

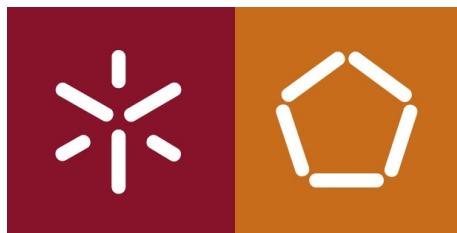
# Métodos Determinísticos de Investigação Operacional

## Trabalho Prático II

12 de Dezembro de 2020

---

a85635 André Nunes  
a85517 Duarte Oliveira  
a89561 Gustavo Lourenço  
a89501 Martim Almeida



Mestrado Integrado em Engenharia Informática  
Universidade do Minho

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
1.1	Formulações . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Modelo</b>	<b>6</b>
2.1	Variáveis de decisão . . . . .	6
2.2	Parâmetros . . . . .	6
2.3	Função Objetivo . . . . .	6
2.4	Restrições . . . . .	7
2.5	Modelo Completo . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Rede do problema de fluxo máximo</b>	<b>8</b>
3.1	Grafo Orientado do Problema . . . . .	8
3.2	Grafo Não Saturado . . . . .	9
<b>4</b>	<b><i>Software</i> de otimização de redes</b>	<b>10</b>
4.1	Ficheiro de input . . . . .	10
4.2	Ficheiro de output . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Interpretação da solução ótima</b>	<b>20</b>
<b>6</b>	<b>Validação do Modelo</b>	<b>21</b>
6.1	Input . . . . .	21
6.2	Output . . . . .	24
<b>7</b>	<b>Dificuldades</b>	<b>25</b>
<b>8</b>	<b>Conclusão</b>	<b>25</b>

# 1 Introdução

O segundo projeto pratico desta unidade curricular, toma como base um problema de exploração de minas de céu aberto. No enunciado é assim descrito todo o processo associado à exploração mineira. Como referência foi-nos apresentado um quadriculado, que de forma leviana representa os recursos existentes em diferentes zonas do subsolo, referenciando os algarismos representativos do valor desses minérios. São também apresentados os diferentes níveis de profundidade associados ao terreno a explorar, de -1 a -5.

nível -1						10	8				
nível -2	x				12	14	15	40			x
nível -3	x	x			16			20		x	x
nível -4	x	x	x	3	18	B		C	x	x	x
nível -5	x	x	x	x	20	D		E	x	x	x

Figura 1: Representação da zona de concessão

Deste quadro é sensato retirar algumas observações:

- Cada quadricula representa um bloco.
- Cada nível terá a si associado um custo de exploração.
- Os "x" são desprezáveis - zonas que por qualquer motivo não possuem relevância para serem exploradas.
- *B, D, E, C* correspondem a valores de minérios - futuramente discriminados.
- Os valores dos minérios apresentados representam apenas o seu **valor bruto**.

Na recolha de dados para futura modelação, é preciso ter em conta o processo de exploração que foi estipulado para esta mina. Do enunciado retiramos que sempre que se pretende extrair um bloco, é **obrigatório** extrair três blocos no nível de profundidade acima - o que está imediatamente por cima e os dois que lhe são adjacentes. Verificaríamos algo como a seguir, a título de exemplo, é demonstrado. Após esta explicação é necessário avançar com alguns valores e especificações para

nível -1													
nível -2	x												x
nível -3	x	x										x	x
nível -4	x	x	x								x	x	x
nível -5	x	x	x	x						x	x	x	x

Figura 2: *Querendo remover o bloco a vermelho, será necessário remover os blocos a laranja*

este problema.

## 1.1 Formulações

Introduz-se esta secção fornecendo os valores correspondentes às incógnitas anteriormente apresentadas. Completa-se assim o quadro inicialmente apresentado.

**$B=9$ ;  $C=5$ ;  $D=6$ ;  $E=1$** ; proveniente do número de aluno *A89561*

valor minério												
						10	8					
					12	14	15	40				
				16				20				
			3	18	9			5				
				20	6		1					

Figura 3: *Valores de minério por bloco*

Conforme o que foi indicado na parte introdutória deste relatório, a exploração tem a si associada alguns custos que vão diretamente depender da profundidade em que um bloco é explorado. É portanto necessário verificar esses valores, que nos são fornecidos no enunciado deste problema:

nível	-1	-2	-3	-4	-5
custo	1	2	3	4	5

Figura 4: Custos por nível de profundidade

Como cada bloco tem o seu respetivo valor de minério, subtraindo os custos de exploração no respetivo nível do bloco, vai-se obter o valor **líquido** de cada bloco. Ou seja, vai se determinar o lucro (positivo ou negativo) de remover um bloco. Através deste ponto complementamos o nosso raciocínio sob forma da seguinte figura.

	lucro = valor minério - custo											
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	9	7	-1	-1	-1	-1
2	—	-2	-2	-2	-2	10	12	13	38	-2	-2	—
3	—	—	-3	-3	13	-3	-3	-3	17	-3	—	—
4	—	—	—	-1	14	5	-4	-4	5	—	—	—
5	—	—	—	—	15	4	-5	4	—	—	—	—

