7 клас

1. Відомо, що в понеділок Настя добиралася на автомобілі на роботу більше однієї години. Також відомо, що протягом будь-якої години руху середня швидкість її автомобіля дорівнювала 80 км/год. Чи могла його середня швидкість протягом усього шляху дорівнювати 100 км/год?

Відповідь. Могла.

Розв'язання. Припустимо, що автомобіль Насті рухався протягом $\frac{3}{2}$ години, перші та останні $\frac{1}{2}$ години він рухався зі швидкістю x км/год, а протягом $\frac{1}{2}$ всередині він рухався зі швидкістю y км/год. Тоді його середня швидкість протягом будь-якої години всередині руху складає $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=80 \Rightarrow y=160-x$. А його середня швидкість на усьому шляху дорівнює:

$$v=\frac{S}{t}=\frac{x\cdot 1+y\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{2x+y}{3}=\frac{2x+160-x}{3}=\frac{x+160}{3}=100, \text{ звідки } x=140.$$

Тобто при швидкості 140 на першій та третій півгодині шляху, та швидкості 20 протягом середньої півгодини будемо мати потрібну умову.

2. У Олесі є необмежена кількість цифр 3 та рівно одна цифра 4. Вона хоче утворити число, яке б ділилося на найбільшу можливу кількість чисел з множини: $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$. Яке найменше число може утворити Олеся?

(Рубльов Богдан)

Відповідь. 33334. Це число ділиться на три числа з наведеної множини.

Розв'язання. Зрозуміло, що таке число не може ділитись на 3, 6, 9 та 5. Так само воно не може ділитись на 4 та 8, бо останні дві цифри можуть бути лише 33 або 34. Таким чином воно може ділитись максимум на три числа: 1, 2 та 7. Щоб число ділилося на 2, остання його цифра повинна бути рівна 4. Залишається підібрати число вигляду 33...334, щоб воно було кратним 7. Нескладно перевірити, що найменше таке число 33334.

3. У клітини дошки 8×8 можна ставити зірочки (не більше 1 зірочки у клітину) таким чином, щоб у кожному рядку, кожному стовпчику та кожній діагоналі було не більше ніж 4 зірочки. Яку максимальну кількість зірочок можна поставити на дошку за таких умов?

		*	*			*	*
		*	*			*	*
*	*			*	*		
*	*			*	*		
*	*			*	*		
*	*			*	*		
		*	*			*	*
		*	*			*	*

Рис. 1

Відповідь: 32.

Розв'язання. Зрозуміло, що більше 32 поставити не можна, бо у кожному з 8 рядків можна поставити не більш ніж 4 зірочки. Залишається навести приклад розстановки 32 зірочок, що задовольняє умови задачі. Приклад наведений нижче на рис. 1.

4. У чотирикутнику $ABCD$ виконується умова $AD=AB+CD$. Бісектриси кутів BAD і ADC перетинаються в точці P, як це показане на рис. 2. Доведіть, що $BP=CP$.

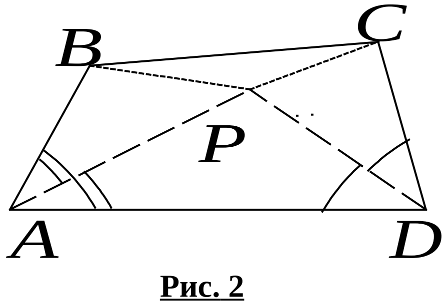

Рис. 2

(Рожкова Марія)

Розв'язання. Відмітимо точку $K \in AD$ таким чином, щоб $AK = AB$ (рис. 3). Тоді $DK = CD$ і ΔABK є рівнобедреним, тому бісектриса AP є серединним перпендикуляром до BK, звідки $BP = KP$. Аналогічно DP – це серединний перпендикуляр до CK, тому $KP = CP$. Звідси маємо, що $BP = CP$.

3.1. У клітини дошки 6×6 можна ставити зірочки (не більше 1 зірочки у клітину) таким чином, щоб у кожному рядку, кожному стовпчику та кожній з двох великих діагоналей було не більше ніж 3 зірочки. Яку максимальну кількість зірочок можна поставити на дошку за таких умов?

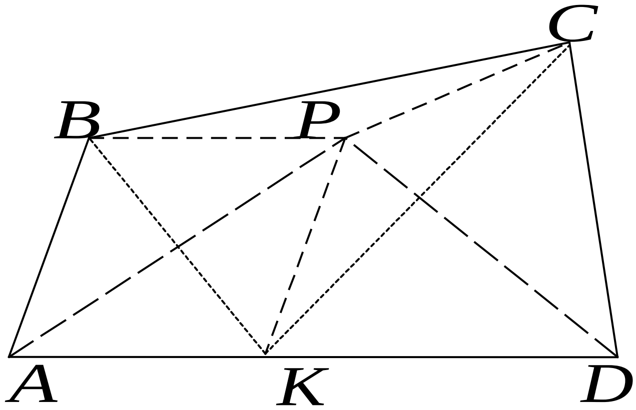

Рис. 3

Відповідь: 18.
Розв'язання**.** Зрозуміло, що більше 18 поставити не можна, бо у кожному з 6 рядків можна поставити не більш ніж 3 зірочки. Залишається навести приклад розстановки 18 зірочок, що задовольняє умови задачі. Приклад наведений нижче на рис. 4.

		*	*	*	
		*	*	*	
*	*				*
*	*				*
		*	*	*	
*	*				*

Рис. 4

4.1. Сторони трикутників ABC та ACD задовольняють такі умови: $AB = AD = 3$см, $BC = 7$ см, $DC = 11$см. Які значення може приймати довжина сторони AC, якщо вона дорівнює цілій кількості сантиметрів, є середньою у ΔACD та найбільшою у ΔABC?

