In [200…
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import *
from matplotlib.patches import *
import scipy.integrate.quadpack
import math
import matplotlib as mpl
import prettytable as pt
```

Вариант 3 Биржевые котировки

Кумирова, Харлунин, М32021

Одним из наиболее важных показателей для анализа поведения биржи явдяется минимальная цена акции за день. Этот показатель рассчитывается на различных периодах времени наравне с максимальной ценой акции за период, цене на начало и конец рассматриваемого периода, а также объёмом продаж. Все вместе эти показатели образуют знакомый многим инструмент - японские свечи. Предположим, что аналитик разработал магический алгоритм, предсказывающий поведение акции. Результатом работы алгоритма является участок функции, который отражает движение котировок на период следующей "свечи":

$$y = \sin(x) - \ln(x^2) - 1$$

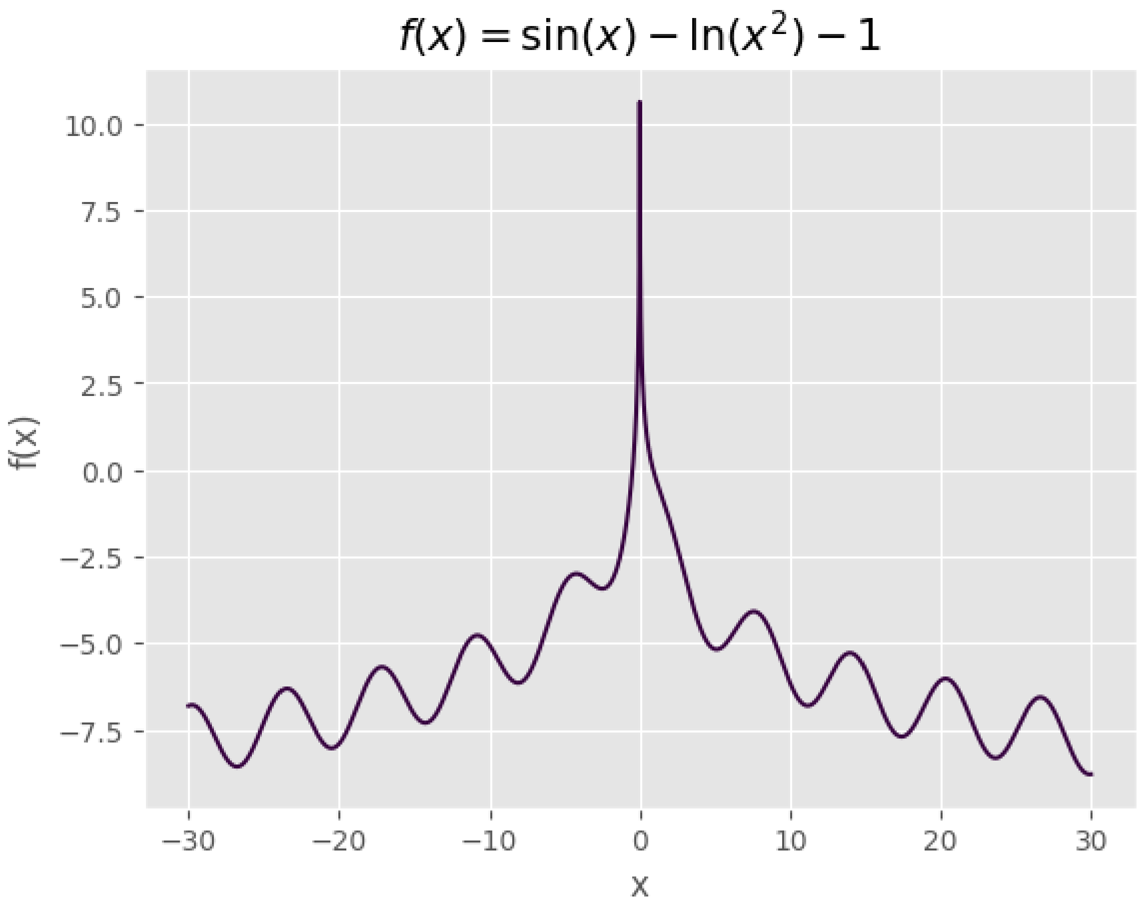
По данному предсказанию определите момент времени (в условных единицах), в который вы могли бы совершить покупку акций по минимальной цене.

In [201…
```python
mpl.style.use(['ggplot'])
```

In [201…
```python
f = lambda x_: np.sin(x_) - np.log(x_**2) - 1
x = np.linspace(-30, 30, 10**4)
y = f(x)
```

In [201…

```
plt.title("$f(x) = \\sin(x) - \\ln(x^2) - 1$", fontsize=15)
plt.plot(x, y, color='xkcd:deep purple')
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("f(x)")
plt.grid(True)
plt.show()
```



Функцию $f(x)$ называют **унимодальной** на отрезке $[a, b]$, если существует такая точка $x_* \in [a, b]$, что функция $f(x)$ в полуинтервале $[a, x_*)$ убывает, а в полуинтервале $(x_*, b]$ возрастает

Достаточное условие унимодальности:

если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и $f'' > 0$ в любой точке этого отрезка, то данная функция является унимодальной на отрезке $[a, b]$

Необходимое условие унимодальности:

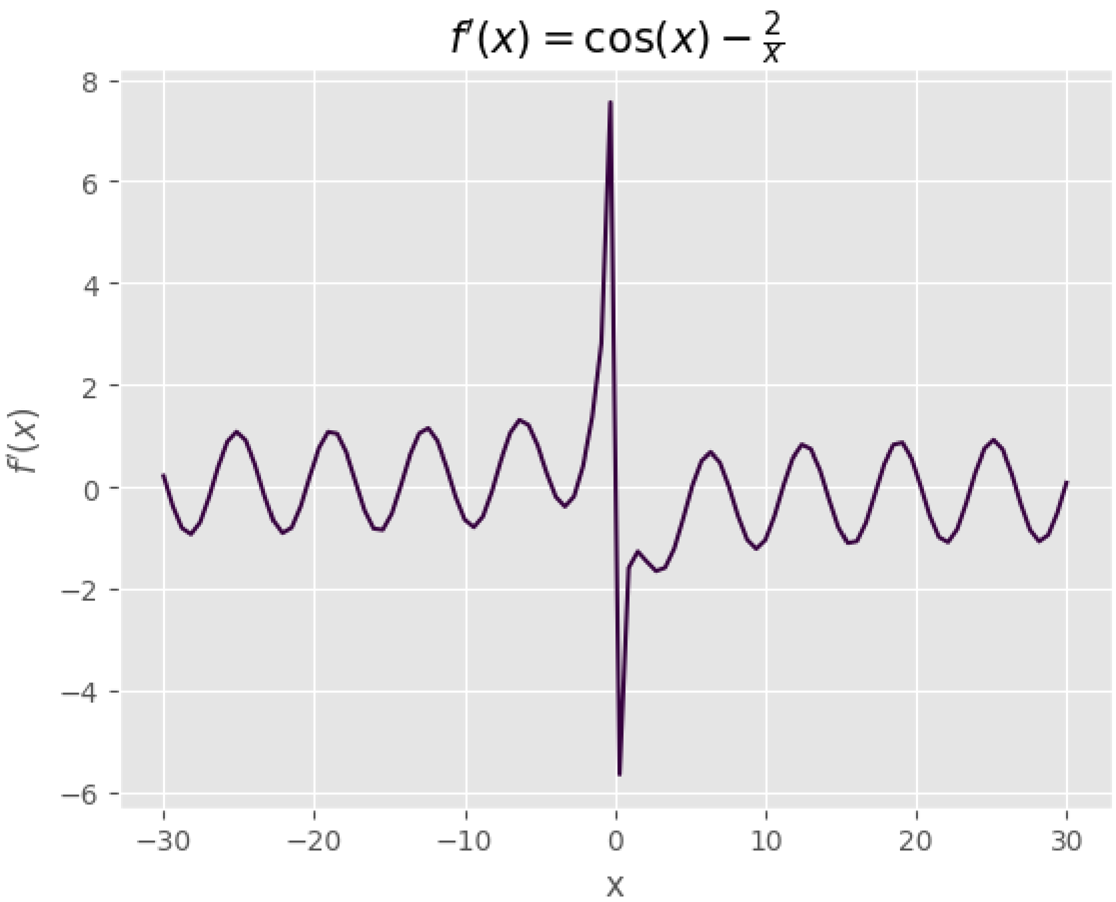
если первая производная функции f' неубывает на отрезке $[a, b]$, то функция $y = f(x)$ является унимодальной на отрезке $[a, b]$

Для того, чтобы определить интервал, на котором исходная функция является унимодальной, найдём точки перегиба. Для этого вычислим, в каких точках вторая производная функции равна 0:

Проверим НУ унимодальности на интервале $[0, 7.587]$. Для этого также найдём точки перегиба и убедимся, что функция на рассматриваемом интервале неубывает.

In [201…
```
f_prime = lambda x_: np.cos(x_) - 2 / x_
x = np.linspace(-30, 30, 10**2)
y_prime = f_prime(x)
```

In [201…
```
plt.title("$f^{\prime}(x) = \\cos(x) - \\frac{2}{x}$", fontsize=15)
plt.plot(x, y_prime, color='xkcd:deep purple')
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("$f^{\prime}(x)$")
plt.grid(True)
plt.show()
```



Видим, что для интервала $[0, 7.587]$ необходимое условие унимодальности не выполняется: точка $(6.333, 0.683)$ является точкой перегиба.

$5.114 < 6.333 < 7.587$, поэтому интервалом, на котором исходная функция унимодальна, будет полуинтервал $(0, 6.333]$, т.к. функция не определена в нуле

Алгоритмы одномерной минимизации функции без производной

Метод дихотомии

Данный итеративный метод направлен на сужение интервала неопределенности $[a_i, b_i]$. пусть ε - желаемая точность, с которой мы хотим найти минимум, тогда $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ - величина отступа от середины $\frac{a_i+b_i}{2}$

Во время каждой итерации значение функции вычисляется два раза: $f(x_1)$ и $f(x_2)$, где $x_1 = \frac{a_i+b_i}{2} - \delta$, $x_2 = \frac{a_i+b_i}{2} + \delta$

т.к. $|a_{i+1}b_{i+1}| \approx \frac{|a_ib_i|}{2}$, и после выполнения n итераций $|a_nb_n| \approx \frac{|a_0b_0|}{2^n}$ то для достижения точности ε потребуется $\frac{\ln\left(\frac{b_0-a_0}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)}$ итераций

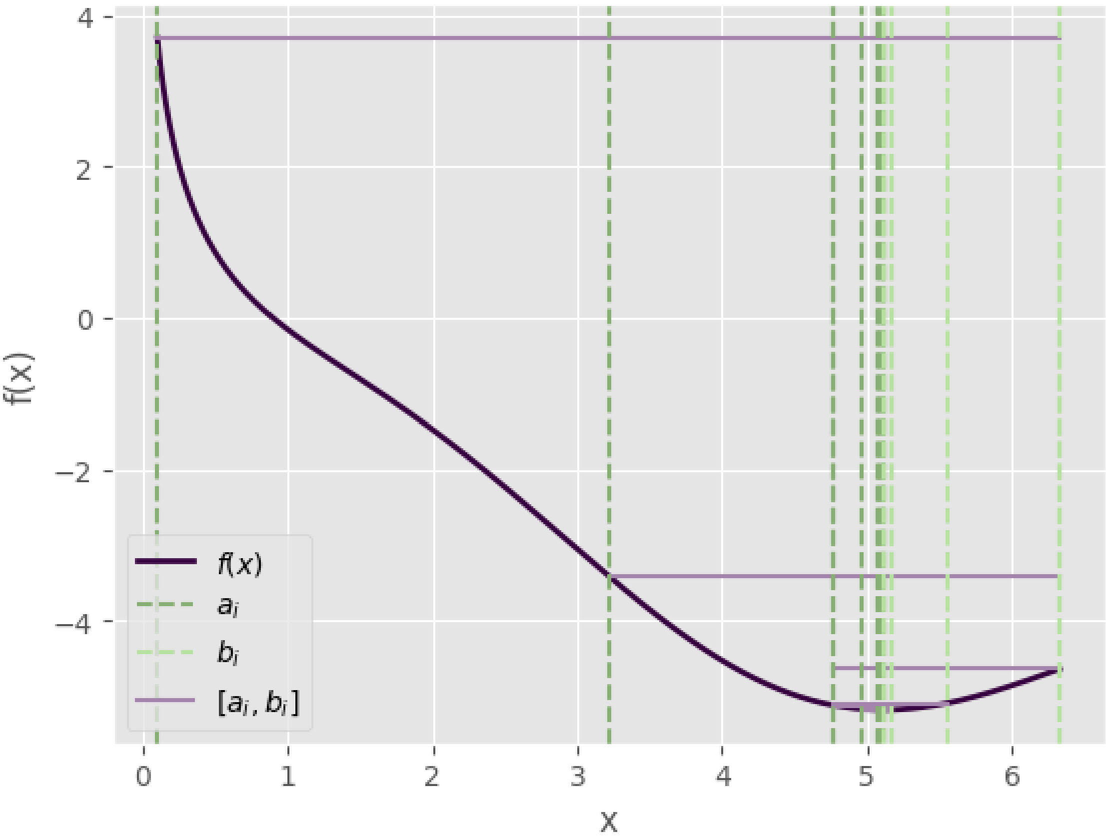
In [201…

