$E_1 = 100 \cdot e^{j \cdot 0} = 100\{V\}$ $\quad \cos\omega t = \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$

$I_{g_5} = 10 \cdot e^{j \cdot 0} = 10\{A\}$

$E_2 = 100 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{2}} = 100(\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} + j \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}) = 100j\{V\}$

$$\begin{cases} -\underline{I}_1 + \underline{I}_4 = -10 \\ \underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0 \\ \underline{I}_5 = 10 \\ 5\underline{I}_1 - 20j\,\underline{I}_3 + 10j\,\underline{I}_3 + 10j\,\underline{I}_2 - 10j\,\underline{I}_4 + 10j\,\underline{I}_4 - 10j\,\underline{I}_3 - 20j\,\underline{I}_4 = 100 \\ 10j\,\underline{I}_2 + 10j\,\underline{I}_3 - 10j\,\underline{I}_3 - 10j\,\underline{I}_2 + 10j\,\underline{I}_4 + 20j\,\underline{I}_3 = 100j \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = 20\{A\} \\ \underline{I}_2 = 20\{A\} \\ \underline{I}_3 = 0\{A\} \\ \underline{I}_4 = 10\{A\} \\ \underline{I}_5 = 10\{A\} \end{cases}$$

Fig 9

Metoda curenților ciclici

$\underline{Z}_{11}\underline{I}_1' + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2' \dots + \underline{Z}_{1B}\underline{I}_B' = \sum_{k \in B_1} \underline{E}_k$

Sec: $\underline{Z}_{21}\underline{I}_1' + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2' + \dots + \underline{Z}_{2B}\underline{I}_B' = \sum_{k \in B_2} \underline{E}_k$

$\dots$

$\underline{Z}_{B1}\underline{I}_1' + \underline{Z}$

$\Rightarrow \underline{I}_1', \underline{I}_2', \dots, \underline{I}_B' \Rightarrow \underline{I}_1, \underline{I}_2, \dots, \underline{I}$

Reguli de stabilire a semnelor

1) Impedanțe proprii ($\underline{Z}_{kk}$): dacă în buclă există 2 bobine cuplate mutual, atunci termenul mutual se scrie $2j\omega L_{kj}$ cu semnul + sau − în funcție de sensul curentului de buclă prin bornele marcate: + dacă curentul are același sens față de bornele marcate și − în caz contrar.

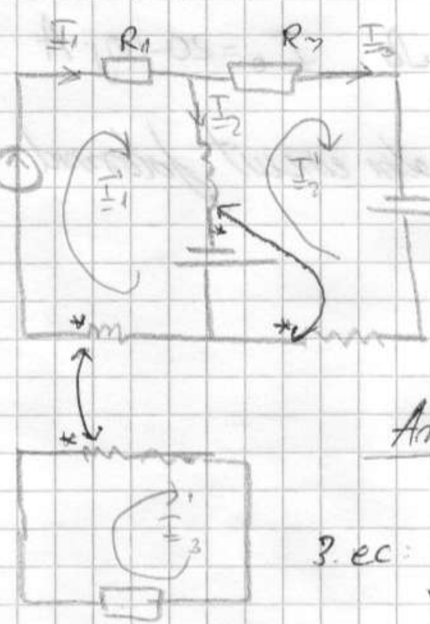
2.) Impedanțe mutuale ($\underline{Z}_{kj}$, $k \neq j$): termenul corespunzător are 2 componente:

1. - termenii existenți în mod fizic pe latură cu semnul + sau − în funcție de sensul curenților de ciclu prin latura respectivă
2. - termenii datorați de cuplajele mutuale pentru fiecare stabilindu-se în mod

independent semnul în funcție de sensul curenților de buclă din bobinele de cuplaj în raport cu bornele marcate. Dacă are același sens (+) în caz contrar (-).

Aplicație:

① Pentru circuitul din figură să se afle curenții din circuit folosind metoda curenților ciclici.



