ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

Факультет информационных технологий и программирования

Лабораторная работа №2

Решение СЛАУ. Использование СЛАУ для решения динамических задач. Оценка обусловленности.

Выполнила:
студентка группы M34021
Кумирова Екатерина Александровна

Принял:
кандидат физико-математических наук
Штумпф Святослав Алексеевич

Санкт-Петербург
2024 год

Производим расщепление по 2ум физическим процессам.

Система уравнений Лотки-Вольтерра «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \hat{x} = \alpha x - xy \\ \hat{y} = \beta xy - cy \end{cases}$$

$x(0) = x_0 > 0,\ y(0) = y_0 > 0$

x − безразмерная численность жертв, y − безразмерная численность хищников

β, c − положительные константы ($\beta < 1$)

Скорость размножения жертв: $\alpha(t) = \alpha_0(1 + \sin(\omega t))$.

Итоговая численная схема:

$$\begin{cases} x(t + \frac{\tau}{2}) = \frac{6}{11} \cdot (\frac{\tau}{2}(a(t)x(t) - x(t)y(t)) + \frac{1}{3}x(t - \tau) - 1.5x(t - \frac{1}{2}\tau) + 3x(t)) \\ y(t + \frac{\tau}{2}) = \frac{6}{11} \cdot (\frac{\tau}{2}(bx(t)y(t) - cy(t)) + \frac{1}{3}x(t - \tau) - 1.5x(t - \frac{1}{2}\tau) + 3x(t)) \end{cases}$$

Миграция хищников/жертв между границами:

$$\dot{x}_i = \nu_x \sum_{j \in \textbf{сопредельные}} (x_j - x_i)$$

$\dot{x}_i = \nu_x x_{j_1} + \nu_x x_{j_2} + \ldots + \nu_x x_{j_k} - \nu_x k x_i$

$$\frac{x_i(t + \tau) - x_i(t + \frac{\tau}{2})}{\frac{\tau}{2}} = \nu_x x_{j_1}(t + \frac{\tau}{2}) + \nu_x x_{j_2}(t + \frac{\tau}{2}) + \ldots + \nu_x x_{j_k}(t + \frac{\tau}{2}) - \nu_x k x_i(t + \frac{\tau}{2})$$

$$x_i(t + \tau) = \frac{\tau}{2}\nu_x x_{j_1}(t + \frac{\tau}{2}) + \frac{\tau}{2}\nu_x x_{j_2}(t + \frac{\tau}{2}) + \ldots + \frac{\tau}{2}\nu_x x_{j_k}(t + \frac{\tau}{2}) - \frac{\tau}{2}\nu_x k x_i(t + \frac{\tau}{2}) + x_i(t + \frac{\tau}{2})$$