Відповідь: $AC = 9$см.
Розв'язання**.** Позначимо $AC = x$. Тоді з умов задачі зрозуміло, що $7 < x < 11$, тому x може приймати значення 8, 9 або 10. Якщо $x = 8$, то це суперечить нерівності трикутника для ΔACD, бо $AD + AC = CD$. Якщо $x = 10$, то це суперечить нерівності трикутника для ΔABC, бо $AB + BC = AC$. Залишається єдина припустима можливість $x = 9$ яка очевидно і є правильною, бо не призводить до жодної суперечності.

8 клас

1. Задача № 1 за 7 клас.

2. Відомо, що M та N два послідовних чотирицифрових числа. Яке найбільше значення може приймати різниця між сумами цифр чисел M та N?

Відомо, що M та N два послідовних чотирицифрових числа. Яке найбільше значення може приймати різниця між сумами цифр чисел M та N?

Відповідь: 26.
Розв'язання. Позначимо через $S(K)$ – суму цифр числа K. Нехай $M = N + 1$. Якщо при додаванні до N одиниці не відбувається перенос розряду, то очевидно, що $S(M) - S(N) = 1$. При переносі розряду можливі такі випадки: $N = \overline{abc9}$, $c \neq 9$, або $N = \overline{ab99}$, $b \neq 9$, або $N = \overline{a999}$, $a \neq 9$ (остання умова обов'язково, бо числа чотирицифрові). Тоді $S(N) > S(M)$. У кожному з випадків неважко порахувати, що $S(N) - S(M) = 8$, або $S(N) - S(M) = 17$, або $S(N) - S(M) = 26$ відповідно. Останній варіант є шуканим. Прикладом такої пари чисел є пара $N = 1999$, $M = 2000$.

3. Чи можна розставити у комірках таблиці 3×5 числа 1, 2, ..., 15 таким чином, щоб:

а) суми чисел в усіх рядках були однакові, а також, щоб суми чисел в усіх стовпчиках були однакові, але, можливо, відмінні від сум чисел у рядках;
б) суми чисел в усіх трьох рядках та усіх п'яти стовпчиках були однакові?

(Рубльов Богдан)

1	**11**	**5**	**14**	**9**
8	**3**	**12**	**4**	**13**
15	**10**	**7**	**6**	**2**

Рис. 5

Відповідь*: *а) можна; ***б)*** не можна.
Розв'язання*. *а) Відповідна розстановка чисел показана на рис. 5. Сума чисел у кожному рядку дорівнює 40, у кожному стовпчику дорівнює 24.
б) Якщо припустити, що це можливо, то позначимо цю спільну суму кожного рядка та кожного стовпчика через s. Додамо усі 15 чисел по рядках, тоді ця сума стане рівною $3s$, оскільки рядків рівно 3. Якщо тепер обчислити ту ж саму суму чисел по стовпчиках, то вона дорівнює $5s$. Зауважимо, що ці суми повинні бути однакові, бо при кожному підрахуванні кожне число з чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ 15$ додається рівно один раз. Таким чином $3s = 5s$, що неможливо для натурального s.

4. Нехай $p(a)$ – найменший дільник натурального числа $a > 1$, що не дорівнює 1.

а) Доведіть, що рівняння:

$$m + n = \left(p(m) + p(n) \right)\left(p(m) - p(n) \right),$$

де $m,\ n$ взаємно прості натуральні числа, має нескінченно багато розв'язків в натуральних числах, що не дорівнюють одиниці.

б) Знайдіть усі такі натуральні числа $m > 1$, для яких існує принаймні одне натуральне $n > 1$ таке, що справджується рівність:

$$m + n = \left(p(m) + p(n) \right)\left(p(m) - p(n) \right).$$

(Чорний Максим)

Відповідь*: *б) будь-яке просте, більше 2.
Розв'язання.* *а) Нехай $q > 2$ – просте число, покладемо $m = q$, $n = q^2 - q - 4$. Тоді $p(m) = q$, крім того, очевидно, що n – парне, а тому $p(n) = 2$. А далі просто перевіримо, що одержані значення задовольняють рівність:

$$m + n = q^2 - 4 = p^2(m) - p^2(n) = q^2 - 4 \cdot$$

б) Якщо $m = q > 2$ – просте число, то відповідне натуральне n знайдене в пункті ***а)***.
Припустимо, що $m = 2$, то $p(m) = 2$, але тоді $p(m) - p(n) > 0$, звідки $p(n) = 1$ – суперечність.
Із заданого співвідношення випливає, що $m = p^2(m) - p^2(n) - n < p^2(m)$. Якщо m не просте число, то $m = p \cdot p_1 \geq p^2(m)$. Одержана суперечність доводить, що m – просте.

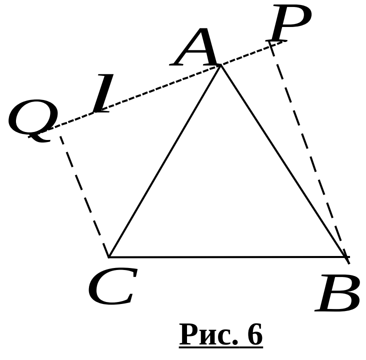

Рис. 6

5. Заданий рівносторонній ΔABC, у якого A_1, B_1, C_1 – середини сторін $BC,\ AC,\ AB$ відповідно. Пряма l проходить через вершину A, позначимо через P, Q – проекції точок B, C на пряму l відповідно (пряма l та точки $Q,\ A,\ P$ розташовані так, як це показано на рис. 6). Позначимо через T – точку перетину прямих B_1P та C_1Q. Доведіть, що пряма A_1T перпендикулярна прямій l.

