Capitolul 1

Integrale improprii

1.1 Integrale improprii

1.1.1 Noţiuni teoretice

Integrala improprie este o extindere a noţiunii de integrală definită pentru cazul în care intervalul de integrare sau funcţia de integrat sunt nemărginite.

Integrale din funcţii definite pe intervale nemărginite

Definiţie 1.1. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval nevid. O funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ se numeşte local integrabilă pe I, dacă restricţia sa la orice compact conţinut în I este integrabilă.

Definiţie 1.2. Fie $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ local integrabilă pe $[a, \infty)$ şi fie $b > a$, oarecare. Dacă

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

există şi este finită, spunem că integrala $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este convergentă şi prin definiţie

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Dacă limita precedentă nu există sau este infinită, atunci $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este divergentă.

Observaţie 1.3. Analog se defineşte

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Definiţie 1.4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ local integrabilă. Integrala $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ este convergentă dacă şi numai dacă $\int_{-\infty}^A f(x)\,dx$ şi $\int_A^\infty f(x)\,dx$ sunt convergente, pentru orice $A \in \mathbb{R}$.

Observaţie 1.5. Folosind Definiţia 1.2 se demonstreză că

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx,\ a>0$$

este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă pentru $\alpha \le 1$.

Teorema 1.6 (Criteriu de comparaţie)**.** Fie $f(x) \ge g(x) > 0$, $\forall x \in [a,\infty)$, local integrabile.

a) Dacă integrala $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este convergentă, atunci şi $\int_a^\infty g(x)\,dx$ este convergentă.

b) Dacă integrala $\int_a^\infty g(x)\,dx$ este divergentă, atunci şi $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este divergentă.

Teorema 1.7. Fie $f : [a,\infty) \to \mathbb{R},\ a > 0$ local integrabilă, $f(x) > 0$, pentru orice $x \in [a,\infty)$.

Dacă $\lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = A \in [0,\infty)$ şi $\alpha > 1$, atunci $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este convergentă.

Dacă $\alpha \le 1$ şi $A \ne 0$, atunci $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este divergentă.

Observaţie 1.8. Fie P şi Q polinoame. Dacă Q nu se anulează pe $[a,\infty)$ şi dacă $gradP \le gradQ - 2$, atunci

$$\int_a^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

este convergentă.

Teorema 1.9 (Criteriul lui Dirichlet)**.** Dacă $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ este local integrabilă şi există $M > 0$ astfel încât $\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right| \le M$ pentru $\forall\ \alpha,\beta > a$ şi dacă funcţia $g : [a,\infty) \to R$ este monoton descrescătoare la zero cînd $x \to \infty$, atunci $\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx$ este convergentă.

Teorema 1.10 (Criteriul integral al lui Cauchy)**.** Dacă $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ este continuă şi necrescătoare, atunci integrala $\int_0^\infty f(x)\,dx$ şi seria $\sum_{n\ge 0} f(n)$ au aceeaşi natură.

Integrale din funcţii nemărginite în intervalul de integrare

Definiţie 1.11. Fie $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ local integrabilă şi nemărginită în b. Punctul b se numeşte punct singular pentru funcţia f. Integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ este convergentă, dacă $\lim_{\epsilon\searrow 0}\int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx$ există şi este finită.

Observaţie 1.12. Analog, dacă $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ are pe a punct singular, se defineşte

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\searrow 0}\int_{a+\epsilon}^b f(x)\,dx.$$

Dacă $c \in (a,b)$ este punct singular pentru f, atunci

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Observaţie 1.13. Folosind Definiţia 1.11 se demonstrează că

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\lambda},\ \lambda \in R$$

este convergentă pentru $\lambda < 1$ şi divergentă pentru $\lambda \geq 1$.

