

## 统一的高阶精确的基本非振荡方案, III

阿米哈顿

加州大学洛杉矶分校数学系。以色列纽约大学  
的美国数学学院

我的恩和你

加州大学洛杉矶分校的Mathemanc

和

查克拉瓦蒂

罗克韦尔伪装中心, 千橡树。卡尔约尔马

1986年4月11日收到; 10月修订(1986年3月3日)

献给彼得·洛杉矶国际机场的60岁生日

继续对双曲连续律近似方法的构造和分析。摘要提出了一种均匀高阶精确格式, 将戈杜诺夫格式和二阶精确MUSCL推广到任意阶精度。解的分段多项式重建, 时间演化的近似解的初始值问题, 并平均这个近似解的重建算法从一个新的插值技术, 当应用于光滑data.giveshgh-order方法时, 函数是光滑的, 但避免了间断时的吉布斯现象。与标准的有限差分方法不同, 这种方法使用网格嘴的自适应模板, 因此, 得到的方案是高线性的。C1987学院出版社

### 1.介绍

在本文中, 第三部分, 我们继续使用本质的振荡, 一致高阶精确格式的双曲守恒定律系统弱解的数值逼近

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad (1.1a)$$

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (1.1b)$$

\*研究由美国国家科学基金DMS85-03294, ARO基金DAAG29-85-K-019 0资助。NASACon-分类协议NCA2-IR390-403, 和美国宇航局兰利GlantNAG1-270。

232等。

这里的 $u = (u_1, \dots, u_m)$  是一个状态向量,  $f(u)$ , 通量, 是 $m$ 个分量的平均值函数。这个系统是双曲的, 因为他们是 $m \times m$ 雅可比矩阵席矩阵

$$A(u) = \partial f / \partial u$$

是否有 $m$ 个实特征值

$$\lambda_1(u) \leq \lambda_2(u) \leq \dots \leq \lambda_m(u)$$

以及一个右基因载体 $\{(u)\}_{K=1}^K$ 。用 $A(u)$ 的左特征向量表示, 并假设

$$l_k = \delta k \cdot \{l_k(u)\}_{k=1}^m$$

假设初值问题 (IVP) (1.1) (嵌入在包括熵考虑的适当设置中) 在柯西意义上很好地提出, 它的弱解通常是分段光滑的。用 $E(t)$ 来表示它的进化算子, 即,

$$u(\cdot, t) = E(t) \cdot u_0. (1.2)$$

Let  $w(x)$  表示  $w(x)$  的滑动平均值

$$\bar{w}(x) \equiv \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} w(x+y) dy \equiv (A_h \cdot w)(x) (1.3a)$$

我们注意到  $\bar{w}$  比  $w$  平滑一个导数, 并且在平滑点上

$$\bar{w}(x) = w(x) + O(h^2). (1.3b)$$

弱解 (1.1) 的  $x$  中的滑动平均值,  $u(x, t)$  满足

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{u}(x, t) + \frac{1}{h} [f(u(x+h/2, t)) - f(u(x-h/2, t))] = 0. (1.4)$$

将这个关系从  $t$  到  $t+\tau$  积分, 我们得到

$$u(x, t+\tau) - \bar{u}(x, t) - \lambda [f(x+h/2, t; u) - f(x-h/2, t; u)], (1.5a)$$

where  $\lambda = \tau/h$  和

$$\hat{f}(x, t; w) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(w(x, t+\eta)) d\eta (1.5b)$$

设  $\{I, \times [t_n, t_{n+1}]\}$ , 其中  $I = [x_{j-1}, x_j]$ ,  $j=1, 2, \dots, N$  和  $x = \alpha h$ ,  $t_n = n\tau$  为  $-\infty < n < \infty$ 。写关系 (1.5) 在  $x=x$ ,  $t=t$ , 我们得到

$$u'' + \lambda [f(x, t; u) - f(x-h/2, t; u)] = 0. (1.6a)$$

这里

$$\bar{u}_j^n = \bar{u}(x_j, t_n) = \frac{1}{h} \int_{t_j} u(x, t_n) dx \quad (1.6b)$$

是 $t_n$ 时刻 $u$ 的“细胞平均值”吗

在本文中, 我们描述了一类数值格式, 它将戈杜诺夫格式[5]及其二阶推广[22,4,15]推广到任意有限格式  
准确度这些方案可以写成标准的保护形式

$$u_{j+1}^{n+1} = u_j^n - \lambda(f_{j+1/2}^n - f_{j-1/2}^n) + E_a(t_n, u_j^n). \quad (1.7a)$$

这里 $E_a(t)$ 表示 $t$ 的数值解算子和 $f_{j+1/2}$ , 数值通量, 表示 $2kva$ 可读数的函数

$$\bar{f}_{j+1/2}^n = \bar{f}(v_{j-k+1}^n, \dots, v_{j+k}^n). \quad (1.7b)$$

这与(1.1)中的通量 $f(u)$ 相一致, 即 $f(u, u, \dots, u) = f(u)$ 。我们设计这些方案, 使保护形式(1.7a)将近似于(1.5)。设置在(1.7), 并将其与(1.6)进行比较, 我们可以看到, 如果数字flux(1.7b)可以扩展为 $v_j^n \equiv \bar{u}_j^n$

$$f_{j+1/2}^n = f(x_{j+1/2}, t_n; u) + d(x_{j+1/2}, h) + O(h^{r+1}) \quad (1.8a)$$

那时

$$u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} - \lambda[d(x_{j+1/2}) - d(x_{j-1/2})]h + O(h^{r+1}).$$

这表明, 如果是数值flux $f_{j+1/2}$ satisfies(1.8a), 则在单元格的平均感觉平均值中的截断误差为

$$u(x_{j+1/2}, t_{n+1}) - [E_2(t_n)u(\cdot, t_n)]_j = \lambda[d(x_{j+1/2}) - d(x_{j-1/2})]h^2 + O(h^{r+1}), \quad (1.8b)$$

其中 $(h^{r+1})$ 表示 $(x)$ 是Lip schitz连续的。

当 $f(u)$ 是 $u$ 的一个非线性函数时, 将 $f(x_{j+1/2}, t_n; u)$ 近似为 $O(h^r)$ 需要知道该解的点态值。为了设计一个满足(1.8a)的数值通量, 我们必须从给定的顺序精确的点态信息, 这是近似于解的细胞平均值(1.6b)。在不连续点上, 求解到任意高阶的精度 $r$ , 是我们的新方案设计中最重要的一步 $\{v_j^n\} \{ \bar{u}_j^n \}$ ,

Given  $w = W(x, \cdot)$ , 分段光滑函数 $(x)$ 的单元平均值, 我们构造 $tR(x; w)$ , 一个均匀多项式度 $(r-1)$ 的分段多项式函数, 满足:

(i)在所有点 $x$ 有一个 $w$ 是光滑的

$$R(x;w)=w(x)+e(x)h+O(h^7+1). \quad (1.9a)$$

(二) 保护意义上的保护

$$R(x;\vec{w})=w, \quad (1.9b)$$

这里 $R$ 表示 $R$ 的滑动平均值 (1.3)。 (iii)

它本质上是同步振荡的

$$TV(R(\cdot; w)) \leq TV(w) + O(h^4), \quad (1.9c)$$

其中,  $TV$ 表示 $x$ 中的总变量。

不等式 (1.9c) 意味着重建 $R$ 本质上是非振荡的, 因为它没有类似agibbs现象, 在不连续点产生 $O(1)$ 伪振荡, 这些点指向跳跃热的大小。在[16,11,17]中, 我们用标度来描述 $R(x; ii)$ 。我们在那里表明,  $R$ 可能偶尔产生 $O(h^4)$ 虚假的 $oscil$ 激光, 这是在截断误差的水平上。这些小的伪振荡可能只发生在 $w$ 的平滑 $h$ 部分, 它们通常在计算网格上的 $(x)$ 上消失。为了完整起见, 我们在第3节中回顾了这个问题; 我们将将其扩展到本文第5节中的向量函数 $sw(x)$ 。

利用重建 (1.9), 我们可以表达新方案的最新形式

$$Eh(t) \cdot W = A_2 \cdot E(t) \cdot R(\cdot; w). \quad (1.10)$$

这里 $A_p$ 是 $RHS$  of (1.3) 上的线程平均歌剧,  $E(t)$ 是精确的演化算子 (1.2),  $w$ 是 $x$ 的任何分段函数。这些格式是对戈杜诺夫格式及其二阶扩展格式的推广, 即 (1.10) 具有一阶精确的分段连续构造

$$R(x;w)=w, \text{ for } x_{j-1/2} \leq x < x_{j+1/2} \quad (1.11)$$

正是戈杜诺夫格式[5]; (1.10) 与二阶精确分段线性重构

$$R(x; w) = W, \text{ for } x_{j-1/2} \leq x < x_{j+1/2} \quad (1.12a)$$

到这样的程度

$$s_j = wx(x_j) + O(h), \quad (1.12b)$$

是对[22、4和15]中所描述的Godunov方案的二阶扩展的抽象形式。

我们还记得, 演化算子 $E(t)$ 在标量情况下是单调的。自从一个, 膜平均算子也是单调的, 我们看到在sc翼的情况

$$\text{电视}(E(t)w) = \text{电视}(\text{安} \cdot E(t) \cdot R(\cdot; w)) \leq \text{电视}(R(\cdot; w)). \quad (1.13a)$$

如果 $w$ 在(1.13a)是一个分段平滑函数 $w(x)$ 的滑动平均值, 那么它从(1.9c)开始

$$\text{电视}(E_4(t)w) \leq TV(w) + O(h'). \quad (1.13b)$$

这表明, 标量情况下的方案(1.10)本质上是非振荡的, 与重建的方式完全相同: 它们在不连续关系时没有类似agibbs的现象, 但它们偶尔会在截断误差的 $level O(h')$ 上产生小的虚假振荡(见本节末尾的注释1.3)。

方程(1.10)是解释器(1.7)中的一个方案的抽象算子表达式。虽然它生成的离散值, 这是网格平均的 $r$ 阶精确近似, 但它的操作涉及一个全局定义的点态近似 $(x, t)$ , 我们表示为 $byv_1(x, t)$ 。后者定义为时间条纹的 $tn+1$ 中的所有 $\leq$ , 在 $\{tk\}$ 处可能存在不连续: 我们将使用标准化符号 $vn(x, tn \pm 0)$ 来区分这两个可能不同的值。 $v_j^n, \bar{u}_j^n$ ,

我们define $v_4(x, t)$ 通过以下方案的算法描述(1.10)。我们从设置开始

$$v_j^0 = \bar{u}_0(x_j).$$

其中,  $u_0$ 为给定的初始数据(1.1b),  $\bar{u}_0$ 为其滑动平均值(1.3a)。在(1.6b)中定义了近似于 $\{u^n\}$ 后, 我们继续对“+by”进行以下三个步骤的评估:  
 $v^n = \{v_j^n\}$

(i) *Reconstruction. 阐明*

$$v_1(x, tn+0) = R(x; t^n), \quad (1.14a)$$

请注意,  $v_1(x, tn+0)$ 是一个点态近似值 $tou(x, tn)$ 。(ii

) 该中心的解决方案。对于 $tn \leq t < tn+1$ , 定义

$$0_1(\cdot; t) = E(t - tn) \cdot v_1(\cdot; tn+0). \quad (1.14b \text{ (iii) 细胞平均值})$$

通过定义来关闭算法的时间循环

$$v_j^{n+1} = \bar{v}_h(x_j; t_{n+1} - 0) = \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} v_h(x, t_{n+1} - 0) dx. \quad (1.14c)$$

236哈滕等人。

我们注意到,  $\leq$ , 作为 (1.1) 和  $<$  和  $+1$  的精确解, 在这个条带中满足 (1.5)。利用 (1.14a) 中重建的守恒性 (1.9b), 即,

$$v_0(x, t_n+0) = v^n, \quad (1.15)$$

我们从 (1.5) 得到, 方案 (1.10) 和 (1.14) 满足该保存形式

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \lambda(\bar{f}_{j+1/2} - \bar{f}_{j-1/2}) \quad (1.16a)$$

随着数值通量的增加

$$\bar{f}_{j+1/2} = \bar{f}(x_{j+1/2}, t_n; v_h) \equiv \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(v_h(x_{j+1/2}, t_n + \eta)) d\eta. \quad (1.16b)$$

现在我们转来研究该方案的局部截断误差。对于这个假设, 我们考虑一个 (1.14) 的单一应用, 从解的精确细胞平均值开始。这是从 (1.9a) 和 (1.14a) 中得出的

$$v_j^n \equiv \bar{u}_j^n$$

$$v_j(x, t_n+0) = u(x, t_n) + e(x)h + O(h^2 + l). \quad (1.17a)$$

这个定义 (1.14b) 和我们对 IVP (1.1) 的适性的假设暗示了这一点

$$D_1(x, t) = u(x, t) + O(h^c) \text{ 为 } t, \leq t < t_n+1 \quad (1.17b)$$

这反过来又意味着模式的数字通量 (1.16b) 化 (1.8a), 即,

$$\bar{f}_{j+1/2} = f(x_{j+1/2}, t_n; u) + d(x_{j+1/2})h^2 + O(hr + l). \quad (1.17c)$$

显然, (1.17c) 中的  $d(x)$  的非光滑性只能由非光滑性引起系数  $e(x)$  在 (1.17a) 中。从 (1.8b) 可知, 远离不连续点和  $e(x)$  点不能连续, cell 平均值的局部截断曲线为  $O(hr + l)$ 。

Let  $u(x, t)$  是 (1.1) 的光滑解, 而 let  $u_h$  假设  $h \rightarrow 0$ ,  $t = t(h)$ , 数值近似逐点收敛于  $u(x, t)$ 。如果  $e(x)$  是全局的 Lipschitz 连续的, 那么在细胞平均意义上的局部截断误差为全局的  $O(hr + l)$ 。在时间  $t$ , 在执行  $N = t/h$  时间步长后, 我们期望累积误差为  $O(hr)$ , 即,

$$v_j^n = u(x, t_n) \quad (1.18a)$$

$+ O(h^c)$  在这种情况下, 我们从 (1.9a) 中

看出

$$v_0(x, t_n+0) = R(x; p^-) = u(x, t_n) + O(h). \quad (1.18b)$$

因此, 在计算结束时, 我们有两组输出数据: (i) 将  $\{u(x, t_n)\}$  近似为  $O(h)$  和 (ii)  $x, R(x; v_M)$  的分段多项式函数, 它将  $u(x, t_n)$  近似为  $O(h)$ 。

**Remark.1.1** .请注意, (1.8) 与  $a$  在 schemes[20.21] 公式中使用的点态意义。

在这里, 我们需要  $v^{n+1} = u(x, t_{n+1}) + O(h^{r+1})$ 。到  $u(x, t_n)$  我们需要一个数值通量

$$-\lambda(\hat{f}_{j+1/2} - \hat{f}_{j-1/2}) = \sum_{k=1}^r \frac{\tau^k}{k!} \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \Big|_{(x_j, t_n)} + O(h^{r+1}).$$

我们将在下面的条件 (1.8a) 中看到, 在信峰平均意义上的准确性在许多方面更容易管理

备注第1.2条。当  $u$  在某一点上不是 Lipschitz 连续时, 则局部截断误差 (1.8b) 只有  $O(h^r)$ 。在 MUSCL 型方案 [22,4] 中, 这种事故笔在局部极点; 在高阶精确方案中, 这可能发生在  $u$  的高衍生物的根上 (见 [15,11])。由于局部积累, 我们预计在时间  $t/t$  时间步长之后的点态误差在这些点上只有  $O(h^{r-1})$ 。远离这些点, 我们期望点  $e$  的累积误差剩余为  $O(h)$ 。因此, 模式  $(r-1)$  第阶能达到最大范数。由于这些方案的非振荡性质, 我们期望  $e(x)$  不能是利普希茨连续的点数保持有界的  $\rightarrow 0$ 。在这种情况下, 累积误差的  $theL_1$  - 正常值是  $O(h^r)$ 。为了区分在通常点态意义上的  $r$  阶精确的方案, 以及那些在  $theL_1$  范数中的  $r$  阶精确但在最大范数中只有  $(r-1)$  精确的方案, 我们应该对后者使用“ $r$  阶精确”, 从而通过使用报价  $m$  标记来限定差异。

备注第1.3条。众所周知, 数值近似的总变化是一致有界的, 即:

$$TV(v_T(\cdot, t)) \leq C \cdot TV(u_0), \quad (1.19)$$

其中  $\leq T$  的常数  $C$  与  $h$  无关, 则任何细化序列  $\rightarrow 0, t=0(h)$  的子序列转化为 (1.1) 的弱解。因此, 总体变化的均匀边界对于 (1.1) 的数值近似是一种适当的稳定性感; 参见 [9,10] 和那里引用的参考文献  $L_1^{loc}$

不等式 (1.13) 表明, 我们的新方案的总变化主要是由重建步骤的变化

$$TV(v^{n+1}) \leq TV(R(\cdot; v^n)). \quad (1.20)$$

harten等人。

当 $R$ 是分段常数函数（1.11）或分段线性函数（1.12）（其中斜率 $s$ 是MUSCL方案的），则

$$TV(R(\cdot; v)) \leq TV(v) \quad (1.21a)$$

对于任何有界总变量的函数。因此，戈多诺夫的计划和muscl方案是标量范围中的总变化减小（TVD）

$$TV(v^{n+1}) \leq TV(v^n); \quad (1.21b)$$

疏=意味着（1.19）与 $C=1$ 。

在高阶推理的证明关系（1.9c）中，我们使用了假设，如果 $h$ 足够小，不连续之间至少有 $+1$ 个平滑点。因此，我们不能将这个结果应用于数字解 $v^n$ 。然而，基于启发式分析和广泛的数值实验，我们推测，在标量的情况下

$$TV(v^{n+1}) \leq TV(v^n) + O(h^{p+1}) \quad (1.22)$$

为some $p>0$ 。

## 2. 审查和概述

在本级数的第一篇论文[15]中，我们给出了在标量情况下（ $m=1$ ）中严格同步振荡的二阶精确格式，即：

$$N_0(v^{n+1}) \leq N_0(v^n), \quad (2.1)$$

其中， $N_0(v)$ 表示 $v$ 中的局部极值的个数。该方案是对“二阶精确”MUSCL方案[22,4]的改进，该方案在标量情况下的量变化递减（TVD），即：

$$电视(v^{n+1}) \leq 电视(v^n). \quad (2.2)$$

为了强制执行（2.2），MUSCL方案中的slopes，（1.12a）受到所谓的“限制器”。由于这个限制器的操作，泰勒展开（1.12b）中的 $O(h)$ 项的系数在局部极值处变成不连续：因此（1.9a）中的 $e(x)$ 不能在子点上beLipschitz连续，从而导致局部极值处的精度损失。在[15]中，通过使用在（1.12a）中满足的修正斜坡来规避这个困难

$$S_s = w(x_s) + O(h^2), \quad (2.3)$$

从而导致在（1.9a）中的全局平滑 $(x)$ 。

虽然最终的结果是对斜率 $s$ 的公式进行了简单的技术修改，但[15]中的方案的设计调用了重大的概念变化。



认识到TVD方案，独立于它们的特殊形式，只在局部极值上一定是第一阶精确的，我们寻求一个较弱的概念，控制超可能增长的总变化的数值解。为此，我们引入了非o振荡方案的概念，它满足分段光滑w的标量情况，

$$\text{电视} (E_1(t) \cdot w) \leq TV(w) + O(h^2) \quad (2.4)$$

而不是(2.2)。在本系列的第二篇论文[16]中，我们证明了即使是（严格的）非振荡schemes (2.1) 的概念也过于限制性，因为它将精度的顺序限制为2。为了设计更高的序精确方案，我们引入了电子振荡方案(1.13)的概念，它排除了类吉布斯现象，但允许在精确误差水平上产生伪振荡。

另一个概念上的变化是“单调性限制器”的消除，这是TVD方案[30]的重要组成部分，可能在某些点导致精度的降低。我们的新方案是单一形式的精度r。对数值解的总变化的可能增长的控制是通过一个自适应模板获得的，该模板在每个点上都尝试使用可用的平滑信息。通过重构步骤(1.14a)将这种自适应选择引入算法中。模板中的点数，与其方向无关，总是(r+1)。

在[16]级数的第二篇论文中，我们研究了在标量常数有效情况下的新格式的稳定性

$$u_t + aux = 0, a = \text{constant}. \quad (2.5a)$$

在这种情况下，精确的演化算符(1.2)只是一个具有常量速度a的平移。因此，我们的方案(1.14)采用了特别简单的形式

$$v^{7+1} = R(x, -at; v''). \quad (2.5b)$$

由于静态蛋白重建步骤的自适应选择，该方案(1.23b)是高度非线性的；因此，使用标准的线性稳定性分析是不合适的。我们在[16]中通过选择初始数据来证明这一点，重建算法选择一个偏向“下风”方向的模板（即，在与风的方向相反的方向）；选择这样的模板是众出了名的不稳定。这种不稳定性通常是通过产生不断增加的振荡来表现出来的，这些振荡从最高导数开始，并传播到函数本身。[16]的数值实验表明，一旦这些振荡开始出现在高阶导数水平上，(2.5b)中模板的自适应选择通过改变模板的方向来反应，从而避免了不稳定性的形成。

在[16]中，我们还研究了(2.5a)的初始边值问题（IBVP）。与s和有限差分格式中的边界处理不同，我们没有

240年，哈顿等人。

使用“数值边界条件”。相反，我们修改了方案（2.5b），限制模板的选择可用信息。因此，该方案在两个边界中的一个边界上偏向于“逆风”。但数值实验表明，该方案是绝对稳定的。

在本文级数的第三部分中，我们转向考虑一般非线性情况。我们的schemes，（1.10）和（1.14）的抽象形式，要求用初始数据（< v”）评估IVP（1.1）的小（即小）的精确解；后者是<的分段波尔项式函数，在{x, +1/2}处可能存在不连续。

当wenR（x； o“）是分段常数函数（1.11）（i.e., 戈杜诺夫格式）时，我们可以用黎曼问题的局部解来表示这个解

$$u, +f(u)x=0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} v_j^n & x < 0 \\ v_{j+1}^n & x > 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

当R（x； v“）是一个高阶的分段单项式函数时，我们一般不能用一个简单的封闭形式来表示ivp（1.1）的孤立离子。然而，（sec[1,6]）wc可以得到任何精度阶的局部泰勒扩展解。

然而，我们注意到，“small“（1.14b中的溶液）的步骤是“cell-averaging”（1.14c”）的步骤。因此，许多精确解的精细细节，可能计算起来非常昂贵，后来在计算v7+1by平均精确解时被忽略（x, \_1/2, X, +1/2）。为了节省我们的方案的成本，使用简化的近似“求解器”是有意义的，它只包含这个决定单元平均值价值的信息，即计算满足数值通量（1.17c）所需的信息。对这种近似求解器的研究是本文中的一个主要问题。在第4节中，我们考虑标度情况；在第5节中，我们将该方案推广到约束定律的双曲系统。

当我们在函数近似的情况下考虑重构（1.9）时，假设w(x)是具有有限数量的不连续度的分段运动，这意味着对于足够小的h，在计算网格上至少存在（r+1）光滑点。因此，在任何平滑点上，都可以从函数的平滑部分中选择一个模板。虽然（1.1）的弱解的x行为通常是这种类型的，但它们的时间依赖性允许不连续点的碰撞，以及它们与边界的碰撞，如固体壁。对于两个连续之间的区域内的点，无论h有多小，必须有一段时间没有足够的点从平滑区域选择一个（r+1）点的模板。因此，将[16]中的尺度重建算法的组件扩展到向量函数可能会在相遇过程中产生巨大的纯振荡。

消除这种伪振荡一直是在设计将我们的标量格式扩展到守恒定律系统时的一个主要考虑因素。在

第5节, 我们表明, 这可以在很大程度上通过扩展通过使用局部定义的特征变量对系统的标量构造算法。

在第6节中, 我们详细描述了气体动力学欧拉方程的推理算法。在第7节中, 我们提出了一些数值实验

在今后的论文中, 我们将把这些方案推广到双介质问题上, 并研究该方案的精度顺序对计算效率的影响。

### 3. 重构

在本节中, 我们将简要描述将在 (1.14a) 中使用的重建  $r(x; w)$ ; 我们请读者参考[16,11,17]以了解更多细节和分析。为此, 我们介绍了  $H_m(x; w)$ , 一个  $x$  的分段多边函数, 它在点  $\{x_i\}$  处插值, 即,

$$H_m(x; w) = w(x_i). \quad (3.1a)$$

$$H_m(x; w) = q_{m,j} + 12(x; w) \text{ for } x_i \leq x \leq x_{i+1} \quad (3.1b)$$

where  $q_{m,j} + 12$  是多项式马林。

我们  $take q_{m,j} + 1/2$  是 (唯一的)  $m$  次多项式, 在  $(m+1)$  连续点  $\{x_i\}$ ,  $i_m(j) \leq i \leq i(j) + m$ , 包括  $x_i$  和  $x_{i+1}$ , 即,

$$q_{m,j} + 12(x_i; w) = w(x_i) \text{ for } i_m(j) \leq i \leq i(j) + m. \quad (3.2a)$$

$$1 - m \leq i_m(j) - j \leq 0. \quad (3.2b)$$

显然, 有这样的多项式对应于  $m$  个不同的选择  $i_m(j)$  服从 (3.2b)。他的自由被用来分配给  $(x_j, x_{j+1})$  点  $(m+1)$ , 这样  $w(x)$  在某些渐近意义上在  $(x_{j+1} - x_j)$  中是“最平滑的”的。

关于  $w(x)$  的平滑度的信息从  $w$  的差分中提取出来。后者可以由来递归地定义

$$w[x_i] = w(x_i) \quad (3.3a)$$

$$w[x_i, \dots, x_{i+k}] = (w[x_i + 1, \dots, x_{i+k}] - w[x_i, \dots, x_{i+k-1}]) / (x_{i+k} - x_i). \quad (3.3b)$$

众所周知, 它  $w$  是  $c$ 。在  $[x_i, x_{i+k}]$  中

$$w[x_i, \dots, x_{i+k}] = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} w(\xi_{i,k}), x_i \leq \xi_{i,k} \leq x_{i+k} \quad (3.3c)$$