(Сердюк Назар)

Розв'язання. Оскільки $\angle AQC = \angle AC_1C = 90°$, то чотирикутник AC_1CQ – вписаний, звідси (рис. 7)

$$\angle TQP = \angle AQC_1 = \angle ACC_1 = 30°,$$

аналогічно $\angle QPT = 30°$, тобто $\triangle QPT$ – рівнобедрений, тому $QT = TP$. Проведемо пряму $A_1H \perp l$, тобто $CQ \parallel AH \parallel BP$. Оскільки $CA_1 = A_1B$, то за властивостями середньої лінії трапеції $QH = HP$. Таким чином у $\triangle PQA_1$ відрізок A_1H одночасно і висота, і медіана, тому цей трикутник рівнобедрений, тобто $A_1Q = A_1P$. Оскільки $QT = TP$, то $T \in A_1H$, звідси й маємо, що $A_1T \perp l$. Твердження доведене.

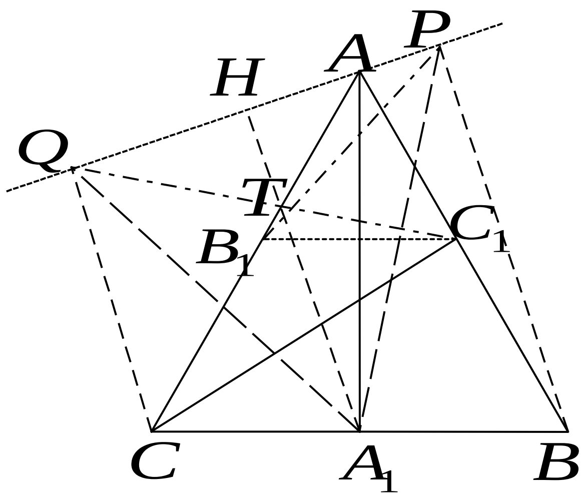

Рис. 7

4.1. Прості числа p, q та натуральні x, y задовольняють умови: $x < p$, $y < q$ та $\frac{p}{x} + \frac{q}{y}$ – ціле число. Доведіть, що $x = y$.

***Розв'язання*.** За умовою, $py + qx \,\vdots\, xy \;\Rightarrow\; py + qx \,\vdots\, x \;\Rightarrow\; py \,\vdots\, x \;\Rightarrow\; y \,\vdots\, x$, аналогічно $x \,\vdots\, y$, що й треба було довести.

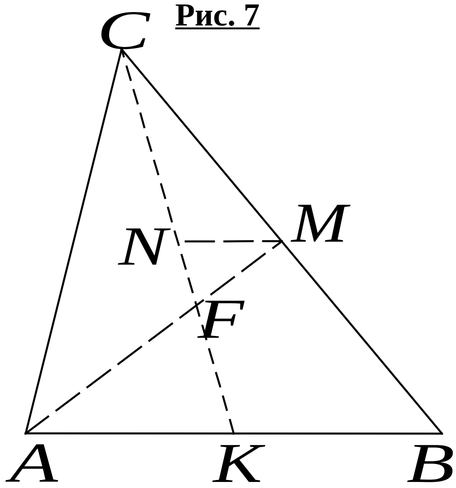

Рис. 8

5.1. На стороні AB трикутника ABC відмітили точку K. Відрізок CK перетинає медіану AM у точці F. Відомо, що $AK = AF$. Знайдіть відношення $MF : BK$.

Відповідь: $MF : BK = 1:2$.

***Розв'язання*.** Проведемо MN – середню лінію $\triangle BCK$ (рис. 8). Тоді

$$\angle AKF = \angle AFK = \angle NFM = \angle FNM,$$

тому $\triangle FMN$ – рівнобедрений. Звідси $FM = MN = \frac{1}{2}BK$.

***Альтернативне розв'язання*.** Подовжимо відрізок FM за точку M на його довжину до точки P (рис. 9). Тоді $CPBF$ – паралелограм, звідки $PB \parallel FK$. Але тоді $\angle APB = \angle ABP$, тому $AP = AB$. Оскільки за умовою $AK = AF$, то $FP = KB$, оскільки $FP = 2FM$, маємо $MF : BK = 1:2$.

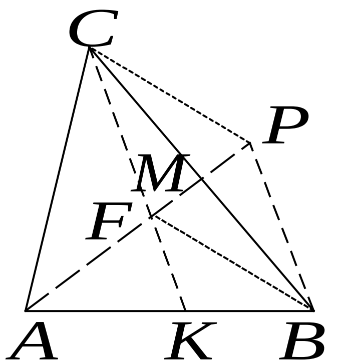

Рис. 9

9 клас

1. Знайдіть натуральне число n, для якого існує найбільша кількість пар ненульових цифр a, b, що задовольняють умову: $\overline{ab} - \overline{ba} = n$.

***Відповідь*:** $n = 9$.

***Розв'язання*.** Зрозуміло, що $a > b$, тому можемо записати таку рівність: $n = \overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - 10b - a = 9(a - b)$. Таким чином $n = 9k$. Залишається зрозуміти для якого натурального числа k існує максимальна кількість пар цифр, різниця між якими дорівнює k. Очевидно, що це $k = 1$, для якого існує 8 пар шуканих цифр. Тому $n = 9$.

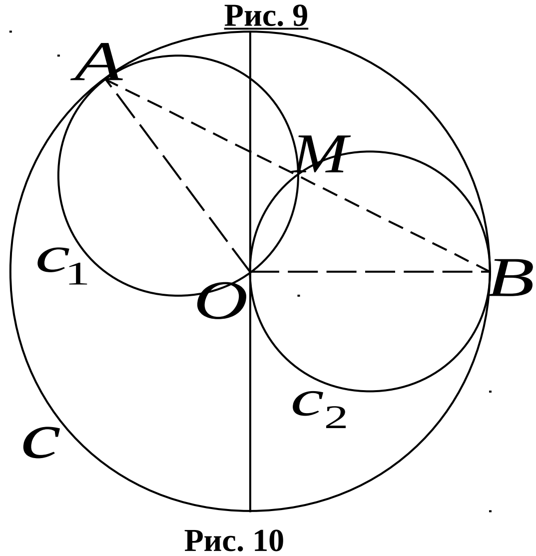

Рис. 10

2. Два кола c_1, c_2 проходять через центр O кола c та дотикаються до нього внутрішнім чином у точках A та B відповідно. Доведіть, що на прямій AB лежить спільна точка кіл c_1, c_2.

