Capitolul 2

Integrale cu parametru

2.1 Noţiuni teoretice

Se vor studia integrale de forma $F(y) = \int_M f(x,y)\,dx$, unde $y \in Y \subset \mathbb{R},\ M \subset \mathbb{R}$.

Definiţie 2.1. Se consideră $Y \subset \mathbb{R}$ o mulţime nevidă şi $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un interval compact. Fie $f : [a,b] \times Y \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că pentru orice $y \in Y$, funcţia $f(\cdot, y)$ este integrabilă pe $[a,b]$. Atunci funcţia $F : Y \to \mathbb{R}$

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

este o integrală cu parametru.

Teorema 2.2 (Continuitatea integralei cu parametru)**.** Dacă funcţia de două variabile $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci funcţia $F : [c,d] \to \mathbb{R}$

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

este continuă.

Teorema 2.3 (Teorema de derivare a integralei cu parametru)**.** Considerăm funcţiile $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ şi $\alpha, \beta : [c,d] \to [a,b]$. Dacă f este continuă, dacă există $\frac{\partial f}{\partial y}$ şi este continuă şi dacă funcţiile α ş β sunt derivabile, atunci integrala cu parametru

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$$

este derivabilă şi

$$F'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx + \beta'(y) f(\beta(y), y) - \alpha'(y) f(\alpha(y), y).$$

Sunt importante cazurile particulare:
a) Dacă $F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$, unde a şi b sunt constante, atunci

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

b) Dacă $F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x)\,dx$, atunci

$$F'(y) = \beta'(y)f(\beta(y)) - \alpha'(y)f(\alpha(y)).$$

Teorema 2.4 (Teorema de integrare a integralelor cu parametru)**.** Dacă funcţia $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Integrale cu parametru pe domeniu nemărginit

Fie $f : [a,\infty) \times [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$. Dacă integrala $\int_a^\infty f(x,y)\,dx$ este convergentă pentru orice $y \in [\alpha,\beta]$, atunci putem defini o funcţie $F : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$,

$$F(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx.$$

Definiţie 2.5. Integrala $\int_a^\infty f(x,y)\,dx$ este uniform convergentă pe intervalul $[\alpha,\beta]$ către funcţia F, dacă pentru orice $\epsilon > 0$ există un număr $L(\epsilon) > a$ astfel încât pentru orice $A > L(\epsilon)$, avem

$$\left| \int_a^A f(x,y)\,dx - F(y) \right| < \epsilon, \quad \text{pentru orice } y \in [\alpha,\beta].$$

Teorema 2.6. Dacă există o funcţie $g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ pozitivă, astfel încât $|f(x,y)| \le g(x)$, pentru orice $x \in [a,\infty)$ şi orice $y \in [\alpha,\beta]$ şi dacă $\int_a^\infty g(x)\,dx$ este convergentă, atunci integrala $\int_a^\infty f(x,y)\,dx$ este uniform convergentă.

Teorema 2.7. Fie $f : [a,\infty) \times [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, continuă. Dacă integrala

$$F(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$$

este uniform convergentă pe $[\alpha,\beta]$, atunci funcţia F este continuă pe $[\alpha,\beta]$.

Teorema 2.8. Fie $f : [a,\infty) \times [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, continuă. Dacă există $\frac{\partial f}{\partial y}$ şi este continuă şi dacă integrala $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ este uniform convergentă pe $[\alpha,\beta]$, atunci

$$F'(y) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx, \quad \text{pentru orice } y \in [\alpha,\beta].$$

Integrale de funcţii nemărginite care depind de un parametru

Definiţie 2.9. Fie $f:(a,b]\times[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, nemărginită în a. Integrala $\int_a^b f(x,y)\,dx$ este uniform convergentă către funcţia F, dacă oricare ar fi $\epsilon>0$, există $\eta(\epsilon)>0$ astfel încât pentru orice h, cu $0<h<\eta(\epsilon)$, avem

$$\left|\int_{a+h}^b f(x,y)\,dx-F(y)\right|<\epsilon,\quad \text{pentru orice } y\in[\alpha,\beta].$$

Teorema 2.10. Fie $g:(a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie pozitivă astfel încât

$$|f(x,y)|<g(x),\quad \text{pentru orice } x\in(a,b] \text{ şi orice } y\in[\alpha,\beta].$$

Dacă $\int_a^b g(x)\,dx$ este convergentă, atunci $\int_a^b f(x,y)\,dx$ este uniform convergentă pe intervalul $[\alpha,\beta]$.

