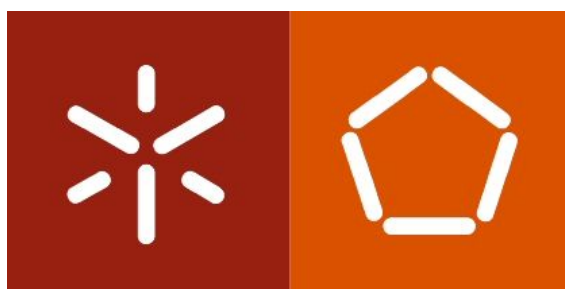


# Modelos Determinísticos de Investigação Operacional

2020/2021

Relatório do Trabalho Prático



13/11/2020

Universidade do Minho - Mestrado Integrado em  
Engenharia Informática

*Grupo:*

Duarte Vilar - *a85517*  
André Nunes - *a85635*  
Martim Almeida - *a89501*  
Gustavo Lourenço - *a89561*  
*Filipe Gajo - a72184*

# Índice

1. Introdução	Pág.3
2. Formulação e desenvolvimento do Modelo	Pág.4
3. Construção do Modelo	Pág.8
4. Modelo Final	Pág.10
5. Ficheiro Input	Pág.11
6. Ficheiro Output	Pág.12
7. Validação do Modelo	Pág.13
8. Cálculo do percurso	Pág.14
9. Dificuldades	Pág.15
10. Conclusão	Pág.16

# Introdução

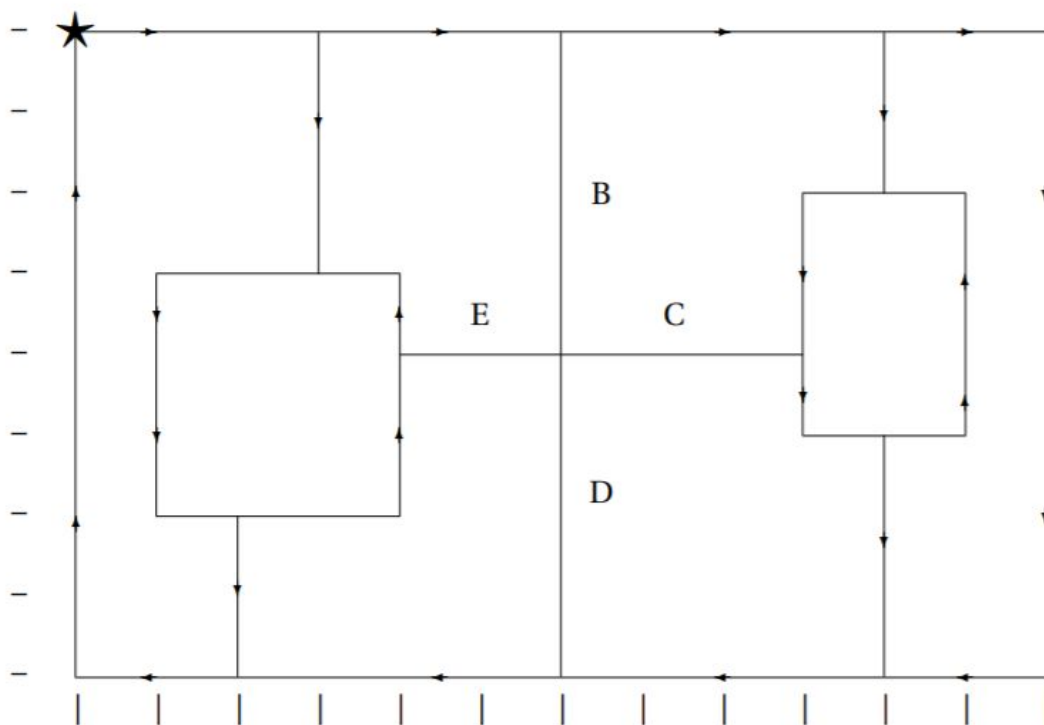
No âmbito da disciplina que visa a elaboração do presente trabalho, foi-nos apresentado um mapa de uma determinada zona com uma estrutura segmentada de uma forma particular, em segmento apresentado.

O desenvolvimento deste documento foi feito com o intuito de primar a objetividade e ir de encontro a cada uma das etapas que constituem o problema que nos foi apresentado. Cada item proposto foi revisto e estudado, de forma a que a interpretação conjunta fosse unânime e o mais próximo possível do que é pretendido a nível avaliativo.

Assim, o trabalho fomentado por este projeto leva a que o grupo o reveja como um elemento preponderante para a consolidação dos ensinamentos lecionados nas aulas teóricas e práticas desta unidade curricular.

Concluímos que este problema deriva do *Problema do Carteiro Chinês*, um problema que consiste em determinar o percurso de comprimento mínimo que atravessa todas as arestas de um grafo, pelo menos uma vez, com o objetivo de percorrer a menor distância possível.

Assim, o objetivo do nosso grupo é resolver este problema com o auxílio das funcionalidades da programação linear.