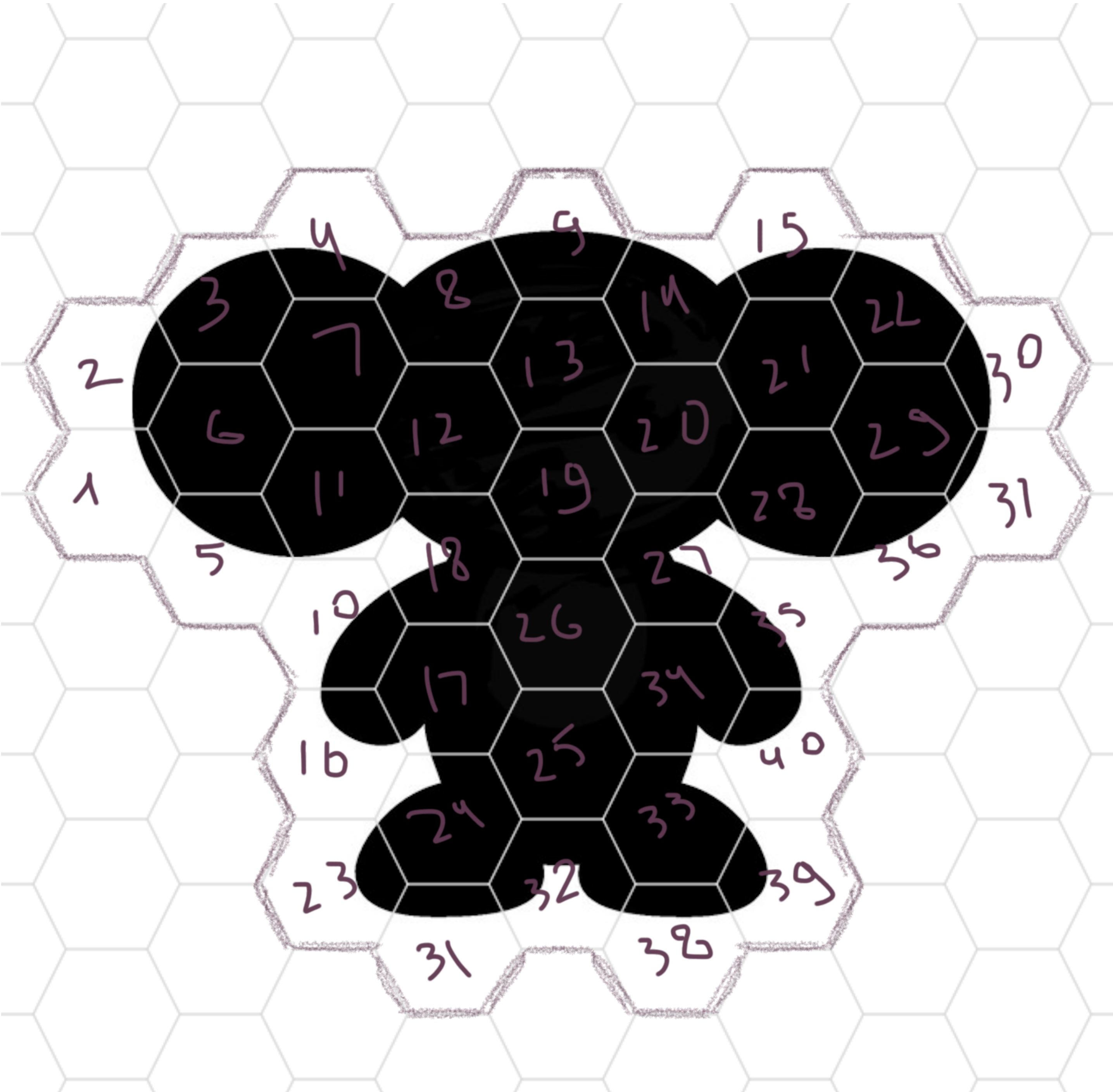
$$x_i(t + \tau) = \frac{\tau}{2}\nu_x x_{j_1}(t + \frac{\tau}{2}) + \frac{\tau}{2}\nu_x x_{j_2}(t + \frac{\tau}{2}) + \ldots + \frac{\tau}{2}\nu_x x_{j_k}(t + \frac{\tau}{2}) + (1 - \frac{\tau}{2}\nu_x k)x_i(t + \frac{\tau}{2})$$

$x(t + \tau) = Ax(t + \dfrac{\tau}{2})$ (для всех ячеек), по аналогии $y(t + \tau) = Ay(t + \dfrac{\tau}{2})$

Кумирова Екатерина M34021

Лабораторная работа №2

Контур Чебурашки



In [ ]:
```
import cv2
import math
import numpy as np
from google.colab import drive
from google.colab.patches import cv2_imshow
from PIL import Image, ImageDraw
import random
from scipy.optimize import fsolve
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib as mpl
import seaborn as sns
```

In [ ]:
```
mpl.style.use(['ggplot'])
```

Расчет матрицы смежности для сопредельных клеток

Пары сопредельных шестиугольников такие, что $i < j$.

