CURS 2

2.1 Lucrul mecanic

Presupunem că asupra unui punct material acţionează forţa $\vec{F}$. Dacă forţa este constantă şi mişcarea are loc de-a lungul direcţiei care face un unghi α cu forţa (fig. 2.1), ***lucrul mecanic*** efectuat de această forţă de-a lungul vectorului deplasare $\vec{r}$ este

$$\vec{L} = \vec{F} \cdot \vec{r} = F \cdot r \cdot \cos\alpha \tag{2.1}$$

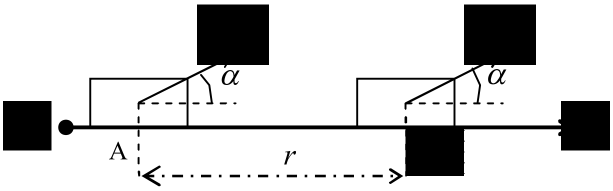

Fig.2.1 Lucrul mecanic la mişcarea unui corp de-a lungul vectorului $\vec{r}$.

Figura 2.2 prezintă cazul forţei care acţionează asupra unui corp de-a lungul direcţiei Ox, modulul forţei depinzând de poziţia sa, F=F(x). Lucrul mecanic efectuat de această forţă se calculează împărţind deplasarea într-un număr mare de intervale mici, Δx_i, atât de mici încât forţa să poată fi considerată constantă de-a lungul fiecăruia din ele. Lucrul mecanic efectuat de forţă pe intervalul Δx_i este (conform (2.1))

$$L_i = F_i \cdot \Delta x_i \tag{2.2}$$

adică este egal cu aria unui dreptunghi de lăţime Δx_i şi înălţime F_i. Lucrul mecanic total efectuat de forţa F(x) de-a lungul deplasării $x_2 - x_1$ este

$$L = \sum_{i=1}^{n} L_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \Delta x_i \tag{2.3}$$

Pentru o aproximare mai exactă împărţim deplasarea x_2-x_1 într-un număr cât mai mare de intervale mici Δx_i. Astfel, lăţimea intervalelor va fi foarte mică, iar la limita $\Delta x_i \to 0$ ele devin cantităţi infinitezimale, notate *dx*. Pe intervalul *dx* se păstrează condiţia $F(x) = const.$ Lucrul mecanic infinitezimal efectuat de-a lungul unui interval *dx* este

$$dL = F(x)dx \tag{2.4}$$

Lucrul mecanic total de-a lungul deplasării $x_2 - x_1$ se obţine însumând contribuţiile infinitezimale *dL*

$$L = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx \tag{2.5}$$

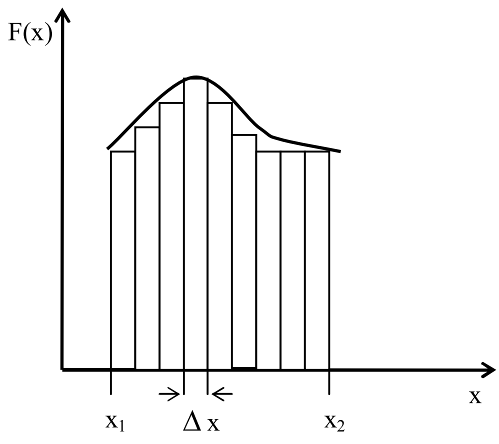

Fig.2.2 Graficul variaţiei forţei F(x) pe axa Ox.

<u>*Semnificaţia geometrică a integralei (2.5)*</u> *= aria de sub graficul ce exprimă dependenţa forţei de deplasare.*

Cazul cel mai general este acela al lucrului mecanic efectuat de o forţă variabilă ce determină o deplasare a unui punct material pe o traiectorie oarecare descrisă de vectorul de pozitie $\vec{r}$, între punctele $\vec{r}_1$ si $\vec{r}_2$. În acest caz formula (2.4) devine

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{2.6}$$

iar lucrul mecanic total este

$$L = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} F \cdot \cos\alpha \cdot dr \tag{2.7}$$

unde α este unghiul dintre forţa $\vec{F}$ şi deplasarea infinitezimală d$\vec{r}$.

2.2 Energia

Din viaţa de toate zilele cunoaştem faptul că există mai multe forme de energie: energia cinetică - asociată cu mişcarea unui corp, energia potenţială - asociată cu poziţia relativă a corpurilor, respectiv cu capacitatea lor de a efectua lucru mecanic, energia internă - asociată cu mişcarea moleculelor în interiorul unui gaz şi strâns legată de temperatura acestuia, etc.

