Capitolul 6

Integrale triple

6.1 Integrale triple pe domenii simple

6.1.1 Noţiuni teoretice

Calculul integralei

Spunem despre corpul $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ că este simplu în raport cu axa OZ dacă poate fi scris sub forma

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2,\ g(x,y) \leq z \leq h(x,y) \right\}.$$

Pentru un astfel de corp, integrala triplă se calculează prin

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy.$$

Volumul unui corp

Volumul unui corp tridimensional V se calculează prin

$$V = \iiint_V dx\,dy\,dz.$$

Masa unui corp

Masa unui corp $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ cu densitatea în fiecare punct $\rho(x,y,z)$ se calculează prin

$$m = \iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Coordonatele centrului de greutate al unui corp

Coordonatele centrului de greutate ale unui corp $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ cu densitatea punctuală $\rho(x,y,z)$ se calculează cu formulele

$$x_G = \frac{1}{m} \iiint_\Omega x \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$
$$y_G = \frac{1}{m} \iiint_\Omega y \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$
$$z_G = \frac{1}{m} \iiint_\Omega z \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

unde m este masa corpului dată de formula

$$m = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

6.1.2 Exerciţii

Problema 6.1. Să se calculeze integrala

$$\iiint_{V} \frac{dx\, dy\, dz}{(1 + x + y + z)^3},$$

unde V este tetraedrul mărginit de planele de coordonate şi planul $x + y + z = 1$.

Problema 6.2. Să se calculeze $\iiint_{\Omega}(x + 2y - z)\, dx\, dy\, dz$, unde Ω este corpul limitat de planele $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 3$ şi $y + 2z = 4$.

Problema 6.3. Să se calculeze $\iiint_{V}(2x - y^2 + xz)\, dx\, dy\, dz$, unde V este paralelipipedul dreptunghic $[0, 3] \times [1, 2] \times [-1, 1]$.

Problema 6.4. Să se calculeze masa corpului

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq a,\, 0 \leq y \leq b,\, 0 \leq z \leq c \right\}$$

având densitatea $\rho(x, y, z) = x + y + z$.

Problema 6.5. Să se calculeze $\iiint_{V}(x^2 + y^2 + z)\, dx\, dy\, dz$, unde V este corpul definit de inegalităţile $x^2 + y^2 \leq 5$, $x - y + 2z \leq 7$ şi $z \geq 0$.

Problema 6.6. În statistică, funcţia

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

reprezintă distribuţia normală bidimensională pentru doi vectori aleatori independenţi cu mediile 0 şi dispersiile 1. Să se calculeze volumul delimitat de suprafaţa $z = f(x, y)$ şi planul XOY, situat în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 = 9$.

Problema 6.7. Să se calculeze volumul corpului limitat de paraboloidul de ecuaţie $x^2+y^2 = 1 - z$ şi planul XOY.

Problema 6.8. Să se calculeze volumul corpului delimitat de paraboloidul de ecuaţie $x^2 + y^2 = 4z$, unde $0 \leq z \leq 1$.

Problema 6.9. Să se afle volumul corpului Ω definit de inegalităţile

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 & \leq & 4az \\ x^2 + y^2 + az & \leq & 4a^2 \end{cases}, a > 0.$$

Problema 6.10. Momentul de inerţie faţă de o dreaptă d al unui corp Ω cu densitatea $\rho(x, y, z)$ se defineşte prin

$$I_d = \iiint_{\Omega} d^2(x, y, z)\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

unde $d(x, y, z)$ este distanţa de la un punct (x, y, z) al corpului Ω la axa d. Să se calculeze momentul de inerţie faţă de axa OY al corpului omogen ($\rho = 1$), mărginit de suprafeţele $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ şi $z = c$, unde $c > 0$.

Problema 6.11. Să se calculeze volumul corpului mărginit de $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=2z$ şi $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=z^2$.

Problema 6.12. Să se calculeze volumul corpului definit de

$$\begin{cases} x^2+y^2 & \leq & 2y \\ x^2+y^2 & \geq & 3z \end{cases}, z \geq 0.$$

Problema 6.13. Să se calculeze centrul de greutate pentru corpul omogen Ω

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 & \leq & 2az \\ x^2+y^2 & \leq & z^2 \end{cases}, a > 0.$$

Problema 6.14. Să se calculeze volumul corpului decupat de cilindrul de ecuaţie $x^2+y^2 = ax$ din bila $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$.

Problema 6.15. Să se găsească volumul părţii comune delimitate de suprafeţele cilindrice $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ şi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Problema 6.16. Să se afle volumul corpului delimitat de suprafaţa obţinută prin rotirea curbei $y=f(x)$, $x \in [a,b]$, în jurul axei OX, şi planele $x=a$ şi $x=b$, unde f este o funcţie continuă şi pozitivă pe $[a,b]$. Ca şi aplicaţie, să se afle volumul corpului delimitat de suprafaţa $x^4-x^3+y^2+z^2=0$.

6.1.3 Soluţii

Soluţie 6.1. Proiecţia corpului pe planul XOY este triunghiul format de dreptele $x=0$, $y=0$ şi $x+y=1$. Aşadar

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, x+y \leq 1 \right\}.$$

Dacă fixăm un punct (x,y) din D atunci corpul nostru se întinde pe verticală de la z-ul de

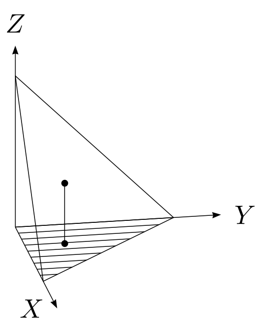


Figura 6.1: Tetraedrul V

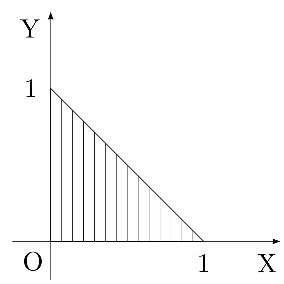


Figura 6.2: Domeniul D

pe suprafaţa $z=0$ până la z-ul de pe suprafaţa $x+y+z=1$, adică $z=1-x-y$. Avem

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3} &= \iint_D \left(\int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} \right) dx\,dy \\ &= \iint_D \left(\frac{1}{2(1+x+y)^2} - \frac{1}{8} \right) dx\,dy. \end{aligned}$$

Dacă proiectăm domeniul D pe axa OX obţinem segmentul $[0,1]$. Considerând un $x \in [0,1]$, domeniul D se întinde de la $y = 0$ până la y-ul de pe dreapta $x + y = 1$, adică $y = 1 - x$. Avem

$$\iint_D \left(\frac{1}{2(1+x+y)^2} - \frac{1}{8} \right) dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\frac{1}{2(1+x+y)^2} - \frac{1}{8} \right) dy \right) dx$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} \right) dx - \frac{1}{16} = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}.$$

Soluţie 6.2. Corpul Ω este corpul desenat în Figura 6.3. Proiecţia corpului pe planul XOY este dreptunghiul haşurat $D = [0,3] \times [0,4]$. Fixând pe x şi y, corpul se întinde pe verticală de la $z = 0$ la $z = \frac{4-y}{2}$.

