

3.2.4. Свободные колебания в электрическом контуре.

Баранов Михаил

Цель работы

Исследование свободных колебаний в электрическом контуре.

В работе используются

Генератор импульсов, электронное реле, магазин сопротивлений, магазин емкостей, катушка индуктивности, электронный осциллограф, универсальный измерительный мост.

Теория

Свободные колебания

Рассмотрим электрический контур, состоящий из последовательно соединённых конденсатора C , катушки индуктивности L и резистора R . Обозначим разность потенциалов на конденсаторе U_C , а ток, текущий в контуре, через I . Второе правило Кирхгофа:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0. \quad (1)$$

Вводя обозначения $\gamma = \frac{R}{2L}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, получим уравнение

$$\ddot{I} + 2\gamma \dot{I} + \omega_0^2 I = 0. \quad (2)$$

Его решение в общем виде:

$$I = -\frac{U_0}{L\kappa} e^{-\gamma t} \text{sh}(\kappa t), \quad (3)$$

где $\kappa = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$, $U_0 = U_C$ – начальное напряжение на конденсаторе.

Затухающие колебания

В случае, когда $\gamma < \omega_0$, имеем $\kappa = i\omega$, где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ – частоты свободных (собственных) колебаний. Тогда ток

$$I = -\frac{U_0}{L\omega} e^{-\gamma t} \sin(\omega t) \quad (4)$$

затухает и имеет колебательный характер. Величина γ определяет затухание колебаний: $\gamma = \frac{1}{\tau}$, где τ – время затухание амплитуды в e раз. Формулы для нарядение на конденсаторе и тока в цепи можно переписать иначе:

$$\begin{aligned} U_C &= U_0 \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\gamma t} \cos(\omega t - \theta), \\ I &= -\frac{U_0}{L} e^{-\gamma t} \cos(\omega t - \theta). \end{aligned} \quad (5)$$

Апериодические колебания

В случае $\gamma > \omega_0$, формулы для тока и напряжения на конденсаторе имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} I &= -\frac{U_0}{L\kappa} e^{-\gamma t} \text{sh}(\kappa t), \\ U_C &= U_0 e^{-\gamma t} \left(\frac{\gamma}{\kappa} \text{sh}(\kappa t) + \text{ch}(\kappa t) \right). \end{aligned}$$

Процесс в этом случае не является колебательным, его называют апериодическим. Режим, соответствующий $\gamma = \omega_0$, называются *критическим*. В этом случае предельный переход $\omega \rightarrow 0$ в (5) даст

$$\begin{aligned} I &= -\frac{U_0}{L} t e^{-\gamma t}, \\ U_C &= U_0 e^{-\gamma t} (1 + \gamma t). \end{aligned}$$

Сопротивление в этом случае

$$R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (6)$$

называется *критическим сопротивлением* контура.

Добротность контура по определению

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W},$$

где W – запасённая энергия, ΔW – потери за период. Тогда

$$Q = 2\pi \frac{CU_0^2/2 \cdot e^{-2\gamma t}}{CU_0^2/2 \cdot (e^{-2\gamma t} - e^{-2\gamma(T+t)})} = \frac{\pi}{\gamma T} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Логарифмическим декрементом затухания называются число

$$\Theta = \ln \frac{U_k}{U_{k+1}} = \ln e^{\gamma T} = \gamma T$$

или

$$\Theta = \frac{1}{n} \ln \frac{U_k}{U_{k+n}}.$$

Установка

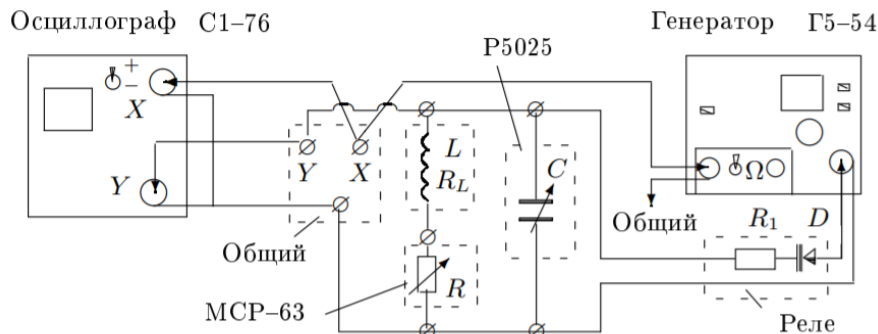


Рис. 1: Схема установки

На рисунке приведена схема для исследования свободных колебаний в контуре, содержащем постоянную индуктивность L и переменные ёмкость C и сопротивление R . Колебания наблюдаются на экране осциллографа.

