

CURS 2

MECANICA PUNCTULUI MATERIAL

2.1 Dinamica punctului material

Dinamica punctului material studiază cauzele mișcării punctului material.

Newton a pus bazele dinamicii clasice prin formularea celor trei principii (legi) cunoscute sub denumirea de „*legile lui Newton*” sau „principiile dinamicii”.

Principiul I al dinamicii (principiul inerției): *Un corp își păstrează starea de mișcare rectilinie și uniformă sau de repaus relativ atâta vreme cât asupra sa nu acționează o forță externă.*

Inerția=proprietatea corpurilor de a se opune schimbării stării lor. Cu cât masa corpului este mai mare, cu atât inerția lui este mai mare → masa este o măsură a inerției.

Principiul II al dinamicii: *Accelerația unui corp este direct proporțională cu forța externă care acționează asupra sa și invers proporțională cu masa sa*

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (2.1)$$

În mecanica newtoniană (clasică) nu se ține cont de efectele reativiste (modificarea masei în funcție de viteza corpului) → ecuația (2.1) se poate scrie

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (2.2)$$

Relația (2.2) arată că forța este derivata impulsului în raport cu timpul și constituie cea mai generală definiție a forței. În SI unitatea de măsură pentru masa inerțială este *kilogramul*, iar pentru forță este *newtonul* (1N= forța care imprimă o $a=1\text{m/s}^2$ unui corp cu $m=1\text{ kg}$)

$$[F] = [m] \cdot [a] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{N} \quad (2.3)$$

Principiul III al dinamicii (principiul acțiunii și reacțiunii): *Dacă un corp A exercită o forță asupra corpului B, atunci și corpul B acționează asupra corpului A cu o forță egală în modul și de sens contrar.*

Observație importantă: forțele de acțiune–reacțiune se exercită pe obiecte diferite și deci nu pot fi în echilibru.

La cele trei principii menționate, au fost adăugate ulterior alte două:

Principiul IV al dinamicii (principiul suprapunerii forțelor): *Mai multe forțe care acționează asupra aceluiași corp, acționează independent producând fiecare dintre ele propriul său efect.*

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots}{m} = \frac{\vec{F}_1}{m} + \frac{\vec{F}_2}{m} + \dots = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots \quad (2.4)$$

Principiul V al dinamicii (principiul relativității): *Starea de mișcare și de repaus ale unui corp sunt relative depinzând de starea sistemului de referință considerat.*

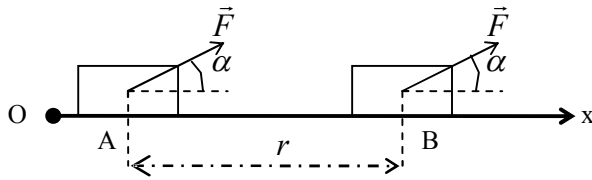
Un exemplu cunoscut este acela al unui călător aflat într-un tren în mișcare. Călătorul este în mișcare față de decor, dar se află în repaus față de tren.

2.2 Lucrul mecanic

Presupunem că asupra unei punct material acționează o forță \vec{F} . Dacă forța este constantă și mișcarea are loc de-a lungul direcției care face un unghi α cu forța (fig. 2.1), *lucrul mecanic* efectuat de această forță de-a lungul vectorului deplasare, \vec{r} , este

$$\vec{L} = \vec{F} \cdot \vec{r} = F \cdot r \cdot \cos \alpha \quad (2.5)$$

Fig.2.1 Lucrul mecanic la mișcarea unui corp de-a lungul vectorului \vec{r} .



În figura 2.2 este reprezentat cazul forței care acționează asupra unui corp de-a lungul direcției Ox, modulul forței depinzând de poziția sa, $F=F(x)$. Pentru a găsi lucrul mecanic efectuat de această forță se împarte deplasarea într-un număr mare de intervale mici, Δx_i , atât de mici încât să putem considera forța constantă de-a lungul fiecăruia din ele. Lucrul mecanic efectuat de forță de-a lungul intervalului lui Δx_i este (conform (2.5))

$$L_i = F_i \cdot \Delta x_i \quad (2.6)$$

adică este egal cu aria unui dreptunghi de lățime Δx_i și înălțime F_i . Lucrul mecanic total efectuat de forța $F(x)$ de-a lungul deplasării $x_2 - x_1$ este

