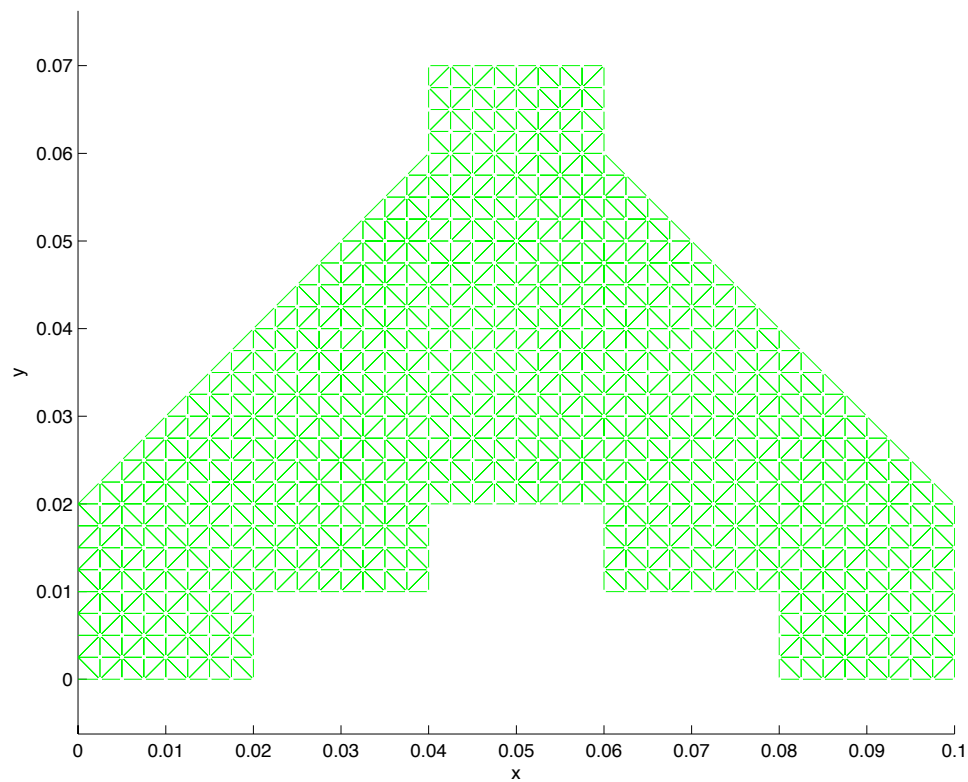


# Projekt i Finita Elementmetoden

Fredrik Olsen  
Sebastian Fors

May 28, 2010



## Abstract

In this report we use MATLAB and CALFEM to study the temperature distribution over time on a plastic mold injection tool. We also calculate the plane stress caused by external forces as well as thermal stress for the tool.

## Contents

<b>1</b>	<b>Inledning</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Problembeskrivning</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Teori</b>	<b>3</b>
3.1	Värmeledning . . . . .	3
3.2	Spänning . . . . .	4
<b>4</b>	<b>FE Formulering</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>Lösning</b>	<b>6</b>
5.1	Värmeledning . . . . .	7
5.2	Spänning . . . . .	9
<b>6</b>	<b>Sammanfattning &amp; Diskussion</b>	<b>10</b>
<b>7</b>	<b>Bilagor</b>	<b>11</b>
7.1	Figurer . . . . .	11
7.2	Programkod . . . . .	15

# 1 Inledning

Finita elementmetoden (FEM) använder vi för att kunna lösa komplicerade partiella differentialekvationer. Metoden går ut på att vi diskretiserar det område vi vill lösa ekvationerna i till ett antal mindre områden, i dessa mindre områden approximerar vi sedan funktionerna i fråga med funktioner vi enkelt kan lösa differentialekvationerna för. I vårt fall skall vi titta på ett tvådimensionellt område som representerar ett snitt av ett verktyg för formsprutning av plast. Vi kommer att diskretisera detta område i ett antal triangulära subdomäner; element. I dessa elementen kommer vi att sedan göra en linjär approximation av vår sökta funktion. Genom att minska elementens storlek närmar vi oss asymptotiskt den korrekta lösningen för differentialekvationen.

## 2 Problembeskrivning

Vi vill lösa två problem. Det första problemet är att plasten som injiceras i verktyget är varm, så vi har en värmeledning från plasten in i verktyget. Hela processen går så snabbt (ofta flera injektioner per sekund) att vi kan approximerar detta med ett konstant värmefflöde in i verktyget från plasten. Vi vill då ta reda på hur värmen sprider sig i verktyget över tiden. Det andra problemet är att det ligger ett tryck på verktyget ovanifrån och plasten utövar ett tryck på verktyget inifrån, vi vill se hur detta mekaniska tryck påverkar spänningarna i verktyget. Eftersom värmen expanderar materialet i verktyget kommer värmen också ge upphov till termiska spänningar, vi vill titta på de mekaniska spänningarna och termiska spänningarna var för sig såväl som den kombinerade spänningen i verktyget.

Formsprutningsverktyget ser ut som i Figur 1. Dimensionerna i figuren är givna i millimeter. Bilden föreställer alltså ett tvärsnitt av verktyget och vi tänker oss att verktyget är så pass långt i z-led att vi kan konstruera problemet som ett 2D-problem. Vi har också en undersida av verktyget som är symmetrisk med x-axeln. Plasten befinner sig inuti hålrummet på undersidan och ovanpå läggs ett tryck för att verktyget inte skall läcka.

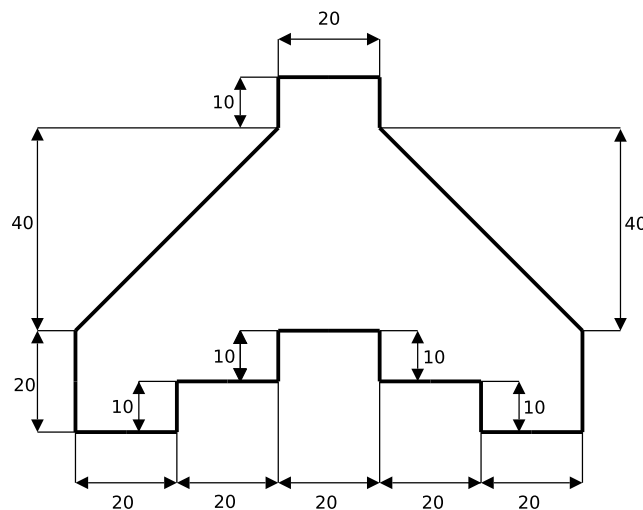


Figure 1: Dimensionerna och utseendet av formsprutningsverktyget.