```
def dichotomy(func, a, b, eps, max_iter, drawing = False):
    if not eps:
        eps = (b - a) / 1000

    intervals = pt.PrettyTable()
    intervals.field_names = ["iteration", "a", "b", "length"]
    intervals.add_row([0, a, b, abs(b - a)])

    if drawing:
      x__ = np.linspace(a, b, int((b - a) / eps))
      y__ = func(x__)

      plt.plot(x__, y__, color='xkcd:deep purple', linewidth=2, label="$f(x)
      plt.xlabel("x")
      plt.ylabel("f(x)")
      plt.grid(True)

    delta = eps / 2
    ai, bi = a, b

    if drawing:
      plt.axvline(x=ai, color='xkcd:sage', ls='--', label="$a_i$")
      plt.axvline(x=bi, color='xkcd:light grey green', ls='--', label="$b_i$
      plt.plot([ai, bi],[max(func(ai), func(bi)), max(func(ai), func(bi))],
               color='xkcd:heather', label="$[a_i, b_i]$")

    i = 0
    while abs(bi - ai) > eps:
        mid = (ai + bi) / 2
        x1, x2 = mid - delta, mid + delta
        y1, y2 = func(x1), func(x2)

        if y1 < y2:
            bi = mid
        elif y1 > y2:
            ai = mid
        else:
            ai, bi = x1, x2
        i += 1

        if i == max_iter: break

        intervals.add_row([i, ai, bi, abs(bi - ai)])

        if drawing:
          plt.plot([ai, bi],[max(func(ai), func(bi)), max(func(ai), func(bi)
                   color='xkcd:heather')

          plt.axvline(x=ai, color='xkcd:sage', ls='--')
          plt.axvline(x=bi, color='xkcd:light grey green', ls='--')

    if drawing:
      plt.legend()
      plt.show()
```

```python
        print(intervals)

    return {'x min': (ai + bi) / 2,
            'y min': func((ai + bi) / 2),
            'iterations count': i,
            'intervals': intervals,
            'computations': 2 * i}
```

In [201…

```python
dichotomy(f, 0.1, 6.333, 0.005, 500, True)
```



iteration	a	b	length
0	0.1	6.333	6.2330000000000005
1	3.2165	6.333	3.1165000000000003
2	4.77475	6.333	1.5582500000000001
3	4.77475	5.553875	0.7791249999999996
4	4.77475	5.164312499999999	0.38956249999999937
5	4.969531249999999	5.164312499999999	0.19478125000000013
6	5.066921874999999	5.164312499999999	0.09739062500000006
7	5.066921874999999	5.1156171875	0.048695312500000476
8	5.091269531249999	5.1156171875	0.024347656250000682
9	5.1034433593749995	5.1156171875	0.012173828125000341
10	5.1095302734375	5.1156171875	0.0060869140625001705
11	5.11257373046875	5.1156171875	0.0030434570312500853

Out[2016]:
```
{'x min': 5.114095458984375,
 'y min': -5.184396204965845,
 'iterations count': 11,
 'intervals': <prettytable.PrettyTable at 0x78fa9f487dc0>,
 'computations': 22}
```

Метод золотого сечения

Точки $x_1,\ x_2$ находятся симметрично относительно середины отрезка $[a_0, b_0]$ и делят его в пропорции золотого сечения, когда длина всего отрезка относится к длине большей его части так же, как длина большей части относится к длине меньшей части:

$\frac{b_0-a_0}{b_0-x_1} = \frac{b_0-x_1}{x_1-a_0}$

Отсюда

$$x_1 = a_i + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_i - a_i) = a_i + 0.381966011 \cdot (b_i - a_i)$$

Аналогично для второй точки

За одну итерацию интервал неопределённости уменьшается в $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618..$ раз, однако на следующей итерации мы будем вычислять функцию только один раз, так как по свойству золотого сечения $\frac{x_2-x_1}{b-x_1} = 0.381..$ и $\frac{b-x_2}{b-x_1} = 0.618..$

Для достижения точности ε потребуется $n \geq \dfrac{\ln\left(\frac{b_0 - a_0}{\varepsilon}\right)}{\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}$

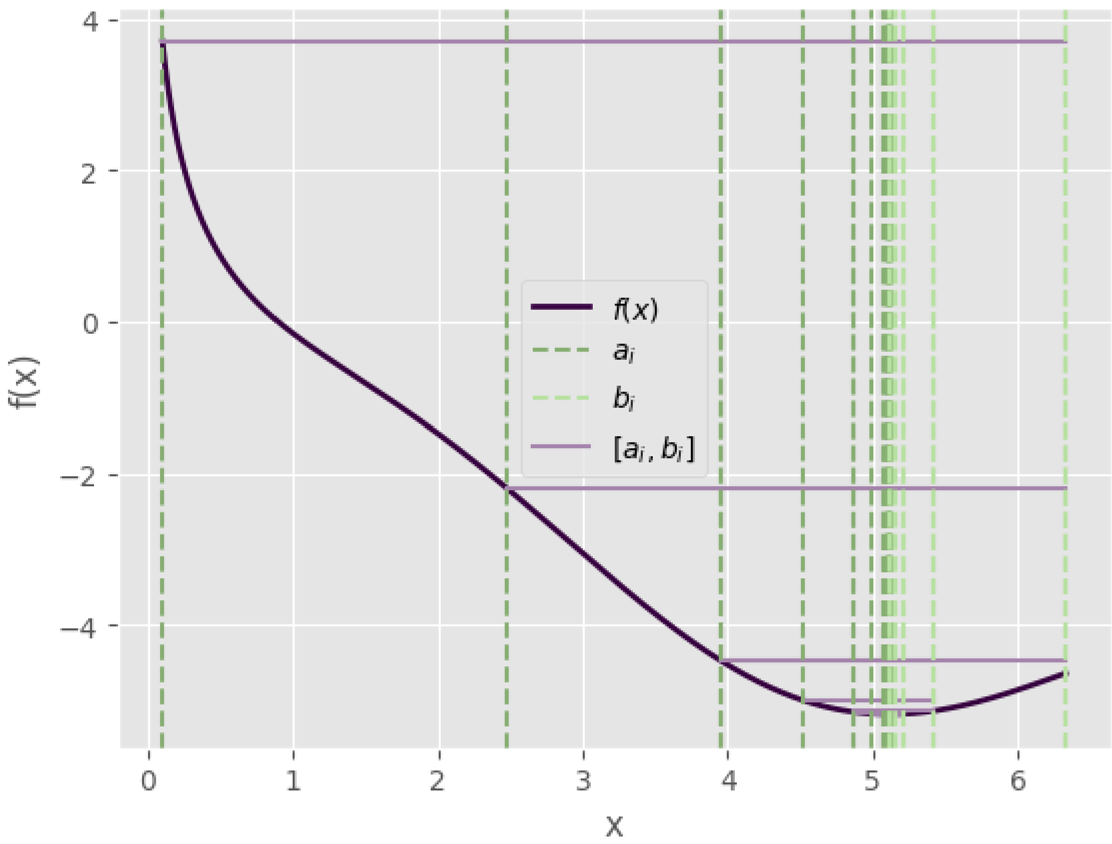
In [201…

```
def golden_ratio(func, a, b, eps, max_iter, drawing = False):
    d = abs(b - a)

    if not eps:
        eps = d / 1000

    intervals = pt.PrettyTable()
    intervals.field_names = ["iteration", "a", "b", "length"]


    if drawing:
      x__ = np.linspace(a, b, int((b - a) / eps))
      y__ = func(x__)

      plt.plot(x__, y__, color='xkcd:deep purple', linewidth=2, label="$f(x)
      plt.xlabel("x")
      plt.ylabel("f(x)")
      plt.grid(True)

    K = (3 - math.sqrt(5)) / 2

    x1, x2 = a + K * d, b - K * d
    y1, y2 = func(x1), func(x2)

    ai, bi = a, b
    di = d

    intervals.add_row([0, ai, bi, di])

    if drawing:
      plt.axvline(x=ai, color='xkcd:sage', ls='--', label="$a_i$")
      plt.axvline(x=bi, color='xkcd:light grey green', ls='--', label="$b_i$
      plt.plot([ai, bi],[max(func(ai), func(bi)), max(func(ai), func(bi))],
               color='xkcd:heather', label="$[a_i, b_i]$")

    i = 0
    while (bi - ai) >= eps:
        if y2 > y1:
            bi = x2
            x2 = x1
            x1 = ai + K * (bi - ai)
            y2 = y1
            y1 = func(x1)
        else:
            ai = x1
            x1 = x2
            x2 = bi - K * (bi - ai)
            y1 = y2
            y2 = func(x2)

        i += 1

        if i == max_iter: break

        intervals.add_row([i, ai, bi, (bi - ai)])

        if drawing:
          plt.plot([ai, bi],[max(func(ai), func(bi)), max(func(ai), func(bi)
                   color='xkcd:heather')
```

```
        plt.axvline(x=ai, color='xkcd:sage', ls='--')
        plt.axvline(x=bi, color='xkcd:light grey green', ls='--')

    if drawing:
      plt.legend()
      plt.show()
      print(intervals)

    return {'x min': (ai + bi) / 2, 'y min': func((ai + bi) / 2),
            'iterations count': i,
            'intervals': intervals,
            'computations': i + 2} # two computations for i = 0
```

In [201…