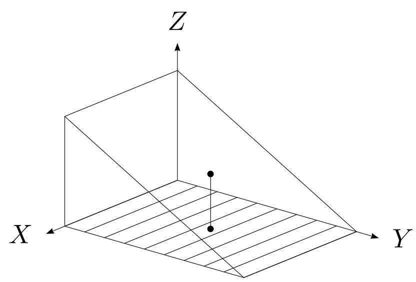


Figura 6.3: Corpul Ω

Integrala se calculează în felul următor

$$\iiint_\Omega (x + 2y - z)\, dx\, dy\, dz = \iint_D \left(\int_0^{\frac{4-y}{2}} (x + 2y - z)\, dz \right) dx\, dy$$
$$= \frac{1}{8} \iint_D \left(4(x+2y)(4-y) - (4-y)^2 \right) dx\, dy$$
$$= \frac{1}{8} \int_0^3 \left(\int_0^4 (16x - 4xy - 9y^2 + 20y - 16)\, dy \right) dx$$
$$= \int_0^3 (4x - 12)\, dx = -18.$$

Soluţie 6.3. Avem

$$\iiint_V (2x - y^2 + xz)\, dx\, dy\, dz = \int_0^3 \left(\int_1^2 \left(\int_{-1}^1 (2x - y^2 + xz)\, dz \right) dy \right) dx$$
$$= \int_0^3 \left(\int_1^2 (4x - 2y^2)\, dy \right) dx = \int_0^3 \left(4x - \frac{14}{3} \right) dx = 4.$$

Soluţie 6.4. Masa corpului se calculează prin $m = \iiint_V \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$. Corpul V este paralelipipedul dreptunghic $[0,a]\times[0,b]\times[0,c]$.

$$m = \int_0^a \left(\int_0^b \left(\int_0^c (x+y+z)\,dz\right)dy\right)dx = \int_0^a \left(\int_0^b \left(c(x+y)+\frac{c^2}{2}\right)dy\right)dx$$
$$= \int_0^a \left(bcx + \frac{cb^2}{2} + \frac{bc^2}{2}\right)dx = \frac{abc(a+b+c)}{2}.$$

Soluţie 6.5. Corpul V este interiorul cilindrului $x^2+y^2=5$, limitat de planele $x-y+2z=7$ şi $z=0$, vezi Figura 6.4. Proiectând corpul V pe planul XOY se obţine discul haşurat, care este mărginit de cercul $x^2+y^2=5$. Pe verticală corpul se întinde de la $z=0$ la $z=(7-x+y)/2$. Integrala dată va fi

$$I = \iiint_V (x^2+y^2+z)\,dx\,dy\,dz$$
$$= \iint_D \left(\int_0^{\frac{7-x+y}{2}} (x^2+y^2+z)\,dz\right)dx\,dy$$
$$= \iint_D \left(\frac{1}{2}(x^2+y^2)(7-x+y) + \frac{(7-x+y)^2}{8}\right)dx\,dy.$$

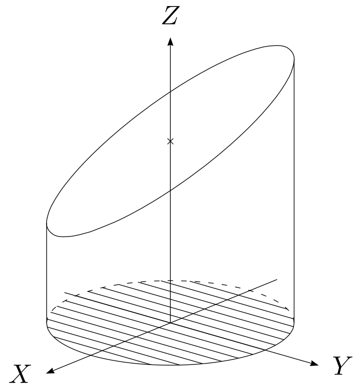


Figura 6.4: Corpul V

Trecând la coordonate polare în această integrală dublă, vom avea

$$I = \int_0^{\sqrt{5}}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\rho^2(7-\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi) + \frac{(7-\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi)^2}{8}\right)\rho\,d\varphi\,d\rho$$
$$= 2\pi\int_0^{\sqrt{5}}\left(\frac{7\rho^3}{2}+\frac{49\rho}{8}+\frac{\rho^3}{8}\right)d\rho = \frac{1215\pi}{16}.$$

Soluţie 6.6. Volumul corpului cerut, notat cu Ω, se calculează prin

$$v = \iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \iint_D\left(\int_0^{f(x,y)} dz\right)dx\,dy = \iint_D \frac{1}{2\pi}\,e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,dx\,dy,$$

unde D este discul $x^2+y^2\le 9$. Trecând la coordonatele polare introduse prin $x=\rho\cos\varphi$ şi $y=\rho\sin\varphi$, obţinem

$$v = \iint_D \frac{1}{2\pi}\,e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^3\left(\int_0^{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\rho^2}\rho\,d\varphi\right)d\rho$$
$$= -e^{-\frac{1}{2}\rho^2}\Big|_0^3$$
$$= 1-e^{-\frac{9}{2}}.$$

Evaluând numeric $v=0.988891$.

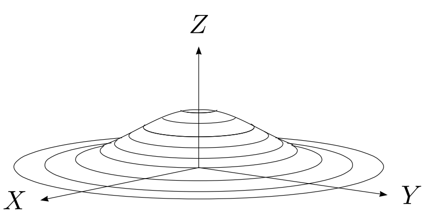


Figura 6.5: Distribuţia normală 2D

Soluţie 6.7. Notăm cu Ω corpul mărginit de suprafaţa $x^2+y^2=1-z$ şi planul XOY. Proiecţia lui Ω pe planul XOY este discul D descris prin inegalitatea

$x^2 + y^2 \leq 1$. Pentru un (x, y) fixat în D, corpul Ω se întinde pe verticală de la planul $z = 0$ la suprafaţa paraboloidului $z = 1 - x^2 - y^2$. Volumul lui Ω va fi

$$\begin{aligned} v &= \iiint_\Omega dx\,dy\,dz \\ &= \iint_D \left(\int_0^{1-x^2-y^2} dz \right) dx\,dy \\ &= \iint_D (1 - x^2 - y^2)\,dx\,dy. \end{aligned}$$

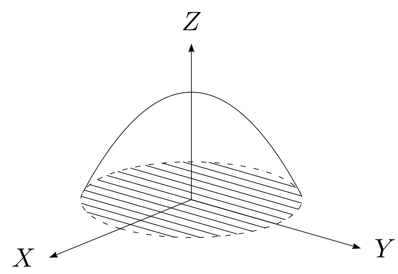


Figura 6.6: Paraboloidul de ecuaţie $x^2 + y^2 = 1 - z$

Trecând la coordonate polare, obţinem

$$v = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (1 - \rho^2)\rho\,d\varphi \right) d\rho = 2\pi \int_0^1 (\rho - \rho^3)\,d\rho = \frac{\pi}{2}.$$

Soluţie 6.8. Notăm cu Ω corpul delimitat de paraboloidul $x^2 + y^2 = 4z$ şi planul $z = 1$. Proiecţia lui Ω pe planul XOY este interiorul cercului $x^2 + y^2 = 4$. Volumul corpului Ω va fi

$$\begin{aligned} v &= \iiint_\Omega dx\,dy\,dz \\ &= \iint_D \left(\int_{\frac{1}{4}(x^2+y^2)}^1 dz \right) dx\,dy \\ &= \iint_D \left(1 - \frac{1}{4}(x^2 + y^2) \right) dx\,dy. \end{aligned}$$