Figura 5: Quadro de lucros

Com o auxílio dos documentos fornecidos pelo docente, começamos por detalhar cada bloco da mina, inferindo um vértice por cada bloco. A numeração dos vértices do nosso problema é apresentada no quadro seguinte. Os blocos a cinzento representam os "x" anteriormente referidos, onde a exploração não é possível.

número do vértice											
29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
—	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	—
—	—	11	12	13	14	15	16	17	18	—	—
—	—	—	5	6	7	8	9	10	—	—	—
—	—	—	—	1	2	3	4	—	—	—	—

Figura 6: Representação da numeração dos vértices

## 2 Modelo

Nesta etapa do relatório entraremos numa explicitação de todo o modelo adjacente à nossa solução deste problema, procurando respeitar a formalidade matemática inerente à Investigação Operacional. Para isso utilizaremos toda a linguagem lecionada ao longo do semestre na componente teórica e prática desta disciplina, procurando igualmente ser claros e objetivos na formulação deste Modelo. A nível de investigação operacional temos sempre a possibilidade de representar este problema sob forma de um grafo  $G = (V, A)$  onde  $V$  é o conjunto de todos os vértices e  $A$  o conjunto de arestas.

### 2.1 Variáveis de decisão

Tendo em conta os dados deste problema apresentamos a variável de decisão que identificamos. Dada a sua natureza, esta foi inferida como uma variável binária.

$x_i$  : *indica se o bloco correspondente ao vértice  $i$  será ou não escavado.*

Tendo estas características é importante apontar que  $x_i$  terá o valor de:

- 0 se não for escavado
- 1 se for escavado

Concluindo-se aqui que é uma variável do tipo binário.

Logo  $x_i \in \{0, 1\}$  com  $i \in \{1, 2, 3, \dots, 40\}$  ou  $i \in V$

### 2.2 Parâmetros

Em relação a esta secção do modelo, para além da **quantidade de minério em cada bloco**, identificamos tanto o **lucro** como o **custo** da extração em cada vértice, como os dados que influenciam o resultado da decisão final e que por si só são imutáveis.

### 2.3 Função Objetivo

Procurando maximizar o lucro inerente à exploração da mina, formulou-se a função objetivo, onde  $c_i$  é referente ao lucro relativo ao bloco  $i$ .

$$Max \sum_{i \in V} c_i x_i$$

## 2.4 Restrições

Antes de discriminar as restrições a que este problema está sujeito, é necessário primeiro fundamentar o que será descrito para melhor compreensão. Enunciamos aqui o que denominamos de "contorno de escavação". Este termo é referente ao bloco que, em relação ao bloco a extrair, "está imediatamente por cima" e aos dois que lhe são adjacentes, tal como foi anteriormente ilustrado.

Tome-se como exemplo o *vértice 1* - o seu contorno de escavação será **{5,6,7}**

Assim:

$$x_i - x_j \leq 0$$

,  
para todo o  $x_j$  pertencente ao contorno de escavação de  $x_i$

## 2.5 Modelo Completo

$$\begin{aligned} & \text{Max} \quad \sum_{i \in V} c_i x_i \\ & \textbf{sujeito a} \quad x_i - x_j \leq 0, \forall (i, j) \in A \\ & \quad \quad \quad x_i, x_j \in \{0, 1\}, \forall i, j \in V \end{aligned}$$

### 3 Rede do problema de fluxo máximo

Em primeiro lugar, nesta fase do trabalho procedeu-se à elaboração, planeamento e construção da rede de fluxo máximo que caracteriza este problema, conforme tinha vindo a ser desenvolvido e interpretado. Em segundo lugar, é de notar que decidiu-se apresentar esta rede em linha com a forma como estipulamos o nosso raciocínio e que, sabendo que a sua apresentação pode ser algo *complexa* à primeira vista, procedemos a tentar descomplicá-la o mais possível, para melhor interpretação do leitor.

#### 3.1 Grafo Orientado do Problema

Como referido na secção anterior, podemos apresentar este problema como um grafo orientado  $G = (V, A)$ , onde  $V$  representa o conjunto dos blocos a serem escavados e  $A$  representa os arcos do tipo  $(i, j)$  onde  $i \in V$  e  $j$  pertence ao **conjunto de blocos do contorno de escavação de  $i$** .