Energia cinetica a unui punct material de masa *m* ce se deplasează cu viteza $\vec{v}$ este

$$T = \frac{mv^2}{2} \tag{2.8}$$

Forţa $\vec{F}$ ce determină deplasarea unui punct material între $\vec{r}_1$ şi $\vec{r}_2$, efectuează lucrul mecanic

$$L_{r_1 r_2} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} F dx = \int_{r_1}^{r_2} m \frac{dv}{dt} \cdot dx = \int_{r_1}^{r_2} m \cdot v \cdot dv = m \frac{v_{r_2}^2}{2} - m \frac{v_{r_1}^2}{2} = \Delta T \tag{2.9}$$

care este egal cu variatia energiei cinetice a punctului material. Această relaţie exprimă ***teorema variaţiei energiei cinetice*** *care afirmă că lucrul mecanic efectuat de o forţă asupra unui punct material este egal cu variaţia energiei cinetice a acestuia.* Energia unui sistem poate fi definită deci ca şi capacitatea sistemului de a efectua lucru mecanic.

2.3 Legi de conservarea în mecanică

A.*<u>Legea conservării energiei</u>* pentru sisteme izolate (legea fundamentală de conservare în fizică); redusă la limitele mecanicii, ea ***afirmă că energia mecanică totală (energia cinetică,*** **T, +** ***energia potenţială***, **U*) a unui sistem izolat este constantă***

$$T + U = const. \tag{2.10}$$

Există situaţii în care, aparent, legea conservării energiei nu este respectată. Fie forţele de frecare datorită cărora un corp aflat în mişcare se opreşte la un moment dat. Făcând un bilanţ energetic, s-ar părea că are loc o pierdere de energie. De fapt, energia cinetică a corpului este înmagazinată de atomii din interiorul corpului şi din mediul înconjurător sub formă de energie calorică. Astfel, energia ''pierdută'' se regăseşte de fapt sub formă de energie calorică în corpul respectiv şi în mediul înconjurător.

B.*<u>Legea conservării impulsului</u> - afirmă că impulsul unui sistem izolat se conservă (rămane constant).* Forţa care acţionează asupra acelui punct material este $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ (1.27). Un sistem izolat este acela pentru care suma forţelor care acţionează asupra sa este $\vec{F} = 0$. Atunci avem $d\vec{p}/dt = 0 \rightarrow \vec{p} = const.$

C.*__Legea conservării momentului cinetic__* - *afirmă că pentru un sistem izolat (pe care acţionează o forţă şi respectiv un moment al forţei nule) momentul cinetic rămâne constant*.

Fie o forţa $\vec{F}$ ce acţionează asupra unui punct material P, a cărui poziţie este dată de vectorul de poziţie $\vec{r}$ (fig.2.3). Momentul forţei, $\overrightarrow{M}$, ce acţionează asupra punctului material (în raport cu originea O) este definit

$$\overrightarrow{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (2.11)$$

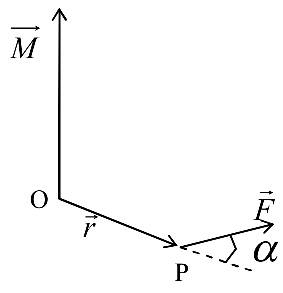

Fig.2.3 Momentul forţei $\vec{F}$ ce acţioneaza asupra punctului material, $\overrightarrow{M}$.

Momentul cinetic al punctului material P (vezi figura 2.4) este definit

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (2.12)$$

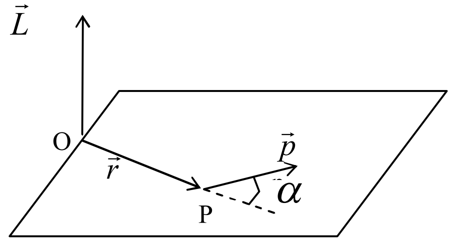

Fig.2.4 Momentul cinetic al punctului material P.

Se demonstrează că

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} = \overrightarrow{M} \quad (2.13)$$

2.4 Energia şi masa

Studiul fenomenelor relativiste şi descoperirile lui Einstein au sugerat faptul că, pentru păstrarea valabilităţii unor legi fizice, masa unei particule trebuie redefinită

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (2.14)$$

Aici m_o este masa de repaus a particulei (în repaus faţă de observator), m este masa de mişcare a particulei (în mişcare cu viteza v faţă de observator) şi c este viteza luminii (c = $3x10^8$ m/s). Formula (2.14) arată că o dată cu variaţia vitezei punctelor materiale se produc efecte relativiste constând în modificarea masei acestora (aceste efecte nu se referă la modificarea cantitătii de substanţă dintr-un obiect). Energia cinetică nu mai este $\frac{1}{2}$ m_0v_2, ci devine

$$E_c = mc^2 - m_0c^2 = (m-m_0)c^2 = \Delta mc^2 \quad (2.15)$$

Conform (2.15), energia cinetică a unei particule este produsul dintre c^2 şi creşterea de masă Δm care rezultă din mişcarea acestei particule. Ajungem astfel la ***principiul echivalenţei dintre masă şi energie***, enunţat pentru întaia oară de Einstein*, care afirmă că pentru orice cantitate de energie E, de orice tip, transmisă unui obiect material, masa obiectului va creşte cu o cantitate $\Delta m = E/c^2$.*

2.5 Cinematica rotaţiei

Fie mişcarea de rotaţie a unui punct material de pe un disc care se roteşte în jurul axei sale de simetrie perpendiculare pe suprafaţa sa (fig.2.5). Intr-un interval de timp dat fiecare punct material de pe disc se deplasează cu acelaşi unghi, dar vitezele de deplasare ale acestor puncte (măsurate pe arcele corespunzătoare) sunt diferite (un punct mai îndepărtat de axă se mişcă mai repede decât unul aflat în apropierea axei).