$e_1(t) = 200\sqrt{2}\sin 100\pi t$

$R_1 = R_3 = R_4 = 2\,\Omega$

$\omega L_1 = \omega L_2 = \omega L_3 = \omega L_4 = 4\,\Omega$

$\omega L_{14} = \omega L_{23} = 2\,\Omega$

$\frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{\omega C_3} = 2\,\Omega$

Analiza topologică: $N = 3$, $L = 4$, $S = 2$, $B = 3$

3 ec: $\begin{cases} \underline{Z}_{11}\underline{I}_1' + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2' + \underline{Z}_{13}\underline{I}_3' = \underline{E}_1 \\ \underline{Z}_{21}\underline{I}_1' + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2' + \underline{Z}_{23}\underline{I}_3' = 0 \\ \underline{Z}_{31}\underline{I}_1' + \underline{Z}_{32}\underline{I}_2' + \underline{Z}_{33}\underline{I}_3' = 0 \end{cases}$

$\underline{Z}_{11} = R_1 + j\omega L_2 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_2} = 2 + 4j + 4j - 2j = 2 + 6j\,\Omega$

$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = -\left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega}\right) + j\omega L_{23} = -(4j - 2j) + 2j = 0$

$\underline{Z}_{13} = \underline{Z}_{31} = -j\omega L_{14} = -2j\,\Omega$

$\underline{Z}_{22} = R_3 + \frac{1}{j\omega C_3} + j\omega L_3 + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} - 2j\omega L_{23} = 2 \cancel{-2j} \cancel{+4j} \cancel{+4j} \cancel{-2j} \cancel{-4j} = 2\,\Omega$

$\underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{32} = 0$

$\underline{Z}_{33} = R_4 + j\omega L_4 = 2 + 4j\,\Omega$

$\begin{cases} (2+6j)\underline{I}_1' + 0 + (-2j)\underline{I}_3' = 200 \\ 0 + 2\underline{I}_2' + 0 = 0 \\ -2j\underline{I}_1' + 0 + (2+4j)\underline{I}_3' = 0 \end{cases}$

$E_1 = 200 \cdot e^{j\cdot 0} = 200$

$\underline{I}_2' = 0$

$\begin{cases} (2+6j)\underline{I}_1' - 2j\underline{I}_3' = 200 \\ -2j\underline{I}_1' + (2+4j)\underline{I}_3' = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \underline{I}_1' = \frac{100}{41}(6-13j)\,A \\ \underline{I}_2' = 0 \\ \underline{I}_3' = \frac{100}{41}(5-4j)\,A \end{cases}$

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{I}_1' \text{ A} \\ \underline{I}_2 = \underline{I}_1' - \underline{I}_2' = \frac{100}{41}(6-13j) - 0 \text{ A} \\ \underline{I}_3 = \underline{I}_2' \text{ A} \\ \underline{I}_4 = \underline{I}_3' \text{ A} \end{cases}$$

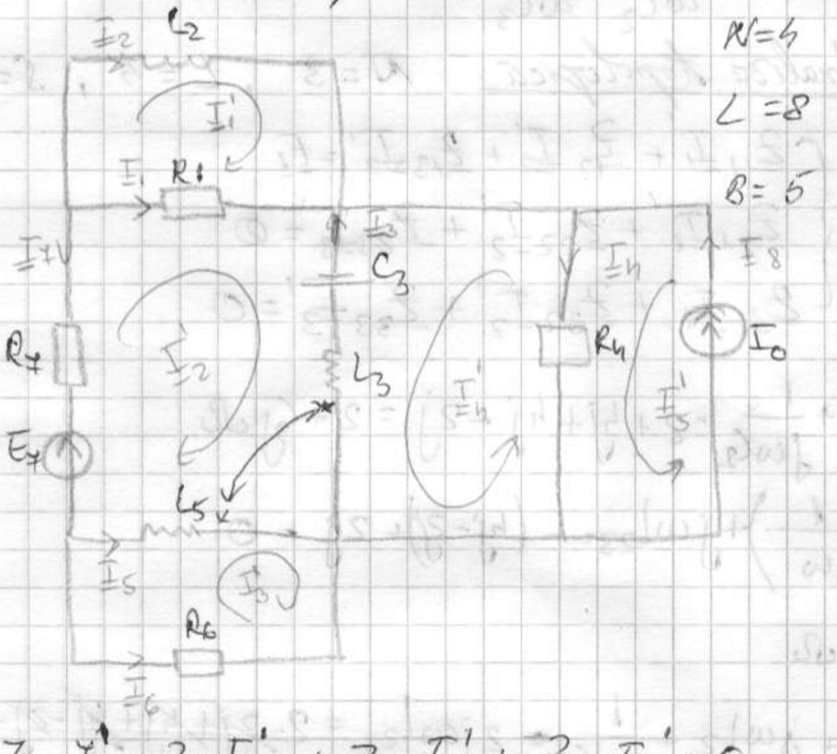
(2) Temă

(3) Se dă circuitul din figură: $R_1 = 2\Omega$, $\omega L_2 = \omega L_3 = 2\Omega$.

