

CURS 5

5.1 Elemente de fizică statistică

Între parametrii macroscopici ai termodinamicii fenomenologice și cei microscopici există anumite relații astfel că identificarea unei stări microscopice duce la identificarea stării macroscopice generate de acea stare microscopică. Reciproca nu este adevărată deoarece există un mare număr de stări microscopice corespunzătoare aceleiași stări macroscopice.

Studiul sistemelor alcătuite dintr-un număr mare de particule arată că acestea sunt guvernate de *legi statistice*, diferite de legile ce descriu comportările individuale ale particulelor pe baza legilor mecanicii clasice. Mărimile macroscopice asociate sistemelor termodinamice rezultă din medierea mărimilor microscopice corespunzătoare particulelor componente ale sistemului termodinamic.

Determinarea unei stări macroscopice revine la localizarea stărilor sale microscopice în spațiul fazelor. Localizarea cu precizie a unei stări microscopice nu este posibilă și nici necesară deoarece, așa cum am arătat, există mai multe stări microscopice corespunzătoare aceleiași stări macroscopice. În schimb, este suficientă cunoașterea *distribuției* punctelor care reprezintă stările microscopice în spațiul fazelor. Pentru aceasta apelăm la considerații de *teoria probabilităților*.

Pentru a introduce elementele de teoria probabilităților aplicate la fenomene fizice (elemente de *fizică statistică*), vom analiza cazul unui sistem termodinamic concret, acela al moleculelor gazului atmosferic. Datorită agitației termice, moleculele gazului se distribuie uniform într-un vas astfel că, la starea de echilibru, concentrația moleculelor, presiunea și temperatura gazului vor avea aceleași valori în întreg volumul vasului. Aceste afirmații sunt valabile doar atâta vreme cât moleculele gazului nu sunt supuse acțiunii unor forțe exterioare care să le modifice repartitia în domeniul considerat. În realitate, pe lângă *agitația termică*, întotdeauna asupra moleculelor gazului acționează și *forța gravitațională*. Dacă nu ar exista agitația termică, moleculele de aer ar cădea pe Pământ sub acțiunea atracției gravitaționale, iar în absența atracției gravitaționale toate moleculele ar evada în spațiu ca efect al agitației termice. *Acțiunea simultană a agitației termice și atracției gravitaționale împiedică atât căderea moleculelor pe Pământ cât și răspândirea lor în Univers determinând stabilirea unei distribuții moleculare pe o anumită distanță în jurul Pământului.* Ne propunem să determinăm legea care guvernează această distribuție.

Fie o coloană de aer (fig.5.1). Notăm

p_0 = presiunea atmosferică la suprafața Pământului (la $z=0$)

p = presiunea atmosferică la altitudinea z .

Presiunea atmosferică la altitudinea z este

$$p = \rho g(H - z) \quad (5.1)$$

unde H este grosimea stratului atmosferic.

La o variație a altitudinii cu dz , presiunea variază cu dp . Cantitatea dp se obține prin diferențierea relației (5.1) și măsoară diferența presiunilor coloanelor de aer având ariile bazelor egale cu unitatea și înălțimile $z+dz$, respectiv z

$$dp = -\rho g dz \quad (5.2)$$

unde ρ = densitatea aerului și g = accelerația gravitațională, iar semnul minus este impus de faptul că variația dp este negativă. Dacă m este masa unei molecule iar n este concentrația moleculelor avem

$$\rho = n \cdot m \quad (5.3)$$

Înlocuim pe ρ din (5.3) în (5.2) și obținem

$$dp = -nm g dz \quad (5.4)$$

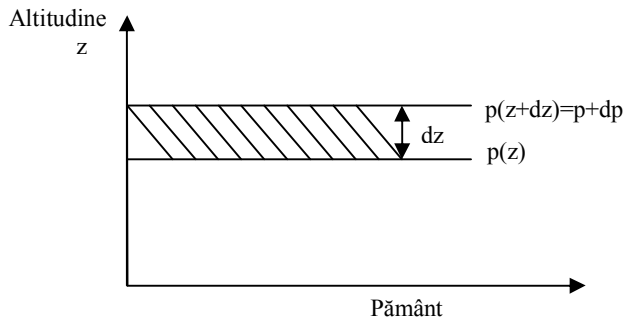


Fig.5.1 Distribuția moleculelor în atmosferă.

Fie ecuația de stare a gazelor ideale sub forma

$$pV = \nu RT = \nu N_A k_B T \quad (5.5)$$

de unde prin împărțire la V rezultă

$$p = nk_b T \quad (5.6)$$

unde n este concentrația de molecule.

Eliminând n între relațiile (5.4) și (5.6) obținem

$$dp = -\frac{mg}{k_B T} p dz$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{mg}{k_B T} dz$$
(5.7)

Considerând că temperatura este aceeași la orice altitudine (presupunere ce este adevărată numai pentru variații relativ reduse ale altitudinii), se obține prin integrare

$$\ln p = -\frac{mg}{k_B T} z + \ln C$$
(5.8)

unde $\ln C$ reprezintă constanta de integrare. De aici rezultă

$$p = C e^{-\frac{mg}{k_B T} z}$$
(5.9)

unde constanta C se determină impunând condiția că la $z=0$ presiunea să fie p_0 . Astfel, se obține **formula barometrică**

$$p = p_0 e^{-\frac{mg}{k_B T} z}$$
(5.10)

care reprezintă legea variației presiunii atmosferice cu altitudinea. Cu ajutorul ecuației de stare a gazelor ideale sub forma (5.3) obținem variația concentrației moleculelor cu altitudinea

$$n = n_0 e^{-\frac{mg}{k_B T} z}$$
(5.11)

