Теоретическая информатика IV

15 февраля

Задачи с этого листочка — теоретический материал, который входит в программу экзамена.

1. Показать, что следующие функции являются примитивно рекурсивными:
   (a) Все нульместные всюду определенные функции;
   (b) $f(x, y) = x + y$;
   (c) $f(x, y) = x \cdot y$;
   (d) $f(x, y) = x^y$;
   (e) $\mathrm{sg}(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0; \end{cases}$
   (f) $\overline{\mathrm{sg}(x)} = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x > 0; \end{cases}$
   (g) $f(x) = x \dot{-} 1 = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x - 1, & x > 0; \end{cases}$
   (h) $f(x, y) = x \dot{-} y = \begin{cases} 0, & x \leq y, \\ x - y, & x > y; \end{cases}$
   (i) $f(x, y) = |x - y|$.
2. Доказать, что если функция $g(\overline{x}, y)$ является ч.р.ф. (п.р.ф.), то функции $f(\overline{x}, y) = \sum_{i=0}^{y} g(\overline{x}, i)$ и $h(\overline{x}, y) = \prod_{i=0}^{y} g(\overline{x}, i)$ тоже являются ч.р.ф. (п.р.ф.).
3. Доказать, что если функции g и h примитивно рекурсивны и функция f получена из g и h с помощью ограниченной минимизации, то f тоже примитивно рекурсивна.
4. Доказать, что если отношения $P(\overline{x})$ и $Q(\overline{x})$ рекурсивны (примитивно рекурсивны), то отношения $P(x) \wedge Q(x)$, $P(x) \vee Q(x)$, $\neg P(x)$, $P(x) \to Q(x)$ тоже общерекурсивны (примитивно рекурсивны).
5. Доказать, что бинарные отношения $=$, $\neq$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ являются примитивно рекурсивными.
6. Доказать, что если отношение $R(\overline{x}, i)$ общерекурсивно (примитивно рекурсивно), то отношения $\exists i \leq y R(\overline{x}, i)$, $\forall i \leq y R(\overline{x}, i)$, $\exists i < y R(\overline{x}, i)$, $\forall i < y R(\overline{x}, i)$ тоже общерекурсивны (примитивно рекурсивны).

7. Доказать, что:

   (a) Функция $[\frac{x}{y}]$, равная целой части от частного $\frac{x}{y}$, примитивно рекурсивна (по определению считаем, что $[\frac{x}{0}] = x$).

   (b) Отношение $\mathrm{Div}(x, y)$, истинное тогда и только тогда, когда x делит y, примитивно рекурсивно.

   (c) Отношение $\mathrm{Prime}(x)$, истинное тогда и только тогда, когда x — простое число, примитивно рекурсивно.

8. Показать, что следующие функции являются примитивно рекурсивными:

   (a) $f(x) = p_x$, где $p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5, \ldots$ — перечисление всех простых чисел в порядке возрастания;

   (b) $\mathrm{ex}(i, x)$, равная показателю степени p_i в каноническом разложении числа x на простые множители, является примитивно рекурсивной (здесь $\mathrm{ex}(i, 0) = 0$).

9. Канторовская функция — это примитивно рекурсивная функция

$$\pi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},$$

   определяемая как

$$\pi(x, y) := \frac{1}{2}(x + y)(x + y + 1) + y.$$

   (a) Показать, что для всякого значения z существуют единственные x, y, такие что $z = \pi(x, y)$;

   (b) Найти левые и правые обратные функции $x(z)$, $y(z)$;

   (c) Показать, что они примитивно рекурсивны.