Capitolul 5

Integrale duble

5.1 Noţiuni teoretice

Integrale duble pe domenii simple

Pentru calculul integralei duble se disting două tipuri de domenii de integrare.
a) Să presupunem că domeniul este simplu în raport cu axa OY. Un astfel de domeniu se definşte după cum urmează: fie $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, cu proprietatea $g_1(x) \leq g_2(x),\ \forall x \in [a,b]$. Mulţimea

$$D = \{\,(x,y)|\, a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

se numeşte domeniu simplu faţă de axa OY.

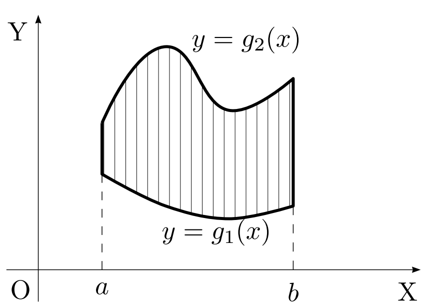

Figura 5.1: Domeniu simplu în raport cu OY

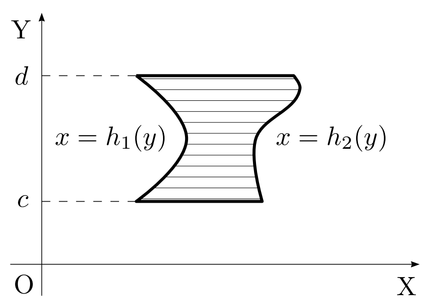

Figura 5.2: Domeniu simplu în raport cu OX

Teorema 5.1. Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă pe D, atunci

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy. \tag{5.1}$$

b) Să presupunem că domeniul este simplu în raport cu axa OX. Un astfel de domeniu se defineşte astfel: fie $h_1, h_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ funcţii continue. Mulţimea

$$D = \{\,(x,y)|\, c \leq y \leq d,\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}\,,$$

se numeşte domeniu simplu faţă de axa OX.

Teorema 5.2. Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă pe D, atunci

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx. \tag{5.2}$$

Formula lui Green. Fie M un domeniu elementar bordat. Dacă funcţiile $P, Q : M \to \mathbb{R}$ sunt continue şi admit derivate parţiale $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ continue, atunci

$$\int_{fr(M)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_M \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right] dx\,dy,$$

unde curba $fr(M)$ este parcursă în sens direct.

Schimbarea de variabile în integrala dublă

Uneori, pentru calculul integralei duble este necesar să se trecă de la coordonatele x, y la coordonatele u, v. Această trecere se realizează printr-o transformare regulată $T : \Delta \to D$,

$$T : \begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}, (u,v) \in \Delta$$

Aceasta înseamnă că funcţiile φ şi ψ sunt de clasă C^1 şi jacobianul

$$J(u,v) = \frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)} \neq 0,\ \forall (u,v) \in \Delta.$$

Formula schimbării de variabile în integrala dublă este

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Delta f\left(\varphi(u,v), \psi(u,v)\right) \left|\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}\right| du\,dv.$$

În cazul în care frontiera domeniului este cerc, este utilă folosirea coordonatelor polare $\rho,\ \varphi$. Se face schimbarea de variabile

$$T : \begin{cases} x = \rho\cos\varphi, & \rho \geq 0 \\ y = \rho\sin\varphi, & \varphi \in [0, 2\pi). \end{cases}$$

Jacobianul transformării este

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)} = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