```
golden_ratio(f, 0.1, 6.333, 0.00001, 500, True)
```



iteration	a	b	length
0	0.1	6.333	6.2330000000000005
1	2.4807941481219054	6.333	3.852205851878095
2	3.952205851878095	6.333	2.3807941481219053
3	3.952205851878095	5.4236175556342845	1.4714117037561896
4	4.514235111268568	5.4236175556342845	0.9093824443657166
5	4.861588296243811	5.4236175556342845	0.5620292593904734
6	4.861588296243811	5.208941481219055	0.34735318497524403
7	4.994265406803825	5.208941481219055	0.2146760744152303
8	5.076264370659041	5.208941481219055	0.13267711056001374
9	5.076264370659041	5.158263334514257	0.08199896385521566
10	5.076264370659041	5.1269425173638385	0.0506781467047972
11	5.09562170021342	5.1269425173638385	0.031320817150418456
12	5.10758518780946	5.1269425173638385	0.019357329554378744
13	5.10758518780946	5.119548675405499	0.011963487596038824
14	5.112154833447159	5.119548675405499	0.0073938419583399195
15	5.112154833447159	5.116724479084858	0.004569645637698905
16	5.112154833447159	5.1149790297678	0.0028241963206410148
17	5.113233580450741	5.1149790297678	0.0017454493170587781
18	5.113900282764217	5.1149790297678	0.0010787470035831248
19	5.113900282764217	5.114566985077693	0.0006667023134765415
20	5.113900282764217	5.114312327454323	0.0004120446901065833
21	5.114057669830953	5.114312327454323	0.00025465762336995823
22	5.114057669830953	5.11421505689769	0.00015738706673662506
23	5.114117786341057	5.11421505689769	9.7270556632445e-05
24	5.114154940387587	5.11421505689769	6.011651010329189e-05
25	5.114154940387587	5.114192094434116	3.7154046529153106e-05
26	5.114169131970541	5.114192094434116	2.296246357502696e-05
27	5.114177902851161	5.114192094434116	1.4191582955014326e-05
28	5.114177902851161	5.114186673731781	8.770880620012633e-06

```
+-----------+-------------------+-------------------+--------------------
---+
```

Out[2018]:
```
{'x min': 5.11418228829147,
 'y min': -5.184396208714908,
 'iterations count': 28,
 'intervals': <prettytable.PrettyTable at 0x78fa6bb4ae90>,
 'computations': 30}
```

По сравнению с методом дихотомии, метод золотого сечения позволяет вычислить значение целевой функции только 1 раз за итерацию (это важно, в случае, если вычисление трудозатратно), однако данный метод сходится медленнее

Метод Фиббоначи

> Это улучшение реализации поиска с помощью золотого сечения, служащего для нахождения экстремума функции. > Подобно методу золотого сечения, он требует двух вычислений функции на первой итерации, а на каждой последующей только по одному. Однако этот метод отличается от метода золотого сечения тем, что коэффициент сокращения интервала неопределенности меняется от итерации к итерации. > Предположим, нам нужно определить минимум как можно точнее, т.е. с наименьшим интервалом неопределенности, но при этом можно произвести только n вычислений функции.

Пусть у нас есть интервал неопределенности (x_1, x_3), и нам известно значение функции $f(x_2)$, $x_2 \in (x_1, x_3)$

Если можно вычислить функцию всего один раз в точке x_4, то где следует ее поместить, чтобы получить минимально возможный интервал неопределенности? Заранее нам не известно, как ведет себя функция, и реализуется одна из двух ситуаций: $x_4 \in (x_1, x_2)$ или $x_4 \in (x_2, x_3)$

Т.е. неизвестно, какая из ситуаций будет иметь место, выберем x_4 таким образом, чтобы минимизировать максимальную из длин

- $\min \{\max{(x_3 - x_4)}, (x_2 - x_1)\}$

Достигнуть этого можно, сделав эти длины равными, т.е.

- $(x_3 - x_4) = (x_2 - x_1)$

Для этого нужно поместить x_4 внутрь интервала (x_1, x_2) симметрично относительно точки x_2. Если окажется, что можно выполнить еще одно вычисление функции, то следует применить описанную процедуру к новому интервалу неопределенности. Стратегия ясна: нужно поместить следующую точку внутрь интервала симметрично уже находящейся там точки. На n-ом вычислении n-ю точку стоит поместить симметрично по отношению к $(n-1)$-й точке. Чтобы получить наибольшее уменьшение интервала на данном этапе, следует разделить пополам предыдущий интервал

Обозначим за ϵ минимальную длину интервала неопределенности. Тогда

- $L_{n-1} = 2L_n - \epsilon$

- $L_{n-2} = L_{n-1} + L_n$

Числа Фибоначчи определяются соотношениями:

- $F_{n+1} = F_{n+1} + F_n$
- $n = 1, 2, \ldots,$
- $F_1 = F_2 \ \ (= 1)$

In [201…

```
def get_fib_by_number(n):
  fibs = (1, 1)
  if n < 2:
    return fibs[n]

  for i in range(2, n):
    fibs = fibs[1], fibs[0] + fibs[1]

  return fibs[1]
```

In [202…

```
def get_number_by_fib(fib):
  if fib <= 1:
    return 2

  i = 2
  fibs = (1, 1)

  while True:
    fibs = fibs[1], fibs[0] + fibs[1]
    i += 1
    if fibs[1] >= fib:
      return i
```

На начальном интервале вычисляются точки

- $x_1 = a_0 + \frac{F_n}{F_{n+2}}(b_0 - a_0)$
- $x_2 = a_0 + \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}(b_0 - a_0)$

где n выбирается исходя из точности и начальной длины интервала.

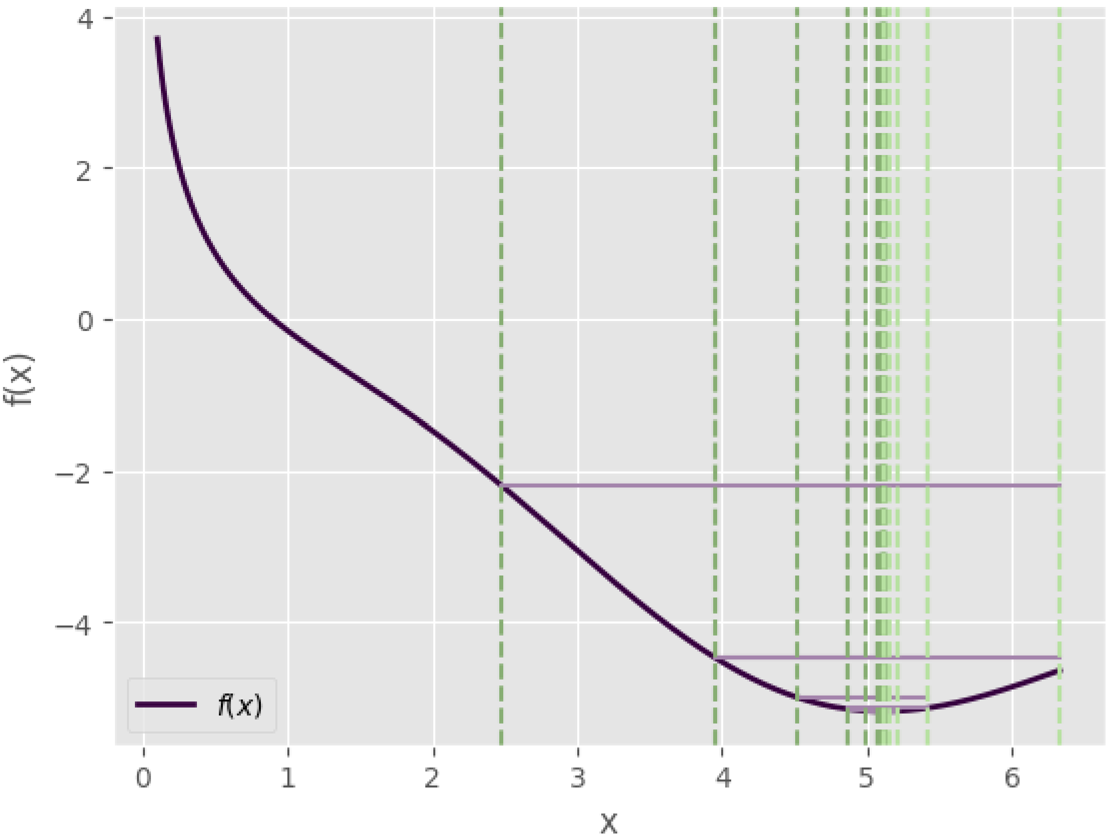
In [202…

```
def fibonacci_method(func, a, b, eps, max_iter, drawing = False):

    fib_iters = (b - a) / eps
    n = get_number_by_fib(fib_iters) - 2

    x1 = a + get_fib_by_number(n) / get_fib_by_number(n + 2) * (b - a)
    x2 = a + get_fib_by_number(n + 1) / get_fib_by_number(n + 2) * (b - a)
    y1 = func(x1)
    y2 = func(x2)

    ai, bi = a, b

    intervals = pt.PrettyTable()
    intervals.field_names = ["iteration", "a", "b", "length"]
    intervals.add_row([0, ai, bi, bi - ai])
    intervals.add_row([1, ai, bi, bi - ai])

    if drawing:
      x__ = np.linspace(a, b, int((b - a) / eps))
      y__ = func(x__)
```

```
      plt.plot(x__, y__, color='xkcd:deep purple', linewidth=2, label="$f(x)
      plt.xlabel("x")
      plt.ylabel("f(x)")
      plt.grid(True)

    for k in range(2, n + 3):
        if y1 > y2:
            ai = x1
            x1, y1 = x2, y2
            x2 = ai + get_fib_by_number(n - k + 2) / get_fib_by_number(n - k
            y2 = func(x2)
        else:
            bi = x2
            x2, y2 = x1, y1
            x1 = ai + get_fib_by_number(n - k + 1) / get_fib_by_number(n - k
            y1 = func(x1)

        if drawing:
          plt.plot([ai, bi],[max(func(ai), func(bi)), max(func(ai), func(bi)
                   color='xkcd:heather')

          plt.axvline(x=ai, color='xkcd:sage', ls='--')
          plt.axvline(x=bi, color='xkcd:light grey green', ls='--')

        intervals.add_row([k, ai, bi, bi - ai])


    if drawing:
      plt.legend()
      plt.show()
      print(intervals)

    return {'x min': (ai + bi) / 2, 'y min': func((ai + bi) / 2),
            'iterations count': n,
            'intervals': intervals,
            'computations': n + 2} # two computations for i = 0
```

In [202…