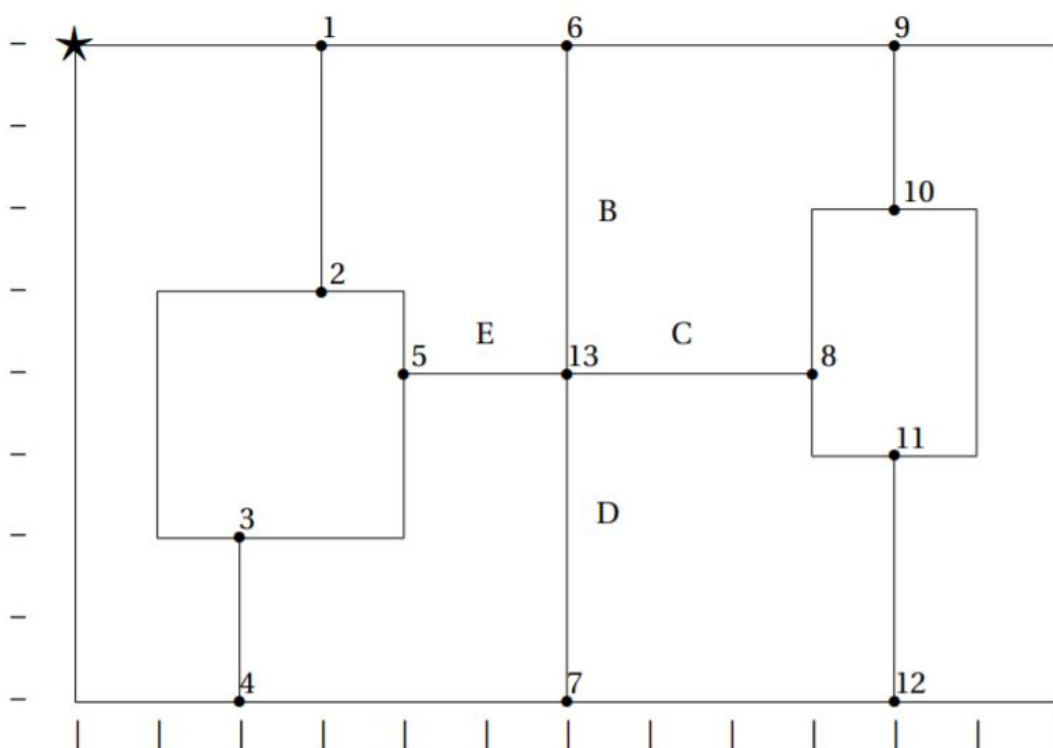
**Fig.1** : Mapa inicial do problema

## Formulação e desenvolvimento do modelo

Existem vários problemas práticos associados à Investigação Operacional que têm a possibilidade de serem expressos como problemas de programação linear. Dentro deste paradigma, encontramos-nos perante a necessidade de solucionar um problema de fluxo de redes, muitos destes facilmente expressos em diferentes situações, conforme já foi abordado em diversos exercícios das aulas práticas desta disciplina.

### Descrição do problema

Este problema refere-se a um drone, que tem como objetivo inspecionar todos os cabos elétricos para verificar se existe vegetação a interferir com as linhas de alta tensão, procurando percorrer o menor caminho possível. Por conseguinte, é necessária a observação do mapa fornecido para se perceber realmente a contextualização deste problema.



*Fig.2 : Mapa inicial do problema identificado*

Fica-se, então, com a evidência de que cada aresta corresponde a um desses cabos e que cada ponto, expresso de 1 a 13, define uma bifurcação (presumivelmente um poste elétrico, mas tal notação é desprezável) a partir do qual dois caminhos correspondentes a cabos seguem em direções diferentes. Respeitando o tipo de notação associado a este tipo de problemas chamaremos a estes pontos de **vértices**, sendo que tal notação que será usada no desenrolar deste documento.

Com uma leitura atenta ao enunciado percebe-se que irão existir pontes aéreas pelas quais o drone vai se movimentar de modo a reduzir ao máximo a distância total necessária para percorrer o caminho na sua totalidade e voltar ao ponto inicial, representado por uma estrela. É de notar que a partir de qualquer vértice pode-se viajar para outro, sem quaisquer restrições de sentido. Para além disso, é nos fornecido um dado que evita que tenhamos que fazer o cálculo destas distâncias - denominadas de **euclidianas** - em seguida discriminado.