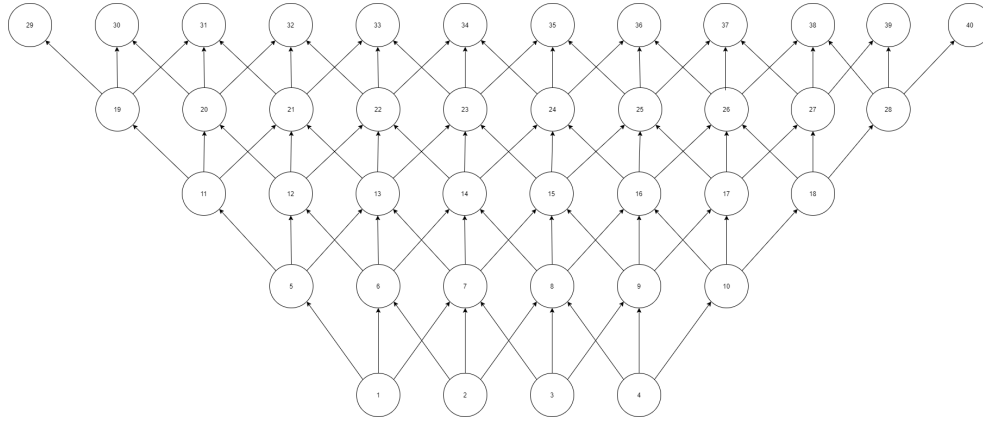


Figura 7: Grafo  $G$  Orientado do Problema



### 3.2 Grafo Não Saturado

Consequimos então perceber que temos um grafo orientado  $G=(V,A)$  e cada vértice  $i \in V$  tem a si associado um peso  $c_i$  (no caso deste problema,  $c_i$  representa o lucro de cada bloco), que pode ser positivo ou negativo. Estamos perante um problema de **fecho máximo de um grafo** - que consiste em determinar um sub-conjunto fechado de vértices  $S \subseteq V$  tal que  $\sum_{i \in S} c_i$  seja máximo. O fecho máximo de um grafo pode ser determinado resolvendo um problema de fluxo máximo num grafo auxiliar  $G'$ , obtido adicionando ao grafo  $G$  uma **fonte**  $s$  e um **terminal**  $t$ . Seja  $V^+ = \{i \in V : c_i \geq 0\}$  e  $V^- = \{i \in V : c_i < 0\}$ .

Adicionalmente, o grafo auxiliar  $G'$  terá arcos  $(s,i)$  de  $s$  para todos os vértices  $i \in V^+$ , com custo  $c_i$ , e arcos  $(i,t)$ , de todos os vértices  $i \in V^-$  ao vértice  $t$ , com custo  $-c_i$  (como todos os vértices de  $V^-$  têm  $c_i < 0$  este valor vai ser positivo. Os arcos pertencentes ao grafo  $G$  têm que ter um valor igual a  $+\infty$ . O fecho máximo do grafo  $G$  pode ser determinado através do corte mínimo do grafo  $G'$ .

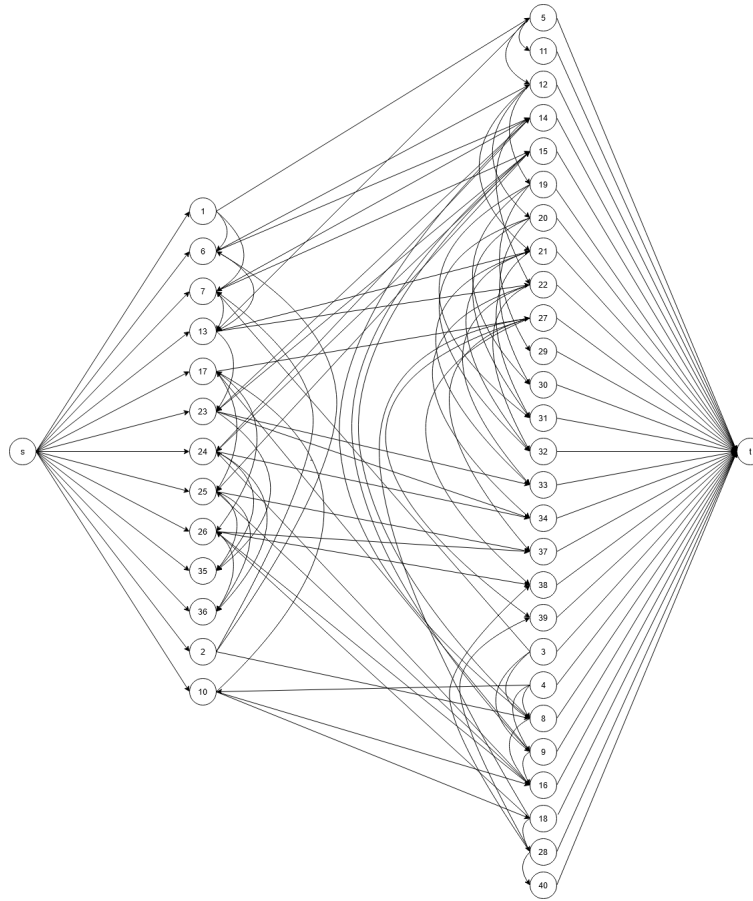


Figura 8: Grafo auxiliar  $G'$  que representa o problema do fluxo máximo

É de notar que no grafo  $G'$  não é representado o arco  $(t,s)$  - o qual é responsável pela maximização do fluxo entre o vértice  $t$  e o vértice  $s$ .

## 4 *Software* de otimização de redes

Utilizou-se, conforme recomendado pelo docente, o programa *Relax4* que permite resolver **problemas de otimização de redes**, permitindo identificar uma solução para este problema.