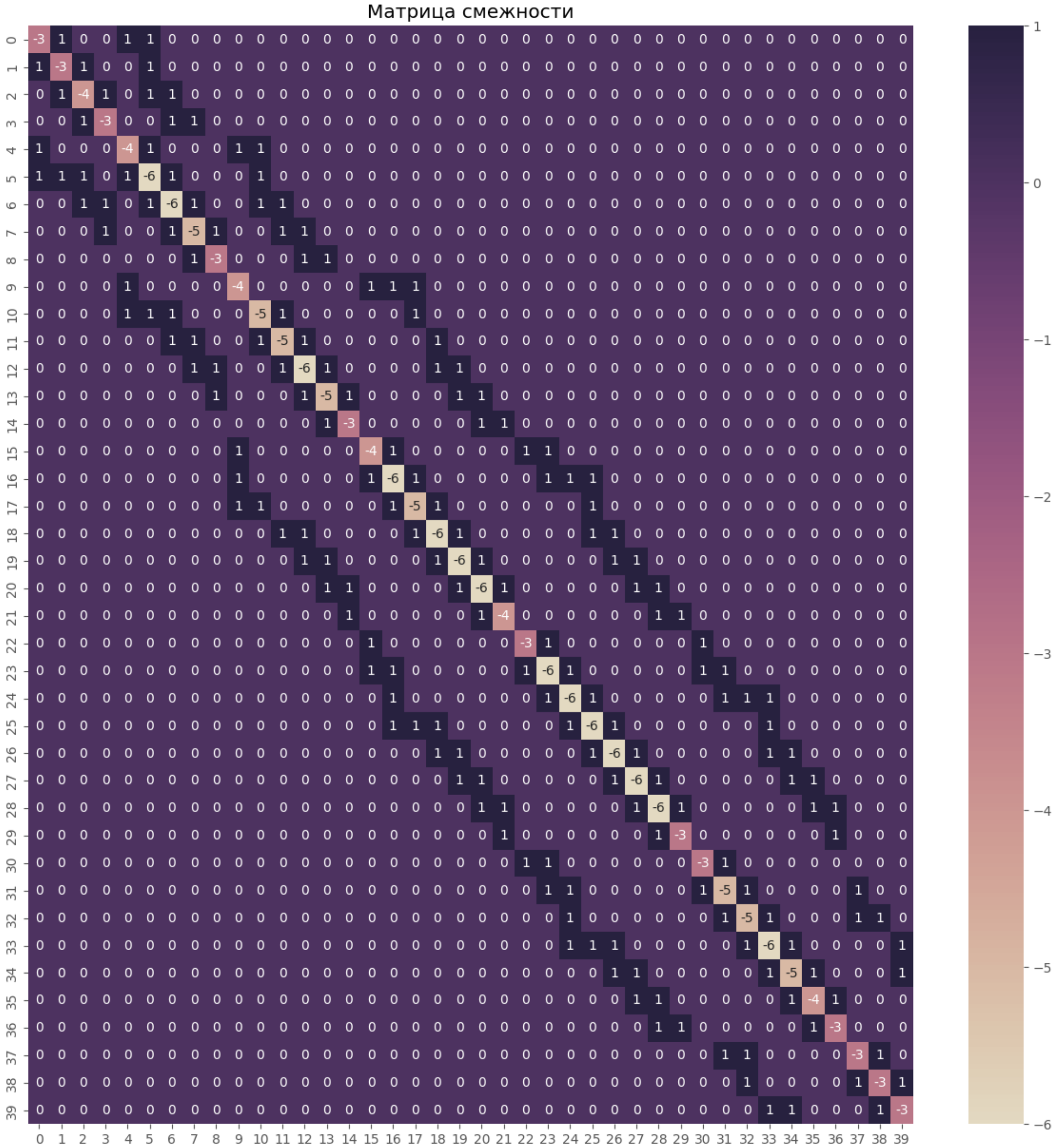
In [ ]:
```
adjacency_list = [(1, 2), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 6), (3, 4), (3, 6), (3, 7), (4, 7), (4, 8), (5, 6), (5, 10), (5, 11), (6, 7), (6, 11), (7, 8), (7, 11), (7, 12), (8, 9), (8
```

In [ ]:
```
import numpy as np

def get_adj_matrix(connections, N):
    adj_matrix = np.zeros((N, N), dtype=int)

    for adj_i, adj_j in connections:
        adj_matrix[adj_i - 1, adj_j - 1] = 1
        adj_matrix[adj_j - 1, adj_i - 1] = 1

    np.fill_diagonal(adj_matrix, -np.sum(adj_matrix, axis=1))

    return adj_matrix
```

In [ ]:
```
matrix = get_adj_matrix(adjacency_list, 40)
matrix
```

Out[ ]:
```
array([[-3,  1,  0, ...,  0,  0,  0],
       [ 1, -3,  1, ...,  0,  0,  0],
       [ 0,  1, -4, ...,  0,  0,  0],
       ...,
       [ 0,  0,  0, ..., -3,  1,  0],
       [ 0,  0,  0, ...,  1, -3,  1],
       [ 0,  0,  0, ...,  0,  1, -3]])
```

In [ ]:
```python
plt.figure(figsize = (15, 15))
plt.title('Матрица смежности')
sns.heatmap(matrix, annot = True, cmap=sns.color_palette("ch:s=-.2,r=.6", as_cmap=True))

plt.show()
```



Реализация модели

In [ ]:
```python
import math

class Modeling:
    def __init__(self, x0, y0, tau, vx, vy, N_areas, adj_matrix, a_0, w, b=0.4, c=1.7):
        self.x = [x0.copy() for _ in range(N_areas)]
        self.y = [y0.copy() for _ in range(N_areas)]
        self.tau = tau
        self.t_arr = [[0, tau, tau * 2] for _ in range(N_areas)]
        self.vx_t = vx * tau
        self.vy_t = vy * tau
        self.adj_matrix = adj_matrix
        self.a_0 = a_0
        self.w = w
        self.b = b
        self.c = c

    def lotki_volterra(self, t, x, y):
        def a(t):
            return self.a_0 * (1 + math.sin(self.w * t))

        a_0 = -1 / 3
        a_1 = 1.5
        a_2 = -3
        a_3 = 11 / 6

        x_value = (self.tau * (a(t - self.tau) * x[-1] - x[-1] * y[-1]) - a_0 * x[-3] - a_1 * x[-2] - a_2 * x[-1]) / a_3
        y_value = (self.tau * (self.b * x[-1] * y[-1] - self.c * y[-1]) - a_0 * y[-3] - a_1 * y[-2] - a_2 * y[-1]) / a_3

        return [t, x_value, y_value]

    def compute_next(self):
        next_states = [
            self.lotki_volterra(self.t_arr[i][-1] + self.tau, self.x[i], self.y[i])
            for i in range(len(self.x))
        ]
```

```
        for i in range(len(self.x)):
            t_new, x, y = next_states[i]
            neighbours = [j for j in range(len(self.x)) if self.adj_matrix[i][j] > 0]
            x_i = x + self.vx_t * sum(next_states[j][1] - x for j in neighbours)
            y_i = y + self.vy_t * sum(next_states[j][2] - y for j in neighbours)
            self.x[i].append(x_i)
            self.y[i].append(y_i)
            self.t_arr[i].append(t_new)

    def compute(self, iters):
        for _ in range(iters):
            self.compute_next()

    def set_zeros(self, ind_list):
        for ind in ind_list:
            self.x[ind] = [0, 0, 0]
            self.y[ind] = [0, 0, 0]
            self.t_arr[ind] = self.t_arr[ind][:3]

    def at(self, ind):
        return self.t_arr[ind], self.x[ind], self.y[ind]
```