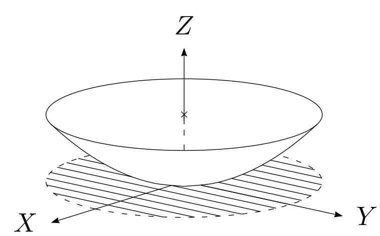


Figura 6.7: Paraboloidul $x^2 + y^2 = 4z$

Trecând la coordonate polare, avem

$$\begin{aligned} v &= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1}{4}\rho^2 \right) \rho\,d\varphi \right) d\rho = 2\pi \int_0^2 \left(\rho - \frac{\rho^3}{4} \right) d\rho \\ &= 2\pi \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{16} \right) \Big|_0^2 = 2\pi. \end{aligned}$$

Soluţie 6.9. Inegalitatea $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4az$ defineşte interiorul sferei de ecuaţie $x^2 + y^2 + z^2 = 4az$, care are centrul în $(0, 0, 2a)$ şi raza $2a$ (centrul şi raza rezultă din scrierea $x^2 + y^2 + (z - 2a)^2 = 4a^2$). Inegalitatea $x^2 + y^2 + az \leq 4a^2$ defineşte interiorul paraboloidului $x^2 + y^2 + az = 4a^2$ cu vârful $(0, 0, 4a)$. Intersecţia dintre sferă şi paraboloid se află rezolvând sistemul

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 &= 4az \\ x^2 + y^2 + az &= 4a^2. \end{cases}$$

Scăzând cele două ecuaţii şi grupând, obţinem ecuaţia $z^2 - 5az + 4a^2 = 0$, cu soluţiile $z_1 = a$ şi $z_2 = 4a$. Într-adevăr, se observă şi de pe desen,

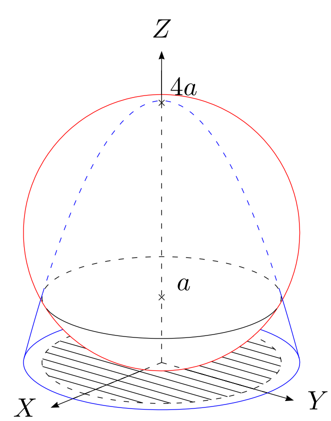


Figura 6.8: Corpul Ω

că paraboloidul atinge sfera cu vârful în punctul cu $z = 4a$ şi mai intersectează sfera încă o dată după cercul $x^2 + y^2 = 3a^2$, $z = a$. Proiectând corpul Ω pe planul XOY se obţine discul

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 3a^2 \right\}.$$

Fixând pe x şi y, corpul se întinde pe verticală de la z-ul de pe suprafaţa sferei, adică $z = 2a - \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$, până la z-ul de pe suprafaţa paraboloidului, adică $z = 4a - \frac{1}{a}(x^2 + y^2)$. Volumul corpului Ω va fi

$$\begin{aligned} v &= \iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{2a-\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}^{4a-\frac{1}{a}(x^2+y^2)} dz \right) dx\,dy \\ &= \iint_D \left(2a - \frac{1}{a}(x^2 + y^2) + \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} \right) dx\,dy. \end{aligned}$$

În integrala dublă, facem schimbarea la coordonate polare $x = \rho\cos\varphi$ şi $y = \rho\sin\varphi$, cu jacobianul $J = \rho$. Prin această transformare domeniul D se transformă într-un nou domeniu $D' = \left\{ (\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid \rho \in [0, a\sqrt{3}],\ \varphi \in [0, 2\pi) \right\}$. Atunci

$$\begin{aligned} v &= \iint_{D'} \left(2a - \frac{1}{a}\rho^2 + \sqrt{4a^2 - \rho^2} \right) |J|\, d\varphi\, d\rho \\ &= \int_0^{a\sqrt{3}} \left(\int_0^{2\pi} \left(2a - \frac{1}{a}\rho^2 + \sqrt{4a^2 - \rho^2} \right) \rho\, d\varphi \right) d\rho \\ &= 2\pi \int_0^{a\sqrt{3}} \left(2a - \frac{1}{a}\rho^2 + \sqrt{4a^2 - \rho^2} \right) \rho\, d\rho \\ &= 2\pi \left(a\rho^2 - \frac{\rho^4}{4a} - \frac{1}{3}\sqrt{(4a^2 - \rho^2)^3} \right) \Bigg|_0^{a\sqrt{3}} = \frac{37a^3\pi}{6}. \end{aligned}$$

Soluţie 6.10. Trebuie să calculăm $\iiint_\Omega (x^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$, unde

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D,\ c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \le z \le c \right\},$$

iar mulţimea D este proiecţia conului Ω pe planul XOY. Momentul de inerţie va fi dat de integrala dublă

$$I_{OY} = \iint_D \left(\int_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{c} (x^2 + z^2)\, dz \right) dx\, dy.$$

Mulţimea D este interiorul elipsei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Trecem la coordonate polare generalizate:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, & \rho \ge 0 \\ y = b\rho\sin\varphi, & \varphi \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Jacobianul transformării este $J = ab\rho$. Integrala dublă devine:

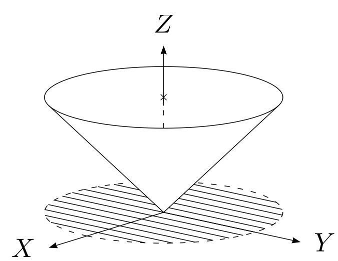


Figura 6.9: Conul $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} = \frac{z^2}{c^2}$

$$\begin{aligned} I_{OY} &= \iint_D x^2 \left(c - c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \right) + \frac{1}{3} \left(c^3 - c^3 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \right) dx\, dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(a^2\rho^2\cos^2\varphi \cdot (c - c\rho) + \frac{1}{3}(c^3 - c^3\rho^3) \right) ab\rho\, d\rho\, d\varphi \\ &= abc \int_0^1 \left(a^2(\rho^3 - \rho^4)\pi + \frac{2\pi c^2}{3}(\rho - \rho^4) \right) d\rho = \frac{\pi abc}{20}(a^2 + 4c^2). \end{aligned}$$

Soluţie 6.11. Intersecţia paraboloidul eliptic $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=2z$ cu conul $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=z^2$ este punctul $(0,0,0)$, pentru $z=0$ şi elipsa $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$, pentru $z=2$. Corpul Ω mărginit de cele două suprafeţe îl proiectăm pe XOY şi obţinem interiorul elipsei $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$, adică mulţimea $D=\left\{\,(x,y)\in\mathbb{R}\mid \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}\le 1\right\}$. Corpul Ω se întinde între suprafaţa paraboloidului (adică $z=\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{18}$) şi suprafaţa conului ($z=\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}}$). Volumul lui Ω se calculează prin

$$
\begin{aligned}
v=\iiint_\Omega dx\,dy\,dz &= \iint_D\left(\int_{\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{18}}^{\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}}} dz\right)dx\,dy\\
&=\iint_D\left(\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}}-\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{18}\right)dx\,dy.
\end{aligned}
$$

