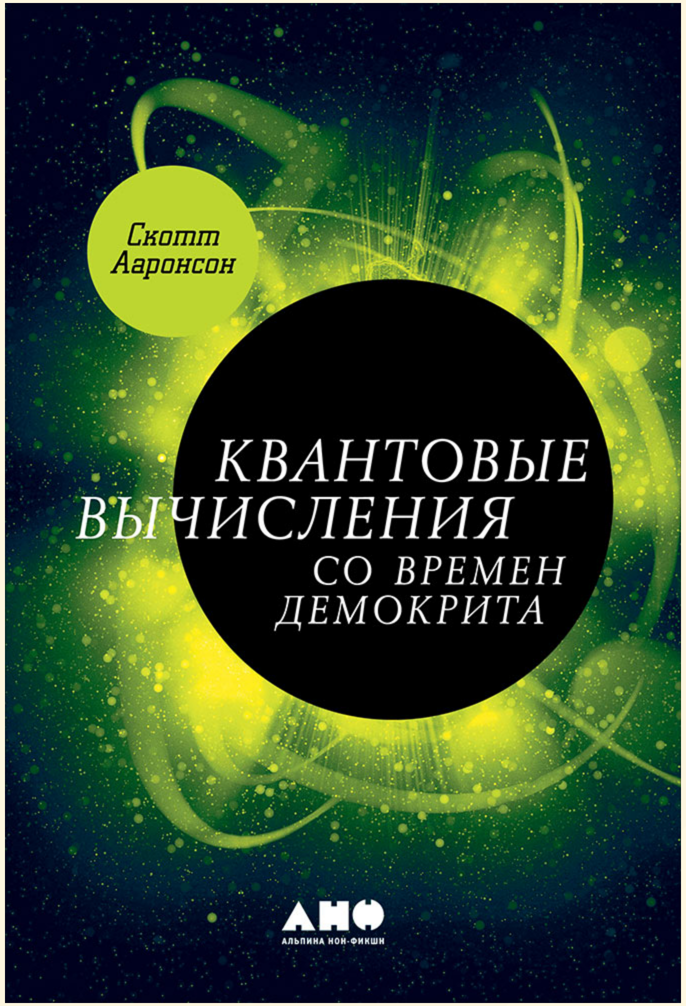
ОКСБРИДЖ АЛЬБИОН

+7 495 650-99-95
+7 495 694-36-00
+7 925 505-24-42
+7 916 151-25-94
forum@oxbrige.ru

ЗАОЧНАЯ ФИЗМАТШКОЛА

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАНИЯ РОССИЙСКИХ И ЗАРУБЕЖНЫХ ЭКЗАМЕНОВ И ОЛИМПИАД

Квантовые вычисления



Математическая индукция

База: утверждение верно для $n = 1$
Переход: если утверждение верно для натурального n, то верно и для натурального $n + 1$

Следовательно: для любого натурального n верно $P(n)$

Математическая индукция

База: $n = 1 \implies P(n)$

Переход: $\forall n \quad n \in \mathbb{N} \land P(n) \implies P(n+1)$

Следовательно: $\forall n \quad n \in \mathbb{N} \implies P(n)$

Пример

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

База: $1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$

Переход:

Пусть $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Тогда

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

$\square$

1. Найдите в последовательности 2, 6, 12, 20, 30, ... число, стоящее а) на 6-м; б) на 1994-м месте. Ответ объясните.
2. Любое ли целое количество рублей, большее семи, можно уплатить без сдачи денежными купюрами по 3 и по 5 рублей? Почему?

3. На краю пустыни имеется большой запас бензина и машина, которая при полной заправке может проехать 50 километров. Имеются канистры (в неограниченном количестве), в которые можно сливать бензин из бензобака машины и оставлять на хранение (в любой точке пустыни). Докажите, что машина сможет проехать любое расстояние. (Канистры с бензином возить не разрешается, пустые канистры можно возить в любом количестве.)
4. Плоскость разрезана на части n прямыми, где $n > 3$ и не все прямые проходят через одну точку. Докажите, что хотя бы одна из частей – треугольник.

5. На доске написаны сто цифр: нули и единицы (в произвольной комбинации). Разрешается выполнять две операции: заменять первую цифру (нуль на единицу и наоборот); заменять цифру, стоящую после первой единицы.

Пример.В последовательности 0011001 ... можно заменить первую цифру или четвёртую.
Докажите, что с помощью нескольких таких замен можно получить любую комбинацию из ста нулей и единиц.

6. Несколько прямых делят плоскость на части. Докажите, что можно раскрасить эти части в белый и чёрный цвет так, чтобы соседние части (имеющие общий отрезок границы) были разного цвета.

Домашнее задание

1. Докажите по индукции, что для реккурентного соотношения:

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(n) = f(n-1) + 1 \end{cases}$$

Верно, что: $f(n) = n$

2. 111 делится на 3, 111111111 делится на 9, $\underbrace{111\ldots111}_{27}$ делится

   на 27.

   Докажите, что $\underbrace{111\ldots111}_{3^n}$ делится на 3^n.