```
fibonacci_method(f, 0.1, 6.333, 0.00001, 500, True)
```



4
2
0
−2
−4
f(x)
0
1
2
3
4
5
6
x
$f(x)$

iteration	a	b	length
0	0.1	6.333	6.2330000000000005
1	0.1	6.333	6.2330000000000005
2	2.4807941481178792	6.333	3.852205851882121
3	3.9522058518821215	6.333	2.3807941481178787
4	3.9522058518821215	5.423617555646364	1.4714117037642422
5	4.514235111292727	5.423617555646364	0.9093824443536365
6	4.861588296235758	5.423617555646364	0.5620292594106058
7	4.861588296235758	5.2089414811787895	0.3473531849430316
8	4.994265406711216	5.2089414811787895	0.2146760744675733
9	5.076264370703332	5.2089414811787895	0.13267711047545738
10	5.076264370703332	5.158263334695447	0.08199896399211504
11	5.076264370703332	5.126942517186674	0.05067814648334146
12	5.0956216996779	5.126942517186674	0.03132081750877358
13	5.107585188212106	5.126942517186674	0.019357328974567878
14	5.107585188212106	5.1195486767463105	0.011963488534204814
15	5.1121548363059475	5.1195486767463105	0.007393840440363064
16	5.1121548363059475	5.116724484399789	0.004569648093841749
17	5.1121548363059475	5.114979028652469	0.002824192346521315
18	5.113233572905149	5.114979028652469	0.0017454557473195464
19	5.113900292053267	5.114979028652469	0.0010787365992017683
20	5.113900292053267	5.114567011201385	0.0006667191481177781
21	5.113900292053267	5.114312309504351	0.0004120174510839024
22	5.114057607807317	5.114312309504351	0.00025470169703378787
23	5.114057607807317	5.114214923561367	0.00015731575405020237
24	5.114117537618384	5.114214923561367	9.73859429835855e-05
25	5.114154993750301	5.114214923561367	5.992981106661688e-05
26	5.114154993750301	5.114192449882218	3.7456131916968616e-05
27	5.114169976203067	5.114192449882218	2.247367915053644e-05
28	5.1141774674294505	5.114192449882218	1.4982452767320353e-05

```
|     29    | 5.1141774674294505 | 5.114184958655834  | 7.4912263832160875e-
06 |
|     30    | 5.1141774674294505 | 5.114184958655835  | 7.491226384104266e-0
6  |
+-----------+--------------------+--------------------+--------------------
---+
```

Out[2022]:
```
{'x min': 5.1141812130426425,
 'y min': -5.184396208714439,
 'iterations count': 28,
 'intervals': <prettytable.PrettyTable at 0x78fa708cf4f0>,
 'computations': 30}
```

Метод Фиббоначи по своей сути является улучшением метода золотого сечения и позволяет определить, сколько итераций потребуется для нахождения минимума с заданной точностью

Метод парабол

В методе парабол предлагается аппроксимировать оптимизируемую функцию $f(x)$ с помощью квадратичной функции $p(x) = ax^2 + bx + c$

Пусть имеются три точки $x_1 < x_2 < x_3$ такие, что интервал $[x_1, x_3]$ содержит точку минимума функции f. Тогда коэффициенты $a,\ b,\ c$ аппроксимирующей параболы могут быть найдены путём решения системы линейных уравнений:
$ax_i^2 + bx_i + c = f_i = f(x_i),\ i = 1,\ 2,\ 3$

Минимум такой параболы равен $u = -\frac{b}{2a} = x_2 - \frac{(x_2-x_1)^2(f_2-f_3)-(x_2-x_3)^2(f_2-f_1)}{2[(x_2-x_1)(f_2-f_3)-(x_2-x_3)(f_2-f_1)]}$

Если $f_2 < f_1$ и $f_2 < f_3$, то точка u гарантированно попадёт в интервал $[x_1, x_3]$. Таким образом, внутри интервала $[x_1, x_3]$ определены две точки x_2 и u, с помощью сравнения значений функции f в которых можно сократить интервал поиска.

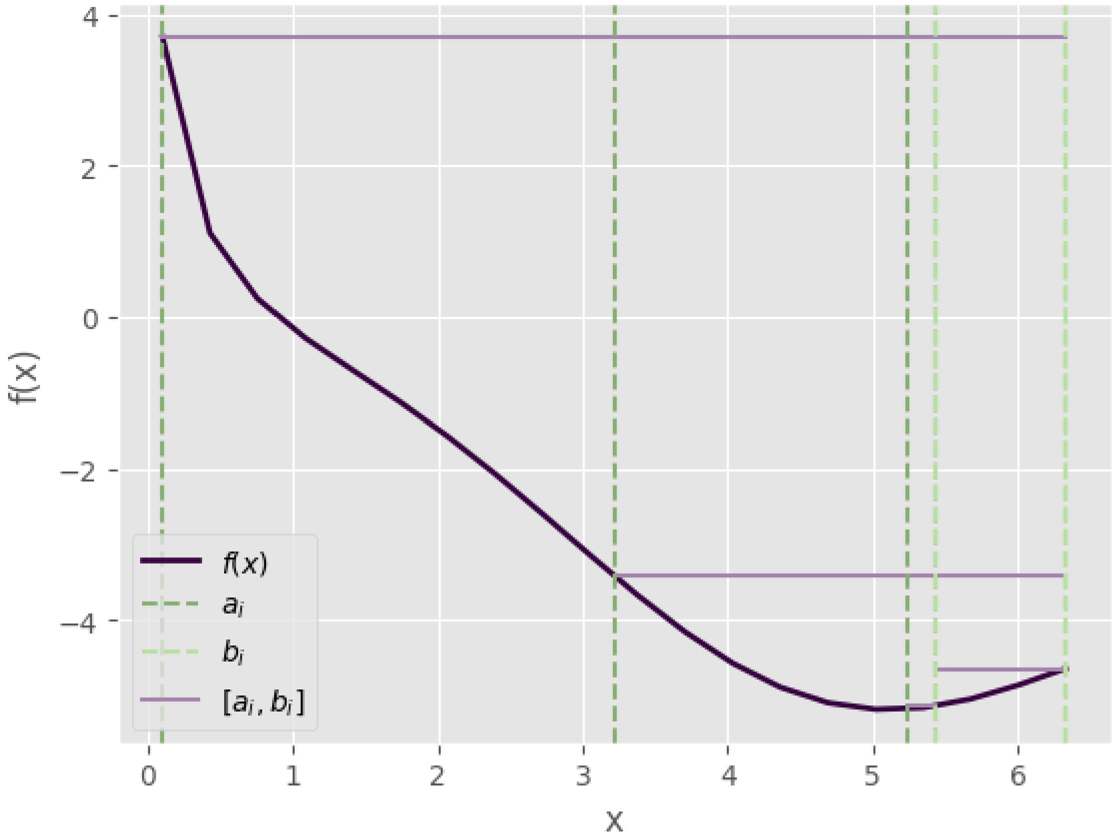
In [202…
```python
def successive_parabolic_interpolation(f, a, b, epsilon, max_iter, drawing =
    x1, x3, x2 = a, b, (a + b) / 2

    f1 = f(x1)
    f2 = f(x2)
    f3 = f(x3)
    f_x = {x1: f1, x2: f2, x3: f3}

    counter = 3

    intervals = pt.PrettyTable()
    intervals.field_names = ["iteration", "a", "b", "length"]
    intervals.add_row([0, x1, x3, abs(x3 - x1)])

    if drawing:
        x__ = np.linspace(a, b, int((b - a) / epsilon))
        y__ = f(x__)

        plt.plot(x__, y__, color='xkcd:deep purple', linewidth=2, label="$f(
        plt.xlabel("x")
        plt.ylabel("f(x)")
        plt.grid(True)

        plt.axvline(x=x1, color='xkcd:sage', ls='--', label="$a_i$")
        plt.axvline(x=x3, color='xkcd:light grey green', ls='--', label="$b_
        plt.plot([x1, x3], [max(f(x1), f(x3)), max(f(x1), f(x3))],
```

```python
                 color='xkcd:heather', label="$[a_i, b_i]$")

    x2, x3, x1 = sorted([x1, x3, x2], key=lambda x: f_x[x])

    try:
        for i in range(1, max_iter):
            f1, f2, f3 = f_x[x1], f_x[x2], f_x[x3]
            p = (x2 - x1) ** 2 * (f2 - f3) - (x2 - x3) ** 2 * (f2 - f1)
            q = 2 * ((x2 - x1) * (f2 - f3) - (x2 - x3) * (f2 - f1))

            assert p != 0, 'Searching finished. Numerator is zero. code 2'
            assert q != 0, 'Searching finished. Denominator is zero. code 2'

            u = x2 - p / q

            if not a <= u <= b:
                print('Searching finished. Out of bounds. code 1')
                return {'x min': x2, 'y min': f2, 'iterations count': i,
                        'intervals': intervals, 'computations': counter}

            fu = f(u)
            f_x[u] = fu
            previous_xs = [x1, x2, x3]

            counter +=1

            if fu < f2:
                x1, f1 = x3, f3
                x3, f3 = x2, f2
                x2, f2 = u, fu

            elif fu < f3:
                x1, f1 = x3, f3
                x3, f3 = u, fu

            elif fu < f1:
                x1, f1 = u, fu

            intervals.add_row([i, min(x1, x3), max(x1, x3), abs(x3 - x1)])

            change_flag = max(map(lambda x, y: abs(x - y),
            [x1, x2, x3], previous_xs)) < epsilon

            if drawing:
                plt.plot([x1, x3], [max(f(x1), f(x3)), max(f(x1), f(x3))],
                         color='xkcd:heather')

                plt.axvline(x=min(x1, x3), color='xkcd:sage', ls='--')
                plt.axvline(x=max(x1, x3), color='xkcd:light grey green', ls

            if abs(x3 - x1) < epsilon and abs(f3 - f1) < epsilon or change_f
                if drawing:
                  plt.legend()
                  plt.show()
                  print('Searching finished successfully. code 0')
                  print(intervals)
                return {'x min': x2, 'y min': f2, 'iterations count': i,
                        'intervals': intervals, 'computations': counter}

        else:
            print('Searching finished. Max iterations have been reached. cod
            return {'x min': x2, 'y min': f2, 'iterations count': i,
                    'intervals': intervals, 'computations': counter}
```

```python
    except Exception as e:
        print('Error with optimization. code 2')
        raise e
```

In [202…

```python
successive_parabolic_interpolation(f, 0.1, 6.333, 0.3, 500, True)
```




```
Searching finished successfully. code 0
+-----------+-------------------+-------------------+---------------------+
| iteration |         a         |         b         |        length       |
+-----------+-------------------+-------------------+---------------------+
|     0     |        0.1        |       6.333       |  6.2330000000000005 |
|     1     |       3.2165      |       6.333       |  3.1165000000000003 |
|     2     | 5.426169606718018 |       6.333       |  0.9068303932819823 |
|     3     | 5.237571253895454 | 5.426169606718018 | 0.18859835282256388 |
+-----------+-------------------+-------------------+---------------------+
```

Out[2024]:

```
{'x min': 5.005156131428065,
 'y min': -5.178386149572577,
 'iterations count': 3,
 'intervals': <prettytable.PrettyTable at 0x78fa6bc7e5f0>,
 'computations': 6}
```

В отличие от метода золотого сечения, метод парабол обладает суперлинейной скоростью сходимости. Однако, такая высокая скорость сходимости гарантируется только в малой окрестности точки минимума $x_{\min}$. На начальных стадиях процесса оптимизации метод парабол может делать очень маленькие шаги или, наоборот, слишком большие шаги, приводящие к неустойчивым биениям. Также следует отметить, что на первой итерации метод парабол требует измерения значений функции в крайних точках интервала оптимизации. Кроме этого, сходимость метода не гарантируется, т.к. начальное приближение может не попасть в окрестность точки минимума.

Комбинированный метод Брента

Метод Брента эффективно комбинирует метод золотого сечения и метод парабол. В данном методе на каждой итерации отслеживаются значения в шести точках (не обязательно различных): a, c, x, w, v, u

Точки a, c задают текущий интервал поиска решения,

x – точка, соответствующая наименьшему значению функции,

w – точка, соответветствующая второму снизу значению функции,

v – предыдущее значение w

В отличие от метода парабол, в методе Брента аппроксимирующая парабола строится с помощью трех наилучших точек x, w, v (в случае, если эти три точки различны и значения в них также различны)

При этом минимум аппроксимирующей параболы u принимается в качестве следующей точки оптимизационного процесса, если:

- u попадает внутрь интервала $[a, c]$ и отстоит от границ интервала не менее, чем на ε
- u отстоит от точки x не более, чем на половину от длины предпредыдущего шага

Если точка u отвергается, то следующая точка находится с помощью золотого сечения большего из интервалов $[a, x]$ и $[x, c]$

In [202…

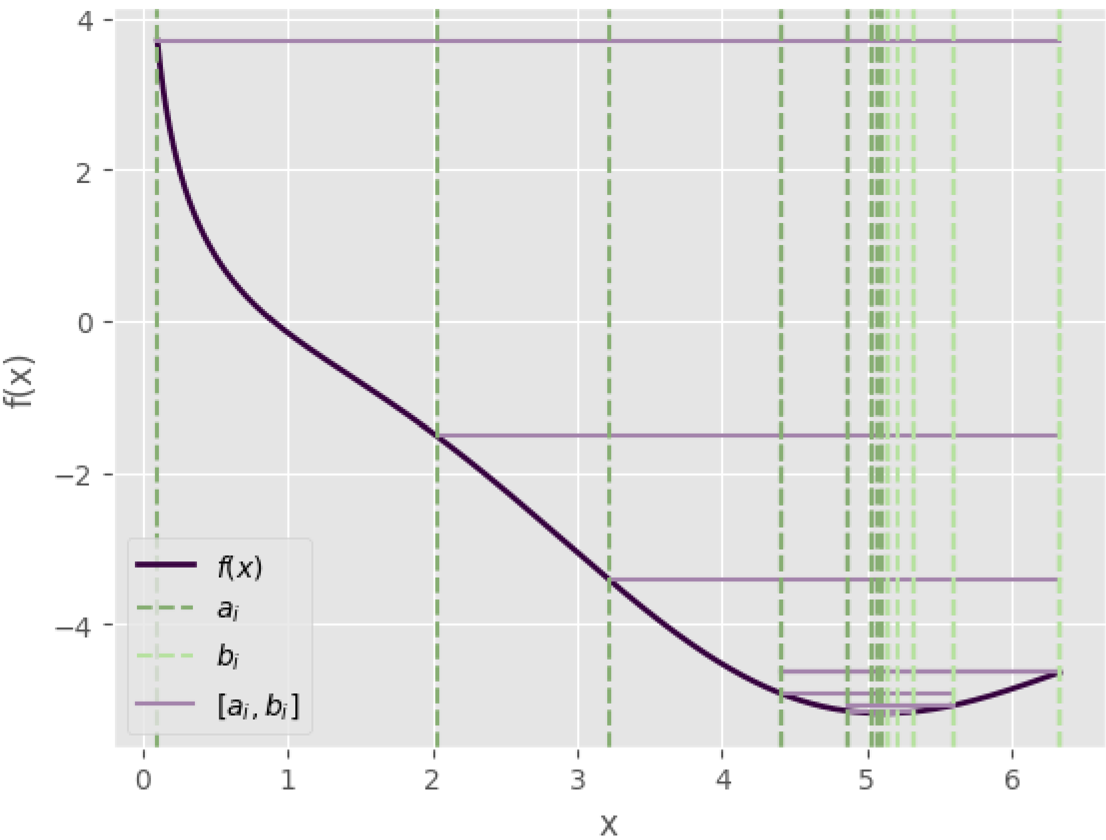
```
def brent(f, a, c, epsilon, max_iter, drawing = False):
    K = (3 - math.sqrt(5)) / 2

    x = w = v = (a + c) / 2
    f_x = f_w = f_v = f(x)
    d = e = c - a

    counter = 0
    counter += 1

    intervals = pt.PrettyTable()
    intervals.field_names = ["iteration", "a", "b", "length"]
    intervals.add_row([0, a, c, d])

    if drawing:
        x__ = np.linspace(a, c, int((c - a) / epsilon))
        y__ = f(x__)

        plt.plot(x__, y__, color='xkcd:deep purple',
                 linewidth=2, label="$f(x)$")
        plt.xlabel("x")
        plt.ylabel("f(x)")
        plt.grid(True)

        plt.axvline(x=a, color='xkcd:sage', ls='--', label="$a_i$")
        plt.axvline(x=c, color='xkcd:light grey green', ls='--', label="$b_i
        plt.plot([a, c], [max(f(a), f(c)), max(f(a), f(c))],
                 color='xkcd:heather', label="$[a_i, b_i]$")

    try:
        for i in range(1, max_iter):
```

```
            g, e = e, d

            unique = np.unique([x, w, v, f_x, f_w, f_v])
            if len([x, w, v, f_x, f_w, f_v]) == len(unique):
                p = (x - v) ** 2 * (f_x - f_w) - (x - w) ** 2 * (f_x - f_v)
                q = 2 * ((x - v) * (f_x - f_w) - (x - w) * (f_x - f_v))

                assert p != 0, 'Searching finished. Numerator is zero. code
                assert q != 0, 'Searching finished. Denominator is zero. cod

                u = x - p / q

                if d <= epsilon:
                  if drawing:
                      plt.legend()
                      plt.show()
                      intervals.add_row([i, min(u, x), max(u, x), d])
                      print('Searching finished successfully. code 0')
                      print(intervals)
                  return {'x min': x, 'y min': f_x, 'iterations count': i,
                          'intervals': intervals, 'computations': counter}

                if a + epsilon <= u <= c - epsilon and abs(u - x) < g / 2:
                    d = abs(u - x)
                    intervals.add_row([i, a, c, c - a])
                    if drawing:
                      plt.plot([a, c], [max(f(a), f(c)), max(f(a), f(c))],
                               color='xkcd:heather')

                      plt.axvline(x=a, color='xkcd:sage', ls='--')
                      plt.axvline(x=c, color='xkcd:light grey green', ls='--
                    continue

            if x < (c + a) / 2:
                u = x + K * (c - x)
                d = c - x
            else:
                u = x - K * (x - a)
                d = x - a

            if abs(u - x) < epsilon:
                u = x + np.sign(u - x) * epsilon

            f_u = f(u)

            counter += 1

            if f_u <= f_x:
                if u >= x:
                    a = x
                else:
                    c = x

                v, f_v = w, f_w
                w, f_w = x, f_x
                x, f_x = u, f_u

            else:
                if u >= x:
                    c = u
                else:
                    a = u

                if f_u <= f_w or w == x:
```

```
                v, f_v = w, f_w
                w, f_w = u, f_u
            elif f_u <= f_v or v == x or v == w:
                v, f_v = u, f_u

        intervals.add_row([i, a, c, d])

        if drawing:
          plt.plot([a, c], [max(f(a), f(c)), max(f(a), f(c))],
                   color='xkcd:heather')

          plt.axvline(x=a, color='xkcd:sage', ls='--')
          plt.axvline(x=c, color='xkcd:light grey green', ls='--')

    else:
        print('Searching finished. Max iterations have been reached. cod
        return {'x min': x, 'y min': f_x, 'iterations count': i,
                'intervals': intervals, 'computations': counter}

except Exception as e:
    print('Error with optimization. code 2')
    raise e
```

In [202…

```
brent(f, 0.1, 6.333, 0.005, 500, True)
```



```
Searching finished successfully. code 0
+-----------+--------------------+-------------------+---------------------
-+
| iteration |         a          |         b         |        length
|
+-----------+--------------------+-------------------+---------------------
-+
|     0     |        0.1         |       6.333       |  6.2330000000000005
|
|     1     | 2.0261029259390475 |       6.333       |        3.1165
|
|     2     |       3.2165       |       6.333       |  3.1165000000000003
|
|     3     | 4.406897074060953  |       6.333       |  1.9261029259390474
|
|     4     | 4.406897074060953  |       6.333       |  1.9261029259390474
|
|     5     | 4.406897074060953  |       6.333       |  1.9261029259390474
|
|     6     | 4.406897074060953  | 5.597294148121906 |  1.1903970740609529
|
|     7     | 4.861588296243811  | 5.597294148121906 |  0.7357058518780946
|
|     8     | 4.861588296243811  | 5.597294148121906 |  0.7357058518780946
|
|     9     | 4.861588296243811  | 5.597294148121906 |  0.7357058518780946
|
|    10     | 4.861588296243811  | 5.316279518426669 |  0.4546912221828583
|
|    11     | 5.035264888731432  | 5.316279518426669 |  0.2810146296952363
|
|    12     | 5.035264888731432  | 5.316279518426669 | 0.28101462969523716
|
|    13     | 5.035264888731432  | 5.316279518426669 | 0.28101462969523716
|
|    14     | 5.035264888731432  | 5.208941481219054 | 0.17367659248762202
|
|    15     | 5.035264888731432  | 5.142602925939047 | 0.10733803720761514
|
|    16     | 5.035264888731432  | 5.142602925939047 | 0.10733803720761514
|
|    17     | 5.035264888731432  | 5.142602925939047 | 0.10733803720761514
|
|    18     | 5.0762643706590405 | 5.142602925939047 | 0.06633855528000687
|
|    19     | 5.101603444011439  | 5.142602925939047 | 0.04099948192760827
|
|    20     | 5.101603444011439  | 5.142602925939047 | 0.04099948192760827
|
|    21     | 5.114204152144252  | 5.117263852586649 | 0.0030597004423968954
|
+-----------+--------------------+-------------------+---------------------
-+
```

```
Out[2026]: {'x min': 5.117263852586649,
  'y min': -5.1843914775006334,
  'iterations count': 21,
  'intervals': <prettytable.PrettyTable at 0x78fa677a3850>,
  'computations': 12}
```

Мы избегаем биений и застопориваний метода парабол, используя гарантированно сходящийся метод Золотого сечения в невыгодных ситуациях. И при этом при хороших значениях вершины параболы у нас получается использовать суперлинейную скорость сходимости метода Брента. В отличие от метода парабол метод Брента обладает гарантированной сходимостью.

Сравнение методов по количеству итераций и вызову функций

In [202…

