. Делаем замену $z - 2i - t$ и используем формулу для суммы бесконечной геометрической прогрессии, полученный ряд сойдется в кольце $2 < |z-2i| < 4$.

(5) Обозначим $z - 2 = t$ и разложим косинус в ряд Тейлора

$$f(z) = \frac{1}{2}(t^2+1)\cos\frac{1}{t} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{t^{2(n-1)}(2n)!} + \frac{(-1)^n}{t^{2n}(2n)!}\right).$$

Далее преобразуя, получаем искомый ряд

$$f(z) = \frac{1}{2}(z-2)^2 + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(4n^2+6n+1)}{2(2n+2)!(z-2)^{2n}}.$$

(6) Очевидно, что координатные функции дифференцируемы (в вещественном смысле), нужно проверить условия Коши-Римана, чтобы показать, что функция регулярна в $\mathbb{C}$. Также можно выразить данную функцию как функцию от z, а именно

$$\begin{aligned} f(z) &= x\sin x \operatorname{ch} y - y \operatorname{sh} y \cos x + i(y\sin x \operatorname{ch} y + x \operatorname{sh} y \cos x) \\ &= (x+iy)(\sin x \operatorname{ch} y) + i(iy + x)(\operatorname{sh} y \cos x) \\ &= (x+iy)(\sin x \operatorname{ch} y + i \operatorname{sh} y \cos x) = z \sin z. \end{aligned}$$

(7) Как и ранее разложить каждое слагаемое в сумму элементарных дробей и исследовать отдельно каждую из дробей.

Задачи на дом

(1) Исследуйте все возможные разложения[1] функции

$$f(z) = \frac{1}{1+az}, \quad 0 \neq a \in \mathbb{C}$$

по степеням z.

(2) Исследуйте все возможные разложения функции

$$f(z) = \frac{2z^2(1-i) + z(13i+16) + 57i}{(z-i)(z+5)(z+4i)}$$

по степеням $z+1+i$.

[1]Зная нули знаменателя мы сразу можем сказать в каких кольцах и в какие ряды может быть разложена функция. Имеется ввиду рассмотрите все случаи $|z| > z_1$ и $|z| < z_2$, где z_1, z_2 — выколотые точки (нули знаменателей элементарных дробей).