$$L = \sum_{i=1}^n L_i = \sum_{i=1}^n F_i \Delta x_i \quad (2.7)$$

Pentru o aproximare mai exactă trebuie să împărțim deplasarea $x_2 - x_1$ într-un număr cât mai mare de intervale mici Δx_i . Lățimea intervalelor va fi tot mai mică, iar la limită, când $\Delta x_i \rightarrow 0$, ele devin cantități infinitezimale, notate dx . Pe intervalele infinitezimale se păstrează condiția $F(x) = \text{const.}$, adică forța poate fi considerată constantă. Lucrul mecanic infinitezimal efectuat de-a lungul unui interval dx este

$$dL = F(x)dx \quad (2.8)$$

Lucrul mecanic total de-a lungul deplasării $x_2 - x_1$ se obține însumând contribuțiile infinitezimale dL

$$L = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx \quad (2.9)$$

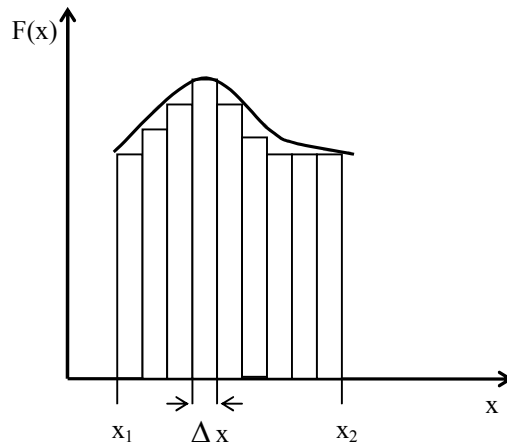


Fig.2.2 Graficul variației forței $F(x)$ pe axa Ox.

Semnificația geometrică a integralei (2.9) = aria de sub graficul ce exprimă dependența forței de deplasare.

Cazul cel mai general este acela al lucrului mecanic efectuat de o forță variabilă ce determină o deplasare a unui punct material pe o traiectorie oarecare descrisă de vectorul de poziție \vec{r} . În acest caz formula (2.8) devine

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (2.10)$$

lucrul mecanic total este

$$L = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b F \cdot \cos \beta \cdot dr \quad (2.11)$$

unde β este unghiul dintre forța \vec{F} și deplasarea infinitezimală $d\vec{r}$.

2.3 Energia

Din viața de toate zilele cunoaștem faptul că există mai multe forme de energie: energia cinetică - asociată cu mișcarea unui corp, energia potențială - asociată cu poziția relativă a corpurilor, respectiv cu capacitatea lor de a efectua lucru mecanic, energia internă - asociată cu mișcarea moleculelor în interiorul unui gaz și strâns legată de temperatura acestuia, etc.

Energia cinetică a unui punct material de masă m ce se deplasează cu viteza \vec{v} este

$$T = \frac{mv^2}{2} \quad (2.12)$$

Forța \vec{F} ce determină deplasarea unui punct material între x_1 și x_2 , efectuează lucrul mecanic

$$W_{ab} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} m \frac{dv}{dt} \cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} m \cdot v \cdot dv = m \frac{v_b^2}{2} - m \frac{v_a^2}{2} = \Delta T \quad (2.13)$$

care este egal cu variația energiei cinetice a punctului material. Această relație exprimă **teorema variației energiei cinetice** care afirmă că lucrul mecanic efectuat de o forță asupra unui punct material este egal cu variația energiei cinetice a acesteia. Energia unui sistem poate fi definită deci ca și capacitatea sistemului de a efectua lucru mecanic.

2.4 Legi de conservare în mecanică

A. Legea conservării energiei pentru sisteme izolate (legea fundamentală de conservare în fizică); redusă la limitele mecanicii, ea **afirmă că energia mecanică totală (energia cinetică, T + energia potențială, U) a unui sistem izolat este constantă**

$$T + U = \text{const.} \quad (2.14)$$

Există situații în care, aparent, legea conservării energiei nu este respectată. Fie forțele de frecare datorită cărora un corp aflat în mișcare se oprește la un moment dat. Făcând un bilanț energetic, s-ar părea că are loc o pierdere de energie. De fapt, energia cinetică a corpului este înmagazinată de atomii din interiorul corpului și din mediul înconjurător sub formă de energie calorică. Astfel, energia "pierdută" se regăsește de fapt sub formă de energie calorică în corpul respectiv și în mediul înconjurător.

