CURS 7

Capitolul VII. ELECTROSTATICĂ

7.1 Sarcina electrică

Electrostatica *studiază fenomenele generate de sarcinile electrice aflate în repaos.*

Sarcina electrică *este o mărime fizică scalară care măsoară starea de electrizare a unui corp.* Există două tipuri de sarcini electrice, cea pozitivă, respectiv cea negativă. Cantitatea cea mai mică de sarcină este $e = 1,6 \times 10^{-19} C$. Menționăm faptul că sarcina electrică a protonilor este egală cu $+e$, iar cea a electronilor este egală cu $-e$.

Sarcina electrică Q cu care se încarcă un corp satisface condiția

$$Q = ne \tag{7.1}$$

unde n este un număr întreg.

7.2 Legea lui Coulomb

Legea lui Coulomb *este o lege experimentală care afirmă că forța de interacție dintre două sarcini punctiforme acționează de-a lungul dreptei ce unește cele două sarcini este direct proporțională cu produsul sarcinilor şi invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele.* Forța coulombiană este de atracție dacă sarcinile sunt de semne contrare şi de respingere dacă sarcinile sunt de acelaşi fel.

Fie două sarcini electrice punctiforme, Q_1 şi Q_2, aflate la distanța $\vec{r}$ una de cealaltă (fig.7.1). Forța coulombiană dintre cele două sarcini electrice este

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \tag{7.2}$$

unde $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\, C^2 / N \cdot m^2$ este o constantă numită *permitivitatea electrică a vidului.*

În sistemul internațional sarcina electrică se măsoară în coulombi (C).

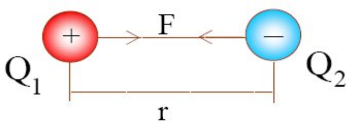


Fig.7.1 Forța coulombiană dintre 2 sarcini electrice punctiforme.

7.3 Câmpul electric

Câmp electric *- stare a materiei generată în jurul unei sarcini electrice care se manifestă prin acțiunea unor forțe de natură electrică asupra oricărei sarcini electrice introduse în câmp.* Sarcinile electrice statice crează ***câmpuri electrostatice***.

Pentru descrierea câmpului electric se utilizează două mărimi fizice importante, intensitatea câmpului electric şi potențialul câmpului electric.

Intensitatea câmpului electric - *este o mărime fizică vectorială definită cu ajutorul relației*

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \tag{7.3}$$

unde $\vec{F}$ = forța cu care câmpul electric acționează asupra sarcinii electrice q introduse în câmp. Pentru câmpul electrostatic generat de sarcina electrică Q în care se introduce sarcina electrică de probă q, intensitatea câmpului în punctul unde este plasată sarcina de probă este (conform (7.1) şi (7.2))

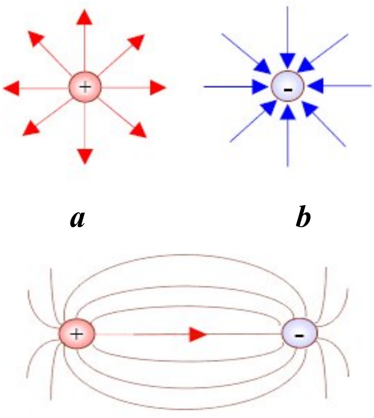
$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \tag{7.4}$$

unde $\vec{F}$ = forța coulombiană dintre sarcinile Q şi q. Vectorul $\vec{E}$ are modulul dat de expresia

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{7.5}$$

Reprezentarea grafică a câmpurilor electrice se face utilizând liniile de câmp. ***Liniile de câmp*** = *curbele la care vectorul intensitate câmp electric este tangent în fiecare punct; sensul unei linii de câmp este acela al vectorului intensitate câmp electric.*

Pentru sarcinile punctiforme, atât liniile de câmp cât şi vectorii intensitatea câmpului electric au o orientare radială cu sensul spre exterior, dacă sarcinile electrice sunt pozitive (fig.7.2a), respectiv spre interior (spre sarcină), dacă sarcinile electrice sunt negative (fig. 7.2b). Liniile de câmp ce descriu câmpul creat de o sarcină electrică pozitivă şi una negativă sunt îndreptate de la sarcina pozitivă spre cea negativă.



a ***b***

c

Fig.7.2 Descrierea câmpul electric cu ajutorul liniilor de câmp - câmpul electric generat de: 1. sarcini electrice punctiforme (a, b); 2. de un dipol electric (c).