$\frac{1}{\omega C_3} = 1\Omega$, $R_4 = R_6 = R_7 = 1\Omega$, $\omega L_5 = 1\Omega$, $\omega L_{35} = 1\Omega$, $\underline{I}_0 = 20 - 10j$ A

$\underline{E}_7 = 20 + 10j$ V. Se cere: a.) Să se calculeze curenții din circuit folosind metoda curenților ciclici

b) Să se realizeze bilanțul puterilor



$$\begin{cases} \underline{Z}_{11}\underline{I}_1' + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2' + \underline{Z}_{13}\underline{I}_3' + \underline{Z}_{14}\underline{I}_4' + \underline{Z}_{15}\underline{I}_5' = 0 \\ \underline{Z}_{21}\underline{I}_1' + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2' + \underline{Z}_{23}\underline{I}_3' + \underline{Z}_{24}\underline{I}_4' + \underline{Z}_{25}\underline{I}_5' = \underline{E}_7 \\ \underline{Z}_{31}\underline{I}_1' + \underline{Z}_{32}\underline{I}_2' + \underline{Z}_{33}\underline{I}_3' + \underline{Z}_{34}\underline{I}_4' + \underline{Z}_{35}\underline{I}_5' = 0 \\ \underline{Z}_{41}\underline{I}_1' + \underline{Z}_{42}\underline{I}_2' + \underline{Z}_{43}\underline{I}_3' + \underline{Z}_{45}\underline{I}_4' + \underline{Z}_{45}\underline{I}_5' = \\ \underline{I}_5' = \underline{I}_0 \end{cases}$$

$\underline{Z}_{11} = R_1 + j\omega L_2 = 2 + 2j$

$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = -R_1 = 2\Omega$

$\underline{Z}_{13} = \underline{Z}_{31} = 0$

$\underline{Z}_{14} = \underline{Z}_{41} = 0$

$\underline{Z}_{15} = \underline{Z}_{51} = 0 \qquad \underline{Z}_{25} = 0$

$\underline{Z}_{22} = R_1 + R_7 + \frac{1}{j\omega C_3} + j\omega L_3 + j\omega L_5 - 2j\omega L_{35} = 3\Omega$

$\underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{32} = -j\omega L_5 + j\omega L_{35} = 0$

$\underline{Z}_{24} = \underline{Z}_{42} = \frac{1}{j\omega C_3} + j\omega L_3 - j\omega L_{35} = 0$

$\underline{Z}_{34} = \underline{Z}_{43} = j\omega L_{35} = j$

$\underline{Z}_{33} = R_5 + j\omega L_5 = 1 + j$

$\underline{Z}_{35} = 0$

$\underline{Z}_{44} = R_4 + \frac{1}{j\omega C_3} + j\omega L_3 = j + 4$

$\underline{Z}_{45} = -R_4 = -1$

$$\begin{cases} 2(1+j)\underline{I}_1' - 2\underline{I}_2' = 0 \\ -2\underline{I}_1' + 3\underline{I}_2' = 20 + 10j \\ (1+j)\underline{I}_3' + j\underline{I}_4' = 0 \\ j\underline{I}_3' + (j+1)\underline{I}_4' - 1(20-10j) = 0 \\ \underline{I}_5' = 20 - 10j \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{I}_1' = 5 - 5j \text{ A} \\ \underline{I}_2' = 10 \text{ A} \\ \underline{I}_3' = -10 \text{ A} \\ \underline{I}_4' = 10 - 10j \text{ A} \\ \underline{I}_5' = 20 - 10j \text{ A} \end{cases} \qquad \begin{cases} \underline{I}_1 = -\underline{I}_1' + \underline{I}_2' = 5(1+j) \text{ A} \\ \underline{I}_2 = \underline{I}_1' = 5(1-j) \text{ A} \\ \underline{I}_3 = -\underline{I}_2' - \underline{I}_4' = -20 + 10j \text{ A} \\ \underline{I}_4 = -\underline{I}_4' + \underline{I}_5' = 10 \text{ A} \\ \underline{I}_5 = -\underline{I}_2' + \underline{I}_3' = -20 \text{ A} \\ \underline{I}_6 = \underline{I}_3' = 10 \text{ A} \\ \underline{I}_7 = -\underline{I}_2' = -10 \text{ A} \\ \underline{I}_8 = \underline{I}_5' = \underline{I}_0 \end{cases}$$

Bilanțul puterilor presupune verificarea faptului că puterea debitată de surse este egală cu puterea consumată pe elementele active și reactive.