```python
def optimize(f, a, b, epsilon, max_iter, delta):
    methods = np.array([
        brent,
        successive_parabolic_interpolation,
        fibonacci_method,
        golden_ratio,
        dichotomy
        ])
    results = {}
    for met in methods:
        computations = []
        epsilons = []
        iterations = []

        epsilon_i = epsilon
        delta_i = delta
        while epsilon_i - delta_i >= 0:
            res = met(f, a, b, epsilon_i, max_iter)
            epsilons.append(epsilon_i)
            epsilon_i -= delta_i
            computations.append(res["computations"])
            iterations.append(res["iterations count"])

        results[met.__name__] = (epsilons, computations, iterations)

    return results
```

In [202…

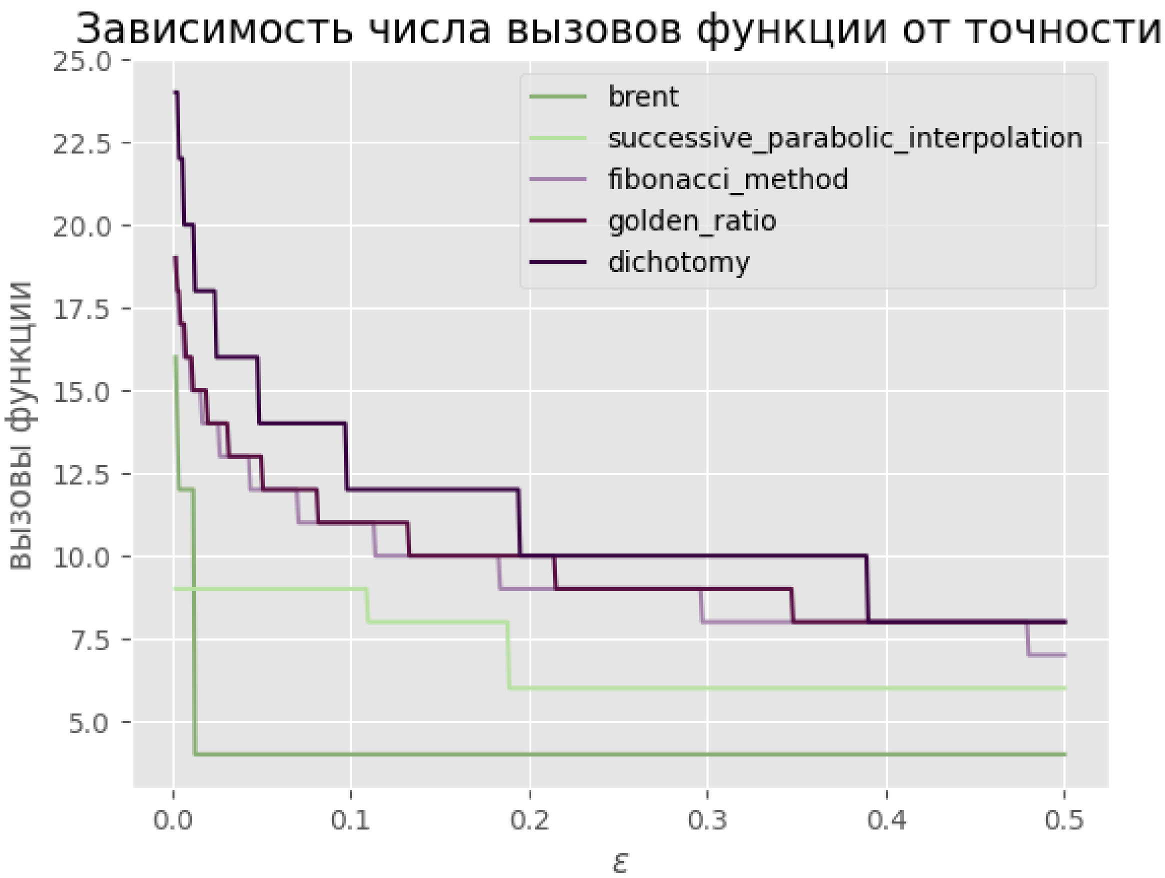
```python
values = optimize(f, 0.1, 6.333, 0.5, 500, 0.001)
```

In [202…

```python
colors = {
    'brent' : 'xkcd:sage',
    'successive_parabolic_interpolation' : 'xkcd:light grey green',
    'fibonacci_method' : 'xkcd:heather',
    'golden_ratio' : 'xkcd:plum',
    'dichotomy' : 'xkcd:deep purple',
}
```

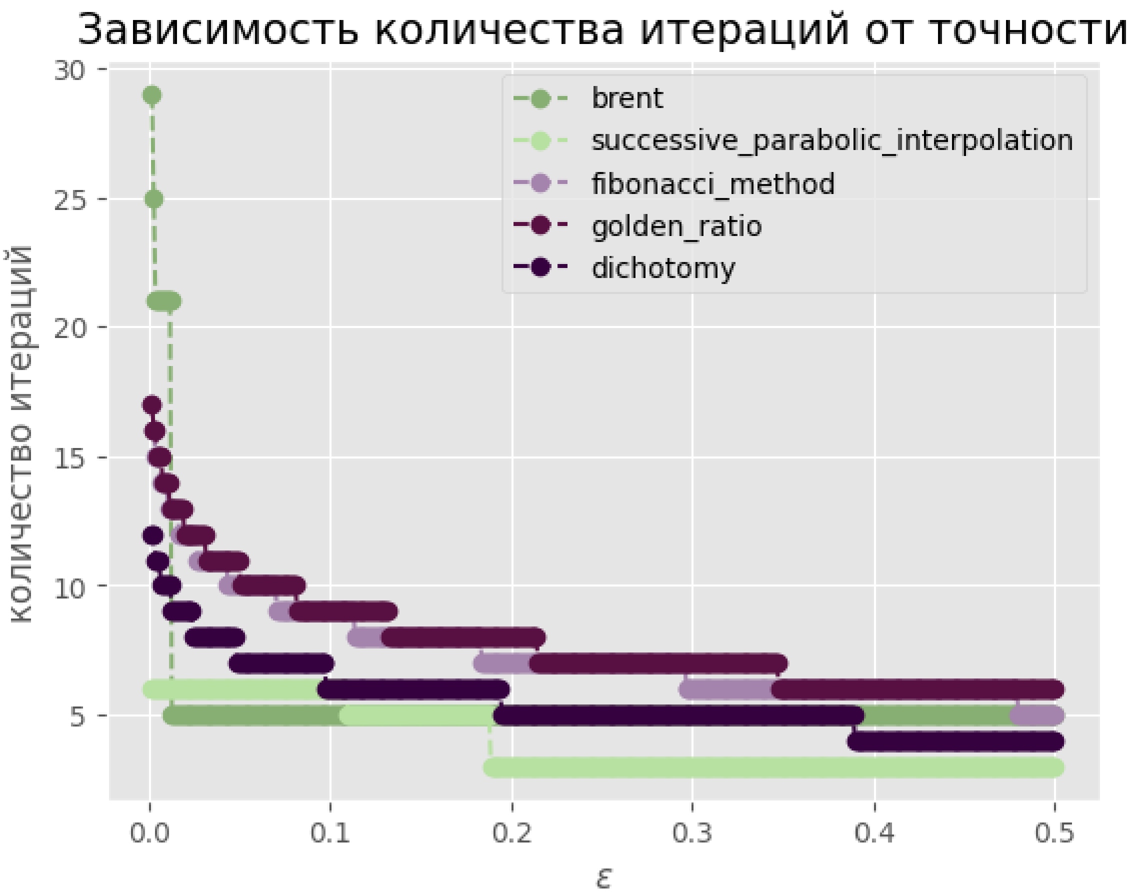
In [203…

```python
for method_name in values.keys():
  plt.plot(values[method_name][0], values[method_name][1],
          label = method_name, color=colors.get(method_name))

plt.title("Зависимость числа вызовов функции от точности", fontsize = 15)
plt.xlabel("$\epsilon$")
plt.ylabel("вызовы функции")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```



In [203…

```
for method_name in values.keys():
  plt.plot(values[method_name][0], values[method_name][2],
           'o--', label=method_name, color=colors.get(method_name))

plt.title("Зависимость количества итераций от точности", fontsize = 15)
plt.xlabel("$\epsilon$")
plt.ylabel("количество итераций")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

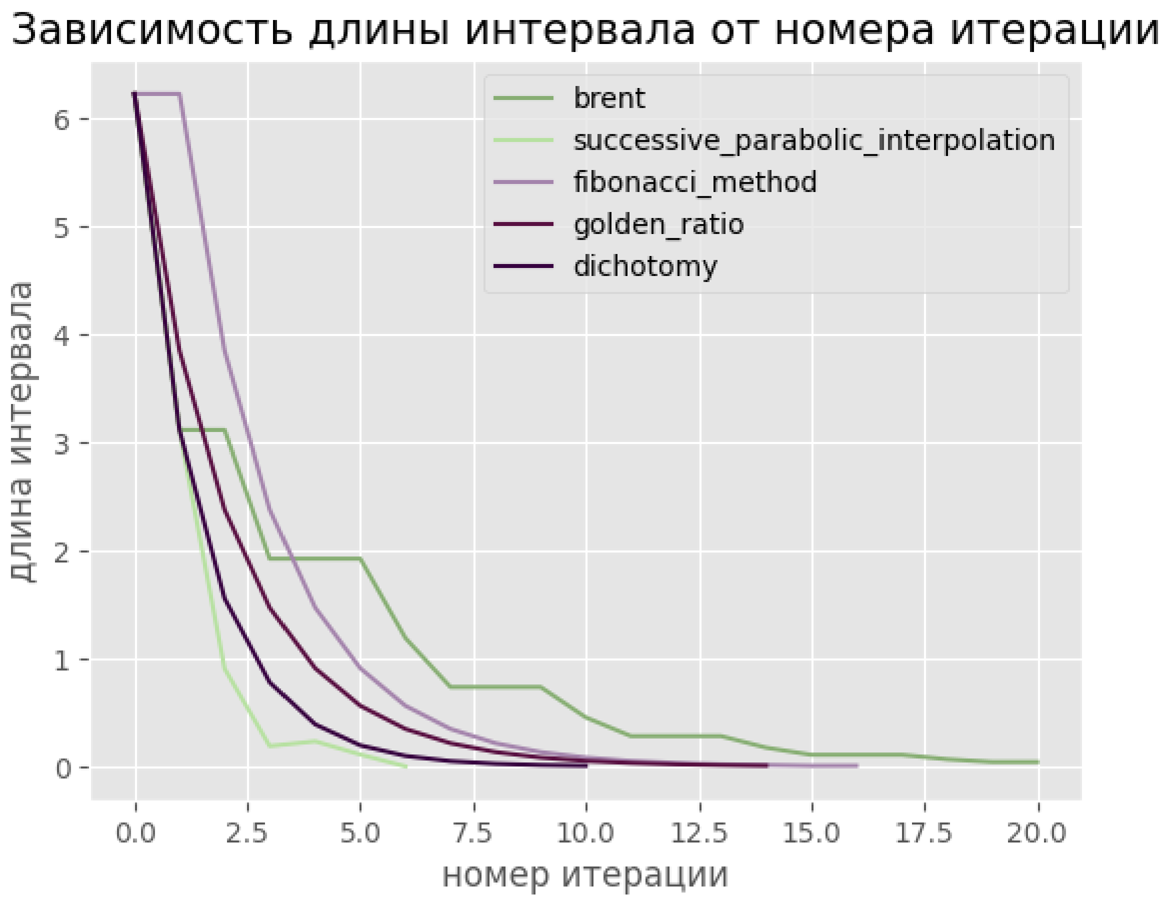


In [203…

```
def get_intervals(f, a, b, epsilon, max_iter):
    methods = np.array([
    brent,
    successive_parabolic_interpolation,
    fibonacci_method,
    golden_ratio,
    dichotomy
    ])

    for met in methods:
        res = met(f, a, b, epsilon, max_iter)

        iterations = res["intervals"].get_string(fields=["iteration"],
                                  header=False, border=False).split("\n")
        iterations = list(map(int, iterations))

        length = res["intervals"].get_string(fields=["length"],
                              header=False, border=False).split("\n")
        length = list(map(float, length))

        plt.plot(iterations, length, label=met.__name__,
                 color=colors.get(met.__name__))

    plt.title("Зависимость длины интервала от номера итерации", fontsize = 15)
    plt.xlabel("номер итерации")
    plt.ylabel("длина интервала")
    plt.legend()
    plt.grid(True)
    plt.show()
```

In [203…