Symmetrin ger upphov till att flödet på undersidan är noll. Den fasta strukturen på höger-sidan samt det som pressar på verktyget ovanifrån har en konstant temperatur  $T_g$  som ger upphov till randvillkoren att temperaturen i verktyget på dessa områden också är  $T_g$ . På

övriga sidor är verktyget exponerat för luften, så att värmeledning sker via konvektion där omgivande temperatur är  $T_\infty$ . Alla dessa villkor ger upphov till randvillkoren som vi kan se i Figur 2. Vi har dessutom två andra randvillkor som uppkommer av strukturen, hela verktyget är fastspänt i den fasta strukturen på högersidan så att i de noderna kommer alla förskjutningar vara noll. Eftersom vi har symmetri kommer alla noderna i symmetrisnittet inte att ha någon förskjutning i y-led.

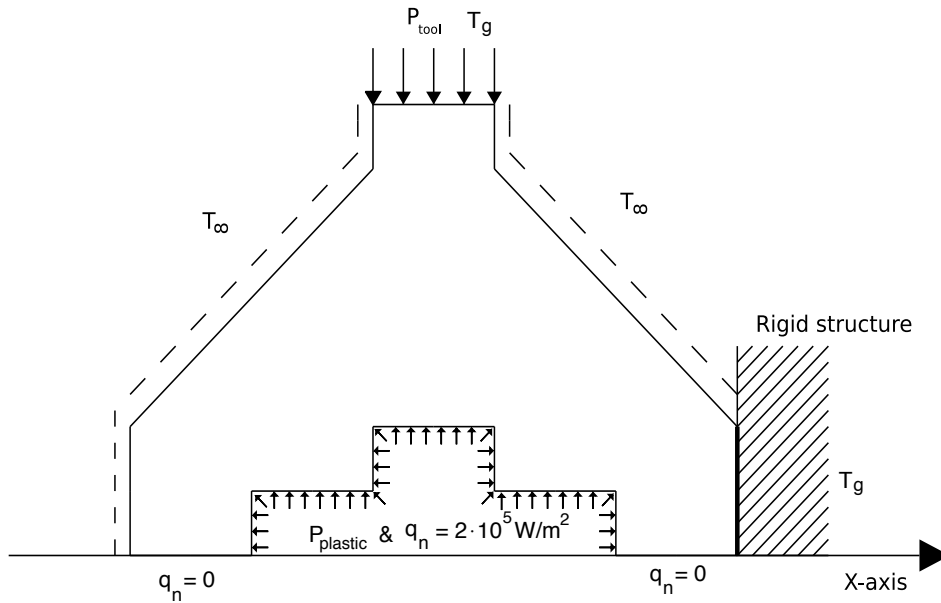


Figure 2: Randvillkoren som problemet ger upphov till.

Med detta har vi en fullständig beskrivning av geometrin och randvillkoren och vi kan därmed lösa de differentialekvationer som problemet beskrivs av och som vi nu ska gå igenom i teoriavsnittet.

### 3 Teori

För att kunna lösa problemet behöver vi egentligen lösa två problem; värmeledningsproblemet och spänningsproblemet. Det är två olika differentialekvationer som styr dessa två problemen och vi ska titta på dem separat här. Eftersom vi i spänningsproblemet skall titta på termiska spänningar måste vi dock lösa värmeledningsproblemet först eftersom vi måste se hur värmefördelningen ser ut.

#### 3.1 Värmeledning

Differentialekvationen som styr värmeledning uppkommer ifrån jämviktsvillkoret att värmen som "tillverkas" inne i kroppen  $Q$  måste vara samma som flödet av värmen ut ur kroppen  $q$ . Flödet  $q$  ges sedan av termiska konduktiviteten  $k$  och temperaturgradienten  $\nabla T$ . I det tvådimensionella fallet och med ett isotropiskt material övergår materialkonstanten  $k$  till en matris  $D$  där

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \quad (1)$$

så vi får alltså att

$$\mathbf{q} = -\mathbf{D}\nabla T. \quad (2)$$

När vi tittar på transient värmefflöde måste vi dock ta med någon form av tröghet i systemet också, den här trögheten uttrycks i form av värmekapacitivitet och densitet. Sammanlagt får vi alltså att differentialekvationen för transient värmefflöde är

$$c\rho\dot{T} + \operatorname{div}(\mathbf{q}) - Q = 0. \quad (3)$$

För att senare kunna skapa en FE formulering av detta problemet vill vi nu uttrycka denna ekvationen på svag form, vi multiplicerar alltså med en godtyckling viktsfunktion, integrerar över hela området som görs upp av verktyget och sedan använder Green-Gauss sats så att ekvationen utgörs av en gradient av temperaturen istället för två och så att randvillkoren faller ut som en egen term. Ekvationen på svag form blir alltså

$$\int_{\mathcal{L}} v \mathbf{q}^T \mathbf{n} d\mathcal{L} - \int_A (\nabla v)^T \mathbf{q} dA - \int_A v Q dA + \int_A v c \rho \dot{T} dA = 0 \quad (4)$$

I vårt fall med verktyget har vi enbart värmeförsörjning från plasten, det vill säga  $Q = 0$ . Den här kunskapen förenklar ekvationen lite grann och vi får slutligen

$$\int_A (\nabla v)^T \mathbf{q} dA - \int_A v c \rho \dot{T} dA = \int_{\mathcal{L}} v \mathbf{q}^T \mathbf{n} d\mathcal{L}. \quad (5)$$

Med den svaga formen kan vi nu direkt införa våra approximationer i FE formuleringen och få ut det systemet av matriser som måste lösas för att lösa problemet.