Розв'язання. Все очевидно, якщо AB – діаметр кола c, нехай має місце розташування, як на рис. 10, тоді AO та BO – діаметри кіл c_1 та c_2 відповідно. Нехай друга точка їх перетину – точка M. Тоді $\angle AMO = \angle BMO = 90°$, звідки випливає, що $M \in AB$.

3. ***а)*** Чи можна розставити у комірках таблиці 3×5 числа 1, 2, ..., 15 таким чином, щоб суми чисел в усіх рядках були однакові, а також, щоб суми чисел в усіх стовпчиках були однакові, але, можливо, відмінні від сум чисел у рядках?
б) Чи можна розставити у комірках таблиці 4×5 числа 1, 2, ..., 20 таким чином, щоб суми чисел в усіх рядках були однакові, а також, щоб суми чисел в усіх стовпчиках були однакові, але, можливо, відмінні від сум чисел у рядках?

(Рубльов Богдан)

Відповідь*: *а) можна, ***б)*** не можна.
Розв'язання*. *а) Дивись розв'язання **задачі № 3 а) за 8 клас**.

б) Якщо припустити, що це можливо, то позначимо спільну суму кожного рядка через s. Додамо усі 20 чисел по рядках. Ця сума дорівнює $4s$, оскільки рядків рівно 4. З іншого боку, вона дорівнює $1+2+...+20=210$. Бачимо, що 210 не ділиться на 4, а тому не може виконуватися рівність $210=4s$.

4. Розв'яжіть у натуральних числах x, y, z систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x^2 = 4y^2 + 3z^2 + 2, \\ 13x = 4y + 3z + 29. \end{cases}$$

(Гоголєв Андрій)

Відповідь: $(3;\ 1;\ 2)$.
Розв'язання. З першого рівняння системи маємо, що $x > \max\{y, z\}$ та z парне. Якщо x – парне, то у другому рівнянні отримаємо суперечність. Таким чином x – непарне. З другого рівняння також маємо таку оцінку: $13x < 4x + 3x + 29 \ \Rightarrow \ 6x < 29$. З усього наголошеного $x < 5$, тобто можливі значення $x = 1$ (що суперечить умові максимальності x) та $x = 3$. З останнього простим перебором знаходимо єдиний розв'язок: $(3,1,2)$.

5. Нехай a, b, c – сторони гострокутного трикутника. Доведіть, що

$$\sqrt{a^2+b^2-c^2} + \sqrt{b^2+c^2-a^2} + \sqrt{c^2+a^2-b^2} \le \sqrt{3\left(ab+bc+ca\right)}.$$

(Сердюк Назар)

Розв'язання. Позначимо $a^2+b^2-c^2=x^2$, $b^2+c^2-a^2=y^2$, $c^2+a^2-b^2=z^2$, де $x,\ y,\ z$ – додатні, тоді $a=\sqrt{\frac{x^2+z^2}{2}}$, $b=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$, $c=\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}}$ і нерівність переписується у вигляді

$$x+y+z \le \sqrt{\frac{3}{2}\left(\sqrt{(x^2+y^2)\cdot(x^2+z^2)} + \sqrt{(x^2+y^2)\cdot(y^2+z^2)} + \sqrt{(z^2+y^2)\cdot(x^2+z^2)}\right)}.$$

Оскільки за нерівністю Коші-Буняковського $\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)} \ge a^2+bc$, то права частина нерівності не менша за $\sqrt{\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)}$. Отже, нам достатньо довести, що

$$3\left(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx\right) \ge 2\left(x+y+z\right)^2.$$

Остання нерівність рівносильна $x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx$, а це відома нерівність трьох квадратів.

Альтернативне розв'язання. Позначимо $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ - кути трикутника, що лежать напроти сторін $a,\ b,\ c$ відповідно. Запишемо теорему косинусів для кожного доданку у лівій частині та застосуємо нерівність Коші-Буняковського:

$$\sqrt{2ab\cos\gamma}+\sqrt{2bc\cos\alpha}+\sqrt{2ca\cos\beta} \le \sqrt{(ab+bc+ca)}\cdot\sqrt{2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)}.$$

Нерівність буде доведена, якщо справджується така нерівність:

$$\sqrt{(ab+bc+ca)}\cdot\sqrt{2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)} \le \sqrt{3(ab+bc+ca)} \text{ або}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \le \tfrac{3}{2},$$

а ця нерівність добре відома для кутів трикутника.

4.1. Знайдіть усі такі натуральні n, для яких числа $12n-119$ та $75n-539$ є точними квадратами натуральних чисел.

***Відповідь*:** $n=20$, $n=12$.

Розв'язання. Позначимо $a^2=12n-119$ та $b^2=75n-539$. Тепер звільнимось від змінної n:

$$\frac{a^2+119}{12}=\frac{b^2+539}{75} \text{ або } 25(a^2+119)=4(b^2+539).$$

Далі перепишемо цю рівність таким чином:

$$4b^2-25a^2=819 \text{ або } (2b-5a)(2b+5a)=3^2\cdot 7\cdot 13.$$

Залишається перебрати варіанти, з урахуванням того, що $2b-5a<2b+5a$.

$\begin{cases} 2b-5a=1, \\ 2b+5a=819, \end{cases} \Rightarrow 10a=818$ – цілих розв'язків немає.