Formulele (5.10) și (5.11) descriu aproximativ dependența presiunii atmosferice și a concentrației moleculelor de altitudine deoarece demonstrarea lor s-a bazat pe unele presupuneri simplificatoare. Astfel, deoarece contrar presupunerii noastre, temperatura variază cu altitudinea, ecuațiile anterioare sunt corecte numai pentru diferențe de altitudine relativ mici pentru care modificarea temperaturii nu este semnificativă. De asemenea, aceste calcule s-au bazat pe presupunerea că accelerația gravitațională nu depinde de altitudine, având valoarea constantă. Această presupunere este și ea valabilă numai pentru diferențe de altitudine relativ mici. Pentru diferențe mai mari de altitudine vom ține seama că accelerația gravitațională variază cu altitudinea conform relației

$$g(r) = k \frac{M}{(R + h)^2}$$
(5.12)

unde $k = 6.67 \cdot 10^{-11} N \frac{m^2}{kg^2}$ este constanta atracției universale, $M =$ masa

Pământului, iar $R =$ raza medie a Pământului.

Formula barometrică conține la numărătorul argumentului exponențialei expresia $mgz =$ energia potențială a moleculei aflate la înălțimea z . Se poate afirma că formula (5.11) exprimă concentrația de molecule n a căror energie potențială este $U = mgz$. Nu există nici un motiv pentru care am putea crede că s-ar obține o altă lege de variație a concentrației de molecule de aer cu altitudinea dacă în locul greutatei moleculelor am considera o altă forță ce acționează asupra acestora. Astfel, în general, dacă gazul se află într-un câmp de forțe oarecare astfel că particulele sale au o energie potențială U , distribuția moleculelor va fi exprimată de formula

$$n = n_0 e^{-\frac{U}{k_B T}} \quad (5.13)$$

numită **formula lui Boltzmann**.

Relația (5.13) arată că, concentrația n de molecule depinde, pe lângă energia potențială U a moleculelor și de energia termică $k_B T$ a acestora. În virtutea acestei legi de distribuție, concentrația moleculelor, n , scade cu creșterea energiei lor potențiale, respectiv cu scăderea temperaturii T .

Introducem acum noțiunile fundamentale de fizică statistică. Astfel, vom înțelege prin **eveniment aleatoriu**, E_i , *acel eveniment ale cărui condiții de realizare în cadrul unui raționament particular nu sunt cunoscute și nu pot fi prevăzute fiind cu totul întâmplătoare*.

Fie un experiment constând în aruncarea unui zar. Fiecare aruncare se poate solda cu un rezultat constând din apariția aleatoare a unui număr de puncte între 1 și 6 (fig.5.2).

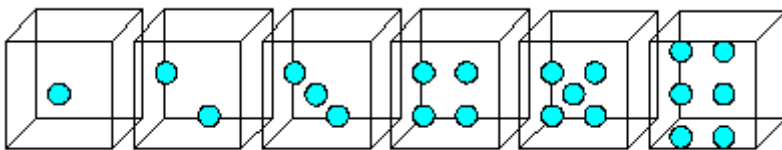


Fig.5.2 Experimentul aruncării zarului – valori posibile.

Observăm că nu putem să prevedem rezultatul care va apare la o aruncare astfel că apariția unui anumit număr de puncte între 1 și 6 va constitui un eveniment, E_i , unde $i = 1-6$. În toată această *incertitudine* există totuși o anumită *regularitate*: dacă se repetă aruncarea de un număr foarte

mare de ori, numărul de aruncări în care s-au obținut fiecare dintre cele șase valori posibile tinde spre valori egale. Cu alte cuvinte putem spune că probabilitățile de realizare a celor 6 evenimente posibile (aparitia unui anumit rezultat) devin egale atunci când numărul de experimente este foarte mare (tinde spre infinit).

Fie acum cazul unui experiment unde o mărime fizică M la măsurare poate prezenta un șir discret de valori posibile $M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_n$. Derulăm experimentul și măsurăm de N ori valoarea mărimii fizice M . Descrierea rezultatelor experimentului o putem face cu ajutorul tabelului 1.

Tabel 1 Tabel sintetic ce descrie experimentul constând din N încercări (măsurători) efectuate asupra mărimii fizice M .

Valori posibile ale mărimii fizice M	M_1	M_2	M_3	...	M_n
Evenimentul E_i	E_1	E_2	E_3	...	E_n
Număr de cazuri favorabile evenimentului E	N_1	N_2	N_3	...	N_n
Probabilitate de apariție a valorilor posibile	w_1	w_2	w_3	...	w_n

Pe baza acestui tabel se pot defini noțiunile fundamentale ale fizicii statistice pentru experimentul considerat.

Frecvența evenimentului (w_i) = raportul numărului de cazuri favorabile realizării evenimentului (N_i) și numărul total al cazurilor posibile (N , considerând că toate evenimentele sunt echiprobabile

$$w_i = \frac{N_i}{N} \quad (5.14)$$

Probabilitatea unui eveniment (P_i) = limita spre care tinde raportul între numărul de evenimente realizate și numărul total de evenimente (încercări, experimente) când acesta din urmă tinde la infinit, $N \rightarrow \infty$.

$$P_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N} \quad (5.15)$$

Am văzut că pentru experimentul discutat, constând din aruncarea unui zar, rezultă $P_i = \frac{1}{6}$, unde $i=1, 2, \dots, 6$.