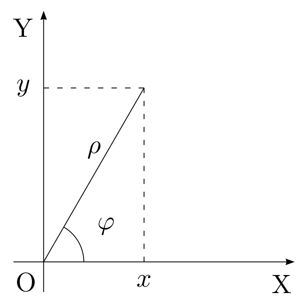

Figura 5.3: Coordonate polare

5.2 Exerciţii

Problema 5.1. Să se transforme integrala dublă $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ într-o integrală iterată, într-o ordine arbitrară, pentru următoarele domenii:
a) $D = \left\{ (x,y) |\, y^2 \leq x,\ y \geq \frac{x}{2} \right\}$.
b) D este $\Delta\ ABC$, cu vîrfurile de coordonate: $A(0,-2),\ B(2,0),\ C(0,1)$.
c) D este $\Delta\ ABC$, cu vîrfurile de coordonate: $A(0,-2),\ B(3,1),\ C(0,2)$.
d) D este $\Delta\ ABC$, cu vîrfurile de coordonate: $A(-1,0),\ B(2,-1),\ C(0,1)$.
e) $D = \left\{ (x,y) |\, \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 \geq 1,\ x \leq 0 \right\}$.
f) $D = \left\{ (x,y) |\, y^2 \leq 2x,\ 4 \leq x + y \leq 12 \right\}$.
g) $D = \left\{ (x,y) |\, x^2 + y^2 \leq 2,\ y \leq x^2,\ y \geq -x^2 \right\}$.

Să se calculeze integralele următoare pe domeniile indicate.

Problema 5.2.

$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy, \quad \text{unde } D = \left\{ (x,y) |\, x^2 + y^2 \leq 2a^2,\ x^2 \leq ay,\ a > 0 \right\}.$$

Problema 5.3. $\iint_D e^{\frac{x}{y}}\, dx\, dy,$ D fiind limitat de $x = y^2,\ x = 0,\ y = 1.$

Problema 5.4.

$$\iint_D (1-y)\, dx\, dy, \quad \text{unde } D = \left\{ (x,y) |\, x^2 + y^2 \leq 2y,\ y \leq x^2,\ x \geq 0 \right\}.$$

Problema 5.5.

$$\iint_D x\, dx\, dy, \quad \text{unde } D = \left\{ (x,y) |\, y \geq x^2,\ 2x - y + 3 \geq 0,\ x - 2y + 6 \geq 0 \right\}.$$

Problema 5.6.

$$\iint_D \frac{dx\, dy}{x+1},$$

D fiind domeniul mărginit de parabola $y = x^2$ şi dreptele $y = 2\,|x| - 1.$

Problema 5.7. $\iint_D xy^2\, dx\, dy$, unde $D = \left\{ (x,y) |\, x^2 + y^2 \leq 2y,\ y \leq 2x \right\}.$

Problema 5.8.

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}\, dx\, dy, \quad D = \left\{ (x,y) |\, x^2 \leq y,\ y \geq 2x,\ x + 2 \geq y \right\}.$$

Problema 5.9.

$$\iint_D \frac{dx\, dy}{x+3}, \quad D = \left\{ (x,y) |\, 0 \leq y \leq\ 4 - x^2,\ y \leq 4 + 2x,\ y \leq 6 - 3x \right\}.$$

5.3 Soluţii

Soluţie a). Dreapta şi parabola se intersectează în originea axelor de coordonate şi în punctul $A(4,2)$, vezi Figura 5.4. Domeniul este simplu în raport cu ambele axe de coordonate. Dacă

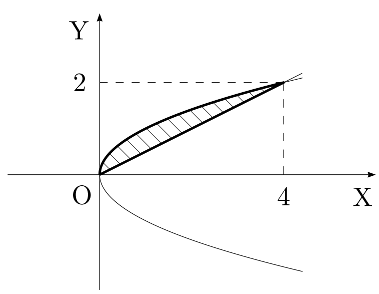

Figura 5.4: Domeniul definit de $y^2 \leq x$ şi $2y \geq x$

aplicăm formula (5.1), atunci avem

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^4 dx \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\, dy.$$

Dacă aplicăm (5.2), atunci putem scrie

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x,y)\, dx.$$

b). Ecuaţiile dreptelor care mărginesc domeniul sunt:

$$AB:\ x - y = 2, \quad BC:\ x + 2y = 2, \quad AC:\ x = 0 \qquad \text{(vezi Figura 5.5)}$$

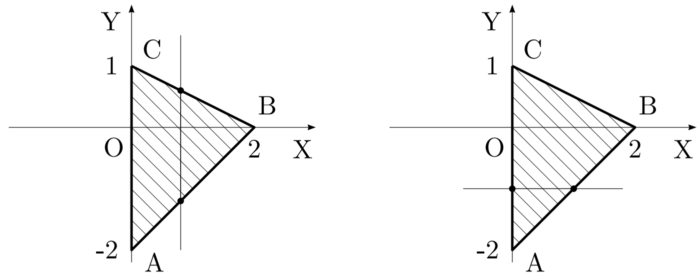

Figura 5.5: Triunghiul ABC - domeniu simplu în raport cu ambele axe

Conform relaţiei (5.1), avem

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 dx \int_{x-2}^{1-\frac{x}{2}} f(x,y)\,dy.$$