$\begin{cases} 2b-5a=3, \\ 2b+5a=273, \end{cases} \Rightarrow 10a=270 \Rightarrow \begin{cases} a=27, \\ b=69, \end{cases} \Rightarrow n=\frac{a^2+119}{12}=\frac{848}{12}$ – не ціле число.

$\begin{cases} 2b-5a=7, \\ 2b+5a=117, \end{cases} \Rightarrow 10a=110 \Rightarrow \begin{cases} a=11, \\ b=31, \end{cases} \Rightarrow n=\frac{a^2+119}{12}=20$ – перша відповідь.

$\begin{cases} 2b-5a=9, \\ 2b+5a=91, \end{cases} \Rightarrow 10a=82$ – цілих розв'язків немає.

$\begin{cases} 2b-5a=13, \\ 2b+5a=63, \end{cases} \Rightarrow 10a=50 \Rightarrow \begin{cases} a=5, \\ b=19, \end{cases} \Rightarrow n=\frac{a^2+119}{12}=12$ – друга відповідь.

$\begin{cases} 2b-5a=21, \\ 2b+5a=39, \end{cases} \Rightarrow 10a=18$ – цілих розв'язків немає.

5.1. Дійсні числа $a,\ b$ задовольняють умову: $a^{2014}+b^{2014}=a^{2016}+b^{2016}$. Доведіть, що справджується нерівність: $a^2+b^2\le 2$.

Розв'язання. Без обмеження загальності можемо вважати що ці числа невід'ємними. Очевидно, що при $b=1$ маємо $a=0$ або $a=1$ і умову задовільнено. При $a=b$ так само маємо $a=b=0$ або $a=b=1$. Нехай тепер $a>b$ та $a\ne 1$. Перепишемо умову задачі таким чином:

$$a^{2014}(a^2-1)=b^{2014}(1-b^2) \text{ або } \frac{a^{2014}}{b^{2014}}=\frac{1-b^2}{a^2-1}.$$

Оскільки $\frac{a^{2014}}{b^{2014}}>1$, то $\frac{1-b^2}{a^2-1}>1$. Якщо $a^2-1>0$, то $2>a^2+b^2$. Якщо ж $a^2-1<0$, то $b^2<a^2<1$, звідки $a^2+b^2<2$.

10 клас

1. Розв'яжіть нерівність:

$$\frac{(x+1)^4}{(x-1)^3}+\frac{x-1}{16}\ge\frac{(x+1)^2}{2(x-1)}.$$

(Анікушин Андрій)

***Відповідь*:** $x\in(1;+\infty)\cup\{-\frac{1}{3};-3\}$.

***Розв'язання*.** Перепишемо нерівність таким чином:

$$(x-1)\left(\frac{(x+1)^4}{(x-1)^4}+\frac{1}{16}-\frac{(x+1)^2}{2(x-1)^2}\right)\ge 0 \text{ або } (x-1)\left(\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}-\frac{1}{4}\right)^2\ge 0.$$

Оскільки квадрат невід'ємний, то розв'язком нерівності будуть значення $x>1$ (оскільки $x\ne 1$ з ОДЗ), а також значення при яких квадрат дорівнює нулеві. Знайдемо їх.

$\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}-\frac{1}{4}=0$ або $\frac{x+1}{x-1}=\pm\frac{1}{2}$. Звідси маємо два випадки.

$2x+2=x-1$ звідки $x=-3$; або $-2x-2=x-1$ звідки $x=-\frac{1}{3}$.

2. Чи існують четвірки дійсних чисел a,b,c,d, що задовольняють умови:

$$a+b+c=d \text{ та } \frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}=\frac{1}{ad}+\frac{1}{bd}+\frac{1}{cd}.$$

(Рубльов Богдан)

***Відповідь*:** таких чисел не існує.

***Розв'язання*.** Зведемо другу умову до спільного знаменника:

$$\frac{cd+bd+ad}{abcd}=\frac{bc+ac+ab}{abcd}\Rightarrow ab+bc+ca-ad-bd-cd=0.$$

Другу умову піднесемо до квадрату у такому вигляді:

$$a+b+c-d=0\Rightarrow a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+bc-ad-bd-cd)=0,$$

звідси, з урахуванням попередньої рівності, маємо, що

$$a^2+b^2+c^2+d^2=0,$$

а це неможливо, оскільки звідси випливає, що $a=b=c=d=0$, що суперечить другій заданій умові.

3. Задача № 4 за 9 клас.

4. У гострокутному трикутнику ABC проведені висоти AA_1, BB_1 та CC_1. З вершини A на пряму A_1B_1 опущено перпендикуляр AK, а з вершини B опущено перпендикуляр BL на пряму C_1B_1. Доведіть, що $A_1K=B_1L$.

(Рожкова Марія)

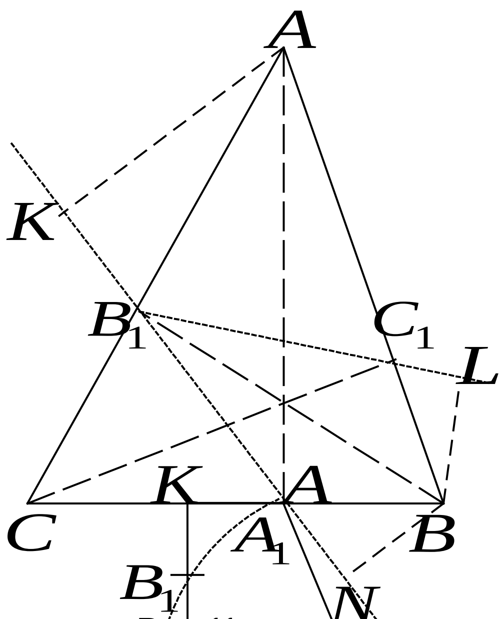

Рис. 11

***Розв'язання*.** Опустимо перпендикуляр BN на пряму A_1B_1 (рис. 11). Нагадаємо відому лему.

Лема. У ортоцентричному $\triangle A_1B_1C_1$ висоти AA_1, BB_1 та CC_1 $\triangle ABC$ є бісектрисами кутів $\triangle A_1B_1C_1$.

