АиСД Листок №2.
Полиномиальные сведения и NP-полные задачи

Антюх Михаил группа 176

20 октября 2018 г.

Задача 1: Дано: поле, разделенное на n грядок, каждая из которых разделена на m ячеек. Грядки отделены друг от друга стенами; между ячейками одной грядки стен нет. В некоторых ячейках стоят блюдца с молоком, в некоторых — лежат куски сыра, а в некоторых — ничего нет. Спрашивается, можно ли посадить в ячейки с молоком кошек, а в ячейки с сыром — мышек так, чтобы, для каждого $i \leq m$, $i-$ая ячейка хотя бы на одной грядке была обитаема и чтобы кошки не видели мышек (т.е. не сидели на одной грядке)? Докажите, что данная задача является NP-полной, или приведите полиномиальный алгоритм ее решения.

В начале покажем, что мы можем по сертификату за полином проверить его корректность. Пуст нам дан ответ в виде матрицы размером $n \times m$, тогда мы можем просто пройтись по каждой строке и проверить, что в текущей строке нет одновременно мышек и кошек, а также, что кошки сидят на молоке, а мышки на сыре. Также у нас для каждого столбца будет счетчик, для того, чтобы в конце проверить, что в каждом столбце кто-то обитает.

Чтобы доказать, что наша задача NP-трудная, сведем к ней известную нам NP-полную задачу - выполнимость 3-КНФ (3SAT). Пусть нам дана какая-та булева формула состоящая из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и их отрицаний. Пусть каждой переменной соответствует своя грядка, переменной x_1 первая грядка, ..., переменной x_k k-ая грядка. Каждой скобке в формуле будет соответствовать свой столбец. В ячейке ij будет лежать молоко если переменная x_i входит в j скобку, сыр если в j скобку входит отрицание x_i и пустота во всех остальных случаях. Запускаем на данном графе нашу задачу, в результате мы получим какую-то рассадку животных соответствующую всем условиям задачи, в одной грядке может сидеть животные только одного вида, если в грядке сидят кошки, то соответствующая этой грядке переменная входит во все скобки со значением true, если в грядке сидят мышки, то переменная войдет со значением false (ее отрицания во всех скобках примут значения true). Условие, что в каждом столбце должен кто-то обитать обеспечит нам в каждой скобке хотя бы одно истинное значение. А если мы получаем, что животных расставить в соответствие с условием нельзя, то и у исходной формулы нет решений.

Итог:

3-КНФ $<_p$ Кошки + Мышки

Кошки + Мышки $\in$ NP => Кошки + Мышки является NP-полной.

Задача 2: Перед роботом n ящиков, в каждом из которых находится некоторое количество бутылок с вином. Робот осматривает ящики по одному, найдя бутылку, выдает 1, закончив осмотр очередного ящика, выдает 0. Имея лог работы робота, требуется определить, можно ли выбрать набор ящиков, содержащий ровно k бутылок, не вынимая бутылки из ящиков. Докажите, что данная задача является NP-полной, или приведите полиномиальный алгоритм ее решения.

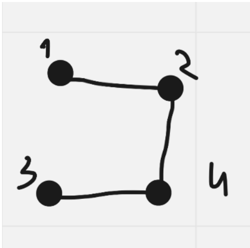
Приведем полиномиальный алгоритм решений. Построим матрицу размера $n + 1 \times k + 1$. $K(i, s) = 1$ если можно набрать s бутылок, использую $x_1, \dots, x_i$ ящик, 0 иначе. Таблицу будем заполнять по столбцам, в начале заполним первый, потом второй и так далее. $K(0, s) = 0$ для $\forall$ s. Пусть в x_i ящике m бутылок, тогда K(i, s) = 1, если $s = m$ или K(i - 1, s - m) = 1 или K(i - 1, s) = 1, в остальных случаях K(i, s) = 0. Ответом на задачу будет K(n, k). У нас n ящиков и N бутылок вина => время работы $O(nN)$.