Se observăm că

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (5.16)$$

sau (pentru cazul unui număr mare de evenimente realizate)

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1 \quad (5.17)$$

adică *suma probabilităților de realizare a evenimentelor asociate unui experiment este egală cu 1, adică cu certitudinea.*

Dacă un eveniment este compus din reunirea mai multor evenimente independente (evenimente independente = evenimentele în care probabilitatea de realizare a uneia dintre ele nu depinde de realizarea sau de nerealizarea celorlalte), probabilitatea sa se calculează ținând cont de **teorema însumării probabilităților** care afirmă că *dacă w_1, w_2, w_3 , etc. sunt probabilitățile mai multor evenimente incompatibile, probabilitatea de realizare a unuia dintre ele este egală cu suma probabilităților tuturor acestor evenimente.*

Dacă avem un eveniment compus constând în realizarea simultană a două sau mai multor evenimente independente, probabilitatea de realizare a acestui eveniment se calculează cu ajutorul **teoremei produsului probabilităților** care afirmă că *probabilitatea de realizare concomitentă a două sau mai multor evenimente independente este egală cu produsul probabilităților fiecăruia dintre evenimentele luate separat.*

Să presupunem că dorim să determinăm valoarea unei mărimi fizice M și pentru aceasta efectuăm un număr N de măsurători asupra sa. Rezultatul măsurărilor evidențiază valoarea M_1 în N_1 cazuri, valoarea M_2 în N_2 dintre cazuri, etc. Prin definiție, **valoarea medie** a mărimii M va fi

$$\begin{aligned} \overline{M} &= \frac{N_1 M_1 + N_2 M_2 + \dots + N_n M_n}{N_1 + N_2 + N_3 + \dots + N_n} = \frac{N_1}{N} M_1 + \frac{N_2}{N} M_2 + \dots + \frac{N_n}{N} M_n = \\ &= P_1 M_1 + P_2 M_2 + P_3 M_3 + \dots + P_n M_n = \sum_i P_i M_i \quad (5.18) \end{aligned}$$

unde am avut în vedere că $N = \sum_i N_i$. Relația (5.18) arată că *valoarea medie*

a mărimii M este egală cu suma produselor dintre valorile posibile ale mărimii M , M_i , și probabilitățile asociate acestor valori, P_i .

Să considerăm acum cazul unei mărimi fizice $M(x)$ ale cărei valori posibile aparțin nu unui șir discret ci unui domeniu continuu, cuprins între valorile x_0 și x_f . Problema poate fi redusă la cazul precedent prin împărțirea intervalului $x_0 - x_f$ în intervale de lățime infinit mică, dx , care trebuie să fie atât de mici încât să îndeplinească condiția ca în interiorul lor mărimea fizică M își păstrează valoarea neschimbată. În acest caz vom avea un număr foarte mare de valori posibile ale respectivei mărimii fizice, notate cu $M(x)$, probabilitățile lor de apariție fiind $dP(x)$, iar evenimentele corespunzând

apariției unei anumite valori fiind $E(x)$. Acest raționament ne permite să adaptăm formulele importante obținute pentru cazul mărimilor fizice cu valori posibile aparținând unui șir discret la cazul mărimilor fizice cu valori posibile aparținând unui interval continuu. Astfel relația (5.18) devine

$$\overline{M} = \int_0^{\infty} M(x) dP = \int_0^{\infty} M(x) f(x) dx \quad (5.19)$$

unde relația $dP=f(x)dx$ va fi demonstrată mai târziu, iar relația (5.20) devine

$$\int_{x_0}^{x_f} dP(x) = 1 \quad (5.20)$$

În cele ce urmează vom discuta noțiunea de *distribuție statistică*. Pentru aceasta vom considera câteva exemple sugestive. Dacă, de exemplu, dorim să descriem distribuția populației unei țări după vârsta persoanelor ce o compun, demersul este lipsit de sens deoarece numărul variantelor de vârstă este infinit în timp ce numărul indivizilor este finit. Nu se poate stabili decât numărul probabil al persoanelor a căror vârstă se plasează în interiorul unui anumit interval de valori. Astfel, când se afirmă despre o persoană că are 18 ani nu se înțelege că persoana are 18 ani, zero luni, zero zile, zero minute și zero secunde ci că vârsta acelei persoane este cuprinsă între 18 ani și 19 ani.

Să încercăm acum interpretarea formulei barometrice, respectiv a legii lui Boltzmann, prin prisma teoriei probabilităților. Pentru aceasta ne propunem să aflăm care este numărul de molecule dn , din concentrația n a moleculelor studiate, care se află la înălțimea $z+dz$. Evident că dn este proporțional cu dz și cu n , adică

$$dn \sim n, dz \quad (5.21)$$

sau

$$dn = a n dz \quad (5.22)$$

unde a = coeficient de proporționalitate. De fapt a este o *funcție de distribuție a moleculelor* după înălțime, $f(z)$, astfel că relația (5.22) devine

$$dn = n f(z) dz \quad (5.23)$$

Să observăm că raportul

$$dP = \frac{dn}{n} = f(z) dz \quad (5.24)$$

reprezintă fracțiunea de molecule care sunt plasate la înălțimea z într-un strat de grosime dz , dar, în același timp reprezintă și probabilitatea ca o moleculă a sistemului studiat să fie plasată la înălțimea z (sau, cu alte cuvinte, să aibă energia potențială $U=mgz$). În acest context, observăm că funcția de distribuție $f(z)$ exprimată din (5.24) sub forma

$$f(z) = \frac{1}{n} \frac{dn}{dz} = \frac{dP}{dz} \quad (5.25)$$

reprezintă fracțiunea din numărul total de molecule plasate la înălțimea z într-un interval de valori egal cu unitatea, în jurul valorii z , sau reprezintă probabilitatea de prezență a oricărei molecule în elementul de interval egal cu unitatea în jurul valorii z a înălțimii.