Teorema 1.14. Fie $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ nemărginite în b, local integrabile, cu $f(x) \geq g(x) > 0$, pentru orice $x \in [a, b)$.

a) Dacă $\int_a^b f(x)\,dx$ este convergentă, rezultă că $\int_a^b g(x)\,dx$ este convergentă.

b) Dacă $\int_a^b g(x)\,dx$ este divergentă, rezultă că $\int_a^b f(x)\,dx$ este divergentă.

Teorema 1.15. Fie $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ nemărginită în b, local integrabilă şi strict pozitivă pentru orice $x \in [a, b)$. Dacă pentru $\alpha < 1$ avem

$$\lim_{x\to b}(x-b)^\alpha f(x) = A,\ (finit),$$

atunci $\int_a^b f(x)\,dx$ este convergentă.
Dacă $A \neq 0$ şi $\alpha \geq 1$, atunci $\int_a^b f(x)\,dx$ este divergentă.

1.1.2 Exerciţii rezolvate

Să se calculeze următoarele integrale improprii:

Problema 1.1. $\int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)(x+b)},\ a,b>0$

Problema 1.2. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+3x+2}$.

Problema 1.3. $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)^2}$.

Problema 1.4. $\int_1^\infty \frac{dx}{(x+2)(x^2+1)}$.

Problema 1.5. $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$.

Problema 1.6. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+x^2+1}$.

Problema 1.7. $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}$.

Problema 1.8. $\int_0^\infty \frac{(x^4+1)\,dx}{x^6+1}$.

Problema 1.9. $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+x)^2}$.

Problema 1.10. $\int_1^\infty \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$.

Problema 1.11. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

Problema 1.12. $\int_a^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}},\ a>0$.

Problema 1.13. $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^10+x^5+1}}$.

Problema 1.14. $\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{x^4+1}$.

Problema 1.15. Calculaţi

$$I_n = \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^n},\ n \in \mathbb{N}.$$

Problema 1.16. $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{1-x^2}}$.

Problema 1.17. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

Problema 1.18. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+2}}$.

Problema 1.19. $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}$.

Problema 1.20. $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$.

Problema 1.21. $\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx$.

Problema 1.22. $\int_{a}^{b} \frac{x\, dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

Problema 1.23. $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$.

Problema 1.24. $\int_{0}^{1} \left(\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{x}\right) dx$.

Problema 1.25. $\int_{-1}^{-\frac{1}{3}} \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$.

Problema 1.26. $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Problema 1.27. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\mathrm{tg}^n\, x}$.

Problema 1.28. $\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

Problema 1.29. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x-2)\sqrt{1-x^2}}$.

Problema 1.30. Să se calculeze

$$\int_{-a}^{a} \frac{x^n\, dx}{\sqrt{a^2-x^2}},\ a>0,\ n\in\mathbb{N}.$$

Problema 1.31. Fie şirul $(L_n)_{n\geq 1}$, $L_n = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos nx}{1-\cos x}\, dx$.
1. Să se demonstreze că termenii şirului sunt în progresie aritmetică.
2. Să se calculeze L_n.

Problema 1.32. Să se calculeze integrala $A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin x}$, $n\in\mathbb{N}$.

Problema 1.33. Să se calculeze integralele $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\, dx$.

1.1.3 Soluţii.

Soluţie 1.1. Descompunem funcţia în fracţii simple:

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b}.$$

Obţinem

$$I = \frac{1}{b-a}\int_0^{\infty} \frac{dx}{x+a} - \frac{1}{b-a}\int_0^{\infty} \frac{dx}{x+b} = \frac{1}{b-a} \ln \frac{x+a}{x+b}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a-b} \ln \frac{a}{b}.$$

Soluţie 1.2. Avem

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}.$$

Rezultă că

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x+1} - \int_0^{\infty} \frac{dx}{x+2} = \ln \frac{x+1}{x+2}\Big|_0^{\infty} = \ln \frac{1}{2}.$$