Начальные условия

In [ ]:
```
x0 = [8.7, 9.2, 10]
y0 = [3.9, 4.2, 4.4]
```

In [ ]:
```
vx = 1 # количество мигрирущих жертв за ед. времени
vy = 1.3 # количество мигрирущих хищников за ед. времени
```

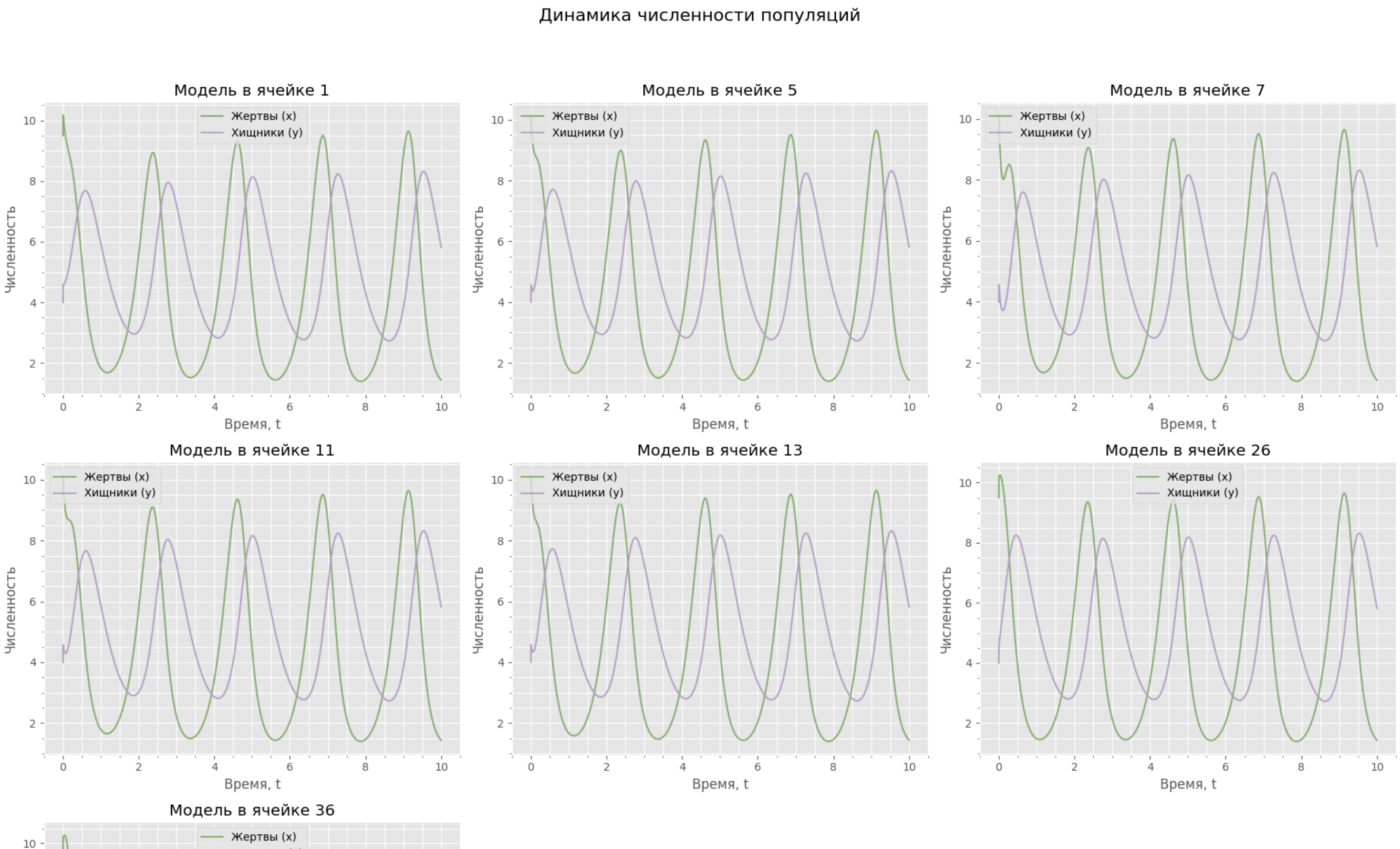
In [ ]:
```
grouped_models = Modeling(x0 = [9.5,9.7,10], y0 = [4, 4.3, 4.5], vx = 1, vy = 1.2,
                            N_areas=37, adj_matrix=matrix,
                            tau = 0.001,
                            a_0 = 5,
                            w = 0,
                            b = 0.4,
                            c = 1.7)
grouped_models.set_zeros([2, 6, 8, 12])
grouped_models.compute(iters = 10000)
```