Trecem la coordonate polare generalizate în această integrală, prin $x=4\rho\cos\varphi$ şi $y=6\rho\sin\varphi$. Jacobianul acestei schimbări de variabile are valoarea $J=24\rho$. Domeniul D se transformă în mulţimea punctelor (ρ,φ) din $D'=[0,1]\times[0,2\pi]$.

$$
v=\iint_{D'}\left(2\rho-2\rho^2\right)J\,d\rho\,d\varphi=\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}(2\rho-2\rho^2)24\rho\,d\varphi\right)d\rho=8\pi.
$$

Soluţie 6.12. Corpul Ω poate fi scris ca mulţimea punctelor $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ cu proprietatea $0\le z\le\frac{1}{3}(x^2+y^2)$ şi $(x,y)\in D=\left\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\le 2y\,\right\}$. Volumul lui Ω va fi

$$
v=\iiint_\Omega dx\,dy\,dz=\iint_D\left(\int_0^{\frac{1}{3}(x^2+y^2)}dz\right)dx\,dy=\frac{1}{3}\iint_D\left(x^2+y^2\right)dx\,dy.
$$

Trecem la coordonatele polare definite prin $x=\rho\cos\varphi$ şi $y=\rho\sin\varphi$ cu $J=\rho$. Noul domeniu se scrie $D'=\{\,(\rho,\varphi)\in[0,\infty)\times[0,2\pi)\mid \rho\le 2\sin\varphi\,\}$. Din relaţia $\rho\le 2\sin\varphi$, deducem că $\sin\varphi\ge 0$ sau $\varphi\in[0,\pi]$. Obţinem

$$
\begin{aligned}
v&=\frac{1}{3}\iint_{D'}\rho^3\,d\rho\,d\varphi=\frac{1}{3}\int_0^\pi\left(\int_0^{2\sin\varphi}\rho^3\,d\rho\right)d\varphi\\
&=\frac{1}{12}\int_0^\pi 2^4\sin^4\varphi\,d\varphi=\frac{1}{3}\int_0^\pi(1-2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi)\,d\varphi=\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

Soluţie 6.13. Pentru că OZ este axă de simetrie pentru corpul nostru şi centrul de greutate al unui corp omogen se găseşte pe axa de simetrie, obţinem direct $x_G=y_G=0$. Pentru a calcula pe z_G utilizăm formula

$$
z_G=\frac{\iiint_\Omega z\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz},
$$

unde $\rho(x,y,z)$ este funcţia de densitate. În cazul corpului nostru omogen densitatea este

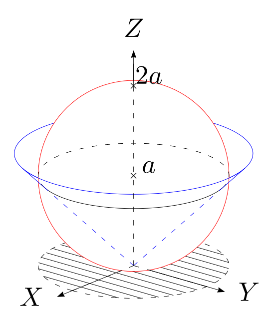


Figura 6.10: Corpul Ω

constantă, ρ_0. Pentru că orice constantă poate ieşi în faţa integralei, ne rămâne de calculat

$$z_G = \frac{\iiint_\Omega z\,dx\,dy\,dz}{\iiint_\Omega dx\,dy\,dz}.$$

Corpul Ω este partea ce se găseşte şi în interiorul sferei $x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$ şi în interiorul conului $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Proiecţia acestui corp pe planul XOY este D, discul haşurat din Figura 6.10. Pentru a afla reprezentarea acestuia, trebuie determinată ecuaţia cercului de intersecţie a conului cu sfera. Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 &= 2az \\ x^2+y^2 &= z^2. \end{cases}$$

obţinem $z=a$ şi $x^2+y^2=a^2$. De aici rezultă $D=\left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2\le a^2 \right\}$. Calculăm

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega z\,dx\,dy\,dz &= \iint_D \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}} z\,dz \right) dx\,dy \\
&= \frac{1}{2}\iint_D \left(2a^2+2a\sqrt{a^2-x^2-y^2}-2x^2-2y^2\right) dx\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^a \left(\int_0^{2\pi} \left(2a^2+2a\sqrt{a^2-\rho^2}-2\rho^2\right)\rho\,d\varphi \right) d\rho \\
&= 2\pi \left(\frac{a^2\rho^2}{2} - \frac{a}{3}\sqrt{(a^2-\rho^2)^3} - \frac{\rho^4}{4} \right)\Bigg|_0^a = \frac{7a^4\pi}{6}.
\end{aligned}$$

La fel se poate calcula şi cealaltă integrală

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega dx\,dy\,dz &= \iint_D \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz \right) dx\,dy \\
&= \iint_D \left(a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\,dy \\
&= \int_0^a \left(\int_0^{2\pi} \left(a+\sqrt{a^2-\rho^2}-\rho\right)\rho\,d\varphi \right) d\rho \\
&= 2\pi \left(\frac{a\rho^2}{2} - \frac{1}{3}\sqrt{(a^2-\rho^2)^3} - \frac{\rho^3}{3} \right)\Bigg|_0^a = a^3\pi.
\end{aligned}$$

Obţinem $z_G = \frac{7a}{6}$.

Soluţie 6.14. Corpul mărginit de cilindru şi sferă se numeşte corpul lui Viviani. Datorită simetriei, volumul acestui corp este dublul volumului părţii aflate deasupra planului XOY, pe care o notăm cu Ω. Intersecţia cilindrului $x^2+y^2=ax$ cu planul XOY este cercul $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$. Notăm cu D interiorul acestui cerc. Obţinem pentru volum

$$v = \iint_D \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz \right) dx\,dy = \iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Trecând la coordonate polare, obţinem

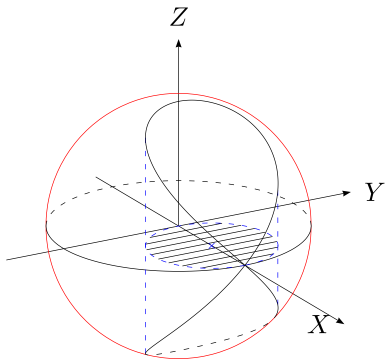


Figura 6.11: Corpul lui Viviani

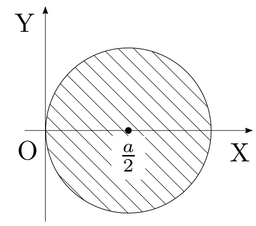


Figura 6.12: Domeniul D

$$\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{a\cos\varphi} \sqrt{a^2 - \rho^2}\, \rho\, d\rho \right) d\varphi$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-\rho^2)^3}\Big|_0^{a\cos\varphi} d\varphi$$
$$= \frac{2a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\varphi)\, d\varphi = \frac{a^3\pi}{3} - \frac{4a^3}{9}.$$

Volumul corpului lui Viviani este $\frac{4a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)$.