		x	3	3	2	2	4	6	6	9	10	10	10	10	6
		y	8	5	2	0	4	8	0	4	8	6	3	0	4
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3	8	1	0,00	3,00	6,08	8,06	4,12	3,00	8,54	7,21	7,00	7,28	8,60	10,63	5,00
3	5	2	3,00	0,00	3,16	5,10	1,41	4,24	5,83	6,08	7,62	7,07	7,28	8,60	3,16
2	2	3	6,08	3,16	0,00	2,00	2,83	7,21	4,47	7,28	10,00	8,94	8,06	8,25	4,47
2	0	4	8,06	5,10	2,00	0,00	4,47	8,94	4,00	8,06	11,31	10,00	8,54	8,00	5,66
4	4	5	4,12	1,41	2,83	4,47	0,00	4,47	4,47	5,00	7,21	6,32	6,08	7,21	2,00
6	8	6	3,00	4,24	7,21	8,94	4,47	0,00	8,00	5,00	4,00	4,47	6,40	8,94	4,00
6	0	7	8,54	5,83	4,47	4,00	4,47	8,00	0,00	5,00	8,94	7,21	5,00	4,00	4,00
9	4	8	7,21	6,08	7,28	8,06	5,00	5,00	5,00	0,00	4,12	2,24	1,41	4,12	3,00
10	8	9	7,00	7,62	10,00	11,31	7,21	4,00	8,94	4,12	0,00	2,00	5,00	8,00	5,66
10	6	10	7,28	7,07	8,94	10,00	6,32	4,47	7,21	2,24	2,00	0,00	3,00	6,00	4,47
10	3	11	8,60	7,28	8,06	8,54	6,08	6,40	5,00	1,41	5,00	3,00	0,00	3,00	4,12
10	0	12	10,63	8,60	8,25	8,00	7,21	8,94	4,00	4,12	8,00	6,00	3,00	0,00	5,66
6	4	13	5,00	3,16	4,47	5,66	2,00	4,00	4,00	3,00	5,66	4,47	4,12	5,66	0,00

**Fig.3** : Tabela das distâncias euclidianas entre vértices

## Objetivo

Numa primeira instância, não considerando as pontes aéreas, seria ortodoxo não referir que objetivo preferencial para a resolução desta questão passaria por percorrer todos os cabos apenas uma vez.

Ora, verificando mais uma vez o mapa fornecido, conseguimos facilmente perceber que tal não é possível, visto que, dadas as características do mesmo, será necessário passar em diferentes arestas mais que uma vez. Admitimos também a existência de diferentes subcircuitos dentro do mapa, o que traz força ao que acabamos de referir, visto que é impossível percorrer um desses subcircuitos sem deixar inevitavelmente alguma aresta para trás, ou ter que passar por uma aresta anteriormente já percorrida, fatores que traduzem um aumento de distância percorrida. A imagem seguinte é, a título de exemplo, um desses casos.

Assim, se adicionarmos o dado de poderem existir pontes aéreas entre cada vértice, verificamos que, de facto, a condição de percorrer todas as arestas apenas uma vez é possível.

Como? Basta assumir que, existindo uma ponte aérea

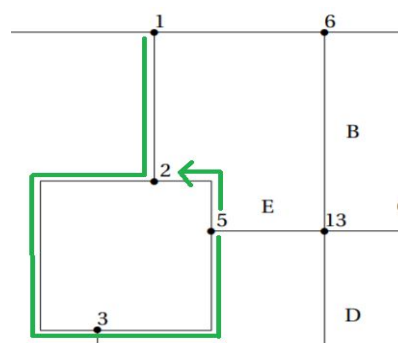
que tenha o mesmo caminho que uma aresta **Fig.4** : Subcircuito percorrido (s/ pontes aéreas)

(é exemplo o vértice 1 ao 2 ao lado ilustrados),

qualquer deslocamento feito mais que uma vez

nesta aresta é a partir de uma ponte aérea e não do caminho em si.

Isto leva a que se possa considerar que a passagem por cada aresta, numa solução ótima de um problema de minimização, é feita apenas uma vez, podendo ser abstraída a uma constante, e assim obter o resultado de onde é que necessário fazer as pontes aéreas.



O que se espera é encontrar o conjunto de pontes aéreas que possibilitem que se consiga gravar cada aresta uma só vez e que ao mesmo tempo custem o menos possível. Por isso, pretendemos emparelhar os vértices de grau ímpar para formar as pontes aéreas necessárias.