Задача 3: Дано: ориентированный граф (V, E), две вершины v, $w \in$ V и список пар вершин этого графа $P = (v_1, w_1),\dots,(v_k, w_k)$. Спрашивается, существует ли путь в графе от v до w, проходящий не более чем через одну вершину каждой пары из P? Докажите, что эта задача является NP-полной, или приведите полиномиальный алгоритм ее решения.

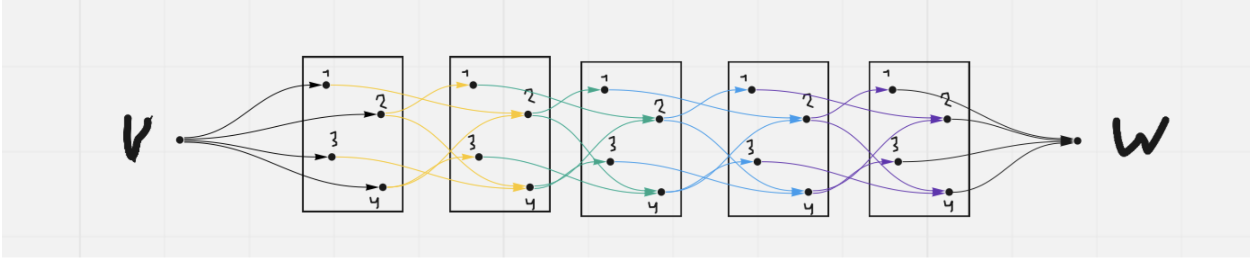
В начале покажем, что мы можем по сертификату за полином проверить его корректность. Пуст нам дан ответ в виде последовательности вершин. Очевидно, что очень легко проверить, что данная последовательность является путем, т.е. между каждой парой соседних вершин в последовательности есть ребро. Что путь начинается в u и заканчивается в w, и никакие две вершины не образуют пару в P.

Сведем задачу о наличие гамильтонова цикла в неориентированном графе к нашей задаче. Пусть нам дан какой-то неориентированный граф на n вершинах и требуется определить есть ли в нем гамильтонов цикл. Заведем две служебные вершины v, w и создадим $n + 1$ копию исходного графа, внутри каждой копии вершины не будут связаны между собой ребрами, но от вершин i копии будут идти ориентированные ребра в вершины $i + 1$ копии. Пример:

Исходный граф:



Новый граф:



Пронумеруем все вершины нового графа таким образом: a_{ij} - вершина в копии номер i соответствующая вершине номер j в исходном графе. Построим множество P, в него войдут пары такого типа: (a_{ik}, a_{jk}) для всех i,j,k ∈ {1, 2, 3, . . . , n} (i != j) и также пары (a_{ik}, a_{jk}) для всех i,j ∈ {2, 2, 3, . . . , n + 1} (i != j), k ∈ {1, 2, 3, . . . , n}. Множество таких пар обеспечит нам то, что прокладывая пусть из v в w алгоритму будет запрещено посещать конкретную вершинку графа больше одного раза (т.е. если мы посетили вершину 1 в первой копии, то в других копиях мы в нее не зайдем, за исключением n + 1 копии), а также выбирая первую вершинку он будет обязан в ней закончить. В итоге если алгоритм выдает нам, что пусть из v в w проходящий не более чем через одну вершину каждой пары из P, существует, то данный путь без вершин v и w будет гамильтоновым циклом в исходной графе, если такого пути нет, то и гамильтонов цикл в исходном графе не существует.

Update: вершина k в копии i должная быть связна ребром сама с собой в копии i+1

Задача 4: Пусть задано конечное множество S и конечный набор его подмножеств S_1, S_2,. . . , S_k. Для каждого множества S_i заданы два числа l_i и h_i. Требуется выяснить, существует ли подмножество $T \subset S$, такое что для каждого i выполняется $l_i \leq |T \cap S_i| \leq h_i$. Докажите, что эта задача является NP-полной, или приведите полиномиальный алгоритм ее решения.