Teorema 2.11. Fie $f:(a,b]\times[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ continuă. Dacă integrala $\int_a^b f(x,y)\,dx$ este uniform convergentă pe $[\alpha,\beta]$, atunci funcţia $F(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$ este continuă pe $[\alpha,\beta]$.

Teorema 2.12. Fie $f:(a,b]\times[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$. Dacă f şi f'_y sunt funcţii continue pe $(a,b]\times[\alpha,\beta]$ şi dacă integrala$F(y)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ este uniform convergentă pe $[\alpha,\beta]$, atunci

$$F'(y)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx,\quad \text{pentru orice } y\in[\alpha,\beta].$$

Funcţiile Beta şi Gamma ale lui Euler

Acestea sunt funcţii speciale care apar frecvent în aplicaţii. Sunt definite prin intermediul unor integrale improprii cu parametru:

$$\begin{aligned} B(a,b)&=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx,\quad a>0,\ b>0\\ \Gamma(a)&=\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\,dx,\quad a>0. \end{aligned}$$

Enumerăm câteva dintre proprietăţile lor:

P.1. $B(a,b)=B(b,a)$

P.2. $B(a,b)=\displaystyle\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}\,dt.$

P.3. $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi.$

$P.4.$ $\Gamma(1) = 1.$

$P.5.$ $\Gamma(a+1) = a \cdot \Gamma(a).$

$P.6.$ $\Gamma(n+1) = n!,\ n \in N.$

$P.7.$ $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-xy} x^{a-1}\, dx = \frac{\Gamma(a)}{y^a},\ y > 0.$

$P.8.$ $B(a,b) = \dfrac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$

$P.9.$ $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$

$P.10.$ $\Gamma(a) \cdot \Gamma(1-a) = \dfrac{\pi}{\sin a\pi}.$

2.2 Exerciţii.

Problema 2.1. Fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$F(t) = \int_t^{t^2} \sin(tx)\, dx.$$

Să se calculeze F' direct şi folosind formula de derivare a integralei cu parametru.

Problema 2.2. Să se calculeze $F'(y)$, unde $F : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ este definită prin

$$F(y) = \int_1^y \frac{\ln(1+xy)}{x}\, dx.$$

Problema 2.3. Se dă integrala cu parametru

$$I(a) = \int_2^a \frac{e^{-ax}}{x}\, dx, \quad a > 0.$$

Să se calculeze $I'(a)$.

Problema 2.4. Pentru o funcţie f continuă, fie

$$F(x) = \int_0^x f(t)(x-t)^{n-1}\, dt.$$

Să se calculeze $F^{(n)}$.

Problema 2.5. Fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F(t) = \int_0^1 f(x) g(x,t)\, dx$, unde $f \in C[0,1]$, iar

$$g(x,t) = \begin{cases} t(1-x), & \text{dacă } t \leq x \\ x(1-t), & \text{dacă } t > x. \end{cases}$$

Să se calculeze F' şi F''.

Problema 2.6. Să se calculeze următoarele integrale folosind posibilitatea derivării în raport cu parametrul:

$$a)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\, dx,\ a > 0.$$

$$b)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1 + a\sin x}{1 - a\sin x} \cdot \frac{dx}{\sin x},\ |a| < 1.$$

$$c)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\cos^2 x + m^2 \sin^2 x\right)\, dx,\ m \geq 0.$$

$$d)\ \int_0^{\pi} \ln\left(1 - 2a\cos x + a^2\right)\, dx,\ |a| < 1.$$

Problema 2.7. Să se calculeze

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} \ln \frac{2 - \sqrt{2}\cos x}{2 + \sqrt{2}\cos x}\, dx.$$

Problema 2.8. Să se calculeze

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(\sin x)}{\sin x}\, dx.$$

Problema 2.9. Pornind de la $I_1 = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\alpha + \beta\cos x},\ \alpha > \beta > 0$, să se calculeze

$$I_2 = \int_0^{\pi} \frac{dx}{(\alpha + \beta\cos x)^2}.$$

Problema 2.10. Determinaţi valoarea integralei cu parametru

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2 - \sin^2 x\right)\, dx,\ a > 1.$$

Problema 2.11. Să se determine valoarea integralei

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1} - 1}{\ln x}\, dx,\ a > 1.$$

Problema 2.12. Calculaţi $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(2xy)\, dx$.

