Шестаков Михаил Сергеевич БПИ196 Вариант 28

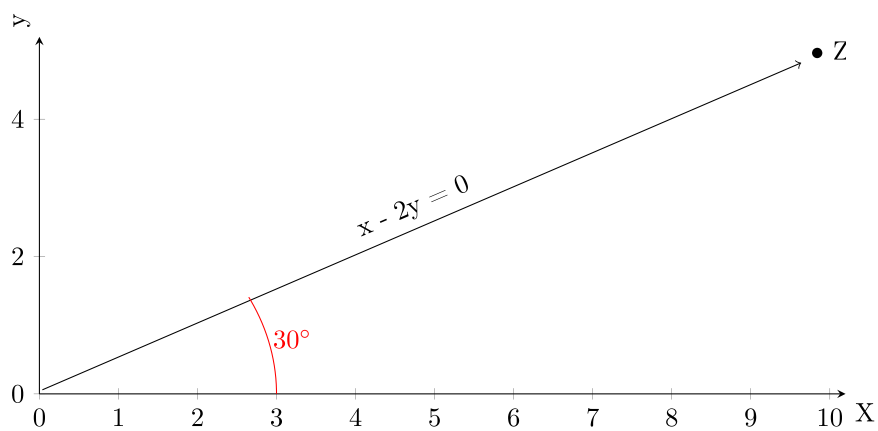
Задание 2

Задача 3

Условие: На плоскости с координатами (X, Y) *дана случайная точка, причем* $MX = 2; DX = 16; MY = 4; DY = 64; K_XY = 0$. *Определить математическое ожидание и дисперсию расстояния от начала координат до проекции точки на ось* OZ, *лежащую в плоскости* XOY *и образующую с осью* OX *угол* $\lambda = 30°$.

Решение:

Заметим, что ось Z имеет уравнение $x - 2y = 0$



Тогда уравнение перпендикулярной прямой можно получить по формуле:
$A(y - Y) - B(x - X) = 0$ (где (X, Y) - случайная точка из условия задачи)
Для прямой, задающей ось Z, уравнение примет вид:
$(y - Y) - 2 \cdot (x - X) = 0$
$-2x + y - 2X - Y = 0$
Ищем пересечение с исходной прямой:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x + y - 2X - Y = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 2y \\ -4y + y - 2X - Y = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 2y \\ -3y = 2X + Y \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 2y \\ y = -\frac{2}{3}X - \frac{1}{3}Y \end{cases}$$

Откуда расстояние до начала координат:

$dist = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(2y)^2+y^2} = \sqrt{5y^2} = \sqrt{5} * |y| = \sqrt{5} * |-\frac{2}{3}X - \frac{1}{3}Y| = \frac{\sqrt{5}}{3} * |2X+Y|$

Тут мы приходим к тому, что нам нужно посчитать математическое ожидание от модуля случайной величины. При этом про саму величину мы знаем только её математическое ожидание и дисперсию. Очевидно, что это сделать невозможно и в условии задачи недостаточно данных. Поэтому далее я буду считать, что величины X и Y были распределены равномерно.

Поскольку по условию $K_X Y = 0$, то $E(2X+Y) = E(2X) + E(Y) = 2E(X) + E(Y)$

Вспоминаем, что для равномерно распределённой величины x: $E(x) = \frac{a+b}{2}$, $D(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Тогда для X:
$E(x) = \frac{a+b}{2} = 2, D(x) = \frac{(b-a)^2}{12} = 16$
$a = 4-b,\ \ 2b-4 = 8\sqrt{3}$
$a = 2-4\sqrt{3},\ \ b = 4\sqrt{3}+2$

Аналогично для Y: $E(x) = \frac{a+b}{2} = 4, D(x) = \frac{(b-a)^2}{12} = 64$
$a = 8-b,\ \ 2b-8 = 16\sqrt{3}$
$a = 4-8\sqrt{3},\ \ b = 8\sqrt{3}+4$

Тогда математическое ожидание $E(dist) = \frac{\sqrt{5}}{3} * E(|2X+Y|) = \frac{\sqrt{5}}{3} * (S_{>0} * P_{>0} + (S_{<0}) * P_{<0}) = \frac{\sqrt{5}}{3} * (((2-4\sqrt{3})*(4-8\sqrt{3}))^2 + (1-(2-4\sqrt{3})*(4-8\sqrt{3}))^2) = ...$

$D(dist) = E(dist^2) - E(dist)^2 = \frac{5}{9} * 2X + Y^2 - ... = \frac{5}{9} * 2X + Y^2 - ... = \frac{5}{9} * 96^2 - ...$