1. Постановка задачи

Решить краевую задачу методом переменных направлений.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 4\Delta u + \cos x \sin t \qquad (1) \\ u_x(0,y,t) = u_x(\pi,y,t) = 0 \qquad (2) \\ u_y(x,0,t) = u_y(x,3,t) = 0 \qquad (3) \\ u(x,y,0) = \cos x \qquad (4) \end{cases}, \quad 0 < x < \pi,\ 0 < y < 3,\ t > 0$$

2. Метод решения

Первым шагом ее численного решения является введение сетки в области $\Omega = G \otimes [0,T]$:

$$G = \{(x,\ y);\quad 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant 3\}$$
$$\overline{\omega}_h = \{(x_n, y_m);\ x_n = 0 + nh_x,\ n = 1,...,N,\ h_xN = \pi;\quad y_m = mh_y,\ m = 1,...,M,\ h_yM = 3\}$$
$$\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau;\ j = 0,1,...,J,\ J\tau = T\}$$
$$\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \otimes \overline{\omega}_\tau$$

с шагом h_x по x, шагом h_y по y и шагом τ по времени.

$$x_n = (n-1)\frac{h_x}{2} - nh_x,\ n = 1,...,N;$$

$$y_m = (m-1)\frac{h_y}{2} - mh_y,\ m = 1,...,M;$$

$$t_j = (j-1)\tau,\ j = 1,...,J;$$

На введенной сетке будем рассматривать сеточные функции $\omega^j_{n,\ m}$.

Вторым шагом является разностная апроксимация оператора Лапласа:

$$\Lambda\omega = \Lambda_x\omega + \Lambda_y\omega$$

где $$\Lambda_x\omega = \frac{\omega_{n-1,m} - 2\omega_{n,m} + \omega_{n+1,m}}{h_x^2},\ \Lambda_y\omega = \frac{\omega_{n,m-1} - 2\omega_{n,m} + \omega_{n,m+1}}{h_y^2} \qquad (5)$$

В выражениях (5) для краткости индекс j опущен.

Уравнение для сеточной функции $\omega^j_{n,m}$ можем взять в виде

$$\frac{\omega^{j+1} - \omega^j}{\tau} = \Lambda(\sigma\omega^{j+1} + (1-\sigma)\omega^j) + f^{j+1/2}$$

где $f_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} = \cos((n-1)\frac{h_x}{2} - nh_x)\sin((j-1)\tau + \frac{\tau}{2})$.

Начальное условие для функции $\omega_{n,m}^{j}$ получаем непосредственно из (4):

$\omega_{n,m}^{0} = \cos((n-1)\frac{h_x}{2} - nh_x)$ для всех $n = 1,...,N,\ m = 1,...,M$.

Граничные условия (2, 3) могут быть апроксимированы с помощью односторонней разностной производной:

$$\frac{\omega_{1,m} - \omega_{0,m}}{h_x} = 0, \quad \frac{\omega_{N,m} - \omega_{N-1,m}}{h_x} = 0 \qquad (7)$$

$\frac{\omega_{n,1} - \omega_{n,0}}{h_y} = 0, \quad \frac{\omega_{n,M} - \omega_{n,M-1}}{h_y} = 0$ для всех $n = 1,...,N, \quad m = 1,...,M$.

При решении многомерной задачи методом сеток большое значение имеет объем вычислений, то есть число арифметических действий для решения задачи с требуемой точностью. Явная (σ = 0) и неявная (σ = 1) схемы имеют одинаковый порядок точности. При использовании явной схемы число $Q_{яв}$ действий для определения ω^{j+1} во всех узлах ω_h на слое $t = t_{j+1}$ пропорционально числу узлов сетки:

$Q_{яв} = O(\frac{1}{h_x h_y})$,

но явная схема лишь условно устойчива. В случае неявной схемы для определения ω^{j+1} нужно решать систему уравнений, число которых пропорционально числу узлов сетки, то есть

$Q_{неяв} = O(\frac{1}{(h_x h_y)^2})$,

но неявная схема безусловно устойчива. Так называемые экономичные разностные схемы, к числу которых относится и схема переменных направлений, сочетает достоинства явных и неявных схем (объем работы $Q_{яв} = O(\frac{1}{h_x h_y})$ и безусловная устойчивость).