Problema 2.13. Să se arate că

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a x \cdot \cos^b x\, dx = \frac{1}{2} \cdot B\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right),\ a > -1,\ b > -1.$$

Problema 2.14. Să se afle valoarea integralei $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^p x\, dx,\ |p| < 1$.

Problema 2.15. Aflaţi $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\, dx$.

Problema 2.16. Să se calculeze

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x\,dx,\ I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x\,dx,\ p > -1.$$

Problema 2.17. Folosind proprietatea P.2, să se calculeze integralele

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx,\ 0 < m < n.$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}\ \ n > 1.$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3}{(1+x^3)^3}\,dx.$

Problema 2.18. Să se demonstreze că

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2\cos\frac{a\pi}{2}},\ |a| < 1$$

şi să se calculeze

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^2}\ln x\,dx.$$

Problema 2.19. Să se calculeze

$$\int_0^a x^m\,(a^n - x^n)^p\ dx,\ m > -1,\ n > 0,\ p > -1.$$

Problema 2.20. Să se arate că

$$\int_0^\infty x^{2n}\cdot e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2a^n\sqrt{a}}\cdot\frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot\sqrt{\pi},\ a > 0.$$

2.3 Soluţii

Soluţie 2.1. Calculând integrala, avem:

$$F(t) = -\frac{1}{t}\cos(tx)\bigg|_t^{t^2} = -\frac{1}{t}\left(\cos t^3 - \cos t^2\right),$$

de unde,

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{1}{t^2}\left(\cos t^3 - \cos t^2\right) - \frac{1}{t}\left(-3t^2\sin t^3 + 2t\sin t^2\right) \\ &= \frac{1}{t^2}\left(\cos t^3 - \cos t^2\right) + 3t\sin t^3 - 2\sin t^2. \end{aligned}$$

Derivând integrala cu parametrul t, conform Teoremei 2.3, obţinem:

$$F'(t) = \int_t^{t^2} x\cos(tx)\,dx + 2t\sin t^3 - \sin t^2.$$

Calculăm integrala prin părţi. Alegem

$$f(x) = x,\ g'(x) = \cos(tx) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1,\ g(x) = \frac{1}{t}\sin(tx).$$

Rezultă

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{x}{t}\sin(tx)\Big|_t^{t^2} - \int_t^{t^2} \frac{1}{t}\sin(tx)\,dx + 2t\sin t^3 - \sin t^2 \\ &= 3t\sin t^3 - 2\sin t^2 + \frac{1}{t^2}\left(\cos t^3 - \cos t^2\right). \end{aligned}$$

Soluţie 2.2. F este o integrală cu parametrul y. O derivăm conform Teoremei 2.3. Avem

$$\begin{aligned} F'(y) &= \int_1^y \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+xy}\cdot x\,dx + \frac{\ln(1+y^2)}{y} = \frac{1}{y}\ln(1+xy)\Big|_1^y + \frac{\ln(1+y^2)}{y} \\ &= \frac{1}{y}\left[\ln(1+y^2) - \ln(1+y)\right] + \frac{\ln(1+y^2)}{y} = \frac{2}{y}\ln(1+y^2) - \frac{1}{y}\ln(1+y). \end{aligned}$$

Soluţie 2.3. Avem

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_2^a \frac{1}{x}(-x)e^{-ax}\,dx + \frac{e^{-a^2}}{a} = -\int_2^a e^{-ax}\,dx + \frac{e^{-a^2}}{a} \\ &= \frac{1}{a}e^{-ax}\Big|_2^a + \frac{e^{-a^2}}{a} = \frac{1}{a}\left(e^{-a^2} - e^{-2a}\right) + \frac{1}{a}e^{-a^2} = \frac{2}{a}e^{-a^2} - \frac{1}{a}e^{-2a}. \end{aligned}$$

Soluţie 2.4. Aplicăm în mod repetat Teorema 2.3.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^x f(t)(n-1)(x-t)^{n-2}\,dt + 1\cdot f(x)(x-x) \\ &= (n-1)\int_0^x f(t)(x-t)^{n-2}\,dt \\ F''(x) &= (n-1)(n-2)\int_0^x f(t)(x-t)^{n-3}\,dt \end{aligned}$$

....