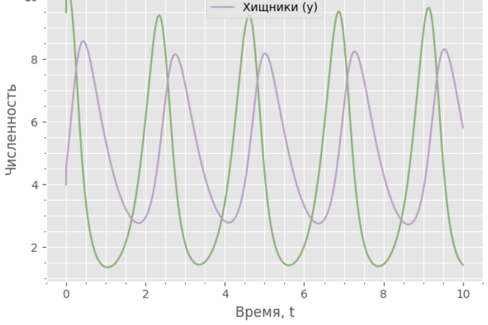
Визуализация моделирования миграции

In [ ]:
```
cells_to_visualize = [1, 5, 7, 11, 13, 26, 36]
```

In [ ]:
```
def visualize_cells(grouped_models, cells_to_visualize):
    num_cells = len(cells_to_visualize)
    fig, axes = plt.subplots(
        nrows=(num_cells + 2) // 3, ncols=3, figsize=(18, (num_cells + 2) // 3 * 5)
    )
    axes = axes.flatten()  # Преобразуем массив осей в одномерный для удобства
    fig.suptitle("Динамика численности популяций", fontsize=16)

    for idx, cell_i in enumerate(cells_to_visualize):
        ts, xs, ys = grouped_models.at(cell_i)
        ax = axes[idx]
        ax.grid(True, which='both')
        ax.minorticks_on()
        ax.plot(ts, xs, color='xkcd:sage', label="Жертвы (x)")
        ax.plot(ts, ys, color='#B7A0C5', label="Хищники (y)")
        ax.legend()
        ax.set_xlabel("Время, t")
        ax.set_ylabel("Численность")
        ax.set_title(f"Модель в ячейке {cell_i}")

    for idx in range(len(cells_to_visualize), len(axes)):
        fig.delaxes(axes[idx])

    plt.tight_layout(rect=[0, 0, 1, 0.95])
    plt.show()
```

In [ ]:
```
visualize_cells(grouped_models, cells_to_visualize)
```





Оценка обусловленности моделирования миграции

In [ ]:
```
def get_group_migration_matrix(adj_matrix, vi, tau_i):
    matrix = adj_matrix.copy().astype(float)
    matrix *= tau_i / 2 * vi

    for i in range(len(matrix)):
        matrix[i][i] += 1

    return matrix
```

In [ ]:
```
from numpy import linalg as LA
migr_matrix = get_group_migration_matrix(matrix, max(vx, vy), 0.001)
LA.cond(migr_matrix)
```

Число обусловленности близко к 1, следовательно, СЛАУ обусловлена довольно хорошо.