B. Legea conservării impulsului - afirmă că impulsul unui sistem izolat se conservă (rămâne constant). Forța care acționează asupra acelui punct material este $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ (2.2). Un

sistem izolat este acela pentru care suma forțelor care acționează asupra sa este $\vec{F} = 0$. Atunci avem $d\vec{p}/dt = 0 \rightarrow \vec{p} = \text{const.}$

C. Legea conservării momentului cinetic - afirmă că pentru un sistem izolat (pe care acționează o forță și respectiv un moment al forței nule) momentul cinetic rămâne constant.

Fie o forță \vec{F} ce acționează asupra unui punct material P, a cărui poziție este dată de vectorul de poziție \vec{r} (fig.2.3). Momentul forței, \vec{M} , ce acționează asupra punctului material (în raport cu originea O) este definit

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (2.15)$$

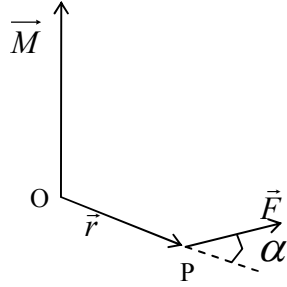


Fig.2.3 Momentul forței \vec{F} ce acționează asupra punctului material, \vec{M} .

Momentul cinetic al punctului material P (vezi figura 2.4) este definit

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (2.16)$$

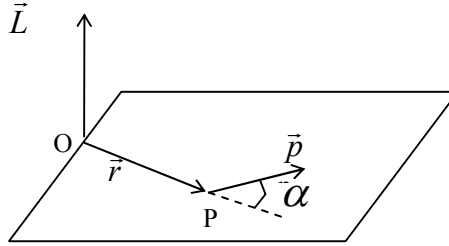


Fig.2.4 Momentul cinetic al punctului material P.

Se demonstrează că

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} \quad (2.17)$$

2.5 Energia și masa

Una din legile de conservare fundamentale este legea conservării materiei. Studiul fenomenelor relativiste și descoperirile lui Einstein au sugerat faptul că, pentru păstrarea valabilității unor legi fizice, masa unei particule trebuie redefinită

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.18)$$

Aici m_0 este masa de repaus a particulei (în repaus față de observator), m este masa de mișcare a particulei (în mișcare cu viteza v față de observator) și c este viteza luminii (are valoarea constantă de 3×10^8 m/s). Formula (2.18) arată că o dată cu variația vitezei punctelor materiale se produc efecte relativiste constând în modificarea masei acestora (aceste efecte nu se referă la modificarea cantității de substanță dintr-un obiect). Energia cinetică nu mai este $\frac{1}{2} m_0 v^2$, ci devine

$$E_c = mc^2 - m_0 c^2 = (m - m_0) c^2 = \Delta m c^2 \quad (2.19)$$

Conform (2.19), energia cinetică a unei particule este produsul dintre c^2 și creșterea de masă Δm care rezultă din mișcarea acestei particule. Ajungem astfel la **principiul echivalenței dintre masă și energie**, enunțat pentru întâia oară de Einstein, care afirmă că pentru orice cantitate de energie E , de orice tip, transmisă unui obiect material, masa obiectului va crește cu o cantitate $\Delta m = E/c^2$.

2.6 Cinematica rotației

Fie mișcarea de rotație a unui punct material de pe un disc rotitor. Figura 2.5 prezintă un disc care se rotește în jurul axei sale de simetrie perpendiculare pe suprafața sa. Într-un interval de timp dat fiecare punct material de pe disc se deplasează cu același unghi, dar vitezele de deplasare ale acestor puncte (măsurate pe arcele corespunzătoare) vor fi diferite (un punct mai îndepărtat de axă se mișcă mai repede decât unul aflat în apropierea axei).

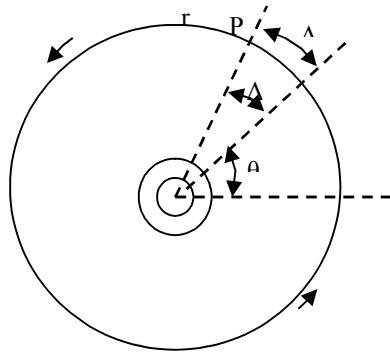


Fig.2.5 Disc rotitor.

Un punct material P de pe disc, aflat la o distanță r față de centru, se mișcă de-a lungul unui arc de cerc pe distanța Δs .