Dacă aplicăm relaţia (5.2), avem

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-2}^{0} dy \int_0^{2+y} f(x,y) + \int_0^2 dy \int_0^{2-2y} f(x,y)\,dx.$$

c). Ecuaţiile dreptelor care mărginesc domeniul sunt:

$$AB:\ x-y=2,\quad BC:\ x+3y=6,\quad AC:\ x=0 \qquad \text{(vezi Figura 5.6)}$$

Avem

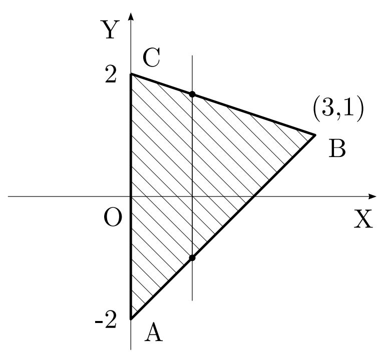

Figura 5.6: Triunghiul ABC - domeniu simplu în raport cu axa OY

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^3 dx \int_{x-2}^{\frac{6-x}{3}} f(x,y)\,dy,$$

sau

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-2}^{1} dy \int_0^{2+y} f(x,y)\,dx + \int_1^2 dy \int_0^{6-3y} f(x,y)\,dx.$$

d). Ecuaţiile dreptelor care mărginesc domeniul sunt:

$$AB:\ x+3y+1=0,\quad AC:\ -x+y=1,\quad BC:\ x+y=1 \quad \text{(vezi Figura 5.7)}$$

Avem

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{0} dx \int_{\frac{1-x}{3}}^{1+x} f(x,y)\,dy + \int_0^2 dx \int_{\frac{1-x}{3}}^{1-x} f(x,y)\,dy$$

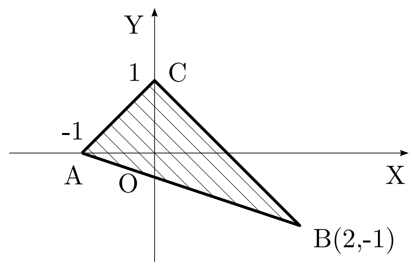

Figura 5.7: Triunghiul ABC - domeniu simplu în raport cu axa OY

sau

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{0} dy \int_{-3y-1}^{1-y} f(x,y)\,dx + \int_0^1 dy \int_{y-1}^{1-y} dx.$$

e). Domeniul este simplu în raport cu axa Ox. Aplicînd relaţia (5.2), avem

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} dy \int_{-\sqrt{4-4y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

Domeniul nu este simplu în raport cu axa Oy. Pentru a integra în ordinea y,x, considerăm

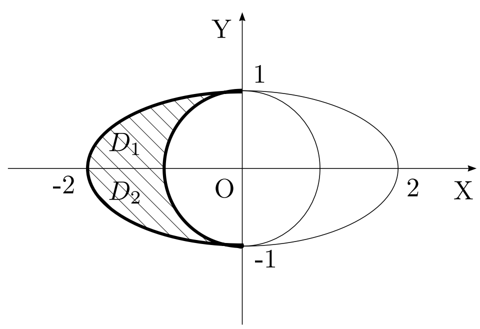

Figura 5.8: Domeniul definit de $\frac{x^2}{4}+y^2 \le 1$, $x^2+y^2 \ge 1$ şi $x \le 0$

$D = D_1 \cup D_2$, unde D_1 şi D_2 sunt simple în raport cu axele de coordonate. Avem