Практическое исследование обусловленности

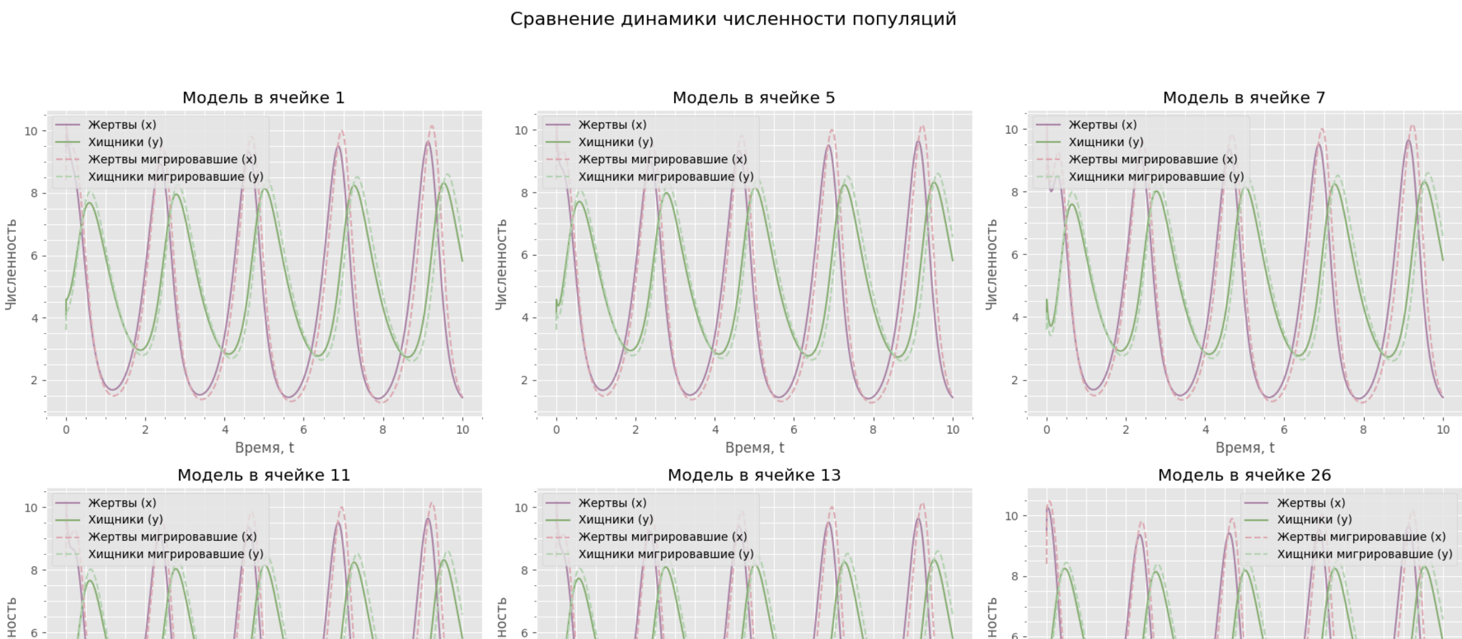
Уменьшим исходные значения для x и y на 0.3 и проверим, как малое изменение входных данных отразится на нашей сисетме:

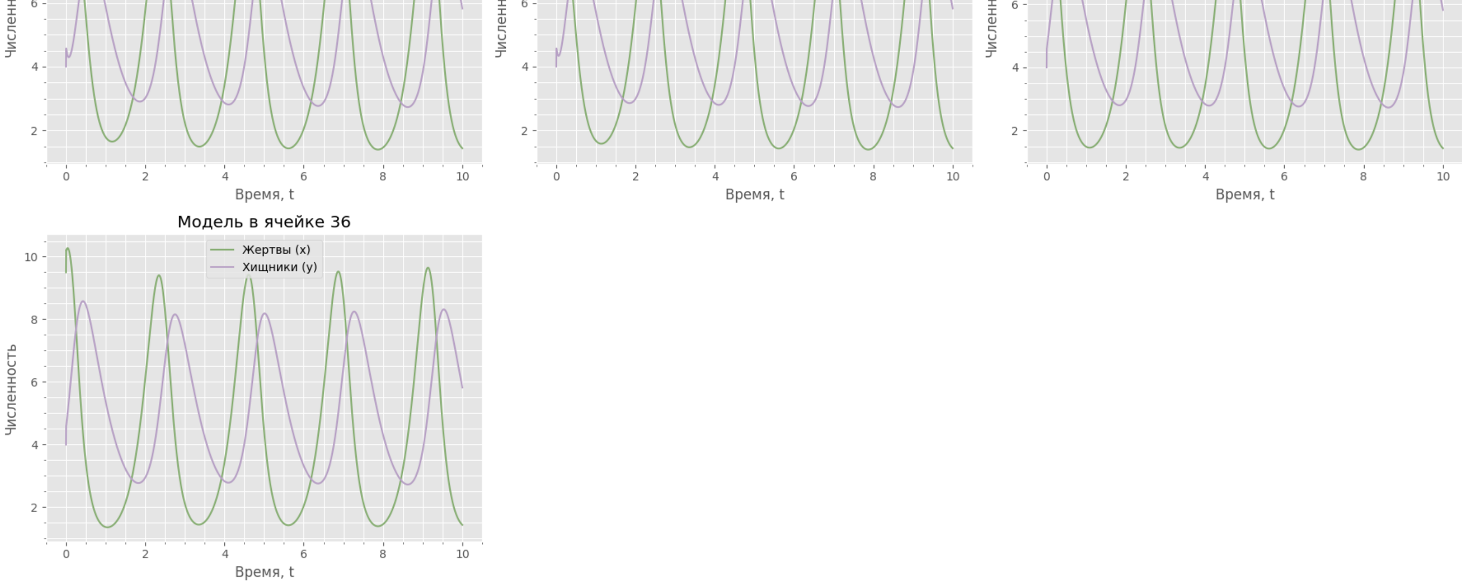
In [ ]:
```
x0 = [value - 0.3 for value in x0]
y0 = [value - 0.3 for value in y0]
```

In [ ]:
```
migrated_grouped_models = Modeling(x0 = x0, y0 = y0, vx = 1, vy = 1.2,
                            N_areas=37, adj_matrix=matrix,
                            tau = 0.001,
                            a_0 = 5,
                            w = 0,
                            b = 0.4,
                            c = 1.7)
migrated_grouped_models.set_zeros([2, 6, 8, 12])
migrated_grouped_models.compute(iters=10000)
```