Тоді BB_1 – бісектриса $\angle A_1B_1C_1$, тому $B_1N=B_1L$. Тоді рівність $A_1K=B_1L$ рівносильна $A_1K=B_1N$, тобто $A_1N=B_1K$.

Розглянемо прямокутну трапецію $AKNB$ (рис. 12), побудуємо коло на AB, як на діаметрі (центр кола позначимо через O). Зрозуміло, що воно пройде через точки A_1 та B_1, бо AA_1 та BB_1 – висоти. Проведемо відрізок $OT\parallel KA$. Тоді з прямокутних трикутників

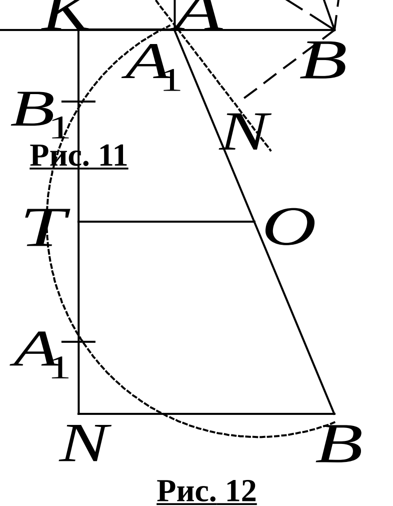

Рис. 12

OTB_1 та OTA_1 випливає, що $TB_1 = TA_1$, з того, що OT – середня лінія трапеції $AKNB$ випливає, що $TK = TN$, отже $A_1N = B_1K$. Твердження доведене.

5. Є опуклий 11–кутник. Його діагоналі пофарбовані у декілька кольорів. Два кольори називаються такими, що перетинаються, якщо існують два відрізки, що пофарбовані у ці кольори і які перетинаються у деякій внутрішній точці цих відрізків. Яка найбільша кількість різних кольорів може бути використана, щоб кожні два використані кольори були такими, що перетинаються.

(Рубльов Богдан)

Відповідь. 22.

Розв'язання. Позначимо вершини 11-кутника числами 1, 2, …, 11. Його діагоналі будемо позначати парою вершин, які вона з'єднує, наприклад, 2–7. Без обмежень загальності будемо вважати цей 11-кутник правильним, щоб його діагоналі були 4-х типів – найбільші (наприклад, 1–6), середні більші (1–5), середні менші (1–4) та найменші (1–3).

Фарбуємо ці діагоналі в 22 кольори, так що кожного кольору рівно по 2 діагоналі, так як це зображено нижче:

1) 1–7, 2–11; 2) 2–8, 3–1; 3) 3–9, 4–2; 4) 4–10, 5–3;
5) 5–11, 6–4; 6) 6–1, 7–5; 7) 7–2, 8–6; 8) 8–3, 9–7;
9) 9–4, 10–8; 10) 10–5, 11–9; 11) 11–6, 1–10; 12) 2–6, 5–8;
13) 3–7, 6–9; 14) 4–8, 7–10; 15) 5–9, 8–11; 16) 6–10, 9–1;
17) 7–11, 10–2; 18) 8–1, 11–3; 19) 9–2, 1–4; 20) 10–3, 2–5;
21) 11–4, 3–6; 22) 1–5, 4–7.

Перевіркою переконуємось, що вони задовольняють умову. Для перевірки скористаємось "регулярністю" фарбування. Перші 11 кольорів містять пару діагоналей – найменшу та найбільшу, другі 11 кольорів містять пару різних середніх діагоналей. Достатньо переконатись, що кожний з кольорів **12)–22)** перетинається з кольором **1)**, і що кожний з кольорів **1)–11)** перетинається з кольором **12)**.

Покажемо, що це найбільша кількість різних кольорів. Таким чином ми повинні пофарбувати $C_{11}^2 - 11 = 44$ діагоналі. Якщо кожного кольору принаймні дві діагоналі, то щонайбільше цих кольорів може бути 22. Припустимо, що умову може задовольнити колір, який складається рівно з однієї діагоналі. Виберемо найбільшу діагональ, наприклад, **1–6** і підрахуємо, скільки різних діагоналей вона перетинає у внутрішніх точках. З одного боку по відношенню до цієї діагоналі розташовано 4 вершини, з іншого – 5, таким чином вона перетинає 20 діагоналей, але кольорів щонайменше 23 (більше ніж запропонований варіант), а тому кожний колір повинен перетинатися принаймні з 22 відрізками, що суперечить цій побудові. Одержана суперечність завершує доведення того, що максимум 22 кольори.

4.1. У трикутнику ABC сторона $AC = \frac{1}{2}(AB + BC)$, BL – бісектриса $\angle ABC$, K, M – середини сторін AB і BC відповідно. Знайдіть величину $\angle KLM$, якщо $\angle ABC = \beta$.

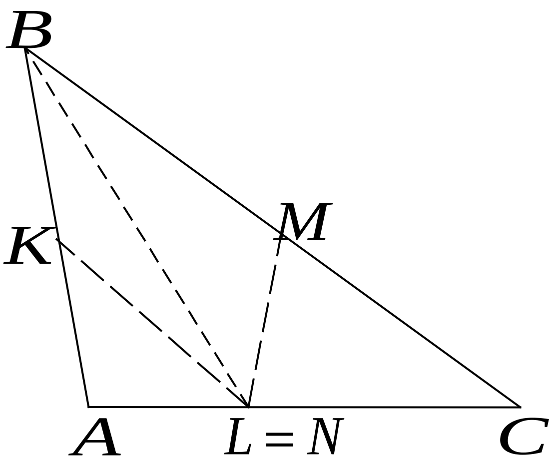

Рис. 13

Відповідь: $90° - \frac{1}{2}\beta$.