Для периодического возбуждения колебаний в контуре используется генератор импульсов Г5-54. С выхода генератора по коаксиальному кабелю импульсы поступают на колебательный контур через электронное реле, смонтированное в отдельном блоке (или на выходе генератора). Реле содержит тиристор D и ограничительный резистор R_1 .

Импульсы заряжают конденсатор C . После каждого импульса генератор отключается от колебательного контура, и в контуре возникают свободные затухающие колебания. Входное сопротивление осциллографа велико (≈ 1 МОм), так что его влиянием на контур можно пренебречь. Для получения устойчивой картины затухающих колебаний используется режим ждущей развёртки с синхронизацией внешними импульсами, поступающими с выхода «синхроимпульсы» генератора.

Ход работы

Прежде всего измерим индуктивность L и сопротивление катушки R_L в зависимости от частоты

ν , Гц	L , мГн	R_L , Ом
50	200,4	11,1
1000	200,1	18,8
5000	200,4	41,2

Таблица 1: Некоторые параметры катушки индуктивности

В итоге мы получаем, что $L = 200 \pm 0,2$ мГн.

Измерение периодов свободных колебаний

Установим на магазине сопротивлений $R = 0$ Ом и $C = 0,02$ мкФ. Подбрав частоту развертки получим изображение наших колебаний на осциллографе. Из этого убедимся, что частота повторений, которую мы установили на генераторе ($\nu_0 = 100$ Гц) будет равна частоте повторения импульсов.

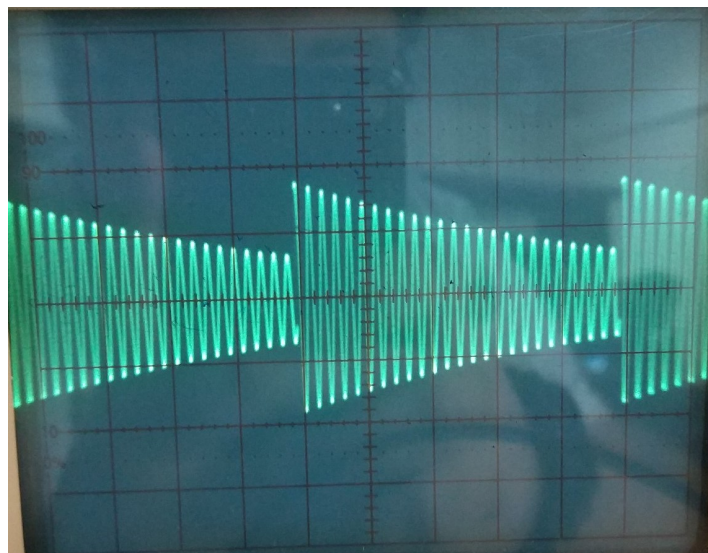


Рис. 2: Колебания в контуре

Теперь изменяя ёмкость в диапазоне $0,02 - 0,09$ мкФ проведем измерения периодов свободных колебаний и сравним их с теоретическими данными по формуле

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

C, нФ	t, мс	σ_t , мс	N периодов	T_{prac} , мс	T_{theor} , мс	σ_T , мс
20	5,0	0,3	12	0,42	0,40	0,03
25	5,0	0,3	11	0,45	0,44	0,03
30	5,0	0,3	10	0,50	0,49	0,03
35	5,0	0,3	9,25	0,54	0,53	0,03
40	5,0	0,3	8,75	0,57	0,56	0,03
45	5,0	0,3	8,25	0,61	0,60	0,04
50	5,0	0,3	7,75	0,65	0,63	0,04
55	5,0	0,3	7,5	0,67	0,66	0,04
60	5,0	0,3	7,25	0,69	0,69	0,04
70	5,0	0,3	6,5	0,77	0,74	0,05

Таблица 2: Таблица данных измерения периода свободных колебаний и сравнение с теорией

Видим, что теория очень хорошо сходится с экспериментом.