Разностная апроксимация уравнения (1) в схеме переменных направлений имеет вид:

$$\frac{(\omega_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} - \omega_{n,m}^{j})}{0.5\tau} = 4(\Lambda_x \omega_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} + \Lambda_y \omega_{n,m}^{j}) + f_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} \qquad (8)$$

$$\frac{(\omega_{n,m}^{j+1} - \omega_{n,m}^{j+\frac{1}{2}})}{0.5\tau} = 4(\Lambda_x \omega_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} + \Lambda_y \omega_{n,m}^{j+1}) + f_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} \qquad (9)$$

Переход от слоя j к слою $j+1$ совершается в два этапа с шагами 0.5τ: сначала решается уравнение (8), неявное по направлению x и явное по направлению y, а затем уравнение (9), явное по направлению x и неявное по направлению y. Значение $\omega^{j+1/2}$ является промежуточным и играет вспомогательную роль. Схема переменных направлений без- условно устойчива при любых шагах h_x, h_y и τ.
Рассмотрим подробнее переход со слоя j на промежуточный слой $j+1/2$. Используя явный вид разностных операторов Λ_x и Λ_y, приходим к краевой задаче:

Невязка для данной схемы равна $O(h_x^2 + h_y^2 + \tau^2)$, то есть её порядок аппроксимации равен 2. Т.е. условия Неймана за счет выбора сетки аппроксимируются со вторым порядком погрешности аппроксимации, т.к. соответствующие разностные первые производные оказываются центральными относительно точек $x = 0$ и $x = \pi$, $y = 0$ и $y = 3$. Кроме того, схема безусловно устойчива. Следовательно, схема сходится.

Используя явный вид разностных операторов, приходим к задаче:

$$\begin{cases}
0{,}5\gamma_1 \omega_{n-1,m}^{j+\frac{1}{2}} - (1+\gamma_1)\omega_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} + 0{,}5\gamma_1 \omega_{n+1,m}^{j+\frac{1}{2}} = -F_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} & (10)\\
v_{0,m}^{j+\frac{1}{2}} = \omega_{N,m}^{j+\frac{1}{2}};\ \omega_{N,m}^{j+\frac{1}{2}} = \omega_{N-1,m}^{j+\frac{1}{2}} & \\
F_{n,m}^{j} = 0{,}5\gamma_2(\omega_{n,m-1}^{j} + \omega_{n,m+1}^{j}) + (1-\gamma_2)\omega_{n,m}^{j} & \\
0{,}5\gamma_2 \omega_{n,m-1}^{j+1} - (1+\gamma_2)\omega_{n,m}^{j+1} + 0{,}5\gamma_2 \omega_{n,m+1}^{j+1} = -F_{n,m}^{j+1} & (11)\\
\omega_{n,0}^{j+\frac{1}{2}} = \omega_{n,M}^{j+\frac{1}{2}};\ \omega_{n,M}^{j+\frac{1}{2}} = \omega_{n,M-1}^{j+\frac{1}{2}} & \\
F_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} = 0{,}5\gamma_1(\omega_{n-1,m}^{j+\frac{1}{2}} + \omega_{n+1,m}^{j+\frac{1}{2}}) + (1-\gamma_1)\omega_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} & \\
\gamma_1 = \frac{4\tau}{h_x^2};\ \gamma_2 = \frac{4\tau}{h_y^2} &
\end{cases}$$

Эта задача решается с помощью метода прогонки при каждом фиксированном $m = 1,2,...,M-1$. В результате получаем значения $\omega^{j+1/2}$ во всех узлах сетки ω_h. Для того, чтобы осуществить переход со слоя $j+1/2$ на слой j, необходимо решить краевую задачу (11).