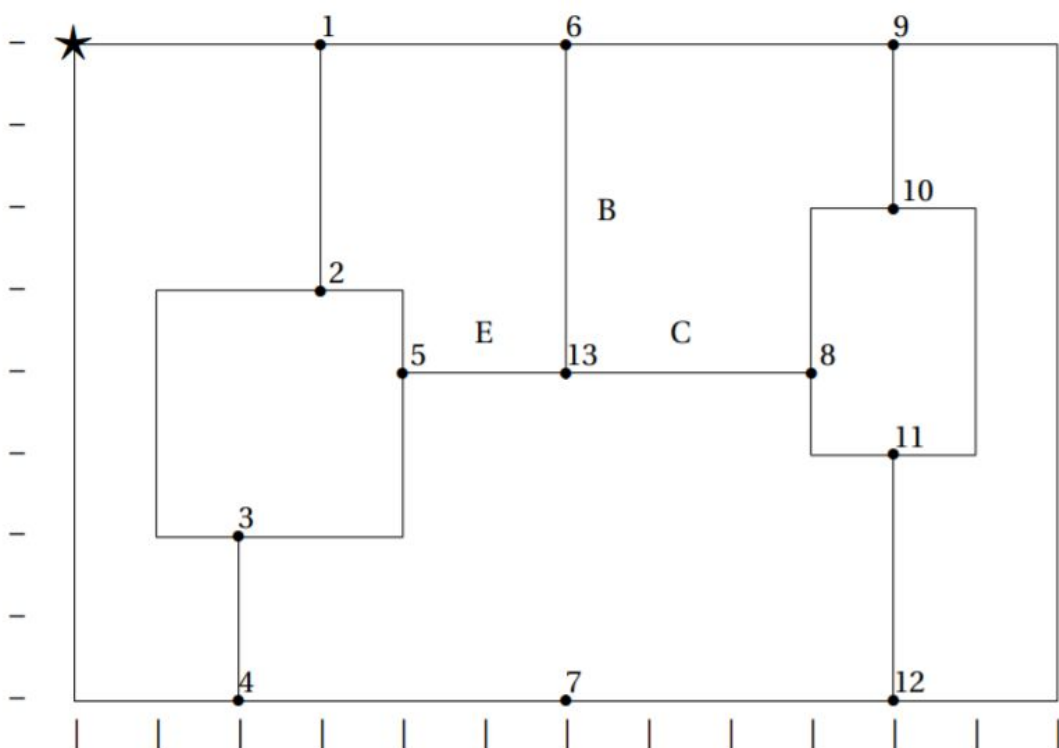
## Estruturação do problema

Portanto, com o intuito de definir as arestas existentes neste problema, e tendo em conta as especificações do enunciado, foi usado o número mecanográfico <89561> correspondente à especificação <ABCDE> fornecida .

Assim, conforme a definição apresentada:

- se B par, remover a aresta B;
- se C par, remover a aresta C;
- se D par, remover a aresta D;
- se E par, remover a aresta E;

Esta referência indicou-nos que a única aresta a ser removida seria a **D** pois era a única letra correspondente a um algarismo par.



**Fig.5 :** Mapa inicial, esquematizado de acordo com o número mecanográfico

É de notar que visto que a aresta D desaparece, o vértice 7 deixa de ter qualquer significado neste problema, visto que passa a fazer parte de uma aresta, não representando uma bifurcação (o vértice 7 passa a ter grau par), sendo portanto omitido em futuros cálculos. A nível de investigação operacional podemos simplificar e representar este problema como um grafo onde  $G = (V, E)$ . V é representativo de todos os vértices e E corresponde ao conjunto de arestas.

# Construção do Modelo

Esta fase do projeto focou-se na identificação e descrição de expressões quantitativas para o objetivo e restrições do problema. Conforme é lecionado nesta disciplina podemos segmentar esta fase nos pontos seguintes.

## **Variáveis de Decisão**

Procedemos assim a identificar as incógnitas deste problema.

Decidiu-se definir as variáveis de decisão como qualquer ligação aérea entre vértices, visto que estes podem ter qualquer sentido.

$x_{ij}$  : existência de ligação aérea entre o vértice  $i$  e  $j$

onde  $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$

Como pretendemos emparelhar os vértices que têm grau ímpar e o vértice 7 passou a ter grau par após a aresta D ser retirada, devemos omitir este vértice para obtermos a nossa solução.

Para além disso como parâmetro de interesse temos o custo correspondente à distância entre cada vértice.

## **Restrições**

Apresentam-se aqui as restrições de conservação de fluxo associadas a este problema, definindo assim os limites do seu funcionamento.

**vértice 1:**  $x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{18} + x_{19} + x_{110} + x_{111} + x_{112} + x_{113} = 1;$

**vértice 2:**  $x_{12} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{28} + x_{29} + x_{210} + x_{211} + x_{212} + x_{213} = 1;$

**vértice 3:**  $x_{13} + x_{23} + x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{38} + x_{39} + x_{310} + x_{311} + x_{312} + x_{313} = 1;$

**vértice 4:**  $x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{45} + x_{46} + x_{48} + x_{49} + x_{410} + x_{411} + x_{412} + x_{413} = 1;$

**vértice 5:**  $x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{56} + x_{58} + x_{59} + x_{510} + x_{511} + x_{512} + x_{513} = 1;$

**vértice 6:**  $x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} + x_{68} + x_{69} + x_{610} + x_{611} + x_{612} + x_{613} = 1;$

**vértice 8:**  $x_{18} + x_{28} + x_{38} + x_{48} + x_{58} + x_{68} + x_{89} + x_{810} + x_{811} + x_{812} + x_{813} = 1;$

**vértice 9:**  $x_{19} + x_{29} + x_{39} + x_{49} + x_{59} + x_{69} + x_{89} + x_{910} + x_{911} + x_{912} + x_{913} = 1;$