242哈滕等人。

但是，如果 $w$ 在这个区间的 $p$ th导数有跳跃不连续， $0 \leq p \leq k$ ，那么

$$w[x_1, \dots, x_1 + k] = 0(h - k + P[w(P)]); \quad (3.3d)$$

这里表示在 $p$ th导数中的跳跃。等量(3.3c) - (3.3d)表示 $w[x_1, \dots, x_1 + k]$ 提供了 $w$ 的非渐近测度，在 $(x_1, \dots, x_1 + k)$ 中是光滑的，但在 $(x_2, \dots, x_{i_2} + k)$ 中是不连续的，然后对于 $h$ 足够小的 $|w[x_1, \dots, x_1 + k]| < |w[x_1, \dots, x_{i_2} + k]|$ 。因此，选择一个 $w$ “最平滑”的静态点的问题基本上是找到一个作为“最小的不同差异”的间隔蛋白（更多细节见[16.11]）。

在[11]中，我们假设采用以下递归算法来评估目标 $(j)$ 。我们从开始设置

$$i_1(j) = j, \quad (3.4a)$$

即 $q_1 y + 1$ ；2是一阶多项式在 $x$ 和 $+1$ 。让我们假设我们已经定义了这个词 $(j)$ ，i.e.， $q_k$ 。+1/2是 $k$ 次多项式插值 $w$

$$XA) \dots, Xi(J) + k.$$

我们现在考虑候选 $q_{k+1}$ ， $+1$ ；2两个 $(k+1)$ 次多项式，通过添加相邻的点到左边或右边的模板；这对应于设置 $i_{k+1}(j) = i(j) - 1$ 或 $i_{k+1}(j) = i(j)$ 。我们选择一个绝对值较小的 $(k+1)$ 阶除差的值，即，

$$i_{k+1}(j) = \begin{cases} i_k(j) - 1 & \text{if } |w[x_{i_k(j)-1}, \dots, x_{i_k(j)+k}]| < |w[x_{i_k(j)}, \dots, x_{i_k(j)+k+1}]| \\ i_k(j) & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3.4b)$$

在[16]中，我们分析了这种精确平滑函数的插值技术，结果表明：

(i)在 $W(x)$ 光滑的地方

$$\frac{d^k}{dx^k} H_m(x; w) = \frac{d^k}{dx^k} w(x) + O(h^{m+1-k}), 0 \leq k \leq m; \quad (3.5a)$$

(ii)  $H_m(x; w)$  是 $w$ 意义上的非振荡插值

那个

$$TV(H_m(x; w)) \leq TV(w) + O(h^{m+1}). \quad (3.5b)$$

现在我们来描述两种不同的技术来解决重新结构问题(1.9)。(有关算法描述，请参见附录。)

# (1)重建是一个原始函数

给定细胞平均光滑函数的 $w$

$$\bar{w}_j = \frac{1}{h_j} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} w(y) dy, \quad h_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}, \quad (3.6)$$

我们可以立即计算原语函数 $W(x)$ 的点值

$$W(x) = \int_{x_0}^x w(y) dy \quad (3.7a)$$

通过

$$W(x_{j+1/2}) = \sum_{i=0}^j h_i \bar{w}_i. \quad (3.7b)$$

自从

$$w(x) \equiv \frac{d}{dx} W(x)$$

我们对原图元函数 $W(x)$  (3.7a) 的点值 (3.7b) 进行插值, 然后得到 $\tilde{w}(x)$  by 定义的近似值

$$R(x; \bar{w}) = \frac{d}{dx} H_r(x; W). \quad (3.8)$$

我们注意到, 这个过程不需要网格的均匀性。

原函数 $W(x)$ 是一个平滑(x).therefore

从 (3.5a), 其中 $\nabla W(x)$ 是平滑的

$$\frac{d^k}{dx^k} H_r(x; W) = \frac{d^k}{dx^k} W(x) + O(h^{r+1-k});$$

因此, 我们从定义 (3.8) 中得到了这个结论

$$\frac{d^l}{dx^l} R(x; \bar{w}) = \frac{d^l}{dx^l} w(x) + O(h^{r-l}). \quad (3.9)$$

which implies (1.9a) for  $l=0$ .

重建的保护区性质 (1.9b) 最低于定义 (3.8):

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_j} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} R(x; \bar{w}) dx &= \frac{1}{h_j} [H_r(x_{j+1/2}, W) - H_r(x_{j-1/2}, W)] \\ &= \frac{1}{h_j} [W(x_{j+1/2}) - W(x_{j-1/2})] = \bar{w}_j. \end{aligned} \quad (310)$$

244哈滕等人。

重构的非振荡性质 (1.9c) 主要遵循插值 (3.5b) 的振子-振荡同步化, 见[16]。  
通过RP的原始函数 (3.8) 进行重构

## (2)通过反褶积法进行重建

我们假设网格是均匀的, 并考虑给定的单元格平均值, 为  $w(x)$  的点值, 即  $w$  的全局定义的滑动平均函数 (1.3), 即  $w; = w(x, )$ , (3.11a)

在哪里

$$\bar{w}(x) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} w(x+y) dy. \quad (3.11b)$$

在 (3.11b) 中扩展  $w(x+y)$ , 我们得到

$$\bar{w}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^{(k)}(x)}{k!} \int_{-h/2}^{h/2} y^k dy = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k h^k w^{(k)}(x), \quad (3.12a)$$

在哪里

$$\alpha_k = \begin{cases} 0 & k \text{ odd} \\ 2^{-k}/(k+1)! & k \text{ even}. \end{cases} \quad (3.12b)$$

将 (3.12a) 的两边乘以  $h^l d/dx^l$  and, 然后截断RHS at  $O(h^r)$  中的扩展, 我们得到

$$h^l \bar{w}^{(l)}(x) = \sum_{k=0}^{r-l-1} \alpha_k h^{k+l} w^{(k+l)}(x) + O(h^r). \quad (3.13a)$$

将  $l=0, \dots, r-1$  的关系 (3.13a) 写成矩阵形式, 我们得到

$$\begin{bmatrix} \bar{w}(x) \\ h\bar{w}'(x) \\ h^2\bar{w}''(x) \\ \vdots \\ h^{r-1}\bar{w}^{(r-1)}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha_2 & 0 & \alpha_4 & \cdots & \alpha_{r-1} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(x) \\ hw'(x) \\ h^2w''(x) \\ \vdots \\ h^{r-1}w^{(r-1)}(x) \end{bmatrix} + O(h^r). \quad (3.13)$$

b) 让我们用  $C$  表示 RHS of (3.13b) 中的系数矩阵。这个矩阵是

上三角形和对角线占优势。将 (3.13b) 的两侧各乘以  $C^{-1}$  就在我们得到的左边

$$\begin{pmatrix} w(x) \\ hw'(x) \\ \vdots \\ h^{r-1}w^{(r-1)}(x) \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} \bar{w}(x) \\ h\bar{w}'(x) \\ \vdots \\ h^{r-1}\bar{w}^{(r-1)}(x) \end{pmatrix} + O(h^r) \quad (3.13c)$$

给定  $\bar{w}$ , 我们将  $w(x)$  用  $H_m(x; \bar{w})$  与  $m \geq r-1$  进行插值, 因为  $w(\geq)$  更平滑比  $w(x)$  从 (3.5a)

$$\frac{d^k}{dx^k} H_m(x; \bar{w}) = \frac{d^k}{dx^k} \bar{w}(x) + O(h^{m+1-k})$$

$w(x)$  是光滑的。我们注意到, 虽然  $H_m$  只在  $x$  处是连续的, 但单边导数  $\frac{d^k}{dx^k} H_m(x; \bar{w})$  确实满足上述关系, 即。

$$\frac{d^k}{dx^k} H_m(x_j \pm 0; \bar{w}) = \frac{d^k}{dx^k} \bar{w}(x_j) + O(h^{m+1-k}). \quad (3.14)$$

接下来我们定义

做  $\bar{D}_l = w, \quad (3.15a) \quad (3.15b) \text{ 为 } l \leq l \leq l。$

$$(3.15b) \bar{D}_l = h^l M \left( \frac{d^l}{dx^l} H_m(x, -0; \bar{w}), \frac{d^l}{dx^l} H_m(x, +0; \bar{w}) \right)$$

其中  $M(x, y)$  是最小的 mod 函数

$$M(x, y) = \begin{cases} s \cdot \min(|x|, |y|) & \text{if } \text{sgn}(x) = \text{sgn}(y) = s \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3.16)$$

清楚地

$$D_l = hw(x) + O(h): \quad (3.17a)$$

使用  $D_l = (D_0, \dots, D_{l-1})^T$  来近似向量, 在 RHS of (3.13c) 上, 我们得到那个

$$D_l = C^{-1} D_l, \quad (3.17b)$$

使满意

$$D_l = (w(x), hw(x), \dots, h^{l-1}w^{(l-1)}(x))^T + O(h). \quad (3.17c)$$

harten等人。

最后我们定义

$$R(x; \bar{w}) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k!} D_{k,j} [(x-x_j)/h]^k \quad \text{for } |x-x_j| < h/2. \quad (3.18)$$

我们注意到，由于C是上三角形D，，在（3.17b）中可以计算出byback-substitution, i.e., 所以我们设置

$$D_{-l,j} = D_{-l,j} \quad (3.19a)$$

然后计算k=r-2, ..., 0

$$D_{k,j} = \bar{D}_{k,j} - \sum_{l=k+1}^{r-1} \alpha_l D_{l,j}. \quad (3.19b)$$

根据定义（3.18）和关系（3.17a），只要w(x)是平滑的

$$\frac{d^l}{dx^l} R(x; w) = \frac{d^l}{dx^l} w(x) + O(h^{r-l}); \quad (3.20)$$

这对于l=0意味着（1.9a）。重建的保护性（1.9b）  
从

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} R(x+y; \bar{w}) dy &= \sum_{k=0}^{r-1} \frac{D_{k,j}}{k!} \frac{1}{h^{k+1}} \int_{-h/2}^{h/2} y^k dy = D_{0,j} + \sum_{k=1}^{r-1} \alpha_k D_{k,j} \\ &= D_{0,j} = w. \end{aligned} \quad (3.21)$$

（3.21）中继（3.19b）与=0和（3.15a）之后的最后两个等式。

重构的温度振荡性质（1.9c）严格遵循插值Hm（x； w）的振荡性质；更多细节请参见[16]。

我们注意到wu(x)是w(x) with 市(x)的卷积，它是一个细胞的特征函数，即，

$$w(x) = (w * \psi_n)(x) \quad (3.22a)$$

$$\psi_h(x) = \begin{cases} 1/h & \text{for } |x| < h/2 \\ 0 & \text{for } |x| > h/2 \end{cases} \quad (3.22b)$$

因此，（3.13c）实际上是对O（h'）的反褶积。因此，我们将（3.18）称为反褶积重建，并用RD表示。

备注第3.1条。我们注意到，对于具有=和具有=-1的RP，重建曲线（1.9a）中的系数（=）在相关插值模板发生变化的点上是不连续的；这可能发生在函数及其导数的临界点。因此结果



方案 (1.14) 为“顺序准确” (参见备注1.4)。另一方面, 用 $\mathcal{O}(\Delta t)$ 表示 $\mathcal{O}(\Delta t)$ 是全局利普希茨连续的, 从而得到了在点态意义上的 $\mathcal{O}(\Delta t)$ 精确的方案。这是由于 (3.17a) 被升级到

$$D_{\mathcal{O}(\Delta t)}(x) = \mathcal{O}(\Delta t) \quad (3.23)$$

由于相关插值中静态方向的改变, 到 $\mathcal{O}(\Delta t)$ 水平, 从而具有推推平滑的效果。

备注第3.2条。我们注意到, 具有 $\mathcal{O}(\Delta t)$ 的RD,  $m=1$ 和具有 $\mathcal{O}(\Delta t)$ 的RP都是该形式 (1.12) 的分段线性重建。RD的斜率 $s$ 与[5]中的“第二顺序精确”TVD模式的斜率 $s$ 相同。RP的斜坡与RD相同, 只是在局部极值处, 其中RD的 $\mathcal{O}(\Delta t)$ 为0, RP的 $\mathcal{O}(\Delta t)$ 为0

$$s_j = \begin{cases} w[x_j, x_{j+1}] & \text{if } |w[x_j, x_{j+1}]| < |w[x_{j-1}, x_j]| \\ w[x_{j-1}, x_j] & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3.24)$$

虽然RP不像RD那样“切割”局部极值, 但在 (3.24) 中平滑不足会导致局部额外 $\mathcal{O}(\Delta t)$ 的精度损失。

我们注意到, 具有 $\mathcal{O}(\Delta t)$ 的RD本质上是与给出的振荡器秒或更精确的[15]方案相同的重建。

#### 4. 标量守恒定律

我们的方案的抽象形式调用 (1.14b) 用初始数据 $R(x; v^0)$ 评估IVP (1.1) 中的精确溶方案。这一步之后是管道平均操作 (1.14c), 从而得到了自然资源保护形式 (1.16)。因此, 我们就不用承担计算全局解的任务了。我们所需要的就是评估

$$\bar{f}_{j+1/2} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(v_h(x_{j+1/2}, t_n + \eta)) d\eta. \quad (4.1)$$

为了简化我们的符号, 让我们denote $v_j(x, t, \tau)$  by $v_j(x, t)$ 。Thus $v_j(x, t)$ 是。的解决方案

$$v_j + f(v_j) = 0 \quad (4.2a)$$

使用分段多项式初始数据

$$v(x, 0) = R(x; v^0) = \sum_{l=0}^{r-1} b_{j,l}(x - x_j)^l/l! \quad \text{适用于 } x, \quad -1/2 \leq x - x_j < 1/2 \quad (4.2b)$$

在时间带 $-1/2 \leq x - x_j < 1/2, 0 \leq t \leq \tau$ 。小。

这个问题 $v(x, t)$ ，对于足够小的 $t$ ，是由由 $\{x_j + 1/2\}$ 的“风扇”分隔的平滑部分组成。我们在这里使用术语“风扇”松散，允许一个“风扇”与零展开，即直接曲线。在线性情况下，不连续沿着特征的粘性曲线传播；在这种情况下，所有的“扇形”都只是曲线。在非线性情况下，具有零扩展冲击曲线的“风扇”，而“风扇”具有正扩散的稀有风扇——或者在非凸通量的情况下，可能是由接触阀节分开的连续稀疏风扇。我们用 $v_j(x, t)$ 表示 $v(x, t)$ 与 $(x, x_j - 1/2, x_j + 1/2)$ 中的多项式数据相连的平滑部分。

对 $v(x, t)$ 的全局描述可能相当复杂。幸运的是我们需要 $v(x + 1/2, t)$ 小 $t$ ，可以很容易地表示， $(x, t)$ ， $v_j(x, t)$ 和“风扇”排放从 $x = x_j + 1/2, t = 0$ 如下：如果“风扇”保持的右边 $x = x_j + 1/2$ ， $(x, t) = v_j(x, t)$ ；如果这个“风扇”停留在 $x = x_j + 1/2$ 然后 $(x, t) = v_{j+1}(x, t)$ ； $x_j + 1/2$ ，那么 $v(x, t) = v_j(x, t)$ ； $x_j + 1/2$ ， $t > 0$ 。这里 $V(x, t; U_R)$ 表示黎曼问题的类似解决方案

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} u_L & x < 0 \\ u_R & x > 0, \end{cases} \quad (4.3)$$

与 $u_L$ 和 $u_R$ 。我们注意到“扇”覆盖 $x = x_j + 1/2$ 只有 $1/2$ 包含声波中心稀薄波（即，包含 $0$ 的点）；只要它不与冲击相互作用，这个波就会保持自相似形式。因此，如果我们选择足够小，使没有冲击交叉 $x = x_j + 1/2$ ，我们可以表达 $(v(x, t), t) = (v_j(x, t), t)$ ； $x_j + 1/2$ ， $t > 0$ 。

$$f(v(x, t)) = \begin{cases} f(v_j(x_j + 1/2, t)) & \text{“风扇”停留在 } x = x_j + 1/2 \text{ 的右边} \\ f^R(v_j(x_j + 1/2, 0), v_{j+1}(x_j + 1/2, 0)) & \text{“粉丝”覆盖了 } x = x_j + 1/2 \\ f(v_{j+1}(x_j + 1/2, t)) & \text{“风扇”停留在 } x = x_j \text{ 的左边, } +1/2 \end{cases} \quad (4.4)$$

这里 $f^R$ 表示黎曼问题解的通量 $tx=0$  (4.3)，i.e.,  $f^R(u_1, u_2) = f(V(0; u_1, u_2))$ ；

$$w_1, u_2) ; \quad (4.5)$$

使用公式[23]，它可以被按下

$$f^R(u_1, u_2) = \begin{cases} \min_{u_1 \leq u \leq u_2} f(u) & \text{if } u_1 \leq u_2 \\ \max_{u_1 \geq u \geq u_2} f(u) & \text{if } u_1 > u_2. \end{cases} \quad (4.6a)$$

当 $f(u)$ 是一个凸函数of $u$ ，i.e.时， $f''(u) > 0$ ， $f(u)$ 可能只有一个局部域

极值是最小值；让我们用 $u$ 来表示它的位置。利用（4.6a）中的这一事实，我们可以在凸出酶中表达 $f^R(u, u_2)$

$$f^R(u_1, u_2) = \begin{cases} f(u_1) & \text{if } u_s < u_1 \leq u_2 \\ f(u_s) & \text{if } u_1 \leq u_s \leq u_2 \\ f(u_2) & \text{if } u_1 \leq u_2 < u_s \\ f(u_1) & \text{if } u_1 > u_2 \text{ and } \bar{a}(u_1, u_2) > 0 \\ f(u_2) & \text{if } u_1 > u_2 \text{ and } \bar{a}(u_1, u_2) \leq 0. \end{cases} \quad (4.65)$$

这里

$$a(u_1, U_2) = [f(u_2) - f(u_1)] / (u_2 - u_1) \quad (4.7)$$

是与 $u_L = u$ 和 $u_R = u_2$  in (4.3) 的冲击速度。我们注意到，（4.4）是故意用 $f(u(x, +12, t))$ 而不是 $v(x, +12, t)$ ，当 $v = +12$ 时消除定义中的歧义。在这种情况下， $f(v)$ 的变化来自于静止休克的兰金-胡戈尼特关系。

我们现在来推导出数字通量（4.1）的一个简单但充分的近似，它是

$$\tilde{f}_{j+1/2} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(v(x_{j+1/2}, t)) dt \quad (4.8)$$

被积函数为（4.4）。注意被积函数是 $t$ 的光滑函数

第一步是通过使用nume的求积（4.9）来离散（4.8）中的积分

所以

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau g(t) dt &= \sum_{k=0}^K \alpha_k g(\beta_k \tau) + O(\tau^r); \\ \tilde{f}_{j+1/2} &\approx \sum_{k=0}^K \alpha_k f(v(x_{j+1/2}, \beta_k \tau)). \end{aligned} \quad (410)$$

第二步是通过（4.4）中的近似值 $(x, t)$ ，这是通过以下局部柯西-科瓦莱夫斯基程序得到的。我们开始表达 $\partial v(x, 0) / \partial x^l$ ，通过

$$\frac{\partial^l v(x_j, 0)}{\partial x^l} = \begin{cases} b_{j,l} & \text{for } 0 \leq l \leq r-1 \\ 0 & \text{for } l \geq r. \end{cases} \quad (4.11a) \quad \text{下一步我们}$$

使用（4.11a）进行评估

$$\frac{\partial^l v}{\partial x^k \partial t^{l-k}}(x_j, 0) \quad \text{对于所有 } 0 \leq k \leq l \quad (4.11b)$$

harten等人。

通过对偏微分方程（1.1a）的有序推导

$$\begin{aligned}
 v_1 &= -fv_x \\
 0 &= - \\
 [f''(vx)^2 + f_0x] &= - \\
 [f''v_1 \quad vx + fv_x] \\
 V_x &= -[f''(vx)^3 + 3f''v_1 \cdot U_{xx} + f''v_{xxx}] \quad (4.11c) \\
 V_{xi} &= - \\
 [f''(vx)^2 v_2 + f''(2vx_0 + v_1 \quad V_{xx}) + fv_x] &= - \\
 m &= - \\
 [f''(v_1)^2 vx + f''(20, vx_1 + vx_0n) + fv_x] \\
 ctc &.,
 \end{aligned}$$

然后通过依次计算（4.11c）的RHS来计算（4.11b）；注意，这个过程总是使用已知的值（4.11b），这些值最初由（4.11a）给出，或者之前由the算法（4.11c）计算。我们观察到了这个问题

$$\tilde{v}_j(x, t) = \sum_{l=0}^{r-1} \sum_{k=0}^l \frac{\partial^l v(x_j, 0)}{\partial x^k \partial t^{l-k}} \cdot \frac{(x-x_j)^k}{k!} \frac{t^{l-k}}{(l-k)!} \quad (4.12a)$$

使满意

$$\begin{aligned}
 0, \quad (x_j, 0) = v, \quad (x, 0) = v \quad (x, 0) \text{ 用于 } x, \quad -1/2 < x < x, \quad +1/2, \\
 (4.12b)
 \end{aligned}$$

而且

$$0, (x, t) = v, (x, t) + 0(h''), \quad (4.12c)$$

其中，（x、t）有很好的定义。

我们推导数值通量的最后一步是在（4.4）中近似于 $f(v(x, +1; 2, t))$

$$f(v(x, +12, t)) \approx fR(0, (x, +1.2, t), D, +1(x, +1/2, t)), \quad (4.13)$$

其中，fR为（4.5）-（4.6）。所得到的数值格式为

$$v_{j+1}^n = D'' - \lambda(J, +12 - \hat{f}_j - 1.2) \quad (4.14a)$$

$$f_{j+1/2} = \sum_{k=0}^K \alpha_k f^K(\tilde{v}_j(x_{j+1/2}, \beta_k \tau), \tilde{v}_{j+1}(x_{j+1/2}, \beta_k \tau)). \quad (4.14b)$$

下面我们表明，+12 (4.14b) 中的面通量是“抽象数值通量” (4.1) 的充分近似。

我们首先证明了该方案 (4.14) 在...的意义上是 $r$ 阶精确的

(1.8).为了做到这一点,我们考虑,其中 $u(x, t)$ 是一个平滑的(全局的或局部的)的(1.1)的增量,并证明它(4.14)  $v_j^n = \bar{u}(x_j, t_n)$ ,

$$\bar{f}_{j+1/2} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(u(x_{j+1/2}, t_n + \eta)) d\eta + O(h^r). \quad (4.15)$$

当我们应用侦察指令时, weget (3.9) 和 (3.20) 就是那个

$$\frac{d^k}{dx^k} R(x; \bar{u}^n) = \frac{\partial^k}{\partial x^k} u(x, t_n) + O(h^{r-k}) \quad \text{为了} \quad 0 \leq k \leq r-1. \quad (4.16a)$$

因此,从柯西-科瓦莱斯基程序(4.11) - (4.12) 和  $O(h)$

$$0, \quad (x, +12, 1) = u(x, +12, t_{n+1}) + O(h^r) \quad \text{用于 } i=j, j+1, \quad (4.16b)$$

$fR(u_1, u_2)$  对于  $u_1$  and  $u_2$  是连续的, 并且是一致的  
在  $f(u)$  的意义上,  $fR(u, u) = f(u)$ ; 因此

$$fR(u_1, u_2) = f(u) + O(|u - u_1| + |u - u_2|). \quad (4.16c)$$

将(4.16c)应用到(4.16b), 我们得到了它

$$fR(u, (x, +1.2, t), 0, +1(x, +1.2, t)) = f(u(x, +12, t, +1)) + O(h). \quad (4.16d)$$

最后, 利用假设的  $u(x, t)$  的平滑度和数值求积(4.9)的精度顺序, 我们得到了(4.15)。

接下来我们考虑常数系数显著情况

$$v_t + avx = 0, \quad a = \text{constant}. \quad (4.17a)$$

这里的风扇”在(4.4)是特征线

$$x_1 + 12(1) = x + 12 + at \quad (4.17b)$$

和

$$v, \quad (x, t) = D(x - at, 0) = R(x - at; v^0) \quad \text{为 } x, -12(t) < x < x + 12(t). \quad (4.17c)$$

Since,  $(x, t)$  在(4.17c)是在  $(xat)$  中离散度1的多项式, 我们得到它

$$\frac{\partial^l v}{\partial x^k \partial t^{r-k}} \equiv 0 \quad \text{为 } l \geq r; \quad (4.17d)$$

这意味着在(4.11) - (4.12) 中

$$i_t(x, t) = v_t(x, t). \quad (4.18a)$$

252HARTEN等。

因此

$$fR(0, (x, +1/2, t), 0, +1(x, +1/2, 1)) = f(\alpha(x, +1/2, t)). \quad (4.18b)$$

由于数值求积 (4.9) 的多项式是精确的, 我们得到的数值flux $J_{j+1/2}$  (4.14b) 是相同的 (4.8)。因此, 在常系数情况下, 数值方案 (4.14) 是“抽象的 scheme” (1.14), (1.16’), 即,

$$v_{j+1/2} = R(x, -; D''). \quad (4.18c)$$

我们观察到, 由于在恒定系数案例中的溶液  $(x, t)$  中的“风扇”具有零扩散, (4.4) 中的计算  $(v(x, +1/2, t))$  只涉及溶液  $(x, t)$  的大致部分。数值approx氧化化中的“扇形”标记了泰勒展开式0,  $(x, t)$  的有效性域。因此, 在数字l通量 (4.14b) 公式中唯一的黎曼求解器

$$f^R(\tilde{v}_j(x_{j+1/2}, t), \tilde{v}_{j+1}(x_{j+1/2}, t)) = \begin{cases} f(\tilde{v}_j(x_{j+1/2}, t)) & \text{if } a > 0 \\ f(\tilde{v}_{j+1}(x_{j+1/2}, t)) & \text{if } a < 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