### 3.2 Spänning

I vårt fall skall vi beräkna spänning i två dimensioner. Den starka formen av differentialekvationen som styr spänningarna är

$$\tilde{\nabla}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad (6)$$

där  $\tilde{\nabla}^T$  är definierad enligt

$$\tilde{\nabla}^T = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} & 0 & \frac{\delta}{\delta y} \\ 0 & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta x} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Detta är på samma sätt som i värmeledningsfallet en jämviktsekvation, där  $\mathbf{b}$  representerar de inre spänningarna. Vi försummar gravitationen i vårt fall och säger att de inre spänningarna är noll för att förenkla situationen.  $\boldsymbol{\sigma}$  består av tre parametrar i det tvådimensionella fallet, spänningar i x-led, spänningar i y-led och skjuvspänningar

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{xy} \end{bmatrix}^T \quad (8)$$

Spänningarna bestäms i sin tur av en konstitutiv lag precis som flödet bestämdes av temperaturen i ledningsfallet. För spänningarna gäller att

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\Delta T}) \quad (9)$$

där  $\mathbf{D}$  i detta i fallet är konstitutiv matris

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \quad (10)$$

och där  $\boldsymbol{\varepsilon}$  är totala töjningarna, bestämda av

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{xy} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{\delta u_x}{\delta x} & \frac{\delta u_y}{\delta y} & \frac{\delta u_x}{\delta y} + \frac{\delta u_y}{\delta x} \end{bmatrix}^T \quad (11)$$

där  $u_x$  och  $u_y$  är funktioner över förskjutningen i x-led samt förskjutningen i y-led. Därav har vi alltså i ovanstående konstitutiva lag att  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\Delta T}$  är töjningarna orsakade av temperaturförändringen. Eftersom materialet är isotropiskt och linjärt elastiskt vet vi att

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\Delta T} = \alpha \Delta T \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (12)$$

Överför vi nu den här ekvationen till svag form enligt samma procedur som för värmeledningsproblemet får vi alltså

$$\int_A \left( \tilde{\nabla} \mathbf{v} \right)^T \boldsymbol{\sigma} dA = \int_{\mathcal{L}} \mathbf{v}^T \mathbf{t} d\mathcal{L} \quad (13)$$

Där  $\mathbf{t}$  är randspänningsvektorn som verkar på randen  $\mathcal{L}$ . Vi har nu svaga formen för båda problemen och kan gå över till att göra våra approximationer och ställa upp FE formuleringen.

## 4 FE Formulering

Vi påminner nu om att vi skall använda triangulära element med en linjär approximation, det vill säga 3-nods element. För temperaturen blir då approximationen

$$T = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y. \quad (14)$$

När vi skall beräkna spänningarna bygger vi en approximation för förskjutningarna  $u_x$  och  $u_y$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y \\ \gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 y \end{bmatrix} \quad (15)$$

Vi uttrycker dessa approximationer på kort form som  $T = \mathbf{N} \mathbf{a}$  där  $\mathbf{a}$  i detta fallet  $a_1$  betecknar temperaturen i nod 1 osv.,  $\mathbf{N}$  är formfunktionerna för geometrin. Vi använder samma beteckningar för spänningarna,  $\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{a}$ , men där  $\mathbf{N}$  istället är en  $2n \times 2$  matris där  $n$  är antalet noder. Vi har i fallet för spänningarna att  $a_1$  är  $u_x$  för nod 1 samt  $a_2$  är  $u_y$  för nod 1 osv.

Genom att nu välja vår viktsfunktion i båda fallen enligt Galerkins metod får vi att  $v = \mathbf{N} \mathbf{c}$  i fallet för temperaturen och i fallet för spänningarna blir även  $v$  en vektor eftersom  $\mathbf{N}$  i det fallet är en matris.  $\mathbf{c}$  är alltså en godtycklig konstant vektor.

Med den här notationen kan vi nu skriva om de svaga formerna till FE formuleringar ( $\mathbf{c}$  kan vi "få bort" från ekvationen eftersom vi kan observera att om den är godtycklig och multiplicerad med våra ekvationer och allt skall vara noll, måste våra ekvationer också vara noll).

Eftersom vi har att  $\mathbf{q} = -\mathbf{D} \nabla T = -\mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{a}$ , där alltså  $\mathbf{B} = \nabla \mathbf{N}$  erhåller vi följande

$$\int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA \mathbf{a} + \int_A \mathbf{N}^T c \rho \mathbf{N} dA \dot{\mathbf{a}} = \int_{\mathcal{L}} \mathbf{N}^T q_n d\mathcal{L}. \quad (16)$$

Vi ser alltså att vi har ekvationssystemet  $\mathbf{K}\mathbf{a} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{f}$ . För att kunna lösa detta med en dator behöver vi diskretisera ekvationen i tiden också så att vi kan integrera numeriskt. Detta gör vi genom att utnyttja en implicit euler-backwards metod för integrationen, det vill säga

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}_{n+1} - \mathbf{a}_n}{\Delta t}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}_{n+1} \quad (17)$$

där alltså  $\mathbf{a}_{n+1}$  är värdena för “nästa steg” i tiden och  $\Delta t$  är storleken på tidssteget vi vill ta. Fördelen med att använda en implicit metod är att vi kan välja att ta hur stora tidssteg vi vill utan att lösningen blir instabil (men på bekostnad av noggrannhet).

För tidssteg  $n$  får alltså nu att

$$\left( \frac{\mathbf{C}}{\Delta t} + \mathbf{K} \right) \mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{f} + \frac{\mathbf{C}\mathbf{a}_n}{\Delta t} \quad (18)$$

där  $\mathbf{a}_0$  ges av ursprungsläget för verktyget, det vill säga då alla noder för våra element har temperaturen  $T_\infty$ .

För spänningarna blir formulering ännu enklare, vi vet att  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\Delta T})$  och  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{a}$  så vi får

$$\int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} (\mathbf{B}\mathbf{a} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\Delta T}) dA = \int_{\mathcal{L}} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\mathcal{L} \quad (19)$$

$$\int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA \mathbf{a} = \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^{\Delta T} dA + \int_{\mathcal{L}} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\mathcal{L}. \quad (20)$$

Vi har nu återfört även denna ekvationen på formen  $\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}$ . Nu återstår bara att räkna ut matriserna  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{C}$  och  $\mathbf{f}$  för båda fallen, detta kommer vi göra med MATLAB och CALFEM-paketet.

## 5 Lösning

Det första vi måste göra för att kunna lösa problemen är att definiera ränder och ange vilka villkor som gäller på dessa ränder i våra ekvationer. I Figur 3 är ränderna definierade.