**vértice 10:**  $x_{110} + x_{210} + x_{310} + x_{410} + x_{510} + x_{610} + x_{810} + x_{910} + x_{1011} + x_{1012} + x_{1013} = 1;$

**vértice 11:**  $x_{111} + x_{211} + x_{311} + x_{411} + x_{511} + x_{611} + x_{811} + x_{911} + x_{1011} + x_{1112} + x_{1113} = 1;$

**vértice 12:**  $x_{112} + x_{212} + x_{312} + x_{412} + x_{512} + x_{612} + x_{812} + x_{912} + x_{1012} + x_{1112} + x_{1213} = 1;$



Para além disso, também definiram-se restrições de não negatividade e de integralidade, conforme será exposto no *lpsolve*, as quais inferem que:

$$x_{i,j} \in \text{Conjunto dos números naturais não negativos}$$

$$x_{i,j} \leq 1$$

Como será evidenciado no seguimento deste relatório, é possível verificar que definimos estas restrições de forma binária, sendo então:

$$x_{ij} \in \{0, 1\}$$

Facilmente verifica-se que as duas condições anteriores são respeitadas utilizando este formato.

### ***Função Objetivo***

A função objetivo vai depender se se chega a passar em cada aresta aérea, e do custo dessa passagem. Sendo o objetivo deste problema percorrer o menor caminho possível, estamos perante uma função de minimização. Com esta função pretendemos emparelhar os vértices de grau ímpar do grafo, ou seja pretendemos verificar as rotas para o drone se reposicionar com o menor custo.

Define-se assim a função:

$$\min \sum x_{i,j} c_{i,j} , \quad i, j \in V \setminus \{7\}$$

$x_{i,j}$  : existência de uma passagem aérea entre os vértices  $i$  e  $j$

$c_{i,j}$  : custo do deslocamento entre o vértice  $i$  e  $j$ , em centímetros

$V$  : conjunto de todos os vértices da rede do grafo ( $G = (V, E)$ )

# Modelo Final

$\min z =$

$$\begin{aligned} & 3.00x_{12} + 6.08x_{13} + 8.06x_{14} + 4.12x_{15} + 3.00x_{16} + 7.21x_{18} + 7.00x_{19} + 7.28x_{110} + 8.60x_{111} + 10.63x_{112} + \\ & 5.00x_{113} + \\ & 3.16x_{23} + 5.10x_{24} + 1.41x_{25} + 4.24x_{26} + 6.08x_{28} + 7.62x_{29} + 7.07x_{210} + 7.28x_{211} + 8.60x_{212} + 3.16x_{213} + \\ & 2.00x_{34} + 2.83x_{35} + 7.21x_{36} + 7.28x_{38} + 10.00x_{39} + 8.94x_{310} + 8.06x_{311} + 8.25x_{312} + 4.47x_{313} + \\ & 4.47x_{45} + 8.94x_{46} + 8.06x_{48} + 11.31x_{49} + 10.00x_{410} + 8.54x_{411} + 8.00x_{412} + 5.66x_{413} + \\ & 4.47x_{56} + 5.00x_{58} + 7.21x_{59} + 6.32x_{510} + 6.08x_{511} + 7.21x_{512} + 2.00x_{513} + \\ & 5.00x_{68} + 4.00x_{69} + 4.47x_{610} + 6.40x_{611} + 8.94x_{612} + 4.00x_{613} + \\ & 4.12x_{89} + 2.24x_{810} + 1.41x_{811} + 4.12x_{812} + 3.00x_{813} + \\ & 2.00x_{910} + 5.00x_{911} + 8.00x_{912} + 5.66x_{913} + \\ & 3.00x_{1011} + 6.00x_{1012} + 4.47x_{1013} + \\ & 3.00x_{1112} + 4.12x_{1113} + \\ & 5.66x_{1213} \end{aligned}$$

*su*j.  $a$ :

$$\begin{aligned} & x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{18} + x_{19} + x_{110} + x_{111} + x_{112} + x_{113} = 1 \\ & x_{12} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{28} + x_{29} + x_{210} + x_{211} + x_{212} + x_{213} = 1 \\ & x_{13} + x_{23} + x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{38} + x_{39} + x_{310} + x_{311} + x_{312} + x_{313} = 1 \\ & x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{45} + x_{46} + x_{48} + x_{49} + x_{410} + x_{411} + x_{412} + x_{413} = 1 \\ & x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{56} + x_{58} + x_{59} + x_{510} + x_{511} + x_{512} + x_{513} = 1 \\ & x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} + x_{68} + x_{69} + x_{610} + x_{611} + x_{612} + x_{613} = 1 \\ & x_{18} + x_{28} + x_{38} + x_{48} + x_{58} + x_{68} + x_{89} + x_{810} + x_{811} + x_{812} + x_{813} = 1 \\ & x_{19} + x_{29} + x_{39} + x_{49} + x_{59} + x_{69} + x_{89} + x_{910} + x_{911} + x_{912} + x_{913} = 1 \\ & x_{110} + x_{210} + x_{310} + x_{410} + x_{510} + x_{610} + x_{810} + x_{910} + x_{1011} + x_{1012} + x_{1013} = 1 \\ & x_{111} + x_{211} + x_{311} + x_{411} + x_{511} + x_{611} + x_{811} + x_{911} + x_{1011} + x_{1112} + x_{1113} = 1 \\ & x_{112} + x_{212} + x_{312} + x_{412} + x_{512} + x_{612} + x_{812} + x_{912} + x_{1012} + x_{1112} + x_{1213} = 1 \quad , \end{aligned}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}$$