即作为一个pointer, i.e., 来识别  $x=x_{j+1/2}$  是否属于  $i$  的有效性域, 或是否属于  $v, +1$  的有效性域。由于  $u, (x, +1/2, 1) = v(x, +1/2 - at, 0)$ , 柯西-科瓦尔斯基程序的使用等价于特征方法通过特征曲线  $(x, +1/2, t)$  到初始数据。

Next我们考虑了具有凸  $f(u)$  和光滑初始data  $u_0(x)$  的标量IVP (1.1), 并证明了上述数值近似的解释也适用于这种非线性情况。数值解  $t$  在冲击上形成1-2点的单调过渡, 并在解的光滑部分保持接近  $tou(x, , tn)$  (见  $u, +uux=0$  和  $u(x, 0) = \sin \pi x$  的数值实验。7)。现在让我们来看看  $R(x; x; v'')$  的不连续性, 以及从这些点产生的“风扇”的特征。关系 (4.16b) 与  $=0$  的关系表明, 在溶液的光滑部分,  $+1/2$  是局部误差的次级, 如  $O(hP)$  与  $O \leq p \leq r$ 。因此, 从  $mx$  中出现的+风扇12在平滑区域要么是一个冲击曲线, 要么是一个有  $O(hP)$  扩散的热风扇。另一方面, 在  $u(x(tn))$  的冲击附近, 这个跳跃的位置是  $O(1)$ ; 然而, “扇”必然是一个激波曲线。因此, 全局图像与常系数case, i.e. 非常相似, 分离  $\{v, (x, t)\}$  的“风扇”要么是具有零扩散或稀薄风扇的冲击曲线 与  $O(h'')$  展开 (这些可以是“模糊”特征曲线); 这些“粉丝”是泰勒展开  $i, (x, t)$  的有效性域的边界。我们注意到, 由  $0(x, +1/2, t)$  给出的  $O(t')$  与通过求解线性特征得到的差值

$$v_j^n \approx \tilde{u}(x_j, t_n)$$

$$v = R(x, +1/2 - a(v)t; v''). \quad (4.20)$$

因此, 使用局部柯西-科瓦莱夫斯基程序再次是一种计算方法, 以追踪特征曲线  $(x, +1.2, t)$  到初始数据。由于 (4.4) 中  $f(u(x, +1: 2, t))$  的评估基本上只涉及  $i(x, +12, 1)$  和  $+1(x, +12, t)$ , 因此黎曼积分通量 (4.14b) 的作用与  $a_{\text{pointer}}$ , i.e. 无关, 以确定有效性  $x=x, +1$  属于哪个域。这表明, 用我们的过程近似地保持了精确解的单调性。请参见 Clin 第 7 节。这也表明,  $fR_{\text{in}}$  (4.14b) 可以被更简单的表达式  $fROE$  充分取代, 该表达式对应于 Roe 对 the 黎曼问题的近似解 (见 [25.14]):

$$\begin{aligned} fROE(u_1, u_2) &= [f(u_1) - f(u_2) - a(u_1, u_2)(u_2 - u_1)] \\ &= \begin{cases} f(u_1) & \text{if } \bar{a}(u_1, u_2) > 0 \\ f(u_2) & \text{if } \bar{a}(u_1, u_2) \leq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.21)$$

其中  $(u_1, u_2)$  的定义为 (4.7)。注意到 (4.21) 中的  $fROE$  满足 (4.16c), 因此修改后的方案保持准确或不准确。

上述启发式分析仅适用于 IVP (1.1) 区域解中的所有缺点时; 通过初始数据  $u_0(x)$  引入, 或由于冲击相互作用, 由于它的形式 (4.21a), 不应该使用在超声稀薄波时, 因为它允许与  $(u_L, u_R) = 0$  作为平稳解的任何不连续。这个问题是众所周知的, 而且有很多方法 (参见 [13, 26, 9] 和 Sect. 7)。

在第 7 节中, 我们进行了数值实验, 测试了该化学物质 (4.14) 在黎曼 IVP (4.3) 解中的性能, 其中  $f(u)$  是非凸的和  $a(u_L, u_R) = 0$ 。在所有这些实验中, 以及在其他这里没有报道的  $s$  中, 我们已经发现了开发正确的解决方案结构的方案。

## 5. 保护LAW系统

在本节中, 我们将第 3 节的重建算法和第 4 节的小解过程扩展到双曲守恒定律系统的情况

和往常一样, 我们只对“可计算”解感兴趣, 因此假设 (1.1b) 中的初始  $data_{u_0} (=)$  是这样的  $(x, t)$ , 它是  $(u_1, \dots, u_n)$  上的向量函数, 在任何给定的  $t$  上是具有有限数量不连续的分段光滑函数。给定细胞平均值, 从近似理论的角度来看, 通过将标量重建  $R$  应用于每个尺度分量 (1.e) 似乎是很自然的。  
 $\tilde{u}_j^n = \tilde{u}(x_j, t_n), u_k^n.$

$$R(x; u'') = (R((x; u''), \dots, R(x; u''))T; \quad (5.1)$$



这里 $R$ 表示向量重建。然而，只有当我们忽略 $u(x, t)$ 的时间依赖性时，分量重建才是自然的。

我们记得，只有当不连续被至少 $r+1$ 的光滑点分开时，标量重建才是非振荡的，其中 $r$ 是阶数。因此，逐分量重构(5.1)可能停止在离散集合点 $(x, t_c)$ 周围非振荡，其中差异 $(x, t)$ 相互作用。下面我们描述了一种从 $u$ 中重构 $(x, t_n)$ 的算法，它通过分解来避免这种困难，通过分解成 $m$ 个局部定义标量特征变量来避免这种困难。

通过检验常数系数 $\text{casef}(u) = Au$ ，其中 $A$ 是常数 $m \times m$ 矩阵

$$u_t + Aux = 0 \quad (5.2a)$$

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (5.2b)$$

我们注意到特征值和特征向量都是等常数。我们认为这是

$$a_1 < a_2 < \dots < a_m \quad (5.3a)$$

$$I_1 \quad r_k = \delta \quad (5.3b)$$

我们定义了第 $k$ 个特征变量

$$w_k = Lu. \quad (5.4a)$$

然后从(5.3b)中得出：

$$u = \sum_{k=1}^m w_k r_k. \quad (5.4b)$$

从左边的(5.2)乘以 $I_k w_k$ 可以看到 $w^*(x, t)$ 满足以下标量IVP

$$(w^*)_t + a_k (w^*)_x = 0 \quad (5.5a)$$

$$w^k(w, 0) = I_k u_0(x) \equiv w_0^k(x), \quad (5.5b)$$

解决这个问题的办法是

$$w^k(x, t) = w_0^k(x - a_k t). \quad (5.5c)$$

利用(5.4b)和(5.5c)，我们可以表示常IVP(5.2)的解 $u(x, t)$

$$u(x, t) = \sum w_0^k(x - a_k t) r_k.$$

现在让我们考虑以下初始数据in (5.2b)

$$u_0(x) = \begin{cases} u_L & x < x_L \\ u_M & x_L \leq x \leq x_R \\ u_R & x_R < x. \end{cases} \quad (5.6a)$$

首先让我们考虑case  $x_L = x_R = 0$ , 它是里曼尼ivp (4.3)。该溶液u (x, t) 是以下形式的自相似解决方案V (x/t, u<sub>L</sub>, u<sub>R</sub>)

$$u(x, t) = V(x/t; u_L, u_R) = \begin{cases} u_L & x/t < a_1 \\ u^k & a_k < x/t < a_{k+1}, 1 \leq k \leq m-1 \\ u_R & a_m < x/t, \end{cases} \quad (5.6b)$$

在哪里

$$u^k = u_L + \sum_{i=1}^k (w'_R - w'_L) r_i, \quad 1 \leq k \leq m-1. \quad (5.6c)$$

在 (5.6b) 中的溶液 (x, t) 中, 对于t很小, 是

$$u(x, t) = \begin{cases} V\left(\frac{x-x_L}{t}; u_L, u_M\right) & \text{for } x < x_L + a_m t \\ u_M & \text{for } x_L + a_m t \leq x \leq x_R + a_1 t \\ V\left(\frac{x-x_R}{t}; u_M, u_R\right) & \text{for } x_R + a_1 t < x. \end{cases} \quad (5.6d)$$

随着t的增加, 来自=x的第k个激光场的不连续最终会与来自=x<sub>R</sub>的第field, l=1...k-1中的任何不连续发生碰撞

实例 (5.6) 说明了使用组合分段重建 (5.1) 时遇到的困难。我们可能在 (5.6b) 和 (5.6d) 中得到小t的振荡, 因为由于黎曼问题解的自然性质相似, 不连续性太近了。稍后, 当不连续点发生碰撞时, 我们可能会在 (5.6d) 中得到更多的振荡。

我们观察到, 没有这样的问题, 因此, 使用标量重构R (x; w) 来定义是有意义的  $w^k(x, t) = w_0^k(x - a_k t)$

$$\mathbf{R}(x; \bar{u}) = \sum_{k=1}^m \mathbf{R}(x; \bar{w}^k) r_k, \quad (5.7a)$$

在哪里

$$\text{证} = L\bar{u}. \quad (5.7b)$$

HARTEN等人。

我们利用局部定义的特征变量将 (5.7) 推广到非线性系统的情况下。为了从  $(x, -1/2, x, +1/2)$  中的  $u$  重建  $u$ , 我们定义

$$R(x; \bar{u}) = \sum_{k=1}^m R(x; \bar{w}^k(\bar{u}_j)) r_k(\bar{u}_j) \quad \text{for } x_{j-1} \leq x < x_{j+1/2}, (5.8a)$$

网格功能  $\bar{w}^k(\bar{u}_j) = \{\bar{w}_i^k(\bar{u}_j)\}$  是由

$$w_i^k(u_j) = 1(u_j)u_i, \text{ for } j-p \leq i \leq j+p; (5.8b)$$

这里  $p$  是期望的调整顺序。

在第7节中, 我们用初始数据 (5.6a) 进行了气体动力学的欧拉方程的计算。这些计算结果 (以及从一个壁反射的冲击的结果) 表明, 重建 (5.8) 在非线性情况下也能很好地工作。

现在来看看我们的理论系统。该方案在形式上与 (4.14) 相同:

$$v_{j+1} = v_j - \lambda(f_{j+1/2} - f_{j-1/2}) \quad (5.9a)$$

$$\bar{f}_{j+1/2} = \sum_{k=0}^K \alpha_k f^R(\bar{v}_j(x_{j+1/2}, \beta_k \tau), \bar{v}_{j+1}(x_{j+1/2}, \beta_k \tau)). \quad (5.9b)$$

(5.9) 的推导, 虽然在某些细节上有所不同, 但基本上与第4节中关于标量情况的推导相同。与其重复我们自己, 我们将使用第4节的公式 (这里用向量来解释), 并指出它们确实存在的差异。

在算法 (1.14b) 的“小解”步长中需要解决的问题与前面 (4.2) 相同。解  $v(x, t)$  的一般结构与标量情况相似, 即, 它由由  $\{x, +1/2\}$  发出的“风扇”分离的平滑部分组成。在标量的情况下, 我们可以使用一个局部柯西-科瓦列夫斯基过程来近似  $v(x, t)$ 。与多项式初始数据  $(x, -1/2, X, +1/2)$ ,  $byv$ , (4.12) 中的  $v(x, t)$  相连的光滑部分。由于  $f(u)$  现在是一个向量,  $f'(u)$  是一个矩阵,  $f''(u)$  是一个张量, 以此类推; consequently, (4.11c) 必须被一个更复杂的表达式所取代。与其这样做, 我们将在第6节中提出一个算法, 以在气体动力学的欧拉方程的具体情况下执行柯西-科瓦列夫斯基程序。

接下来我们考虑来自  $atx_{j+1/2}$  的“风扇”。在标量案例中, 这个“风扇”开始  $att=0$  作为黎曼问题 (4.3) 的类似解决方案, 在系统案例中, 它是对应于不同特征场的  $m$  个风扇的包。与标量情况的一个主要区别是 (当初始数据  $in$  (4.2b) 是分段常数时), 从  $mx$  到  $t=0$  的  $+1/2$  立即失去了它自身相似的性质。因此, 不再可能像我们在 (4.4) 中所做的那样, 以一种简单的封闭形式来表达  $sv(x, +1/2, t)$ 。然而

$t(x, +12, 1)$  可以通过“扇”中的各种曲线和状态之间的各种曲线的局部展开来表示为任何期望的精度顺序（我们参考感兴趣的读者[1]，其中本-阿齐和法尔考维茨描述了气体动力学的欧拉方程的前分布）。因此，就像在标量情况下，虽然付出了相当多的努力，但有可能获得一个显式表达式，近似于“抽象数值通量”（4.8）到任何期望的精度顺序。

现在我们来证明数值格式（5.9）是对“抽象的scheme”（1.16）的一个充分的近似。首先，我们观察到关系（4.16）也适用于系统情况；因此（4.15）遵循的方法与cc完全相同，并且cc（5.9）似乎是精确的。

接下来，我们在常系数（5.2）的情况下考虑该方案。由于pde（1.1a）和（5.9）的m标量关系，我们可以以特征方式应用标量常系数系统的分析。然后从（4.17）-（4.18）开始，数值通量（5.9b）是精确的，并且数字格式（5.9）与“抽象的scheme”（1.16）是相同的。现在让我们来研究一下解决方案（x, r）的结构：“风扇”来自mx, +12具有相同的形式（5.6b），除了ML,  $u^*$ 和 $u_p$ 现在是x和t的函数。平滑式的部分，-12+在 $x < X$ , +12+a<sub>1</sub> t也是泰勒扩展（x, t）的有效性域。然而，我们注意到，1, (x, 1)，它是泰勒展开 $w_j^k(x, t)$ ，在大域x, -12+a t < x < x+12+a, t中有效。让我们检查fR在数字通量（5.9b）公式中的作用：

$$f^R(\tilde{v}_j(x_{j+1/2}, t), \tilde{v}_{j+1}(x_{j+1/2}, t)) = \sum_k (a_k)^+ [l_k \tilde{v}_j(x_{j+1/2}, t)] r_k + \sum_k (a_k)^- [l_k \tilde{v}_{j+1}(x_{j+1/2}, t)] r_k; \quad (5.10a)$$

在哪里

$$(a_k)^+ = \max(0, a_k), \quad (a_k)^- = \min(0, a_k). \quad (5.10b)$$

我们从（5.10）中看到，在标量情况下，fR的作用是一个指针，即，识别每个特征变量 $k=1, \dots, K$ ，域的有效性， $x=x+12$ 属于。自 $l_k u$ ,  $(x, +1-2, t) = L_t(x, +12-at, 0)$ ，在这种方法中使用柯西-科瓦列夫斯基程序与特征学方法是不一致的。

下面我们认为除了离散集 $\{(x, t)\}$ 因此，上述解释也适用于非线性情况。与标量情况不同，我们在本文中没有考虑系统的“非凸解”，并假设每个特征场是真正的非线性或是线性退化的（见[19]）。当我们考虑IVP（4.2）时，在

harten等人。

其中  $(x, 0) = R(x; v)$  我们看到解决方案  $(x, t)$  中的“风扇”与  $u(x, t_n)$  的全局结构关系如下 (见图14和16)：当  $u(x, t_n)$  平滑时，“风扇”的常系数的基本结构围绕  $u(x, +1/2)$ ，除了  $k$  波可能有  $O(hP)$  的扩散。当  $x+1/2$  在  $u(x, t_n)$  的激波附近时，“扇形”本质上是一个在其他场上有小扰动的激波。我们发现，典型的（不包括相互作用），从  $x(x, t)$  中发射的“风扇”是退化的意义上，除了可能的大激波（或接触不连续）外，其中的所有波都是弱的。这种启发式分析表明， $f(v(x, +1/2, t))$  可以用局部Roe线性化充分近似；这种线性化对于单次激波或连续是精确的，相当于弱波的特征近似。

在标量情况下，fROE是通过对特定的平均  $u = u_L, u_R$  的局部线性化得到的

$$f(u_R) - f(u_L) = A(u)(u_R - u_L). \quad (5.11a)$$

流量定义为常系数解的通量=0:

$$u_x + A(u)u_x = 0$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_L & x < 0 \\ u_R & x > 0, \end{cases}$$

哪个可以表示为

$$f^{ROE}(u_L, u_R) = \frac{1}{2} \left[ f(u_L) + f(u_R) - \sum_{k=1}^m \delta_k(u_L, u_R) |a_k(\hat{u})| r_k(\hat{u}) \right]. \quad (5.11b)$$

在哪里

$$\delta(u_L, u_R) = l(W)(u_R - u_L); \quad (5.11c)$$

在这里， $a(u)$ 、 $L(u)$ 和 $r(u)$ 是根据雅可比矩阵 $A(u)$ 来计算的。Roe的黎曼求解器的推导在文献中得到了很好的记录（见[25,8,9,14]）。在第6节中，我们描述了气体动力学的欧拉方程的fROE。

最后，让我们检查在IVP (1.1) 的溶液  $u(x, 1)$  中不连续的相互作用中，方案 (5.9) 的性能。我们观察到，它需要一些时间，直到产生的波可以正确地描述的网格。然后，基于多项式插值的  $R(x; v)$  只能是一个粗略的近似值  $u(x, t_n)$ 。在这种情况下，我们期望来自  $u(x, t_n)$  的交互区不连续的解  $(x, t)$  (4.12) 中的“风扇”可以被局部黎曼问题的自相似解充分近似。我们注意到，一旦输出的波在计算网格上被正确地解析，前面的分析就适用。

在第7节中，我们提出了数值实验，将fR (5.11) 取代的方案 (5.9) 应用于多元气体欧拉方程的相互作用问题。在所有这些实验中，方案 (5.9) 已经发展出了正确的解的结构。

我们注意到，具有fROE形式 (5.11b) 的方案 (5.9) 允许平稳的“膨胀冲击”作为它的稳定解。这可以很容易地通过为真正的非线性特征场添加熵粘度项来纠正（见[13,14,9]）。

## 6.气体动力学s的欧拉方程

在本节中，我们将描述如何将该方案 (5.1) 应用于溶气的气体动力学方程：

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad (6.1a)$$

$$u = (p, m, E) \quad (6.1b)$$

$$f(u) = qu + (0, P, qP) \quad (6.1c)$$

$$P = (\gamma - 1)(E - \frac{1}{2}mq^2). \quad (6.1d)$$

这里p, q, P和E是密度，速度，压力和总能量-

m=pq是动量，y是比热的比值。/cu的雅可比矩阵A(u)的特征值为

$$a_1(u) = q - c, \quad a_2(u) = q, \quad a_3(u) = q + C, \quad (6.2a)$$

其中 $c = (\gamma P / \rho)^{1/2}$ 表示声音的速度。对应的右特征向量是

$$r_1(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ q - c \\ H - qc \end{pmatrix}, \quad r_2(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ q \\ \frac{1}{2}q^2 \end{pmatrix}, \quad r_3(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ q + c \\ H + qc \end{pmatrix} \quad (6.2b)$$

在这里

$$H = (E + P) / \rho = c^2 / (\gamma - 1) + \frac{1}{2}q^2 \quad (6.2c)$$

是焓。

要计算 (6.2b) 中的矩阵T(u)，我们首先形成matrix T(u)，其列是 (6.2b) 中的右特征向量

$$T(u) = (r_1(u), r_2(u), r_3(u))$$

260HARTEN等。

然后将 $lk(u)$ 定义为 $T^{-1}(u)$ 中的第 $k$ 行，即 $T(u)$ 的倒数。我们得到了

$$\begin{aligned} l_1(u) &= \frac{1}{2}(b_2 + q/c, -b_1 q - 1/c, b_1) \\ l_2(u) &= (1-b_2, b_1 q, -b_1) \\ l_3(u) &= \frac{1}{2}(b_2 - q/c, -b_1 q + 1/c, b_1), \end{aligned} \quad (6.2d)$$

在哪里

$$b_1 = (y-1)/c^2 \quad (6.2e)$$

$$b_2 = 2q^2 b_1. \quad (6.2f)$$

给出，近似于 $\{u(x, t_n)\}$ ，我们使用(6.2d)-(6.2f)来评估局部定义的特征变量(5.8b)  $\{v_i^n\}$

$$\tilde{w}_i^k(v_j^n) = l_k(v_j^n) v_i^n \quad \text{for } i=j-r, \dots, j+\text{rand } k=1, 2, 3. \quad (6.3a)$$

接下来，我们将我们的标量重构算法应用于每个局部定义的特征变量(6.3a)，标量重构 $r(x, w)$ 在附录中以算法的形式描述；该算法的输出为(4.2b)中有限泰勒级数的形式。因此，我们得到了 $(x, -1; 2, x, +1; 2)$ 中的每个特征变量

$$R(x; \tilde{w}^k(v^n)) = \sum_{l=0}^{r-1} b_{j,l}^k (x - x_j)^l / l! \quad (6.3b)$$

重新排列项，我们可以表示向量重建(5.8a)

$$R(x; v^n) = \sum_{l=0}^{r-1} \mathbf{b}_{j,l} (x - x_j)^l / l!, \quad (6.3c)$$

在哪里

$$\mathbf{b}_{j,l} = \sum_{k=1}^3 b_{j,l}^k r_k. \quad (6.3d)$$

请注意，无论哪里的固体离子都是光滑的

$$\mathbf{b}_{j,l} = \frac{\partial^l}{\partial x^l} (\rho, m, E)^T \bigg|_{x=x_j} + O(h^{r-1}) \quad \text{为了} \quad 0 \leq l \leq r-1. \quad (6.3e)$$

现在我们来描述关于气体动力学的欧拉方程的柯西-科瓦列夫斯基过程(4.4) - (4.5)。我们首先使用重构输出(6.3c)来定义(4.4a)，即。

$$\frac{\partial^l v(x_j, 0)}{\partial x^l} = \begin{cases} \mathbf{b}_{j,l} & \text{for } 0 \leq l \leq r-1 \\ 0 & \text{for } l \geq r. \end{cases} \quad (6.4a)$$

我们发现表示第4个向量 $Z_4(p, m, P, q)$ 的导数的olo $(x, 0)$   
/0x\*at<sup>l</sup>-kin项很方便。为此目的, wcusc (6.4a) 和关系

$$m=pq$$

$$P=(y-I)(E-iqu)$$

找到q和P的x导子, 通过

$$m_x = qP_x + pqx_x - qx = (m - qp_x)/p \quad (6.4b)$$

$$P_x = (y - 1)[E_x - \frac{1}{2}(q_x m + qm_x)]$$

$$m_{xx} - Pq + 2pxq_x + qP_{xx} - qx_x = (m_{xx} - qP_{xx} - 2qxP_x)/p \quad (6.4c)$$

$$P_{xx} = (y - 1)[E_{xx} - \frac{1}{2}(mq_{xx} + 2q_x m_x + qm_{xx})]$$

等等在对 $0 \leq l \leq -1$ 的 $e^l Z(x, 0)/ax^l$ 进行评估后, 我们继续得到  
其余的衍生物 $aZ(x, 0)/exkar^l-k$ ,  $0 \leq l \leq -1, 0 \leq k \leq l$   
修补PDE

bydifferen-

$$p_x + m_x = 0 \quad (6.5a)$$

$$m_x + (qm)_x + P_x = 0 \quad (6.5b)$$

$$P_x + qP_x + yP_{xx} = 0 \quad (6.5c)$$

代数关系

$$m = qp \quad (6.5d)$$

按以下顺序: 计算 $Z_4(x, , 0)$ 从 $mP_x + N_x = 0$

$$m_x + qxm_x + qm_x + P_x = 0$$

$$P_x + qP_x + yP_{xx} = 0 \quad (6.6a)$$

$$pq_x + P_x q = m_x$$

计算值 $(x, 0)$ 来自

$$P_x + m_x = 0$$

$$m_x + 2q$$

$$m_x + qm_{xx} + mq_{xx} + P_x = 0P_x + qP_{xx} + yP_{qx} \quad (6.6b)$$

$$x + (1+y)qxP_x = 0$$

$$pq_x + p_x q + p_x q_x + qP_c = M$$



计算  $Z_a(x, 0)$  来自

$$\begin{aligned} P_x + mx &= 0 \\ m + qmx_1 + mqx + Px + (qxm, qx) &= 0 \\ P_x + qPx + yPqx + (q, Px + yP, qx) &= 0 \\ pq_1 + 2p_1 q_1 + qPn &= m, \end{aligned} \quad (6.6c)$$

计算  $Z_w(x, 0)$  来自

$$\begin{aligned} P_x v + mcx &= 0 \\ mv + qmx + mgva + Px + 3q, mx + 3qxxm, &= 0 \\ Px + qPxxx + yPqxx + (2+y)q, Px + (1+2y)qxxPx &= 0 \\ Pqxx + 2(p \times qx_2 + Pxq, ) + qpxx + Pxxq, + p, qxx &= mxx; \end{aligned} \quad (6.6d)$$

计算  $Z_z(x, 0)$  来自

$$\begin{aligned} P_x + mxr &= 0 \\ P_t + qP + yPat + (y + 209P + 9, PJ + 9m.P + 9P) &= 0 \quad (6.6e) \\ pqxn + qPu + Pxq + qxP + 2(pqx, p_1, qx) &= mx; \end{aligned}$$

compute  $Z_z(x, 0)$  来自

$$\begin{aligned} P_m + \\ mxi = 0mm + qmx + mgxi + Px + 2(q, mx + m, qx) + (qxm, mxqn) &= 0 \\ P_x + qPxi + yPqxn + yqPn + 2(q, Px_1 + yP_1, qx) + q, Px &= 0 \\ Pqm + qPm + 3(p_1, qm + q_1, Pu) &= mm; \end{aligned} \quad (6.6f)$$

等等

我们注意到，可以区分代数关系 (6.1d)，以得到  $P$ 、 $q$  和  $m$  的守恒量  $p$ 、 $m$ 、 $E$  的导数，从而计算  $5(x, t)$  in (4.5)。然而，用  $p$ 、 $q$  和  $P$  来评估  $\text{fluxf}(u)$  和  $\text{fk}(u_1, u_2)$  更方便；由于  $i(x, t)$  是平滑的，而方案 (5.9) i 在保护形式下，我们并不真正担心关系 (4.12b)。See Remark 6.2. 因此，我们使用  $Z_z(x, t)$  的第一、第三和第四个分量

$$\tilde{Z}_j(x, t) = \sum_{l=0}^{r-1} \sum_{k=0}^l \frac{\partial^l Z(x_j, 0)}{\partial x^k \partial t^{l-k}} \cdot \frac{(x-x_j)^k}{k!} \frac{t^{l-k}}{(l-k)!} \quad (6.7)$$