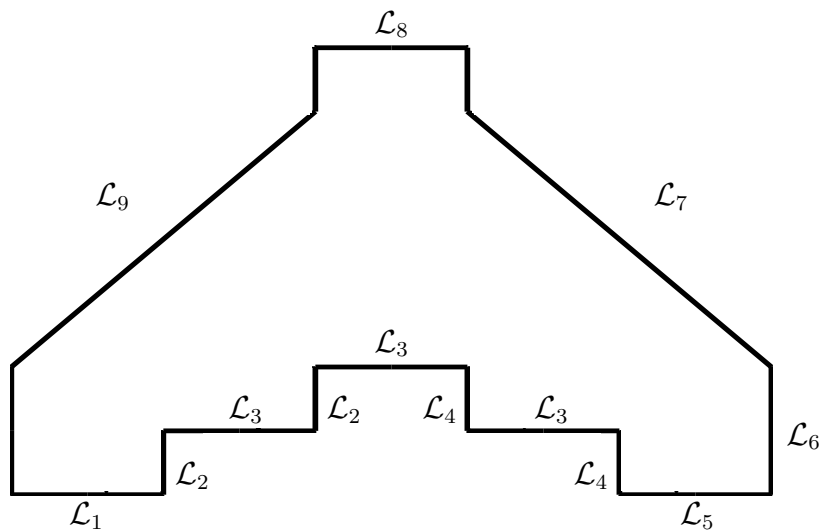


Figure 3: Namn på de olika ränderna.

Vi tittar återigen på värmeledningsproblemet och spänningsproblemet separat.

## 5.1 Värmeledning

För värmeledningsproblemet vet vi nu att vi har följande randvärden

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_5 : q_n &= 0 \\ \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_4 : q_n &= 2 \cdot 10^5 \text{W/m}^2 \\ \mathcal{L}_6, \mathcal{L}_8 : T &= T_g \\ \mathcal{L}_7, \mathcal{L}_9 : q_n &= \alpha_c (T - T_\infty)\end{aligned}\tag{21}$$

Vi ser att temperaturen dyker upp igen och vi måste approximera även denna. Detta tillsammans med att  $q_n$  på vissa ränder är 0 kommer modifiera vår FE formulering så att vi istället får

$$\mathbf{K} = \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA + \int_{\mathcal{L}_7, \mathcal{L}_9} \mathbf{N}^T \alpha_c \mathbf{N} d\mathcal{L}\tag{22}$$

och

$$\mathbf{f} = \int_{\mathcal{L}_7, \mathcal{L}_9} \mathbf{N}^T \alpha_c T_\infty d\mathcal{L} - \int_{\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_6, \mathcal{L}_8} \mathbf{N}^T q_n d\mathcal{L}\tag{23}$$

Nu har vi kommit så långt att vi kan börja implementera en lösare i MATLAB. Metoden vi kommer använda går ut på att bygga upp matriserna  $\mathbf{K}^e, \mathbf{C}^e$  och  $\mathbf{f}^e$ , alltså beräkna matriserna för varje element och sedan assemblera dessa till de globala matriserna  $\mathbf{K}, \mathbf{C}$  och  $\mathbf{f}$  med hjälp av en topologimatrix. I MATLAB ser det ur såhär

```
K=zeros(ndof);
C=zeros(ndof);
for i=1:nelm
    [Kc, Fec] = Kconv(ex(i,:),ey(i,:),alphac, Tinf);
    Ke=flw2te(ex(i,:),ey(i,:),1,D) + Kc;
    [K, f]=assem(edof(i,:),K,Ke,f,Fec);
    Ce=plantml(ex(i,:),ey(i,:),c*rho);
    C=assem(edof(i,:),C,Ce);
end
```

I koden använder vi fyra funktioner. `flw2te`, `plantml` och `assem` är CALFEM funktioner som automatiskt ger oss de elementmatriser vi vill ha givet koordinaterna för de tre noderna som gör upp elementet. `Kconv` är egen funktion vi skrivit själva som tar reda på om elementet har en rand längs med någon av konvektionsränderna, om så är fallet bygger den upp en korrekt elementmatris och elementvektor som sedan adderas till den sammanlagda elementmatrisen. `assem` funktionen assemblerar sedan dessa matriser och stoppar in rätt värden i den globala matrisen. Resultatet av denna kodsnuitt är att vi har korrekta matriser  $\mathbf{K}, \mathbf{C}$  och  $\mathbf{f}$  som alltid är konstanta för hela systemet.

När vi sedan skall lösa systemet med tidssteg bygger vi först upp en variabel `bc` som innehåller temperaturvärden för de noderna som ligger på ränderna  $\mathcal{L}_6$  och  $\mathcal{L}_8$ . Den här ger vi sedan till en CALFEM funktion som heter `solveq` som sedan löser systemet med hänsyn till dessa randvärden.



```

% Starting temperature
a0 = Tinf*ones(ndof,1);
% Solve equation system over time
dt = 10; % Time step
Kt = C/dt + K;
for i = 1:60/dt*5 % Run for 5 minutes
    ft = f + C*a0/dt;
    a=solveq(Kt,ft,bc);
    a0 = a;
end

```

Här kan vi se att vi tar tidssteg av storlek  $dt$  sekunder och tar sedan så många steg som behövs för att komma till 5 minuter. På vägen till 5 minuter kan vi naturligtvis spara undan bilder över situationen för vilken tid vi vill. Eftersom uppgiften går ut på att titta på temperaturdistributionen vid 1 minut och 5 minuter kan vi observera dessa distributioner i Figur 5 samt Figur 6 under Bilagor. Vi skulle naturligtvis också kunna animera temperaturfördelningen sekund för sekund för de första 5 minuterna för att få en mer fullständig bild av hur temperaturen sprider sig<sup>1</sup>.

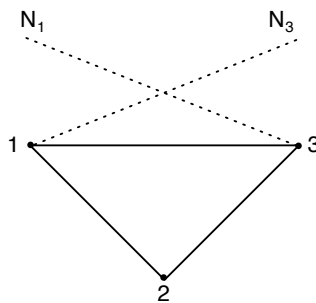


Figure 4: Ett typiskt 3-nodselement med punkterna 1 och 3 längs en konvektionsrand.

Problematiken finns tydligen i att beräkna konvektionsdelen av  $\mathbf{K}$ -matrisen;  $\int_{\mathcal{L}} \mathbf{N}^T \alpha_c \mathbf{N} d\mathcal{L}$ . Men om vi tittar på ett 3-nods element som i Figur 4 kan vi se att 3-nodselementet går att förenkla. På randen är ju nämligen (i figurens beteckningar)  $N_2 = 0$ . Vi kan överföra randen på ett endimensionellt problem i  $\eta$ -rymden istället. För att beräkna matrisen behöver vi alltså nu bara beräkna

$$\alpha_c \int_0^L \begin{bmatrix} N_1 \\ N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_3 \end{bmatrix} d\eta \quad (24)$$

som i det linjära endimensionella fallet bryts ner till

$$\frac{\alpha_c}{L^2} \int_0^L \begin{bmatrix} (L-\eta)^2 & \eta(L-\eta) \\ \eta(L-\eta) & \eta^2 \end{bmatrix} d\eta \quad (25)$$

För alla element som ligger på randen får vi alltså en matris

$$\mathbf{K}_{conv}^e = \frac{\alpha_c L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

som måste expanderas på korrekt sätt för elementet i fråga, när detta är gjort sker resten av arbetet automatiskt med hjälp av CALFEM paketet och `assem` funktionen.