## Ficheiro input

É necessário agora converter modelo matemático para o lpsolve e a sua sintaxe. O ficheiro de input foi desenvolvido de acordo com o modelo de programação linear anteriormente exposto.

```
1  /* Objective function */
2  min: 3.00*x12 + 6.08*x13 + 8.06*x14 + 4.12*x15 + 3.00*x16 + 7.21*x18 + 7.00*x19 + 7.28*x110 + 8.60*x111 + 10.63*x112 + 5.00*x113 +
3      3.16*x23 + 5.10*x24 + 1.41*x25 + 4.24*x26 + 6.08*x28 + 7.62*x29 + 7.07*x210 + 7.28*x211 + 8.60*x212 + 3.16*x213 +
4      2.00*x34 + 2.83*x35 + 7.21*x36 + 7.28*x38 + 10.00*x39 + 8.94*x310 + 8.06*x311 + 8.25*x312 + 4.47*x313 +
5      4.47*x45 + 8.94*x46 + 8.06*x48 + 11.31*x49 + 10.00*x410 + 8.54*x411 + 8.00*x412 + 5.66*x413 +
6      4.47*x56 + 5.00*x58 + 7.21*x59 + 6.32*x510 + 6.08*x511 + 7.21*x512 + 2.00*x513 +
7      5.00*x68 + 4.00*x69 + 4.47*x610 + 6.40*x611 + 8.94*x612 + 4.00*x613 +
8      4.12*x89 + 2.24*x810 + 1.41*x811 + 4.12*x812 + 3.00*x813 +
9      2.00*x910 + 5.00*x911 + 8.00*x912 + 5.66*x913 +
10     3.00*x1011 + 6.00*x1012 + 4.47*x1013 +
11     3.00*x1112 + 4.12*x1113 +
12     5.66*x1213;
```

Fig.6 : Função objetivo no lpsolve

```
15 /*Restrições*/
16 vertice1: x12 + x13 + x14 + x15 + x16 + x18 + x19 + x110 + x111 + x112 + x113 = 1;
17 vertice2: x12 + x23 + x24 + x25 + x26 + x28 + x29 + x210 + x211 + x212 + x213 = 1;
18 vertice3 : x13 + x23 + x34 + x35 + x36 + x38 + x39 + x310 + x311 + x312 + x313 = 1;
19 vertice4 : x14 + x24 + x34 + x45 + x46 + x48 + x49 + x410 + x411 + x412 + x413 = 1;
20 vertice5 : x15 + x25 + x35 + x45 + x56 + x58 + x59 + x510 + x511 + x512 + x513 = 1;
21 vertice6 : x16 + x26 + x36 + x46 + x56 + x68 + x69 + x610 + x611 + x612 + x613 = 1;
22 vertice8 : x18 + x28 + x38 + x48 + x58 + x68 + x89 + x810 + x811 + x812 + x813 = 1;
23 vertice9 : x19 + x29 + x39 + x49 + x59 + x69 + x89 + x910 + x911 + x912 + x913 = 1;
24 vertice10 : x110 + x210 + x310 + x410 + x510 + x610 + x810 + x910 + x1011 + x1012 + x1013 = 1;
25 vertice11 : x111 + x211 + x311 + x411 + x511 + x611 + x811 + x911 + x1011 + x1112 + x1113 = 1;
26 vertice12 : x112 + x212 + x312 + x412 + x512 + x612 + x812 + x912 + x1012 + x1112 + x1213 = 1;
27 vertice13 : x113 + x213 + x313 + x413 + x513 + x613 + x813 + x913 + x1013 + x1113 + x1213 = 1;
```

Fig.7 : Restrições de fluxo no lpsolve

```
30 /* Restrição de não negatividade e de integralidade*/
31 Bin
32 x12, x13, x14, x15, x16, x18, x19, x110, x111, x112, x113,
33 x23, x24, x25, x26, x28, x29, x210, x211, x212, x213,
34 x34, x35, x36, x38, x39, x310, x311, x312, x313,
35 x45, x46, x48, x49, x410, x411, x412, x413,
36 x56, x58, x59, x510, x511, x512, x513,
37 x68, x69, x610, x611, x612, x613,
38 x89, x810, x811, x812, x813,
39 x910, x911, x912, x913,
40 x1011, x1012, x1013,
41 x1112, x1113,
42 x1213;
```

Fig.8 : Restrição de não negatividade e de integralidade no lpsolve (definido como binário)

## ***Ficheiro de output***

Devido ao grande volume de variáveis, o grupo cingiu-se a apresentar parte do ficheiro, organizando a visualização no Ipsolve de acordo com as variáveis que assumem o valor 1. As restantes têm valor 0.