### 4.1 Ficheiro de input

Substituímos o vértice *s* por 41 e *t* por 42 e adicionamos as arestas de *G'* ao nosso ficheiro de *input* - incluindo a aresta de *t* para *s* com capacidade infinita e custo -1. O valor da capacidade é infinito visto que pretendemos maximizar o fluxo deste arco. O custo é -1 pois o *relax4* resolve problemas de minimização. Assim obtemos o seguinte input.

```
42
125
1 5 0 1000
1 6 0 1000
1 7 0 1000
2 6 0 1000
2 7 0 1000
2 8 0 1000
3 7 0 1000
3 8 0 1000
3 9 0 1000
3 42 0 5
4 8 0 1000
4 9 0 1000
4 10 0 1000
4 42 0 4
5 11 0 1000
5 12 0 1000
5 13 0 1000
5 42 0 1
6 12 0 1000
6 13 0 1000
6 14 0 1000
7 13 0 1000
7 14 0 1000
7 15 0 1000
8 14 0 1000
8 15 0 1000
8 16 0 1000
8 42 0 4
9 15 0 1000
9 16 0 1000
9 17 0 1000
9 42 0 4
10 16 0 1000
```

10 17 0 1000  
10 18 0 1000  
11 19 0 1000  
11 20 0 1000  
11 21 0 1000  
11 42 0 3  
12 20 0 1000  
12 21 0 1000  
12 22 0 1000  
12 42 0 3  
13 21 0 1000  
13 22 0 1000  
13 23 0 1000  
14 22 0 1000  
14 23 0 1000  
14 24 0 1000  
14 42 0 3  
15 23 0 1000  
15 24 0 1000  
15 25 0 1000  
15 42 0 3  
16 24 0 1000  
16 25 0 1000  
16 26 0 1000  
16 42 0 3  
17 25 0 1000  
17 26 0 1000  
17 27 0 1000  
18 26 0 1000  
18 27 0 1000  
18 28 0 1000  
18 42 0 3  
19 29 0 1000  
19 30 0 1000  
19 31 0 1000  
19 42 0 2  
20 30 0 1000  
20 31 0 1000  
20 32 0 1000  
20 42 0 2  
21 31 0 1000  
21 32 0 1000  
21 33 0 1000  
21 42 0 2  
22 32 0 1000  
22 33 0 1000

22 34 0 1000  
22 42 0 2  
23 33 0 1000  
23 34 0 1000  
23 35 0 1000  
24 34 0 1000  
24 35 0 1000  
24 36 0 1000  
25 35 0 1000  
25 36 0 1000  
25 37 0 1000  
26 36 0 1000  
26 37 0 1000  
26 38 0 1000  
27 37 0 1000  
27 38 0 1000  
27 39 0 1000  
27 42 0 2  
28 38 0 1000  
28 39 0 1000  
28 40 0 1000  
28 42 0 2  
29 42 0 1  
30 42 0 1  
31 42 0 1  
32 42 0 1  
33 42 0 1  
34 42 0 1  
37 42 0 1  
38 42 0 1  
39 42 0 1  
40 42 0 1  
41 1 0 15  
41 2 0 1  
41 6 0 14  
41 7 0 5  
41 10 0 1  
41 13 0 13  
41 17 0 17  
41 23 0 10  
41 24 0 12  
41 25 0 13  
41 26 0 38  
41 35 0 9  
41 36 0 7  
42 41 -1 1000

[illegible]

É de notar que todos os arcos com capacidade infinita são representados pelo valor 1000 (*virtualmente infinito*) e o seu custo é sempre 0 com exceção do arco de t para s, em que o seu custo é -1 pois pretendemos maximizar o fluxo neste arco. Temos 42 vértices no grafo G' ( 40 do grafo G mais o vértice s e o vértice t). O nosso número de arcos é 125 (84 do grafo G e 13 arcos de s para os vértices com lucro positivo, 27 arcos de todos os vértices com lucro negativo para t e finalmente o arco de t para s). Como não existe uma oferta ou procura para nenhum dos vértices da rede, definimos a oferta e a procura para os vértices todos como 0.

## 4.2 Ficheiro de output

O ficheiro de output gerado é o seguinte: Este ficheiro dá-nos a informação do fluxo de cada arco.

```

END OF READING
NUMBER OF NODES = 42, NUMBER OF ARCS = 125
CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM
CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM
*****
TOTAL SOLUTION TIME = 0. SECS.
TIME IN INITIALIZATION = 0. SECS.
 1 5 11.
 2 8 1.
 5 11 6.
 5 12 4.
 5 42 1.
 6 12 5.
 6 14 7.
 7 15 4.
 8 16 1.
10 18 1.
11 19 3.
11 42 3.
12 20 3.
12 21 3.
12 42 3.
14 22 3.
14 24 1.
14 42 3.
15 23 1.
15 42 3.
16 42 1.
17 27 3.
18 28 1.
19 29 1.
19 42 2.
20 30 1.
20 42 2.
21 31 1.
21 42 2.
22 32 1.
22 42 2.
23 33 1.
24 34 1.
25 37 1.
26 38 1.
27 39 1.
27 42 2.
28 42 1.
29 42 1.
30 42 1.
31 42 1.
32 42 1.
33 42 1.
34 42 1.
37 42 1.
38 42 1.
39 42 1.
41 1 11.
41 2 1.
41 6 12.
41 7 4.
41 10 1.
41 17 3.
41 25 1.
41 26 1.
42 41 34.
OPTIMAL COST = -34.
NUMBER OF AUCTION/SHORTEST PATH ITERATIONS = 52
NUMBER OF ITERATIONS = 107
NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS = 16
NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS = 1
NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS = 15
*****

```

Figura 9: Ficheiro de output do programa *Relax4*

Podendo assim obter a seguinte tabela, nos quais podemos determinar quais os arcos saturados.