以分别定义、 $(x, t)$ 、 $P(x, t)$  和  $g(x, t)$ 。

一旦我们计算出了 (6.7), 我们就可以计算出 (5.9b) 中的数值通量+12。  
一个精确的  $(u_1, u_2)$ , 即,

$$fR(u_1, u_2) = f(V(0; u_1, u_2)) \quad (6.8)$$

其中  $V(x/t; u_1, u_2)$  是气体动力学欧拉化的黎曼问题的精确解, 可以通过迭代算法计算。这个算法相当复杂, 我们将参考读者[5、3和28]。

要在 (5.11b) 和 (5.9b) 中计算  $fR = fROE$ , 我们所需要的只是描述气体动力学欧拉方程的特定平均  $u(u_1, u_2)$  (见[25,91])。因此, 我们表示关于  $u$  和  $u_2$  by 的  $ofb(u)$  的算术平均值

$$\langle b \rangle = [b(u_1) + b(u_2)] \quad (6.9a)$$

和定义

$$q = \langle \sqrt{pq} \rangle / \sqrt{p}, H = \langle \sqrt{pH} \rangle / \langle \sqrt{p} \rangle = (y-1)^{1/2}. A-12:$$

这里的  $H$  是焓 (6.2c)。Having prescribed  $g, H$  和  $c$ , 我们有在 (6.2) 中定义特征值和特征向量所需的所有时间。

备注第6.1条。使用特定的平均值 (6.9) 而不是更简单的重要性在于, 当  $(u_1, u_2)$  在黎曼问题  $V(x/t; u_1, u_2)$  的求解中对应于单个激波或单个接触不连续时。那么  $fROE$  是 exact i.e.

$$fROE(u_1, u_2) = fR(V(0; u_1, u_2)). \quad (6.101)$$

备注第6.2条。无论我们如何推导  $i, (x, t)$ , 数值近似 (1.16a) 都是守恒形式的。然而, 为了使薄膜平均 (1.14c) (这是理想的稳定目的)。我们需要重建是 conservative, i.e., (1.14b) 应该是有效的。

## 7. 数值极限 NTS

在本节中, 我们介绍了使用方案 (4.14) 和 (5.9) 进行的几个计算机实验的结果。这些化疗将参考  $r$  阶 ENO 方案 (如适用时称为“ $r$  阶”-见第1.2条); ENO 无振荡。

ENO 方案是高度非线性的, 因此不易进行严格的分析。目前, 我们已经完成了对子振荡插值  $H_m$  (3.1) - (3.5) 的分析, 并对重建  $R(x; w)$  有了相当好的理解; 这些重建结果可以

扩展到“抽象scheme“(1.10)的分段光滑数据。不幸的是，我们还不能严格分析错误积累的关键问题。在这种情况下，计算实验已经成为我们的主要分析工具。我们利用从随机噪声到平滑函数的初始数据进行了大量的数值实验。我们研究了“稳定性”的两个概念：(i)  $0 \leq t \leq T$  的细化序列  $h \rightarrow 0$ ,  $t=0(h)$ ; (ii) 固定的  $n \rightarrow 0$  的有界性。在所有的我们的实验中，ENO方案在CFL限制下是稳定的，在这个意义上，它们强烈抑制高频率噪声——这可能是由于细胞平均步长(1.14c)。

在本系列的第一篇论文[15]中，我们给出了基于RD的数值结果，将二阶ENO方案与“二阶精确”MUSCL型方案进行了比较，它在计算上等价于基于 $r=2$ 的“二阶”ENO方案。

在本系列的第二篇论文[16]中，我们提出了数值实验，验证了我们关于重构 $R(x; w)$ 的精度和非振荡自然的陈述，并证明了在纯IVP和混合初始-布恩边值问题(IBVP)的标量常系数情况下ENO格式的稳定性。

本文给出了一个关于一维非线性标量情况和气体动力学欧拉方程的数值实验样本。本演示的目的是解决我们无法通过分析完全回答的开放问题：误差的积累，“小解”程序的充分性，与熵不等式的一致性，以及系统的分层重建的有效性。我们对 $r=1, 2, 3, 4, 5, 6$ 进行了大部分的数值实验。由于为每个问题提供六组数据是不实际的，我们通常比较 $r=2$ ，这是当前的统计学的艺术方案，到 $r=4$ ，它似乎是光滑解的最优解。然而，综合效率研究的提出将推迟到未来的论文。

## A. 标量一致的法律

### A1. 凸角 $f(u)$

在本小节中，我们将展示应用ENO方案的结果

$$u_t + (u^2/2)_x = 0 \quad (7.1a)$$

$$u(x, 0) = \alpha + \beta \sin(\pi x + 7), \quad (7.1b)$$

只有我们必须减少CFL数的是中振荡函数的初始数据，这个选择的数据迫使ENO模式成为汽车；对于 $0 = \theta$ ,  $(-1)$ ，其中 $\theta$ 是一个正随机数，在aCFL限制1下，该方案是不稳定的（详情见[16]） $v_j^0 = (-1)^j$ 。

# 高阶精度方案，iii265

表ia

基于RP的ENO方案对周期IVP (7.1) att=0.3的求解

JR=1	r	=2	r	r=3	r	r=4	r=5
L, 错误							
81.582x10-		9.047×10-1		3804x10-		2715x10-	2.117x10-
169.082×10-2	080	4.300×10-2	1.07	8.038×10-	2.24	3.998×10	2.906×10
324964×10-2	087	1.819x10-	1.24	1.876x10-	2.10	4423x10-4	2.151x10
642.648×10-	091	7.296x10-	1.32	3.684x10-	2.35	4211x10-	1715x10-
1281404x10-2	092	2900×10-	133	8.356×10-	214	5.188x10 • 6	7.562×10-
L-错误							
88440×10-		4.507x10-		1669x10-		1003x10-	7000x10-
164.279×10-	0.98	1.304x10-	179	2.574×10-!	2.70	1086x1G-	5.875x10-4
322.186×10-	0.97	3707×10	181	3.992×10-	2.69	9400x10-	3462x105
641124×10-2	0.96	9.980×10-4	189	6.165×10-5	2.69	7905×10	1546×10
1285.675×10-3	0.99	2.813×10-4	183	1042×10-	256	6.835×10-	6.270×10-

表ib

基于RD的ENO方案对周期IVP (7.1) att=0.3的解

r=J	r=2	r	=3	r	r=4	l	r=
L, 错误							
81.582×10-		5.204×10-	4.484x10-		2.787x10-	2.115x10-	
169.082×10-2	080	1.352×10-	5.577×10-	3.01	3.565x10-	2343x10-	317
324964×10-2	0.87	3.562×10-	8.791×10-4	267	3.777×10-	1.191x10 • 4	361
642.648×10-	0.91	8.610×10-4	5.658x10-	3.96	2.927x10-	5.242x10-6	5.20
1281.404×10-?	092	1.748x10-	6.081x10-	3.22	1.077×10-6	1276×10-	536
L <sub>1</sub> -错误							
88.440×10-		2.231×10-	1333×10-		8600×10-	6.045×10-	
164.279x10-2	098	4.228×10-3	1.388×10-3	3.26	6.575x10-+	4.063×10-4	3.90
322.186×10-2	0.97	8.565×10-4	1.399×10-4	331	4.056×10-5	1.919×10-5	440
641124×102	0.96	1.826×10-4	1.096×10-+	3.67	1.096×10-	1936×10-	540
1285.675×10-3	0.99	4.039×10-5	1.071×10-	3.35	8.385×10-8	9.810×10	553

表ia

IBVP (7.1) 和 (7.5) 在 (=0.3上由基于RP的ENO方案提供的解决方案

小=1	r	r=2	r	r=3	r	r=4	r=5	r
L, 错误								
81.471x10-		9.047×10-2		2.849×10-2		2.936×10-	1.766×10-2	
	0.68		1.07		0.77	1.56		0.69
169.184×10-2		4.300×10-2		1.672×10-2		9.943x10-	1.096×10-2	
	0.77		1.24		2.75	2.98		3.58
325.382×10-2		1.819×10-2		2.477×10-		1.275x10-	9.149x10-	
	075		1.32		2.75	5.14		5.56
643.198×10-2		7.296×10-3		3.684x10-		3.614×10-	1.944×10-5	
	0.88		1.33		2.14	2.83		4.69
1281742x10-1		2.900x10-3		8.356×10-5		5.089x10-	7.540×10-7	
L <sub>1</sub> -错误								
87.745×10-2		3.355×10-2		1.221x10-1		8.065×10-3	5.265×10-	
	0.95		133		1.60	240		1.92
164.015×10-2		1.339×10-2		4.032×10-3		1.528×10-3	1.389×10-	
	0.91		1.88		3.14	3.40		4.15
322143×10-2		3.643×10-3		1.563x10-4		1.445×10-4	7.810×10-5	
	0.96		1.86		2.89	4.27		5.04
641.102×10-2		1.003x10-3		6.175x10-5		7.505x10-	2.371×10-6	
	0.97		1.81		2.70	3.58		5.07
1285.630×10-3		2.855x10-4		9.485×10-0		6.285x10-7	7.060×10-8	

表IIB

基于RD的ENO方案在t=0.3下解决IBVP (71) 和 (7.5)

/=	r	r=2	F	r.=3	l=	r	r=5	r
L, 错误								
81.471x10-		3.264×10-		3122×10-2		1.799x10-2	9.192x10-	
	0.68		0.78		1.86	0.69		-65
169.184×10-2		1.907×10-2		8.571x10-		1.114x10-	1.441x10-2	
	0.77		2.46		2.65	3.58		3.54
325.382×10-2		3.454×10-		1.366x10-		9.312x10-4	1.240×10-	
	0.75		2.06		4.71	5.01		6.96
643.198×10-2		8.302×10-4		5.220×10-		2.897x10-	9.727×10-6	
	0.88		2.24		3.12	475		6.07
1281.742x10-2		1.754x10-4		5.996×10-6		1.075×10-	1.473x10-	
L <sub>1</sub> -错误								
87.745×10-2		1.488×10-2		8.425x10-		5.480x10-	2.240×10-3	
	0.95		1.52		2.45	2.00		0.88
164.015×10-2		5.190x10-3		1.540×10-		1.372×10-3	1.217×10-3	
	0.91		2.57		3.18	4.07		3.83
322.143×10-2		8.740x10-		1.694x10-		8.105×10-	8.570×10-	
	0.96		2.22		4.00	4.90		6.26
641.102×10-2		1.879×10-4		1.059×10-		2.747x10-6	1.119×10-6	
	0.97		2.15		3.39	4.90		6.68
1285.630×10-		4.219x10-5		1.012×10-6		9.200x10-	1.092x10-8	

对于  $-1 \leq x \leq 1, t \geq 0$ 。在这些计算离子中, 我们使用了与fR被青蛙 (4.21) 取代的 eno 方案 (没有任何熵校正)。

设  $g(x, t)$  表示 (7.1a) 与  $2(x, 0) = \sin \pi x$ , i.e.,  $\beta=1, a=y=0$  in (7.1b) 的解。解决方案  $2(x, t)$  为  $0 \leq t < 1/\pi$ ; 当  $=1/\pi$  发展在  $=\pm 1$  并保持在  $>1/\pi$ 。在其发展一段时间后, 这个激波开始与  $-1 < x < 1$  中的膨胀波相互作用; 这导致了解的快速衰减, 下面给出的“精确”解是用  $0 \leq x < 1$  计算的g牛顿-拉夫森迭代求解特征误差关系

$$= \sin \pi(x - Yt); (7.2)$$

变 in  $(-1, 0)$  从  $Z$  在  $(0, 1)$  中通过  $(-x, t) = -2(x, t)$  获得。一般的人 (7.1) 的解由  $(-1, 1)$  中的  $2(x, t)$  计算得出

$$u(x, t) = \alpha + \beta 2(x - xt + y, \beta r). (7.3)$$

在表一、and II 和图中。我给出了 (7.1) with  $\alpha=1, \beta=2y=0$  的计算, 即; 因此, 在  $=2/\pi$ 。当固体离子仍然光滑时, 结果在  $t=0.3$  时表示。我们将  $(-1, 1)$  划分为  $J$  个相等的间隔并进行定义  $u(x, t) = 1 + \frac{1}{2} \mathcal{Z}(x - t, \frac{1}{2}t)$ ;

$$x, = -1 + (J-1/2)h, h=2/J, 1 \leq j \leq J: 7. 4)$$

首先, 我们考虑纯 IVP 为 (7.1), i.e., 周期布恩边界条件  $atx=\pm 1$ 。在无花果中。1a和1b显示了RDatt=0.3的ENO方案的结果; 图1a为二阶ENO方案, 图1b为四阶ENO方案。两种计算均采用  $J=10$  和  $CFL=0.6$  进行。这个

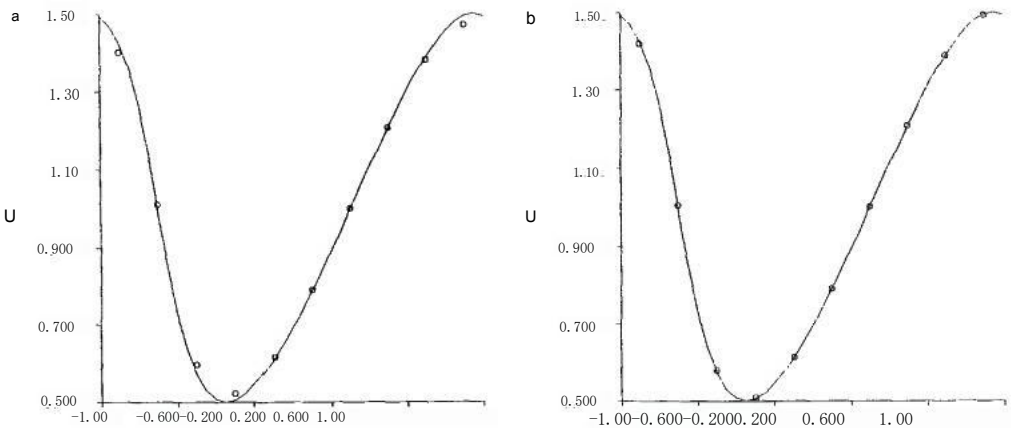


图1

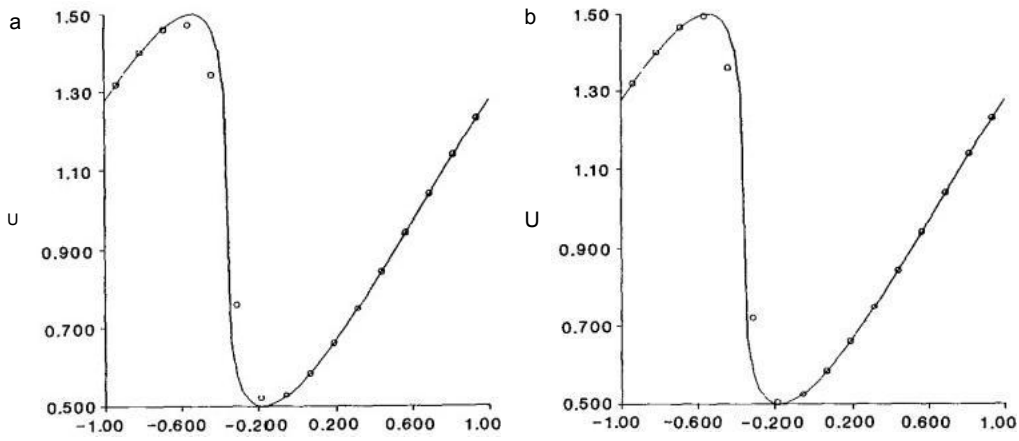


图2

这些图中的连续线是精确解；圆圈表示 $R(x, ; o\sim)$ 的值。在表IA和表IB中，我们列出了 $r=1、2、3、4、5$ 的细化序列 $J=8、16、32、62、128$ 的 $l$ -错误和 $theL_1$   $-error=0.3$ 。表IA显示了RP的ENO方案结果，表IB显示了RD的方案结果。表I和表II中的 $r$ 的量值是“计算顺序概率”，它是通过假设误差是一个常数的时间值来计算的；这个定义只有对足够小的 $h$ 才有意义。

在无花果中。2a和2b我们使用与图1相同的方案，但使用 $J=16$ ，并显示结果 $att\approx 2/\pi$ （17个时间步长后），这是激波形成的时间。在无花果中。3a和3bwe表示对应的重建 $R(x; v\sim)$

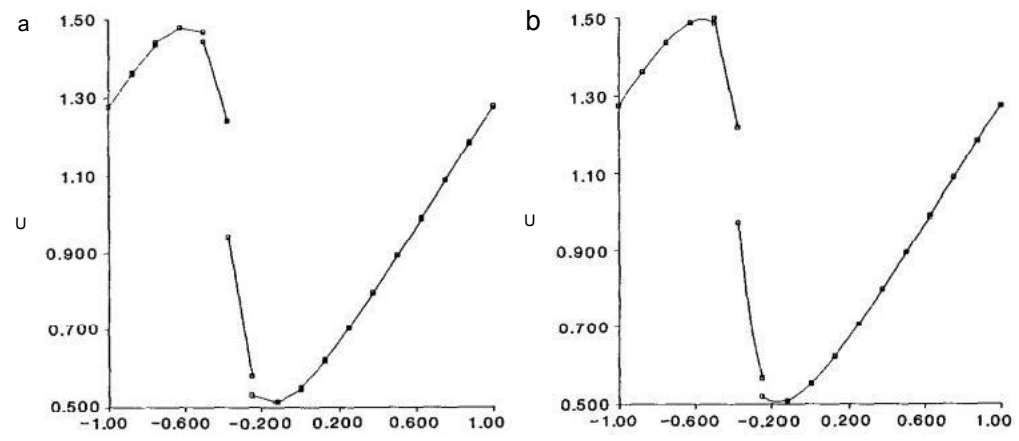


图3

图2的数值解。图中的平方。3a和3b表示 $R(x, +12\pm 0; v)$ 的值。 $R(x; v)$ 在图3a中为分段线性，在图3b中为分段立方。

接下来我们考虑IBVPfor (7.1)；由于 $\beta=1$ ， $\beta=2$ ， $y=0$ 的(7.3)的特征速度是正的，我们规定

$$u(-1,t)=g(t); \quad (7.5a)$$

$x=+1$ 是一个流出的边界，那里没有任何条件。能够与我们在(7.5a)中取的(t)为 $x=-1$ 处的周期解的值进行比较，即，

$$g(t) = 1 + \frac{1}{2} \mathcal{Z}(-1 - t, \frac{1}{2}t). \quad (7.5b)$$

我们在处理边界条件时所采取的观点与“抽象的scheme“(1.10)，(1.14值)”作为一个全局操作序列的表示是一致的。因此，在重建步骤中，与纯IVP情况一样，我们使用给定的细胞平均值 $\{v_j\}$ ， $1 \leq j \leq J$ ，为 $-1 < x < 1$ 使用 $\text{getR}(x; o)$ ；在边界存在的情况下，我们通过施加条件将模板的选择限制在可用信息中

$$l \leq (j) \leq r \text{ 为 } l \leq \quad (7.6)$$

在该算法(3.4)中。请注意，在重建步骤中，我们没有使用给定的边界数据集(t) (7.5a)。通过考虑小步长中的解为IBVP，将边界数据合并到偏微分方程水平上的方案中。显然，结果方案在 $x=-1$ 附近偏向“逆风”；然而，在非线性情况下的数值实验，如在c常系数情况下(见[16])，表明ENO方案是稳定的。我们有机会

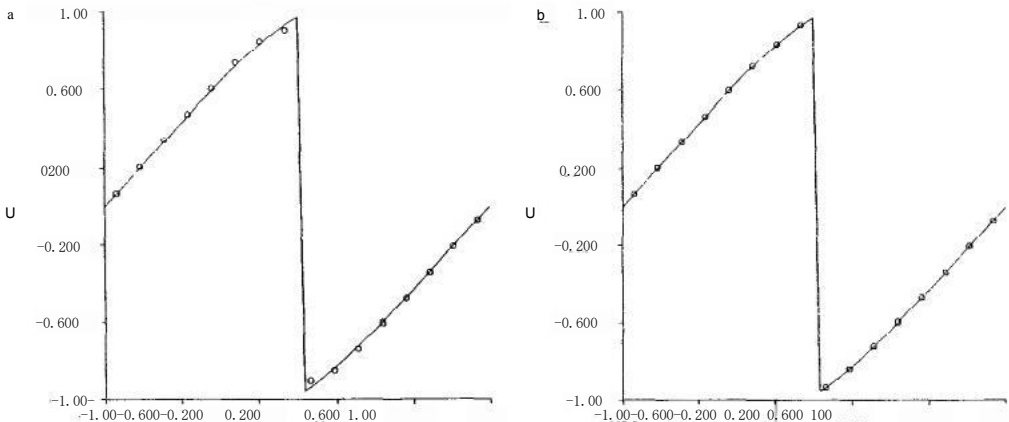


图4



在类似的网格中出现在网格间的不连续点附近。

在表IIA和IIB中，我们用(7.1)对IBVP(7.1)重复(7.5)的计算。在无花果中。4a和d 4b，我们分别展示了基于 $r=2$ 和 $r=4$ 的IBVP( $\alpha=0$ ,  $\beta=1$ ,  $y=\pi$ )的ENO格式的计算。这里的边界 $x=\pm 1$ 是特征，在静止的 $t=1/\pi$ 处形成 $atx=0$ 。在这些计算中，我们将 $x=-1$ 作为一个新的边界并指定

$$u(-1,t)=0;$$

将 $x=+1$ 视为一个偏外边界。结果表明，在 $J=16$ 和 $CFL=0.6$   $att=0.6$ 的数值解中，由于激波与膨胀波的相互作用，溶液已经开始显著衰减。

## A2. 黎曼IVP表示非凸 $f(u)$

在此说明中，显示了应用于黎曼IVP的结果

$$u_x + f(u)x=0, \quad (7.7a) \quad u(x, 0) = \begin{cases} u_L & x < 0 \\ u_R & x > 0, \end{cases}$$

其中 $f(u)$ 是非凸函数

$$f(u)=4(u^2-1)(u^2-4). \quad (7.7b)$$

我们记得，证明近似(4.13)的主要困难是当(4.4)中的“扇”覆盖 $x=X$ ,  $+1/2$ ；在证明使用fROE(4.21)而不是黎曼问题(4.6)的确切通量时，也遇到了同样的困难。因此，我们提出了两种情况，其中 $a(u_L, u_R)=0$ ；在第一种情况下， $x=0$ 被风扇上的中心声波反射所覆盖，而在第二种情况下，在 $x=0$ 处有一个静止的(声波)激波。

在每种情况下，我们都提出了两种不同的实验。在第一个容器中，我们使用精确的ENO方案，定义的(4.6a)；这些结果是相当令人满意的，如图所示。5和7。在第二组实验中，我们使用ENO方案，用(4.21)中的fROE修改代替fR

$$fROE(u_1, u_2) = 2[f(u_1) + f(u_2) - \max(|a(u_1, u_2)|, c)(u_2 - u_1)]. \quad (7.8a)$$

对于 $|a| < c$ ，线性粘度项 $-c(u_2 - u_1)/2$ 的附加值是(4.21)的最简单但最粗糙的熵修正。我们注意到，(7.8a)中的 $c=0$ 对应于(4.21)，而 $g=1/\lambda$  ( $\lambda=t/h$ )对应于Lax的一阶方案[18]；因为

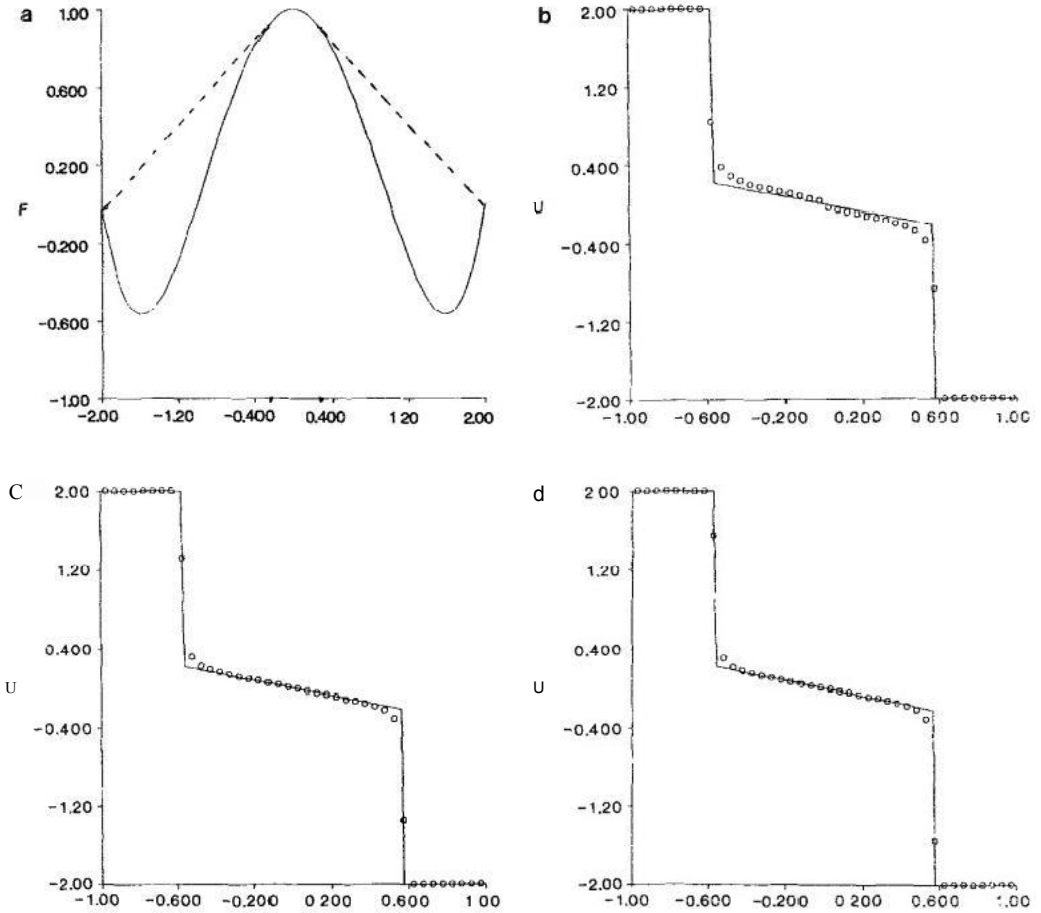


图5

(7.8a) 满足关系 (4.16c)，修改后的方案保持  $r$  阶精度。在我们的计算中

$$E=0.1/2(7.8b)$$

[24]的分析表明，在[9]的“二阶”TVD格式中使用 (7.8a) - (7.8b)，可以在  $\lambda$  足够小的情况下，收敛于凸  $f(u)$  的熵修正解；在凸情况[9]和  $nvex$ [32]情况下的数值实验似乎验证了这一说法，即使对于  $aCFL$   $n$  接近 1。

