Теоретическая информатика IV

Практика 1 марта 2021

Задачи 1, 4, 8 — теоретический материал.

1. Доказать, что для любых перечислимых множеств X и Y их пересечние и объединение перечислимы. Верно ли, что дополнение также всегда перечислимо?

2. Даны два пересекающихся перечислимых множества X и Y. Докажите, что найдутся непересекающиеся перечислимые множества $X' \subseteq X$ и $Y' \subseteq Y$, для которых $X' \cup Y' = X \cup Y$.

3. Покажите, что следующие три свойства множества X равносильны:

   (a) X можно представить в виде $A \backslash B$, где A — перечислимое множество, а B — его перечислимое подмножество;

   (b) X можно представить в виде $A \backslash B$, где A и B — перечислимые множества;

   (c) X можно представить в виде симметрической разности двух перечислимых множеств.

4. Множество $W \in \mathbb{N}^{k+1}$ называют *универсальным* для некоторого класса подмножеств $\mathbb{N}^k$, если все сечения $W_n = \{\overline{x} | \langle n, x \rangle \in W\}$ множества W принадлежат этому классу и других множеств в классе нет.

   (a) Существует ли перечислимое подмножество $\mathbb{N}^{k+1}$, универсальное для класса всех перечислимых множеств $\mathbb{N}^k$?

   (b) Существует ли разрешимое подмножество $\mathbb{N}^{k+1}$, универсальное для класса всех разрешимых множеств $\mathbb{N}^k$?

5. (a) Все сечения V_n некоторой функции V двух аргументов вычислимы. Следует ли отсюда, что функция V вычислима?

   (b) Пусть функция $V : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такова, что при любом n функции $f_n(x) = V(n, x)$ и $g_n(x) = V(x, n)$ вычислимы. Может ли функция V быть не вычислимой?

6. Пусть U — перечислимое множество пар натуральных чисел, универсальное для класса всех перечислимых множеств натуральных чисел. Докажите, что его «диагональное сечение» $K = \{x | \langle x, x \rangle \in U\}$ является перечислимым неразрешимым множеством.

7. Покажите, что всякое бесконечное перечислимое множество содержит бесконечное разрешимое подмножество.

8. Назовём множество *иммунным*, если оно бесконечно, но не содержит бесконечных перечислимых подмножеств. Перечислимое множество называют простым, если его дополнение иммунно.

   (a) Докажите, что существует простое множество.

   Указание: Построить бесконечное перечислимое множество с бесконечным дополнением, которое пересекается со всеми перечислимыми множествами.

   (b) Докажите, что бесконечное множество, не содержащее бесконечных разрешимых подмножеств, иммунно.

9. Диофантовым называется уравнение, имеющее вид $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$, где P — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что множество диофантовых уравнений, имеющих целые решения, перечислимо. (Оно неразрешимо: в этом состоит известный результат Ю.В. Матиясевича, явившийся решением знаменитой «10-й проблемы Гильберта».)

10. Может ли быть так, что множества A и B не перечислимы, а множество $A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$ перечислимо?

11. Может ли объединение счетного числа бесконечных перечислимых множеств быть неперечислимым?

12* Некоторое множество S натуральных чисел разрешимо. Разложим все числа из S на простые множители и составим множество D всех простых чисел, встречающихся в этих разложениях. Можно ли утверждать, что множество D разрешимо?