Variables	M...	result
	14,41	14,41
x16	1	1
x25	1	1
x34	1	1
x813	1	1
x910	1	1
x1112	1	1
x12	0	0
x13	0	0
x14	0	0
x15	0	0
x18	0	0
x19	0	0
x110	0	0
x111	0	0
x112	0	0
x113	0	0
x23	0	0
x24	0	0
x26	0	0
x28	0	0
x29	0	0
x210	0	0
x211	0	0
x212	0	0
x213	0	0

**Fig.8** : Excerto da tabela resultado da função objetivo

Assim, identifica-se o valor da função objetivo como 14,41 *cm*, representando o custo mínimo para percorrer as pontes aéreas seleccionadas. As variáveis de decisão que minimizam o valor desta são:

***x1112***

***x16***

***x25***

***x34***

***x813***

***x910***,

representando então as pontes aéreas que irão existir e que devem ser percorridas para reposicionar o drone durante a filmagem das linhas de eletricidade.

## Validação do Modelo

Obtendo os resultados da solução do problema, é necessário agora interpretá-los e definir o percurso que caracteriza esta solução.

Ou seja, tendo em conta os resultados, irão existir pontes aéreas entre os seguintes vértices:

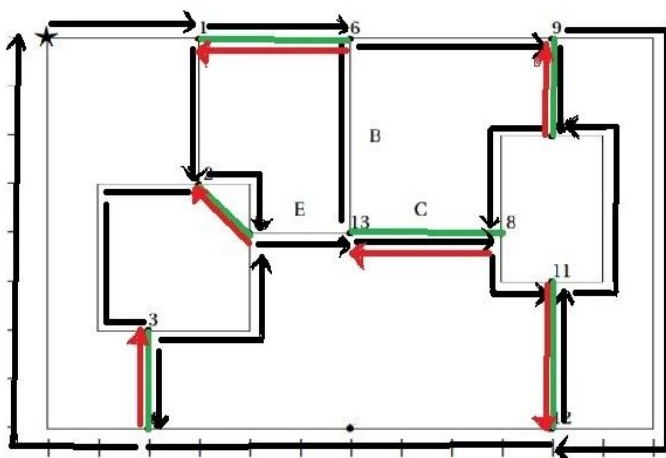
1 e 6;  
2 e 5;  
3 e 4;  
8 e 13;  
9 e 10;  
11 e 12;

O próximo passo, e sabendo que cada aresta não aérea terá que ter apenas um deslocamento (de modo a minimizar ao máximo o custo total do percurso) é começar a traçar caminhos, começando na estrela e usufruindo das pontes aéreas existentes entre os vértices acima apresentados.

Legendando a imagem abaixo apresentada:

A preto está a deslocação não aérea entre vértices.

O verde e vermelho demonstra a possibilidade de deslocação aérea entre vértices.



Uma possível solução seria:

O drone começa na estrela, desloca-se para o vértice 1 e depois para o 6. Do 6 reposiciona-se (não filmando) em 1.

Daí passa para o 2, segue para o 3 e vai ao 4. Nessa altura, reposiciona-se de volta no vértice 3 e segue para o vértice 5. Usufruindo da ponte aérea existente, segue para 2.

Do 2 volta para o 5 seguindo a  
cablagem, e do 5 continua até ao

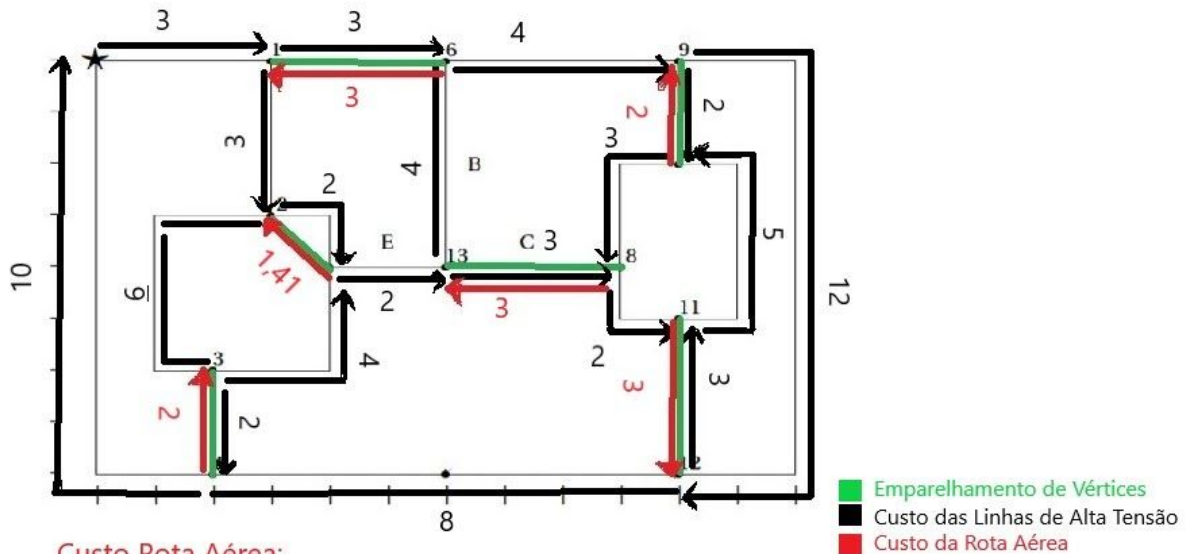
13. Continuando a filmagem, vai ao 6, e segue depois para 9.