$$F^{(n-1)}(x) = (n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot[n-(n-1)]\int_0^x f(t)\,dt = (n-1)!\int_0^x f(t)\,dt$$

$$F^{(n)}(x) = (n-1)!f(x).$$

Soluţie 2.5. Avem

$$F(t)=\begin{cases}\int_0^1 f(x)t(1-x)\,dx, & \text{dacă } t\le 0\\ \int_0^1 f(x)x(1-t)\,dx, & \text{dacă } t\ge 1\\ \int_0^t f(x)x(1-t)\,dx+\int_t^1 f(x)t(1-x)\,dx, & \text{dacă } 0<t<1.\end{cases}$$

$$F'(t)=\begin{cases}\int_0^1 f(x)(1-x)\,dx, & \text{dacă } t\le 0\\ -\int_0^1 f(x)x\,dx, & \text{dacă } t\ge 1\\ -\int_0^t f(x)x\,dx+\int_t^1 f(x)(1-x)\,dx, & \text{dacă } 0<t<1.\end{cases}$$

$$F''(t)=\begin{cases}0, & \text{dacă } t\le 0\\ 0, & \text{dacă } t\ge 1\\ -f(t)t, & \text{dacă } 0<t<1.\end{cases}$$

Soluţie 2.6. a) Avem o integrală cu parametrul a. Pentru că

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}=\lim_{x\searrow 0}\frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{a\operatorname{tg}x}\cdot a=a$$

şi

$$\lim_{x\nearrow\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}=0,$$

considerăm funcţia

$$f(x,a)=\begin{cases}\frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}, & \text{dacă } x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\\ a, & \text{dacă } x=0\\ 0, & \text{dacă } x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

care este continuă pe $[0,\frac{\pi}{2}]\times(0,\infty)$.

$$\frac{\partial f}{\partial a}=\begin{cases}\frac{1}{1+a^2\operatorname{tg}^2x}, & \text{dacă } x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\\ 1, & \text{dacă } x=0\\ 0, & \text{dacă } x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

este continuă pe $[0,\frac{\pi}{2}]\times(0,\infty)$. Conform Teoremei 2.3, integrala

$$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,dx$$

este derivabilă. Avem

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial f}{\partial a}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+a^2\operatorname{tg}^2x}.$$

Pentru a calcula integrala, facem substituţia

$$\operatorname{tg} x = t \ \Rightarrow x = \operatorname{arctg} t \Rightarrow \ dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

şi apoi descompunem funcţia în fracţii simple. Obţinem

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^\infty \frac{1}{1+a^2t^2}\cdot\frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{1-a^2}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} - \frac{a^2}{1-a^2}\int_0^\infty \frac{dt}{1+a^2t^2} \\ &= \frac{1}{1-a^2}\operatorname{arctg} t\Big|_0^\infty - \frac{a^2}{1-a^2}\frac{1}{a^2}\int_0^\infty \frac{dt}{t^2+\frac{1}{a^2}} \\ &= \frac{1}{1-a^2}\frac{\pi}{2} - \frac{a}{1-a^2}\operatorname{arctg}(at)\Big|_0^\infty = \frac{1}{1-a^2}\frac{\pi}{2} - \frac{a}{1-a^2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+a}. \end{aligned}$$

Din

$$I'(a) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+a}$$

obţinem

$$I(a) = \frac{\pi}{2}\int\frac{da}{1+a} = \frac{\pi}{2}\ln(1+a) + C.$$

Pentru calculul constantei C facem $a = 0$. Avem din enunţ $I(0) = 0$ şi din rezultat, $I(0) = C$. Rezultă $C = 0$.
b) Avem

$$\lim_{x\searrow 0}\ln\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}\cdot\frac{1}{\sin x} = \lim_{x\searrow 0}\left[\frac{1}{\sin x}\ln(1+a\sin x) - \frac{1}{\sin x}\ln(1-a\sin x)\right] =$$

$$= \ln e^a - \ln e^{-a} = 2a.$$

Considerăm funcţia

$$f(x,a) = \begin{cases} \ln\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}\cdot\frac{1}{\sin x}, & \text{dacă } x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right] \\ 2a, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

care este continuă pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times(-1,1)$. Avem pentru $x\neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{1}{\sin x}\cdot\frac{1-a\sin x}{1+a\sin x}\cdot\frac{\sin x(1-a\sin x)+\sin x(1+a\sin x)}{(1-a\sin x)^2} = \frac{2}{1-a^2\sin^2 x}$$