3. Решение задачи с помощью схемы переменных направлений

Рассмотрим алгоритм схемы переменных направлений. В этой схеме:

$$\frac{(\omega_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} - \omega_{n,m}^{j})}{0.5\tau} = 4(\Lambda_x \omega_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} + \Lambda_y \omega_{n,m}^{j}) + f_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} \qquad (1^*)$$

$$\frac{(\omega_{n,m}^{j+1} - \omega_{n,m}^{j+\frac{1}{2}})}{0.5\tau} = 4(\Lambda_x \omega_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} + \Lambda_y \omega_{n,m}^{j+1}) + f_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} \qquad (2^*)$$

переход со слоя k к слою k+1 совершается в 2 этапа с шагами $\tau/2$. Вначале решается уравнение (1*), а затем уравнение (2*). Рассмотрим подробнее переход со слоя k на слой k+1.

Используем уравнение (1*):

$$\frac{(\omega_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} - \omega_{n,m}^{j})}{0.5\tau} = \frac{\omega_{n-1,m} - 2\omega_{n,m} + \omega_{n+1,m}}{h_x^2} + \frac{\omega_{n,m-1} - 2\omega_{n,m} + \omega_{n,m+1}}{h_y^2} + f_{n,m}^{j+1/2}$$

Оно неявное по направлению x и явное по направлению y. Преобразуем его и получим:

$$0{,}5\gamma_1\omega_{n-1,m}^{j+\frac{1}{2}} - (1+\gamma_1)\omega_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} + 0{,}5\gamma_1\omega_{n+1,m}^{j+\frac{1}{2}} = -F_{n,m}^{j+1/2}$$

где $F_{n,m}^{j+1} = 0{,}5\gamma_2(\omega_{n,m-1}^{j} + \omega_{n,m+1}^{j}) + (1-\gamma_2)\omega_{n,m}^{j} + 2\tau f_{n,m}^{j+1/2}$,

Умножим это уравнение на (-1) и сделаем следующие обозначения:

$$\overline{A}_{n,m} = \frac{2\tau}{h_x^2}, \overline{B}_{n,m} = \frac{2\tau}{h_x^2}, \overline{C}_{n,m} = 1 + \frac{4\tau}{h_x^2}$$

Тогда получаем:

$$\overline{A}_{n,m}\omega_{n-1,m}^{j+1/2} - \overline{C}_{n,m}\omega_{n,m}^{j+1/2} + \overline{B}_{n,m}\omega_{n+1,m}^{j+1/2} = -F_{n,m}^{j+1/2} \qquad (3^*)$$

$$\omega_{0,m}^{j+1/2} = \omega_{N,m}^{j+1/2} = 0; \qquad (4^*)$$

Поскольку в этой задаче:

$$\overline{A}_{n,m} = \overline{B}_{n,m} \neq 0$$

$$|\overline{C}_{n,m}| = 1 + \frac{4\tau}{h_x^2} > |\overline{A}_{n,m}| + |\overline{B}_{n,m}| = \frac{2\tau}{h_x^2} + \frac{2\tau}{h_x^2} = \frac{4\tau}{h_x^2}$$

$$|\overline{\chi}_1| = |\overline{\chi}_2| = 0$$

То это означает, что выполнены достаточные условия использования метода прогонки, и тогда система (3*) решается этим методом при каждом $1 \leqslant m \leqslant M-1$ при граничных условиях (4*). Решение при $m = 0$ и $m = M$ находится из граничных условий. Прогонка осуществляется вдоль строк. В результате получаем значение $\omega_{n,m}^{j+1/2}$ на слое $j + 1/2$.

Теперь используем уравнение (2*):

$$\frac{\omega_{n,m}^{j+1} - \omega_{n,m}^{j+1/2}}{0.5\tau} = \frac{\omega_{n-1,m}^{j+1/2} - 2\omega_{n,m}^{j+1/2} + \omega_{n+1,m}^{j+1/2}}{h_x^2} + \frac{\omega_{n,m-1}^{j+1} - 2\omega_{n,m}^{j+1} + \omega_{n,m+1}^{j+1}}{h_y^2} + f_{n,m}^{j+1/2}$$