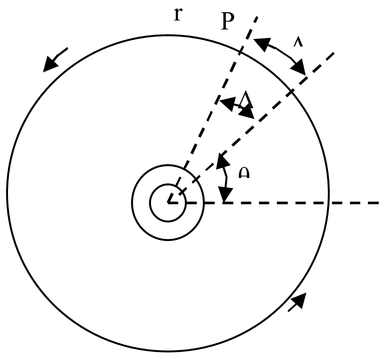

Fig.2.5 Disc rotitor.

Un punct material *P* de pe disc, aflat la o distanţă *r* faţă de centru, se mişcă de-a lungul unui arc de cerc pe distanţa Δs.

Viteza liniară (periferică) a punctului material este

$$v_p = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{2.16}$$

Unghiul de rotaţie al discului - unghiul „măturat” de rază (exprimat în radiani) este

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{r} \tag{2.17}$$

Viteza unghiulară ω a discului este

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{2.18}$$

Viteza unghiulară este o mărime fizică vectorială, perpendiculară pe planul mişcării circulare. Unitatea de măsură a vitezei unghiulare este radianul/secundă (s^{-1}).

Acceleraţia unghiulară - viteza de variaţie a vitezei unghiulare

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}\left[{rad}/{s^2}\right] \tag{2.19}$$

Relaţia între viteza liniară a ununi punct material de pe disc şi viteza unghiulară a discului este (am folosit (2.17 şi (2.18)

$$v_p = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{r\cdot\Delta\theta}{\Delta t} = \omega\cdot r \qquad (2.20$$

sau sub formă vectorială (fig.2.6)

$$\overrightarrow{v_p} = \vec{\omega}\times\vec{r} \qquad (2.21$$

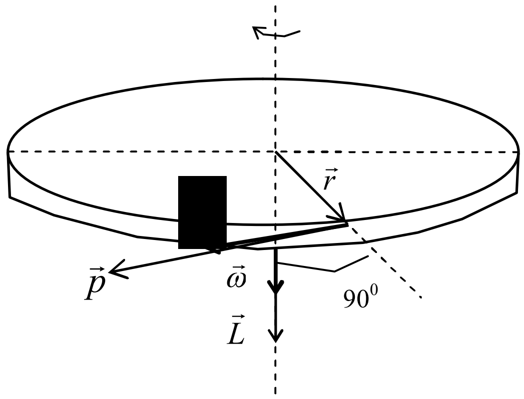

Fig.2.6 Viteza unghiulară

Analog, între acceleraţia tangenţială a unui punct material de pe disc şi acceleraţia unghiulară a discului, există relaţia

$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{r \cdot \Delta\omega}{\Delta t} = \varepsilon \cdot r \qquad (2.22$$

sau, vectorial

$$\vec{a}_t = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} \qquad (2.23$$

Acceleraţie liniară (centripetă), a_c – apare la fiecare punct material de pe disc; este îndreptată spre interior de-a lungul liniei radiale şi are modulul

$$a_c = \frac{v^2}{r} = r \cdot \omega^2 \qquad (2.24)$$

Există o analogie între mişcarea de translaţie şi mişcarea de rotaţie.

2.6 Energia cinetică în mişcarea de rotaţie

Un corp aflat în mişcare de rotaţie posedă o energie cinetică asociată acestei mişcări. Aceasta este suma energiilor cinetice ale punctelor materiale care alcătuiesc acel corp. Dacă m_i şi v_i sunt masa şi respectiv viteza unui asemenea punct material, energia cinetică a corpului aflat în mişcare de rotaţie este

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (\omega \cdot r_i)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \left(\sum m_i \cdot r_i\right)^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad (2.25)$$

Produsul dintre masa unui punct material şi pătratul distanţei sale faţă de axa de rotaţie, r_i^2, este ***momentul de inerţiei*** I_i al acelui punct material. Prin însumarea (2.25) momentelor de inerţie ale punctelor materiale din care este compus corpul obţinem momentul de inerţie al corpului, *I*. Din (2.25) constatăm că viteza unghiulara ω joacă rolul vitezei v din mişcarea de translatie, iar momentului de inerţie, I, joacă rolul masei m din mişcarea de translaţie.

Momentul de inerţie pentru un element infinit mic al corpului aflat în rotaţie este

$$dI = r^2 \cdot dm = r^2 \cdot \rho \cdot dV \qquad (2.26)$$

unde ρ = densitatea corpului şi dV = volumul unui element de volum infinit mic al corpului studiat. Momentul de inerţie pentru întregul corp se calculeaza integrând relaţia (2.26) pe volumul V al corpului

$$I = \int_V r^2 \cdot \rho \cdot dV \qquad (2.27)$$

2.7 Mişcarea de translaţie şi mişcarea de rotaţie

Există o analogie între expresiile mărimilor fizice şi ecuaţiile caracteristice ale mişcarii de translaţie, respectiv de rotaţie (tabelul 2.1).