care este continuă pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times(-1,1)$. Rezultă că $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x,a)\,dx$ este o funcţie derivabilă. Avem

$$I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{1-a^2\sin^2 x}\,dx.$$

Pentru calculul integralei, notăm

$$\operatorname{tg} x = t \quad\Rightarrow\quad x = \operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{dt}{1+t^2},\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Rezultă

$$I'(a) = 2\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2(1-a^2)} = \frac{2}{1-a^2}\int_0^\infty \frac{dt}{t^2+\frac{1}{1-a^2}}$$
$$= \frac{2}{1-a^2}\sqrt{1-a^2}\cdot \operatorname{arctg} t\sqrt{1-a^2}\Big|_0^\infty = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}.$$

Obţinem

$$I(a) = \pi\int \frac{da}{\sqrt{1-a^2}} = \pi\cdot\arcsin a + C.$$

Din $I(0)=0$ rezultă $C=0$.
c) Avem o integrală cu parametrul m.

$$I'(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2m\,\sin^2 x}{\cos^2 x + m^2\,\sin^2 x}\,dx = 2m\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+m^2\,\operatorname{tg}^2 x}\,dx}_{\operatorname{tg} x = t,\, dx\frac{dt}{1+t^2}}$$
$$= 2m\int_0^\infty \frac{t^2}{1+m^2\,t^2}\cdot\frac{dt}{1+t^2}.$$

Descompunem fracţia în fracţii simple

$$\frac{t^2}{(1+t^2)(1+m^2\,t^2)} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{Ct+D}{1+m^2\,t^2}.$$

Obţinem $A=C=0,\ B=\frac{1}{m^2-1},\ C=\frac{-1}{m^2-1}$. Rezultă

$$I'(m) = \frac{2m}{m^2-1}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} - \frac{2m}{m^2-1}\int_0^\infty \frac{1}{1+m^2\,t^2}\,dt$$
$$= \frac{2m}{m^2-1}\operatorname{arctg} t\Big|_0^\infty - \frac{2m}{m^2-1}\cdot\frac{1}{m^2}\int_0^\infty \frac{1}{t^2+\frac{1}{m^2}}\,dt$$
$$= \frac{m}{m^2-1}\pi - \frac{2\operatorname{arctg}(mt)}{m^2-1}\Big|_0^\infty = \frac{m}{m^2-1}\cdot\pi - \frac{2}{m^2-1}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{m+1}.$$

Rezultă

$$I(m) = \pi\int\frac{dm}{m+1} = \pi\,\ln(m+1) + C.$$

Pentru calculul constantei, facem $m=1$. Din enunţ, avem $I(1)=0$, iar din rezultatul obţinut avem

$$I(1) = \pi\,\ln 2 + C \;\Rightarrow \pi\, ln2 + C = 0 \;\Rightarrow C = -\pi\,\ln 2.$$

Rezultă că $I(m) = \pi\,\ln\frac{m+1}{2}$.
d) Avem o integrală cu parametrul a. O derivăm

$$I'(a) = \int_0^\pi \frac{-2\cos x + 2a}{1-2a\,\cos x + a^2}\,dx = \frac{1}{a}\int_0^\pi \frac{-2a\,\cos x + 2a^2 + 1 - 1}{1-2a\,\cos x + a^2}\,dx$$
$$= \frac{1}{a}\int_0^\pi dx + \frac{a^2-1}{a}\int_0^\pi \frac{dx}{1-2a\,\cos x + a^2} = \frac{1}{a}\pi + \frac{a^2-1}{a}\,I_1.$$

Pentru calculul lui I_1 facem substituţia $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Avem

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty \frac{1}{1-2a\,\frac{1-t^2}{1+t^2}+a^2}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2} = 2\int_0^\infty \frac{dt}{t^2(1+a)^2+(1-a)^2} \\ &= \frac{2}{(1+a)^2}\int_0^\infty \frac{dt}{t^2+\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2} = \frac{2}{(1+a)^2}\cdot\frac{1+a}{1-a}\;\operatorname{arctg}\left(t\,\frac{1+a}{1-a}\right)\Big|_0^\infty \\ &= \frac{2}{1-a^2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{1-a^2}. \end{aligned}$$

Rezultă că

$$I'(a) = \frac{\pi}{a} + \frac{a^2-1}{a}\,\frac{\pi}{1-a^2} = 0 \Rightarrow I(a) = C.$$

Pentru a determina constanta, considerăm $a = 0$ şi obţinem $I(0) = 0$, deci $C = 0$, adică $I(a) = 0$.