7.4 Lucrul mecanic în câmp electric

Fie câmpul electric generat de sarcina Q. În acest câmp se deplasează o sarcină q, de acelaşi semn cu sarcina Q, de-a lungul unui drum oarecare, de la punctul *1* la punctul *2*. Lucrul mecanic efectuat de câmp asupra sarcinii q în timpul deplasării la punctul *1* la *2* se calculează cu formula (2.34) cunoscută din mecanică în care forța care produce lucrul mecanic este o forță coulombiană (7.2)

$$L = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \qquad (7.6)$$

unde r_1, r_2 = modulele vectorilor de poziție ai punctelor *1* şi *2*. Relația (7.6) arată că lucrul mecanic nu depinde de drum ceea ce ne indică faptul că un câmp electrostatic este un câmp conservativ.

7.5 Potențialul câmpului electric

Dacă ținem cont de formula (7.3), lucrul mecanic efectuat de câmpul electric asupra sarcinii q care se deplasează de-a lungul unei curbe în acest câmp (7.6) poate fi exprimat ca

$$L = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} q\vec{E} \cdot d\vec{r} = q\int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \qquad (7.7)$$

Diferența de potențial (*între două puncte ale unui câmp electric) = lucrul mecanic efectuat de câmp asupra unității de sarcină electrică de probă q pentru deplasarea acesteia între cele două puncte, adică*

$$\Delta V = V_1 - V_2 = \frac{L}{q} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{7.8}$$

unde am ținut cont de relația (7.7).

Potențialul câmpului electric *într-un punct al acestuia este o mărime fizică scalară definită ca lucrul mecanic necesar deplasării unității de sarcină electrică de probă din acel punct până la infinit.* Astfel, dacă în relația (7.8) presupunem ca punctul *2* este plasat la infinit ($r_2 \to \infty$) și potențialul său este $V_2 \to 0$, rezultă

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{7.9}$$

care exprimă potențialul câmpului electric în punctul *1*. Deoarece punctul *1* este un punct oarecare al câmpului electric putem renunța la scrierea indicelui la potențial și la vectorul de poziție. Relația (7.9) permite aflarea valorii potențialului electric al câmpului generat de sarcina punctiformă Q într-un punct aflat la distanța r de sarcina Q.

Unitatea de măsură pentru potențialul electric este voltul ($1V = 1\frac{J}{C}$).

Să considerăm un câmp electric uniform ($\vec{E} = constant$), spre exemplu, câmpul electric produs între plăcile unui condensator cu fețe plan-paralele; este descris de linii de câmp paralele și echidistante (Fig.7.3).

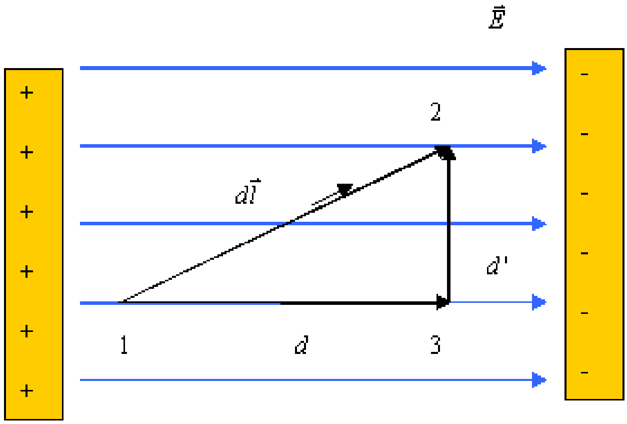


Fig.7.3 Câmpul electric uniform.