Tabel 2.1 Comparaţie între mişcarea de translaţie şi mişcarea de rotaţie.

Mişcarea de translaţie	*Ecuaţia*	*Mişcarea de rotaţie*	*Ecuaţia*
Deplasarea	Δx	Intervalul unghiular	$\Delta\theta$
Viteza	$v = \Delta x/\Delta t$	Viteza unghiulară	$\omega = \Delta\theta/\Delta t$
Acceleraţia	$a = \Delta v / \Delta t$	Acceleraţia unghiulară	$\varepsilon = \Delta\omega / \Delta t$
Ecuaţiile mişcării uniform accelerate	$v = v_0 \pm a \cdot t$ $x = x_0 + v_0 t \pm at^2/2$ $v^2 = v_0^2 \pm 2a(x - x_0)$	Ecuaţiile mişcării uniform accelerate	$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon \cdot t$ $\theta = \theta_0 + \omega_0 t \pm \varepsilon \cdot t^2/2$ $\omega^2 = \omega_0^2 \pm 2\varepsilon \cdot \Delta \cdot \theta$
Masa	m	Momentul de inerţie	$I = mr^2$
Impuls	$\vec{p} = m\vec{v}$	Momentul cinetic	$\vec{L} = I\vec{\omega}$
Forţa	$\vec{F}$	Momentul forţei	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
Puterea	$P = Fv$	Puterea	$P = M \cdot \omega$
Legea a II-a a lui Newton	$\vec{F} = d\vec{p}/dt$	Legea a II-a a lui Newton	$\vec{M} = d\vec{L}/dt = I \cdot \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$
Energia cinetică	$T = mv^2/2$	Energia cinetică	$T_r = I \cdot \omega^2/2$

2.8 Forţe conservative

Fie un domeniu din spaţiu unde în fiecare punct acţionează o forţă →acesta este un ***câmp de forţe***.

Câmp de forţe conservativ *acel câmp de forţe în care lucrul mecanic efectuat de câmp asupra unui punct material pentru a-l deplasa de-a lungul unei curbe închise este nul.*

Fie un punct material (vezi fig.2.7) ce se deplasează de la poziţia ***a*** la poziţia ***b*** de-a lungul căii ***1*** şi se întoarce la ***a*** de-a lungul căii ***2***. Traiectoria acestui punct material este o curbă închisă. Dacă câmpul de forţe este conservativ, atunci lucrul mecanic efectuat asupra particulei de-a lungul curbei ***a1b2a*** este nul

$$L_{ba,1} + l_{ba,2} = 0 \rightarrow L_{ab,1} = -L_{ba,2} \qquad 2.28)$$

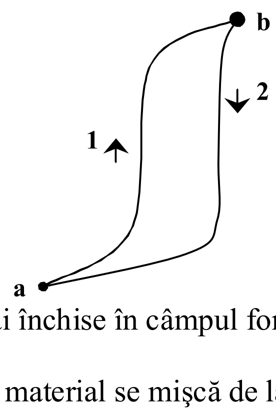

Fig.2.7 Căi închise în câmpul forţelor conservative.

Considerăm acum că punctul material se mişcă de la ***a*** la ***b*** de-a lungul căii ***2***, putem scrie

$$L_{ab,2} = -L_{ba,2} \tag{2.29}$$

de unde

$$L_{ab,1} = L_{ab,2} \tag{2.30}$$

Deci, *dacă un câmp de forţe este conservativ, lucrul mecanic efectuat asupra unui punct material nu va depinde de traiectoria acestuia ci numai de poziţiile sale iniţială şi finală.*

Printre câmpurile conservative se numără cele electrice şi cele gravitaţionale.

Aplicând operatorul de diferenţiere asupra relaţiei 2.10 obţinem

$$dT + dU = 0 \tag{2.31}$$

care arată că *variaţia energiei cinetice a unui punct material este egală cu aceea a energiei sale potenţiale.* Cu relaţia 2.9 relaţia 2.31 devine

$$dU = -dT = -dL = -\vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{2.32}$$

de unde

$$\vec{F} = -\frac{dU(r)}{d\vec{r}} = -\frac{dU}{dr} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \tag{2.33}$$

unde termenul din dreapta ecuaţiei 2.33 este gradientul energiei potenţiale → ***forţa este egală cu gradientul energiei potenţiale*** U ***, luat cu semnul minus*** (numai în câmpuri conservative)

$$\vec{F} = -gradU = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \right) \tag{2.34}$$

OSCILAŢII

2.9 Mişcarea oscilatorie

Una dintre cele mai importante mişcări întâlnite în natură este ***mişcarea oscilatorie***, *determinată de acţiunea forţelor elastice.*