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy,$$

unde

$$\iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-2}^{-1} dx \int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} f(x,y)\,dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} f(x,y)\,dy$$

$$\iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{0} f(x,y)\,dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

f). Avem

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_2^8 dx \int_{4-x}^{\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy + \int_8^{18} dx \int_{-\sqrt{2x}}^{12-x} f(x,y)\,dy.$$

g). Vezi Figura 5.10. Putem scrie

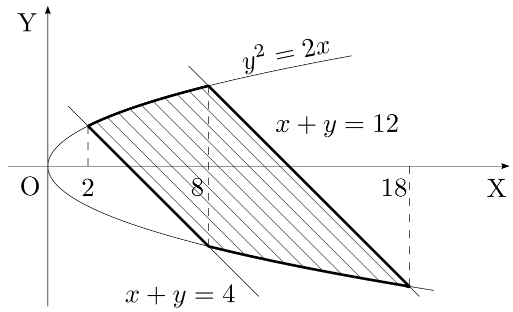

Figura 5.9: Domeniul definit de $y^2 \leq 2x$ şi $4 \leq x + y \leq 12$

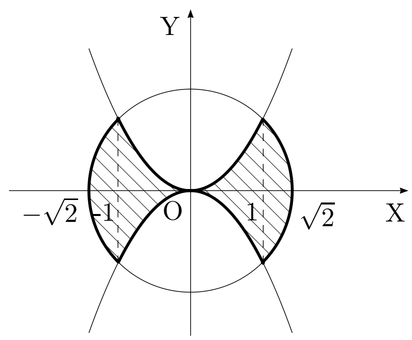

Figura 5.10: Domeniul definit de $x^2 + y^2 \leq 2$ şi $-x^2 \leq y \leq x^2$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy + \int_{-1}^{1} dx \int_{-x^2}^{x^2} f(x,y)\,dy + \\ + \int_{1}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

Soluţie Domeniul este reprezentat grafic în Figura 5.11.

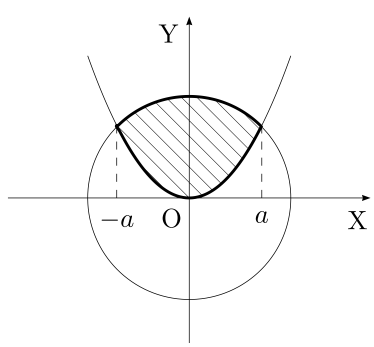

Figura 5.11: Domeniul definit de $x^2 + y^2 \leq 2a^2$ şi $x^2 \leq ay$, unde $a > 0$

$$
\begin{aligned}
\iint_D (x+y)\,dx\,dy &= \int_{-a}^{a} dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{\sqrt{2a^2-x^2}} (x+y)\,dy \\
&= \int_{-a}^{a} dx \left[x\,y\Big|_{\frac{x^2}{a}}^{\sqrt{2a^2-x^2}} + \frac{1}{2}y^2\Big|_{\frac{x^2}{a}}^{\sqrt{2a^2-x^2}} \right] \\
&= \underbrace{\int_{-a}^{a} x\left(\sqrt{2a^2-x^2} - \frac{x^2}{a}\right) dx}_{=0} + \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} \left(2a^2 - x^2 - \frac{x^4}{a^2}\right) dx \\
&= \frac{22}{15}a^3.
\end{aligned}
$$

Soluţie Domeniul D este reprezentat în Figura 5.12.

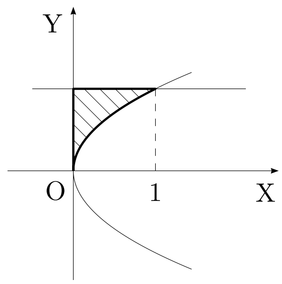

Figura 5.12: Domeniul limitat de parabola $x = y^2$ şi dreptele $x = 0$, $y = 1$

$$
\begin{aligned}
\iint_D e^{\frac{x}{y}}\,dx\,dy &= \int_0^1 dy \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\,dx = \int_0^1 dy \left[y\,e^{\frac{x}{y}}\Big|_0^{y^2} \right] \\
&= \int_0^1 y\left(e^y - 1\right)\,dy = \int_0^1 ye^y\,dy - \int_0^1 y\,dy \\
&= y\,e^y\big|_0^1 - e^y\big|_0^1 - \frac{1}{2}y^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Soluţie Domeniul D din problemă reprezintă fâşia haşurată din Figura 5.13.