Soluţie 6.15. Datorită simetriei corpului obţinut prin intersectarea cilindrilor, volumul său va fi de 8 ori volumul părţii aflate în primul octant, parte notată cu Ω. Proiectând pe Ω pe planul YOZ obţinem dreptunghiul $D = [0, b] \times [0, c]$. Fixând y şi z în acest dreptunghi, x trebuie să verifice simultan inegalităţile $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$ şi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$, pentru ca $(x, y, z) \in \Omega$. Acest lucru ne arată că $x \in [0, \min\left(a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}, a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}\right)]$. Volumul lui Ω va fi

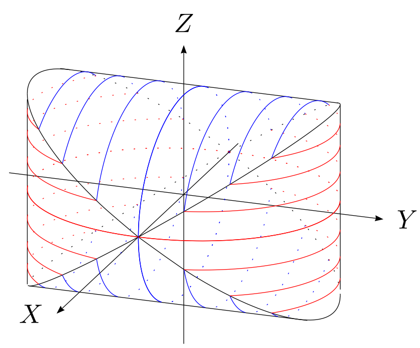


Figura 6.13: Intersecţia a doi cilindri

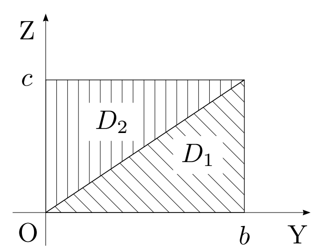


Figura 6.14: Domeniile D_1 şi D_2

$$\iiint_\Omega dx\, dy\, dz = \iint_D \left(\int_0^{\min\left(a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}, a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)} dx \right) dy\, dz.$$

Explicitând minimul

$$\min\left(a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}, a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right) = \begin{cases} a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}, & \frac{z}{c} \le \frac{y}{b} \\ a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}, & \frac{z}{c} \ge \frac{y}{b}, \end{cases}$$

şi notând $D_1 = \left\{ (y,z) \in D \,|\, z \le \frac{yc}{b} \right\}$ şi $D_2 = D \setminus D_1$, obţinem

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega dx\,dy\,dz &= \iint_{D_1} a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\,dy\,dz + \iint_{D_2} a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\,dy\,dz \\ &= \int_0^b \left(\int_0^{\frac{yc}{b}} a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\,dz\right) dy + \int_0^c \left(\int_0^{\frac{zb}{c}} a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\,dy\right) dz \\ &= \int_0^b \frac{acy}{b}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\,dy + \int_0^c \frac{abz}{c}\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\,dz \\ &= -\frac{abc}{3}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^b - \frac{abc}{3}\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^c = \frac{2abc}{3}.\end{aligned}$$

Volumul comun al celor două corpuri cilindrice va fi $16abc/3$.

Soluţie 6.16. Ecuaţia suprafeţei de rotaţie este $y^2 + z^2 = [f(x)]^2$, iar a părţii superioare

$$z = \sqrt{[f(x)]^2 - y^2}.$$

Proiecţia corpului pe planul XOY este domeniul plan

$$D = \{\,(x,y) \,|\, x \in [a,b],\, -f(x) \le y \le f(x)\,\}\,.$$

Cu acestea volumul va fi

$$v = 2\int_a^b \left(\int_{-f(x)}^{f(x)} \sqrt{[f(x)]^2 - y^2}\,dy\right) dx = 4\int_a^b \left(\int_0^{f(x)} \sqrt{[f(x)]^2 - y^2}\,dy\right) dx.$$

Cu schimbarea de variabilă $y = f(x)\sin\theta$, obţinem

$$\begin{aligned} v &= 4\int_a^b \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{[f(x)]^2\cos^2\theta} \cdot f(x)\cos\theta\,d\theta\right) dx \\ &= 4\left(\int_a^b [f(x)]^2\,dx\right)\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta\right) = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx\end{aligned}$$

Aşadar volumul corpului obţinut prin rotaţia curbei $y = f(x)$, $x \in [a,b]$ în jurul axei OX este

$$v = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx.$$

În cazul nostru particular

$$f(x) = \sqrt{x^3 - x^4},\; x \in [0,1].$$

Volumul acestui corp sub formă de pară, va fi

$$v = \pi\int_0^1 \left(x^3 - x^4\right)\,dx = \frac{\pi}{20}.$$

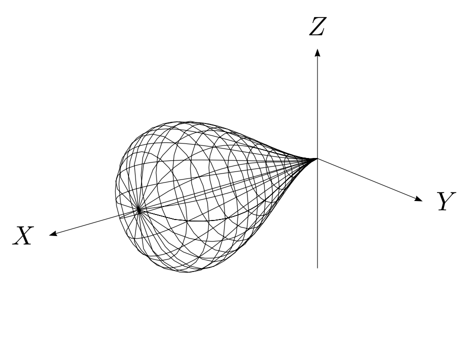


Figura 6.15: Corpul pară

6.2 Schimbarea de variabile în integrala triplă

6.2.1 Noţiuni teoretice

Dacă se face schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}, (u,v,w) \in \Omega'$$

atunci integrala triplă pe un domeniu Ω dintr-o funcţie $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ se calculează prin

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \cdot |J|\,du\,dv\,dw,$$

unde J este jacobianul transformării, definit prin determinantul

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}.$$

Una dintre aceste transformări este trecerea la coordonate sferice generalizate. Ea se defineşte prin:

$$\begin{cases} x = a\rho\sin\theta\cos\varphi, & \rho \geq 0, \\ y = b\rho\sin\theta\sin\varphi, & \theta \in [0,\pi], \\ z = c\rho\cos\theta, & \varphi \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Jacobianul acestei transformări este

$$J = \begin{vmatrix} a\sin\theta\cos\varphi & b\rho\cos\theta\cos\varphi & -c\rho\sin\theta\sin\varphi \\ a\sin\theta\sin\varphi & b\rho\cos\theta\sin\varphi & c\rho\sin\theta\cos\varphi \\ a\cos\theta & -b\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$
$$= abc\rho^2\sin\theta.$$

Coordonatele sferice se obţin atunci când alegem

$$a = b = c = 1.$$

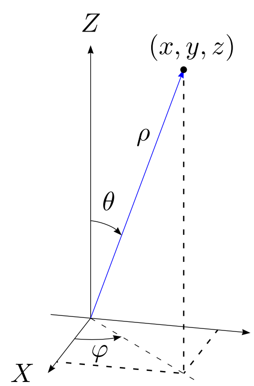


Figura 6.16: Coordonatele sferice

6.2.2 Exerciţii

Problema 6.17. Fie Ω paralelipipedul mărginit de planele paralele $z+2x=0$, $z+2x+2=0$, $2x+2y-z=0$, $2x+2y-z=6$ şi $z=0$, $z=4$. Să se calculeze

$$\iiint_\Omega (4x+2y+5z)\,dx\,dy\,dz.$$

Problema 6.18. Să se calculeze

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz, \quad \text{unde } V\colon x^2+y^2+z^2 \leq 2ax.$$

Problema 6.19. Să se calculeze volumul corpului mărginit de elipsoidul de ecuaţie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Să se calculeze în particular care este volumul Pământului, ştiind că $a = b = R_e = 6378.137$ km şi $c = R_p = 6356.7523$ km, conform WGS 84.