Viteza liniară (periferică) a punctului material este

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (2.20)$$

Unghiul de rotație al discului - unghiul „măsurat” de rază (exprimat în radiani) este

$$\Delta \theta = \frac{\Delta s}{r} \quad (2.21)$$

Viteza unghiulară ω a discului este

$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \quad (2.22)$$

Viteza unghiulară este o mărime fizică vectorială, perpendiculară pe planul mișcării circulare. Unitatea de măsură a vitezei unghiulare este radianul/secundă (s^{-1}).

Accelerația unghiulară - viteza de variație a vitezei unghiulare

$$\varepsilon = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \left[\frac{rad}{s^2} \right] \quad (2.23)$$

Relația între viteza liniară a unui punct material de pe disc și viteza unghiulară a discului este (am folosit (2.21) și (2.22))

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{r \cdot \Delta \theta}{\Delta t} = \omega \cdot r \quad (2.24)$$

sau sub formă vectorială (fig.2.6)

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (2.25)$$

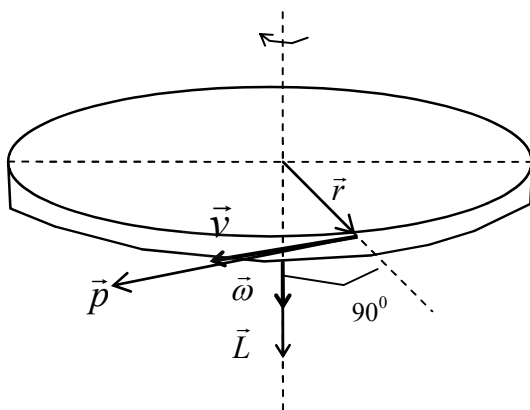


Fig.2.6 Viteza unghiulară

Analog, între accelerația tangențială a unui punct material de pe disc și accelerația unghiulară a discului, există relația

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{r \cdot \Delta \omega}{\Delta t} = \varepsilon \cdot r \quad (2.26)$$

sau, vectorial

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} \quad (2.27)$$

Accelerație liniară (centripetă), a_c – apare la fiecare punct material de pe disc; este îndreptată spre interior de-a lungul liniei radiale și are modulul

$$a_c = \frac{v^2}{r} = r \cdot \omega^2 \quad (2.28)$$

Există o analogie între mișcarea de translație și mișcarea de rotație.

2.7 Energia cinetică în mișcarea de rotație

Un corp aflat în mișcare de rotație posedă o energie cinetică asociată acestei mișcări. Aceasta este suma energiilor cinetice ale punctelor materiale care alcătuiesc acel corp. Dacă m_i și v_i sunt masa și respectiv viteza unui asemenea punct material, energia cinetică a corpului aflat în mișcare de rotație este

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (\omega \cdot r_i)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \left(\sum m_i \cdot r_i^2 \right) = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \quad (2.29)$$

Produsul dintre masa unui punct material și pătratul distanței sale față de axa de rotație, r_i^2 , este **momentul de inerție** I_i al aceluia punct material. Prin însumarea (în relația (2.29)) a momentelor de inerție ale punctelor materiale din care este compus corpul obținem momentul de inerție al corpului, I . Din (2.34) constatăm că viteza unghiulară ω joacă rolul vitezei v din mișcarea de translație, iar momentul de inerție, I , joacă rolul masei m din mișcarea de translație.

Momentul de inerție pentru un element infinit mic al corpului aflat în rotație este

$$dI = r^2 \cdot dm = r^2 \cdot \rho \cdot dV \quad (2.30)$$

unde ρ este densitatea corpului și dV este volumul unui element de volum infinit mic al corpului studiat. Momentul de inerție pentru întregul corp se calculează integrând relația (2.30) pe volumul V al corpului

$$I = \int_V r^2 \cdot \rho \cdot dV \quad (2.31)$$

2.8 Mișcarea de translație și mișcarea de rotație

Am văzut în paragraful precedent analogia care există între expresiile pentru energia cinetică în mișcarea de translație, respectiv mișcarea de rotație. Această analogie există și între alte mărimi fizice și ecuații caracteristice ale celor două mișcări (tabelul 2.1).

Tabel 2.1 Comparatie între mișcarea de translație și mișcarea de rotație.