В начале покажем, что мы можем по сертификату за полином проверить его корректность. Пуст нам дан ответ в виде множества T. Мы просто для каждого i проверяем какие элементы входят одновременно в T и S_i, и если их число больше или равно l_i и меньше или равно h_i, то ответ верный, если для какого-то i условия не выполняются, то ответ неверный.

Чтобы доказать, что наша задача NP-трудная, сведем к ней известную нам NP-полную задачу - выполнимость 3-КНФ (3SAT). Пусть нам дана какая-та булева формула состоящая из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и их отрицаний. Построим по ним множество S, в которое войдут все переменные из формулы и также их отрицания (даже если их нет). Теперь построим конечный набор помножеств S, у нас их будет два вида: $S_i = \{x_i, \bar{x}_i\}$, $l_i = 1$, $h_i = 1$ (такие подмножества нам обеспечат то, что в T не будет одновременно x_i и $\bar{x}_i$) и S_j, $l_j = 1$, $h_j = 3$, в S_j войдут все переменные из j скобки формулы (если в скобке есть константа 0 то в S_j войдет все кроме 0, а если есть 1, то скобку вообще не рассматриваем), такие множества обеспечат нам то, что переменная из каждой скобки будет включена в T. Теперь запускаем нашу задачу на данных условиях, и если она говорит нам, что такое множество T существует, то и булева формула разрешима, т.к в T входит как минимум одна переменная из каждой скобки, решением булевой формулы будет все переменные из T взятые со значением 1 если они вошли в T без отрицание, 0 если вошли в T с отрицанием.

Итог: наша задача $\in NP$ и 3SAT $<_p$ наша задача => наша задача NP-полная.

Задача 5: У вас есть коробка и стопка карточек, подходящих по размеру. Для каждой карточки есть два способа поместить ее в коробку: На каждой карточке есть два ряда отверстий (см. рисунок), но отверстия размещены по-разному на разных карточках. Требуется положить все карточки в коробку так, чтобы дна не было видно (т.е. чтобы не было «сквозного» отверстия, проходящего через всю стопку карточек).Докажите, что данная задача является NP-полной, или приведите полиномиальный алгоритм ее решения. (Можно считать, что каждая карточка задается, например, булевой матрицей размера $n \times 2$,в которой нули соответствуют отверстиям.)

В начале покажем, что наша задача $\in$ NP. Пусть нам уже даны карточки, с нужной ориентацией в виде матриц, у нас будет дополнительный массив (полностью дырявый) в котором мы будем закрывать те дырки, которые закрывает текущая карточка которую мы вытаскиваем из коробки. В результате в конце наш доп. массив в случае если ответ был верный будет без дырок.

Чтобы доказать, что наша задача NP-трудная, сведем к ней известную нам NP-полную задачу - выполнимость 3-КНФ (3SAT). Пусть нам дана какая-та булева формула состоящая из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и их отрицаний. Для каждой переменной x_i мы заводим карточку c_i. На каждой карточке у нас будет два столбца и k строк, где k - число скобок в формуле. Если переменная x_i входит в j скобку без отрицания, то в c_i на позиции j1 не будет дырки, если переменная x_i входит в j скобку с отрицанием, то в c_i на позиции j2 не будет дырки, во всех остальных случаях будут дырки. Также создадим служебную карточку у которой в левой части будут дырки, а в правой не будет. Теперь запускаем данный алгоритм на наших карточках, очевидно, что нет разницы в каком порядке класть карты, пусть наша служебная карта будет на дне, алгоритм должен будет закрыть с помощью имеющихся n карточек k дырок на левой стороне служебной карточки, каждая из k дырок символизирует собой значение скобки из формулы, если k-ая дырка закрыта, то это равносильно тому, что k-ая скобка истина. Пусть переменная x_i принимает истинное значение если c_i карта вошла в коробку не перевернутая, и ложное иначе (в случае если наша карта в перевернутом виде закрывает дырку, то это значит в скобке это переменная была с отрицанием и подставив в нее 0 мы получим 1).

Итог: наша задача $\in NP$ и 3SAT $<_p$ наша задача => наша задача NP-полная.