Să observăm că folosind relația lui Boltzmannn (5.11) putem exprima relația (5.23) sub forma

$$dn = nf(z)dz = n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}} \left(-\frac{mg}{k_B T}\right) dz \quad (5.26)$$

Se poate demonstra că pentru cazul analizat funcția de distribuție a moleculelor de gaz în raport cu înălțimea z (sau cu valoarea energiei potențiale U a moleculelor) este

$$f(z) = -\frac{k_B T}{mg} e^{-\frac{mgz}{kT}} = C e^{-\frac{mgz}{kT}} = C e^{-\frac{U}{kT}} \quad (5.27)$$

numită **funcția de distribuție Boltzmann**. Să observăm faptul că argumentul funcției de distribuție este un raport care conține la numărător energia potențială a moleculelor provenită de la un camp de forțe care tinde să ordoneze sistemul, iar la numitor conține energia termică a moleculelor care tinde să dezordoneze sistemul.

Funcția de distribuție pentru un sistem termodinamic este un element fundamental pentru studierea sistemului termodinamic. Astfel, cunoscând funcția de distribuție putem calcula valoarea medie a oricărei mărimi fizice caracteristice sistemului (folosind relația (5.19)) precum și probabilitatea unui eveniment caracteristic sistemului (folosind relația (5.24)). Pe baza relației (5.20) se poate arăta că funcția de distribuție Boltzmann (ca oricare altă funcție de distribuție) trebuie să satisfacă condiția de normare

$$\int_0^{\infty} f(z) dz = 1 \quad (5.28)$$

care exprimă faptul că dacă particula sistemului termodinamic studiat există, ea va fi cu siguranță localizată undeva în Univers, în intervalul de altitudine de la zero la infinit.

Deoarece $U = mgz$ reprezintă energia potențială a particulei în câmpul gravitațional presupus uniform, atunci relația (5.24) se poate scrie

$$dP = \frac{mg}{kT} e^{-\frac{U}{kT}} dz = \frac{1}{kT} e^{-\frac{U}{kT}} dU \quad (5.29)$$

ceea ce reprezintă probabilitatea ca o moleculă oarecare a sistemului termodinamic studiat să aibă energia potențială gravitațională cuprinsă în intervalul $(U, U+dU)$.

Cunoscând curba de distribuție a unui anume tip de evenimente întâmplătoare legate de sistemul termodinamic studiat, se poate prezice numărul de evenimente într-un anumit interval al valorilor posibile ale cantității întâmplătoare. Subliniem faptul că, cu cât numărul total de evenimente este mai mare, cu atât predicția este mai precisă. În sistemele cu un mare număr de molecule într-un volum de materie foarte mic, toate presupunerile statistice despre comportamentul moleculelor sunt făcute cu o acuratețe mare.

5.2 Distribuția moleculelor după viteză

În cele ce urmează vom studia distribuția moleculelor unui gaz în funcție de viteza lor. Astfel, dorim să exprimăm probabilitatea ca viteza unei molecule oarecare să satisfacă simultan condițiile

- componenta v_x a vitezei să se plaseze în intervalul v_x, v_x+dv_x ;
- componenta v_y a vitezei să se plaseze în intervalul v_y, v_y+dv_y ;
- componenta v_z a vitezei să aparțină intervalului v_z, v_z+dv_z .

Valorile componentelor v_x, v_y, v_z sunt independente, astfel că probabilitatea ca viteza moleculei să satisfacă simultan aceste trei condiții reprezintă probabilitatea unui eveniment compus din trei evenimente independente și va fi egală, așa cum s-a arătat în paragraful anterior, cu produsul probabilităților acestor evenimente. Fie probabilitățile celor trei evenimente menționate descrise de relațiile

$$\begin{aligned} dP_x &= f(v_x)dv_x \\ dP_y &= f(v_y)dv_y \\ dP_z &= f(v_z)dv_z \end{aligned} \quad (5.30)$$

Probabilitatea ca viteza unei molecule din volum să aibă simultan componentele în intervalul $(v_x, v_x + dv_x)$, $(v_y, v_y + dv_y)$, $(v_z, v_z + dv_z)$ va fi egală cu produsul $dP_x dP_y dP_z$

$$dP = dP_x dP_y dP_z = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2k_B T}} dv_x dv_y dv_z \quad (5.31)$$

$$dP = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv_x dv_y dv_z$$

numită **legea lui Maxwell a distribuției moleculelor după modulul vitezelor**, caracterizată de **funcția de distribuție a lui Maxwell**

$$f(v) = \frac{1}{n} \frac{dn}{dv} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} v^2 \quad (5.32)$$

În figura 5.3 am reprezentat distribuția vitezelor moleculelor, adică curba $f = f(v)$. Pentru $v=0$ și $v \rightarrow \infty$ numărul de molecule tinde să fie egal cu zero.