```
get_intervals(f, 0.1, 6.333, 0.01, 500)
```

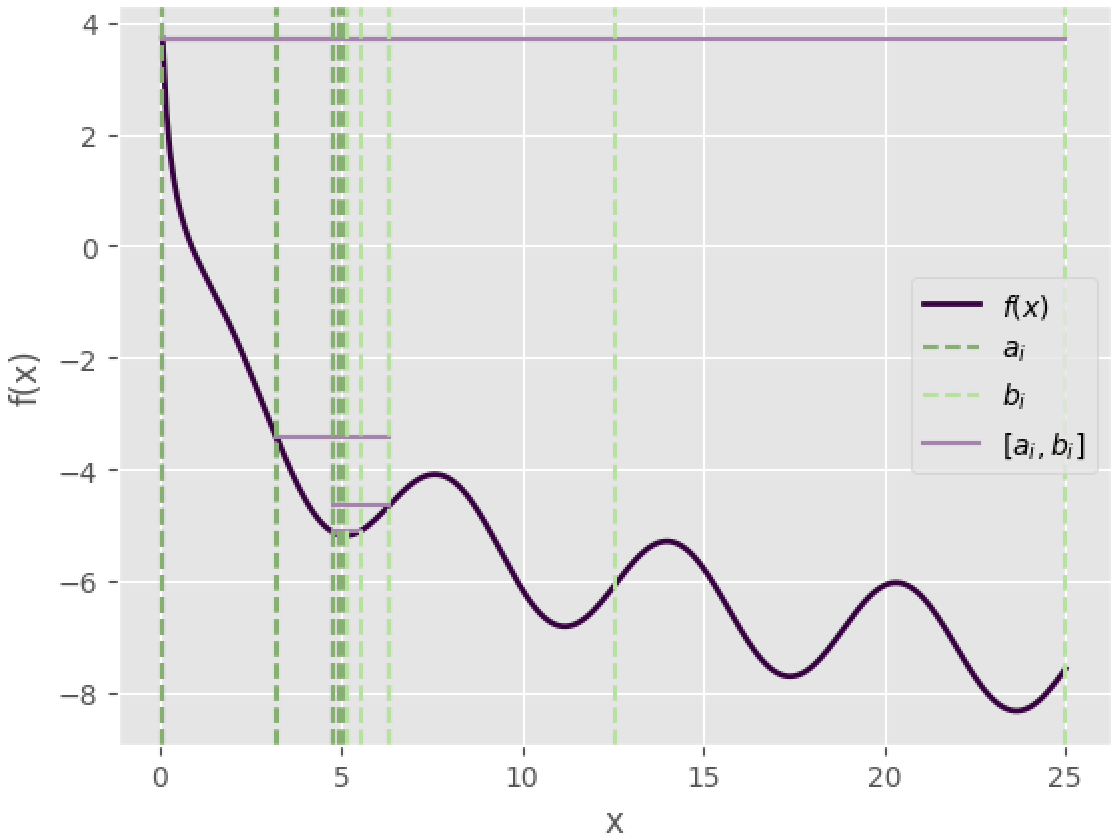


Тестирование алгоритмов для задач минимизации многомодальных функций

Метод дихотомии

In [203…

```
dichotomy(f, 0.1, 25, 0.1, 500, True)
```




```
+-----------+-------------+-----------+---------------------+
| iteration |      a      |     b     |        length       |
+-----------+-------------+-----------+---------------------+
|     0     |     0.1     |     25    |         24.9        |
|     1     |     0.1     |   12.55   |  12.450000000000001 |
|     2     |     0.1     |   6.325   |  6.2250000000000005 |
|     3     |    3.2125   |   6.325   |  3.1125000000000003 |
|     4     |   4.76875   |   6.325   |  1.5562500000000004 |
|     5     |   4.76875   |  5.546875 |  0.7781250000000002 |
|     6     |   4.76875   | 5.1578125 | 0.38906250000000053 |
|     7     |  4.96328125 | 5.1578125 |  0.1945312500000007 |
|     8     | 5.060546875 | 5.1578125 | 0.09726562500000036 |
+-----------+-------------+-----------+---------------------+
```

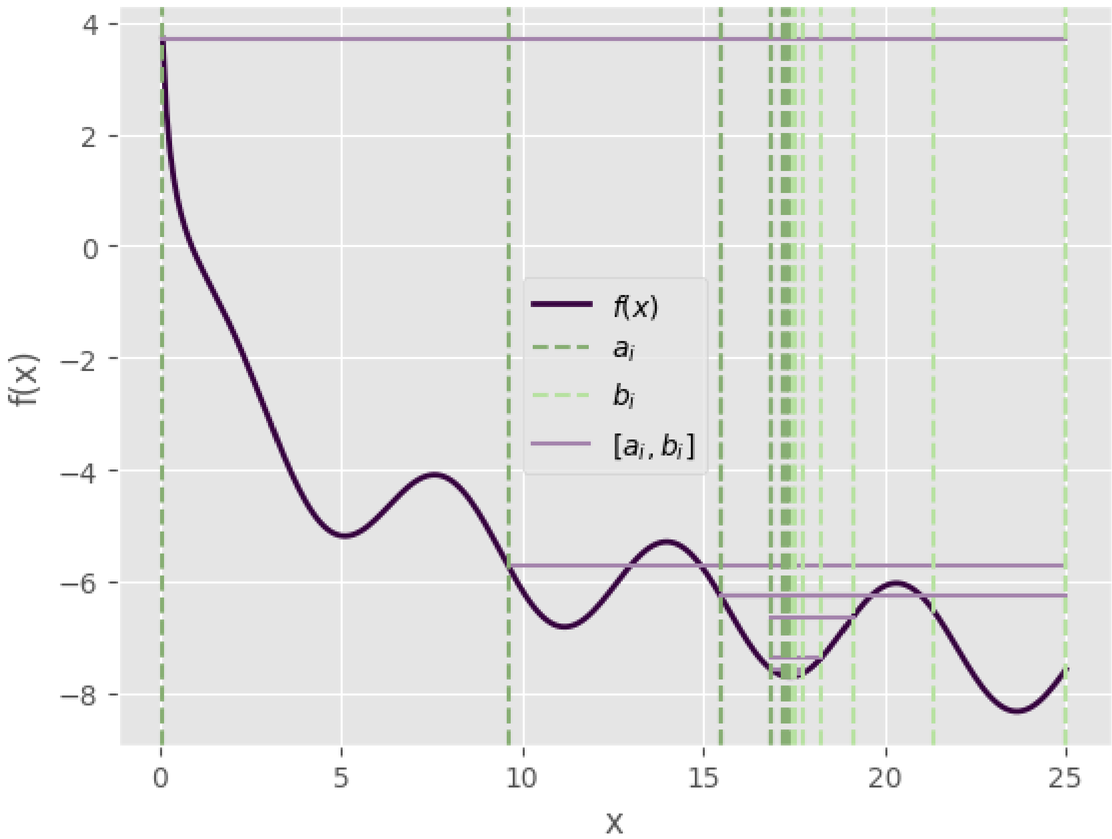
Out[2034]:

```
{'x min': 5.1091796875,
 'y min': -5.184383727129394,
 'iterations count': 8,
 'intervals': <prettytable.PrettyTable at 0x78fa6755ba00>,
 'computations': 16}
```

Метод золотого сечения

In [203…