Soluţie 1.3. Descompunem funcţia în fracţii simple:
$$\frac{x}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}.$$
Obţinem
$$\begin{aligned} I &= -\int_0^\infty \frac{dx}{x+1} + \int_0^\infty \frac{dx}{x+2} + 2\int_0^\infty \frac{dx}{(x+2)^2} \\ &= \ln \frac{x+2}{x+1}\Big|_0^\infty - 2\,\frac{1}{x+2}\Big|_0^\infty = -\ln 2 + 1. \end{aligned}$$

Soluţie 1.4. Descompunem funcţia în fracţii simple
$$\frac{1}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$
Obţinem
$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{5}\int_1^\infty \frac{dx}{x+2} - \frac{1}{5}\int_1^\infty \frac{x\,dx}{x^2+1} + \frac{2}{5}\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{5}\ln \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}\Big|_1^\infty + \frac{2}{5}\operatorname{arctg} x\Big|_1^\infty \\ &= -\frac{1}{5}\ln\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{2}{5}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{10} - \frac{1}{5}\ln\frac{3}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Soluţie 1.5. După descompunerea în fracţii simple, avem
$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{b^2-a^2}\left(\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} - \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+b^2}\right) \\ &= \frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\Big|_0^\infty - \frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{x}{b}\Big|_0^\infty\right) = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{ab(a+b)}. \end{aligned}$$

Soluţie 1.6. Căutăm o descompunere în fracţii simple. Avem
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)^2-x^2} \\ &= \frac{1}{(x^2+1-x)(x^2+1+x)} = \frac{Ax+B}{x^2-x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}. \end{aligned}$$
Se obţine
$$I = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x-1}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{2x+2}{x^2+x+1}\,dx - \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{2x-2}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx +$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx + \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\ln \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\Big|_0^\infty + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big|_0^\infty + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Big|_0^\infty =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Soluţie 1.7. Cu substituţia $x^2 = t$, obţinem

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{2}.$$

Soluţie 1.8. Avem

$$I = \int_0^\infty \frac{x^4+1}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}\,dx = \int_0^\infty \frac{x^4+1-x^2+x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}\,dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx + \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^2}{x^6+1}\,dx}_{x^3=t} = \operatorname{arctg} x\big|_0^\infty + \frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{arctg} t\big|_0^\infty = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}.$$

Soluţie 1.9. Cu substituţia $\sqrt{x} = t$, obţinem

$$I = \int_1^\infty \frac{2t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = 2\int_1^\infty \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^2}\,dt$$

$$= 2\int_1^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt - 2\int_1^\infty \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt$$

$$= 2\operatorname{arctg} t\big|_1^\infty - 2I_1 = 2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) - 2I_1 = \frac{\pi}{2} - 2I_1.$$

Pentru calculul integralei I_1, folosim substituţia $t = \operatorname{tg} u$. Avem

$$dt = \frac{1}{\cos^2 u}\,du,\ (1+t^2)^2 = \frac{1}{\cos^4 u}$$

şi obţinem

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\, du = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2u}{2}\, du = \frac{1}{2}u\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\sin 2u\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$$

Rezultă că $I = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$.

Soluţie 1.10. Notăm $x^2 = t,\ 2x\,dx = dt$ şi avem

$$I = \int_1^\infty \frac{x\,dx}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{dt}{t(t+1)^2}.$$

Descompunem funcţia in fracţii simple

$$\frac{1}{t(t+1)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{(t+1)^2}.$$

Rezultă $A = 1,\ B = -1,\ C = -1$. Integrala devine

$$I = \frac{1}{2}\left(\int_1^\infty \frac{dt}{t} - \int_1^\infty \frac{dt}{t+1} - \int_1^\infty \frac{dt}{(t+1)^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{t}{t+1}\Big|_1^\infty + \frac{1}{t+1}\Big|_1^\infty\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}.$$

Soluţie 1.11. Conform Observaţiei 1.12 scriem integrala astfel:

$$I = \int_{-\infty}^A \frac{dx}{x^2+2x+2} + \int_A^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2},\ \forall\, A \in \mathbb{R}.$$