Mişcarea oscilatorie este o ***mişcare periodică*** deoarece constă în realizarea unei deplasări ciclice a sistemului (deplasări care se repetă la intervale egale de timp). Ea este caracterizată prin:

-perioada mişcării (T) (=timpul necesar pentru efectuarea unei deplasări ciclice complete în timpul derulării mişcării;

***-frecvenţa mişcării* (ν) (=** numărul de mişcări ciclice complete efectuate în unitatea de timp).

Pe baza acestor definiţii vom avea

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{t}{n} \\ \nu &= \frac{n}{t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow T \cdot \nu = 1 \tag{2.35}$$

unde n reprezintă numărul de oscilaţii complete efectuate de sistem în timpul t. În SI perioada se măsoară în secunde, $[T]_{SI} = 1s$, iar frecvenţa se măsoară în hertzi, $[\nu] = s^{-1} = Hz$.

-pulsaţia (ω), legată de frecvenţă prin relaţia

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \tag{2.36}$$

Cele mai importante mişcări oscilatorii sunt: a.oscilaţiile armonice; b. oscilaţiile amortizate; c. oscilaţiile forţate.

2.10 Oscilaţiile armonice

Fie un corp de masă *m* prins de un perete vertical prin intermediul unui resort şi care se poate mişca pe planul orizontal fără frecare (fig.2.8).

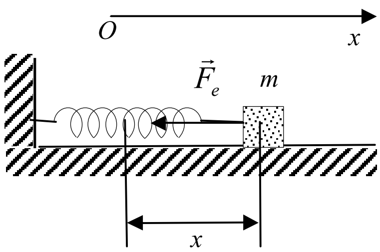

Fig.2.8 Mişcarea oscilatorie armonică.

Presupunem că forţa de rezistenţă din partea mediului înconjurător este neglijabilă. Scoatem corpul din poziţia de echilibru şi îl lăsăm liber. El se va mişca de o parte şi de alta a poziţiei sale de echilibru efectuând o mişcare oscilatorie armonică.

Mişcarea oscilatorie armonică *constă în deplasarea unui obiect de-a lungul unei axe, de o parte şi de alta a poziţiei sale de echilibr, sub acţiunea unei forţe elastice* $\vec{F}_e$. Distanţa x la care se afla obiectul la un moment dat faţă de poziţia de echilibru se numeşte ***elongaţie***. Elongaţia maximă reprezintă ***amplitudinea*** mişcării oscilatorii armonice (notată cu A).

Pentru a afla ecuaţia de mişcare a oscilatorului armonic scriem ecuaţia principiului II al dinamicii ţinand cont că forţa care determină mişcarea oscilatorie armonică este forţa elastică ($F_e=-kx$, unde k este constanta elastică iar x este elongaţia mişcării oscilatorii armonice)

$$F_e = ma \tag{2.37}$$

adică

$$ma + kx = 0 \tag{2.38}$$

sau

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \tag{2.39}$$

Înmulţind relaţia anterioara cu $\frac{1}{m}$ şi notând $\omega^2 = \frac{k}{m}$, ecuaţia (2.39) devine

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \tag{2.40}$$

Această relaţie este o ecuaţie diferenţială de ordinul 2, omogenă. Soluţia ei este elongaţia oscilatorului armonic, *x(t)*, o funcţie care depinde de timp.

Ecuaţia (2.40) se numeşte ***ecuaţia mişcării oscilatorului armonic*** (sub forma diferenţială).

Pentru a rezolva ecuaţia (2.40) avem nevoie de o funcţie a cărei a doua derivată trebuie să fie egală cu funcţia însăşi, cu semnul minus, cu excepţia factorului constant ω. Să observăm faptul că o asemenea proprietate o au funcţiile sinus şi cosinus

$$\begin{aligned} &\frac{d^2}{dt^2}(cost) = -cost \\ &\frac{d^2}{dt^2}(sint) = -sint \end{aligned} \tag{2.41}$$

Evident, rezultatul nu se modifică dacă înmulţim funcţia sinus/cosinus, cu o constantă, A. Astfel, o soluţie a ecuaţiei (2.45) ar putea fi de forma

$$x = Asin(\omega t + \varphi) \tag{2.42}$$

Astfel, am găsit o soluţie generală (2.46) pentru ecuaţia (2.42), soluţie în care constantele A şi φ (amplitudinea şi faza iniţială a mişcării) sunt necunoscute. Menţionăm faptul că relaţia (2.42) reprezintă şi ea ***ecuaţia mişcării oscilatorului armonic*** (sub forma integrală).

Pentru rezolvarea ecuaţiei 2.40 se pune acum problema determinării parametrilor A şi φ care apar în soluţia generală 2.41.