Розв'язання. Відмітимо точку $N \in AC$, для якої $AN = \frac{1}{2}AB = AK$, тоді (рис. 13)

$$NC = AC - AN = \frac{1}{2}(AB + BC) - \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}BC = MC.$$

Тому $\frac{AN}{NC} = \frac{AB}{BC}$, звідки $N = L$. Тому ΔKAL та ΔLMC – рівнобедрені, звідси

$$\angle AKL = \angle ALK = 90° - \frac{1}{2}\angle A, \ \angle CML = \angle CLM = 90° - \frac{1}{2}\angle C, \text{ звідки}$$

$$\angle KLM = 180° - \angle ALK - \angle CLM = \frac{1}{2}(\angle A + \angle C) = 90° - \frac{1}{2}\beta.$$

5.1. На дошці записаний вираз $**...*$, що складається з непарної кількості зірочок. Андрій та Олеся грають у таку гру: вони по черзі (Андрій перший) замінюють будь-яку ще не замінену зірочку будь-якою цифрою (на перше місце не можна ставити цифру 0). Якщо в решті вийде число, що кратне 11, то перемагає Андрій, якщо ні, то – Олеся. Хто переможе при правильній грі?

***Відповідь*:** Олеся перемагає.
***Розв'язання*.** Стратегія Олесі така. Якщо Андрій міняє деяку зірочку окрім першої на якусь цифру c, то Олеся міняє на таку ж цифру c будь-яку (окрім першої) зірочку, яка стоїть на місці іншої парності. Якщо тепер останнім кроком Андрій замінює першу зірочку на якусь цифру $d \neq 0$, тоді маємо, що різниця між сумою цифр на парних позиціях та на непарних дорівнює d, і це число не кратне 11, тому й одержане число не кратне 11.
Якщо Андрій не останнім ходом замінює першу зірочку на цифру $d \neq 0$, то Олеся замінює довільну зірочку на парній позиції на число $d-1$. Далі притримується раніше описаній стратегії. Тоді перед останнім ходом різниця між цифрами, що стоять на непарних місцях та цифрами на парних місцях дорівнює 1. Далі просто Андрій останнім ходом ставить цифру на непарну позицію, і досягти, що ця різниця стала кратною 11 (тобто бути рівним 0 або 11) не зможе.

11 клас

1. Знайдіть усі розв'язки рівняння $2^{\sin x} = \sin 2^x$ на проміжку $[0; \pi)$.

***Відповідь*:** розв'язків не існує.
***Розв'язання*.** Оскільки на проміжку $[0; \pi)$ $\sin x \geq 0$, то функція $2^{\sin x} \geq 2^0 = 1$, а $\sin 2^x \leq 1$. Таким чином рівність можлива лише якщо обидві функції одночасно приймають значення 1. Але $2^{\sin x} = 1$ лише при $x = 0$, а при цьому значенні $\sin 2^0 = \sin 1 < 1$. Таким чином розв'язків не існує.

2. ***а)*** Відомо, що у нескінченній арифметичній прогресії натуральних чисел є деякий член, який є k–м степенем натурального числа, більшого від 1. Доведіть, що серед членів прогресії є нескінченна кількість таких, що також є k–ми степенями натуральних чисел.
б) Чи існує нескінченна зростаюча арифметична прогресія натуральних чисел жоден член якої не є степенем натурального числа більше першої?

(Рубльов Богдан)

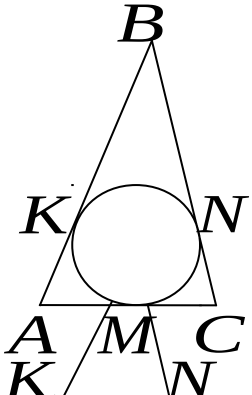

Рис. 14

Відповідь*:** ***б) існує.
Розв'язання*.** ***а) Нехай прогресія має різницю $d > 0$. Якщо $d = 0$, то усі члени задовольняють умову, а при $d < 0$, то серед членів прогресії не усі натуральні.
За умовою, для деяких натуральних $m > 1$ та l справджується рівність: $a_l = m^k$. Тоді неважко зрозуміти, що $(m + dn)^k = m^k + dN$. Ну і тепер неважко побачити, що

$$m^k + dN = a_l + dN = a_1 + (l-1)d + dN = a_1 + d(N + l - 1) = a_{N+l},$$

що й треба було довести.

б) Розглянемо, наприклад, таку прогресію: $a_n = 2 + 4(n-1)$. Зрозуміло, що кожний її член ділиться на 2, але не ділиться на більшу степінь числа 2. Це показує, що число не може бути степенем натурального числа більше ніж перша.

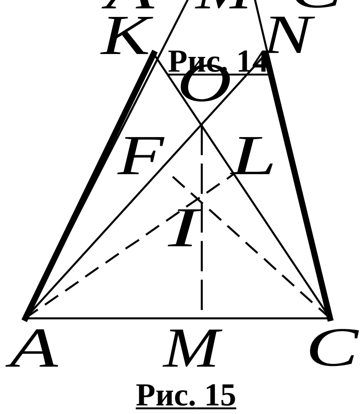

Рис. 15

3. Задача № 5 за 9 клас.

4. У трикутнику ABC, для якого $AC < AB < BC$, на сторонах AB та BC вибрали точки K та N відповідно таким чином, що $KA = AC = CN$. Прямі AN та CK перетинаються в точці O. З точки O провели відрізок $OM \perp AC$ $(M \in AC)$. Доведіть, що кола, які вписані у трикутники ABM та CBM, дотикаються одне одного.

