Лабораторная работа № 3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕХОДА ОТ УСТОЙЧИВОГО РЕЖИМА К ХАОТИЧЕСКОМУ В ГЕНЕРАТОРАХ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ И ДЮФФИНГА

Цель работы

Ознакомиться с методами исследования нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Познакомиться с особенностями реализации численных методов решения нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. С помощью компьютерного моделирования пронаблюдать переход от устойчивого режима системы к хаотическому.

Порядок выполнения работы

I.

Проинтегрировать приведенные ниже уравнения с помощью указанных в варианте численных схем, построить графики а) зависимости решения от времени (для всех числ. схем на одном рисунке), б) фазовые траектории (для всех числ. схем на одном рисунке), в) полной энергии от времени (для всех числ. схем на одном рисунке), г) невязки с аналитическим решением заданного уравнения (для всех числ. схем на одном рисунке).

1.

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = 0, \qquad (*1)$$

$$\ddot{x} - \omega_1^2 x = 0, \qquad (*2)$$

при следующих начальных условиях

$$x(0) = \alpha_1, \quad \dot{x}(0) = \beta_1.$$

2.

$$\ddot{x} + \mu_2 \dot{x} + \omega_2^2 x = 0, \qquad (*3)$$

$$\ddot{x} - \mu_2 \dot{x} + \omega_2^2 x = 0, \qquad (*4)$$

при $x(0) = \alpha_2$, $\dot{x}(0) = \beta_2$ и двух различных условиях: а) $\omega^2 < \mu^2$, б) $\omega^2 \ge \mu^2$.

Значения $\omega_i, \mu_i, \alpha_i, \beta_i$, $i = 1,\ldots,3$ и численные схемы определяются номером варианта.

II.

Свести указанное в варианте задания нелинейное уравнение второго порядка к системе дифференциальных уравнений первого порядка, найти стационарные точки и определить их тип, определить вид устойчивости решения в окрестности каждой из точек. Проинтегрировать систему в окрестности стационарных точек методом Рунге-Кутта-4, построить фазовый портрет.

Создать программное приложение в Microsoft Visual C++ v.8, содержащее 2 формы. Первая форма содержит **группу радиокнопок**, каждая из которых отражает выбор решаемой задачи Коши и **кнопку перехода** на следующую форму. Вторая форма содержит **графики**, которые согласно заданию необходимо построить для выбранного уравнения, **текстовое поле**, в котором приведены значения всех стационарных точек, их тип и вид устойчивости решения в окрестности каждой точки, а также **кнопки возврата** на предыдущую форму **и выхода.**

III.

Построив численное решение нелинейной системы в пункте II, ответить на следующие вопросы:

1. Проверить выполнение условия теоремы Пуанкаре для рассматриваемой системы, какую информацию о предельном цикле можно извлечь?
2. Рассчитать показатели Ляпунова (если это возможно сделать аналитически), определить тип аттрактора.
3. Определить знак энтропии Колмогорова-Синая, какой вид динамики соответствует решению?
4. Если показатели Ляпунова рассчитаны, то рассчитать фрактальную размерность предельного множества по формуле Каплана-Йорка:

$$D = j + \frac{\sum_{i=1}^{j} \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|},$$

где j – наибольшее целое число, для которого последовательность показателей Ляпунова $\lambda_1 + \ldots + \lambda_j \geq 0$.

IV.

По итогам выполненной работы оформить отчет, содержащий:

- цель работы,

- постановку задачи,
- численные методы решения системы ОДУ, используемые при решении задачи,
- основные результаты и выводы по I части работы (оценка точности, полученного различными методами численного решения)
- основные результаты и выводы по II и III части работы.

Контрольные вопросы

1. В чем суть первого метод Ляпунова?
2. Приведите классификацию типов неподвижных точек для системы двух дифференциальных уравнений.
3. Как проводится линеаризация нелинейных систем?
4. Что называют предельным циклом? Какие виды устойчивости предельных циклов вы знаете?
5. Сформулируйте теорему Пуанкаре о существовании предельного цикла. Приведите пример применения теоремы Пуанкаре.
6. Что называют показателями Ляпунова? Какие существуют методы их определения? Что называют энтропией Колмогорова-Синая?
7. Укажите связь показателей Ляпунова со свойствами и типами аттракторов.
8. Какие численные методы решения систем дифференциальных уравнений вы знаете? В чем различие между методами высокого и низкого порядка дискретизации производной?