Оно явное по направлению x и неявное по направлению y. Преобразуем его и получим:

$$0{,}5\gamma_2\omega_{n,m-1}^{j+1} - (1+\gamma_2)\omega_{n,m}^{j+1} + 0{,}5\gamma_2\omega_{n,m+1}^{j+1} = -F_{n,m}^{j+1}$$

Умножим это уравнение на (-1) и сделаем следующие обозначения:

$$\dot{A}_{n,m} = \frac{2\tau}{h_y^2}, \dot{B}_{n,m} = \frac{2\tau}{h_y^2}, \dot{C}_{n,m} = 1 + \frac{4\tau}{h_y^2}$$

Тогда получаем:

$\dot{A}_{n,m}\omega_{n,m-1}^{j+1} - \dot{C}_{n,m}\omega_{n,m}^{j+1} + \dot{B}_{n,m}\omega_{n,m+1}^{j+1} = -F_{n,m}^{j+1}$ (5*)
$\omega_{n,1}^{j+1} = \omega_{n,2}^{j+1}; \quad \omega_{n,M}^{j+1} = \omega_{n,M-1}^{j+1}$ (6*)

Поскольку в этой задаче:

$$\dot{A}_{n,m} = \dot{B}_{n,m} \neq 0$$
$$|C_{\dot{n},m}| = 1 + \frac{4\tau}{h_y^2} > |A_{\dot{n},m}| + |B_{\dot{n},m}| = \frac{2\tau}{h_y^2} + \frac{2\tau}{h_y^2} = \frac{4\tau}{h_y^2}$$
$$|\dot{\chi}_1| = |\dot{\chi}_2| = 0$$

То это означает, что выполнены достаточные условия использования метода прогонки, и тогда система (5*) решается этим методом при каждом $1 \leqslant n \leqslant N-1$ при граничных условиях (6*). Решение при $n = 0$ и $n = N$ находится из граничных условий. Прогонка осуществляется вдоль столбцов. В результате получаем значение $\omega_{n,m}^{j+1}$ на слое $j+1$.

Получив значение функции на слое k+1, находим её значение на слое k+2 и так далее. Таким образом, используя схему переменных направлений и метод прогонки, мы можем численно решить нашу задачу для уравнения теплопроводности.

4. Метод прогонки

При построении разностных схем для дифференциальных уравнений второго порядка возникают системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональными матрицами:

$$A_n y_{n-1} - C_n y_n + B_n y_{n+1} = -F_n,\ n = 1,2,...,N-1 \qquad (12)$$

$$y_0 = \chi_1 y_1 + \mu_1,$$

$y_N = \chi_2 y_{N-1} + \mu_2$

Для решения таких систем и нужен метод прогонки.

Достаточные условия применения метода прогонки для решения этой системы имеют вид:

$$|C_n| \geqslant |A_n| + |B_n|,\ n = 1,2,...,N-1 \qquad (1')$$

$$A_n \neq 0,\ B_n \neq 0$$

$$|\chi_\alpha| \leqslant 1,\ \alpha = 1,2; |\chi_1| + |\chi_2| < 2$$

Или

$$|C_n| > |A_n| + |B_n|,\ n = 1,2,...,N-1 \qquad (2')$$

$$A_n \neq 0,\ B_n \neq 0$$

$$|\chi_1| \leqslant 1, |\chi_2| \leqslant 1,$$

Число арифметических операций прогонки O(N).

Получим теперь формулы прямой и обратной прогонки. Для решения нашей системы уравнений будем считать, что значение искомой функции в двух любых соседних точках связаны следующим соотношением:

$$y_n = \alpha_{n+1} y_{n+1} + \beta_{n+1}, n = 0,1,2,...,N-1 \qquad (13)$$

где α_n, β_n – прогоночные коэффициенты

$$y_{n-1} = \alpha_n y_n + \beta_n \qquad (14)$$

Подставляя (13) в (14), а затем (13) и (14) в (11), получаем

$$A_n((\alpha_{n+1} y_{n+1} + \beta_{n+1})\alpha_n + \beta_n) - C_n(\alpha_{n+1} y_{n+1} + \beta_{n+1}) + B_n y_{n+1} = -F_n$$

$$y_{n+1}((A_n\alpha_n - C_n)\alpha_{n+1} + B_n) = -F_n + (C_n - A_n\alpha_n)\beta_{n+1} - A_n\beta_n$$