使用 (7.8a) - (7.8b) 的 ENO 方案的数值结果如图所示。6 和 8。这些结果表明，ENO 模式收敛于熵

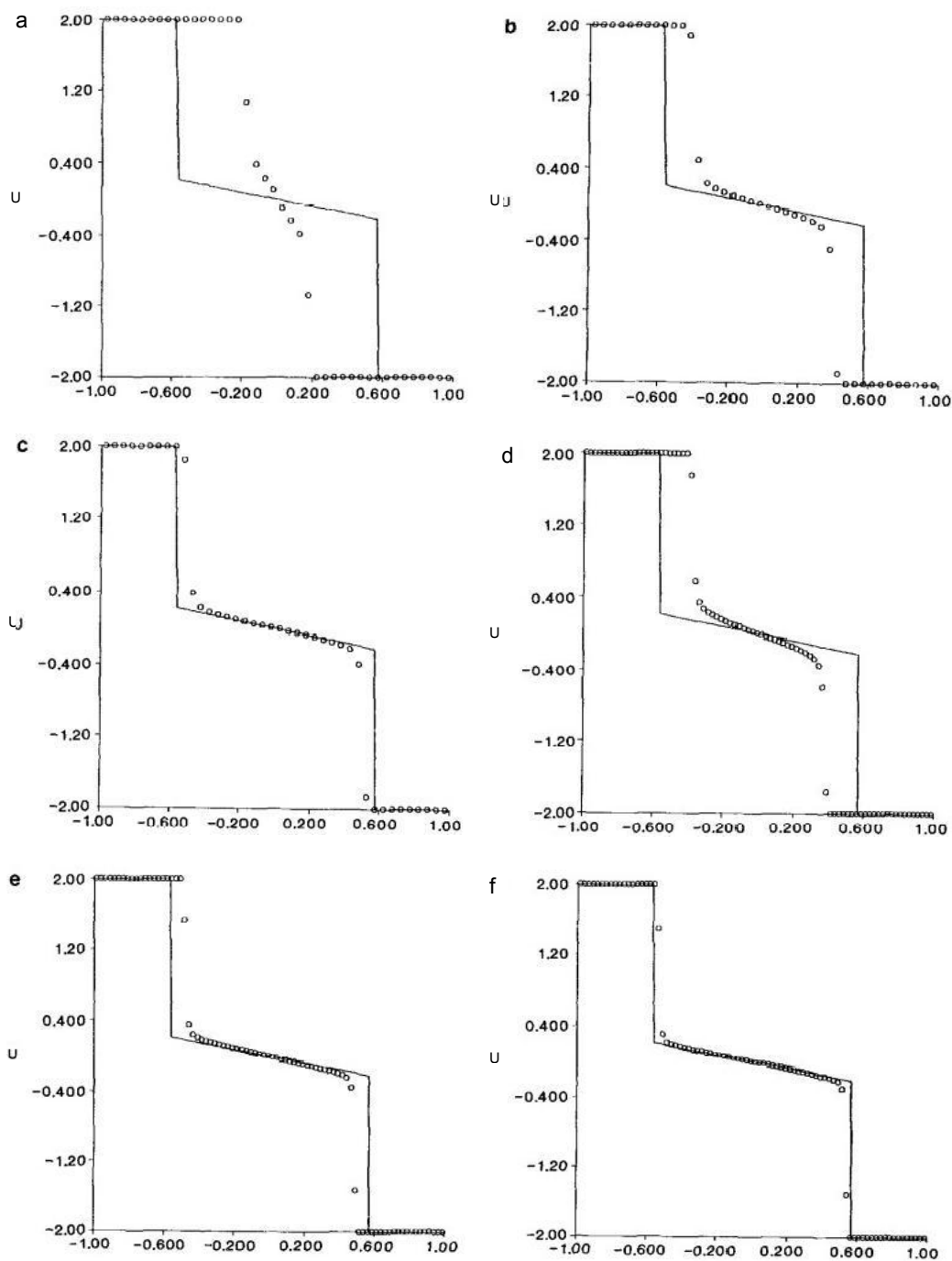


图6

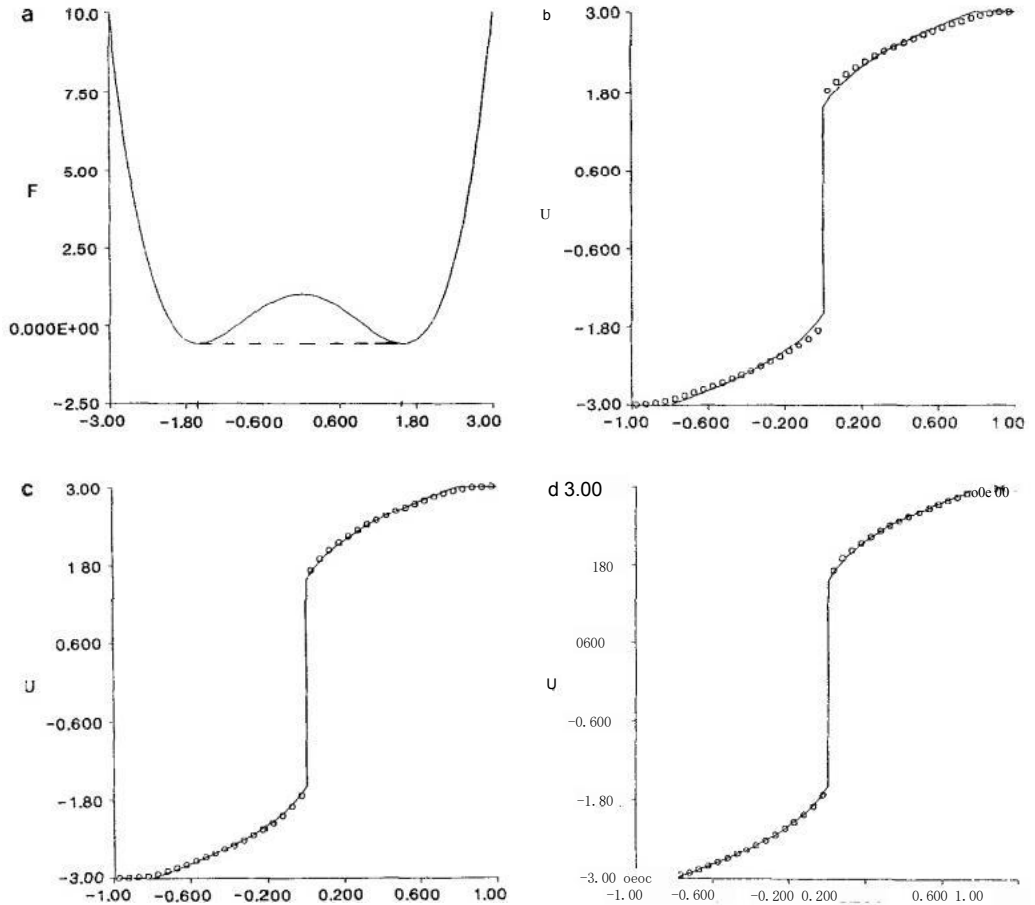


图7

正确的解；然而，数值近似的性质很大程度上依赖于该格式的形式化或精度。

我们注意到，对fROE的熵修正更适合于非凸情况由(7.8a)得到，由 $\max[0, a(u_1, u_2), a(u_1, u_2), a(u_1, u_2)]$ ，(7.8c)定义

在哪里

$$a_L = \min_{v \in [u_1, u_2]} \bar{a}(u_1, v), \quad a_R = \max_{v \in [u_1, u_2]} \bar{a}(v, u_2); \quad (7.8d)$$

see[13].在这种情况下，修改后的fROE在计算上等价于精确的fR。

我们的目的是用粗熵法进行自然实验方法 (7.8b) 而不是更合适的方法 (7.8c) - (7.8d)，是为了证明黎曼求解器在 eno 方案模拟中的重要性随着精度顺序的增加而降低。当  $r=1$  ( $x; v$ ) 是分段常数时，且解的所有变化都包含在不连续点中

重建。因此，黎曼求解器是描述时间演化的唯一机制。在  $>1$  中，细胞内的平滑多项式变化（平滑区域为  $O(h)$ ）通常大于重建不连续区域的变化（平滑区域为  $O(h')$ ）。3,14,and16.因此，平滑多项式部分的时间演化，即柯西-科瓦列夫斯基过程，一般比黎曼求解器更重要。唯一的例外是，在前几个时间步长中，需要在黎曼 IVP (7.7) 的解中引入中间状态，其中 ( $u_L, u_R$ ) 不是一个冲击。

在本小节中的所有计算中，我们使用了 RD 和 CFL=0.8 的 ENO 方案。

案例(i).  $u_L=2$ ,  $u_R=-2$ 。这种情况下的精确解为（见图5a）

$$u(x, t) = \begin{cases} 2, & x/t < -0.5281529 \\ g(x/t), & |x|/t < 0.5281529 \\ -2, & x/t > 0.5281529; \end{cases} \quad (7.9a)$$

这里  $g(x/t)$  是一个有中心的反射波： $g(y)$  是解

$$y' = f(g)$$

在凹面部分，即  $|u| < \sqrt{5/6}$ ;

$$g(\pm 0.5281529) = \pm 0.2152504.$$

在无花果中。5b, c, dwe 分别使用  $r=1, 2, 4$  的 (4.6a) 定义的 eno 方案的结果；在这些计算中，我们在 (7.4) 和  $N=80$  时间步长中使用  $J=40$ 。精确解用连续线表示；圆表示  $R(x, t; u)$  的值。我们观察到，这些计算中解的结构已经在校正处发展；这从计算冲击的位置是准确的事实是明显的。在图5b中，我们注意到“狗腿”，这是戈杜诺夫公司的典型方案。

在无花果中。我们重复图中的计算。5bccd，但替换了  $fR$

由 fROE (7.8a) - (7.8b)。从这些图中我们看到， $t$  方案发展了正确的正确结构，但不是以正确的速度。这是由于  $e=0.1/\lambda$  抑制的风扇比精确解中的初始风扇要窄得多。计算出的电波位置滞后于  $=1$  的 8 个细胞， $=2$  的 3 个细胞， $=4$  只有一个细胞。若要进行验证：

由于数值近似收敛于熵的正确解, 我们将网格细化为2倍, 并重复图的计算。6a, b, c与J=80, N=160; 这些计算的结果如图所示。6d,e,f. 由于计算出的激波滞后于正确位置的单元数量保持相同, 我们得出结论, 数值近似确实接近熵解的边缘。

考虑到熵校正 (7.8b) 的粗糙度, 我们认为图6c和图6f中的四阶格式的性能是惊人地好的。

案例 (ii) .uL=-3, uR=3。

在这里的精确解(见图。7a)

$$u(x, t) = \begin{cases} -3 & x/t \leq -19.5 \\ \tilde{g}(x/t) & -19.5 \leq x/t < 0 \\ -\tilde{g}(-x/t) & 0 < x/t \leq 19.5 \\ 3 & 19.5 \leq x/t; \end{cases} \quad (7.9b)$$

这里的g(y)是解

$$y=f(g)$$

在其 $|u| > \sqrt{5}/6$ 的凸部。注意, 溶液 (7.9b) 在 $x=0$ ;  $g(0)=\sqrt{2.5}$ 时呈倾斜。

在无花果中。7b, c, dwe分别显示了使用=1,2,4)定义的eno方案的结果; 在这些计算中, 我们在 (7.4) 中使用J=40和N=20时间步长。我们观察到这些图形中的静止激波 $x=0$ 完全解析。

在无花果中。我们计算了图中的计算结果。7bccd, 但有fR替换byfROE (7.8a)-(7.8b). 由于本情况下的稀疏扇不是声波, 因此图8a、b、c中稀薄波的数值近似质量与图中相应稀薄波的数值近似质量相似。7 b,c,d. 我们在图中观察到在 $x=0$ 处的静止激波。8a, b, |<是一些模糊的——这是由于黎曼求解器响应 (7.8b) 在 $x=0$ 附近放置了一个|<=的风扇。然而, 如果我们比较两个实验中4序deno方案的结果, 我们发现图8c的结果仅略低于图7d的结果。

### B. 气体动力学的欧拉方程

在本小节中, 我们介绍了对=值为1.4的多热带气体的气体动力学欧拉方程的ENO格式的数值实验。6). 在所有这些计算中, 我们使用了通过原始函数 (RP) 和fROE (5.11), (6.9) 的重建, 没有任何熵修正。

276年，哈顿等人。

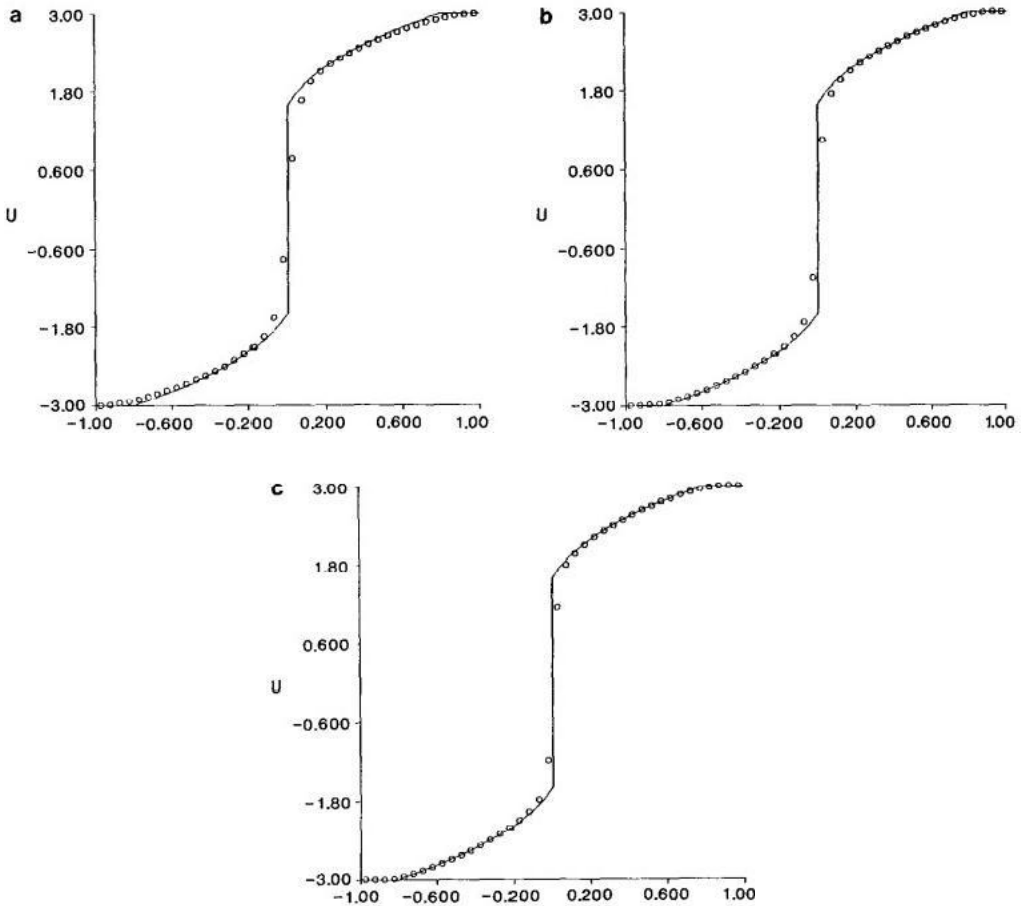


图8

### B1. 黎曼问题

在无花果中。9和10我们展示了分别将 $\epsilon=2$ 和 $\epsilon=4$ 的eno理论应用于Riemann问题（7.7a）的结果

$$(p_L, q_L, P) = (1, 0, 1); (p_R, q_R, P_R) = (0.125, 0, 0.10). \quad (7.10a)$$

在这些计算中，我们使用了特征重建（5.8），（6.3）与100个细胞， $h=0.1$ ， $CFL=0.8$ ，50个时间步长。

在图11中，我们重复了图10中的“四阶”ENO方案的计算，但采用了组件级重建（5.1）。对比图10和图11，我们发现在整体侦察结构中有一些“噪声”，通过使用实时重建可以消除。然而，我们注意到，图11中的“噪声”水平对于实际计算可能是可以接受的。

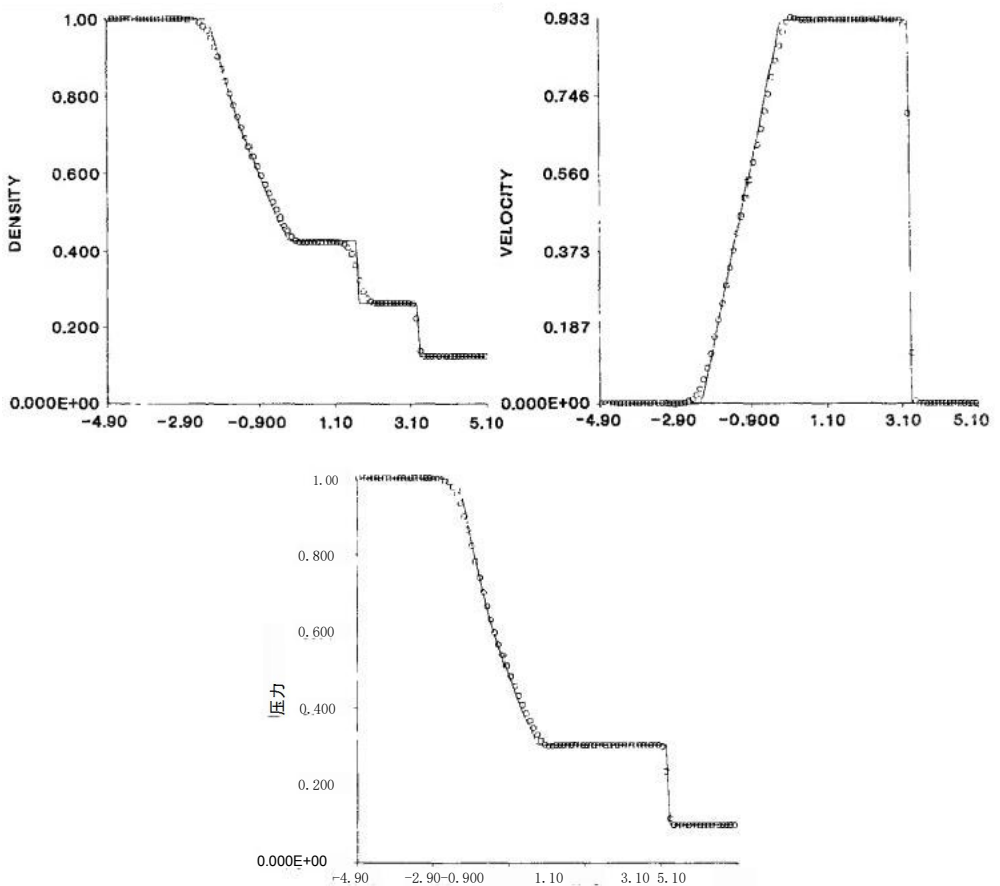


图9

初始数据 (7.10a) 是由Sodin[23]提出的黎曼问题的数据, 这已经成为一个标准的测试问题。这个问题的解决方案有一个单调的递减密度剖面, 因此它不显示某些差异, 可能出现的中间状态必须“建立”。我们给出了黎曼问题的计算方法

$$(PL, qL, P)=(0.445, 0.698, 3.528); (PR, qR, Pr)=(0.5, 0, 0.571) \quad (7.10b)$$

在[18]中的Lax使用; 参见[7,9]。所有这些计算, 我们用100个细胞,  $h=0.1$ ,  $CFL=0.8$ , 和85个时间步使用声指数重建 (5.11)。在图12中, 我们展示了使用分量重建 (5.11) 的“四阶”ENO方案的结果。将这些结果与图11进行比较表明, 发现这里的整体重建比Sod的问题更“嘈杂”。在



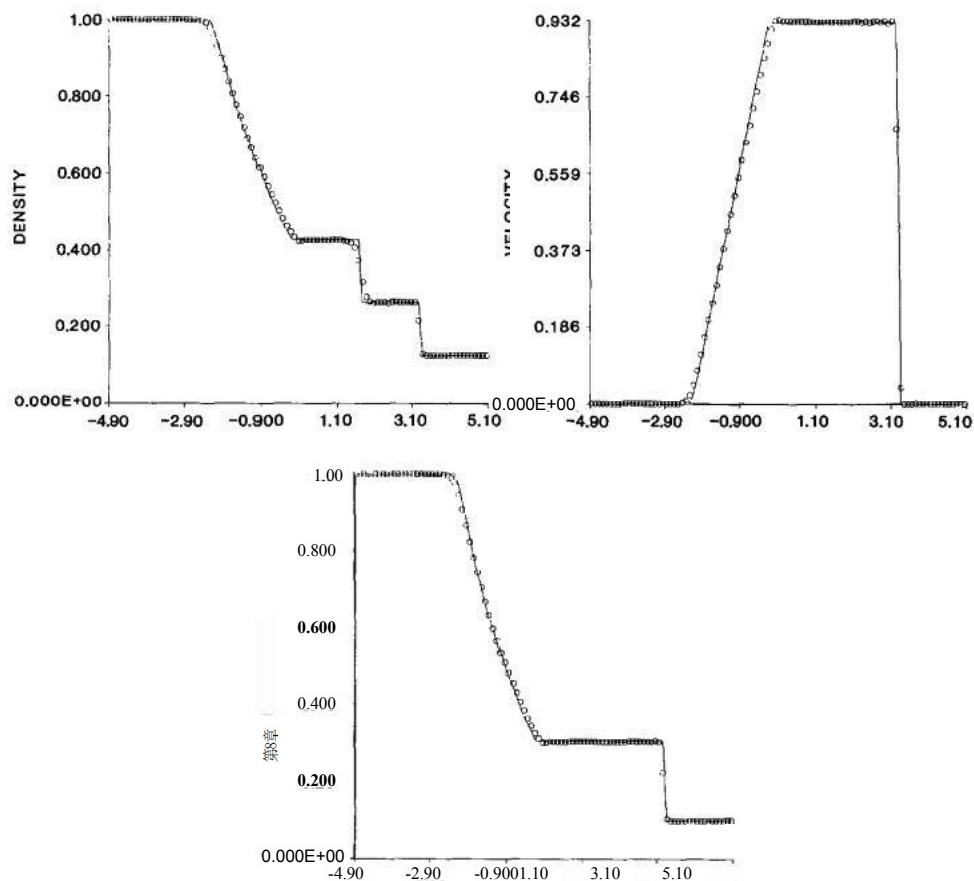


FIGURE 10

图中。13和15我们分别用对 $r=2$ 和 $r=4$ 的特征重构(6.3)表示ENO方案的结果；对比图15和图12，我们可以看到图12中的大部分“噪声”被消除了。

在无花果中。第14和16页，我们在图中展示了数值解的炭细菌重构 $R(x; v)$ 。分别为13和15；图14为分段线性( $r=2$ )，图16( $r=4$ )为分段立方。这些图中的平方标记了 $R$ 的值( $x, +1/2 \pm 0; v$ )；因此，两个位于同一位置的方块之间的差异显示了重建过程中不连续的大小(我们记得图中的圆。13和15是 $R(x; v)$ 的值。我们看到，在稀薄波的重建中，不连续体足够小，在图形上难以察觉。令人惊讶的是，在重建过程中出现的不连续性也相当小。比较图。16到图14我们

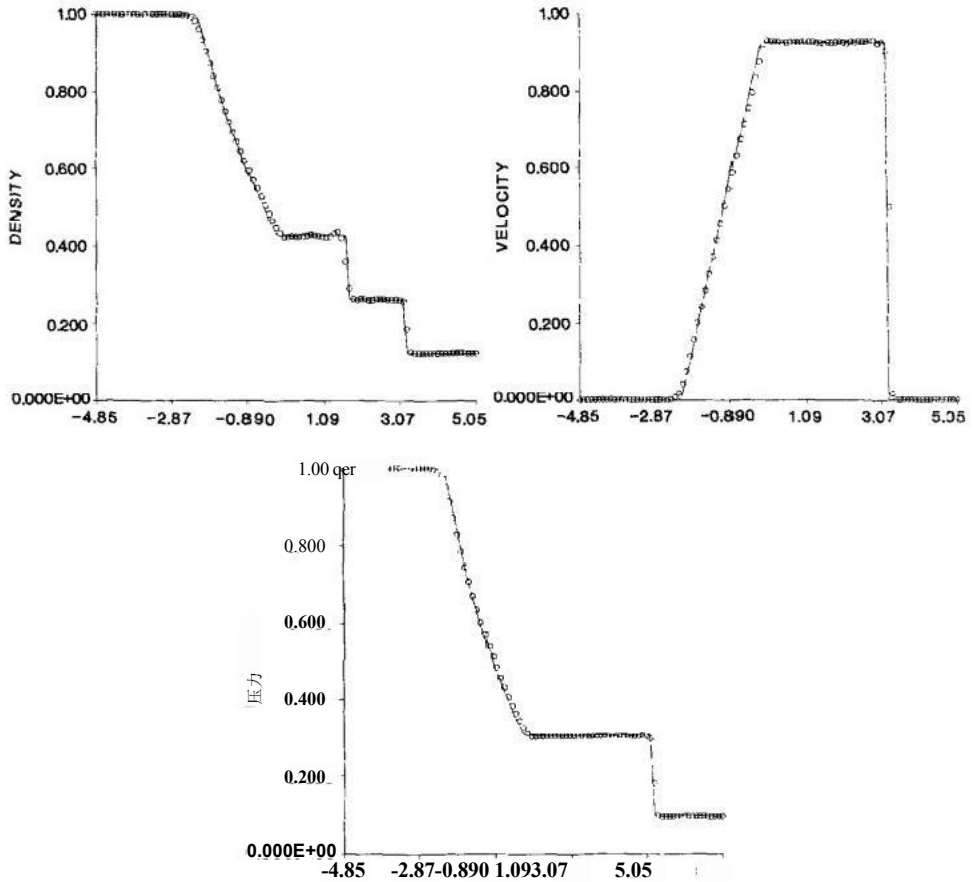


图11

注意， $r=4$ 重建的大小总是比 $r=2$ 小得多。有趣的是，即使是in在图中的激波区域。16 ( $r=4$ )，重建中的跳跃总和仅约为激波大小的35%，而激波的跳跃约由重建的平滑多项式部分描述。