Problema 6.20. Să se calculeze $\iiint_\Omega (x-2)^2+(y+1)^2+z^2\,dx\,dy\,dz$, unde Ω este mulţimea

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 9,\ z \ge 0 \right\}.$$

Problema 6.21. Să se calculeze

$$\iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+z^2},$$

unde V este domeniul spaţial cuprins între sferele concentrice de raze 1 şi 2 cu centrele în origine şi în interiorul conului $x^2+y^2=3z^2$, unde $z \ge 0$.

Problema 6.22. Se consideră V corpul din spaţiu care verifică $x^2+y^2+z^2 \le 1$. Să se calculeze

$$\iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}.$$

Problema 6.23. Să se calculeze $\iiint_\Omega (2x+y^2)\,dx\,dy\,dz$, unde Ω este corpul mărginit de suprafaţa $(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=4$.

Problema 6.24. Torul este suprafaţa obţinută prin rotaţia în spaţiu a unui cerc în jurul unei axe coplanare dar care nu atinge cercul. Dacă r este raza tubului şi R este distanţa de la centrul cercului la axa OZ atunci parametrizarea acestei suprafeţe este

$$\begin{cases} x = (R + r\cos v)\cos u \\ y = (R + r\cos v)\sin u \qquad u, v \in [0, 2\pi]. \\ z = r\sin v \end{cases}$$

Să se calculeze volumul mărginit de suprafaţa torului.

Problema 6.25. Să se calculeze masa părţii comune a bilelor $x^2+y^2+z^2 \le 9$ şi $x^2+y^2+z^2 \le 4z$, dacă densitatea în fiecare punct este egală cu distanţa de la acest punct la centrul bilei mai mari.

Problema 6.26. Momentul de inerţie al unui corp Ω cu densitatea ρ faţă de un plan α se defineşte ca fiind

$$I_\alpha = \iiint_\Omega d^2(x,y,z)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

unde $d(x,y,z)$ este distanţa faţă de plan a fiecărui punct din corp. Să se calculeze momentul de inerţie al octoedrului omogen $2|x|+3|y|+6|z| \le 12$ faţă de planul XOY, dacă densitatea este 1.

6.2.3 Soluţii

Soluţie 6.17. Ecuaţiile planelor paralele ne sugerează următoarea schimbare de variabile:

$$\begin{cases} u = z \\ v = z + 2x \\ w = 2x + 2y - z \end{cases}$$

Dacă notăm cu Ω' mulţimea punctelor (u,v,w) atunci când $(x,y,z) \in \Omega$ se obţine

$$\Omega' = [0,4] \times [-2,0] \times [0,6].$$

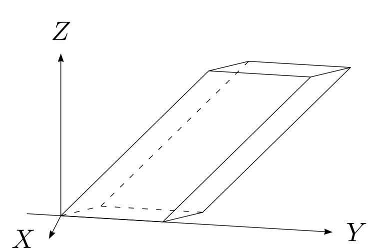


Figura 6.17: Paralelipipedul Ω

Rezolvând în funcţie de u, v şi w avem $x = \frac{v-u}{2}$, $y = \frac{w+2u-v}{2}$ şi $z = u$. Valoarea jacobianului se calculează prin

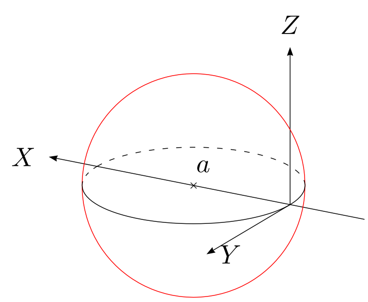
$$J = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}.$$

Acum putem calcula integrala dată

$$\begin{aligned}
&\iiint_\Omega (4x + 2y + 5z)\, dx\, dy\, dz \\
&\qquad = \iiint_{\Omega'} (2v - 2u + w + 2u - v + 5u) \cdot |J|\, du\, dv\, dw \\
&\qquad = \frac{1}{4} \int_0^4 \left(\int_{-2}^0 \left(\int_0^6 (v + w + 5u)\, dw \right) dv \right) du \\
&\qquad = \frac{1}{2} \int_0^4 \left(\int_{-2}^0 (3v + 15u + 9)\, dv \right) du \\
&\qquad = \int_0^4 (15u + 6)\, du = 144.
\end{aligned}$$

Soluţie 6.18. Inegalitatea $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2ax$ descrie interiorul sferei de ecuaţie $(x-a)^2+y^2+z^2 = a^2$. Trecem la coordonate sferice

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \\ z = \rho \cos\theta. \end{cases}$$



Înlocuind în inegalitatea iniţială avem

$$\rho \leq 2a \cos\varphi \sin\theta.$$

Pentru că trebuie ca $\rho \geq 0$, se obţine $\cos\varphi \geq 0$, adică $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Noul domeniu este mulţimea:

$$V' = \left\{ (\rho, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \theta \in [0, \pi],\ \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ 0 \leq \rho \leq 2a \cos\varphi \sin\theta \right\}.$$

Valoarea integralei date va fi

$$\begin{aligned}
&\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz \\
&\quad = \iiint_{V'} \sqrt{\rho^2(\cos^2\varphi \sin^2\theta + \sin^2\varphi \sin^2\theta + \cos^2\theta)} |J|\, d\rho\, d\varphi\, d\theta \\
&\quad = \int_0^\pi \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2a\cos\varphi\sin\theta} \rho^3 \sin\theta\, d\rho \right) d\varphi \right) d\theta \\
&\quad = 4a^4 \left(\int_0^\pi \sin^5\theta\, d\theta \right) \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\, d\varphi \right) \\
&\quad = \frac{8a^4\pi}{5}.
\end{aligned}$$

Soluţie 6.19. Trecem la coordonate sferice generalizate. Calculând volumul după formula $\iiint_V dx\,dy\,dz$, obţinem

$$\begin{aligned} v &= \int_0^1 \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} abc\rho^2 \sin\theta \, d\varphi \right) d\theta \right) d\rho \\ &= 2\pi abc \left(\int_0^1 \rho^2 \, d\rho \right) \left(\int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \right) \\ &= \frac{4\pi abc}{3}. \end{aligned}$$