Avem

$$I = \int_{-\infty}^A \frac{dx}{(x+1)^2+1} + \int_A^\infty \frac{dx}{(x+1)^2+1} =$$

$$= \operatorname{arctg}(x+1)|_{-\infty}^A + \operatorname{arctg}(x+1)|_A^\infty = \operatorname{arctg}(A+1) + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(A+1) = \pi.$$

Soluţie 1.12. Cu substituţia $\frac{1}{x} = t,\ -\frac{1}{x^2}\,dx = dt$, avem

$$I = \int_a^\infty \frac{dx}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \int_0^{\frac{1}{a}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln(t+\sqrt{1+t^2})\Big|_0^{\frac{1}{a}} = \ln\frac{1+\sqrt{1+a^2}}{a}.$$

Soluţie 1.13. Scriem integrala astfel

$$I = \underbrace{\int_1^\infty \frac{x^4\,dx}{x^5\sqrt{x^{10}+x^5+1}}}_{x^5=t} = \frac{1}{5}\int_1^\infty \frac{dt}{t\sqrt{t^2+t+1}} = \frac{1}{5}\underbrace{\int_1^\infty \frac{dt}{t^2\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}}}_{u=\frac{1}{t}}$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1+u+u^2}} = \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left(u+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{5}\left[\ln\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)-\ln\left(\frac{1}{2}+1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{5}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}.$$

Soluţie 1.14. La numitor se dă factor x^4 şi apoi folosim substituţia $t = \frac{1}{x}$. Avem

$$I = \int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{x^4\left(1+\frac{1}{x^4}\right)} = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2\left(1+\frac{1}{x^4}\right)} = \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^4}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1+t^2-t^2+1}{1+t^4}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1+t^2}{1+t^4}\,dt - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{t^2-1}{1+t^4} = \frac{1}{2}\,I_1 - \frac{1}{2}\,I_2.$$

Pentru calculul integralelor I_1 şi I_2 simplificăm funcţiile cu t^2 şi apoi folosim o substituţie adecvată. Avem

$$\int \frac{1+t^2}{1+t^4}\,dt = \underbrace{\int \frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}}\,dt}_{u=t-\frac{1}{t}} = \int \frac{du}{u^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t^2-1}{t\sqrt{2}}.$$

şi

$$\int \frac{t^2-1}{t^4+1}\,dt = \underbrace{\int \frac{1-\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}}\,dt}_{v=t+\frac{1}{t}} = \int \frac{dv}{v^2-2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{v-\sqrt{2}}{v+\sqrt{2}}\right|$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t^2+1-t\sqrt{2}}{t^2+1+t\sqrt{2}}\right|.$$

Rezultă

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t^2-1}{t\sqrt{2}}\Bigg|_0^\infty - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+1-t\sqrt{2}}{t^2+1+t\sqrt{2}}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Soluţie 1.15. Avem

$$I_n = 2\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^n} = 2J_n.$$

Pentru calculul integralei J_n, deducem o relaţie de recurenţă, integrând prin părţi. Avem

$$J_n = \int_0^\infty \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^n}\,dx = J_{n-1} - \int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)^n}\,dx.$$

Alegem $f(x) = x$ şi $g'(x) = \frac{x}{(x^2+1)^n}$, deci $g(x) = \frac{1}{2}\frac{-1}{(n-1)(x^2+1)^{n-1}}$ şi obţinem

$$\begin{aligned} J_n &= J_{n-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{(n-1)(x^2+1)^{n-1}}\Bigg|_0^\infty - \frac{1}{2(n-1)}\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} \\ &= J_{n-1} - \frac{1}{2(n-1)}\cdot J_{n-1} = \frac{2n-3}{2(n-1)}\cdot J_{n-1}. \end{aligned}$$