我们注意到，由于黎曼问题解的自相似性质，任何方案的收敛速度本身都局限于一阶性（见[27]）。比较 $r=4$ 和 $r=2$ 在上述黎曼问题的解决方案中，我们注意到在详细描述（我们在这些计算中没有使用人工压缩）和稀薄波的描述方面有一点改善。由于由于解决方案的自相似性，最好用 $x/t$ 作为空间空间来比较两种方案的性能

280年，哈顿等人。

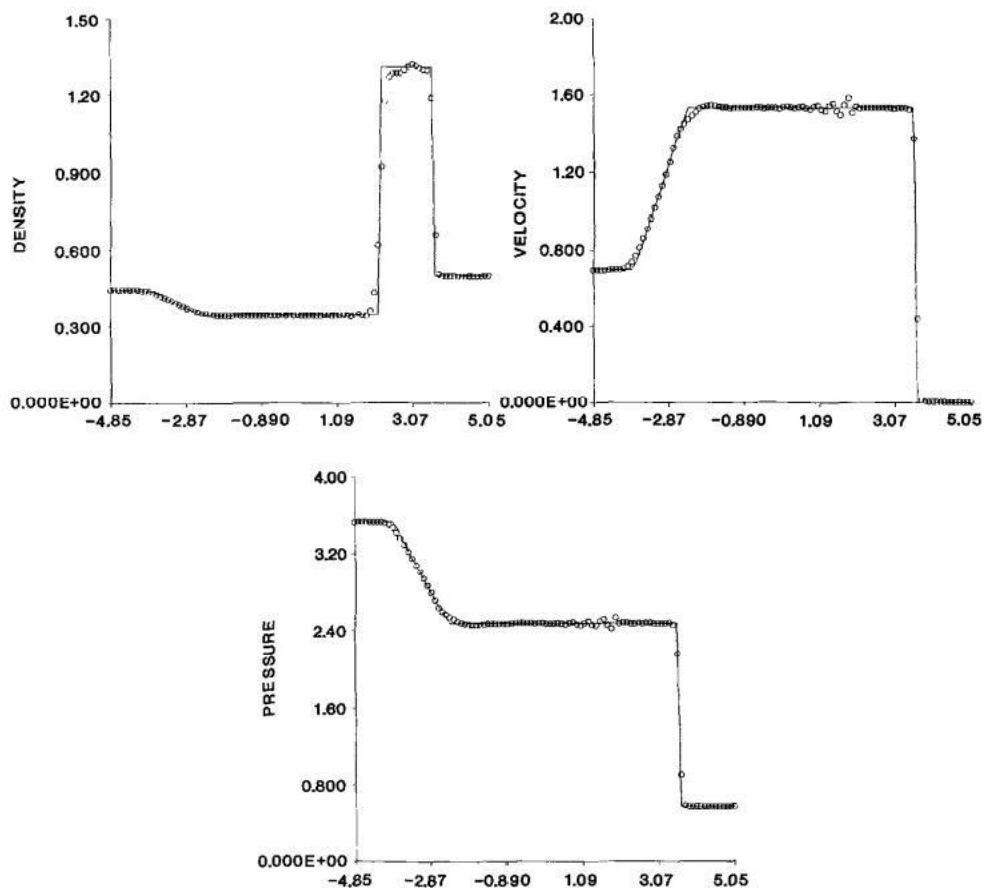


图12

变量，并找到使用网格解决的中间状态需要多少个时间步长。对于这个问题（7.10b），我们发现 $N=35$ 的 $r=4$ 与 $N=70$ 的 $r=2$ 的结果大致相同。

### B2. Blas 波的相互作用

在本小节中，我们用ENO方案进行了两个交互爆炸波问题的数值实验：

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_L & 0 \leq x < 0.1 \\ u_M & 0.1 \leq x < 0.9 \\ u_R & 0.9 \leq x < 1, \end{cases} \quad (7.11a)$$

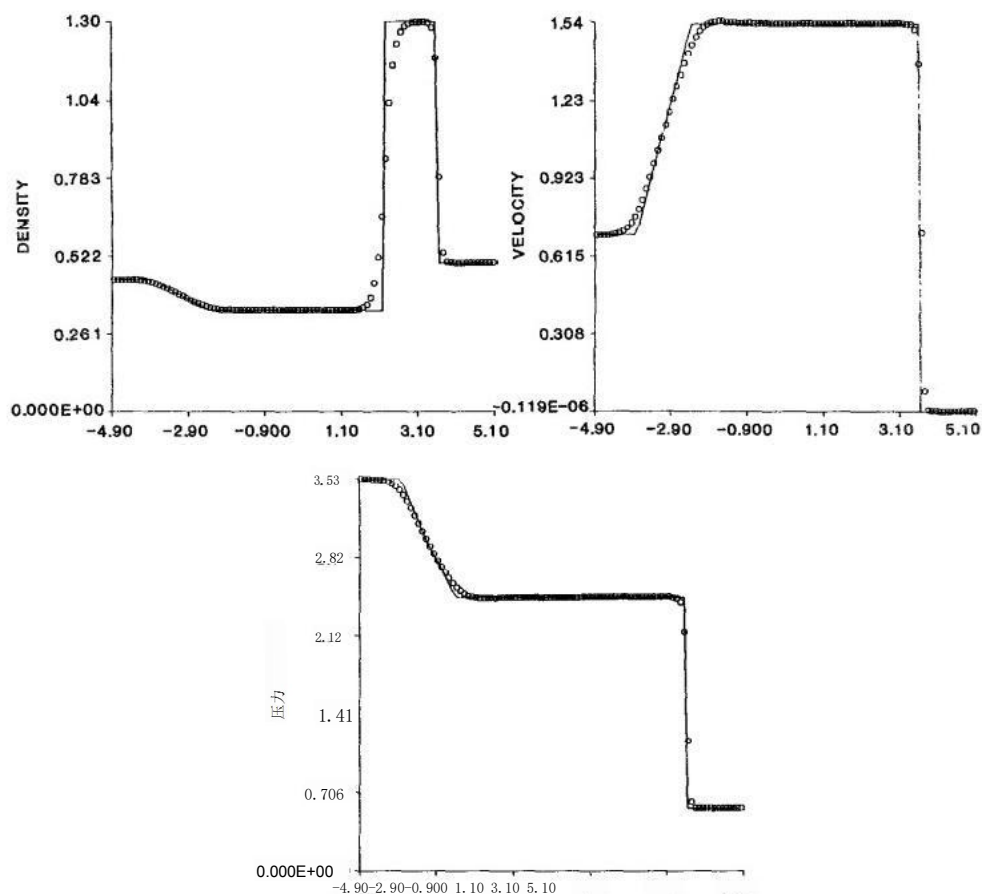


图13

在哪里

$$PL=PM=PR=1, qL=9M=qr=0, PL=10^3, PM=10^{-2}, PR=10^2; (7.11b)$$

边界在 $x=0$ 和 $x=1$ 处是固体墙。这个问题被沃德沃德和科拉提出作为一个测试问题；我们请读者参考[31]，其中对这个问题的各种方案的性能进行了全面的比较。

在我们的计算中，我们将 $interval(0,1)$ 分为 $J$ cells

$$x_j = (j-2)/J, j=1, \dots, J, (7.12a)$$

282HARTEN等。

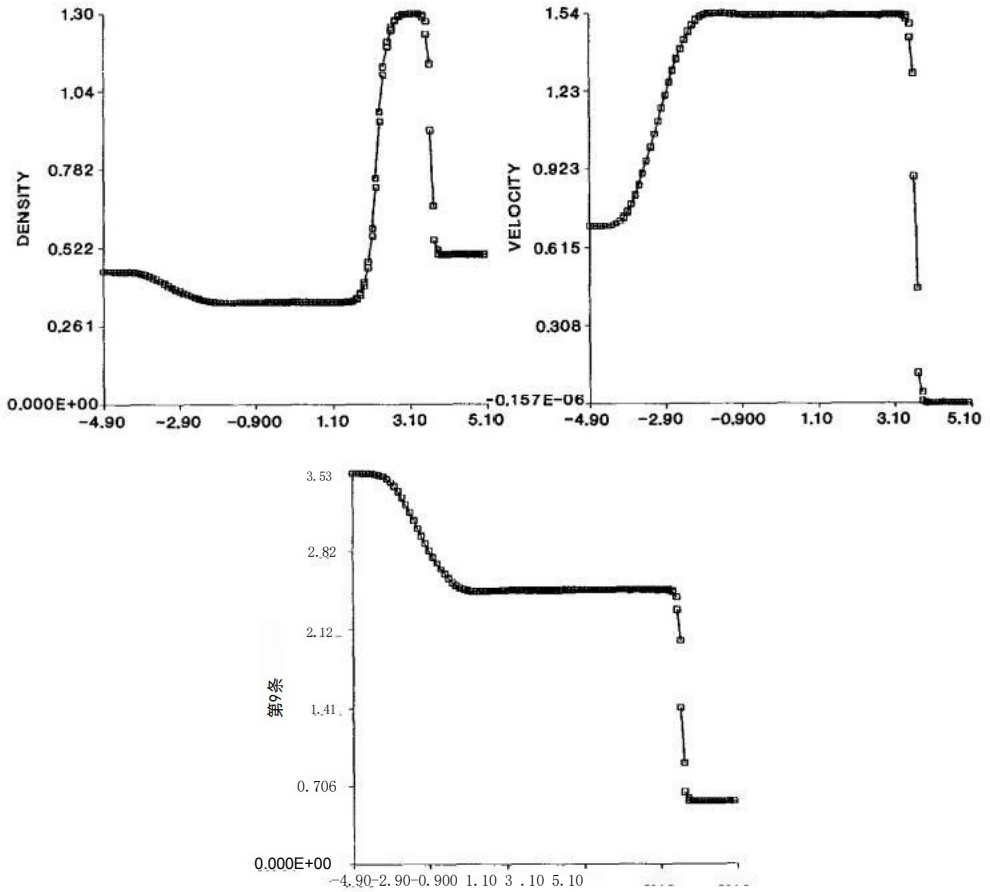


图14

其中 $x_j$ ，标记第 $j$ 个单元格的中心。固体壁 $x=0$ 和 $x=1$ 的边界条件用reflection, i.e. 处理，我们定义辅助states $v_0, \dots, v_{N-1}$ ， $v_0$ 为左壁，右壁为 $v_{N-1}, \dots, v_N$

$$P_{j-1}^n - P_j^n = -q_{j-1}^n, \quad q_{j-1}^n = -q_j^n, \quad P_{j-1}^n = P_j^n, \quad j=1, \dots, N-1 \quad (7.12b)$$

$$\rho_{j+1}^n = \rho_{j-1}^n, q_{j+1}^n = -q_{j-1}^n, P_{j+1}^n = P_{j-1}^n, j=1, \dots, N-1. \quad (7.12c)$$

我们观察到，用上述反射表示固体壁条件非常适合于特征阶梯构造：接近右边界的3波为1波；明确的t hrc几乎不是特征变量（6.3a）中的波之间的任何变化，因此避免了没有足够的平滑点可以选择的情况。

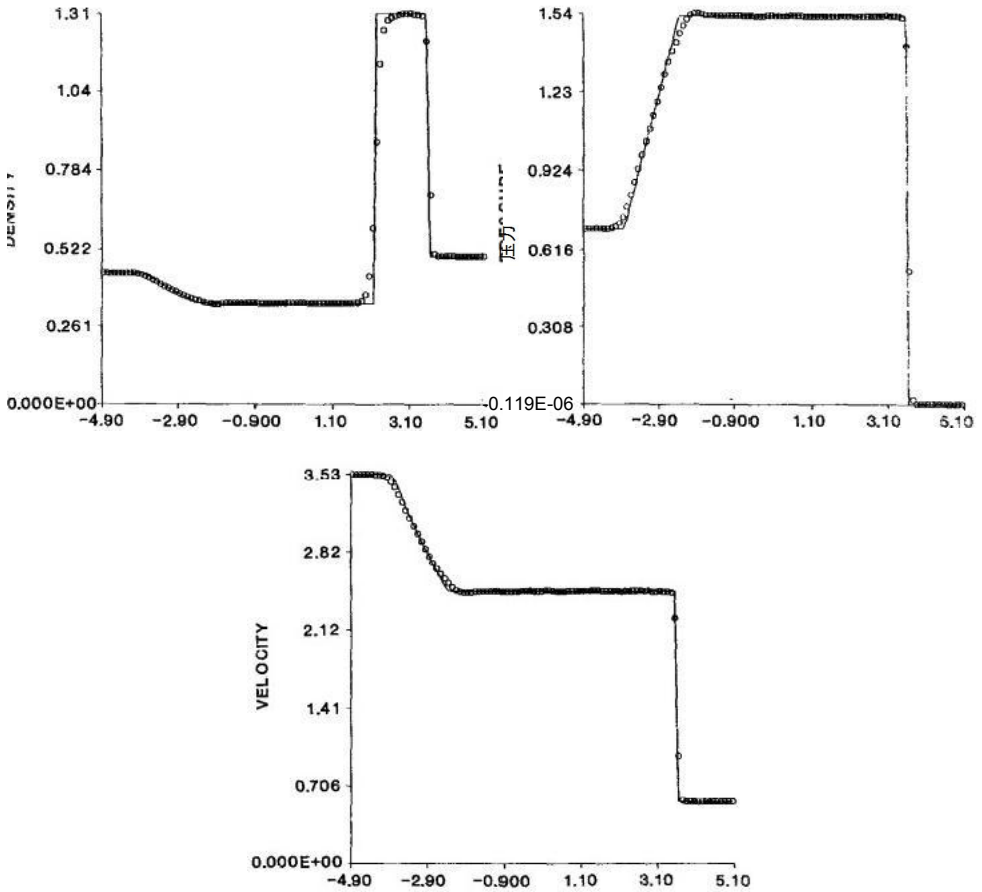


图15

在图 17a-h 中，我们展示了“四阶”ENO 方案  $at1=0.010, 0.016, 0.026, 0.028, 0.030, 0.032, 0.034, 0.038$ , respectively. 的溶解度。我们请读者参考[31]中的图2，其中显示了一个高度精确的解决方案，并给出了在这些实例中发生的各种交互作用的详细描述。图中的连续线。17a-h、18和19是“四阶”电子处理方案  $J=800$  在 (7.12a) 中的求解。将这个解决方案与伍德沃德和科莱拉在[31]中的“精确”的解决方案进行比较，我们发现它显示了各种相互作用的所有重要特征，因此可以被认为是一个“收敛”的解决方案。（用  $J=800$  表示解的连续线是  $\{R(x, ; v)\}$  的分段线性插值；因此，解中确实出现在  $R(x, ; v)$  中的尖点，在图形表示中是起伏的）。图中的圆圈。17a-h 表示“四阶”ENO 方案的  $R(x, ; v)$  的值。

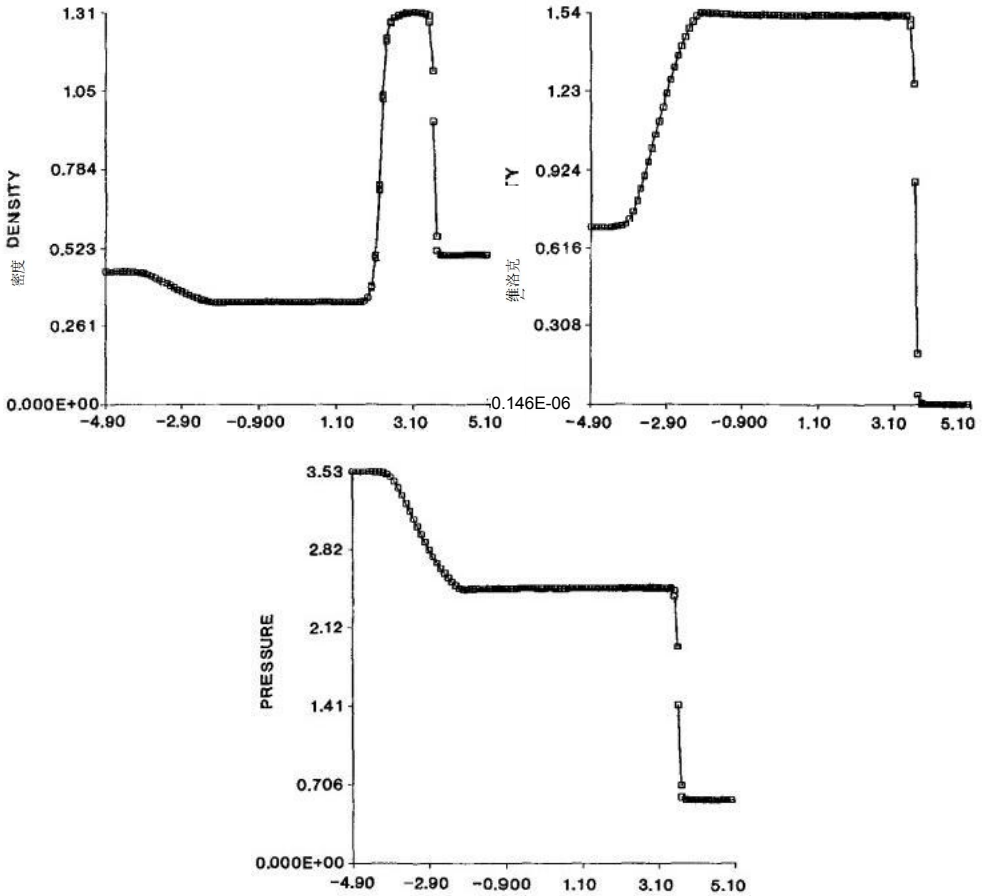


图16

J=400.比较J=400和J=800的数值解，我们发现速度和压力已经收敛，而Figs的密度。17gand 17h仍然偏离“收敛”溶液。这是由于此时溶液中存在3个接触不连续的涂抹；伍德沃德和科拉的数值结果表明，“接触不连续陡剂”的加入大大改善了密度剖面。

在图18中，我们给出了使用J=2 00 的“四阶”ENO方案的解；在图19中，我们重复图18中对“二阶”ENO方案的计算。比较图18和图19，我们看到“四阶”方案提供了更好的分辨率。我们注意到，J=100的“4阶”方案（这里没有显示）的结果与J=200的“2阶”方案具有相同的质量

我们注意到, 阿抛物线插值

$$P(x_{-1})=240, P(x_0)=0.01, \quad P(x_1)=40$$

有一个为负的区间; 对于通过这些点的高序间极化多项式也是如此。在图17d中相互作用前计算两个相互作用的冲击波时, 图17中的低压区域顺式收缩到1-2个计算细胞。由于高阶插值多项式可以在如此剧烈的情况下产生压力和密度的遗传值, 我们在欧拉方程程序的重建步骤中施加了一个“正性条件”。为了确保第j个单元中的 $R(x; o)$ 产生的密度和压力都是正的, 即,

$$\begin{aligned} P_j + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\partial^k P}{\partial x^k} \bigg|_{x=x_j} \frac{(x-x_j)^k}{k!} &> 0, \\ \rho_j + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\partial^k \rho}{\partial x^k} \bigg|_{x=x_j} \frac{(x-x_j)^k}{k!} &> 0 \quad \text{对于 } |x-x_j| < h/2 \end{aligned} \quad (7.13a)$$

我们检查是否

$$\sum_{k=1}^{r-1} \left| \frac{\partial^k P_j}{\partial x^k} \right| \frac{(h/2)^k}{k!} < 0.8 P_j; \quad \sum_{k=1}^{r-1} \left| \frac{\partial^k \rho_j}{\partial x^k} \right| \frac{(h/2)^k}{k!} < 0.8 \rho_j \quad (7.13b)$$

如果条件(7.13b)不满足, 我们在局部降低 $\Rightarrow x$ 的顺序, 直到确保阳性为止。我们观察到(7.13b)中的不等式的LHS为 $O(h)$ , 因此这个正性条件并不降低渐近阶顺相系数。我们的计算机程序监视器不会降低精度的渐近阶数。我们的计算机程序监控由于条件而导致的顺序降低的情况; 我们发现, 在“四阶”ENO模式的计算顺序在图16d中的交互之前已经减少了两次, 而且仅在交互区本身; 黎曼问题的解决方案(7.10)。

### C. 变体和扩展cl。标量情

#### 况下的特征分析方法

在[15]中, 我们描述了一个近似 $\text{tov}(x, 1)$ , 小值(4.2), 这是通过追踪初始数据的近似特征得到的。

这个近似 $i(x, t)$ 可以推广到一个任意的操作顺序, 如下:  $\text{Leta}_{7+12}$ 表示

$$\text{an}_{+12} = a(R(x_{+1/2-0}; o), R(x_{+12+0}; v)), \quad (7.14a)$$



harten等人。

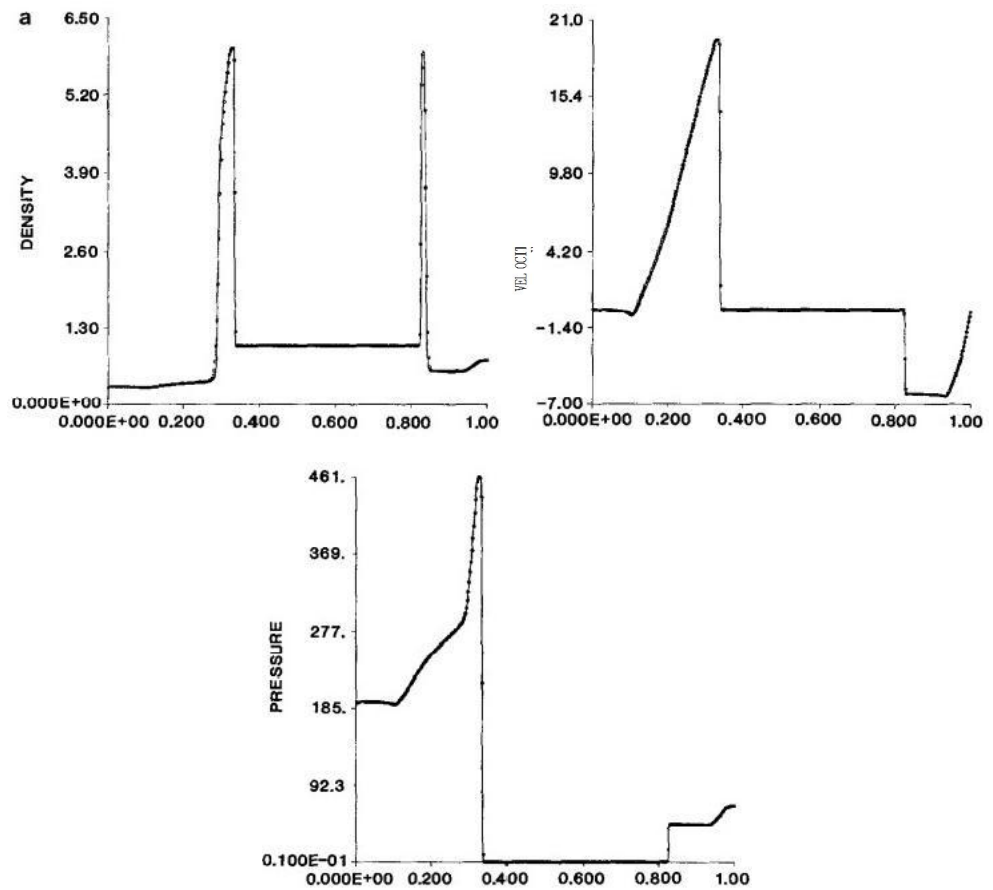


图17

其中， $a(u_1, u_2)$  在 (4.7) 中定义，设  $a(x)$  表示  $a_{7+1/2}$  的插值  $H_m(3.1)$  with  $m=r-1$ , i.e.,

$$\begin{aligned} a(x;+1/2) &= a_{j+1/2} \quad (7.14b) \\ &= (=) = H_m(=; =), \quad =-1. \quad (7.14c) \end{aligned}$$