In [ ]:
```
def visualize_migrated_vs_original(grouped_models, migrated_grouped_models, cells_to_visualize):
    num_cells = len(cells_to_visualize)
    fig, axes = plt.subplots(
        nrows=(num_cells + 2) // 3, ncols=3, figsize=(18, (num_cells + 2) // 3 * 5)
    )
    axes = axes.flatten()  # Преобразуем массив осей в одномерный для удобства
    fig.suptitle("Сравнение динамики численности популяций", fontsize=16)

    for idx, cell_i in enumerate(cells_to_visualize):
        ts_m, xs_m, ys_m = migrated_grouped_models.at(cell_i)
        ts, xs, ys = grouped_models.at(cell_i)
        ax = axes[idx]
        ax.grid(True, which='both')
        ax.minorticks_on()

        ax.plot(ts, xs, color='#aa83a6', label="Жертвы (x)")
        ax.plot(ts, ys, color='xkcd:sage', label="Хищники (y)")
        ax.plot(ts, xs_m, color='#dda9b2', ls='--', label="Жертвы мигрировавшие (x)")
        ax.plot(ts, ys_m, color='#b4d3b2', ls='--', label="Хищники мигрировавшие (y)")

        ax.legend()
        ax.set_xlabel("Время, t")
        ax.set_ylabel("Численность")
        ax.set_title(f"Модель в ячейке {cell_i}")

    for idx in range(len(cells_to_visualize), len(axes)):
        fig.delaxes(axes[idx])  # Удаление лишних пустых осей

    plt.tight_layout(rect=[0, 0, 1, 0.95])
    plt.show()
```

In [ ]:
```
visualize_migrated_vs_original(grouped_models, migrated_grouped_models, cells_to_visualize)
```





Оценка обусловленности моделирования миграции

```python
def get_group_migration_matrix(adj_matrix, vi, tau_i):
    matrix = adj_matrix.copy().astype(float)
    matrix *= tau_i / 2 * vi

    for i in range(len(matrix)):
        matrix[i][i] += 1

    return matrix
```

```python
from numpy import linalg as LA
migr_matrix = get_group_migration_matrix(matrix, max(vx, vy), 0.001)
LA.cond(migr_matrix)
```

Число обусловленности близко к 1, следовательно, СЛАУ обусловлена довольно хорошо.

Практическое исследование обусловленности

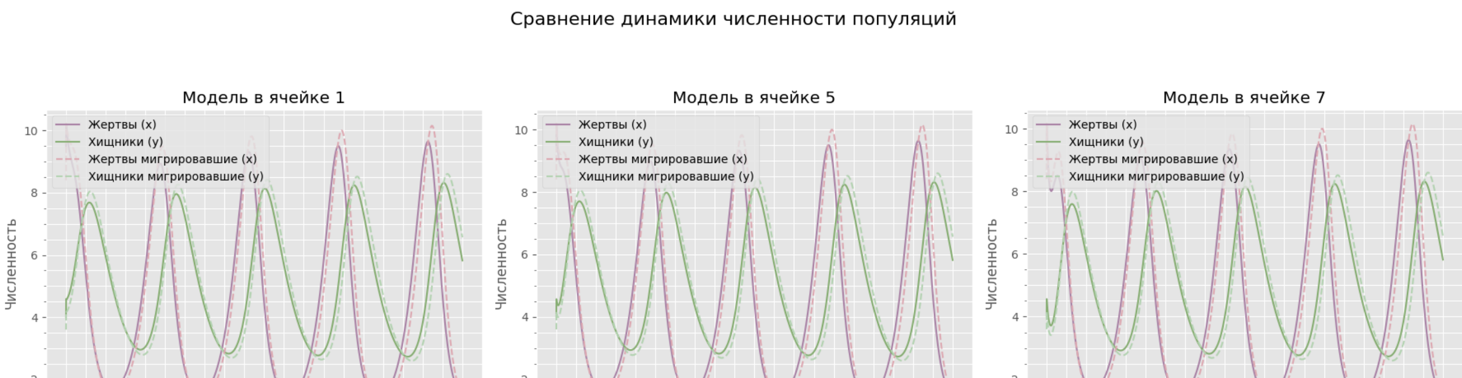
Уменьшим исходные значения для x и y на 0.3 и проверим, как малое изменение входных данных отразится на нашей сисетме:

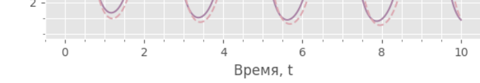
```python
x0 = [value - 0.3 for value in x0]
y0 = [value - 0.3 for value in y0]
```