Soluţie 2.7. Considerăm integrala cu parametru

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x}\ln\frac{2-a\,\cos x}{2+a\,\cos x}\,dx,\ \ |a|<2.$$

O derivăm şi apoi facem subtituţia $\operatorname{tg} x = t$. Avem

$$\begin{aligned} I'(a) &= -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4-a^2\,\cos^2 x}\,dx = -4\int_0^\infty \frac{1}{4-a^2\,\frac{1}{1+t^2}}\cdot\frac{dt}{1+t^2} \\ &= -4\int_0^\infty \frac{dt}{4t^2+4-a^2} = -\int_0^\infty \frac{dt}{t^2+\frac{4-a^2}{4}} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{4-a^2}}\;\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{4-a^2}}t\right)\Big|_0^\infty = -\frac{2}{\sqrt{4-a^2}}\cdot\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{\sqrt{4-a^2}}. \end{aligned}$$

Va rezulta că

$$I(a) = -\pi\int \frac{da}{\sqrt{4-a^2}} = -\pi\,\arcsin\frac{a}{2} + C.$$

Din $I(0) = 0$, rezultă $C = 0$. Pentru $a = \sqrt{2}$, avem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x}\ln\frac{2-\sqrt{2}\,\cos x}{2+\sqrt{2}\,\cos x}\,dx = I(\sqrt{2}) = -\pi\,\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = -\pi\,\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi^2}{4}.$$

Soluţie 2.8. Considerăm integrala cu parametru

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a\,\sin x)}{\sin x}\,dx.$$

O derivăm şi apoi facem substituţia $\operatorname{tg} x = t$. Avem

$$\begin{aligned}
I'(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{1}{1+a^2 \sin x} \cdot \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2 \sin^2 x} \\
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{1+a^2 \frac{t^2}{1+t^2}} \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2+a^2t^2} \\
&= \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+a^2)t^2+1} = \frac{1}{1+a^2} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2+\frac{1}{1+a^2}} \\
&= \frac{1}{1+a^2} \sqrt{1+a^2} \operatorname{arctg}\left(t\sqrt{1+a^2}\right)\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Rezultă că

$$I(a) = \frac{\pi}{2} \int \frac{da}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{\pi}{2} \ln(a + \sqrt{1+a^2}) + C.$$

Din $I(0) = 0$, rezultă $C = 0$, şi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(\sin x)}{\sin x} dx = I(1) = \frac{\pi}{2} \ln(1+\sqrt{2}).$$

Soluţie 2.9. Observăm că derivata lui I_1 în raport cu α este egală cu

$$\frac{\partial I_1}{\partial \alpha} = -\int_0^{\pi} \frac{dx}{(\alpha + \beta \cos x)^2} = -I_2.$$

Calculăm I_1. Cu substituţia

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \; x = 2 \operatorname{arctg} t, \; dx = \frac{2\,dt}{1+t^2},$$

avem

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha + \beta \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2} = 2 \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2(\alpha-\beta) + \alpha + \beta} \\
&= \frac{2}{\alpha-\beta} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2 + \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}} = \frac{2}{\alpha-\beta} \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}} \operatorname{arctg}\left(t\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\right)\Bigg|_0^{\infty} \\
&= \frac{2}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}.
\end{aligned}$$

Rezultă că

$$I_2 = -\frac{\partial I_1}{\partial \alpha} = \frac{\alpha}{(\alpha^2-\beta^2)\sqrt{\alpha^2-\beta^2}} \cdot \pi.$$

Soluţie 2.10. Derivăm integrala în raport cu parametrul şi apoi facem substituţia $\operatorname{tg} x = t$:

$$\begin{aligned}
I'(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\,a}{a^2 - sin^2\,x}\,dx = 2a\int_0^{\infty} \frac{1}{a^2 - \frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} \\
&= 2a\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2(a^2-1)+a^2} = \frac{2a}{a^2-1}\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2 + \frac{a^2}{a^2-1}} \\
&= \frac{2a}{a^2-1}\,\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\,\operatorname{arctg}\left(t\,\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\right)\Bigg|_0^{\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.
\end{aligned}$$