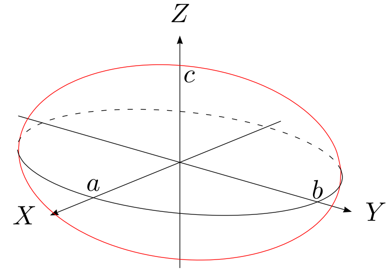


Figura 6.18: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Pământul are forma unui elipsoid cu $a = b$ şi egale cu raza ecuatorială, iar c este raza polară care este puţin mai scurtă decât raza ecuatorială. Volumul Pământului este:

$$v = \frac{4\pi R_e^2 R_p}{3} = 1\,083\,207\,317\,374 \text{ km}^3.$$

Soluţie 6.20. Trecem la coordonate sferice $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$ şi $z = \rho\cos\theta$. Jacobianul transformării este $\rho^2\sin\theta$. Integrala dată va fi egală cu

$$\begin{aligned} I &= \iiint_\Omega \left((x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 \right) \, dx\,dy\,dz \\ &= \int_1^3 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} (\rho^2 + 5 - 4\rho\cos\varphi\sin\theta + 2\rho\sin\varphi\sin\theta)\rho^2\sin\theta \, d\varphi \right) d\theta \right) d\rho \\ &= 2\pi \left(\int_1^3 (\rho^4 + 5\rho^2) \, d\rho \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \right) = \frac{152\pi}{15}. \end{aligned}$$

Soluţie 6.21. Scriem pe V ca şi mulţime

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4,\ x^2 + y^2 \le 3z^2,\ z \ge 0 \right\}.$$

Tranformând în coordonate sferice prin $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$ şi $z = \rho\cos\theta$

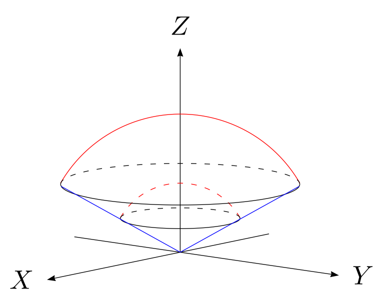


Figura 6.19: Domeniul spaţial V cuprins între cele 2 sfere şi în interiorul conului

obţinem $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ şi astfel rezultă că noul corp V' este mulţimea punctelor $(\rho, \varphi, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ care verifică

$$1 \le \rho^2 \le 4, \ \ \rho^2\sin^2\theta \le 3\rho^2\cos^2\theta, \ \ \rho\cos\theta \ge 0,$$

adică $V' = [1,4] \times [0,2\pi] \times [0,\pi/3]$. Calculăm integrala dată în felul următor:

$$\iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+z^2} = \iiint_{V'} \frac{|J|\,d\rho\,d\varphi\,d\theta}{\rho^2} = \int_1^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 \sin\theta\,d\varphi}{\rho^2} \right) d\theta \right) d\rho$$
$$= 2\pi \int_1^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta\,d\theta \right) d\rho = 2\pi \int_1^2 (-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} d\rho = \pi.$$

Soluţie 6.22. Trecem la coordonate sferice. Vom avea

$$\iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}} = \int_0^1 \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 \sin\theta}{\sqrt{\rho^2 - 4\rho\cos\theta + 4}}\,d\varphi \right) d\theta \right) d\rho$$
$$\overset{u=\cos\theta}{=} 2\pi \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 \frac{\rho^2\,du}{\sqrt{-4\rho u + \rho^2 + 4}} \right) d\rho$$
$$= -\pi \int_0^1 \rho\,\sqrt{-4\rho u + \rho^2 + 4}\Big|_{u=-1}^{u=1} d\rho$$
$$= -\pi \int_0^1 \rho(2-\rho-\rho-2)\,d\rho = \frac{2\pi}{3}.$$

Soluţie 6.23. Facem următoarea schimbare de variabile

$$\begin{cases} x = 1 + \rho\sin\theta\cos\varphi, \\ y = -3 + \rho\sin\theta\sin\varphi, \\ z = \rho\cos\theta, \end{cases}$$

prin care bila $(x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 \le 4$ se transformă în $\Omega' = [0,2] \times [0,\pi] \times [0,2\pi]$. Avem

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} (2x+y^2)\,dx\,dy\,dz \\ &= \iiint_{\Omega'} [2(1+\rho\sin\theta\cos\varphi) + (-3+\rho\sin\theta\sin\varphi)^2]\,|J|\,d\rho\,d\theta\,d\varphi \\ &= \int_0^2\!\!\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{2\pi} (11 + 2\rho\sin\theta\cos\varphi - 6\rho\sin\theta\sin\varphi + \rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi)\,\rho^2\sin\theta\,d\varphi d\theta d\rho \\ &= \int_0^2 \left(\int_0^{\pi} \left(22\pi\rho^2\sin\theta + \pi\rho^4\sin^3\theta\right)\,d\theta \right) d\rho \\ &= \int_0^2 \left(44\pi\rho^2 + \frac{4\pi\rho^4}{3} \right) d\rho = \frac{1888\pi}{15}. \end{aligned}$$

Soluţie 6.24. Corpul mărginit de suprafaţa torului se reprezintă parametric prin

$$\begin{cases} x = (R+\rho\cos v)\cos u, & \rho \in [0,r], \\ y = (R+\rho\cos v)\sin u, & u \in [0,2\pi], \\ z = \rho\sin v, & v \in [0,2\pi]. \end{cases}$$

Calculăm jacobianul acestei transformări

$$J = \begin{vmatrix} \cos v\cos u & -(R+\rho\cos v)\sin u & -\rho\sin v\cos u \\ \cos v\sin u & (R+\rho\cos v)\cos u & -\rho\sin v\sin u \\ \sin v & 0 & \rho\cos v \end{vmatrix} = \rho(R+\rho\cos v).$$

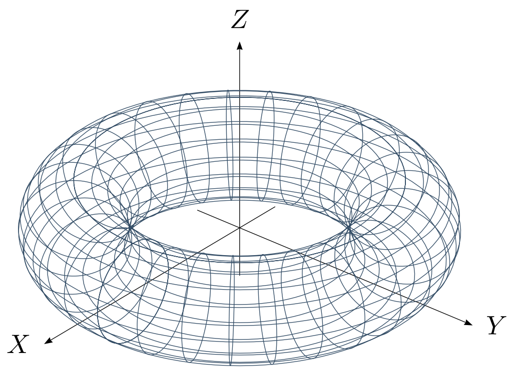


Figura 6.20: Torul

Volumul torului va fi

$$\begin{aligned}v &= \int_0^r \left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} \rho(R+\rho\cos v)\,du\right)dv\right)d\rho \\ &= 2\pi\int_0^r \left(2\pi\rho R + \rho^2 \sin v\Big|_0^{2\pi}\right)d\rho = 2\pi^2 r^2 R.\end{aligned}$$

Soluţie 6.25. Ecuaţia sferei $x^2+y^2+z^2=4z$ se scrie şi $x^2+y^2+(z-2)^2=4$, ceea ce ne arată că are raza 2 şi centrul în punctul $(0,0,2)$.
Sferă $x^2+y^2+z^2=9$ are raza 3 şi este centrată în origine.
Domeniul spaţial care este comun bilelor îl notăm prin

$$\Omega = \left\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 \le \min(9,4z)\,\right\}.$$

