Листочек по вариационному исчислению, 2 курс МКН, «Математика»
Дедлайн: 30.04.2021, 23:59

1. **[2]** Найдите геодезическую, соединяющую точки $A = (a, y_a)$ и $B = (b, y_b)$ верхней полуплоскости в геометрии Лобачевского. Напомним, что расстояние вдоль кривой $\gamma \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, задающейся графиком функции $y = y(x)$, считается по формуле:

$$\rho_{Lob}(A, B) = \int\limits_{\gamma} \frac{ds}{y} = \int\limits_{a}^{b} \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{y(x)}\, dy =: J[y].$$

Покажите, что стационарные точки функционала длины (они были найдены на практических занятиях) дают глобальные минимумы.

Замечание: возможно как элементарное решение, так и решение, использующее вторую вариацию. Если будете использовать вторую вариацию, сформулируйте точное утверждение, которое собираетесь применять.

2. **[1]** Функция $g \in C[a, b]$ такова, что $\int_a^b g(x) h^{(k)}(x)\, dx = 0$ при всех $h \in C^k[a, b]$ таких, что

$$h(a) = h'(a) = ... = h^{(k-1)}(a) = h(b) = h'(b) = ... = h^{(k-1)}(b) = 0.$$

Докажите, что g — полином степени не выше $k - 1$.

3. **[1]** В гильбертовом пространстве l_2 со скалярным произведением $(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$ на множестве финитных последовательностей задан линейный оператор A

$$(A\vec{x})_k = kx_k, \qquad \operatorname{Dom} A = \{\vec{x} \in l_2 : \#\{k \in \mathbb{N} :\ x_k \neq 0\} < \infty\}.$$

   А) Докажите, что оператор A — симметричный

   Б) Найдите сопряженный оператор A^* (как действует и какова область определения).

4. **[2]** Неравенство Виртингера (одномерное неравенство Пуанкаре).

Докажите вариационными методами, что для $y \in C^1[0, 1]$ и некоторой константы C выполняется неравенство:

$$\int\limits_0^1 (y(x))^2\, dx \leqslant C \left(\int\limits_0^1 (y'(x))^2\, dx + \left(\int\limits_0^1 y(x)\, dx \right)^2 \right). \tag{1}$$

Найдите значение оптимальной константы C_{opt} в этом неравенстве.

Замечание: часто неравенством Пуанкаре называется следующая формулировка, которая незамедлительно следует из (1): Пусть $y \in C^1[0, 1]$ с нулевым средним, т.е. $\int_0^1 y(x)\, dx = 0$. Тогда выполнено неравенство

$$\int\limits_0^l (y(x))^2\, dx \leqslant C \int\limits_0^l (y'(x))^2\, dx.$$

5. **[2]** Предполагая функцию F достаточно гладкой, найдите общий вид функционала $J[y]$, $y \in C^1[0, l]$,

$$J[y] = \int\limits_0^l F(x, y, y')\, dx,$$

множество экстремалей которого совпадает с множеством прямых $\{y = kx + b :\ k, b \in \mathbb{R}\}$.

6. **[1]** Найдите форму однородного тела вращения вокруг оси OZ, имеющее данный объем V и наименьший момент инерции относительно оси OY.

7. **[2]** Найдите геодезические на параболоиде вращения $2z = x^2 + y^2$.

   Указание: Полезно записать функционал расстояния в подходящих координатах. В задаче требуется лишь найти критические точки этого функционала. Доказывать, что получившиеся кривые дают минимальное расстояние, не нужно.

8. **[2]** Дана выпуклая область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и точки $A, B \in \operatorname{Int}(\Omega)$. Определим следующую функцию пар точек ("кратчайшее расстояние с заходом на границу"):

$$\operatorname{dist}_\Omega(A, B) := \inf_{S \in \partial\Omega} (|AS| + |SB|),$$

   где $|AS|$ — длина отрезка, соединяющего точки A и S. Пусть нижняя грань достигается в точке $S \in \partial\Omega$. Найдите, какому геометрическому условию должна удовлетворять точка $S \in \partial\Omega$? Может ли нижняя грань достигаться в нескольких точках?

9. **[2]** Используя первую вариацию функционала $J[z]$

$$J[z] = \int |\nabla z|^2 \, dx \, dy,$$

   запишите оператор Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ в координатах

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \end{cases} \qquad (ds)^2 = a \cdot (du)^2 + 2b \cdot du \, dv + c \cdot (dv)^2$$

   где ds — элемент длины в координатах (x, y), т.е. $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$; а $a = a(u, v)$, $b = b(u, v)$, $c = c(u, v)$ — некоторые функции[1].

Организационные моменты:

- Листочек подразумевает индивидуальное решение.
- Решение задач нужно оформлять письменно с подробным объяснением всех переходов.
- Решение задач присылается **один** раз на почту yu.pe.petrova@yandex.ru.
- Важно: все решения нужно присылать **единым файлом PDF**. Для удобства стандартизируем название файла: var-N-Surname.pdf, где N — номер группы (1, 2, 3, 4 или 5), Surname — Ваша фамилия. Например, var-2-Osipov.pdf.
- Дедлайн: 30 апреля 2021, 23:59.

[1] Эти функции могут быть легко выражены через функции, задающие обратное отображение $(u, v) \mapsto (x, y)$, но в задаче требуется лишь записать лапласиан, используя a, b и c.