Va rezulta că

$$I(a) = \pi \int \frac{da}{\sqrt{a^2-1}} = \pi\,\ln(a + \sqrt{a^2-1}) + C.$$

Pentru calculul constantei, vezi rezultatul din Problema **??**

$$\begin{aligned}
\lim_{a\searrow 1} I(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1-\sin^2 x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos^2 x\,dx \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\,dx = 2\left(-\frac{\pi}{2}\,\ln 2\right) = -\pi\ln 2.
\end{aligned}$$

Cu aceasta obţinem

$$I(a) = \pi\,\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2}.$$

Soluţie 2.11. Funcţiile

$$f(x,a) = \frac{x^{a-1}-1}{\ln x} \quad \text{şi} \quad \frac{\partial f}{\partial a} = x^{a-1}$$

sunt continue pe $(0,1)\times(1,\infty)$. Avem $\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| = x^{a-1}$, şi $\int_0^1 x^{a-1}\,dx$ este o integrală convergentă. Aplicând Teorema 2.10 rezultă că $\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial a}\,dx$ este uniform convergentă. Din Teorema 2.12 rezultă că I este derivabilă şi

$$I'(a) = \int_0^1 x^{a-1}\,dx = \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad I(a) = \int \frac{da}{a} = \ln a + C.$$

Din $I(1) = 0$, obţinem $C = 0$.

Soluţie 2.12. Este integrală pe domeniu nemărginit. Vom aplica Teorema 2.8 Fie

$$f(x,y) = e^{-x^2}\cos(2xy),\ \ (x,y)\in[0,\infty)\times R.$$

Derivata

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x\,e^{-x^2}\sin(2xy)$$

este continuă. Avem

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq 2xe^{-x^2} \text{ şi } \int_0^\infty 2xe^{-x^2}\,dx = 1.$$

Din Teorema 2.6 rezultă că $\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial y}\,dx$ este uniform convergentă, iar funcţia $I(y) = \int_0^\infty f(x,y)\,dx$ este derivabilă.

$$I'(y) = \int_0^\infty -2xe^{-x^2}\,\sin(2xy)\,dx.$$

Integrăm prin părţi

$$\begin{aligned} I'(y) &= \int_0^\infty \left(e^{-x^2}\right)'(2xy)\,dx = e^{-x^2}\sin(2xy)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty 2y\,\cos(2xy)\,e^{-x^2}\,dx \\ &= -2y\int_0^\infty e^{-x^2}\,\cos(2xy)\,dx = -2y\,I(y). \end{aligned}$$

Am ajuns la ecuaţia diferenţială $I'(y) = -2y\,I(y)$. Rezultă

$$\frac{dI}{dy} = -2y\,I \quad\Rightarrow\quad \frac{dI}{I} = -2y\,dy \quad\Rightarrow\quad I(y) = C\,e^{-y^2}.$$

Vom determina constanta C. Avem

$$I(0) = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Pe de altă parte $I(0) = C$, ceea ce ne dă $C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Va rezulta $I(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-y^2}$.

Soluţie 2.13. Pentru calculul integralei facem substituţia

$$u = \sin\,x \Rightarrow x = \arcsin u,\;\; dx = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

Avem

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a\,x\,\cos^b\,x\,dx = \int_0^1 u^a(1-u^2)^{\frac{b}{2}}\,\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int_0^1 u^a(1-u^2)^{\frac{b-1}{2}}\,du.$$

Notăm $u = \sqrt{t}$ şi avem

$$I = \int_0^1 t^{\frac{a}{2}}(1-t)^{\frac{b-1}{2}}\,\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{a-1}{2}}(1-t)^{\frac{b-1}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\,B\left(\frac{a+1}{2},\frac{b+1}{2}\right).$$

Soluţie 2.14. Avem

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p\,x\,\cos^{-p}\,x\,dx = \frac{1}{2}B\left(\frac{p+1}{2},\frac{-p+1}{2}\right).$$

De aici rezultă

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-p}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{p+1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\sin\left(\frac{p+1}{2}\,\pi\right)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\sin\left(\frac{p}{2}\pi+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\cos\left(p\frac{\pi}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Soluţie 2.15. Avem, folosind Problema 2.13,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2}B\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}.$$