Rezultă că $J_n = \frac{2n-3}{2(n-1)}\cdot J_{n-1},\ n \geq 2$. Dăm valori lui n

$$\begin{aligned} &n = 2:\ \ J_2 = \frac{1}{1\cdot 2}\cdot J_1 \\ &n = 3:\ \ J_3 = \frac{3}{2\cdot 2}\cdot J_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &n = p:\ \ J_p = \frac{2p-3}{2(p-1)}\cdot J_{p-1}. \end{aligned}$$

Prin înmulţirea relaţiilor, rezultă:

$$J_p = \frac{(2p-3)!!}{2^{p-1}(p-1)!}\cdot J_1,\ \text{cu}\ \ J_1 = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Soluţie 1.16. Cu substituţia $x = \sin t$, rezultă:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t\,dt}{(\sin^2 t+4)\cos t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin^2 t + 4}.$$

Cu substituţia $\operatorname{tg} t = u$, avem $dt = \frac{du}{1+u^2}$, $\sin^2 t = \frac{u^2}{u^2+1}$ şi rezultă

$$I = \int_0^\infty \frac{du}{5u^2+4} = \frac{1}{5}\int_0^\infty \frac{du}{u^2+\frac{4}{5}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\operatorname{arctg}\frac{u\sqrt{5}}{2}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\pi}{4}.$$

Soluţie 1.17. Cu substituţia $\ln x = t$, avem

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}\Big|_0^1 = 2.$$

Soluţie 1.18. Scriem funcţia de sub radical ca o diferenţă de pătrate. Avem

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}} = \ln\left|x - \frac{3}{2} + \sqrt{x^2-3x+2}\right|\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= \ln\left|-\frac{1}{2}\right| - \ln\left|-\frac{5}{2}+\sqrt{6}\right| = \ln\frac{1}{5-2\sqrt{6}} = \ln(5+2\sqrt{6}).$$

Soluţie 1.19. Cu substituţia $x = \sin t$, rezultă

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u\, du}{(\sin^2 u + 1)\cos u}.$$

Notăm

$$\operatorname{tg} u = t \ \Rightarrow\ du = \frac{dt}{1+t^2},\ \sin^2 u = \frac{t^2}{t^2+1}.$$

Obţinem

$$I = \int_0^\infty \frac{dt}{2t^2+1} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{t^2+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\operatorname{arctg} t\sqrt{2}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Soluţie 1.20. Scriem integrala astfel:

$$I = \underbrace{\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{-x}}}_{-x=t} + \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_1^0 \frac{-\,dt}{\sqrt{t}} + \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} + \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2+2\sqrt{2}.$$

Soluţie 1.21. Avem

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x\big|_{-1}^1 + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Soluţie 1.22. Folosim substituţia lui Euler $\sqrt{(x-a)(b-x)} = t(x-a)$. Rezultă

$$x = \frac{at^2+b}{t^2+1},\ \ dx = \frac{2(a-b)\,dt}{(t^2+1)^2}.$$

Schimbăm limitele de integrare

$$t = \sqrt{\frac{b-x}{x-a}};\quad x \to a,\ x > a \Rightarrow t \to \infty;\quad x \to b,\ x < b \Rightarrow t \to 0.$$

Obţinem

$$\begin{aligned} I &= 2\int_0^{\infty} \frac{at^2+b}{(t^2+1)^2}\,dt = 2\int_0^{\infty} \frac{at^2+a+b-a}{(t^2+1)^2}\,dt \\ &= 2a\int_0^{\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt + 2(b-a)\int_0^{\infty} \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt = 2a\cdot\frac{\pi}{2} + 2(b-a)\cdot I_1. \end{aligned}$$

Pentru calculul lui I_1, notăm $t = \operatorname{tg} u$ şi obţinem

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2u}{2}\,du = \frac{\pi}{4}.$$

Rezultă că $I = a\cdot\pi + 2(b-a)\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\cdot(a+b)$.