<i>Mișcarea de translație</i>	<i>Ecuația</i>	<i>Mișcarea de rotație</i>	<i>Ecuația</i>
Deplasarea	Δx	Intervalul unghiular	$\Delta \theta$
Viteza	$v = \Delta x / \Delta t$	Viteza unghiulară	$\omega = \Delta \theta / \Delta t$
Accelerația	$a = \Delta v / \Delta t$	Accelerația unghiulară	$\varepsilon = \Delta \omega / \Delta t$
Ecuațiile mișcării uniform accelerate	$v = v_0 \pm a \cdot t$ $x = x_0 + v_0 t \pm at^2 / 2$ $v^2 = v_0^2 \pm 2a(x - x_0)$	Ecuațiile mișcării uniform accelerate	$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon \cdot t$ $\theta = \theta_0 + \omega_0 t \pm \varepsilon \cdot t^2 / 2$ $\omega^2 = \omega_0^2 \pm 2\varepsilon \cdot \Delta \cdot \theta$
Masa	m	Momentul de inerție	$I = mr^2$
Impuls	$\vec{p} = m\vec{v}$	Momentul cinetic	$\vec{L} = I\vec{\omega}$
Forța	\vec{F}	Momentul forței	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
Puterea	$P = Fv$	Puterea	$P = \tau \cdot \omega$
Legea a II-a a lui Newton	$\vec{F} = d\vec{p} / dt$	Legea a II-a a lui Newton	$\vec{M} = d\vec{L} / dt = I \cdot \omega$
Energia cinetică	$T = mv^2 / 2$	Energia cinetică	$T_r = I \cdot \omega^2 / 2$

2.9 Forțe conservative

Fie un domeniu din spațiu unde în fiecare punct acționează o forță \rightarrow **câmp de forțe**.

Câmp de forțe conservativ acel câmp de forțe în care lucrul mecanic efectuat de câmp asupra unui punct material pentru a-l deplasa de-a lungul unei curbe închise este nul.

Fie un punct material (vezi fig.2.7) ce se deplasează de la poziția **a** la poziția **b** de-a lungul căii **1** și se întoarce la **a** de-a lungul căii **2**. Traectoria acestui punct material este o curbă închisă. Dacă câmpul de forțe este conservativ, atunci lucrul mecanic efectuat asupra particulei de-a lungul curbei **a1b2a** este nul

$$W_{ba,1} + W_{ba,2} = 0 \rightarrow W_{ab,1} = -W_{ba,2} \quad (2.32)$$

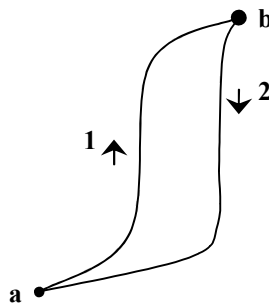


Fig.2.7 Căi închise în câmpul forțelor conservative.

Considerăm acum că punctul material se mișcă de la **a** la **b** de-a lungul căii **2**, putem scrie

$$W_{ab,2} = -W_{ba,2} \quad (2.33)$$

de unde

$$W_{ab,1} = W_{ab,2} \quad (2.34)$$

Deci, *dacă un câmp de forțe este conservativ, lucrul mecanic efectuat asupra unui punct material nu va depinde de traiectoria acestuia ci numai de pozițiile sale inițială și finală.*

Printre câmpurile conservative se numără cele electrice și cele gravitaționale.

Dacă aplicăm acum operatorul de diferențiere asupra relației (2.14) obținem

$$dT + dU = 0 \quad (2.35)$$

care arată că *variația energiei cinetice a unui punct material este egală cu aceea a energiei sale potențiale*. Cu relația 2.13, relația 2.36 devine

$$dU = -dT = -dW = -\vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (2.36)$$

de unde

$$\vec{F} = -\frac{dU(r)}{d\vec{r}} = -\frac{dU}{dr} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.37)$$

unde termenul din dreapta ecuației 2.41 este gradientul energiei potențiale \rightarrow **forța este egală cu gradientul energiei potențiale U , luat cu semnul minus** (numai în câmpuri conservative)

$$\vec{F} = -\text{grad}U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}\right) \quad (2.38)$$

OSCILAȚII

2.10 Mișcarea oscilatorie

Una dintre cele mai importante mișcări întâlnite în natură este **mișcarea oscilatorie**, determinată de acțiunea forțelor elastice.