近似  $o(x, t)$  是通过沿近似特征线规定解的常数得到的

$$x = x_0 + a(x_0) t, \tag{7.15a}$$

i.e.,

$$D(x_0 + a(x_0) t, t) = 0(x_0, 0) = R(x_0; o); \tag{7.15b}$$

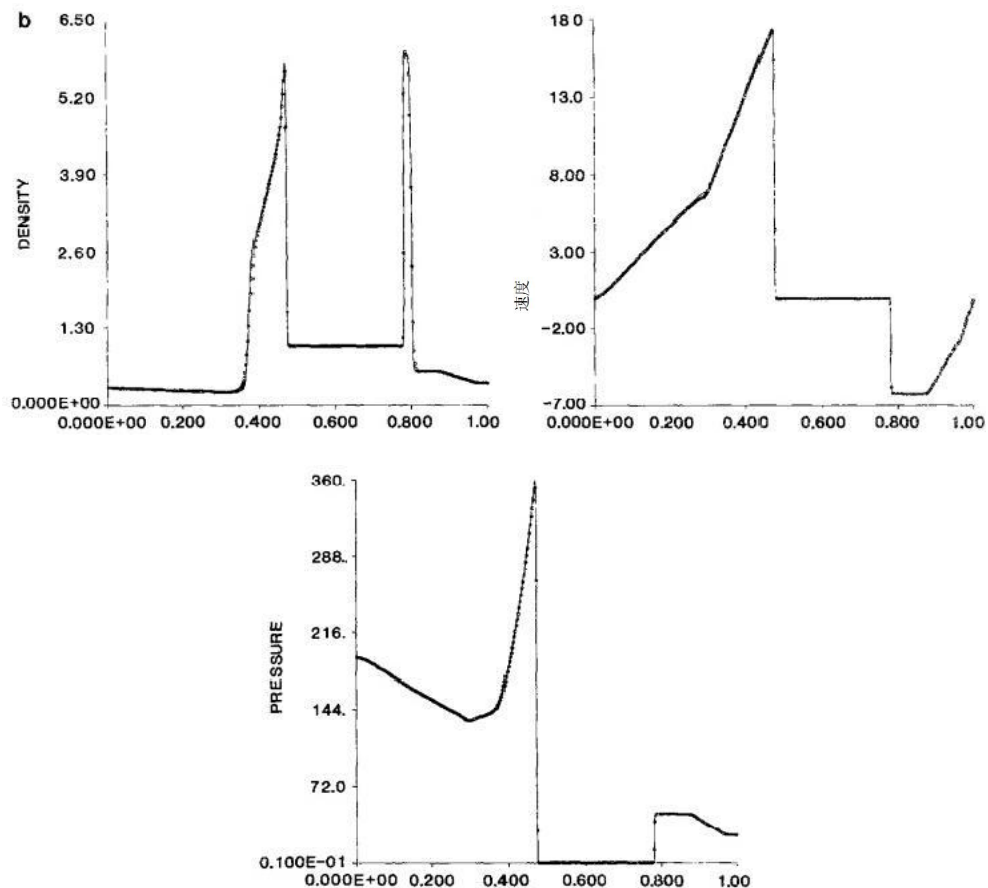


FiG17-继续

所以

$$i(x,t)=R(x_0(x,t);v''), \quad (7.15c)$$

where  $x_0(x,t)$  是代数方程 (7.15a) 的求解。让  $i$  表示解为 (7.15a) 形式的  $i=1$  在 (7.14c)；如果  $x$  和  $t$  是这样的  $x_0(x,t)$

$$x_0-12(t)<x\leq x_0+12(t), (7.16a)$$

在哪里

$$x_0+12(t)=x_0+12+t\bar{a}''+12 \quad (7.16b)$$

HARTEN等人

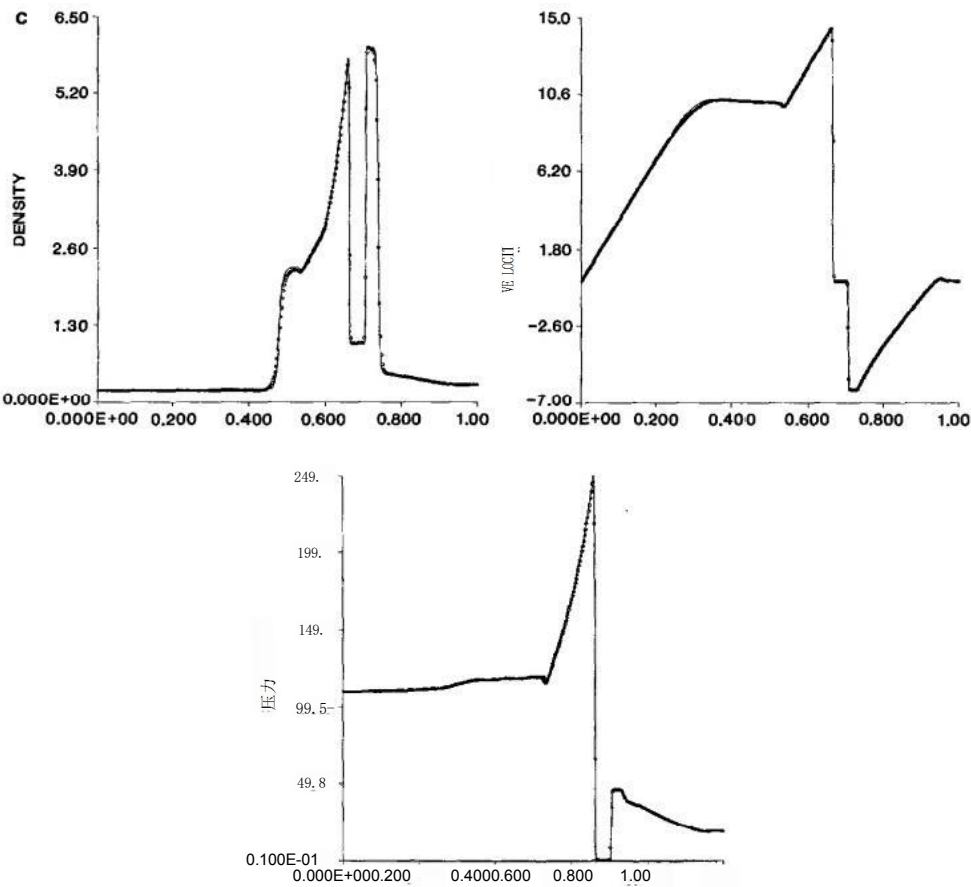


FIG. 17— Continued

那时

$$x_0^1(x, t) = x_{j-1/2} + \frac{x_{j+1/2} - x_{j-1/2}}{\tilde{x}_{j+1/2}(t) - \tilde{x}_{j-1/2}(t)} (x - \tilde{x}_{j-1/2}(t)), \quad (7.16c)$$

形成 $>1$ ，我们通过从初始猜测（7.16c）开始的牛顿-拉夫森迭代求解（7.15a）来得到 $x_0(x, t)$

Using  $x_0(x, t)$ （7.15c）我们定义了以下（4.14）的变体：

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \lambda(\tilde{f}_{j+1/2} - \tilde{f}_{j-1/2}) \quad (7.17a)$$

$$\tilde{f}_{j+1/2} = \sum_{k=0}^k \alpha_k f(\tilde{v}(x_{j+1/2}, \beta_k \tau)). \quad (7.17b)$$

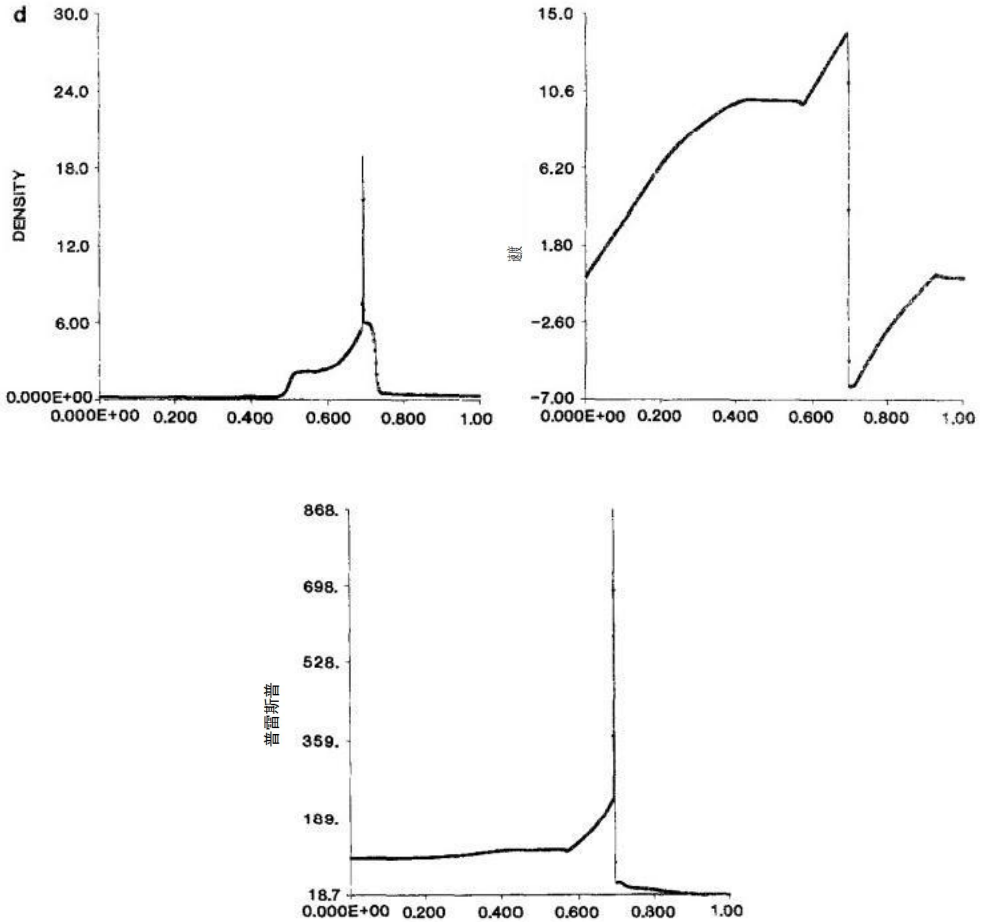


FiG 17—Contmued.

我们已经开始用扩展 (7.17) 开发ENOSc血红蛋白; 后来, 我们用柯西-科瓦莱夫斯基程序取代了特征方法, 该方法提供了一种统一的方法来扩展到包含守恒项和系统的守恒定律。我们的数值实验表明, 这两个版本在计算上是等价的, 尽管使用该细菌方法 (7.17) 的版本似乎比 (4.14) 更准确。

我们注意到, 化学 (7.17) 作为 (4.21a) 中的4.14的方案 (4.14), 也允许  $(uL, ur) = 0$  作为站解的任何不连续性。通过更换 (7.16b) byan适当风扇中的“冲击曲线” $x_1 + 12(t)$ , 可以很容易地纠正。

290 HARTEN等。

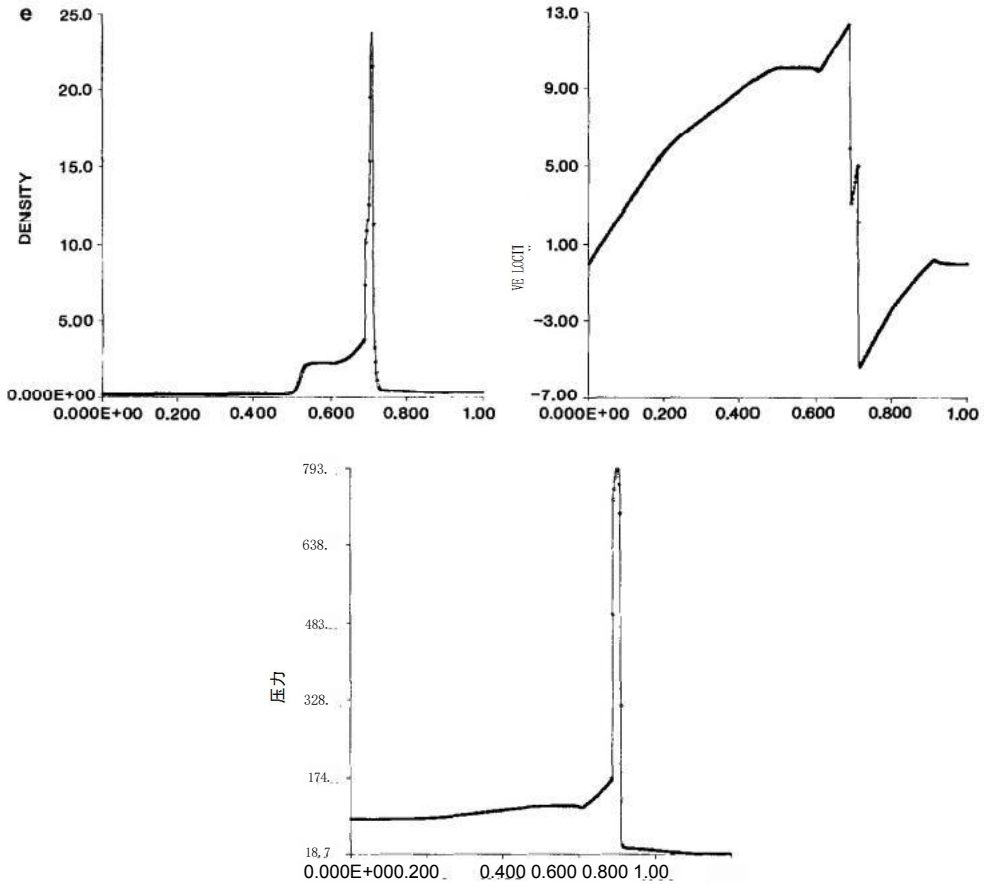


图17-继续

## C2. 半离散公式和龙格-库塔方法

这个ENO方案的离散版本可以直接从(1.4)中导出，也可以通过让 $t \rightarrow 0$ 进入(4.14)，(5.9)。它采取了形式

$$\frac{d}{dt} v_j(t) = -\frac{1}{h} [\bar{f}_{j+1/2}(t) - \bar{f}_{j-1/2}(t)] \equiv Q \cdot v_j(t), (7.18a)$$

在哪里

$$f_{j+1/2}(t) = fR(R(x_{j+1/2-0}; D(t)), R(x_{j+1/2+0}; v(t))); (7.18b)$$

此处， $(t)$ 近似于 $u(x, t)$ ； $v(t) = \{v_j(t)\}$ ； $fR(u_1, u_2)$ 是精确通量(4.5)或 $f_{ROE}$ (4.21)，(5.11)。

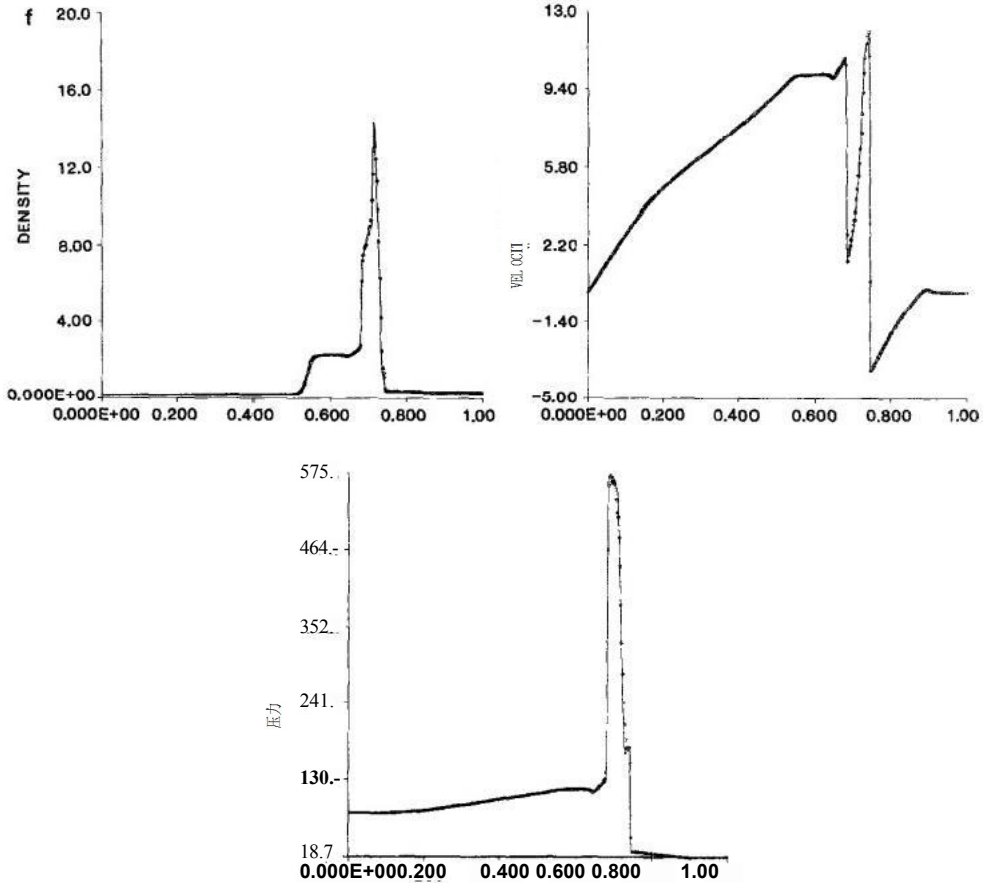


图17-Continued。

考虑到 (7.18) 是  $t$  中关于  $\alpha(t) = \{0, 1\}$  的一个常微分方程系统，我们可以用一个数值ODE求解器来求解这个问题。在[2]中，我们提出了两组数值实验，其中我们使用龙格-库塔方法来近似溶解  $\text{nof}$  (7.18)。在第一个实验中，我们将该方案应用于  $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  的黎曼问题 (7.10a)。在第二组实验中，我们将  $\alpha = 2, 4$  的方案应用于一个有效的喷嘴问题，该问题涉及到欧拉方程 (6.1) 的一个强迫项。在这些计算中，我们使用了RP、fROE和  $\text{CFL} = 0.5$ 。将黎曼问题的结果与本文的结果进行比较，发现它们具有相似的质量。[2]的数值实验表明，具有朗格-库塔时间离散化的半离散公式 (7.18) 不会对  $\text{CFL} \leq 0.5$  产生伪振荡；然而，当我们增加

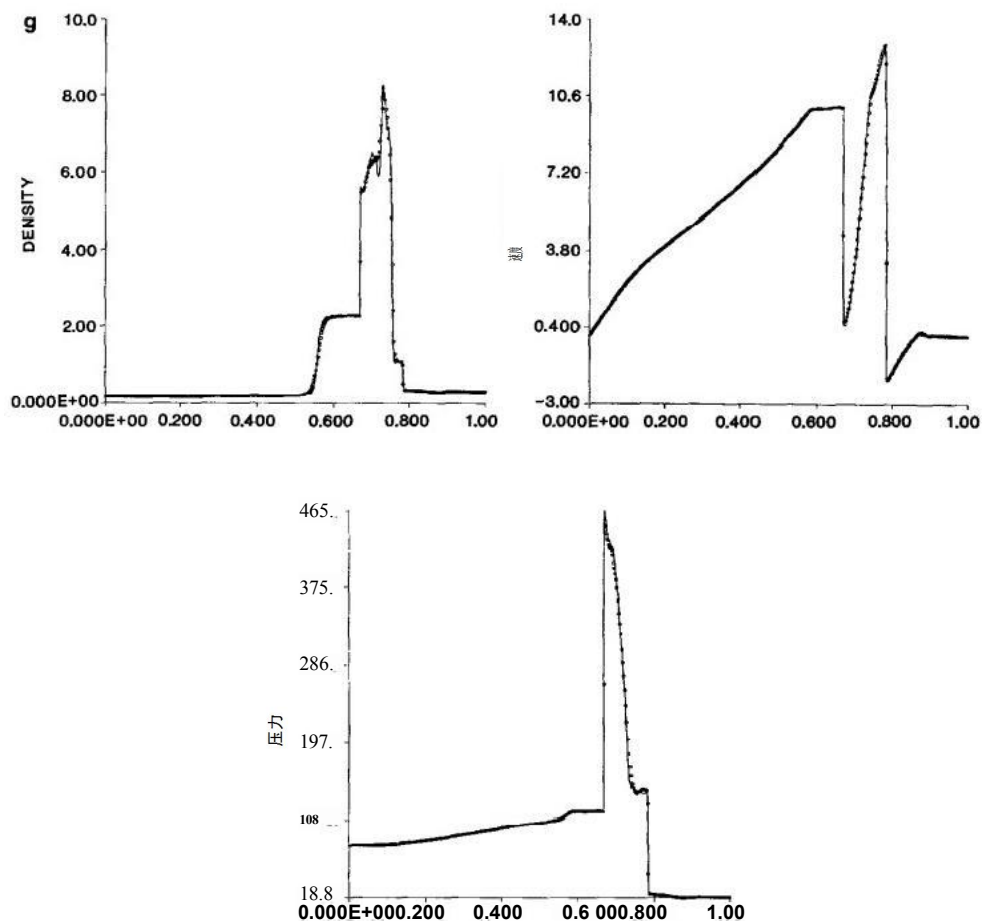


FIG.17——继续。

CFL数超过0.5，我们开始得到一些振荡，最终化学变得不稳定。

使用龙格-库塔时间离散化的主要优点是它易于编程；然而，它似乎比完全离散的混合方法效率低，而且还需要更多的存储空间。

### C3. 可变网格和前端跟踪

在第3节中，我们指出了非振荡的输入Hm (3.1) - (3.5) 和通过原始函数 (RP) (3.6) - (3.10) 重建的非均匀网格有很好的定义，见附录。因为小步骤

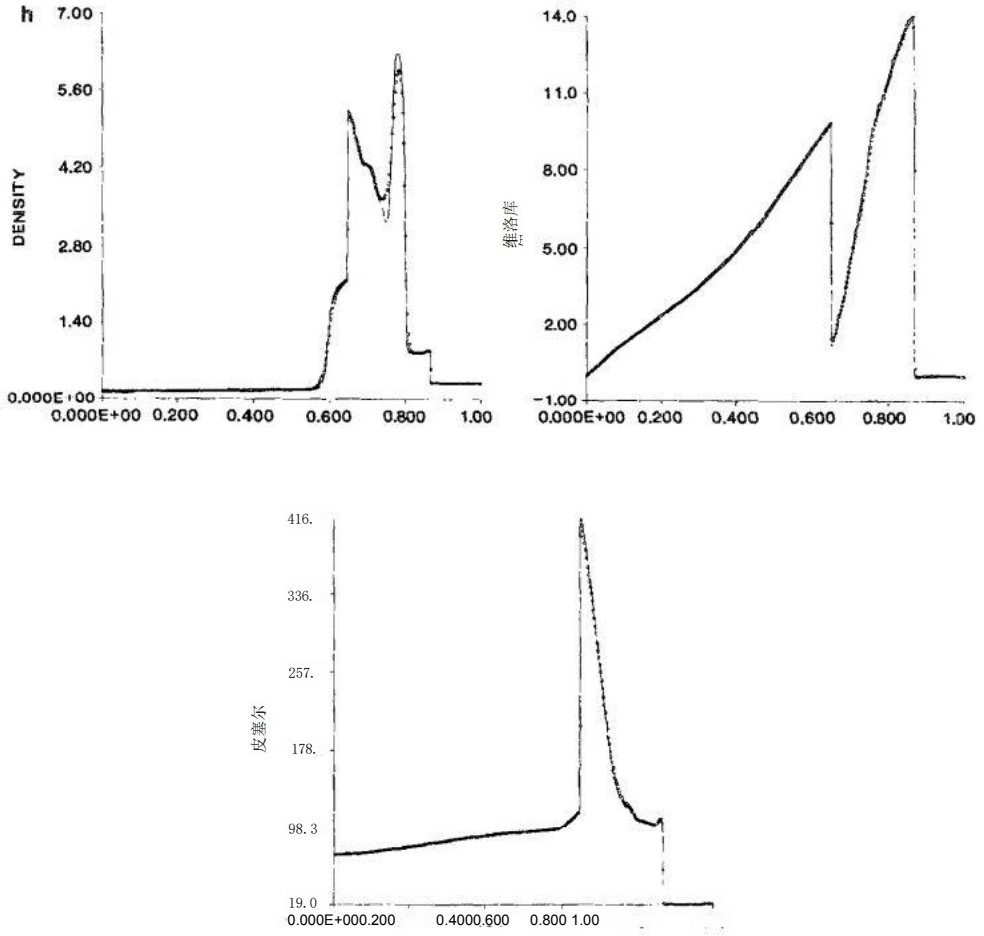


FiG17--Contmued

也不需要网格的均匀性, 我们可以计算出新的细胞平均值  $v_j^{n+1}$  在 (1.14c) 在任何选择的间隔上  $\{I_j^{n+1}\}$

$$v_j^{n+1} = \frac{1}{|I_j^{n+1}|} \int_{I_j^{n+1}} v_h(x, t_{n+1} - 0) dx; (7.19)$$

hereand .使用与之前相同的基本原理, 我们对 (7.19) 的近似值变成了  $I_k^l = (\xi_{k-1/2}^l, \xi_{k+1/2}^l) |I_k^l| = \xi_{k+1/2}^l - \xi_{k-1/2}^l$

$$|I_j^{n+1}| v_j^{n+1} = |I_j^n| v_j^n - \tau(f_{j+1/2}^\sigma - \bar{f}_{j-1/2}^\sigma); (7.20a)$$



harten等人。

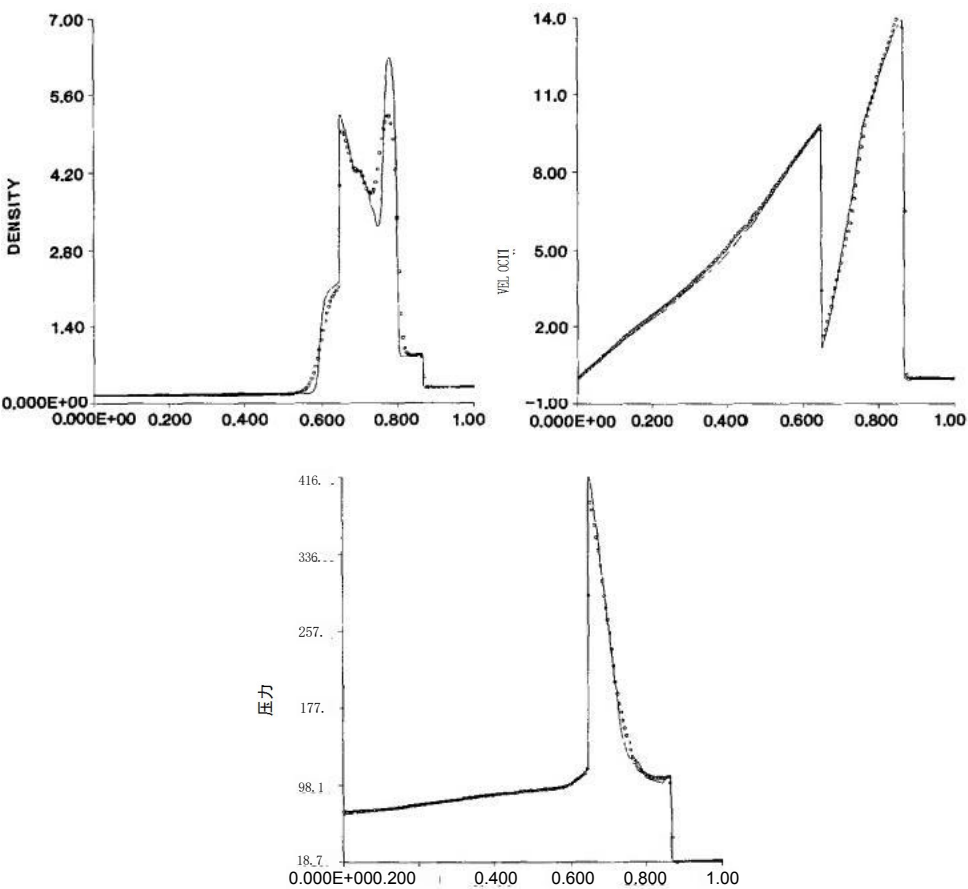


图18

数值通量 $f_{j+1/2}$ 与 $f(u)-\sigma_{j+1/2}u$ 一致

$$\sigma_{j+1/2} = (\xi_{j+1/2}^{n+1} - \xi_{j+1/2}^n)/\tau, \tag{7.20b}$$

，并且可以表示为

$$\bar{f}_{j+1/2}^\sigma = \sum_{k=0}^K \alpha_k \bar{f}^R(\tilde{v}_j(x_{j+1/2} + \beta_k \tau \sigma_{j+1/2}, \beta_k \tau), \tilde{v}_{j+1}(x_{j+1/2} + \beta_k \tau \sigma_{j+1/2}, \beta_k \tau); \sigma_{j+1/2}) \tag{7.20c}$$