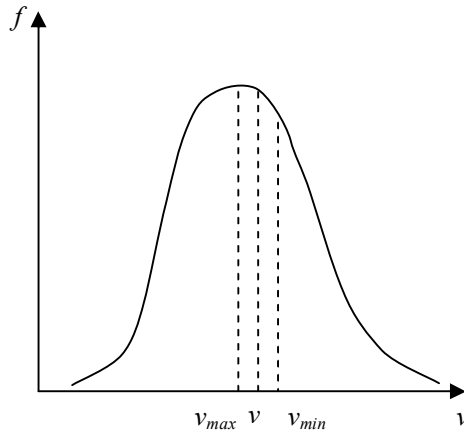


Fig.5.3 Funcția de distribuția a vitezei moleculelor

După cum se poate observa în fig.6.2, curba $f = f(v)$ are un maxim a cărui localizare o vom determina impunând condiția ca derivata funcției în raport cu viteza să se anuleze

$$\frac{df(v)}{dv} = \frac{d}{dv} \left(e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} \cdot v^2 \right) = 0 \quad (5.33)$$

de unde se obține

$$v_M = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (5.34)$$

Relația (5.34) ne dă valoarea vitezei pentru care funcția de distribuție devine maximă, deci viteza majorității moleculelor din sistem. Această viteză este numită *viteza cea mai probabilă* a moleculelor unui gaz. Viteza medie a moleculelor gazului se obține cu relația

$$v = \sqrt{v_{medie}^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} > v_M \quad (5.35)$$

și este mai mare decât viteza cea mai probabilă a moleculelor (vezi fig.5.3). Numărul de molecule cu viteze apropiate de v_M este de 1,1 ori mai mare decât numărul de molecule cu viteze apropiate de v ; de 1,9 ori mai mare decât al moleculelor cu viteze apropiate de $0.5v_M$ și de 5 ori mai mare decât cel al moleculelor cu viteze apropiate de $2v_M$.

Energia cinetică E_c a unei molecule este

$$E_c = \frac{mv^2}{2} \quad (5.36)$$

Prin diferențierea acestei expresii se obține

$$dE_c = mv dv \quad (5.37)$$

astfel că relația (5.31) se poate scrie

$$dP = \text{const.} \cdot e^{-\frac{E_c}{k_B T}} \sqrt{E_c} dE_c \quad (5.38)$$

Aceasta relație reprezintă probabilitatea ca particula să aibă energia cinetică cuprinsă în intervalul $(E_c, E_c + dE_c)$.

Să notăm faptul că la deducerea formulei lui Maxwell referitoare la distribuția moleculelor după modulul vitezei nu s-a ținut seama de ciocnirile dintre molecule. Ori tocmai ciocnirile între molecule guvernează forma funcției de distribuție $f(v)$. Astfel, să presupunem că gazul se află inițial într-o stare în care moleculele au viteze egale în modul. Ciocnirile dintre molecule vor scoate gazul din această stare și valorile modulelor vitezelor nu vor mai fi egale. Ca rezultat al unei ciocniri, una din cele două molecule ce se ciocnesc va dobândi o viteză mai mare, iar cealaltă se va mișca mai lent. Astfel vor decurge evenimentele până la stabilirea unei stări de echilibru în care moleculele vor dobândi viteze diferite distribuite conform funcției (5.32).

În concluzie, în starea de echilibru, la o temperatură dată a gazului, mișcarea moleculelor este absolut haotică, iar vitezele moleculelor sunt distribuite conform distribuției Maxwell. Temperatura este stabilită de energia cinetică medie a mișcărilor dezordonate și nu de mișcarea dirijată a

moleculelor indiferent de direcția acestora. Astfel, vânturile cele mai violente pot fi calde sau pot fi reci depinzând nu de violența lor caracterizată de viteza mare a mișcării dirijate, ci de mișcările dezordonate ale moleculelor antrenate în mișcarea dirijată.

Analog se poate obține funcția de distribuție a particulelor după energia lor totală, $E_c + E_p$, numită **funcția de distribuția Maxwell - Boltzmann**.

ELECTROSTATICĂ

5.1 Sarcina electrică

Electrostatica studiază fenomenele generate de sarcinile electrice aflate în repaos.

Sarcina electrică este o mărime fizică scalară care măsoară starea de electrizare a unui corp. Există două tipuri de sarcini electrice, cea pozitivă, respectiv cea negativă. Cantitatea cea mai mică de sarcină este $e = 1,6 \times 10^{-19} C$. Menționăm faptul că sarcina electrică a protonilor este egală cu $+e$, iar cea a electronilor este egală cu $-e$.

Sarcina electrică Q cu care se încarcă un corp satisface condiția

$$Q = ne \quad (5.1)$$

unde n este un număr întreg.

5.2 Legea lui Coulomb

Legea lui Coulomb este o lege experimentală care afirmă că forța de interacție dintre două sarcini punctiforme acționează de-a lungul dreptei ce unește cele două sarcini este direct proporțională cu produsul sarcinilor și invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele. Forța coulombiană este de atracție dacă sarcinile sunt de semne contrare și de respingere dacă sarcinile sunt de același fel.

Fie două sarcini electrice punctiforme, Q_1 și Q_2 , aflate la distanța \vec{r} una de cealaltă (fig.5.1). Forța coulombiană dintre cele două sarcini electrice este

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (5.2)$$

unde $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} C^2 / N \cdot m^2$ este o constantă numită *permitivitatea electrică a vidului*.

În sistemul internațional sarcina electrică se măsoară în coulombi (C).

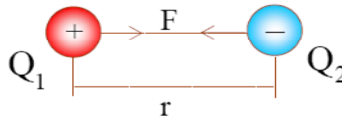


Fig.5.1 Forța coulombiană dintre 2 sarcini electrice punctiforme.

