Бозе-Айнщайн разпределение

Цветелина Иванова Иванова
Вероятности и статистика на R
гл. ас. д-р Асен Чорбаджиев

МП - Вероятности и Статистика
Факултет по Математика и Информатика
Софийски Университет "Св. Климент Охридски"

Постановка на задачата

Целта е да покажем стъпките в извода на Бозе-Айнщайн разпределението, а с помощта на R да начертаем графиката му и да можем да пресмятаме вероятността за попадане в конкретно ниво.

И фермионите, и бозоните, се считат за неразличими частици. Фермионите се подчиняват на статистиката на Ферми-Дирак, а бозоните - на статистиката на Бозе-Айнщайн (в зависимост от стойността на spin-а). При високи температури или при ниска концентрация, разпределенията на Ферми-Дирак и на Бозе-Айнщайн могат да бъдат сведени до разпределението на Максуел-Болцман.

Всъщност задачата за разпределението на неразличими частици по енергетични нива може да се сведе до задачата за разпределяне на $k > n$ топчета в n клетки. Задачата за разпределението на обекти в клетки се нарича метод на клетките на Болцман. Подходът е аналогичен и за фермионите, и за бозоните, но трябва да отчетем, че при фермионите е в сила забраната на Паули.

Стъпки в извода на разпределението

Нека имаме k на брой частици, които трябва да се разпределят в n на брой енергетични състояния. Тогава $\frac{(n-1+k)!}{(n-1)!k!}$ е броят комбинации и наредби.

Бозе-Айнщайн и Ферми-Дирак разпределенията се извеждат като следствия от максимума на ентропията при затворена система с фиксирана енергия и фиксиран брой частици.

Разглеждаме функцията:

$$\Delta\Gamma(k,n) = \frac{(n-1+k)!}{(n-1)!k!} = e^S$$

$$S = \ln \Delta\Gamma(k,n) = \ln \frac{(n-1+k)!}{(n-1)!k!},$$

където S е ентропия на затворената система.
Приемаме, че $n, k >> 1$, както и че бозоните взаимодействат (пренебрежимо) слабо помежду си. Средният брой частици (бозони) в клетка (енергийно ниво) се нарича ниво на запълване и се означава с $\overline{n} = \frac{k}{n}$.
Използваме формулата на Стирлинг: $\ln N! = N(\ln N - 1)$
Така се получава израз за ентропията S:

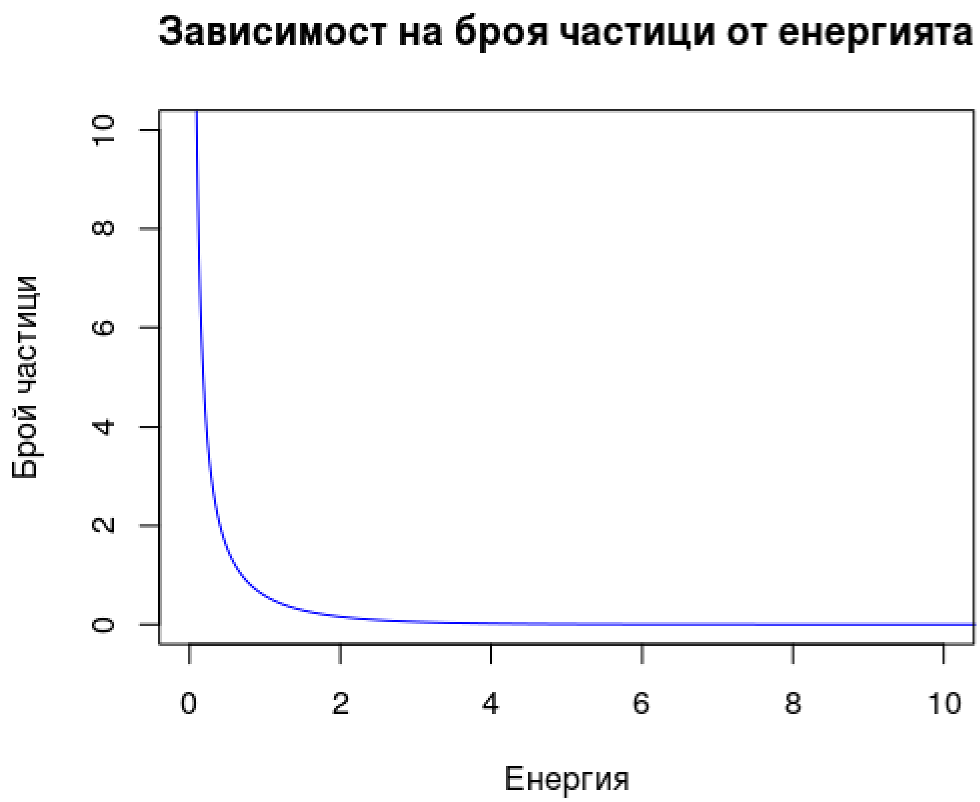
$$S = \ln \Delta\Gamma(k,n) = \sum_i n_i[(\overline{n}_i + 1)\ln(\overline{n}_i + 1) - \overline{n}_i \ln \overline{n}_i]$$

Енергията на системата е $E = \sum_i \epsilon_i n_i = const$. Пълният брой частици е $k = \sum_i n_i = const$. За затворени системи, каквато е разглежданата от нас, ентропията нараства. Това означава, че една от основните стъпки в извода на разпределението на Бозе-Айнщайн е именно анулирането на първата производна на функцията на ентропията по броя частици - така се получава изразът за n_i, а именно разпределението на Бозе-Айнщайн:

$$n_p = \frac{1}{e^{(\epsilon_p - \mu)/T} - 1}$$

Резултати в R

С помощта на R можем да генерираме случайни величини, за които после да начертаем графиките, които ни интересуват. Графиката на зависимостта на броя частици от енергията има следния вид:



В следващото изображение се вижда, че трите разпределения - Бозе-Айнщайн, геометричното и експоненциалното - имат сходно поведение в някои случаи. Вероятностното разпределение на Бозе–Айнщайн е изобразено със син цвят, геометричното - с червен, а експоненциалното - със зелен.