Определение 7. *Группы, состоящие из k элементов в каждой и отличающиеся друг от друга по крайней мере одним элементом, называются сочетаниями.*

Например, группы $\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$ и $\{2,\ 3\}$ образуют все сочетания из натуральных чисел 1, 2, 3 по два из них.

Число всех сочетаний из n элементов по k элементов в каждом обозначется C_n^k.

ТЕОРЕМА 3. *Имеет место формула*

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}, \tag{1.15}$$

т. е.

$$C_n^k = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n!}. \tag{1.16}$$

СЛЕДСТВИЕ. *Справедлива формула*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1.17}$$

Доказательство. Если в каждом сочетании из n элементов по k (их всего C_n^k) сделать всевозможные перестановки его элементов (число таких перестановок равно P_k), то получатся размещения из n элементов по k, причём таким способом получаются все размещения из n элементов по k, и притом по одному разу. Поэтому

$$C_n^k P_k = A_n^k,$$

откуда и следует формула (1.15). Формула (1.16) получается из формул (1.10), (1.14), (1.15).

Если умножить числитель и знаменатель дроби, стоящей в правой части формулы (1.16), на $(n-k)!$, то получится формула (1.17).

ТЕОРЕМА 4. *Имеет место формула*

$$C_n^k = C_n^{n-k}, k = 0, 1, 2, \ldots, n, \tag{1.18}$$

где $C_n^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$.

Доказательство. Формулу (1.18) легко получить непосредственно из определения сочетаний: если из n элементов выбрать какую-либо группу (сочетание), состоящую из k элементов, то останется группа (сочетание) из $n-k$ элементов, при этом таким способом получаются все сочетания из n элементов по $n-k$ элементов и по одному разу.