Să observăm faptul că derivând elongaţia oscilatorului armonic (2.42) în raport cu timpul o dată, respectiv de două ori, obţinem expresiile pentru viteza, respectiv acceleraţia acestuia

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t+\varphi) \\ a &= \frac{dv}{dt} = \frac{dx^2}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t+\varphi) \end{aligned} \tag{2.43}$$

Pentru a determina constantele A si φ trebuie să cunoaştem condiţiile iniţiale ale mişcării oscilatorului armonic (valorile elongaţiei initiale, x_0, şi vitezei iniţiale, v_0). Impunem aceste condiţii elongaţiei (2.42) şi vitezei (2.43) şi obţinem un sistem de 2 ecuaţii

$$\begin{aligned} x_0 &= A\sin\varphi \\ v_0 &= A\varpi\cos\varphi \end{aligned} \tag{2.43}$$

pe care îl rezolvăm. Aflăm astfel constantele A şi φ, adică determinăm soluţia ecuaţiei (2.40).

Observăm că valorile soluţiei (2.42) se repetă după un număr întreg al intervalului de timp $2\pi/\omega$, deci $2\pi/\omega$ reprezintă perioada T a mişcării. Putem astfel scrie

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} \tag{2.44}$$

Cantitatea ω, despre care am discutat şi la relaţia (2.43) poartă numele de ***frecvenţă unghiulară*** (sau ***pulsaţia proprie***) a mişcării oscilatorii armonice şi este independentă de amplitudine. Cantitatea $\omega t + \varphi$ reprezintă ***faza mişcării***, iar φ este ***faza iniţială a mişcării***.

Figura 2.9 prezintă grafic variaţia în timp a elongaţiei oscilatorului armonic (2.42) pentru cazul $\varphi_0=0$.

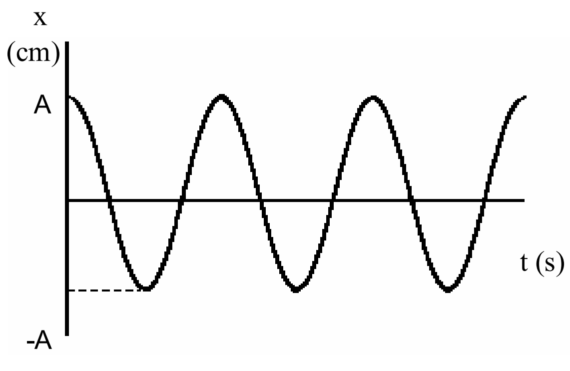

Fig.2.9 Variaţia în timp a elongaţiei în mişcarea oscilatorie armonică.

Deoarece forţele elastice sunt forţe conservative

$$F = -\frac{dU}{dx} = -kx \tag{2.45}$$

energia potenţială a oscilatorului armonic este dată de relaţiile

$$dU = -kx \cdot dx \quad \text{sau} \quad U = \frac{kx^2}{2} \tag{2.46}$$

Energia potenţială a mişcării oscilatorii armonice *U(x)* se reprezintă printr-o parabolă, iar forţa elastică care determină mişcarea oscilatorie armonică (2.45) printr-un segment de dreaptă tangent la parabolă. Forţa se anulează în punctul minim al curbei energiei potenţiale (fig.2.10).

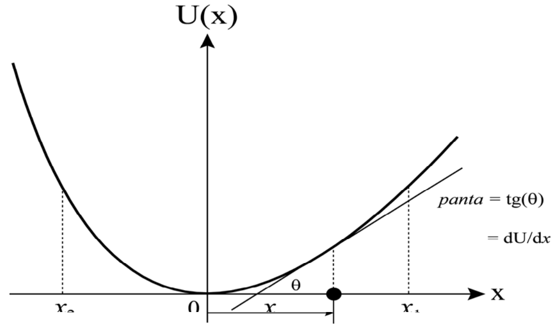

Fig.2.10 Dependenţa energiei potenţiale şi a forţei elastice de elongaţie în mişcarea oscilatorie armonică.

Energia cinetică (E_c), energia potenţială (U) şi energia totală *(E)* a oscilatorului armonic sunt date de relaţiile

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \tag{2.47}$$

$$E = E_c + U = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} kA^2$$

Energia totală pentru un oscilator armonic se conservă. După ce a început mişcarea armonică, obiectul va oscila cu amplitudine, fază şi frecvenţă constante.

2.11 Oscilaţii amortizate

Un sistem real aflat în mişcarea oscilatorie întâmpină o anumită rezistenţă din partea mediului în care oscilează ⇒ efectuează ***oscilaţii amortizate*** = amplitudinea lor scade până la dispariţie o data cu trecerea timpului. Ele sunt determinate de *acţiunea simultană a forţei elastice şi a forţei de frecare.*

Fig.2.11 prezintă un oscilator care execută o oscilaţii amortizate sub acţiunea forţei elastice $F_e = -kx$ şi a forţei de frecare cu mediul $F_{f_r} = -\gamma v$ (***k= constanta elastică a resortului***, ***γ= coeficientul de frecare vâscoasă al mediului***).

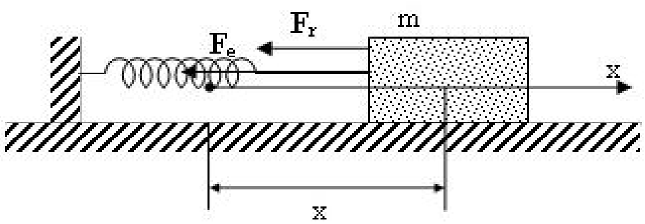

Fig.2.11 Oscilaţii amortizate.

