Домашняя работа №1

Аналитическое решение

Михайлов Михаил

Армен Леонович Бекларян

20 January 2021

Условие задачи:

В двухканальную СМО поступают заявки с интенсивностью 2 заявки в час. Поток обслуживания имеет интенсивность 4 заявки в час. Потоки поступления заявок и обслуживания - простейшие. Ожидать обслуживания в системе могут не более двух заявок. Определите показатели работы СМО.

Решение:

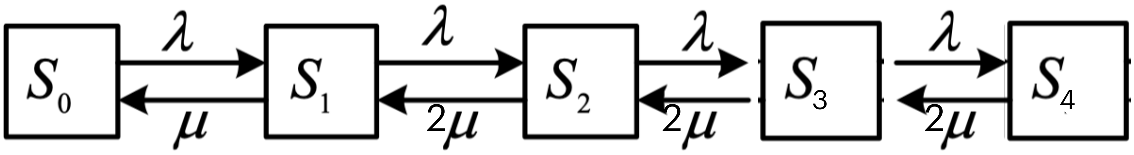
В условии нам даны параметры:

- $\lambda = 2$ з/ч
- $\mu = 4$ з/ч
- $n = 2$ каналов
- $m = 2$ величина очереди

Под показателями работы СМО понимается:

1. $\bar{T}_q = \frac{L_q}{\lambda}$ - среднее время ожидания в очереди
2. P_{dec} - вероятность отказа
3. $Q = 1 - P_{dec}$ - относительная пропускная способность
4. $L_q = \frac{\rho^{n+1}}{n*n!}\frac{1-(\frac{\rho}{n})^m*(m+1-\frac{m\rho}{n})}{(1-\frac{\rho}{b})^2}$ - средняя длина очереди
5. $A = \lambda Q$ - абсолютная пропускная способность системы
6. $\nu = \lambda P_{dec}$ - величина отказов
7. $\bar{T} = \bar{T}_q + \tau = \frac{L_{sys}}{\lambda}$ - среднее время работы СМО (τ - среднее время обслуживания одной заявки)
8. $\bar{k}_{occ} = \frac{A}{\mu}$ - среднее число занятых каналов
9. $L_{sys} = \bar{L}_q + \bar{k}_{occ}$ - среднее число заявок в системе

Граф состояний данной СМО:



Составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} \frac{dP_0}{dt} = -P_0\lambda + \mu P_1 = 0 \\ \frac{dP_1}{dt} = -P_1\lambda + 2\mu P_2 + \lambda P_0 - \mu P_1 = 0 \\ \frac{dP_2}{dt} = -P_2\lambda + 2\mu P_3 + \lambda P_1 - 2\mu P_2 = 0 \\ \frac{dP_3}{dt} = -P_3\lambda + 2\mu P_4 + \lambda P_2 - 2\mu P_3 = 0 \\ \frac{dP_4}{dt} = P_3\lambda - 2\mu P_4 = 0 \end{cases} => \begin{cases} P_1 = \frac{\lambda}{\mu}P_0 \\ P_2 = (\frac{\lambda}{\mu})^2\frac{P_0}{2} \\ P_3 = (\frac{\lambda}{\mu})^3\frac{P_0}{4} \\ P_4 = (\frac{\lambda}{\mu})^4\frac{P_0}{8} \end{cases}$$

Отсюда можно найти $P_0 = [1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{4} + \frac{\rho^4}{8}]^{-1} \approx 0.601.$

Тогда вероятность попасть в очередь равна $P_2 \approx 0.075$, а вероятность отказа $P_{dec} = P_4 \approx 0.005.$

Найдем среднюю длину очереди.

$$L_q = \frac{(0.5)^{2+1}}{2*2!}\frac{1-(\frac{0.5}{2})^2*(2+1-\frac{2*(0.5)}{2})}{(1-\frac{0.5}{2})^2}*0.601 \approx 0.028.$$

Для вычисления среднего времени ожидания заявки в очереди воспользуемся формулой Литтла: $\bar{T}_q = \frac{L_q}{\lambda} \approx 0.014.$

Все остальные величины находятся элементарно, поэтому просто выпишем наши результаты:

1. $\bar{T}_q \approx 0.014$

2. $P_{dec} \approx 0.005$
3. $Q = 1 - P_{dec} \approx 0.995$
4. $L_q \approx 0.028$
5. $A = \lambda Q \approx 1.99$
6. $\nu = \lambda P_{dec} \approx 0.01$
7. $\bar{T} \approx 0.264$
8. $\bar{k}_{occ} \approx 0.5$
9. $L_{sys} \approx 0.528$