<sup>1</sup>Se <http://tetrisrockstar.com/finite-element-project-part-1> för denna animation.

## 5.2 Spänning

För spänningsproblemet kommer följande randvärden att dyka upp istället

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_2 : \mathbf{t} &= \begin{bmatrix} -P_{plastic} & 0 \end{bmatrix}^T \\
 \mathcal{L}_3 : \mathbf{t} &= \begin{bmatrix} 0 & P_{plastic} \end{bmatrix}^T \\
 \mathcal{L}_4 : \mathbf{t} &= \begin{bmatrix} P_{plastic} & 0 \end{bmatrix}^T \\
 \mathcal{L}_8 : \mathbf{t} &= \begin{bmatrix} 0 & -P_{tool} \end{bmatrix}^T \\
 \mathcal{L}_6 : \mathbf{u} &= \mathbf{0} \\
 \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_5 : u_y &= 0 \\
 \mathcal{L}_7, \mathcal{L}_9 : \mathbf{t} &= \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{27}$$

Alltså får vi att

$$\mathbf{K} = \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA \tag{28}$$

och denna matris är återigen konstant för alla element och ges direkt av `plante` funktionen i CALFEM. Vår  $\mathbf{f}$ -vektor blir lite mer komplicerad

$$\mathbf{f} = \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon}^{\Delta T} dA + \int_{\mathcal{L}} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\mathcal{L} \tag{29}$$

Som tur är kan vi beräkna den första termen med `plantf` funktionen i CALFEM om vi känner  $\mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon}^{\Delta T}$ , vilket vi gör

$$\mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon}^{\Delta T} = \frac{\alpha E \Delta T}{1 - 2\nu} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{30}$$

Den andra termen måste vi räkna ut för hand, men vi kan utnyttja samma trick som för värmeledningsproblemet och titta på problemet i en dimension för de elementränder som ligger på  $\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_4, \mathcal{L}_8$  ränderna; annars sätter vi den bara till 0. Vi gör detta med funktionen `boundaryforce` som plockar ut de element som ligger på randen och bygger upp en korrekt  $\mathbf{f}^e$ -vektor.

När vi ska beräkna spänningssituationen kommer vi alltså få följande kod.

```

K=zeros(2*ndof);
f=zeros(2*ndof,1);
for i=1:nelm
    Ke=plante(ex(i,:),ey(i,:),[1 1],Dstress);
    % Take the elemental average temperature change as deltaT
    deltaT=(a(edof(i,2))-Tinf+a(edof(i,3))-Tinf+a(edof(i,4))-Tinf)/3;
    sigmaT=alpha*E*deltaT/(1-2*ny)*[1 1 0];
    % Calculate the combined mechanical and thermal stresses
    fe=boundaryforce(ex(i,:),ey(i,:),Ptool,Pplastic);
    fe=fe + plantf(ex(i,:),ey(i,:),[1 1],sigmaT)';
    [K, f]=assem(edof2(i,:),K,Ke,f,fe);
end

```

Eftersom vi nu har två grader av frihet i varje nod behöver vi expandera vår topologimatrix `edof` till `edof2` så att den tar det i betraktelse. Vi går sedan igenom varje element precis som

innan. Vi använder `plante` för att beräkna vår  $\mathbf{K}$ -matris. Vi plockar ut medeltemperaturen för elementet och drar bort  $T_\infty$  för att få elementets temperaturförändring när vi beräknar de termiska spänningarna. Slutligen assemblerar vi hela systemet innan vi löser det med `solveq`.

När vi nu löst systemet behöver vi ta reda på spänningarna. Som tur är finns det en CALFEM funktion för att göra detta som heter `plants` som tar förskjutningarna för elementet som argument. Vi vet sedan att den sammanlagda spänningen är den vi får ut från `plants` minus de termiska spänningarna ( $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}^{\Delta T}$ ). När vi känner spänningarna kan vi sedan direkt beräkna effektiva spänningen enligt von Mises.

```
Seff_el = zeros(nelm,1);
for i=1:nelm
    nval=edof2(i,2:end);
    xcoords = coords(edof(i,2:end),1);
    ycoords = coords(edof(i,2:end),2);

    sigma=plants(xcoords',ycoords',[1 1], Dstress, u(nval)');
    %sigma = D*eps-D*eps0
    deltaT=(a(edof(i,2))-Tinf+a(edof(i,3))-Tinf+a(edof(i,4))-Tinf)/3;
    sigma0=alpha*E*deltaT/(1-2*ny)*[1 1 0];
    sigma=sigma-sigma0;
    Seff_el(i)=sqrt(sigma(1)^2+sigma(2)^2+3*sigma(3)^2-sigma(1)*sigma(2));
end
```

När vi har effektiva spänningen för elementet kan vi sedan extrapolera denna till noderna och plotta upp resultatet. När vi gör detta kan vi, genom att sätta  $P_{tool}$ ,  $P_{plastic}$  eller termiska expansionskoefficienten  $\alpha$  till 0, få ut spänningarna skapade av kraften på verktyget, kraften av plasten eller de termiska spänningarna för sig. När vi tittar på spänningarna skapade av bara  $P_{tool}$  blir resultatet som i Figur 7, när vi tittar på spänningarna från bara plasten blir det som i Figur 8 och när vi tittar på fallet för bara termiska spänningar blir det som i Figur 9. Vi kan också välja att titta på det mekaniska sammanlagt, som i Figur 10 eller alla spänningar sammanlagt som i Figur 11. Vi har i dessa bilder använt ett nät med elementbredd på 2.5mm, 1216 element totalt.

## 6 Sammanfattning & Diskussion

När vi studerade temperaturdistributionen över tiden ser vi tydligt hur temperaturen sprider sig från plasten in i verktyget, eftersom högersidan hålls i en konstant temperatur kan vi se hur värmen drifftar till vänster sida för att kunna spridas ut ur verktyget via konvektion där, det kan vara viktigt att tänka på hur det påverkar spänningssituationen när man tillverkar någonting och isolerar vissa delar.