Ecuaţia mişcării amortizate este

$$F = F_e + F_{f\,r} \tag{2.48}$$

adică

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} \tag{2.49}$$

sau

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \tag{2.50}$$

unde $\delta = \dfrac{\gamma}{2m}$ ***- coeficientul de amortizare*** şi $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ **-** pătratul ***frecvenţei unghiulare (pulsaţiei) proprii oscilatorului.***

Căutăm soluţia ecuaţiei (2.50) de forma

$$x = Ce^{\lambda t} \tag{2.51}$$

care, pentru λ imaginar, este o combinaţie de funcţii armonice. Înlocuim (2.51) în (2.50) şi obţinem

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \varpi_0{}^2 = 0 \tag{2.52}$$

numită ***ecuaţia caracteristică*** a ecuaţiei diferenţiale (2.50). Ea admite soluţiile

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \varpi^2} = -\delta \pm i\sqrt{\varpi_0{}^2 - \delta^2} \tag{2.53}$$

Considerăm soluţia ecuaţiei (2.50) de forma

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \qquad 2.54)$$

care ne conduce la

$$x = e^{-\delta t}(C_1 e^{i\varpi t} + C_2 e^{-i\varpi t}) \tag{2.55}$$

unde

$$\varpi = \sqrt{\varpi_0{}^2 - \delta^2} \tag{2.56}$$

care este ***pulsaţia oscilatorului amortizat***.

<u>Obs.importantă</u>: soluţia (2.55) descrie o *mişcare oscilatorie* numai pentru $\varpi_0{}^2 - \delta^2 \geq 0$.

(pentru $\varpi_0{}^2 - \delta^2 < 0$ descrie o *mişcarea aperiodică amortizată*).

Cu ajutorul formulei lui Euler ($e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$) relaţia (2.54) se scrie

$$x = A_0 e^{-\delta t}\cos(\varpi t + \varphi) \tag{2.57}$$

unde

$$A(t) = A_0 e^{-\delta\cdot t} \tag{2.58}$$

unde ***A(t)= amplitudinea oscilatorului amortizat*** (dependentă de timp), iar ***A_0 = amplitudinea iniţială a oscilatorului*** (la $t = 0 \to A(0) = A_0$).

Dacă forţa de frecare este mică, (2.56) descrie o mişcare periodică cu amplitudine descrescătoare în timp (fig.2.12).

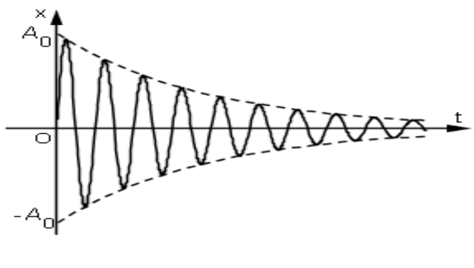

Fig.2.12 Oscilaţii amortizate.

Când creşte coeficientul de frecare al mediului (γ) $\Rightarrow$ creşte coeficientul de amorizare (δ) $\Rightarrow$ amortizarea devine mai puternică. Rata amortizării este exprimată prin logaritmul natural al raportului $\frac{A(t)}{A(t+T)}$ numit ***decrementul logaritmic al amortizării***

$$\Delta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T \tag{2.59}$$

Din (2.59) rezultă că amortizarea oscilaţiilor modifică perioada acestora

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{4mk}}} \tag{2.60}$$

unde $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ - ***perioada proprie a oscilatorului***. Dacă $\vec{F}_f$ creşte $\Rightarrow$ T creşte până când se ajunge la $\frac{\gamma^2}{4m} = 1$ unde oscilaţiile încetează.

Energia oscilaţiilor amortizate este

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^{\ 2} e^{-2\delta\cdot t} = E_0 e^{-2\delta\cdot t} \tag{2.61}$$

unde E_0 = energia iniţială. Energia oscilaţiilor amortizate scade exponenţial în timp.

Funcţia de disipaţie sau ***factorul de calitate*** al unui oscilator amortizat se defineşte

$$Q = \frac{1}{2}\gamma\cdot v^2 \tag{2.62}$$

Este o mărime adimensională cu proprietăţile:

-derivata ei în raport cu viteza este egală cu forţa de frecare luată cu semn schimbat

$$F_{fr} = -\frac{dQ}{dv} = -\gamma\cdot v \tag{2.63}$$

-puterea disipată este egală cu dublul funcţiei de disipaţie

$$-\frac{dE}{dt} = 2Q = \gamma\cdot v^2 \tag{2.64}$$

Oscilatorul este cu atât mai ”*bun*” (adică va avea un Q mai mare, oscilează un timp mai îndelungat) cu cât δ, respectiv γ, sunt mai mici.