```
golden_ratio(f, 0.1, 25, 0.1, 500, True)
```

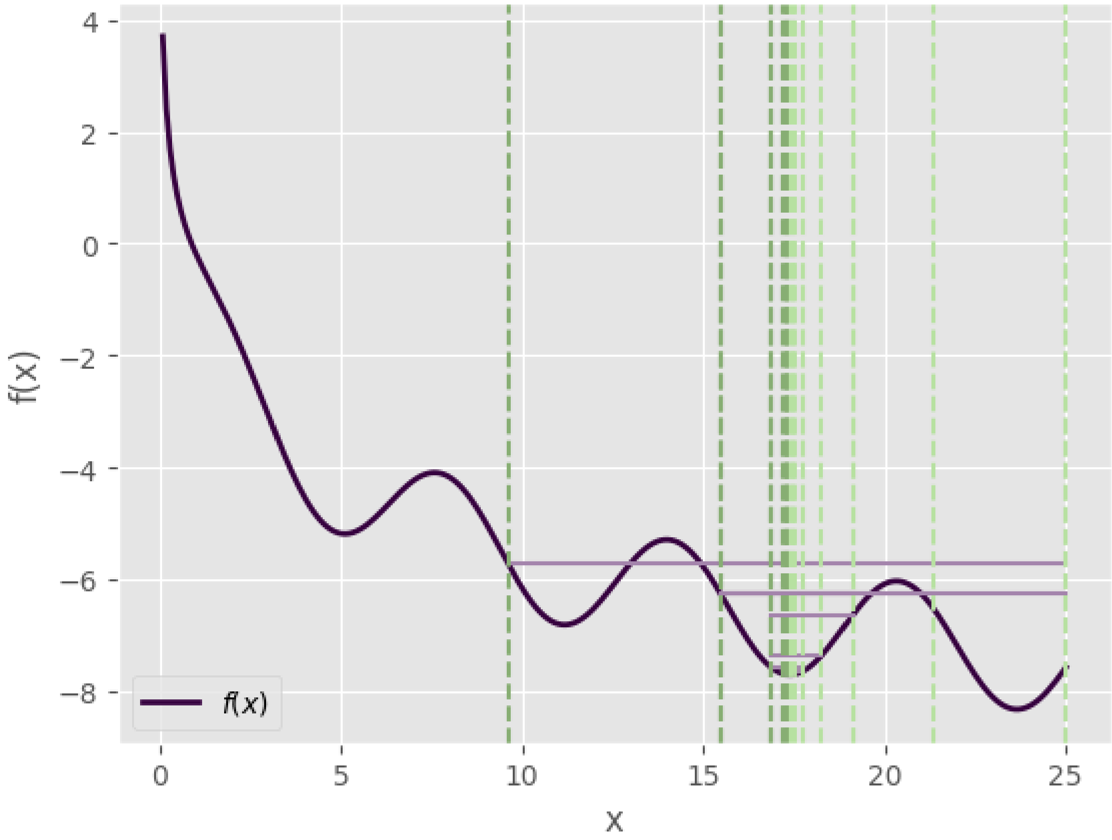


iteration	a	b	length
0	0.1	25	24.9
1	9.610953680127617	25	15.389046319872383
2	15.489046319872383	25	9.510953680127617
3	15.489046319872383	21.367138959617147	5.878092639744764
4	15.489046319872383	19.121907360255236	3.6328610403828527
5	16.876675760893328	19.121907360255236	2.245231599361908
6	16.876675760893328	18.264305201914272	1.3876294410209447
7	16.876675760893328	17.73427791923429	0.8576021583409634
8	17.204250636554306	17.73427791923429	0.5300272826799848
9	17.204250636554306	17.531825512215285	0.32757487566097865
10	17.32937310519628	17.531825512215285	0.20245240701900613
11	17.32937310519628	17.45449557383825	0.12512246864197252
12	17.377165635461218	17.45449557383825	0.07732993837703361

Out[2035]:
```
{'x min': 17.415830604649734,
 'y min': -7.70537966343633,
 'iterations count': 12,
 'intervals': <prettytable.PrettyTable at 0x78fa6729d5a0>,
 'computations': 14}
```

Метод фиббоначи

In [203…
```
fibonacci_method(f, 0.1, 25, 0.1, 500, True)
```

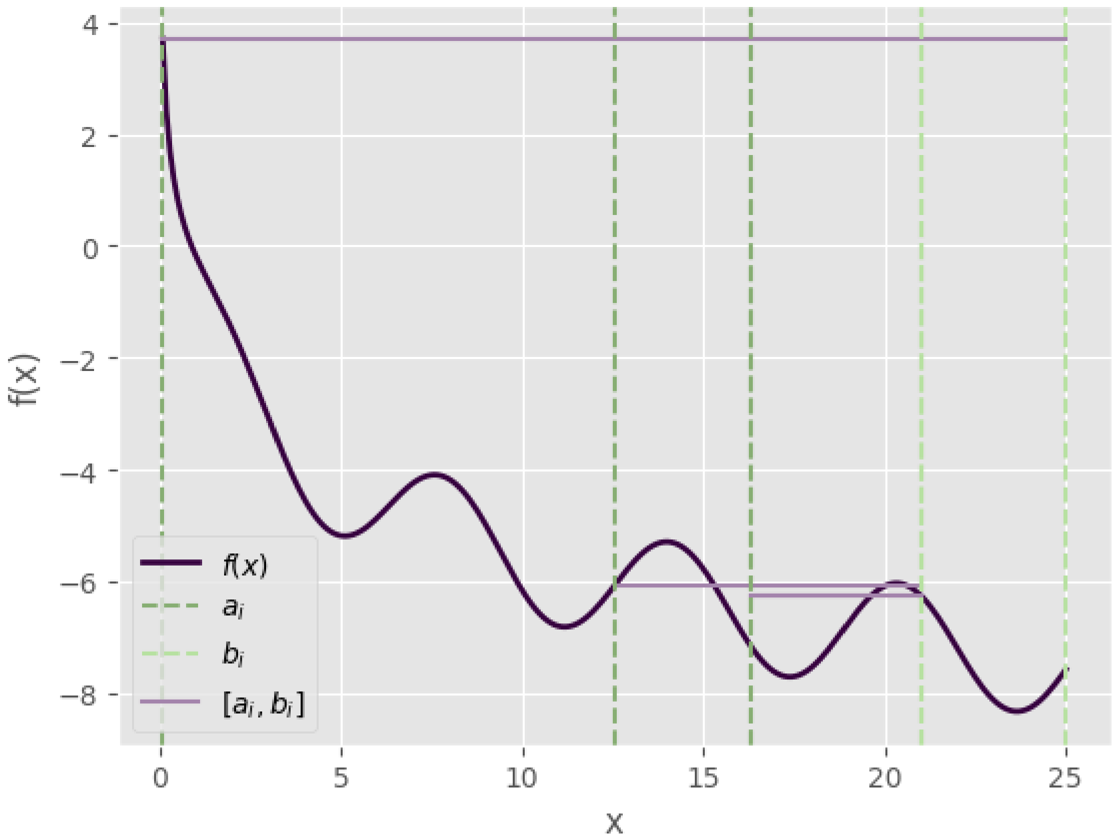


iteration	a	b	length
0	0.1	25	24.9
1	0.1	25	24.9
2	9.610875331564985	25	15.389124668435015
3	15.48912466843501	25	9.51087533156499
4	15.48912466843501	21.367374005305038	5.878249336870027
5	15.48912466843501	19.121750663129973	3.632625994694962
6	16.876127320954904	19.121750663129973	2.245623342175069
7	16.876127320954904	18.2631299734748	1.3870026525198966
8	16.876127320954904	17.734748010610076	0.8586206896551722
9	17.206366047745355	17.734748010610076	0.5283819628647208
10	17.206366047745355	17.536604774535807	0.3302387267904514
11	17.338461538461537	17.536604774535807	0.19814323607426942
12	17.338461538461537	17.470557029177716	0.13209549071617843
13	17.338461538461537	17.404509283819625	0.06604774535808744
14	17.338461538461537	17.40450928381963	0.06604774535809099

Out[2036]:
```
{'x min': 17.371485411140583,
 'y min': -7.705364225881379,
 'iterations count': 12,
 'intervals': <prettytable.PrettyTable at 0x78fa5afc74f0>,
 'computations': 14}
```

Метод парабол

In [203…
```python
successive_parabolic_interpolation(f, 0.1, 25, 0.1, 500, True)
```




```
Searching finished successfully. code 0
+-----------+--------------------+--------------------+--------------------+
| iteration |         a          |         b          |       length       |
+-----------+--------------------+--------------------+--------------------+
|     0     |        0.1         |         25         |        24.9        |
|     1     |       12.55        | 21.02008379898718  |  8.47008379898718  |
|     2     | 16.32865168195062  | 21.02008379898718  | 4.691432117036559  |
|     3     | 16.32865168195062  | 21.02008379898718  | 4.691432117036559  |
+-----------+--------------------+--------------------+--------------------+
```

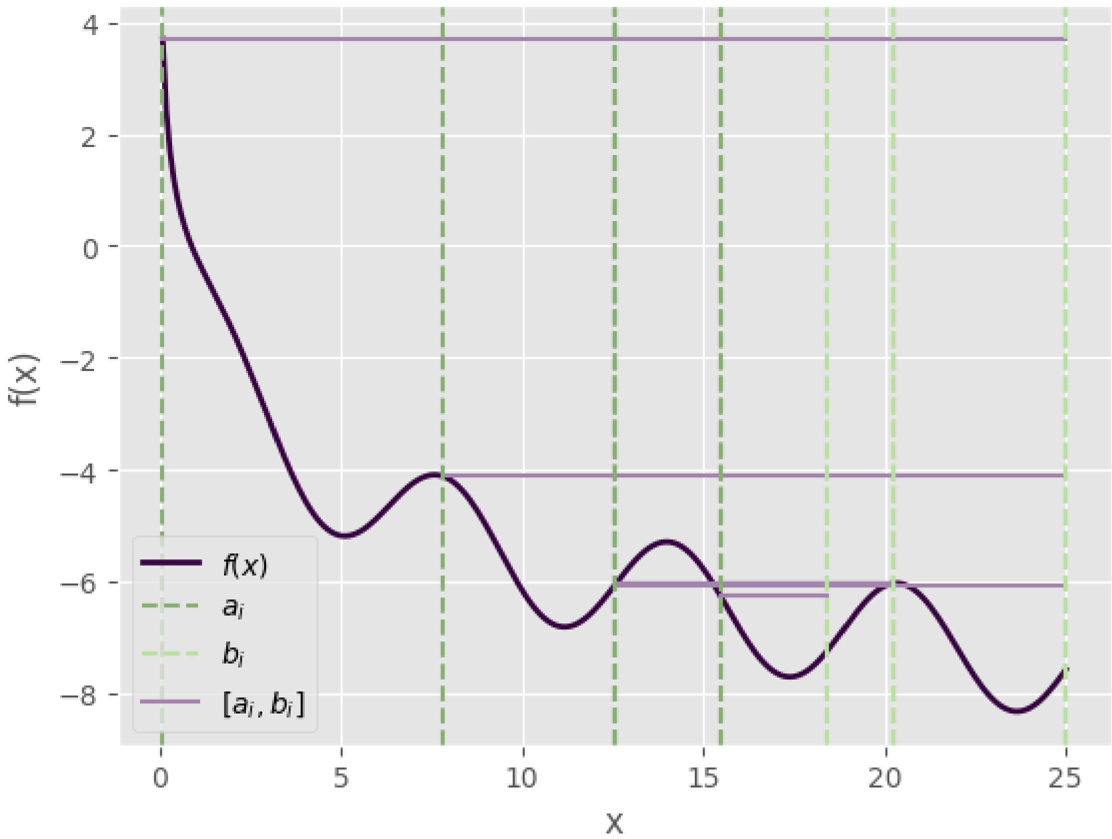
Out[2037]:

```
{'x min': 25,
 'y min': -7.570103399834174,
 'iterations count': 3,
 'intervals': <prettytable.PrettyTable at 0x78fa66526d70>,
 'computations': 6}
```

Комбинированный метод Брента

In [203…

```
brent(f, 0.1, 25, 0.1, 500, True)
```




```
Searching finished successfully. code 0
+-----------+--------------------+--------------------+---------------------
-+
| iteration |         a          |         b          |        length
|
+-----------+--------------------+--------------------+---------------------
-+
|     0     |        0.1         |         25         |         24.9
|
|     1     | 7.794523159936192  |         25         |  12.450000000000001
|
|     2     |       12.55        |         25         |        12.45
|
|     3     |       12.55        | 20.244523159936193 |  7.694523159936189
|
|     4     |       12.55        | 20.244523159936193 |  7.6945231599361925
|
|     5     |       12.55        | 20.244523159936193 |  7.6945231599361925
|
|     6     | 15.489046319872383 | 20.244523159936193 |   4.75547684006381
|
|     7     | 15.489046319872383 | 18.428092639744765 |  2.939046319872382
|
|     8     | 15.489046319872383 | 18.428092639744765 |  2.939046319872382
|
|     9     | 17.30547684006381  | 17.362262267088468 | 0.056785427024657054
|
+-----------+--------------------+--------------------+---------------------
-+
```

Out[2038]:

```
{'x min': 17.30547684006381,
 'y min': -7.701689179137533,
 'iterations count': 9,
 'intervals': <prettytable.PrettyTable at 0x78fa6e66dd20>,
 'computations': 6}
```

Выводы

Методы показывают себя по разному на многомодальных функциях. Наличие нескольких минимумов не повлияло на сходимость методов деления отрезка, однако выбранный ими ответ различается. Метод Брента, в отличие от метода парабол, сошелся и на многомодальной функции.

Итоги

В работе были рассмотрены различные методы одномерной оптимизации нулевого порядка. Методы деления отрезка показывают себя более надежными методами и предпочтительны тогда, когда требуется надежная работа алгоритма при неизвестной заранее форме целевой функции. Для целевых функций, близких к квадратичным, будет эффективнее использовать метод парабол, однако его сходимость не гарантируется в связи с тем, что начальное приближение может не попасть в окрестность искомого минимума. Эту проблему исправляет комбинированный метод Брента, т.к. он имеет гарантированную, но более медленную сходимость.

Источники

1. Васильев, Ф. П. Методы оптимизации : учебное пособие / Ф. П. Васильев. — Москва : МЦНМО, [б. г.]. — Книга 1 — 2011. — 624 с. - ISBN 978-5-94057-707-2
2. Аттетков, А. В. Численные методы решения задач многомерной безусловной минимизации. : методические указания / А. В. Аттетков, А. Н. Канатников, Е. С. Тверская; под редакцией С. Б. Ткачева. — Москва : МГТУ им. Н.Э. Баумана, [б. г.]. — Часть 1 : Методы первого и второго порядков: Методические указания по курсу «Методы оптимизации» — 2009. — 47 с.
3. A. Ben-Tal, A. Nemirovski. Optimization IIT. Lecture Notes, 2013.
4. Поляков, В. М. Методы оптимизации: Учебное пособие / В. М. Поляков, Агаларов З. С. : Москва : ИТК "Дашков и К " - Книга 1 - 2022. - 86 с. - ISBN 978-5-394-05003-9