En annan sak vi kunde observera i temperaturfallet var att när vi löste problemet för att hitta den stationära lösningen fann vi att den var i princip identisk med lösningen som erhöles för 5 minuter, vi kunde även observera detta i animeringen av temperaturutvecklingen. Vi vet alltså att efter ungefär 5 minuters användande kommer vi få så höga termiska spänningar som möjligt. För att kunna göra modellen mer realistisk skulle man behöva ta variationerna i temperatur mellan formsprutningarna i betraktelse.

När vi tittar på spänningssituationen finner vi att hörnen och de inre kanterna påverkas mest i verktyget. Om möjligt vill man nog runda ut hörn för att minska spänningarna där. Vi finner också att den termiska spänningen spelar en stor roll i vänster sida, om möjligt vill man

designa verktyget så att dessa spänningar minimeras. Den inspända högersidan ser vi har en väldigt liten spänningspåverkan, så vi kan dra slutsatsen att rörliga delar kommer att få högst spänningspåverkan, förutsatt att det inte sker någon rotation, i vilket fall vi skulle få väldigt höga spänningar på de infästa platserna.

Slutligen kan vi säga att när man väl har överfört den starka formen av en differentialekvation till svag form och gjort en FE formulering är det ganska “straight-forward” att implementera en lösning i programvara så som MATLAB tack vare kraftfulla FEM-analys paket som CALFEM. Har man förstått matematiken och motivationen bakom problemen behövs ingen stjärnprogrammerare för att implementera en enkel numerisk lösning som går att få en generell uppfattning av situationen från.

## 7 Bilagor

### 7.1 Figurer

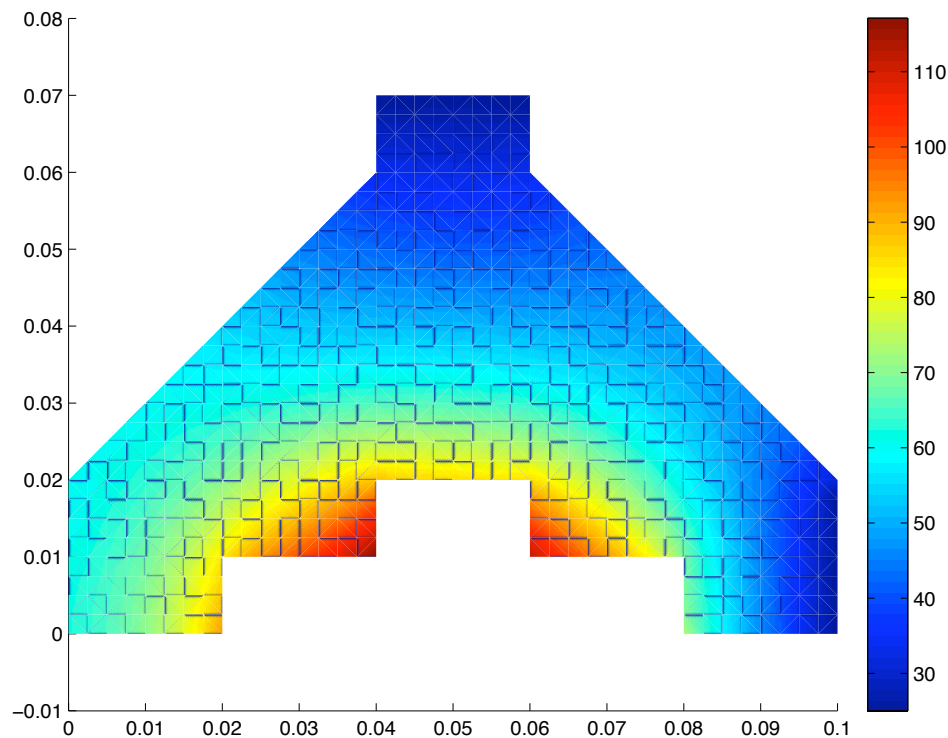


Figure 5: Temperaturfördelning i verktyget efter 1 minut.

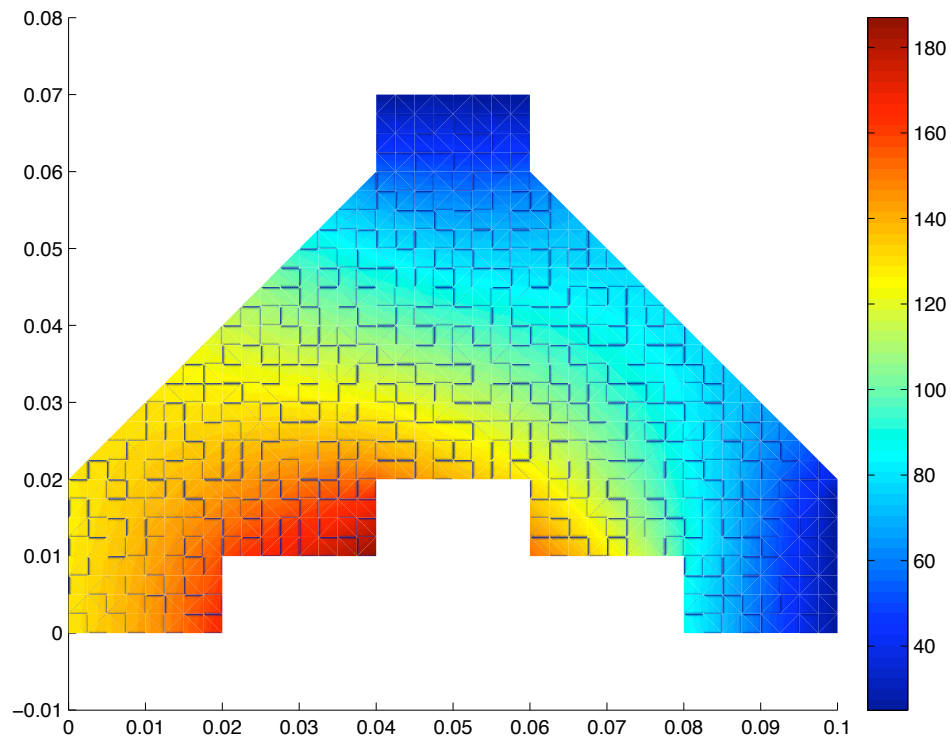


Figure 6: Temperaturfördelningen i verktyget efter 5 minuter.