Чтобы соотношение было верно для любых y_{n+1}, необходимо, чтобы

$$(A_n\alpha_n - C_n)\alpha_{n+1} + B_n = 0 \Rightarrow \alpha_{n+1} = \frac{B_n}{C_n - A_n\alpha_n}, n = 1,2,...,N-1 \qquad (15)$$

$$-F_n + (C_n - A_n\alpha_n)\beta_{n+1} - A_n\beta_n = 0 \Rightarrow \beta_{n+1} = \frac{F_n + A_n\beta_n}{C_n - A_n\alpha_n}, n = 1,2,...,N-1 \qquad (16)$$

Соотношения (15) и (16) называются формулами прямой прогонки.

Из $y_0 = \chi_1 y_1 + \mu_1$ и $y_n = \alpha_{n+1} y_{n+1} + \beta_{n+1}$ при n = N-1 находим:

$$y_N = \frac{\chi_2 \beta_N + \mu_2}{1 - \chi_2 \alpha_N} \quad (17)$$

Формулы (17) и $y_n = \alpha_{n+1} y_{n+1} + \beta_{n+1}, n = N-1, N-2, ..., 0$ называются формулами обратной прогонки. Используя их, определяем значения y_n.

Чтобы коэффициенты α_n, β_n и значение y_N были определены, достаточно, чтобы коэффициенты из уравнения (11) удовлетворяли условиям (1') или (2'). Только в этом случае можно использовать метод прогонки и применять формулы прямой и обратной прогонки.

В нашем случае эти условия выполняются:

$$\frac{4\tau}{h_y^2} + 1 = |C_n| > |A_n| + |B_n| = \frac{4\tau}{h_y^2}, n = 1,2,...,N-1$$

5. Точное решение

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 4\Delta u + \cos x \sin t \\ u_x(0,y,t) = u_x(\pi, y, t) = 0 \\ u_y(x,0,t) = u_y(x,3,t) = 0 \\ u(x,y,0) = \cos x \end{cases}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу Ш.Л.:

$$\begin{cases} \Delta v + \lambda v = 0, \quad 0 < x < \pi \\ \frac{\partial v}{\partial n}|_c = 0, \quad 0 < y < 3 \end{cases}$$

Решаем методом разделения переменных:

$v(x, y) = X(x)Y(y) \neq 0$ подставим в ДУ:

$$\begin{cases} X'' + \mu X = 0, \quad 0 < x < \pi \\ X'(0) = 0, \ X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$\mu_n = n^2, \quad X_n = cos(nx); \ n = 0,1,...$$

$$\begin{cases} Y'' + \nu X = 0, \quad 0 < x < 3 \\ Y'(0) = 0, \ Y'(3) = 0 \end{cases}$$

$$\nu_n = (\frac{\pi m}{3})^2, \quad Y_m = cos(\frac{\pi m y}{3}); \ m = 0,1,...$$

$$\lambda_{nm} = n^2 + (\frac{m\pi}{3})^2$$

$$v_{nm}(x,y) = X_n Y_m = \cos(nx)\cos(\frac{m\pi y}{3})$$

Разложим $\cos x$ и $\cos x \sin t$ в ряд Фурье по $\{v_{nm}(x,y)\}$.

$\cos x = \cos x$, $\cos x \sin t = \cos x \sin t$; $n = 1,\ m = 0$

$u(x,y,t) = \Sigma T_{nm}(t) v_{nm}(x,y)$ подставим в ДУ:

$$\begin{cases} T' + 4\lambda T = f(t) \\ T(0) = \phi(x) \end{cases}$$

при $n \neq 1, m \neq 0$ задача однородна

$$\begin{cases} T' + 4\lambda T = 0 \\ T(0) = 0 \end{cases}$$

и имеет только тривиальное решение $T(t) = 0$
при $n = 1, m = 0$:

$$\begin{cases} T' + 4\lambda T = sint \\ T(0) = 1 \end{cases}$$

Это задача Коши для ОДУ 1-го порядка. Её решение можно записать в виде:

$$T(t) = e^{-4t} + \frac{1}{17}(e^{-4t} + 4\sin t - \cos t)$$

7. Аппроксимация и устойчивость

Спектральный критерий устойчивости схемы

Проверим, выполняется ли необходимое условие Неймана для нашей разностной схемы.