Mișcarea oscilatorie este o **mișcare periodică** deoarece constă în realizarea unei deplasări ciclice a sistemului (deplasări care se repetă la intervale egale de timp). Ea este caracterizată prin:

-perioada mișcării (T) (=timpul necesar pentru efectuarea unei deplasări ciclice complete în timpul derulării mișcării;

-frecvența mișcării (ν) (= numărul de mișcări ciclice complete efectuate în unitatea de timp).

Pe baza acestor definiții vom avea

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{t}{n} \\ \nu &= \frac{n}{t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow T \cdot \nu = 1 \quad (2.39)$$

unde n reprezintă numărul de oscilații complete efectuate de sistem în timpul t . În SI perioada se măsoară în secunde, $[T]_{SI} = 1s$, iar frecvența se măsoară în hertzi, $[\nu] = s^{-1} = Hz$.

-pulsăția (ω), legată de frecvență prin relația

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \quad (2.40)$$

Cele mai importante mișcări oscilatorii sunt: a. oscilațiile armonice; b. oscilațiile amortizate; c. oscilațiile forțate.

2.11 Oscilațiile armonice

Fie un corp de masă m prins de un perete vertical prin intermediul unui resort și care se poate mișca pe planul orizontal fără frecare (fig.2.8).

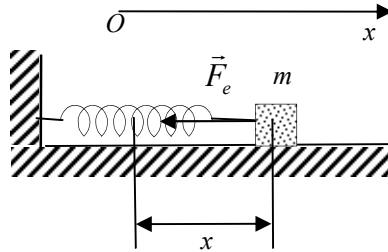


Fig.2.8 Mișcarea oscilatorie armonică.

Presupunem că forța de rezistență din partea mediului înconjurător este neglijabilă. Scoatem corpul din poziția de echilibru și îl lășăm liber. El se va mișca de o parte și de alta a poziției sale de echilibru efectuând o mișcare oscilatorie armonică. Mișcarea este determinată de apariția în resort a unei forțe elastice de revenire, \vec{F}_e .

Mișcarea oscilatorie armonică constă în deplasarea unui obiect de-a lungul unei axe sub acțiunea unei forțe elastice. Distanța x la care se afla obiectul la un moment dat față de poziția de echilibru se numește **elongație**. Elongația maximă reprezintă **amplitudinea** mișcării oscilatorii armonice (notată cu A). Elongația și amplitudinea se măsoară în metri.

Pentru a afla ecuația de mișcare a oscilatorului armonic scriem ecuația principiului II al dinamicii

$$F_e = ma \quad (2.41)$$

Deoarece mișcarea oscilatorie armonică este produsă de o forță elastică, egalăm expresia (2.42) cu expresia forței elastice ($F_e = -kx$ unde k este constanta elastică iar x este elongația mișcării oscilatorii armonice)

$$ma + kx = 0 \quad (2.42)$$

sau

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0 \quad (2.43)$$

Înmulțind relația anterioară cu $\frac{1}{m}$ și notând $\omega^2 = \frac{k}{m}$, ecuația (2.43) devine

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (2.44)$$

Această relație este o ecuație diferențială de ordinul 2, omogenă. Soluția ei este elongația oscilatorului armonic, $x(t)$, o funcție care depinde de timp.

Ecuația (2.44) se numește **ecuația mișcării oscilatorului armonic** (sub forma diferențială).

Pentru a rezolva ecuația (2.44) avem nevoie de o funcție a cărei a doua derivată trebuie să fie egală cu funcția însăși, cu semnul minus, cu excepția factorului constant ω . Să observăm faptul că o asemenea proprietate o au funcțiile sinus și cosinus

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}(\cos t) &= -\cos t \\ \frac{d^2}{dt^2}(\sin t) &= -\sin t\end{aligned}\tag{2.45}$$

Evident, rezultatul nu se modifică dacă înmulțim funcția sinus/cosinus, cu o constantă, A. Astfel, o soluție a ecuației (2.45) ar putea fi de forma

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)\tag{2.46}$$

Astfel, am găsit o soluție generală (2.46) pentru ecuația (2.46), soluție în care constantele A și φ (amplitudinea și faza inițială a mișcării) sunt necunoscute. Menționăm faptul că relația (2.46) reprezintă și ea **ecuația mișcării oscilatorului armonic** (sub forma integrală).

Pentru rezolvarea ecuației (2.44) se pune acum problema determinării parametrilor A și φ care apar în soluția generală (2.46).