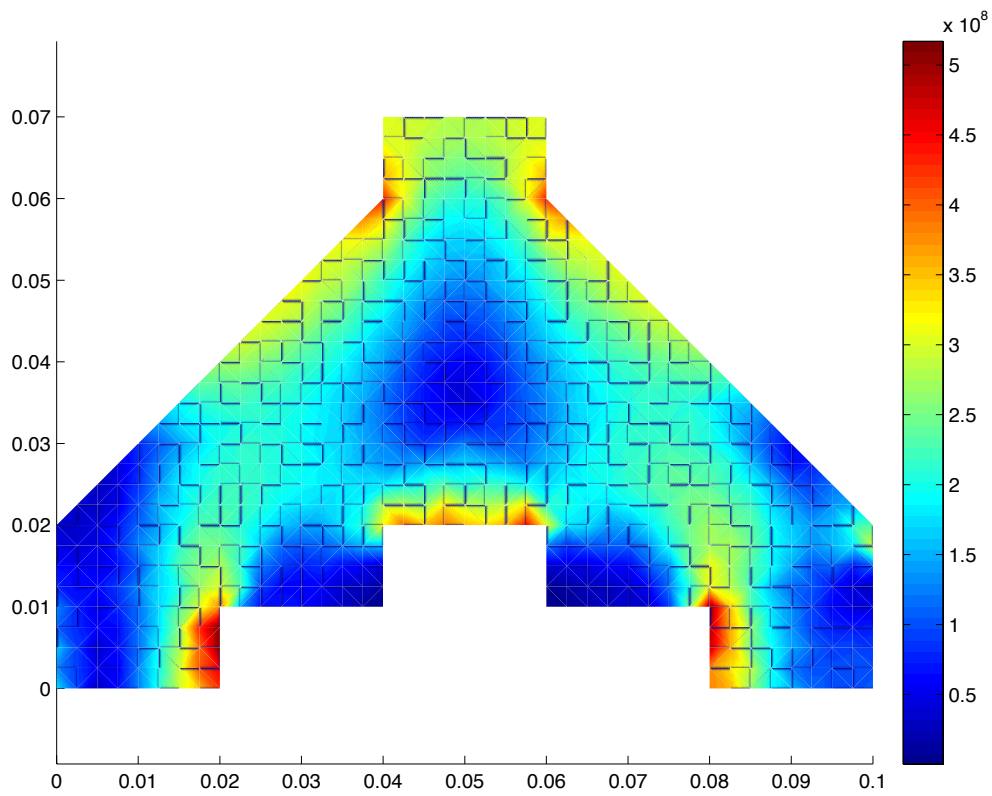


Figure 7: Spänningarna orsakade av kraften  $P_{tool}$ .

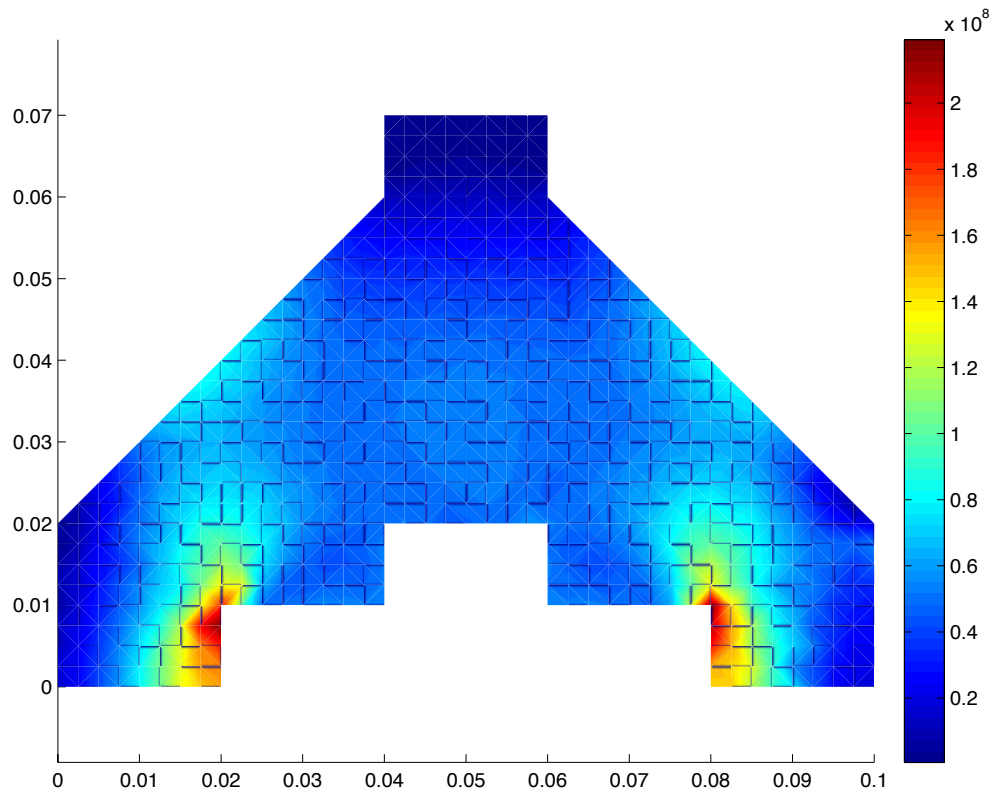


Figure 8: Spänningarna orsakade av kraften  $P_{plastic}$ .