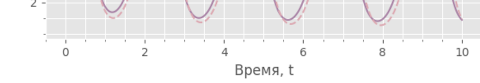
```python
migrated_grouped_models = Modeling(x0 = x0, y0 = y0, vx = 1, vy = 1.2,
                            N_areas=37, adj_matrix=matrix,
                            tau = 0.001,
                            a_0 = 5,
                            w = 0,
                            b = 0.4,
                            c = 1.7)
migrated_grouped_models.set_zeros([2, 6, 8, 12])
migrated_grouped_models.compute(iters=10000)
```

```python
def visualize_migrated_vs_original(grouped_models, migrated_grouped_models, cells_to_visualize):
    num_cells = len(cells_to_visualize)
    fig, axes = plt.subplots(
        nrows=(num_cells + 2) // 3, ncols=3, figsize=(18, (num_cells + 2) // 3 * 5)
    )
    axes = axes.flatten()  # Преобразуем массив осей в одномерный для удобства
    fig.suptitle("Сравнение динамики численности популяций", fontsize=16)

    for idx, cell_i in enumerate(cells_to_visualize):
        ts_m, xs_m, ys_m = migrated_grouped_models.at(cell_i)
        ts, xs, ys = grouped_models.at(cell_i)
        ax = axes[idx]
        ax.grid(True, which='both')
        ax.minorticks_on()

        ax.plot(ts, xs, color='#aa83a6', label="Жертвы (x)")
        ax.plot(ts, ys, color='xkcd:sage', label="Хищники (y)")
        ax.plot(ts, xs_m, color='#dda9b2', ls='--', label="Жертвы мигрировавшие (x)")
        ax.plot(ts, ys_m, color='#b4d3b2', ls='--', label="Хищники мигрировавшие (y)")

        ax.legend()
        ax.set_xlabel("Время, t")
        ax.set_ylabel("Численность")
        ax.set_title(f"Модель в ячейке {cell_i}")

    for idx in range(len(cells_to_visualize), len(axes)):
        fig.delaxes(axes[idx])  # Удаление лишних пустых осей

    plt.tight_layout(rect=[0, 0, 1, 0.95])
    plt.show()
```

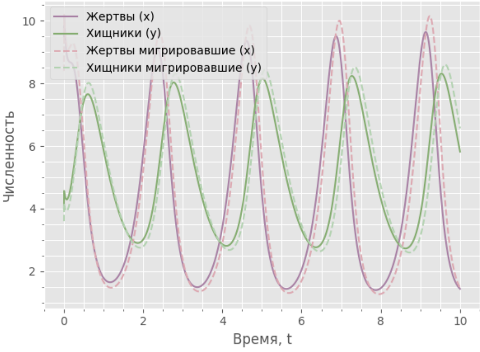
```python
visualize_migrated_vs_original(grouped_models, migrated_grouped_models, cells_to_visualize)
```



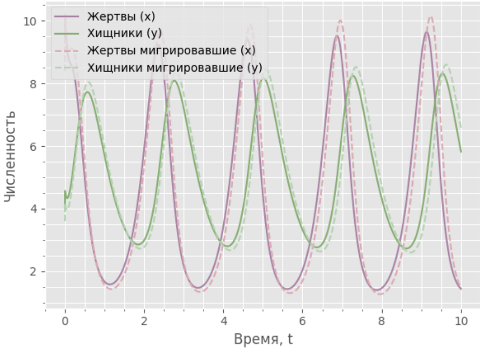




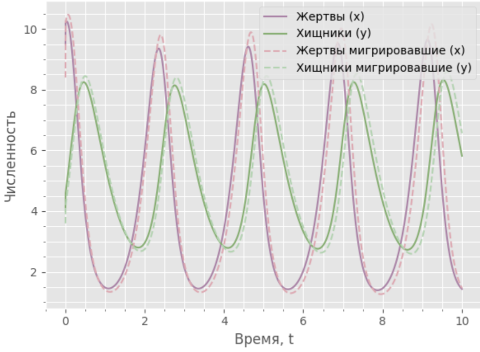
Модель в ячейке 11



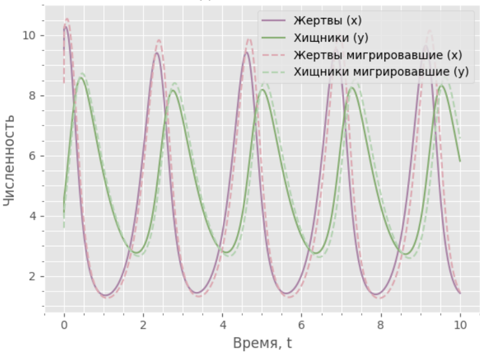
Модель в ячейке 13



Модель в ячейке 26



Модель в ячейке 36



Данный эксперимент наглядно демонстрирует, что, при малых возмущениях входных данных, значения выходных данных также меняются незначительно. Можно сделать вывод о том, что СЛАУ обсуловлена хорошо (погрешность входных данных не сильно влияет на решение)