Fie două puncte, *1* și *2*, situate în acest câmp electric. Diferența de potențial între punctele *1* și *2* este (conform (7.8))

$$V_2 - V_1 = -\int_1^2 \vec{E}d\vec{l} = -\vec{E}\int_1^2 d\vec{l} \tag{7.10}$$

unde $d\vec{l}$ este elementul infinit mic al curbei de-a lungul căreia se calculează integrala.

Deoarece deplasarea are loc într-un câmp conservativ, pentru calculul diferenței de potențial putem folosi orice drum între punctele *1* şi *2*. Vom alege deplasarea pe traseul *1→3→2* (vezi fig.7.3)

$$V_2 - V_1 = -\vec{E}\int_1^2 d\vec{l} = -\vec{E}\int_1^3 d\vec{l} - \vec{E}\int_3^2 d\vec{l} = -\vec{E}\cdot\vec{d} - \vec{E}\cdot\vec{d}' \tag{7.11}$$

În relația (7.11) ultimul termen se anulează deoarece el reprezintă produsul scalar a doi vectori perpendiculari. Astfel, diferența de potențial dintre punctele *1* şi *2* devine

$$V_2 - V_1 = V_3 - V_1 = -Ed \tag{7.12}$$

Punctele *2* şi *3*, aflate într-un plan perpendicular pe liniile de câmp, au acelaşi potențial, $V_3 = V_2$.

Suprafață echipotențială *- locul geometric al punctelor aflate la acelaşi potențial.*

Dacă în relația (7.12) considerăm punctul *2* (unde se află plasată sarcina ce produce câmpul) un punct oarecare al câmpului electric şi punctul *1* un punct aflat la mare distanță de *2* ($V_2 \to 0$), ea devine

$$V = -Ed \tag{7.13}$$

de unde

$$E = -\frac{V}{d} \tag{7.14}$$

În cazul cel mai general

$$\vec{E} = -\frac{dV}{d\vec{r}} = -gradV = -\Delta V \tag{7.15}$$

7.6 Distribuții de sarcini electrice

Presupunem că studiem acum efectele unei distribuții de sarcini electrice punctiforme Q_i, în care introducem sarcina electrică de probă q. Forța totală exercitată asupra sarcinii q de către sarcinile Q_i se obține însumând forțele exercitate de Q_i asupra q

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{Q_i q}{r_i^3}\cdot\vec{r}_i \qquad (7.16)$$

unde $\vec{r}_i$ = vectorul de poziție al sarcinilor Q_i față de sarcina q.

Distribuția de sarcini electrice punctiforme Q_i va genera un câmp electric. Intensitatea câmpului creat într-un punct oarecare P de distribuția de sarcini electrice punctiforme Q_i este dată de relația

$$\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{Q_i}{r_i^3}\cdot\vec{r}_i = \sum_i \vec{E}_i \qquad (7.17)$$

unde $\vec{r}_i$ = vectorul de poziție al punctului P față de sarcina electrică Q_i. Expresia (7.17) ne arată că intensitatea câmpului electric în punctul P este egală cu suma intensităților câmpurilor electrice datorate fiecărei sarcini q_i în parte.

Potențialul câmpului electric generat de distribuția de sarcini electrice punctiforme în punctul P este dat de relația

$$V_P = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i} \qquad (7.18)$$

unde am folosit relația (7.9). Relația (7.18) arată că potențialul electric în punctul P este egal cu suma potențialelor create de sarcinile Q_i în acel punct.

Să observăm faptul că pentru un observator plasat într-un punct foarte îndepărtat de distribuția de sarcini electrice, sarcinile acestei distribuții nu vor mai fi percepute ca având un caracter discontinuu ci ca şi cum ar constitui o entitate cu o distribuție continuă.