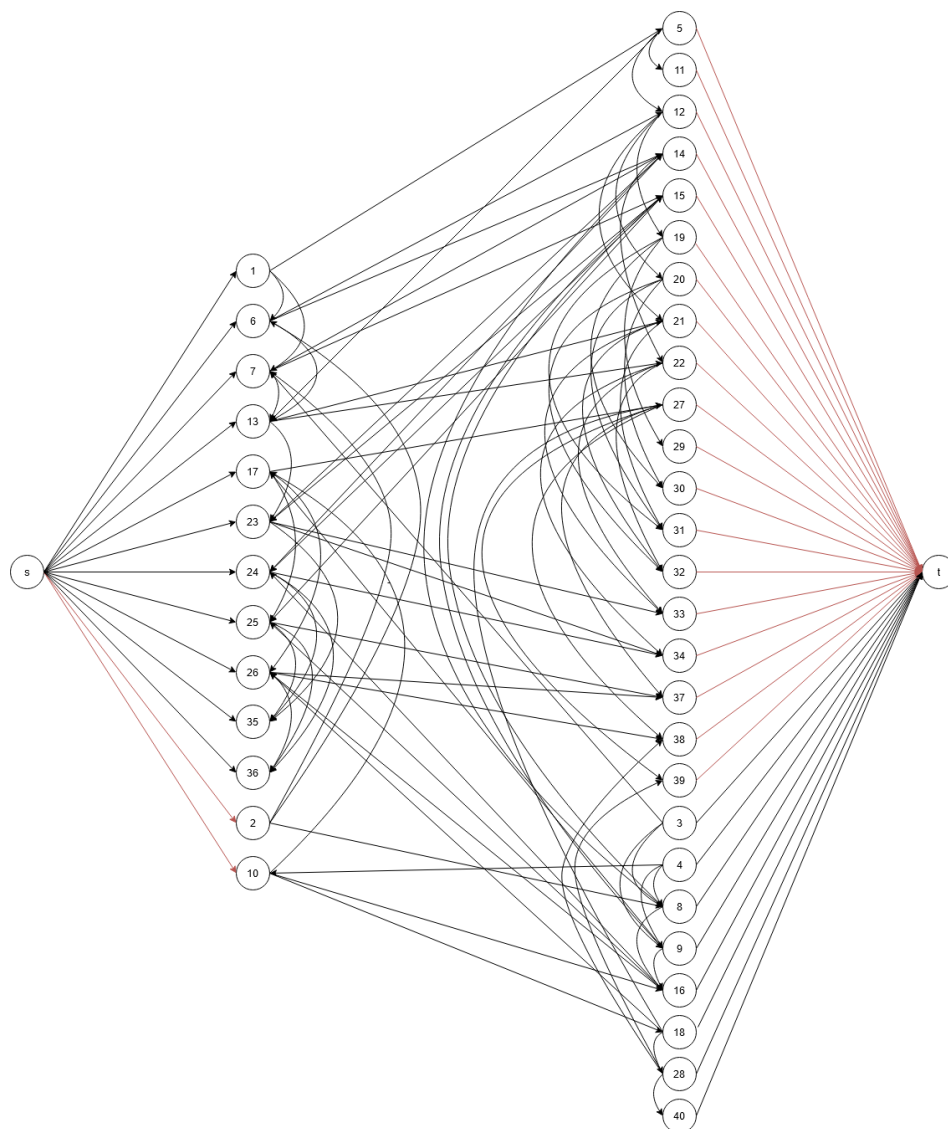
Arco	Fluxo	Capacidade	É Saturado
(1, 5)	11	$\infty$	Não
(1, 6)	0	$\infty$	Não
(1, 7)	0	$\infty$	Não
(2, 6)	0	$\infty$	Não
(2, 7)	0	$\infty$	Não
(2, 8)	1	$\infty$	Não
(3, 7)	0	$\infty$	Não
(3, 8)	0	$\infty$	Não
(3, 9)	0	$\infty$	Não
(3, t)	0	5	Não
(4, 8)	0	$\infty$	Não
(4, 9)	0	$\infty$	Não
(4, 10)	0	$\infty$	Não
(4, t)	0	4	Não
(5, 11)	6	$\infty$	Não
(5, 12)	4	$\infty$	Não
(5, 13)	0	$\infty$	Não
(5, t)	1	1	Sim
(6, 12)	5	$\infty$	Não
(6, 13)	0	$\infty$	Não
(6, 14)	7	$\infty$	Não
(7, 13)	0	$\infty$	Não
(7, 14)	0	$\infty$	Não
(7, 15)	4	$\infty$	Não
(8, 14)	0	$\infty$	Não
(8, 15)	0	$\infty$	Não
(8, 16)	1	$\infty$	Não
(8, t)	0	4	Não
(9, 15)	0	$\infty$	Não
(9, 16)	0	$\infty$	Não
(9, 17)	0	$\infty$	Não
(9, t)	0	4	Não
(10, 16)	0	$\infty$	Não
(10, 17)	0	$\infty$	Não
(10, 18)	1	$\infty$	Não
(11, 19)	3	$\infty$	Não
(11, 20)	0	$\infty$	Não
(11, 21)	0	$\infty$	Não
(11, t)	3	3	Sim
(12, 20)	3	$\infty$	Não
(12, 21)	3	$\infty$	Não
(12, 22)	0	$\infty$	Não
(12, t)	3	3	Sim
(13, 21)	0	$\infty$	Não
(13, 22)	0	$\infty$	Não
(13, 23)	0	$\infty$	Não

