# 2 Занятие 22/02/2021: особые точки

### Классификация особых точек

Пусть функция $f(z)$ регулярна в окрестности некоторой точки $a \neq \infty$, то есть в кольце $0 < |z - a| < \rho$, но не регулярна в точке $a \neq \infty$. Тогда точка $a \neq \infty$ называется **изолированной особой точкой однозначного характера** функции $f(z)$.

Бесконечно удаленная точка называется **изолированной особой точкой однозначного характера** функции $f(z)$, если эта функция регулярна в некоторой области $\rho < |z| < \infty$.

**Определение.** *Изолированная особая точка однозначного характера функции $f(z)$ называется*

1. **Устранимой особой точкой**, *если существует конечный предел*
$$\lim_{z \to a} f(z) = A;$$
2. **Полюсом**, *если существует бесконечный предел*
$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty;$$
3. **Существенно особой точкой**, *если не существует ни конечного ни бесконечного предела функции $f(z)$ в точке $a$.*

### Ряд Лорана в окрестности особой точки

Как мы уже видели, для нахождения коэффициентов $c_n$ ряда Лорана функции $f(z)$, регулярной в кольце $D = \{z\colon \rho < |z - a| < R\}$ как правило не используют общую формулу
$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = R_0} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \rho < R_0 < R,$$
где окружность ориентирована положительно (обход против часовой стрелки).

Вместо этого функцию $f(z)$ представляют в виде суммы $f_1(z) + f_2(z)$, где $f_1(z)$ регулярна в области $|z - a| < R$, а $f_2(z)$ — в области $|z - a| > \rho$. Затем функцию $f_1(z)$ раскладывают в ряд Тейлора в окрестности точки $a$, а функцию $f_2(z)$ — по оттрицательным степеням $z - a$, таким образом получая искомый ряд Лорана.

Регулярную в кольце $0 < |z-a| < \rho$ функцию $f(z)$ можно представить в этом кольце в виде сходящегося ряда Лорана
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n = f_1(z) + f_2(z),$$
где
$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - a)^n}, \quad f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n.$$

Ряды $f_1(z)$ и $f_2(z)$ называют соответственно **главной частью** и **правильной частью** ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $a$. Аналогичным образом определяются главная и правильная части для точки $\infty$. Функцию $f(z)$ называют регулярной в точке $z = \infty$, если эта функция регулярна в кольце $R < |z| < \infty$ и существует конечный предел $\lim_{z \to \infty} f(z)$.

## Устранимая особая точка

Для того чтобы изолированная особая точка $a$ (конечная или бесконечная) была устранимой, необходимо и достаточно, чтобы $f_1(z) \equiv 0$, то есть все коэффициенты главной части ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $a$ равны нулю. Если точка $z = a \neq \infty$ является устранимой особой точкой, то полагая $f(a) = \lim_{z\to a} f(z) = c_0$, получаем функцию, регулярную в точке $a$.

## Полюс

Для того чтобы изолированная особая точка $a$ (конечная или бесконечная) была полюсом, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана $f_1(z)$ в окрестности точки $a$ имела конечное число ненулевых слагаемых. Полезно рассмотреть отдельно конечную и бесконечную точки.

### Полюс в конечной точке

Точка $z = a \neq \infty$ является полюсом функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда эта функция имеет вид $f(z) = (z-a)^{-m}h(z)$, $h(a) \neq 0$, $m \in \mathbb{N}$, где $h(z)$ регулярна в точке $a$. Число $m$ называется **порядком полюса**.

Пусть $f(z) = g(z)/h(z)$, где $g(z)$, $h(z)$ регулярные в $a \neq \infty$ функции. Если $g(a) \neq 0$, а $a$ — нуль кратности $m$ функции $h(z)$, то $z = a$ — полюс порядка $m$ функции $f(z)$. Если точка $a$ является нулем функциий $g(z)$ и $h(z)$ кратности $k$ и $m$ соответственно, то при $m > k$ точка $z = a$ — полюс кратности $m - k$, а при $m \leq k$ — устранимая особая точка.

### Полюс в бесконечной точке

Точка $z = \infty$ является полюсом функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда $f(z) = z^m g(z)$, $g(\infty) \neq 0$, $m \in \mathbb{N}$. Число $m$ называется **порядком полюса**. Если $z = \infty$ — полюс функции $f(z)$, то гда порядок удовлетворяет $\lim_{z\to\infty} f(z)/z^m = \alpha \neq 0$ или же $f(z) \sim \alpha z^m$, $\alpha \neq 0$, $z \to \infty$. Порядок $m$ полюса $z = \infty$ функции $f(z)$ равен кратности нуля функции $f(1/z)$ в точке $z = 0$.

### Существенно особая точка

Для того чтобы изолированная особая точка $a$ (конечная или бесконечная) была полюсом, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана $f_1(z)$ в окрестности точки $a$ имела бесконечное число ненулевых слагаемых.

**Теорема** (Теорема Сохоцкого). *Если $a \in \overline{\mathbb{C}}$ — существенно особая точка функции $f(z)$, то для любого $A \in \overline{\mathbb{C}}$ найдется последовательность точек $z_n$, сходящаяся к точке $a$ такая, что $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A$.*

**Теорема** (Теорема Пикара). *Если $a \in \overline{\mathbb{C}}$ — существенно особая точка функции $f(z)$, то для любого $A \in \overline{\mathbb{C}}$, кроме может быть одного, уравнение $f(z) = A$ разрешимо в любой окрестности точки $a$ и имеет в ней бесконечное число решений.*

## Задачи для решения на практике

(1) Найдите все особые точки функции

$$f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$$

и определите их тип.

(2) Найдите все особые точки функции

$$f(z) = \frac{z^6}{(z+1)^2(z^2+4)}$$

и определите их тип.

(3) Найдите все особые точки функции

$$f(z) = \frac{1}{\cos(1/z)}$$

и определите их тип.

(4) Найдите главную часть $f_1(z)$ ряда Лорана в окрестности точки $a$ и определите вид особой точки для

$$f(z) = z^3 e^{1/z}, \quad a = 0.$$

(5) Найдите главную часть $f_1(z)$ ряда Лорана в окрестности точки $a$ и определите вид особой точки для

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}, \quad a = i.$$

(6) Найдите главную часть $f_1(z)$ ряда Лорана в окрестности точки $a$ и определите вид особой точки для

$$f(z) = z \cos \frac{1}{z-1}, \quad a = 1.$$

(7) Найдите все особые точки функции

$$f(z) = \frac{e^{1/(i-z)}}{1 + \sin \frac{\pi i z}{2}}.$$

и определите их тип.