Задания к лабораторной работе №3

Вариант 1

I.

1. Решить уравнения (*1), (*2) методами Эйлера, Верле и Рунге-Кутта при $\omega_1 = 2, \alpha_1 = 0, \beta_1 = 1$. Сравнить результаты расчетов решения уравнения (*2), полученных для типов *float* и *double* для метода Эйлера при $\Delta t = 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-8}$.

2. Решить уравнения (*3), (*4) методами «предиктор-корректор» и Рунге-Кутта при $\alpha_2 = 0, \beta_2 = 0.5$, а) $\mu_2 = 0.1, \omega_2 = 0.01$, б) $\mu_2 = 1, \omega_2 = 10$.

II.

Генератор ван дер Поля

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$
$$\omega_0 = 1, \varepsilon = 0.5.$$

Вариант 2

I.

1. Решить уравнения (*1), (*2) методами Эйлера, Верле в скоростной форме и «предиктор-корректор» при $\omega_1 = 4, \alpha_1 = 1, \beta_1 = 0$. Сравнить результаты расчетов решения уравнения (*2), полученных для типов *float* и *double* для метода Эйлера при $\Delta t = 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-8}$.
2. Решить уравнения (*3), (*4) методами Бимана и Рунге-Кутта при $\alpha_2 = 0, \beta_2 = 1$, а) $\mu_2 = 1.5, \omega_2 = 1$, б) $\mu_2 = 0.1, \omega_2 = 2$.

II.

Осциллятор Дюффинга

$$\ddot{x} - k\dot{x} - \alpha x(\beta - x^2) = 0,$$
$$k = 0.1, \alpha = 0.5, \beta = 1.$$

Вариант 3

I.

1. Решить уравнения (*1), (*2) методами средних скоростей, Бимана и «предиктор-корректор» при $\omega_1 = 3, \alpha_1 = 1, \beta_1 = 0$. Сравнить результаты расчетов решения уравнения (*2), полученных для типов *float* и *double* для метода средних скоростей при $\Delta t = 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-8}$.
2. Решить уравнения (*3), (*4) методами Бимана и Рунге-Кутта при $\alpha_2 = 0, \beta_2 = 1$, а) $\mu_2 = 0.1, \omega_2 = 0.05$, б) $\mu_2 = 0.1, \omega_2 = 5$.

II.

Система Фиц Хью-Нагумо

$$\varepsilon\dot{x} = x - \frac{x^3}{3} - y,$$
$$\dot{y} = x + a,$$
$$\varepsilon = 0{,}01, a = 1.2.$$

Вариант 4

I.

1. Решить уравнения (*1), (*2) методами Эйлера-Крамера, Бимана и «предиктор-корректор» при $\omega_1 = 9, \alpha_1 = 0, \beta_1 = 1$. Сравнить результаты расчетов решения уравнения (*2), полученных для типов *float* и *double* для метода Эйлера-Крамера при $\Delta t = 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-8}$.
2. Решить уравнения (*3), (*4) методами Верле и Рунге-Кутта при $\alpha_2 = 0, \beta_2 = 5$, а) $\mu_2 = 0.2, \omega_2 = 0.004$, б) $\mu_2 = 0.1, \omega_2 = 5$.

II.

Модель Лотки-Вольтера (хищник-жертва)

$$\begin{cases} \dot{x} = 0.08x - 0.02xy, \\ \dot{y} = -0.1y + 0.07xy, \\ x > 0,\ y > 0; \end{cases}$$

Вариант 5

I.

1. Решить уравнения (*1), (*2) методами средних скоростей, Верле и «предиктор-корректор» при $\omega_1 = 1, \alpha_1 = 0, \beta_1 = 1$. Сравнить результаты расчетов решения уравнения (*2), полученных для типов *float* и *double* для метода средних скоростей при $\Delta t = 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-8}$.
2. Решить уравнения (*3), (*4) методами Бимана и Рунге-Кутта при $\alpha_2 = 0, \beta_2 = 0.5$, а) $\mu_2 = 0.5, \omega_2 = 0.05$, б) $\mu_2 = 0.1, \omega_2 = 1.5$.

II.

Система Хиндмарш-Розе:

$$\dot{x} = y - \alpha x^3 + bx^2 + I,$$
$$\dot{y} = c - dx^2 - y,$$
$$\alpha = 1, b = 3, I = 2.7, c = 1, d = 5.$$

Вариант 6

I.