Soluţie 1.23. Scriem funcţia de sub radical ca o diferenţă de pătrate. Avem

$$I = \int_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} = \arcsin \frac{2x-1}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Soluţie 1.24. Cu substituţia $x = \sin t$, obţinem

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t}\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t}\,dt = \left[\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \ln|\sin t|\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \ln \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln \frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2. \end{aligned}$$

Soluţie 1.25. Vom face substituţia $\frac{1}{x} = t$. Avem

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{-\frac{1}{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{3 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}} = \int_{-1}^{-3} \frac{-\,dt}{\sqrt{3-2t-t^2}} \\ &= \int_{-3}^{-1} \frac{dt}{\sqrt{4-(t+1)^2}} = \arcsin \frac{t+1}{2}\Big|_{-3}^{-1} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Soluţie 1.26. Vom nota $\frac{1}{x} = t$ şi avem

$$I = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Soluţie 1.27. Vom nota $x = \frac{\pi}{2} - t$ şi avem

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n t}{\sin^n t + \cos^n t}\, dt.$$

Rezultă că

$$2 \cdot I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x + \cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\, dx = \frac{\pi}{2},$$

deci $I = \frac{\pi}{4}$.

Soluţie 1.28. Avem $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$. Funcţia $\sin^2 x$ are perioada π, deci $\sin^2 2x$ are perioada $\frac{\pi}{2}$. Rezultă că

$$I = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$$

Facem substituţia $t = \operatorname{tg} x$ şi avem

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}; \ \sin x = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}.$$

Rezultă

$$\begin{aligned} I &= 4 \cdot \int_0^{\infty} \frac{(t^2+1)^2}{t^4+1} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = 4 \cdot \int_0^{\infty} \frac{t^2+1}{t^4+1}\, dt = 4 \cdot \int_0^{\infty} \frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}}\, dt \\ &= 4 \cdot \int_0^{\infty} \frac{\left(t - \frac{1}{t}\right)'}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2 + 2} = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t - \frac{1}{t}}{\sqrt{2}} \Big|_0^{\infty} = \frac{4}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

Soluţie 1.29. Cu substituţia lui Euler $\sqrt{(1-x)(1+x)} = t(x+1)$, obţinem

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}\, dt, \quad t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

Pentru $x \to -1,\ x > -1 \ \Rightarrow t \to \infty$ şi pentru $x \to 1,\ x > 1 \ \Rightarrow t \to 0$. Rezultă

$$I = -2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{dt}{3t^2+1} = -\frac{2}{3} \cdot \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2 + \frac{1}{3}} = -\frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \operatorname{arctg} t\sqrt{3} \Big|_0^{\infty} = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Soluţie 1.30. Vom deduce o relaţie de recurenţă, integrând prin părţi. Alegem

$$f(x) = x^{n-1},\ g'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \Rightarrow f'(x) = (n-1)x^{n-2},\ g(x) = -\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Avem

$$\begin{aligned}
I_n &= -\,x^{n-1}\sqrt{a^2-x^2}\Big|_{-a}^{a} + (n-1)\int_{-a}^{a} x^{n-2}\sqrt{a^2-x^2}\,dx \\
&= (n-1)\int_{-a}^{a} \frac{x^{n-2}(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx \\
&= (n-1)a^2\int_{-a}^{a} \frac{x^{n-2}}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx - (n-1)\int_{-a}^{a} \frac{x^{n}}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx \\
&= (n-1)a^2\cdot I_{n-2} - (n-1)\cdot I_n.
\end{aligned}$$

Obţinem $I_n = \frac{n-1}{n}\cdot a^2\cdot I_{n-2}$. Pentru $n = 2k$, avem

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k}\cdot a^2\cdot I_{2k-2}.$$

Dăm valori lui k.

$$\begin{aligned}
&k = 1 \quad \Rightarrow I_2 = \frac{1}{2}a^2\cdot I_0 \\
&k = 2 \quad \Rightarrow I_4 = \frac{3}{4}a^2\cdot I_2 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&k = p \quad \Rightarrow I_{2p} = \frac{2p-1}{2p}a^2\cdot I_{2p-2}
\end{aligned}$$