在哪里

$$fR(u_1,u_2;\sigma)=f(V(o;u_1,u_2))-oV(o;u_1,u_2); \tag{7.20d}$$

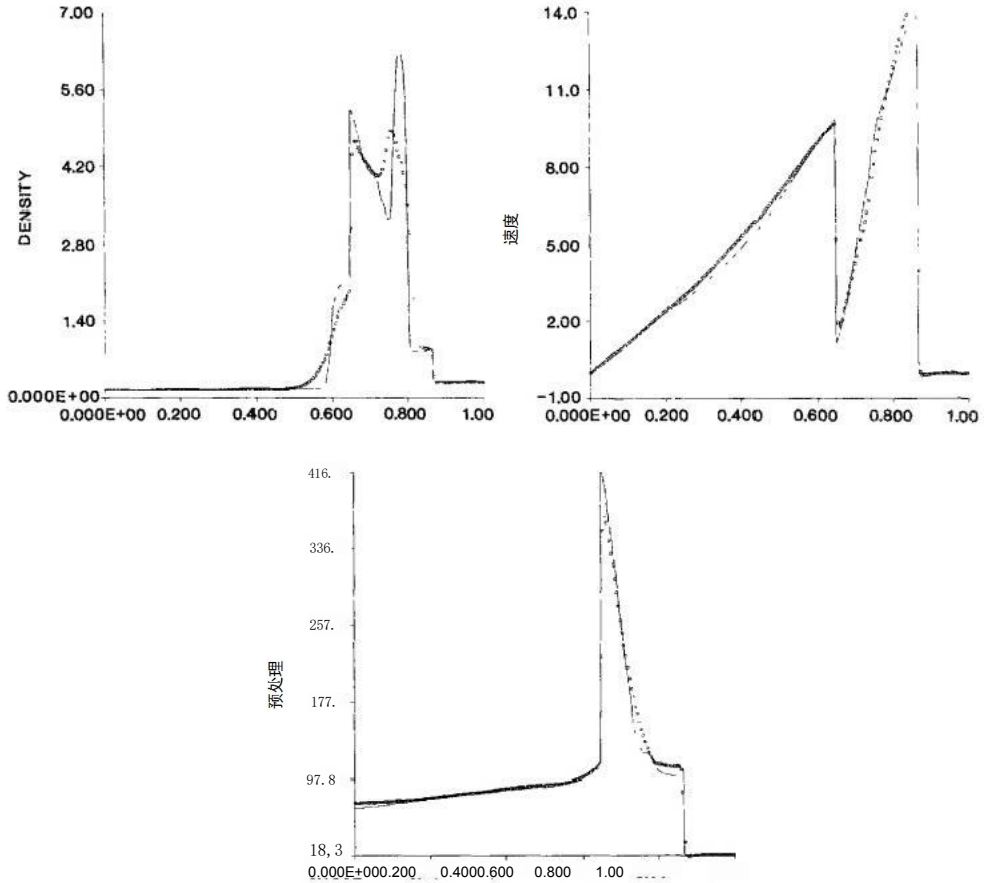


图19

我们记得 $V(o; u_L, u_R)$ 表示黎曼解的值

在 $x/t$ 处出现的问题 (4.3) :  $=\sigma$ . Roe的线性化 (5.11) 得出以下结果近似

$$\begin{aligned} \bar{f}^{\text{ROE}}(u_1, u_2; \sigma) = & \frac{1}{2} \left[ f(u_1) + f(u_2) - \sigma(u_1 + u_2) \right. \\ & \left. - \sum_{k=1}^m \delta_k(u_1, u_2) [a_k(\hat{u}) - \sigma] r_k(\hat{u}) \right]. \end{aligned} \quad (7.21)$$

在图20中, 我们展示了黎曼问题 (7.10b) 的 $\bar{f}_R$ 近似于 $\bar{f}^{\text{ROE}}$  (7.21) 的方案 (7.20); 的值 $\{\xi_j^{n+1}\}$

harten等人。

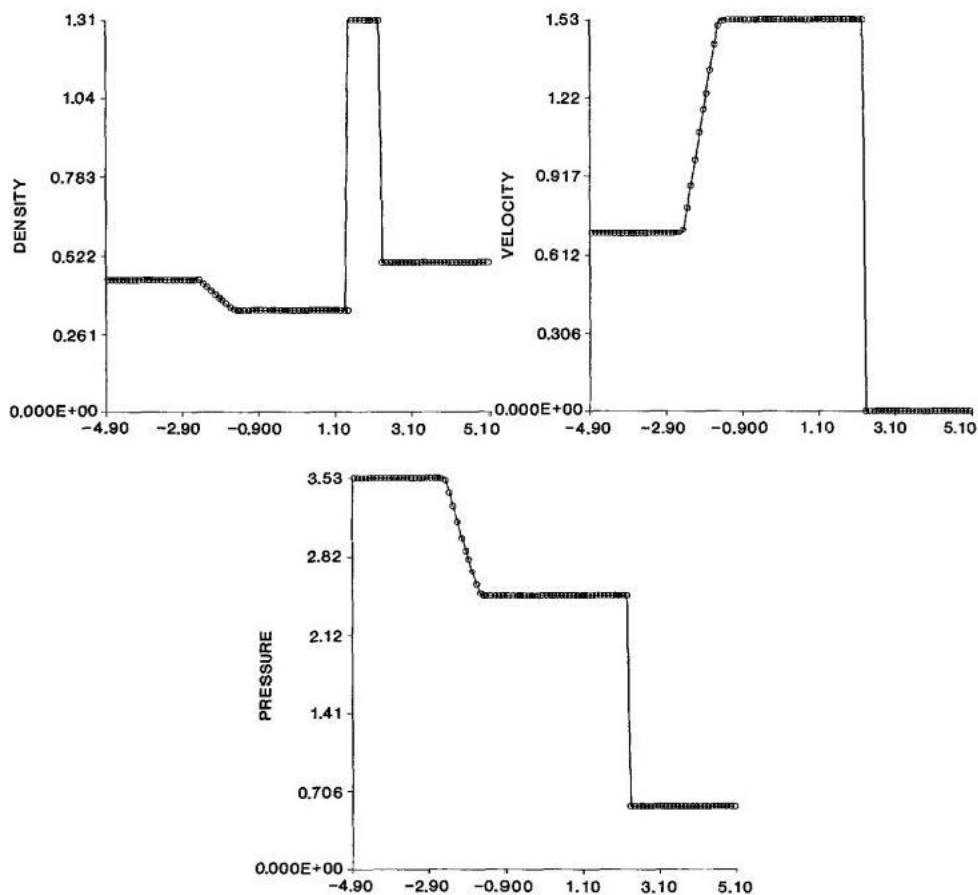


图20

计算方法采用[13]的自调整网格算法。该算法提供了一种自动的方法来放置显著不连续的位置，从而通过薄膜平均步骤（7.19）避免它们的涂抹。计算图20通过取黎曼问题的精确解 $=0.5$ （此时在连接不连续和激波之间有4个网格点）初始化。结果如图所示。20显示了 $CFL=0.5$ 经过100个时间步长方案的数值解。这些结果清楚地证明了ENO方案对前置跟踪技术的适应性。

我们不知道前角网格不允许得到（1.18） $f$ 或均匀网格。非规则网格的数值实验（ $+$ is在指定的区间内随机选择的）表明

方案 (7.20) 求解标量光滑问题 (7.1) 的误差是  $L_1$ ,  $L_2$  和  $L^\infty$  中的  $L$  范数。然而, 比较图20和图15, 我们观察到尽管精度的正式顺序降低了, 但分辨率仍有相当大的提高。

#### C4. 扩展到二维

在本小节中, 我们没有将ENO方案扩展到二维IVP的解

$$u_t + f(u) + g(u) = 0, \quad u(x, y, 0) = u_0(x, y). \quad (7.22)$$

我们注意到类型维分裂[29]在时间上只是二阶accu速率, 因此不适合将ENO方案的高阶精度扩展到二维。

设  $w$  表示  $w$  的二维“滑动平均值”

$$\bar{w}(x, y) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} w(x + \xi, y + \eta) d\eta d\xi. \quad (7.23)$$

对计算得到的cell  $I, x(t_n, t_{n+1})$  进行积分 (7.22)。  $I, = [x_1 - 12, x_1 + 12] \times [y_1 - 12, y_1 + 12]$ , 我们发现) 满足  $\bar{u}_t^n = \bar{u}(x_i, y_j, t_n)$

$$u_{n+1} = u - \lambda_x (f_{i+1/2} - f_{i-1/2}) - \lambda_y (g_{j+1/2} - g_{j-1/2}) \quad (7.24a)$$

其中,  $\lambda_x = \Delta x \Delta t$ ,  $\lambda_y = \Delta y \Delta t$  和

$$\hat{f}_{i+1/2} = \frac{1}{\tau \Delta y} \int_0^\tau \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} f(u(x_{i+1/2}, y_i + \eta, t_n + t)) d\eta dt, \quad (7.24b)$$

$$\hat{g}_{i,j+1/2} = \frac{1}{\tau \Delta x} \int_0^\tau \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} g(u(x_i + \xi, y_{j+1/2}, t_n + t)) d\xi dt. \quad (7.24c)$$

(7.22) 的解决方案的ENO方案的抽象形式仍然保留 (1.10), 即,

$$v_{n+1} = A_n \cdot E(t) \cdot R(\cdot, v^n), \quad v^0 = u_0. \quad (7.25)$$

同样,  $E(t)$  是 (7.22) 的精确演化算子; 然而,  $A$  现在是二维单元平均 (7.23),  $R(x, y; \Delta x, \Delta y)$  是  $w(x, y)$  的一个合适的二维重构。在标量常系数的情况下

$$u_t + a u_x + b u_y = 0, \quad u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (7.26a)$$

ENO方案 (7.25) 成为

$$v^{7+1} = R(x, -at, y, -bt; v^0), \quad (7.26b)$$

$$v_y^0 = \bar{u}_0(x_i, y_j).$$

在[12]中, 我们用标量常系数的格式 (7.26) 进行了数值实验, 其中重构  $R(x, y; \cdot)$  是通过二维反褶积得到的。在 (7.23) around  $\xi = \eta = 0$  中扩展  $w(x + \xi, y + \eta)$ , 我们在 (3.12) 中得到

$$(x, y) = w(x, y) + a_2 [(4x)^2 w_{xx} + (4y)^2 w_{yy}] + a_4 [(4x)^4 w_{xxxx} + 2(Ax)^2 (4y)^2 w_{xxyy} + (4y)^4 w_{yyyy}] + O(4^6). \quad (7.27)$$

将 (7.27) 两边乘以  $(4x)^k (4y)^{l-k}$ , 并截断 RHS 在  $O(4^r)$  处的展开, 我们得到 (3.13) 中一个可逆的线性方程组, 它表示  $w$  及其对  $w$  及其导数的偏差。我们设置

$$(D_0)_{ij} = \text{词}(x_i, y_j) \quad (7.28a)$$

并得到近似值

$$(\bar{D}^{k,l})_y = (Ax)^k (Ay)^l \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} \bar{w}(x_i, y_j) + O(4^r), \quad 1 \leq k+l \leq r-1; \quad (7.28b)$$

然后, 如 (3.17) 中所述, 我们对线性分布系统进行反转, 得到  $w$  及其导数的以下近似

$$(D^{k,l})_y = (Ax)^k (Ay)^l \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} w(x_i, y_j) + O(4^r), \quad 0 \leq k+l \leq r-1. \quad (7.29a)$$

使用 (7.29a), 我们定义了单元格  $I$  中的  $R$ , 通过

$$R(x, y; \bar{w}) = \sum_{l=0}^{r-1} \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^l (D^{k,l-k})_y \binom{l}{k} \left( \frac{x - x_i}{Ax} \right)^k \left( \frac{y - y_j}{Ay} \right)^{l-k}, \quad (x, y) \in I_y. \quad (7.29b)$$

近似值  $D_{kin}$  (7.28b) 是由一系列一维操作 (3.15b) 的应用所得到的, 我们现在重写成以下操作符形式:

$$(G_m^l \cdot u)_j = M \left( \frac{d^l}{dz^l} H_m(z_j - 0; u), \frac{d^l}{dz^l} H_m(z_j + 0; u) \right); \quad (7.30)$$

这里 $u$ 表示一维向量使用 (7.30) 和概念约定。 ,  $=\{\text{词}(x, , y)\} \neq 1$  , 我们定义

$$(\bar{\bar{D}}^{k,0})_y = (\Delta x)^k (G_m^k \bullet \bar{\bar{w}}_{..,j})_i, \quad 1 \leq k \leq r-1 \quad (7.31a)$$

$$(\bar{\bar{D}}^{0,l})_y = (\Delta y)^l (G_m^l \bullet \bar{\bar{w}}_{..,j})_i, \quad 1, 1 \leq l \leq r-1. \quad (7.31b)$$

为了得到我们首先计算的混合导子的近似值

$$\begin{aligned} (\tilde{D}_1^{k,l})_y &= (\Delta y)^l [G_{m-k}^l \bullet (\bar{\bar{D}}^{k,0})_{i..,j}]_i, \quad 1 \leq l \leq r-1-k, \\ (\tilde{D}_2^{k,l})_y &= (\Delta x)^k [G_{m-l}^k \bullet (\bar{\bar{D}}^{0,l})_{..,j}]_i, \quad 1 \leq k \leq r-1-l, \end{aligned}$$

然后定义

$$(\bar{\bar{D}}^{k,l})_y = M((\tilde{D}_1^{k,l})_y, (\tilde{D}_2^{k,l})_y), \quad (7.31c)$$

其中,  $M$ 为最小mod函数 (3.16)。

我们观察到, 二维重建的限制 (7.29) 对

$y=y$ , i.e.,  $R(x, y, ; u)$  与单向重建 (3.18) 相同  
适用于 $w$ 对 $y=y$ , i.e.,  $R(x, (y, ))$ 的限制: 相同的观察  
适用于限制 $=x$ 的限制。

我们记得, 只有当不连续被至少 $r+1$ 的光滑点分开时, 一维重建本质上是同步振荡器。在一维系统的情况下, 我们必须克服不连续的碰撞 (非时间) 问题; 在双介质的情况下, 我们还必须担心不连续曲线的节间截面 (在空间中)。在对问题严重性的研究中, 我们对初始数据的常系数问题 (7.26a) 进行了实验

(7, 32)

这里 $U=[-1,1] \times [-1,1]$ 和年代是一个旋转广场包含在美国[12]我们提出数值结果是通过应用方案 (7.26)  $=1,2,3,4$ 初始数据 (7.32) 周期边界条件的结果表明, 指数小伪振荡离子弧 $r \geq 2$ ; 然而, 在我们看来, 它们足够小, 可以接受

附件: 一种重建算法

在这个附录中, 我们描述了我们计算系数 $b$ ,  $k$ 在(A.1

$$R(x, \bar{w}) = \sum_{k=0}^{r-1} b_{j,k} (x - x_j)^k,$$

其中,  $x$  是第  $j$  个单元格的中心。为了得到这些系数, 我们从牛顿的插值形式开始

$$H_r(x; u) = \sum_{k=0}^r u[y_i, \dots, y_{i+k}] \prod_{l=0}^{k-1} (x - y_{i+l}). \quad (\text{A.2})$$

Here  $i=j$  由算法 (3.4) 根据除法的 differences  $dk = u[J, \dots, J_1 + k]$  选择。 (A.3)

在下面, 我们描述了一个算法, 将 RHS of (a.2) 上的多项式重写为一个有限的泰勒级数圆环  $=x$ :

$$q(x) = \sum_{k=0}^r d_{i,k} P_{i,k}(x) = \sum_{k=0}^r q^{(k)}(x_c) (x - x_c)^k / k!, \quad (\text{A.4})$$

在哪里

$$P_{i,k}(x) = \prod_{l=0}^{k-1} (x - y_{i+l}) \equiv \sum_{l=0}^k \mathcal{S}_{l,k} (x - x_c)^{k-l}. \quad (\text{A.5})$$

利用系数  $\{9, k\}$  满足一个递归关系的事实, 我们计算它们如下: 我们设置

$$\begin{aligned} Z_l &= x e - y_l + l, & 0 \leq l \leq r- \\ S_{0,k} &= 1, & 1; 0 \leq k \leq r; \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

然后我们评估

$$\begin{aligned} d_{0,1} &= 1, r \\ 9 &= S_l - l, -l Z_l - l \\ d_{0,k} &= 1 + 1, r \\ S_{,k} &= 9k - l + S_l - l, k - l Z_k - l. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

这一点很容易看出

$$q^{(k)}(x_c) = k! \sum_{l=k}^r \mathcal{S}_{l-k,l} d_{i,l}. \quad (\text{A.8})$$

我们注意到这个算法 (A.6) - (A.8) 被定义为一个非均匀的网格。当网格是均匀的时, 我们就可以得到 (=8) 分两步: 首先我们进行实验, 并观察 that  $Z_1 = -l$  in (A.6); 因此, 它是独立于  $i$  的。引文

$$dk = h * d, k, Ck = h^{\wedge} q(k(y),) \quad (\text{A.9})$$

使用常规的=0叉, 我们得到 $1 \leq l \leq 6$   $C_0 = u(y, )$

$$\begin{aligned} C_1 &= d_1 - d_2 / 2 + d_3 / 3 - d_4 / 4 + d_5 / 5 - d_6 / 6 \\ C_2 &= d_2 - d_3 + 11d_4 / 12 - 5d_5 / 6 + 137d_6 / 180 \\ C_3 &= d_3 - 1.5d_4 + 1.75d_5 - \\ &\quad 1.875d_6 \quad C_4 = d_4 - \\ &\quad 2d_5 + 17d_6 / 6 \\ C_5 &= d_5 - \\ &\quad 2.5d_6 \quad C_6 \\ &= d_6 \end{aligned} \quad (A.10)$$

$$q(x) = \sum_{k=0}^r \frac{c_k}{k!} \left( \frac{x - y_l}{h} \right)^k.$$

因此

$$h^k q^{(k)}(x_c) = \sum_{l=k}^r \frac{c_l}{(l-k)!} \left( \frac{x_c - y_l}{h} \right)^{l-k}. \quad (A.11)$$

通过原始函数 (RP) 进行重建

在这种情况下,  $I = (Jy, y, +1)$  是第  $j$  个单元格, 而  $x_2 = x, = (J, +y_1, +1)$  是它的中心。  
提供的数据是

$$\bar{w}_l = \frac{1}{y_{l+1} - y_l} \int_{y_l}^{y_{l+1}} w(y) dy, \quad (A.12)$$

由此我们计算了原语函数的点值

$$W(y_k) = \sum_{l=0}^{k-1} (y_{l+1} - y_l) \bar{w}_l. \quad (A.13)$$

应用该算法(A.6)-(A.8)至

$$d, k = W[y, \dots, y_1 + k] \quad (A.14)$$

通过 (3.4) 选择的  $i = i(j)$ , 我们得到  $q(x, )$  的值。使用中的定义 (3.8) (A.4) 我们得到了在中的泰勒展开式的系数(A.1)by

$$b, k = q|k+1(x,)/k!. \quad (A.15)$$



我们注意到，当网格是均匀的 $y_k = x_{k-1/2}$ 时，我们也可以使用该算法(A.9)-(A.11).

### 通过反褶积进行重建 (RD)

我们还记得，RD是与一个统一的网格一起使用的，因此给定的数据w可以看作是滑动平均函数(1.3)的点值w(x)。应用该算法(A.9)-(A.11)至

$$d_k = W[x_i, x_{i+k}] \quad (\text{A.16})$$

使用 $x_c = x$ ，我们得到(A.11)对于 $i = i(j-1)$ 的值

$$h^k \frac{d^k}{dx^k} H_r(x_j - 0; \bar{w}); \quad (\text{A.17a})$$

当我们用 $i = i(j)$ 和 $x = x$ 应用这个算法时，我们开始计算(A.11)的值

$$h^k \frac{d^k}{dx^k} H_r(x_j + 0; \bar{w}). \quad (\text{A.17b})$$

Nextwe在(3.15)中通过取适当值的值来计算 $D_k$ 在(A.17a)and(A.17b)。最后，我们使用反代数(3.19)来获得Taylor展开的系数(A.1)

$$b_{j,k} = \frac{1}{k!} D_{k,i} / h^k. \quad (\text{A.18})$$

我们注意到，这些算法的使用(A.9)-(A.11)是比中的更好的(A.6)-(A.8)因为它使我们能够通过重新排列来节省计算时间

操作(A.16)-(A.17)如下：首先，我们将 $i = i(j)$ 设置为(A.16)和评估(A.9)-(A.10)。使用相同的系数 $c_k$ 在(A.10)我们现在开始申请了(A.11) to  $x_{i-} = x$ 和 $x_{i+} = x$ 、+1分别获得 $(d^{**}) H$ 、 $(x_{i-} + 0; w)$ 和 $(d^{***}) H(x_{i+} - 0; w)$ ；然后在后续扫描中执行最小mod操作(3.15)。

确认

作者要感谢P.L.Roe对论文初稿的建设性批评

### 参考文献

- 1.M.BEN-ARTZI和J.法尔沃维茨，爵士J.Sct.压缩，在压缩中。
- 2.S.R.CHAKRAVARTHY.A.哈顿，安地。OSHER，“本质上是任意高精度的非振荡冲击捕获方案”，AAA86-0339，里诺，NA。1986。
- 3.A.J.CHORIN,J.Comput.物理学。22,517(1976)。
- 4.P.科莱拉和P.R.伍德沃德，J.Comput.物理学家。54,174 (1984)。
- 5.S.K.GoDUNOV，垫子。Sb.47,271(1959)。

6.E.本论文,“双曲守恒定律系统的收敛序列扩展”,NASA承包商报告172557, ICASE报告 No.85-13,1985 (未发表)。

7. A. HARTEN, 数学. 补偿. 32,363(1978).
8. HARTFN, J. Comput.物理学. 49, 151(1983)
9. AHARTEN, J. Comput.物理学家. 49, 357(1983)
10. A. 哈顿, 中国21.1 (1984)。
11. A. HARTEN, “关于非振荡冲击捕获方案的高阶精度插值。”  
MRC技术总结报告第2829号, 威斯康星大学, 1985年 (未发表)。
12. A. HARTEN, “关于将ENO方案扩展到二维问题的初步结果”, 双曲问题国际会议论文集, 圣艾蒂安, 1986年1月 (n准备工作)。
13. A. 哈顿和海曼, j. Comput.物理学. 50235(1983).
14. A. 哈顿, 洛杉矶国际机场博士, 和 B. 范·莱尔, SIAM Rer.25.35 (1983)
15. A. HARTEN和S. OSHER, MRC技术摘要ReportNo.2823.May 1985, SINUM, 出版
16. A.《哈尔顿》, 英基西, S.OSHER, 和S.R.CHAKRAVARTHY, 非正式的高阶精度  
非振荡方案。二、准备工作。
17. A HARTEN.S.OSHER, 和j. Appl Nua mMath.2,347(1986).
18. P.洛杉矶, 纯4页, 7.159 (1954)。
19. PD.“守恒定律的双曲系统和激波的数学理论,  
在区域会议。请参加应用数学讲座。11日(暹罗人。费城1972).
20. P.D. 洛杉矶国际机场和 B. 我, 通信. 普雷阿普尔. 数学13217 (1960)。
21. P.D. LAXAND B.我, 通信. 纯应用程序. 数学17381(1964).
22. B. 范, j. Comput.物理学. 32101(1979).
23. 美国, 第21217 (1984)。
24. S.OSHER和E. TADMOR, 数学专业. 压缩机中的压缩机
25. L.RoE, J.Comput.物理学. 43,357(1981).
26. 李, 对不连续流建模的一些贡献, 在讲座m应用  
数学数学, 第22卷. Soc ..普罗维登斯, RI .1985)。
27. M.服务器 (MoCk)。耗散近疏中心的顺序, 正在进行和超计算  
Computatronal Flud Dynamucs .美以研讨会的进展。1984年(波士顿,  
1985),p.395.
28. G.A. SoD, J Comput .物理学. 27,1(1978).
29. gstrang, sinum5506 (1968)
30. P.K SWEBY, SINUM 21,995(1984).
- 伍德沃德和科莱拉, J. Comput.Phy s.54 115(1984).
32. 吴下厚和友厚兰, “该凸问题的位点分离方法方案”, 中央研究院计算机中心。1984年 (未发表)