5.3 Câmpul electric

Câmp electric - stare a materiei generată în jurul unei sarcini electrice care se manifestă prin acțiunea unor forțe de natură electrică asupra oricărei sarcini electrice introduse în câmp. Sarcinile electrice statice crează **câmpuri electrostatice**.

Pentru descrierea câmpului electric se utilizează două mărimi fizice importante, intensitatea câmpului electric și potențialul câmpului electric.

A. Intensitatea câmpului electric - este o mărime fizică vectorială definită cu ajutorul relației

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad (5.3)$$

unde \vec{F} = forța cu care câmpul electric acționează asupra sarcinii electrice q introduse în câmp. Pentru câmpul electrostatic generat de sarcina electrică Q în care se introduce sarcina electrică de probă q , intensitatea câmpului în punctul unde este plasată sarcina de probă este (conform (5.1) și (5.2))

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (5.4)$$

unde \vec{F} = forța coulombiană dintre sarcinile Q și q . Vectorul \vec{E} are modulul dat de expresia

$$|\vec{E}| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (5.5)$$

Reprezentarea grafică a câmpurilor electrice se face utilizând **liniile de câmp** = curbe la care vectorul intensitate câmp electric este tangent în

fiecare punct; sensul unei linii de câmp este acela al vectorului intensitate câmp electric.

Pentru sarcinile punctiforme, atât liniile de câmp cât și vectorii intensitatea câmpului electric au o orientare radială cu sensul spre exterior, dacă sarcinile electrice sunt pozitive (fig.5.2a), respectiv spre interior (spre sarcină), dacă sarcinile electrice sunt negative (fig. 5.2b). Liniile de câmp ce descriu câmpul creat de o sarcină electrică pozitivă și una negativă sunt îndreptate de la sarcina pozitivă spre cea negativă.

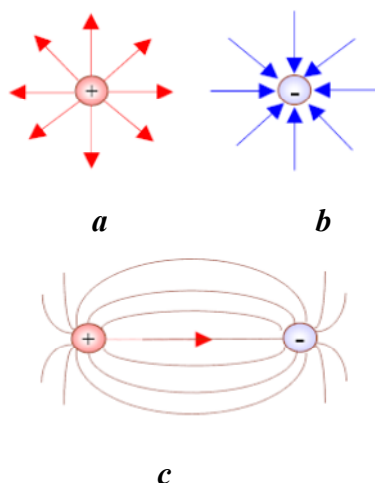


Fig.5.2 Descrierea câmpul electric cu ajutorul liniilor de câmp - câmpul electric generat de: 1. sarcini electrice punctiforme (a, b); 2. de un dipol electric (c).

B. Potențialul câmpului electric. Pentru a defini această mărime vom analiza mai întâi problema calculării lucrului mecanic într-un câmp electric. Fie câmpul electric generat de sarcina Q . În acest câmp se deplasează o sarcină q , de același semn cu sarcina Q , de-a lungul unui drum oarecare, de la punctul 1 la punctul 2 (Fig.5.3).

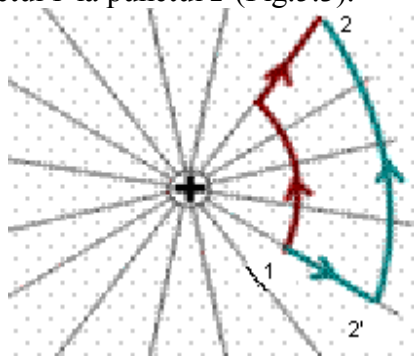


Fig.5.3 Lucrul mecanic în câmpul electric.

Deplasarea se realizează sub acțiunea forței \vec{F} . Lucrul mecanic efectuat de câmp asupra sarcinii q în timpul deplasării de la punctul 1 la 2 de-a lungul unei curbe oarecare se calculează cu formula cunoscută din mecanică

$$L = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} q\vec{E} \cdot d\vec{r} = q \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (5.6)$$

Să ținem cont acum ca lucrul mecanic efectuat la deplasarea sarcinii de probă q din Fig.5.3 este realizat de o forță coulombiană (5.2). Pentru a simplifica problema vom folosi și faptul că, câmpul electric este un câmp conservativ și deci lucrul mecanic între punctele 1-2 nu depinde de drum ci numai de poziția inițială și finală. Pentru simplitate a fost ales un drum particular convenabil între punctele 1 și 2, cel indicat în fig.5.3. În acest caz avem avantajul că integrala pentru deplasarea $2' \rightarrow 2$ se anulează deoarece $d\vec{F} \perp d\vec{r}$, iar $r_{2'} = r_2$, ceea ce conduce la

$$L = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^{2'} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{2'}^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (5.7)$$

Diferența de potențial între două puncte ale unui câmp electric = mărime fizică scalară definită ca lucrul mecanic efectuat de câmp asupra unității de sarcină electrică de probă q pentru deplasarea acesteia între cele două puncte. Cu rezultatele obținute (relațiile (5.6) și (5.7)) diferența de potențial între punctele 1 și 2 este

$$\Delta V = V_1 - V_2 = \frac{L}{q} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (5.8)$$

Potențialul câmpului electric într-un punct al acestuia este o mărime fizică scalară definită ca lucrul mecanic necesar deplasării unității de sarcină electrică de probă din acel punct până la infinit. Astfel, dacă în relația (5.8) presupunem ca punctul 2 este plasat la infinit ($r_2 \rightarrow \infty$) și potențialul său este $V_2 \rightarrow 0$, rezultă

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (5.9)$$

care exprimă potențialul câmpului electric în punctul I . Deoarece punctul I este un punct oarecare al câmpului electric putem renunța la scrierea indicelui la potențial și la vectorul de poziție. Relația (5.9) permite aflarea valorii potențialului electric al câmpului generat de sarcina punctiformă Q într-un punct aflat la distanța r de sarcina Q .