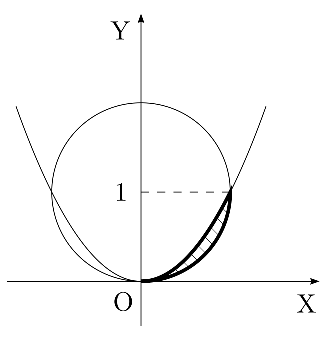

Figura 5.13: Domeniul definit de $x^2 + y^2 \leq 2y$, $y \leq x^2$ si $x \geq 0$

$$
\begin{aligned}
\iint_D (1-y)\,dx\,dy &= \int_0^1 (1-y)\,dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} dx = \int_0^1 (1-y)\left[\sqrt{1-(y-1)^2} - \sqrt{y}\right] dy \\
&= \int_0^1 (1-y)\sqrt{1-(y-1)^2}\,dy - \int_0^1 (1-y)\sqrt{y}\,dy = I_1 - I_2.
\end{aligned}
$$

Pentru calculul lui I_1, notăm $1-y=u$ şi avem

$$I_1=\int_0^1 u\sqrt{1-u^2}\,du=-\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{1-u^2}(-2u\,du)=-\frac{1}{3}(1-u^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$$

$$I_2=\int_0^1(\sqrt{y}-y\sqrt{y})\,dy=\frac{4}{15}.$$

Rezultă $I=\frac{1}{3}-\frac{4}{15}=\frac{1}{15}$.

Soluţie Domeniul este reprezentat în Figura 5.14.

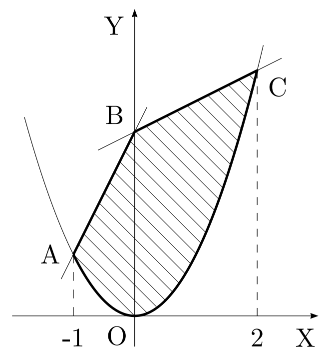

Figura 5.14: Domeniul definit de $y\ge x^2$ şi $2x-y+3\ge 0$, $x-2y+6\ge 0$

$$\iint_D x\,dx\,dy=\int_{-1}^0 x\,dx\int_{x^2}^{2x+3}dy+\int_0^2 x\,dx\int_{x^2}^{\frac{x+6}{2}}dy$$
$$=\int_{-1}^0 x(2x+3-x^2)\,dx+\int_0^2 x\left(\frac{x}{2}+3-x^2\right)dx=\frac{33}{12}.$$

Soluţie Dreptele $y=-2x-1$ şi $y=2x-1$ sunt tangentele parabolei $y=x^2$ respectiv în punctele $A(-1,1)$, $B(1,1)$. Avem

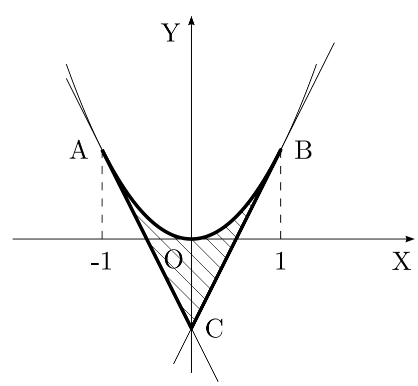

Figura 5.15: Domeniul definit de $y=x^2$ şi dreptele $y=2|x|-1$

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{x+1}=\int_{-1}^0\frac{dx}{x+1}\int_{-2x-1}^{x^2}dy+\int_0^1\frac{dx}{x+1}\int_{2x-1}^{x^2}dy$$
$$=\int_{-1}^0\frac{dx}{x+1}(x^2+2x+1)+\int_0^1\frac{dx}{x+1}(x^2-2x+1)$$
$$=\int_{-1}^0(x+1)\,dx+\int_0^1\left(x-3+\frac{4}{x+1}\right)dx=-2+4\ln 2.$$

Soluţie Dreapta intersectează cercul $x^2 + (y-1)^2 = 1$ în punctul $A\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$, vezi Figura 5.16.