Să observăm mai întâi faptul că derivând ecuația (2.46) în raport cu timpul o dată, respectiv de două ori, obținem expresiile pentru viteza, respectiv accelerația oscilatorului armonic

$$\begin{aligned}v &= \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi) \\ a &= \frac{dv}{dt} = \frac{dx^2}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)\end{aligned}\tag{2.47}$$

Pentru a determina constantele A și φ trebuie să cunoaștem condițiile inițiale ale mișcării oscilatorii armonice – elongația inițială (x_0) și viteza inițială (v_0). Impunem aceste condiții elongației (2.46) și vitezei (2.47) și obținem un sistem de 2 ecuații

$$\begin{aligned}x_0 &= A \sin \varphi \\ v_0 &= A \omega \cos \varphi\end{aligned}\tag{2.47}$$

pe care îl rezolvăm. Aflăm astfel constantele A și φ , adică determinăm soluția ecuației (2.44).

Observăm că valorile soluției (2.46) se repetă după un număr întreg al intervalului de timp $2\pi/\omega$, deci $2\pi/\omega$ reprezintă perioada T a mișcării. Putem astfel scrie

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}\tag{2.48}$$

Cantitatea ω , despre care am discutat și la relația (2.43) poartă numele de **frecvență unghiulară** (sau **pulsăția proprie**) a mișcării oscilatorii armonice și este independentă de amplitudine. Cantitatea $\omega t + \varphi$ reprezintă **faza mișcării**, iar φ este **faza inițială a mișcării**.

În fig.2.9 este redată reprezentarea grafică a legii de mișcare a oscilatorului liniar armonic (2.47) pentru cazul $\varphi_0=0$.

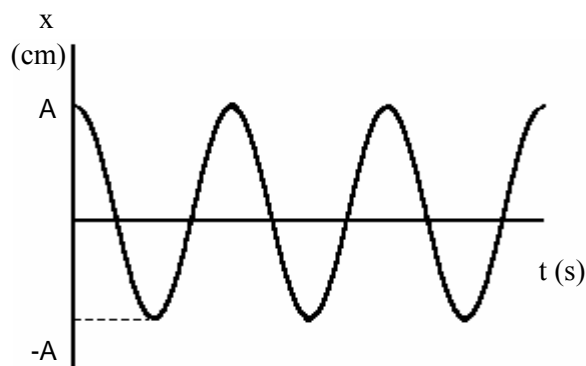


Fig.2.9 Variația în timp a elongației în mișcarea oscilatorie armonică.

Derivând legea de mișcare (2.46) în raport cu timpul o dată respectiv de două ori obținem viteza, respectiv accelerația oscilatorului armonic

$$\begin{aligned} v &= A\omega \cos(\omega t + \varphi) \\ a &= -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (2.49)$$

Energia cinetică (E_c), energia potențială (U) și energia totală (E) a oscilatorului armonic sunt date de relațiile

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \\ U &= \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \\ E &= E_c + U = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2 \end{aligned} \quad (2.50)$$

Energia totală pentru un oscilator armonic se conservă. După ce a început mișcarea armonică, obiectul va oscila cu amplitudine, fază și frecvență constante.

Energia potențială a mișcării oscilatorii armonice se reprezintă printr-o parabolă, iar forța elastică care determină mișcarea oscilatorie armonică

$$F = -\frac{dU}{dx} = -kx \quad (2.51)$$

printr-un segment de dreaptă tangent la parabolă. Forța se anulează în punctul minim al curbei energiei potențiale (fig.2.10).

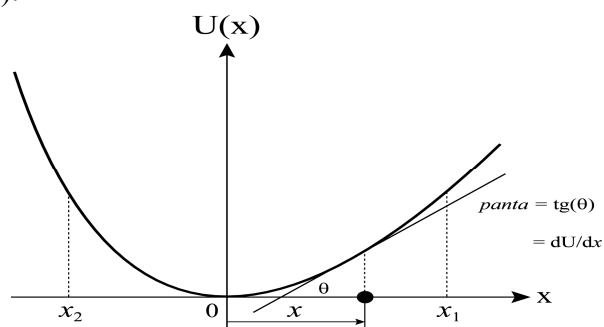


Fig.2.10 Dependența energiei potențiale și a forței elastice de elongație în mișcarea oscilatorie armonică.