Daí irá para 10 e depois para 8. Voltará desse ponto ao vértice 13 por via aérea e fará o percurso de 13 a 8, filmando os cabos que compõem esse percurso. De volta a 8, segue para 11, o ponto de partida para se voltar a reposicionar por via aérea em 12. Aí volta a 11 pela linha elétrica e de 11 vai para 10. Reposiciona-se em 9 pelo ar e do 9 filma as linhas até 12. Não existindo aresta 7, de 12 filma de volta até ao ponto inicial do percurso.

**Nota:** Reposicionar refere-se ao drone usar uma ponte aérea.

## Cálculo do percurso

Verificando este percurso escolhido, o custo total será:



Custo Rota Aérea:

$$3 + 2 + 3 + 3 + 2 + 1.41 = 14.41$$

Custo Linhas de Alta Tensão:

$$10 + 3 + 3 + 4 + 12 + 8 + 3 + 4 + 2 + 3 + 2 + 2 + 3 + 3 + 5 + 2 + 2 + 4 + 6 = 81$$

Custo Total:

$$\text{Custo Linhas de Altas Tensão} + \text{Custo Rota Aérea} = 81 + 14.41 = 95.41$$

Pode-se então concluir que a solução obtida para o problema é uma solução admissível pois obedece a todas as restrições definidas.

É de notar que esta **não seria a única solução** para este problema. Mas em todas as soluções se obteria o mesmo custo de percorrer este percurso. Bastava por exemplo considerar começar-se o percurso da estrela para o vértice 4. Iria-se percorrer exatamente todas as arestas uma vez mas por uma ordem diferente, usufruindo exatamente das mesmas pontes aéreas para reposicionar o drone. Concluimos que então, estamos perante uma solução admissível, de um conjunto de soluções ótimas.

## **Dificuldades**

Alguns contra-sensos foram motivo de debate entre os elementos do grupo. A sua grande maioria- questões fortuitas de carácter académico - rapidamente ultrapassadas com o estudo da matéria lecionada.

De relevante foco é a introdução de pontes aéreas pois pereceu de algum diálogo e discussão entre os elementos deste grupo, pois não percebemos muito bem como se iriam enquadrar com a deslocação entre vértices. Pensamos que a secção do “Objetivo” enquadra bem como exploramos e desenvolvemos o nosso raciocínio, patamar a patamar. Partimos de um ponto inicial mais débil a nível de restrições e que de certa forma nos acabava por prejudicar pois causava alguma confusão do que realmente seria o problema, mas após nos apercebermos como realmente deveríamos aplicar as ligações aéreas conseguimos desenvolver o que seria o desenrolar deste projeto. Essa foi a maior barreira a nível de raciocínio.

Outros pontos como considerar o vértice sete ou pensar em tornar o ponto estrela como vértice foram imediatamente descartados, pelas razões anteriormente referidas, mas também por conselhos dados pelo docente em aulas práticas e teóricas, e mesmo na aula de dúvidas, que nos foi muito útil para todo o desenrolar do projeto, evitando perda de tempo em questões mais desprezáveis.

Em relação ao relatório, sentimos algum receio em ter cometido alguma “gralha” formal, especialmente a nível matemático ou por algum motivo termos alguma falha interpretativa ao expôr o nosso raciocínio.

## **Conclusão**

A nível logístico, a redução do custo do caminho a percorrer é de grande importância e dá para perceber que desempenha um significativo papel na organização e planeamento de muitos recursos, utilizados na atualidade a nível empresarial, mostrando o quão útil é como ferramenta de cálculo. Com este trabalho implementamos uma solução para o problema do Carteiro Chinês utilizando programação linear, o que demonstrou ser bastante efetivo para descobrir o caminho de custo mínimo.

Sentimos também que soubemos especificar todos os pontos previstos e requisitados pelo docente na elaboração deste relatório, procurando ser sempre fiel à formalidade associada à Investigação Operacional.

Concluindo, sentimos um grande evoluir na nossa percepção e visão do que é realmente a investigação operacional, evoluindo e solidificando conceitos que nos foram sendo lecionados ao longo deste semestre, fazendo-nos ao mesmo tempo perceber como aplicá-los.