Puterea debitată de surse $\underline{S} = \underline{E}\,\underline{I}^* + \underline{I}_0^*\,\underline{U}_0 = P + jQ$ [VA]

$\underline{S} = -\underline{E}_7 \cdot \underline{I}_7^* + \underline{U}_0 \cdot \underline{I}^* = -(20+10j)\cdot(-10) + 10\cdot(20+10j) = 400 + 200j$ [VA]

$\underline{U}_0 = R_4 \cdot \underline{I}_4 = 1 \cdot 10 = 10$ [V]

$P = 400$ {W}

$Q = 200$ {VAr}

Puterea activă consumată pe rezistențe $P=\sum_{k=1}^{L} R\cdot I^2$

$$P = R_7 I_7^2 + R_1 I_1^2 + R_6 I_6^2 + R_6 I_6^2 + R_4 I_4^2 = 1\cdot 100 + 2\cdot 50 + 1\cdot 100 + 1\cdot 100 = 400 \{W\}$$

Puterea reactivă care se consumă pe elementele reactive ale circuitului (bobine și condensator)

$$P=\sum_{k=1}^{L} R\cdot I^2$$

$$Q=\sum X_L I_L^2 - \sum X_C I_C^2 + 2\sum \varepsilon_{pq}\,\omega L_{pq} I_p I_q \cos(\gamma_{I_p}-\gamma_{I_q})$$

$$\varepsilon_{pq}=\begin{cases}1, & \text{dacă } I_p \text{ și } I_q \text{ au același sens față de bornele marcate}\\ -1, & \text{în caz contrar}\end{cases}$$

$$Q=\omega L_2 I_2^2 + \omega L_3 I_3^2 + \omega L_5 I_5^2 - \frac{1}{\omega C_3} I_5^2 - \frac{1}{\omega C_3} I_3^2 - 2\omega L_{35} I_3 I_5 \cos(\gamma_{I_3}-\gamma_{I_5})$$

$$= 2\cdot 50 + 2\cdot 500 + 1\cdot 400 - 1\cdot 500 - 2\cdot 1\cdot\sqrt{500}\cdot 20\cos(\gamma_{I_3}-\gamma_{I_5}) = 200 \{VAr\}$$

$$\frac{\underline{I}_3}{\underline{I}_5} = \frac{I_3}{I_5}\cdot e^{j(\gamma_{I_3}-\gamma_{I_5})} = \frac{I_3}{I_5}\cos(\gamma_{I_3}-\gamma_{I_5}) - j\frac{I_3}{I_5}\sin(\gamma_{I_3}-\gamma_{I_5})$$

$$\frac{\underline{I}_3}{\underline{I}_5} = \frac{-20+10j}{-20} = 1-\frac{1}{2}j$$

$$\frac{I_3}{I_5}\cos(\gamma_{I_3}-\gamma_{I_5}) = 1 \Leftrightarrow \cos(\gamma_{I_3}-\gamma_{I_5}) = \frac{I_5}{I_3} = \frac{20}{\sqrt{500}}$$

Sem 10

Metoda potențialelor la noduri

Obs: Această metodă se poate aplica numai pe circuite fără cuplaje, sau pe circuite cu cuplaje după desfacerea cuplajelor

$(N-1)$ ec.:

$$\begin{cases}\underline{Y}_{11}\underline{V}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{V}_2 + \dots + \underline{Y}_{1k}\underline{V}_k = \underline{I}_{sc1}\\ \underline{Y}_{21}\underline{V}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{V}_2 + \dots + \underline{Y}_{2k}\underline{V}_k = \underline{I}_{sc2}\\ \quad -\,''\,- \\ \underline{Y}_{k1}\underline{V}_1 + \underline{Y}_{k2}\underline{V}_2 + \dots + \underline{Y}_{kk}\underline{V}_k = \underline{I}_{sck}\end{cases} \qquad \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}\{\Omega^{-1}\}$$

$\underline{Y}_{kk}$ = suma admitanțelor tuturor laturilor care se întâlnesc în nodul k

$\underline{Y}_{kj}$ = suma cu semn schimbat a admitanțelor laturilor care fac legătura