Теоретическая информатика IV

22 февраля 2021

Задачи 2–4 — упражнения с лекций.

1. Доказать, что частично рекурсивны следующие функции:

   (a) Нигде не определенная функция (т.е. функция с пустой областью определения);

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} x - y, \text{если } x \geq y, \\ \text{не определена в остальных случаях;} \end{cases}$

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{y}, \text{если } y \text{ делит } x, \\ \text{не определена в остальных случаях;} \end{cases}$

   (d) Функция, определенная в конечном числе точек.

2. Пусть $(n+1)$-местные функции $f_1, \ldots, f_k$ определены с помощью *совместной рекурсии*:

   $\begin{cases} f_i(x_1, \ldots, x_n, 0) = g_i(x_1, \ldots, x_n), \\ f_i(x_1, \ldots, x_n, y+1) = h_i(x_1, \ldots, x_n, y, f_1(x_1, \ldots, x_n, y), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n, y)); \end{cases}$

   для всех $1 \leq i \leq k$.

   Доказать, что если функции $g_1, \ldots, g_k, h_1, \ldots, h_k$ примитивно рекурсивны, то функции $f_1, \ldots, f_k$ примитивно рекурсивны.

3. * Говорят, что $(n+1)$-местная функция f получается из n-местной функции g, $(n+s+1)$-местной функции h и 1-местных функций $t_1, \ldots, t_s$ *возвратной рекурсией*, если:

   $\begin{cases} f(x_1, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, \ldots, x_n), \\ f(x_1, \ldots, x_n, y+1) = h(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, t_1(y)), \ldots, f(x_1, \ldots, x_n, t_s(y))); \end{cases}$

   где $t_i(y) \leq y$ для $1 \leq i \leq s$.

   Доказать, что если функции $g, h, t_1, \ldots, t_s$ примитивно рекурсивны, то функция f примитивно рекурсивна.

4. Целью упражнения является показать, что существует всюду определенная частично рекурсивная функция, которая не является примитивно рекурсивной. Один из способов: примитивно рекурсивные функции не могут быстро расти.

   Покажем, что функция Аккермана растет быстрее всех примитивно рекурсивных функций. Определим последовательность функций $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ от одного аргумента. Положим $\alpha_0(x) = x + 1$. Определяя α_i, мы будем использовать такое обозначение: $f^{[n]}(x)$ означает $f(f(...f(x)...))$, где функция f использована n раз.

$$\alpha_i(x) = \alpha_{i-1}^{[x+2]}(x)$$

   (a) Покажите следующие свойства:

      i. $\alpha_i(x) > x$ при всех i и x;
      ii. $\alpha_i(x)$ возрастает с возрастанием x;
      iii. $\alpha_i(x)$ возрастает с возрастанием i (для каждого фиксированного x);
      iv. $\alpha_i(x) \geq \alpha_{i-1}(\alpha_{i-1}(x))$.

   (b) Пусть f примитивно рекурсивная функция n аргументов.
   Показать, что найдется k, такое что

$$f(x_1, \ldots, x_n) \leq \alpha_k(\max(x_1, \ldots, x_n))$$

   при всех $x_1, \ldots, x_n$.

   Указание: рассмотреть построение и показать свойство для каждой из базисных функций, а также для суперпозиции и рекурсии.

   (c) Показать, что функция Аккермана $f(n) = \alpha_n(n)$ растет быстрее всех примитивно рекурсивных функций.

5. Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — всюду определенная невозрастающая функция. Является ли она вычислимой?

6. Пусть S — множество таких n, что десятичная запись числа e содержит не менее n девяток подряд. Является ли S разрешимым?

7. Доказать, что бесконечное множество $A \subset \mathbb{N}$ разрешимо тогда и только тогда, когда оно является множеством значений некоторой вычислимой всюду определенной строго возрастающей функции.