Avem de calculat masa

$$m = \iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

unde $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ este funcţia densitate.
Trecând la coordonate sferice, obţinem domeniul

$$\Omega' = \{\,(\rho,\varphi,\theta)\,|\,0\le\rho\le\min(3,4\cos\theta)\,\}.$$

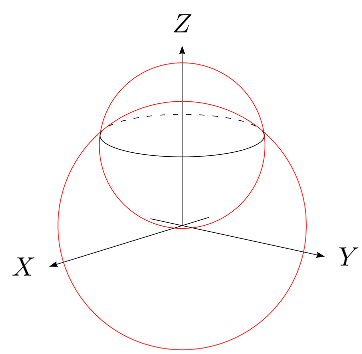


Figura 6.21: Cele două sfere

Unghiul φ variază între 0 şi 2π, iar pentru că avem $4\cos\theta\ge 0$, obţinem că θ variază între 0 şi $\frac{\pi}{2}$. Cu acestea masa corpului va fi

$$\begin{aligned}m &= \iiint_{\Omega'} \rho\cdot|J|\,d\rho\,d\varphi\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\min(3,4\cos\theta)}\left(\int_0^{2\pi}\rho^3\sin\theta\,d\varphi\right)d\rho\right)d\theta \\ &= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\min(3,4\cos\theta)}\rho^3\sin\theta\,d\rho\right)d\theta.\end{aligned}$$

Explicitând minimul

$$\min(3,4\cos\theta) = \begin{cases} 3, & \theta\in[0,\arccos 3/4] \\ 4\cos\theta, & \theta\in\left[\arccos\frac{3}{4},\frac{\pi}{2}\right],\end{cases}$$

obţinem

$$
\begin{aligned}
m &= 2\pi \int_0^{\arccos\frac{3}{4}} \left(\int_0^3 \rho^3 \sin\theta \, d\rho \right) d\theta + 2\pi \int_{\arccos\frac{3}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{4\cos\theta} \rho^3 \sin\theta \, d\rho \right) d\theta \\
&= 2\pi \cdot \frac{3^4}{4} (-\cos\theta) \Big|_0^{\arccos\frac{3}{4}} + 2\pi \int_{\arccos\frac{3}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4^4 \cos^4\theta}{4} \sin\theta \, d\theta \\
&= 2\pi \frac{3^4}{4} \left(1 - \frac{3}{4} \right) - 2\pi \cdot 4^3 \cdot \frac{\cos^5\theta}{5} \Big|_{\arccos\frac{3}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{81\pi}{5}.
\end{aligned}
$$

Soluţie 6.26. Ecuaţiile celor 8 plane care mărginesc octoedrul se obţin prin explicitarea cele 3 module care apar în ecuaţia $2|x| + 3|y| + 6|z| = 12$. Datorită simetriei facem schimbarea de variabile

$$
\begin{cases}
u = 2x + 3y + 6z, & u \in [-12, 12], \\
v = 2x + 3y - 6z, & v \in [-12, 12], \\
w = 2x - 3y + 6z & w \in [-12, 12].
\end{cases}
$$

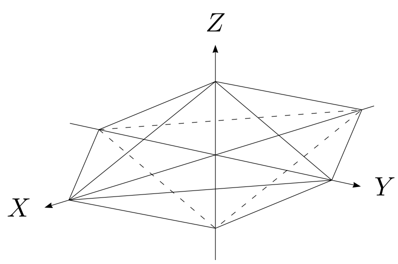


Figura 6.22: Octoedrul

Jacobianul transformării se poate calcula prin

$$
J = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y & u'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ w'_x & w'_y & w'_z \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & -6 \\ 2 & -3 & 6 \end{vmatrix}^{-1} = \frac{-1}{144}.
$$

Pentru a delimita complet octoedrul mai este nevoie de $-12 \le 2x - 3y - 6z \le 12$, adică $-12 \le v + w - u \le 12$, în noile coordonate. Noul domeniu poate fi scris prin $\Omega' = \left\{ (u, v, w) \in [-12, 12]^3 \mid -12 \le v + w - u \le 12 \right\}$. Proiecţia acestui domeniu pe planul uOv este pătratul $D = [-12, 12] \times [-12, 12]$. Dacă fixăm un punct $(u, v) \in [-12, 12]^2$ atunci

$$
\max(-12, -12 + u - v) \le w \le \min(12, 12 + u - v).
$$

Momentul de inerţie al octoedrului Ω faţă de planul XOY este

$$
I_{XOY} = \iiint_\Omega z^2 \, dx \, dy \, dz.
$$

Scăzând pe v din u, obţinem $z = \frac{u-v}{12}$. Aşadar, cu ajutorul schimbării variabilelor avem

$$
\begin{aligned}
I_{XOY} &= \iiint_{\Omega'} \left(\frac{u - v}{12} \right)^2 \cdot |J| \, du \, dv \, dw \\
&= \iint_D \left(\int_{\max(-12, -12+u-v)}^{\min(12, 12+u-v)} \frac{(u - v)^2}{144 \cdot 144} dw \right) du \, dv \\
&= \iint_D \frac{(u - v)^2}{144^2} \left(\min(12, 12 + u - v) - \max(-12, -12 + u - v) \right) du \, dv.
\end{aligned}
$$

Explicitând minimul şi maximul avem

$$
\begin{aligned}
\min(12, 12 + u - v) &= \begin{cases} 12, & v \le u \\ 12 + u - v, & v \ge u, \end{cases} \\
\max(-12, -12 + u - v) &= \begin{cases} -12 + u - v, & v \le u \\ -12, & v \ge u. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Notând $D_1 = \{\,(u,v) \in D \,|\, v \le u\,\}$ şi $D_2 = \{\,(u,v) \in D \,|\, v \ge u\,\}$, obţinem

$$I_{XOY} = \iint_{D_1} \frac{(u-v)^2}{144^2}\,(24-u+v)\,du\,dv + \iint_{D_2} \frac{(u-v)^2}{144^2}\,(24+u-v)\,du\,dv.$$

Calculăm prima dintre integrale

$$\begin{aligned}
I_1 &= \iint_{D_1} \frac{(u-v)^2}{144^2}\,(24-u+v)\,du\,dv. \\
&= \int_{-12}^{12} \left(\int_{-12}^{u} \frac{24(v-u)^2}{144^2} + \frac{(v-u)^3}{144^2}\,dv \right) du \\
&= \int_{-12}^{12} \left(\frac{8(12+u)^3}{144^2} - \frac{(12+u)^4}{4\cdot 144^2} \right) du \\
&= \frac{2(12+u)^4}{144^2}\Big|_{-12}^{12} - \frac{(12+u)^5}{20\cdot 144^2}\Big|_{-12}^{12} = \frac{24^4}{144^2}\left(2 - \frac{24}{20}\right) = \frac{64}{5}.
\end{aligned}$$

La fel se calculează şi cea de-a doua

$$\begin{aligned}
I_2 &= \iint_{D_2} \frac{(u-v)^2}{144^2}\,(24+u-v)\,du\,dv. \\
&= \int_{-12}^{12} \left(\int_{-12}^{v} \frac{24(u-v)^2}{144^2} + \frac{(u-v)^3}{144^2}\,du \right) dv \\
&= I_1 = \frac{64}{5}.
\end{aligned}$$

În final $I_{XOY} = \frac{128}{5}$.