Arco	Fluxo	Capacidade	É Saturado
(14, 22)	3	$\infty$	Não
(14, 23)	0	$\infty$	Não
(14, 24)	1	$\infty$	Não
(14, t)	3	3	Sim
(15, 23)	1	$\infty$	Não
(15, 24)	0	$\infty$	Não
(15, 25)	0	$\infty$	Não
(15, t)	3	3	Sim
(16, 24)	0	$\infty$	Não
(16, 25)	0	$\infty$	Não
(16, 26)	0	$\infty$	Não
(16, t)	1	3	Não
(17, 25)	0	$\infty$	Não
(17, 26)	0	$\infty$	Não
(17, 27)	3	$\infty$	Não
(18, 26)	0	$\infty$	Não
(18, 27)	0	$\infty$	Não
(18, 28)	1	$\infty$	Não
(18, t)	0	3	Não
(19, 29)	1	$\infty$	Não
(19, 30)	0	$\infty$	Não
(19, 31)	0	$\infty$	Não
(19, t)	2	2	Sim
(20, 30)	1	$\infty$	Não
(20, 31)	0	$\infty$	Não
(20, 32)	0	$\infty$	Não
(20, t)	2	2	Sim
(21, 31)	1	$\infty$	Não
(21, 32)	0	$\infty$	Não
(21, 33)	0	$\infty$	Não
(21, t)	2	2	Sim
(22, 32)	1	$\infty$	Não
(22, 33)	0	$\infty$	Não
(22, 34)	0	$\infty$	Não
(22, t)	2	2	Sim
(23, 33)	1	$\infty$	Não
(23, 34)	0	$\infty$	Não
(23, 35)	0	$\infty$	Não
(24, 34)	1	$\infty$	Não
(24, 35)	0	$\infty$	Não
(24, 36)	0	$\infty$	Não
(25, 35)	0	$\infty$	Não
(25, 36)	0	$\infty$	Não
(25, 37)	1	$\infty$	Não
(26, 36)	0	$\infty$	Não
(26, 37)	0	$\infty$	Não
(26, 38)	1	$\infty$	Não