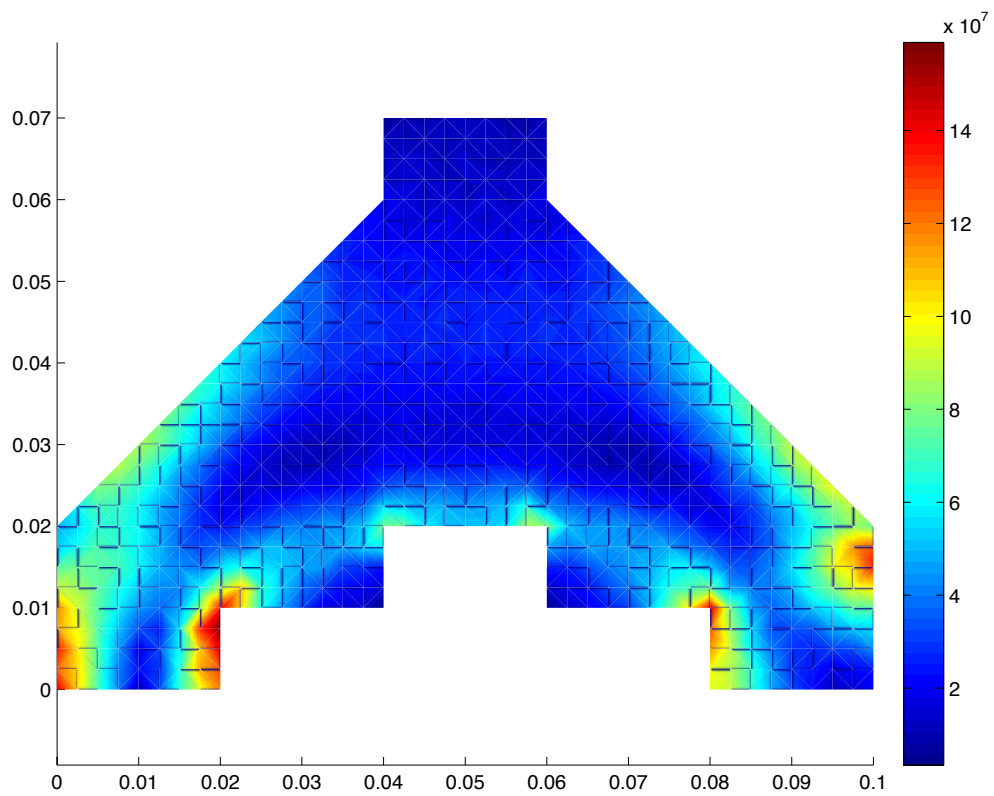


Figure 9: Spänningarna orsakade av den termiska expansionen.

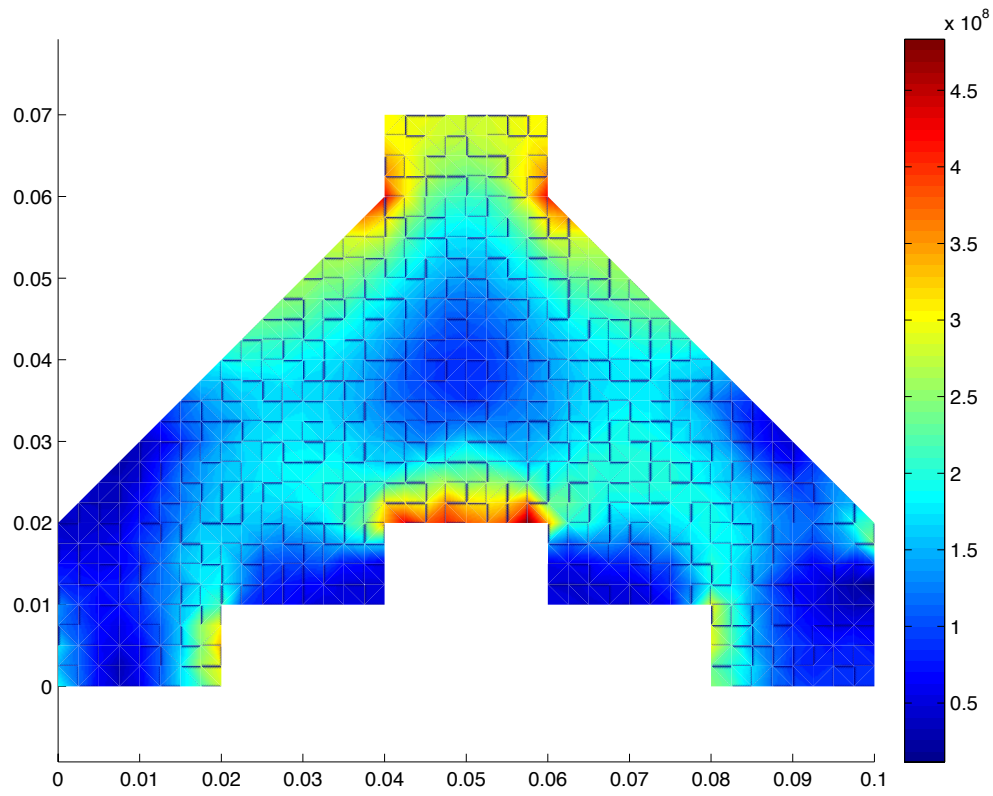


Figure 10: Spänningarna orsakade av alla de mekaniska krafterna.

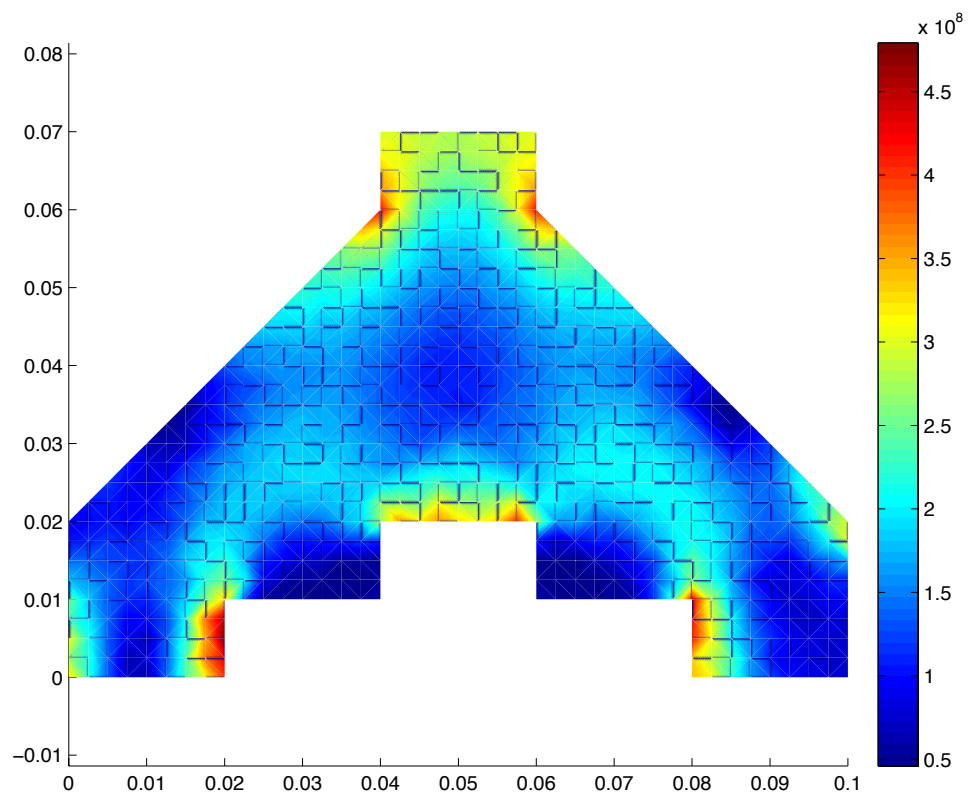


Figure 11: Totala spänningspåverkan för verktyget.

## 7.2 Programkod

Borttagen ur hänsyn till föreläsaren.