Unitatea de măsură pentru potențialul electric este voltul ($1V = 1 \frac{J}{C}$).

Să considerăm un câmp electric uniform ($\vec{E} = constant$), spre exemplu, câmpul electric produs între plăcile unui condensator cu fețe plan-paralele. Lucrul mecanic efectuat în acest caz de câmpul electric pentru deplasarea unei sarcini de proba q pe o distanță d în lungul liniei de câmp va fi (conform (5.6))

$$L = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = q \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = q\vec{E} \int_{r_1}^{r_2} d\vec{r} \quad (5.10)$$

Diferența de potențial între punctele 1 și 2, aflate la distanța d , este

$$V_2 - V_1 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} E dr = E \int_{r_1}^{r_2} dr \quad (5.11)$$

sau

$$V_2 - V_1 = Ed \quad (5.12)$$

Dacă punctul 2 se află foarte departe ($r_2 \rightarrow \infty$) relația (5.11) devine

$$-V_1 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} d\vec{r} \quad (5.13)$$

care prin diferențiere conduce la

$$-dV_1 = \vec{E} d\vec{r} \quad (5.14)$$

sau

$$\vec{E} = -\frac{dV}{d\vec{r}} = -gradV = -\Delta V \quad (5.15)$$

5.4 Distribuții de sarcini electrice

Presupunem că studiem acum efectele unei distribuții de sarcini electrice punctiforme Q_i , în care introducem sarcina electrică de probă q . Forța totală exercitată asupra sarcinii q de către sarcinile Q_i se obține însumând forțele exercitate de Q_i asupra q

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i q}{r_i^3} \cdot \vec{r}_i \quad (5.16)$$

unde \vec{r}_i = vectorul de poziție al sarcinilor Q_i față de sarcina q .

Distribuția de sarcini electrice punctiforme Q_i va genera un câmp electric. Intensitatea câmpului creat într-un punct oarecare P de distribuția de sarcini electrice punctiforme Q_i este dată de relația

$$\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{r_i^3} \cdot \vec{r}_i = \sum_i \vec{E}_i \quad (5.17)$$

unde \vec{r}_i = vectorul de poziție al punctului P față de sarcina electrică Q_i . Expresia (5.17) ne arată că intensitatea câmpului electric în punctul P este egală cu suma intensităților câmpurilor electrice datorate fiecărei sarcini q_i în parte.

Potențialul câmpului electric generat de distribuția de sarcini electrice punctiforme în punctul P este dat de relația

$$V_P = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \quad (5.18)$$

unde am folosit relația (5.9). Relația (5.18) arată că potențialul electric în punctul P este egal cu suma potențialelor create de sarcinile Q_i în acel punct.

Să observăm faptul că pentru un observator plasat într-un punct foarte îndepărtat de distribuția de sarcini electrice, sarcinile acestei distribuții nu vor mai fi percepute ca având un caracter discontinuu ci ca și cum ar constitui o entitate cu o distribuție continuă.

Distribuția continuă de sarcini electrice – o distribuție de sarcini electrice în care distanțele dintre sarcinile electrice sunt mult mai mici decât distanța de la aceasta la punctul din care este studiată aceasta (spre exemplu, punctul în care trebuie calculată intensitatea câmpului electric creat de distribuția de sarcini studiată).

Pentru caracterizarea unei distribuții continue de sarcini electrice se folosesc noțiunile:

- ***Densitatea de sarcină electrică***, ρ , definită ca sarcina electrică a unității de volum. Un element de volum infinit mic, dV , cu densitatea de sarcină electrică ρ este încărcat cu sarcina electrică

$$dQ = \rho \cdot dV \quad (5.19)$$

Prin element de volum infinit mic se înțelege un element de volum foarte mic la scară macroscopică, dar suficient de mare la scară microscopică, astfel încât să conțină mulți atomi și molecule. Dimensiunea mică a elementului de volum infinit mic nu se definește conform criteriilor

matematice ci în raport de respectarea unei cerințe cu conținut fizic. Astfel, spre exemplu, elementul de volum infinit mic din relația (5.19) trebuie să fie atât de mic încât în interiorul său să fie respectată condiția ca densitatea de sarcină electrică să fie constantă.

- **Densitatea superficială de sarcină**, σ ; se utilizează în situația în care sarcina este distribuită pe o suprafață și se definește ca sarcina electrică a unității de suprafață. Sarcina electrică de pe suprafața elementară dS este dată de relația $dQ = \sigma \cdot dS$.

- **Densitatea liniară de sarcină electrică**, λ , care permite exprimarea sarcinii electrice distribuite pe un obiect filiform de lungime infinit mică dl cu ajutorul relației $dQ = \lambda \cdot dl$.

Pentru a evalua câmpul electric creat de o asemenea distribuție continuă de sarcină electrică utilizăm următorul procedeu: divizăm distribuția de sarcină în elemente de volum infinit mici, fiecare conținând sarcina electrică infinit mică dQ . Câmpul produs în punctul P de sarcina electrică a unui asemenea din elementul va fi (conform (5.4))

$$d\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dQ}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (5.20)$$

unde am considerat că sarcina electrică dQ este atât de mică încât poate fi considerată o sarcină electrică punctiformă.