Dar $\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) = \Gamma\left(1+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ şi $\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)$. Rezultă

$$\begin{aligned} I &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} = 2\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{2\pi\sqrt{\pi}}{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)\,\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\pi\sqrt{2\pi}}{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}. \end{aligned}$$

Soluţie 2.16. Avem, folosind Problema 2.13,

$$\begin{aligned} I_1 = I_2 &= \frac{1}{2}B\left(\frac{p+1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)} \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\frac{p}{2}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} = \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{p\,\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Soluţie 2.17. Reamintim că

$$B(a,b) = \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}\,dt$$

a) Facem substituţia $x = \sqrt[n]{t} \Rightarrow dx = \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}\,dt$. Rezultă

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \frac{t^{\frac{m-1}{n}}}{1+t}\cdot\frac{1}{n}\,t^{\frac{1}{n}-1}\,dt = \frac{1}{n}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{m}{n}-1}}{1+t}\,dt = \frac{1}{n}B\left(\frac{m}{n},1-\frac{m}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{m}{n}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{\sin\left(\frac{m}{n}\pi\right)}. \end{aligned}$$

b) Facem substituţia $x = \sqrt[n]{t} \Rightarrow dx = \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}\,dt$. Rezultă

$$I = \frac{1}{n}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{1}{n}-1}}{1+t}\,dt = \frac{1}{n}\,B\left(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

c) Facem substituţia $x = \sqrt[3]{t} \Rightarrow dx = \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}\,dt$. Avem

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \frac{t}{(1+t)^3}\,\frac{1}{3}\,t^{-\frac{2}{3}}\,dt = \frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{1}{3}}}{(1+t)^3}\,dt \\ &= \frac{1}{3}B\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{3}\,\frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{\Gamma(3)} \\ &= \frac{1}{6}\,\frac{1}{3}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\,\frac{2}{3}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3^3}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\,\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3^3}\,\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\,\pi}{3^3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Soluţie 2.18. Facem substituţia $x = \sqrt{t} \Rightarrow dx = \frac{1}{2}\,t^{-\frac{1}{2}}\,dt$. Avem

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \frac{t^{\frac{a}{2}}}{1+t}\,\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{a-1}{2}}}{1+t}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\,B\left(\frac{a+1}{2}, 1-\frac{a+1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{a+1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\sin\left(\frac{a+1}{2}\,\pi\right)} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\cos\frac{a\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Derivăm în raport cu a relaţia

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\cos\frac{a\pi}{2}}.$$

Obţinem

$$\int_0^\infty \frac{x^a \ln x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}\sin\frac{a\pi}{2}}{\cos^2\left(\frac{a\pi}{2}\right)} = \frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{\sin\frac{a\pi}{2}}{\cos^2\left(\frac{a\pi}{2}\right)}.$$

Soluţie 2.19. Facem substituţia $x = at$. Avem

$$I = \int_0^1 a^m t^m\,(a^n - a^n t^n)^p\;a\,dt = a^{m+1}a^{np}\int_0^1 t^m\,(1-t^n)^p\;dt$$

Facem substituţia $t = \sqrt[n]{u} \Rightarrow dt = \frac{1}{n}\cdot u^{\frac{1}{n}-1}\,du$. Obţinem

$$\begin{aligned} I &= a^{m+1+np}\int_0^1 u^{\frac{m}{n}}\,(1-u)^p\cdot\frac{1}{n}\cdot u^{\frac{1}{n}-1}\,du \\ &= \frac{1}{n}a^{m+1+np}\int_0^1 u^{\frac{m+1}{n}-1}\,(1-u^p)\;du = \frac{1}{n}a^{m+1+np}\cdot B\left(\frac{m+1}{n}, p+1\right). \end{aligned}$$

Soluţie 2.20. Facem substituţia

$$ax^2 = t \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot t^{\frac{1}{2}} \Rightarrow dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{2} \cdot t^{-\frac{1}{2}}\, dt.$$

Rezultă

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \frac{1}{a^n} t^n e^{-t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a}} t^{-\frac{1}{2}}\, dt = \frac{1}{2a^n\sqrt{a}} \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{n-\frac{1}{2}}\, dt \\ &= \frac{1}{2a^n\sqrt{a}} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Aplicăm în mod repetat relaţia $\Gamma(a+1) = a \cdot \Gamma(a)$.

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(n - \frac{3}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(n - \frac{2n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 1}{2^n} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \cdot \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$