(Нагель Ігор)

Розв’язання. При доведенні будемо впиратися на таку теорему.

Теорема. Нехай коло, що вписане в ΔABC, дотикається його сторін AB, BC та CA у точках K, N та M відповідно (рис. 14). Тоді

$$AM = \tfrac{1}{2}(AB + AC - BC).$$

Розглянемо рис. 15. Нехай тут AL та CF – висоти ΔOAC, які перетинаються в точці I. Тоді ці відрізки водночас бісектриси відповідних кутів ΔABC, тому I – інцентр цього трикутника, а точка M – точка дотику вписаного кола до сторони AC.

Нехай кола, що вписані в ΔABM та ΔACM дотикаються до відрізка BM у точках N та P відповідно (рис. 16). Покажемо, що $N = P$.
Застосуємо наведену вище теорему:

$$NP = BN - BP,\ NP = MP - MN \ \Rightarrow\ 2NP = BN + MP - BP - MN =$$
$$= \tfrac{1}{2}(AB + BM - AM + BM + CM - BC - BC - BM + MC - AM - BM + AB) =$$
$$= AB - BC + CM - AM = AB - BC + \tfrac{1}{2}(AC + BC - AB - AB - AC + BC) = 0,$$

що й треба було довести.

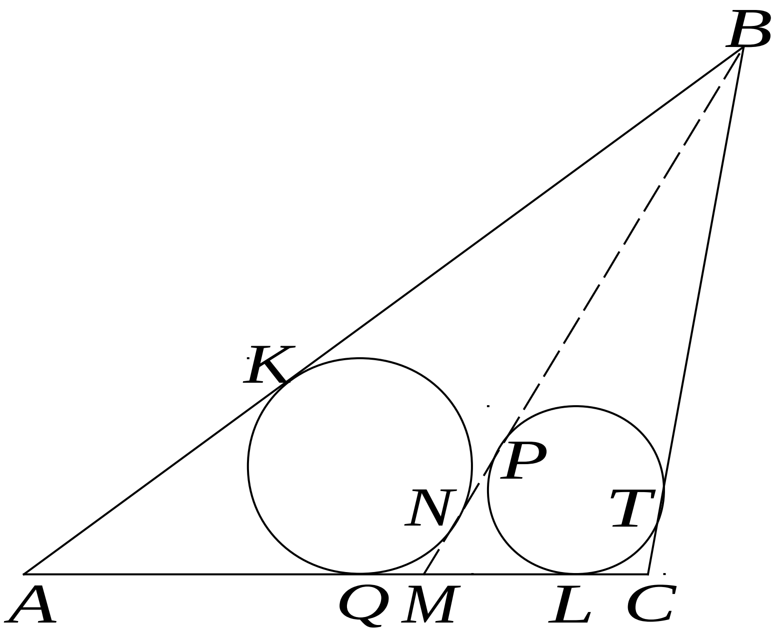

Рис. 16

5. Задача № 5 за 10 клас.

4.1. Побудуємо для трикутника ABC коло S, що проходить через точку B і дотикається до прямої CA у точці A, коло T, що проходить через точку C і дотикається до прямої BA у точці A. Другу точку перетину кіл S та T позначимо через D. Точку перетину прямої AD та описаного кола ΔABC позначимо через E. Доведіть, що D – середина відрізку AE.

Розв’язання. Позначимо кути $\angle ABD = \alpha$, $\angle DCA = \beta$ (рис. 17). З властивостей вписаних кутів маємо, що $\angle CAD = \angle ABD = \alpha$, $\angle DAB = \angle DCA = \beta$, тому $\Delta ABD \sim \Delta CAD$. Далі маємо, що $\angle CAE = \angle CBE = \alpha$, $\angle EAB = \angle ECB = \beta$. Знову випишемо рівні кути:

$$\angle BED = \angle BEA = \angle BCA,$$
$$\angle DBE = \angle CBE + \angle DBC =$$
$$= \angle ABD + \angle DBC = \angle ABC.$$

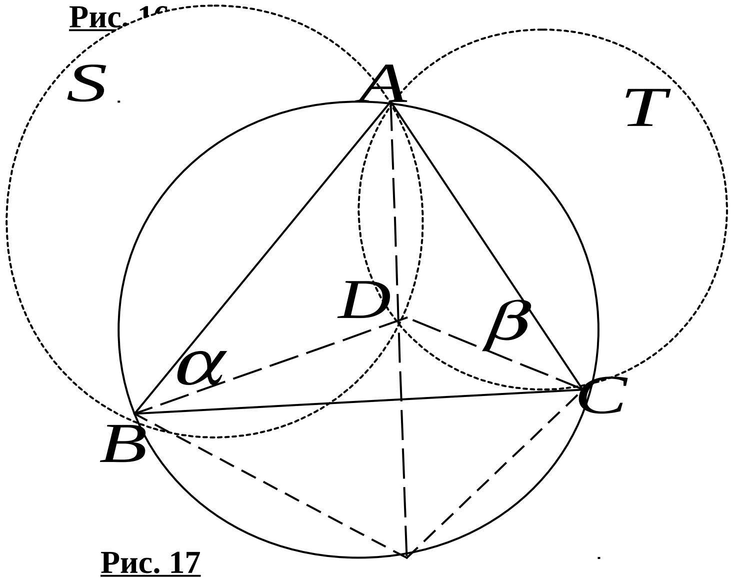

Рис. 17

Тому $\Delta ABC \sim \Delta DBE$. Далі маємо, що $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{AD}$, звідси $AD = \frac{AC \cdot BD}{BA}$. Також $\frac{DB}{DE} = \frac{AB}{AC}$, звідси $DE = \frac{AC \cdot BD}{BA} = AD$, що й треба було довести.

5.1. Задача № 5.1 за 10 клас.