Intensitatea totală în punctul P se obține însumând contribuțiile tuturor sarcinilor electrice dQ , adică integrând relația (5.20) pe tot volumul considerat

$$\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{dQ}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (5.21)$$

Cu ajutorul relației (5.19) avem

$$\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r})}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} dV \quad (7.22)$$

unde, dacă cunoaștem funcția $Q = Q(\vec{r})$, putem calcula integrala (5.22).

Pentru un câmp electric creat de o distribuție continuă superficială de sarcină electrică, intensitatea câmpului într-un punct P aflat la mare distanță față de distribuția de sarcină se va calcula cu relația

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r})}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} dS \quad (5.23)$$

unde σ reprezintă densitatea superficială de sarcină electrică.

Pe baza relației (5.18) putem exprima potențialul câmpului electric generat de distribuția continuă de sarcini electrice în punctul P ca fiind

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{dQ}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r})}{r^2} dV \quad (5.24)$$

unde dV =elementul de volum infinit mic.

5.5 Legea lui Gauss

O mărime importantă în studiul câmpului electric este *fluxul câmpului electric*. Considerăm un câmp electric uniform de intensitate \vec{E} ce strabate o suprafață plană S , perpendiculară pe liniile de câmp (vectorul normal la suprafață, \vec{n} , este paralel cu \vec{E}) (fig.5.5).

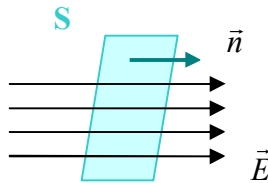


Fig.5.5 Fluxul câmpului electric uniform printr-o suprafață S normală la câmp.

Fluxul câmpului electric prin suprafața S este dat de relația

$$\Phi = ES \quad (5.25)$$

Fie suprafața S este înclinată față de liniile câmpului electric astfel că normala la suprafață face unghiul α cu liniile de câmp (fig.5.6).

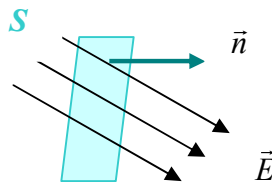


Fig.5.6 Fluxul câmpului electric uniform printr-o suprafață S înclinată față de liniile de câmp.

În acest caz fluxul câmpului electric prin suprafața S va fi

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S} = \vec{E} \cdot \vec{n}S = ES \cos \alpha \quad (5.26)$$

Produsul $S \cos \alpha$ din relația (5.25) reprezintă proiecția suprafeței S în planul normal la liniile câmpului electric. Astfel, utilizarea produsului scalar între

vectorii \vec{E} și \vec{S} asigură respectarea condițiilor definiției fluxului de la cazul precedent.

Fie acum cazul cel mai general, cel al unui câmp electric neuniform și al unei suprafețe de formă și orientare oarecare față de liniile câmpului electric (fig.5.7).

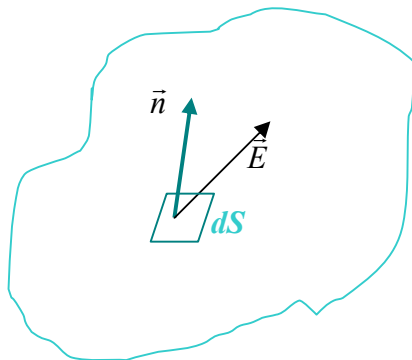


Fig.5.7 Fluxul liniilor câmpului electric printr-o suprafață elementară dS .

Pentru a calcula fluxul câmpului electric vom folosi rezultatul obținut pentru cazul precedent. Astfel, împărțim suprafața S în elemente de suprafață infinit mici, $d\vec{S}$. Aria elementului de suprafață trebuie să fie atât de mică încât să fie respectată cerința ca pentru aria respectivă câmpul să poată fi considerat uniform. Vectorul normal la elementul suprafață este \vec{n} (fig.5.6). Dacă prin suprafața elementară $d\vec{S}$ valoarea intensității câmpului electric este $\vec{E} = \text{const.}$, atunci fluxul care trece prin această suprafață va fi

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot \vec{n} dS = E \cdot dS \cos\alpha \quad (5.27)$$

Fluxul prin suprafața macroscopică S se obține însumând (integrând) fluxurile prin toate elementele de suprafață infinit mici, $d\vec{S}$, ce alcătuiesc suprafața S

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (5.28)$$

Fie o sarcină electrică punctiformă q plasată în centrul unei sfere. Conform (5.5), modulul intensității câmpului electric pentru orice punct de pe suprafață de rază R a sferei este

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (5.29)$$

iar fluxul câmpului electric prin suprafața sferei va fi

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \int_S E \cdot dS \quad (5.30)$$

unde am ținut cont că vectorul \vec{E} , fiind radial, este perpendicular în fiecare punct la suprafața sferei. Mai departe, ținând cont că $E = \text{constant}$ pe suprafața sferei, avem

$$\Phi = \int_S E \cdot dS = E \int_S dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (5.31)$$

Gauss a fost cel care a observat că acest rezultat poate fi generalizat pentru o suprafață închisă de formă oarecare și a formulat **legea lui Gauss** care afirmă că *fluxul liniilor câmpului electric printr-o suprafață închisă de formă oarecare este egal cu raportul dintre sarcina electrică din interiorul suprafeței și permitivitatea electrică a mediului*

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad (5.32)$$

Importanța legii lui Gauss va fi relevată prin prezentarea unor aplicații în cele ce urmează.