Измерение критического сопротивления и декремента затухания

Для начала рассчитаем емкость, при которой частота собственных колебаний контура будет равна $\nu_0 = 5$ кГц.

$$C = \frac{1}{4\pi^2\nu_0^2 L} \approx 5 \text{ нФ}$$

И для значений L и C рассчитаем R_{crit}

$$R_{crit} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{C}} \approx 12,6 \text{ кОм}$$

Для этих значений L и C рассчитаем декремент затухания для каждого сопротивления из интервала $(0, 1 - 0,3)R_{crit}$. Из этих данных по формуле

$$R_{crit} = R_{\Sigma} \sqrt{\left[\frac{2\pi}{\theta}\right]^2 + 1}$$

находим R_{crit} запишем все в таблицу.

R, Ом	U_1 , дел	σ_{U_1} , дел	U_2 , дел	σ_{U_2} , дел	θ	σ_{θ}	R_{crit} , Ом	$\sigma_{R_{crit}}$, Ом
1200	4	0,2	2,1	0,2	0,64	0,07	11800	1000
1500	4	0,2	1,8	0,2	0,80	0,10	11900	1300
1800	4	0,2	1,6	0,2	0,92	0,12	12500	1600
2100	4	0,2	1,3	0,2	1,1	0,2	11900	1400
2400	4	0,2	1,1	0,2	1,3	0,2	11900	1300
2700	4	0,2	1	0,2	1,4	0,3	12500	1000
3000	4	0,2	0,8	0,2	1,6	0,4	12000	1300
3300	4	0,2	0,7	0,2	1,7	0,5	12300	1600

Таблица 3: Таблица измерения R_{crit}

В итоге мы получаем, что $R_{crit} = (12,1 \pm 1,8)$ кОм.

Так же мы можем получить R_{crit} просто подбором, добиваясь подобной картины

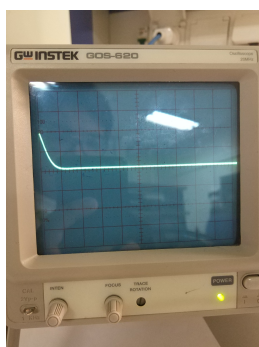


Рис. 3: Затухание колебаний

Подбирая мы получаем, что $R_{crit} \approx 12$ кОм.

Свободные колебания на фазовой плоскости

Рассмотрим свободные колебания на фазовой плоскости, для этого подключим место соединения катушки индуктивности и магазина сопротивлений к выходу X и включим на осциллографе канал $X - Y$. В итоге мы получаем картинку на экране как на рисунке ниже.



Рис. 4: Фазовая диаграмма для свободных колебаний

Для фазовой диаграммы для двух значений посчитаем так же декремент затухания

R , Ом	U_1 , дел	U_2 , дел	θ	σ_θ
1800	4,1	1,6	0,94	0,15
3000	3	0,5	1,8	0,2

Таблица 4: Декремент затухания для фазовой диаграммы

Видим, что мы получили такой же декремент затухания как и при его подсчете из графика колебаний.

Добротность свободных колебаний в контуре

Добротность можно найти по формуле

$$Q = \frac{\pi}{\theta}$$

Найдем ее для $R_{max} = 3$ кОм и для $R_{min} = 1,8$ кОм из графика и фазовой диаграммы. Итоговые результаты запишем в таблицу.

Так же добротность можно найти и из теоретических соображений по формуле

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Результаты так же занесем в таблицу, и в итоге мы получаем эту таблицу со всеми данными из данного эксперимента, по которой мы можем сравнить все полученные значения

	L_{coil} , мГн	R_{crit} , кОм			Q		
		Теор.	Подбор	Граф.	Теор.	Граф.	Спираль
R_{max}	$200 \pm 0,2$	12,6	12	$12,5 \pm 1,8$	3,5	$3,4 \pm 0,4$	$3,3 \pm 0,5$
R_{min}				$12,0 \pm 1,8$	2,1	$1,9 \pm 0,5$	$1,75 \pm 0,2$

Таблица 5: Итоговые результаты эксперимента

Вывод

Как видно из таблицы 5, наилучший способ измерения добротности — с помощью графика, потому что получаются наиболее близкие значения с меньшими погрешностями. Так же из графика видно, что R_{crit} лучше измеряется при более высоком сопротивлении в контуре.

Литература

1. **Лабораторный практикум по общей физике:** Учебное пособие. В трех томах. Т. 2. Электричество и магнетизм /Гладун А.Д., Александров Д.А., Берулёва Н.С. и др.; Под ред. А.Д. Гладуна - М.: МФТИ, 2007. - 280 с.
2. **Дополнительное описание лабораторной работы 3.2.4:** Свободные колебания в электрическом контуре; Под ред. МФТИ, 2018 г. - 4 с.