1. Решить уравнения (*1), (*2) методами Эйлера, Верле и Рунге-Кутта при $\omega_1 = 4, \alpha_1 = 2, \beta_1 = 0$. Сравнить результаты

расчетов решения уравнения (*2), полученных для типов *float* и *double* для метода Эйлера при $\Delta t = 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-8}$.

2. Решить уравнения (*3), (*4) методами «предиктор-корректор» и Рунге-Кутта при $\alpha_2 = 0.1, \beta_2 = 1.5$, а) $\mu_2 = 0.1, \omega_2 = 0.05$, б) $\mu_2 = 1, \omega_2 = 16$.

II.

Генератор ван дер Поля

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$
$$\omega_0 = 9, \varepsilon = 0.1.$$

Вариант 7

I.

1. Решить уравнения (*1), (*2) методами Эйлера, Верле в скоростной форме и «предиктор-корректор» при $\omega_1 = 16, \alpha_1 = 0, \beta_1 = 4$. Сравнить результаты расчетов решения уравнения (*2), полученных для типов *float* и *double* для метода Эйлера при $\Delta t = 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-8}$.
2. Решить уравнения (*3), (*4) методами Бимана и Рунге-Кутта при $\alpha_2 = 0.5, \beta_2 = 0$, а) $\mu_2 = 2.5, \omega_2 = 0.5$, б) $\mu_2 = 0.5, \omega_2 = 4$.

II.

Осциллятор Дюффинга

$$\ddot{x} - k\dot{x} - \alpha x(\beta - x^2) = 0,$$
$$k = 1, \alpha = 0.1, \beta = 2.$$

Вариант 8

I.

1. Решить уравнения (*1), (*2) методами средних скоростей, Бимана и «предиктор-корректор» при $\omega_1 = 7, \alpha_1 = 0, \beta_1 = 3$. Сравнить результаты расчетов решения уравнения (*2), полученных для типов *float* и *double* для метода средних скоростей при $\Delta t = 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-8}$.
2. Решить уравнения (*3), (*4) методами Бимана и Рунге-Кутта при $\alpha_2 = 3, \beta_2 = 0.5$, а) $\mu_2 = 1, \omega_2 = 0.2$, б) $\mu_2 = 1, \omega_2 = 10$.

II.

Система Фиц Хью-Нагумо

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon\dot{x} = x - \frac{x^3}{3} - y,\\
&\dot{y} = x + a,\\
&\varepsilon = 0.5,\ a = 1.
\end{aligned}
$$

Вариант 9

I.

1. Решить уравнения (*1), (*2) методами Эйлера-Крамера, Бимана и «предиктор-корректор» при $\omega_1 = 25, \alpha_1 = 5, \beta_1 = 0$. Сравнить результаты расчетов решения уравнения (*2), полученных для типов *float* и *double* для метода Эйлера-Крамера при $\Delta t = 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-8}$.
2. Решить уравнения (*3), (*4) методами Верле и Рунге-Кутта при $\alpha_2 = 1, \beta_2 = 0.1$, а) $\mu_2 = 2, \omega_2 = 0.4$, б) $\mu_2 = 1.5, \omega_2 = 6$.

II.

Модель Лотки-Вольтера (хищник-жертва)

$$
\begin{cases}
\dot{x} = 0.1x - 0.04\,xy,\\
\dot{y} = -0.08\,y + 0.06\,xy,\\
x > 0,\ y > 0;
\end{cases}
$$

Вариант 10

I.

1. Решить уравнения (*1), (*2) методами средних скоростей, Верле и «предиктор-корректор» при $\omega_1 = 0.4, \alpha_1 = 1, \beta_1 = 0$. Сравнить результаты расчетов решения уравнения (*2), полученных для типов *float* и *double* для метода средних скоростей при $\Delta t = 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-8}$.
2. Решить уравнения (*3), (*4) методами Бимана и Рунге-Кутта при $\alpha_2 = 0.5, \beta_2 = 0.1$, а) $\mu_2 = 2.5, \omega_2 = 0.5$, б) $\mu_2 = 0.05, \omega_2 = 3$.

II.

Система Хиндмарш-Розе:

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = y - \alpha x^3 + bx^2 + I,\\
&\dot{y} = c - dx^2 - y,\\
&\alpha = 4,\ b = 1,\ I = 3.7,\ c = 1,\ d = 0.5.
\end{aligned}
$$