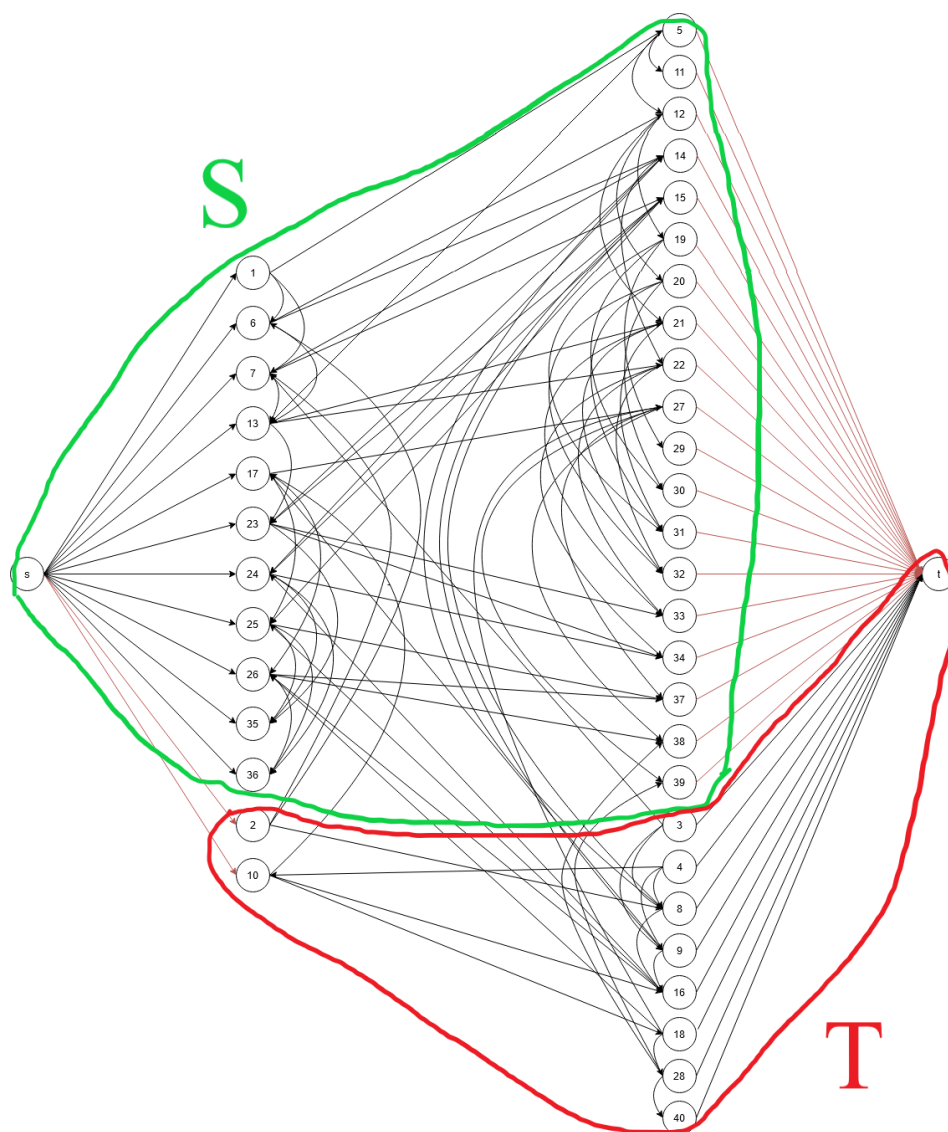


Arco	Fluxo	Capacidade	É Saturado
(27, 37)	0	$\infty$	Não
(27, 38)	0	$\infty$	Não
(27, 39)	1	$\infty$	Não
(27, t)	2	2	Sim
(28, 38)	0	$\infty$	Não
(28, 39)	0	$\infty$	Não
(28, 40)	0	$\infty$	Não
(28, t)	1	2	Não
(29, t)	1	1	Sim
(30, t)	1	1	Sim
(31, t)	1	1	Sim
(32, t)	1	1	Sim
(33, t)	1	1	Sim
(34, t)	1	1	Sim
(37, t)	1	1	Sim
(38, t)	1	1	Sim
(39, t)	1	1	Sim
(40, t)	0	1	Não
(s, 1)	11	15	Não
(s, 2)	1	1	Sim
(s, 6)	12	14	Não
(s, 7)	4	5	Não
(s, 10)	1	1	Sim
(s, 13)	0	13	Não
(s, 17)	3	17	Não
(s, 23)	0	10	Não
(s, 24)	0	12	Não
(s, 25)	1	13	Não
(s, 26)	1	38	Não
(s, 35)	0	9	Não
(s, 36)	0	7	Não
(s, t)	34	$\infty$	Não

Baseando-nos na tabela anterior, onde obtemos os arcos saturados do grafo  $G'$ , conseguimos marcar os mesmos a vermelho, obtendo o seguinte grafo:



Através dos arcos saturados é-nos possível realizar o corte do grafo, definindo assim os conjuntos **S** e **T**:

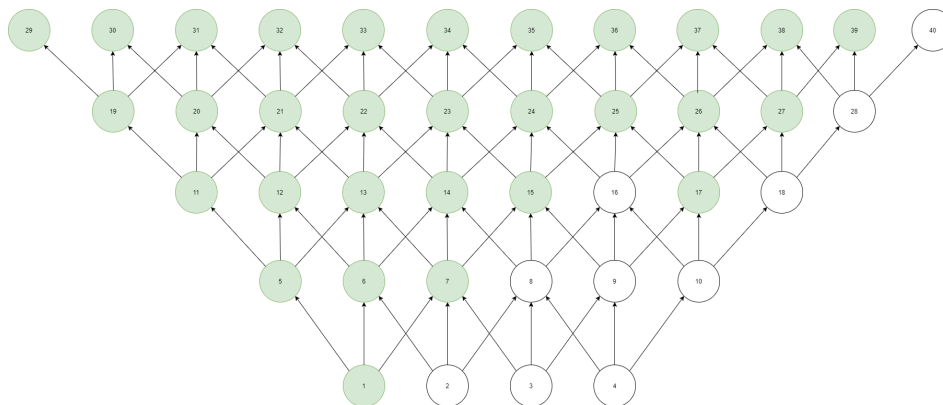


Logo, os conjuntos S e T são:  
 $S = \{s, 1, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39\}$   
 $T = \{t, 2, 3, 4, 8, 9, 10, 16, 18, 28, 40\}$

## 5 Interpretação da solução ótima

Através do conjunto S, conseguimos determinar quais os blocos a escavar no grafo G, representados a verde:

Agora que sabemos quais os bloco a escavar temos dados suficientes para calcular o **lucro**, o



**proveito** (valor estimado de minério extraído) e o **custo total** da operação de escavação da mina, a seguir discriminado.

[illegible]

Os vértices que temos que extrair para maximizar o lucro e obter a solução ótima são :  
 $\{1,5,6,7,11,12,13,14,15,17,19,20,21,22,23,24,25,26,27,29,30,31,32,33,34,35,36,37,38,39\}$   
 Obtém-se um proveito de **185** *U.M.*, um custo total de operação de **64** *U.M* e, assim, obtém-se um lucro de **121**.

## 6 Validação do Modelo

O problema de fecho máximo de um grafo pode ser formulado como um problema de programação linear com variáveis binárias. Seja  $x_i$  uma variável binária que tome 1 como valor se o vértice pertencer ao fecho do grafo e 0 caso contrário. Logo, pretende-se maximizar

$$\sum_{i \in V} c_i x_i$$

onde  $c_i$  é o lucro associado ao vértice  $i$ . Para além do mais temos as seguintes restrições, já anteriormente enunciadas:

$$x_i - x_j \leq 0, \forall (i, j) \in A$$
$$x_j \text{ bin}, \forall j \in V$$

É de notar que estas restrições lógicas se traduzem da seguinte forma:  
Caso o vértice  $i$  pertença ao fecho de um grafo então o vértice  $j$  também irá pertencer.