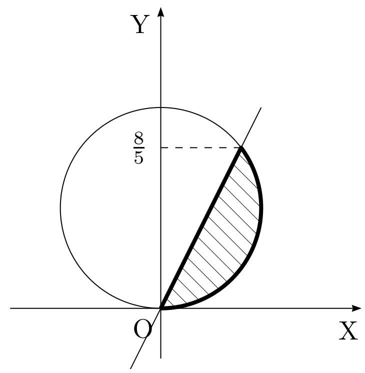

Figura 5.16: Domeniul definit de $x^2 + y^2 \leq 2y$ şi $y \leq 2x$

Avem

$$\iint_D xy^2\,dx\,dy = \int_0^{\frac{8}{5}} y^2\,dy \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{2y-y^2}} x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{8}{5}} y^2\,dy x^2\Big|_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{2y-y^2}}$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{8}{5}} y^2\left(2y - y^2 - \frac{y^2}{4}\right)dy = \frac{2^{10}}{5^5}.$$

Soluţie În Figura 5.17 avem reprezentarea domeniului D.

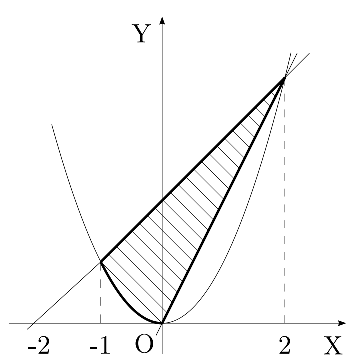

Figura 5.17: Domeniul definit de $y = x^2$ şi dreptele $y = 2x$, $x + 2 = y$

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy &= \int_{-1}^{0} x^2\,dx \int_{x^2}^{x+2} \frac{1}{y^2}\,dy + \int_0^2 x^2\,dx \int_{2x}^{x+2} \frac{1}{y^2}\,dy \\
&= \int_{-1}^{0} x^2\,dx \left(\frac{-1}{y} \Big|_{x^2}^{x+2} \right) + \int_0^2 x^2\,dx \left(\frac{-1}{y} \Big|_{2x}^{x+2} \right) \\
&= \int_{-1}^{0} x^2 \left(\frac{-1}{x+2} + \frac{1}{x^2} \right) dx + \int_0^2 x^2 \left(\frac{-1}{x+2} + \frac{1}{2x} \right) dx \\
&= -\int_{-1}^{2} \frac{x^2}{x+2}\,dx + \int_{-1}^{0} dx + \frac{1}{2}\int_0^2 x\,dx \\
&= -\int_{-1}^{2} \left(x - 2 + \frac{4}{x+2} \right) dx + \int_{-1}^{0} dx + \frac{1}{2}\int_0^2 x\,dx \\
&= \frac{13}{2} - 8\ln 2.
\end{aligned}$$

Soluţie Domeniul D este reprezentat în Figura 5.18.

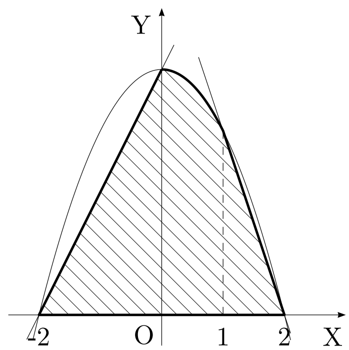

Figura 5.18: Domeniul definit de $0 \le y \le 4 - x^2$ şi $y \le 4 + 2x$, $y \le 6 - 3x$

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{dx\,dy}{x+3} &= \int_{-2}^{0} \frac{dx}{x+3} \int_0^{4+2x} dy + \int_0^1 \frac{dx}{x+3} \int_0^{4-x^2} dy + \int_1^2 \frac{dx}{x+3} \int_0^{6-3x} dy \\
&= I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-2}^{0} \frac{dx}{x+3}\, y \Big|_0^{4+2x} = \int_{-2}^{0} \frac{4+2x}{x+3}\,dx = 4 - 2\ln 3. \\
I_2 &= \int_0^1 \frac{dx}{x+3}\, y \Big|_0^{4-x^2} = \int_0^1 \frac{4-x^2}{x+3}\,dx = -\int_0^1 \left(x - 3 + \frac{5}{x+3} \right) dx = \frac{5}{2} - 5\ln\frac{4}{3}. \\
I_3 &= \int_1^2 \frac{dx}{x+3}\, y \Big|_0^{6-3x} = 3\int_1^2 \frac{2-x}{x+3}\,dx = -3\int_1^2 \left(1 - \frac{5}{x+3} \right) dx = -3 + 15\ln\frac{5}{3}.
\end{aligned}$$