Prin înmulţirea relaţiilor rezultă

$$I_{2p} = \frac{(2p-1)!!}{(2p)!!}\cdot a^{2p}\cdot I_0$$

unde

$$I_0 = \int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}\Big|_{-a}^{a} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Pentru $n = 2k+1$, se obţine $I_{2p+1} = 0$, pentru că

$$I_1 = \int_{-a}^{a} \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = 0.$$

Soluţie 1.31. Vom demonstra că $L_n = \frac{L_{n-1}+L_{n+1}}{2}$. Avem

$$\begin{aligned}
\frac{L_{n-1}+L_{n+1}}{2} &= \int_0^\pi \frac{1-\cos(n-1)x+1-\cos(n+1)x}{2(1-\cos x)}\,dx \\
&= \int_0^\pi \frac{2-2\cos nx\cos x}{2(1-\cos x)}\,dx = \int_0^\pi \frac{1-\cos nx\cos x}{1-\cos x}\,dx \\
&= \int_0^\pi \frac{1-\cos nx+\cos nx-\cos nx\cos x}{1-\cos x}\,dx \\
&= \int_0^\pi \frac{1-\cos nx+\cos nx(1-\cos x)}{1-\cos x}\,dx \\
&= L_n + \int_0^\pi \cos nx\,dx = L_n + \frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^\pi = L_n.
\end{aligned}$$

Rezultă că termenii sunt în progresie aritmetică. Calculăm raţia:

$$r = L_2 - L_1 = \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{1-\cos x}\,dx - \int_0^\pi dx = \int_0^\pi \frac{2\sin^2 x}{1-\cos x}\,dx - \pi =$$

$$= 2\int_0^\pi \frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}\,dx - \pi = 2\int_0^\pi (1+\cos x)\,dx - \pi = 2\pi - \pi = \pi.$$

Rezultă că $L_n = L_1 + (n-1)r = \pi + (n-1)\pi = n\pi$.

Soluţie 1.32. Calculăm

$$\begin{aligned}
A_n - A_{n-1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx - \sin^2(n-1)x}{\sin x}\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[\sin nx + \sin(n-1)x]\,[\sin nx - \sin(n-1)x]}{\sin x}\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cdot\sin\frac{(2n-1)x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot 2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{(2n-1)x}{2}}{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n-1)x\,dx = \frac{-1}{2n-1}\cos(2n-1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2n-1}.
\end{aligned}$$

Rezultă relaţia de recurenţă $A_n - A_{n-1} = \frac{1}{2n-1}$. Dăm valori lui n:

$$\begin{aligned}
n = 1 \quad &\Rightarrow A_1 - A_0 = 1 \\
n = 2 \quad &\Rightarrow A_2 - A_1 = \frac{1}{3} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
n = p \quad &\Rightarrow A_p - A_{p-1} = \frac{1}{2p-1}.
\end{aligned}$$

Prin adunarea relaţiilor, avem

$$A_p - A_0 = 1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2p-1},\ A_0 = 0.$$

Soluţie 1.33. Calculăm $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx$. Vom nota $x = 2t$ şi avem

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin 2t)\,dt = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2 \sin t \cos t)\,dt \\
&= 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2\,dt + 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin t)\,dt + 2 \cdot \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t)\,dt}_{t=\frac{\pi}{2}-u} \\
&= 2 \ln 2 \cdot \frac{\pi}{4} + 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin t)\,dt - 2 \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin u)\,du \\
&= \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin t)\,dt + 2 \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin u)\,du = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \cdot I_1.
\end{aligned}$$

Rezultă că $I_1 = -\frac{\pi}{2} \cdot \ln 2$.
Pentru calculul lui $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\,dx$, facem substituţia $x = \frac{\pi}{2} - t$ şi obţinem $I_2 = I_1 = -\frac{\pi}{2} \cdot \ln 2$.