### 6.1 Input

Ao adaptar esta função objetivo e estas restrições ao grafo  $G$ , obtemos o seguinte ficheiro input:

```
/* Objective function */
max: 15x1 + 1x2 -5x3 -4x4
      -1x5 +14x6 + 5x7 - 4x8 - 4x9 + 1x10
      - 3x11 - 3x12 + 13x13 - 3x14 - 3x15 - 3x16 + 17x17 - 3x18
      - 2x19 - 2x20 - 2x21 - 2x22 + 10x23 + 12x24 + 13x25 + 38x26 - 2x27 - 2x28
      - 1x29 - 1x30 - 1x31 - 1x32 - 1x33 - 1x34 + 9x35 + 7x36 - 1x37 - 1x38 - 1x39 - 1x40;

r11: x1 <= x5;
r12: x1 <= x6;
r13: x1 <= x7;

r21: x2 <= x6;
r22: x2 <= x7;
r23: x2 <= x8;

r31: x3 <= x7;
r32: x3 <= x8;
r33: x3 <= x9;

r41: x4 <= x8;
r42: x4 <= x9;
r43: x4 <= x10;

r51: x5 <= x11;
```

```

r52: x5 <= x12;
r53: x5 <= x13;

r61: x6 <= x12;
r62: x6 <= x13;
r63: x6 <= x14;

r71: x7 <= x13;
r72: x7 <= x14;
r73: x7 <= x15;

r81: x8 <= x14;
r82: x8 <= x15;
r83: x8 <= x16;

r91: x9 <= x15;
r92: x9 <= x16;
r93: x9 <= x17;

r101: x10 <= x16;
r102: x10 <= x17;
r103: x10 <= x18;

r111: x11 <= x19;
r112: x11 <= x20;
r113: x11 <= x21;

r121: x12 <= x20;
r122: x12 <= x21;
r123: x12 <= x22;

r131: x13 <= x21;
r132: x13 <= x22;
r133: x13 <= x23;

r141: x14 <= x22;
r142: x14 <= x23;
r143: x14 <= x24;

r151: x15 <= x23;
r152: x15 <= x24;
r153: x15 <= x25;

r161: x16 <= x24;
r162: x16 <= x25;
r163: x16 <= x26;

```

r171: x17 <= x25;  
r172: x17 <= x26;  
r173: x17 <= x27;

r181: x18 <= x26;  
r182: x18 <= x27;  
r183: x18 <= x28;

r191: x19 <= x29;  
r192: x19 <= x30;  
r193: x19 <= x31;

r201: x20 <= x30;  
r202: x20 <= x31;  
r203: x20 <= x32;

r211: x21 <= x31;  
r212: x21 <= x32;  
r213: x21 <= x33;

r221: x22 <= x32;  
r222: x22 <= x33;  
r223: x22 <= x34;

r231: x23 <= x33;  
r232: x23 <= x34;  
r233: x23 <= x35;

r241: x24 <= x34;  
r242: x24 <= x35;  
r243: x24 <= x36;

r251: x25 <= x35;  
r252: x25 <= x36;  
r253: x25 <= x37;

r261: x26 <= x36;  
r262: x26 <= x37;  
r263: x26 <= x38;

r271: x27 <= x37;  
r272: x27 <= x38;  
r273: x27 <= x39;

r291: x28 <= x38;

```

r292: x28 <= x39;
r293: x28 <= x40;
Bin
  x1, x2, x3, x4,
  x5, x6, x7, x8, x9, x10,
  x11, x12, x13, x14, x15, x16, x17, x18,
  x19, x20, x21, x22, x23, x24, x25, x26, x27, x28,
  x29, x30, x31, x32, x33, x34, x35, x36, x37, x38, x39, x40;

```

## 6.2 Output

Ao executar o ficheiro input obtemos o seguinte ficheiro output: Conseguimos então verificar

Variables	MILP ...	result ▼
	121	121
x1	1	1
x5	1	1
x6	1	1
x7	1	1
x11	1	1
x12	1	1
x13	1	1
x14	1	1
x15	1	1
x17	1	1
x19	1	1
x20	1	1
x21	1	1
x22	1	1
x23	1	1
x24	1	1
x25	1	1
x26	1	1
x27	1	1
x29	1	1
x30	1	1
x31	1	1
x32	1	1
x33	1	1
x34	1	1
x35	1	1
x36	1	1
x37	1	1
x38	1	1
x39	1	1
x2	0	0
x3	0	0
x4	0	0
x8	0	0
x9	0	0



que o valor da solução obtida e os vértices escavados são idênticos aos que obtemos, validando assim a nossa solução anterior.

## 7 Dificuldades

A elaboração do grafo que traduz este enunciado trouxe alguns problemas de organização. O número avultado de vértices tornou muito mais difícil a tarefa de representar o grafo a ele associado. Por esse motivo é que apresentamos uma tabela bastante detalhada que substitui parte do que seria suposto apresentar no grafo. Esta tarefa foi também difícil pois sendo um trabalho meticuloso exigiu que a mesma fosse revista mais que uma vez. Assim, achamos que o tempo "a mais" que sentimos que dedicamos a este projeto, foi mesmo consequência do elevado número de blocos a serem explorados na mina.

## 8 Conclusão

Concluindo, sentimos uma grande evolução na nossa percepção do que é Investigação Operacional ao depositarmos bastante tempo numa elaboração clara e sucinta deste relatório. Seguimos os conselhos dados pelo docente sempre que entramos em contacto com o mesmo, tanto por *e-mail* como em sessões de dúvidas. Procuramos ser objetivos, utilizando linguagem coerente e simplista enquanto tentávamos ser corretos ao expressarmos linguagem matemática associada ao problema que nos propusemos a resolver.