Будем искать решение (8), (9) в виде:

$$\omega^{j}_{n,m} = e^{i\alpha n + i\beta m}$$
$$\omega^{j+1/2}_{n,m} = \lambda_1 e^{i\alpha n + i\beta m}$$
$$\omega^{j+1}_{n,m} = \lambda_2 \lambda_1 e^{i\alpha n + i\beta m}$$

Тогда подставляя $z^{j}_{n,m}, z^{j+1/2}_{n,m}, z^{j+1}_{n,m}$ в уравнения (8), (9), получаем следующее:

$$\Lambda_x \omega = \frac{\omega_{n-1,m} - 2\omega_{n,m} + \omega_{n+1,m}}{h_x^2}$$

$$\Lambda_y \omega = \frac{\omega_{n,m-1} - 2\omega_{n,m} + \omega_{n,m+1}}{h_y^2}$$

$$\frac{e^{i\alpha n + i\beta m}(\lambda_1 - 1)}{\tau/2} = 4\frac{e^{i\alpha n + i\beta m}(\lambda_1 e^{i\alpha} - 2\lambda_1 + \lambda_1 e^{-i\alpha})}{h_x^2} + 4\frac{e^{i\alpha n + i\beta m}(e^{i\beta} - 2 + e^{-i\beta})}{h_y^2}$$
$$\frac{e^{i\alpha n + i\beta m}(\lambda_1\lambda_2 - 1)}{\tau/2} = 4\frac{e^{i\alpha n + i\beta m}(\lambda_1 e^{i\alpha} - 2\lambda_1 + \lambda_1 e^{-i\alpha})}{h_x^2} + 4\frac{\lambda_1\lambda_2 e^{i\alpha n + i\beta m}(e^{i\beta} - 2 + e^{-i\beta})}{h_y^2}$$

Сократив оба уравнения на $4e^{i\alpha n + i\beta m}$ и второе ещё на λ_1 получаем:

$$\frac{(\lambda_1 - 1)}{\tau/2} = \frac{(\lambda_1 e^{i\alpha} - 2\lambda_1 + \lambda_1 e^{-i\alpha})}{h_x^2} + \frac{(e^{i\beta} - 2 + e^{-i\beta})}{h_y^2}$$

$$\frac{(\lambda_2 - 1)}{\tau/2} = \frac{(e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha})}{h_x^2} + \frac{\lambda_2(e^{i\beta} - 2 + e^{-i\beta})}{h_y^2}$$

$$\lambda_1 = \frac{1 - 4\frac{\tau}{h_y^2}2\sin^2(\beta/2)}{1 + 4\frac{\tau}{h_x^2}2\sin^2(\alpha/2)}$$

$$\lambda_1 = \frac{1 - 4\frac{\tau}{h_y^2}2\sin^2(\alpha/2)}{1 + 4\frac{\tau}{h_x^2}2\sin^2(\beta/2)}$$

$$|\lambda_1\lambda_2| = |\frac{(1 - 4\frac{\tau}{h_y^2}2\sin^2(\alpha/2))(1 - 4\frac{\tau}{h_y^2}2\sin^2(\beta/2))}{(1 + 4\frac{\tau}{h_y^2}2\sin^2(\alpha/2))(1 + 4\frac{\tau}{h_y^2}2\sin^2(\beta/2))}| \leqslant 1$$ при любом соотношении шагов.

Таким образом, необходимое условие устойчивости выполнено. Наша схема безусловно устойчива.