2.12 Oscilaţii forţate

Pentru a întreţine oscilaţiile care datorită frecării cu mediul se amortizează, se aplică oscilatorului (fig.2.13) o forţă periodică externă, $F_p(t)$

$$F(t) = F_0 \cos\omega t \tag{2.65}$$

unde ***ω = pulsaţia forţei exterioare, F_0 = valoare maximă a forţei exterioare***.

Ecuaţia de mişcare pentru oscilatorul forţat este

$$F = F_e + F_{fr} + F(t) \tag{2.66}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx = F_0\cos\omega t \tag{2.67}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \tag{2.68}$$

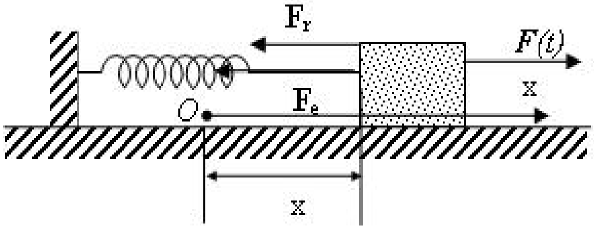

Fig.2.13 Oscilaţii forţate.

Ecuaţia (2.68) reprezintă ***ecuaţia de mişcare a oscilaţiilor forţate*** (***oscilaţiilor intreţinute***) deoarece acţiunea forţei periodice exterioare asupra oscilatorului împiedică „stingerea" oscilaţiilor acestuia, cu alte cuvinte „le intreţine".

Soluţia căutată pentru ecuaţie diferenţială (2.68) este de forma (2.42). Prin înlocuirea expresiei (2.42) în ecuaţia de mişcare (2.68) şi prin egalarea coeficienţilor lui $\sin \omega t$, respectiv $\cos \omega t$, din membrul stâng şi membrul drept al ecuaţiei se obţine un sistem de două ecuaţii a cărui rezolvare conduce la expresiile pentru A şi φ

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \qquad (2.69)$$

şi

$$\tan \varphi = -\frac{2\delta\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2} \qquad (2.70)$$

Fenomenul de rezonanţă *= transferul de energie dinspre sistemul exterior (forţa periodică) înspre oscilator se face cu randament maxim, iar energia şi amplitudinea oscilatorului devin maxime.*

Pentru aflarea pulsaţiei forţei exterioare la rezonanţă se impune condiţia $\frac{dA}{d\omega} = 0$ de unde

$$\omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \qquad (2.71)$$

unde ω_{rez} =***frecvenţa de rezonanţă*** (se apropie cu atât mai mult de frecvenţa proprie de oscilaţie cu cât coeficientul de atenuare, δ, este mai mic).

Figura 2.14 prezintă curbele de variaţie a amplitudinii pentru diferite valori ale pulsaţiei ϖ şi coeficientului de amortizare δ. La scăderea rezistenţei mecanice a mediului în care au loc oscilaţiile forţate amplitudinea acestora creşte.

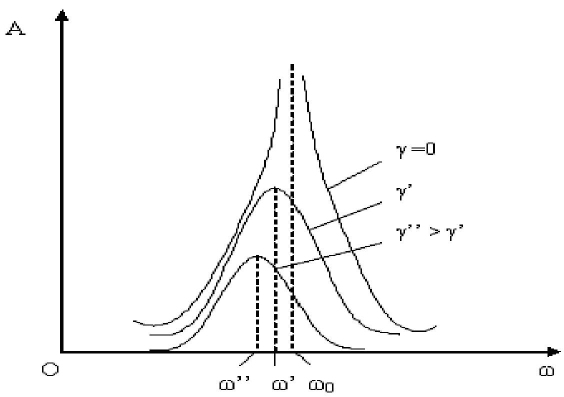

Fig.2.14 Variaţia amplitudinii în funcţie de pulsaţia ω şi de coeficientul de amortizare δ.

Efectul de rezonanţă se accentuează (A creşte) atunci când coeficientului de amortizare δ (respectiv coeficientul de frecare γ) descreşte. La rezonanţă, când nu există frecare ($\gamma = 0$), amplitudinea oscilatorului tinde spre infinit, iar sistemul se poate distruge $\Rightarrow$ atentie la proiectare în domeniul ingineriei mecanice sau al ingineriei construcţiilor. Pe de altă parte, deoarece la rezonanţă transferul de energie dinspre exterior înspre sistemul oscilant se face cu randament maxim, rezonanţa este dorită în ingineria electrică si în electronică (circuitele oscilante se acordează la rezonanţă pentru ca pierderile de semnal să fie minime).

Proprietăţi ale oscilaţiilor forţate:

- frecvenţa oscilaţiilor forţate este egală cu frecvenţa forţei externe.

- amplitudinea şi defazajul oscilaţiilor forţate depind de structura sistemului mecanic ce oscilează (k, m) şi de frecvenţa forţei externe.

După începerea acţiunii forţei exterioare asupra oscilatorului întreţinut urmeză *regimul tranzitoriu* (oscilatorul încă mai oscilează cu frecvenţa proprie), iar după un timp se instalează *regimul permanent* (oscilatorul oscilează cu pulsaţia forţei externe).