Определим порядок аппроксимации нашей разностной схемы:

Вычтем из (8) (9):

$$\frac{2\omega_{n,m}^{j+1/2} - \omega_{n,m}^{j} - \omega_{n,m}^{j+1}}{\tau/2} = \frac{4}{h_y^2}((\omega_{n,m-1}^{j} - 2\omega_{n,m}^{j} + \omega_{n,m+1}^{j}) - (\omega_{n,m-1}^{j+1} - 2\omega_{n,m}^{j+1} + \omega_{n,m+1}^{j+1}))$$

Вводя обозначение:

$$4\Lambda_y(\omega_{n,m}^{j+1} - \omega_{n,m}^{j}) = -\frac{4}{h_y^2}((\omega_{n,m-1}^{j} - 2\omega_{n,m}^{j} + \omega_{n,m+1}^{j}) - (\omega_{n,m-1}^{j+1} - 2\omega_{n,m}^{j+1} + \omega_{n,m+1}^{j+1}))$$

Получаем:

$$\frac{2\omega_{n,m}^{j+1/2}-\omega_{n,m}^{j}-\omega_{n,m}^{j+1}}{\tau/2}=-4\Lambda_y(\omega_{n,m}^{j+1}-\omega_{n,m}^{j})$$

$$\omega_{n,m}^{j+1/2}=\frac{\omega_{n,m}^{j}+\omega_{n,m}^{j+1}}{2}-\tau\Lambda_y(\omega_{n,m}^{j+1}-\omega_{n,m}^{j}) \quad (*)$$

Данное равенство связывает значение функций $\omega_{n,m}^{j+1/2}$ на промежуточном слое со значениями сеточной функции ω на слоях j и $j+1$. Теперь подставим (*) в (8). Получаем следующее:

$$\frac{\omega_{n,m}^{j}+\omega_{n,m}^{j+1}}{\tau}-2\Lambda_y(\omega_{n,m}^{j+1}-\omega_{n,m}^{j})=f_{n,m}^{j+1/2}+2\Lambda_x(\omega_{n,m}^{j+1}+\omega_{n,m}^{j})-4\tau\Lambda_x\Lambda_y(\omega_{n,m}^{j+1}-\omega_{n,m}^{j})+4\Lambda_y\omega_{n,m}^{j}$$
(**)

Если:

1) $\Lambda=\Lambda_x+\Lambda_y$

2) I-единичный оператор

3)$\omega_t=\dfrac{\omega_{n,m}^{j+1}-\omega_{n,m}^{j}}{\tau}$,то

$$\frac{\omega_{n,m}^{j}+\omega_{n,m}^{j+1}}{\tau}-2\Lambda_y(\omega_{n,m}^{j+1})-2\Lambda_x(\omega_{n,m}^{j+1})+4\tau\Lambda_x\Lambda_y(\omega_{n,m}^{j+1}-\omega_{n,m}^{j})=-2\Lambda\omega_{n,m}^{j}+(I-2\tau\Lambda_y)(I-2\tau\Lambda_x)\omega_t$$

И уравнение (**) можно переписать следующим образом:

$$(I-2\tau\Lambda_y)(I-2\tau\Lambda_x)\omega_t=2\Lambda\omega_{n,m}^{j}+f_{n,m}^{j+1/2} \qquad (18)$$

Итак, мы исключили полуцелый слой (*только f аппроксимируется на промежуточном слое по времени).

Пусть u – точное решение нашей задачи; ω – численное решение нашей задачи;

Рассмотрим сеточную функцию $v=\omega$ – u. В начальный момент времени и на границе области погрешность v равна 0, поскольку начальные и граничные условия аппроксимируются точно.

Так как:

$$(I-2\tau\Lambda_y)(I-2\tau\Lambda_x)\omega_t-(I-2\tau\Lambda_y)(I-2\tau\Lambda_x)u_t=2\Lambda\omega_{n,m}^{j}-2\Lambda u_{n,m}^{j}-(I-2\tau\Lambda_y)(I-2\tau\Lambda_x)u_t+2\Lambda u_{n,m}^{j}+f_{n,m}^{j+1/2}$$

И $v=\omega-u$, то:

$(I-2\tau\Lambda_y)(I-2\tau\Lambda_x)v_t=2\Lambda\omega_{n,m}^{j}+\psi_{n,m}^{j+1/2}$, где $\psi_{n,m}^{j+1/2}$ - погрешность аппроксимации

$$\psi_{n,m}^{j+1/2} = -(I-2\tau\Lambda_y)(I-2\tau\Lambda_x)u_t + 2\Lambda u_{n,m}^j + f_{n,m}^{j+1/2} = 2\Lambda u_{n,m}^j - u_t + 2\tau\Lambda_x u_t + 2\tau\Lambda_y u_t - 4\tau^2\Lambda_x\Lambda_y u_t + f_{n,m}^{j+1/2}$$

$$4\tau^2\Lambda_x\Lambda_y u_t = O(\tau^2)$$

$$u_t = \frac{u_{n,m}^{j+1} - u_{n,m}^j}{\tau} = \frac{u_{n,m}^{j+1/2} + \frac{\tau}{2}u_{n,m}^{'j+1/2} + \frac{\tau^2}{4}\frac{u_{n,m}^{''j+1/2}}{2} + \frac{\tau^3}{8}\frac{u_{n,m}^{'''j+1/2}}{6} + O(\tau^4)}{\tau} - \frac{u_{n,m}^{j+1/2} - \frac{\tau}{2}u_{n,m}^{'j+1/2} + \frac{\tau^2}{4}\frac{u_{n,m}^{''j+1/2}}{2} - \frac{\tau^3}{8}\frac{u_{n,m}^{'''j+1/2}}{6} + O(\tau^4)}{\tau} =$$

$$\frac{\tau u_{n,m}^{'j+1/2} + 2\frac{\tau^3}{8}\frac{u_{n,m}^{'''j+1/2}}{6} + O(\tau^4)}{\tau} = \frac{\tau u_{n,m}^{'j+1/2} + O(\tau^3)}{\tau} = u_{n,m}^{'j+1/2} + O(\tau^2)$$

Так как:

$$\frac{1}{2}(u_{n,m}^j + u_{n,m}^{j+1}) = \frac{1}{2}(u_{n,m}^{j+1/2} - \frac{\tau}{2}u_{n,m}^{'j+1/2} + \frac{\tau^2}{4}\frac{u_{n,m}^{''j+1/2}}{2} + O(\tau^3) + u_{n,m}^{j+1/2} + \frac{\tau}{2}u_{n,m}^{'j+1/2} + \frac{\tau^2}{4}\frac{u_{n,m}^{''j+1/2}}{2} + O(\tau^3)) =$$
$$u_{n,m}^{j+1/2} + \frac{\tau^2}{4}\frac{u_{n,m}^{''j+1/2}}{2} + O(\tau^3) = u_{n,m}^{j+1/2} + O(\tau^2)$$

то:

$$4\Lambda u_{n,m}^j + 2\tau\Lambda_x u_t + 2\tau\Lambda_y u_t = 2\tau\Lambda u_t + 2\Lambda u_{n,m}^j = 2\Lambda(u_{n,m}^{j+1} - u_{n,m}^j) + 4\Lambda u_{n,m}^j =$$
$$2\Delta u_{n,m}^{j+1/2} + O(h_x^2 + h_y^2 + \tau^2)$$

Собирая всё вместе, имеем:

$$\psi_{n,m}^{j+1/2} = 2\Lambda u_{n,m}^{j+1/2} + O(h_x^2 + h_y^2 + \tau^2) - u_{n,m}^{'j+1/2} + O(\tau^2) + O(\tau^2) + f_{n,m}^{j+1/2} =$$
$$2\Delta u_{n,m}^{j+1/2} + f_{n,m}^{j+1/2} - u_{n,m}^{'j+1/2} + O(h_x^2 + h_y^2 + \tau^2) = O(h_x^2 + h_y^2 + \tau^2)$$

Итак, схема переменных направлений имеет погрешность аппроксимации $O(h_x^2 + h_y^2 + \tau^2)$ и в силу линейности и безусловной устойчивости она сходится и имеет второй порядок точности по координате и времени.

Поскольку для реализации этой схемы требуется число действий, пропорциональное числу узлов сетки, то схема является экономичной.