Distribuția continuă de sarcini electrice *– o distribuție de sarcini electrice în care distanțele dintre sarcinile electrice sunt mult mai mici decât distanța de la aceasta la punctul din care este studiată aceasta (spre exemplu, punctul în care trebuie calculată intensitatea câmpului electric creat de distribuția de sarcini studiată).*

Pentru caracterizarea unei distribuții continui de sarcini electrice se folosesc noțiunile:

- ***Densitatea de sarcină electrică,*** ρ, definită ca sarcina electrică a unității de volum. Un element de volum infinit mic, dV, cu densitatea de sarcină electrică ρ este încărcat cu sarcina electrică

$$dQ = \rho\cdot dV \qquad (7.19)$$

Prin element de volum infinit mic se înțelege un element de volum foarte mic la scară macroscopică, dar suficient de mare la scară microscopică, astfel încât să conțină mulți atomi şi molecule. Dimensiunea mică a elementului de volum infinit mic nu se defineşte conform criteriilor matematice ci în raport de respectarea unei cerințe cu conținut fizic. Astfel, spre exemplu, elementul de volum infinit mic din relația (7.19) trebuie să fie atât de mic încât în interiorul său să fie respectată condiția ca densitatea de sarcină electrică să fie constantă.

- ***Densitatea superficială de sarcină***, σ; se utilizează în situația în care sarcina este distribuită pe o suprafață şi se defineşte ca sarcina electrică a unității de suprafață. Sarcina electrică de pe suprafața elementară dS este dată de relația $dQ = \sigma \cdot dS$.

- ***Densitatea liniară de sarcină electrică***, λ, care permite exprimarea sarcinii electrice distribuite pe un obiect filiform de lungime infinit mică *dl* cu ajutorul relației $dQ = \lambda \cdot dl$.

Pentru a evalua câmpul electric creat de o asemenea distribuție continuă de sarcină electrică utilizăm următorul procedeu: divizăm distribuția de sarcină în elemente de volum infinit mici, fiecare conținând sarcina electrică infinit mică *dQ*. Câmpul produs în punctul *P* de sarcina electrică a unui asemenea din elementul va fi (conform (7.4))

$$d\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dQ}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \tag{7.20}$$

unde am considerat că sarcina electrică *dQ* este atât de mică încât poate fi considerată o sarcină electrică punctiformă.

Intensitatea totală în punctul *P* se obține însumând contribuțiile tuturor sarcinilor electrice *dQ*, adică integrând relația (7.20) pe tot volumul considerat

$$\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{dQ}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \tag{7.21}$$

Cu ajutorul relației (7.19) avem

$$\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r})}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} dV \tag{7.22}$$

unde, dacă cunoaştem funcția $Q = Q(\vec{r})$, putem calcula integrala (7.22).

Pentru un câmp electric creat de o distribuție continuă superficială de sarcină electrică, intensitatea câmpului într-un punct *P* aflat la mare distanță față de distribuția de sarcină se va calcula cu relația

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r})}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} dS \tag{7.23}$$

unde σ reprezintă densitatea superficială de sarcină electrică.

Pe baza relației (7.18) putem exprima potențialul câmpului electric generat de distribuția continuă de sarcini electrice în punctul P ca fiind

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{dQ}{r^2}dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r})}{r^2}dV \qquad (7.24)$$

unde dV=elementul de volum infinit mic.

7.7 Legea lui Gauss

O mărime importantă în studiul câmpului electric este *fluxul câmpului electric*. Considerăm un câmp electric uniform de intensitate $\vec{E}$ ce strabate o suprafață plană S, perpendiculară pe liniile de câmp (vectorul normal la suprafață, $\vec{n}$, este paralel cu $\vec{E}$) (fig.7.4).

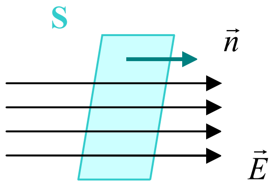


Fig.7.4 Fluxul câmpului electric uniform printr-o suprafață S normală la câmp.

Fluxul câmpului electric *prin suprafața S este dat de relația*

$$\Phi = ES \qquad (7.25)$$

Fie suprafața S este înclinată față de liniile câmpului electric astfel că normala la suprafață face unghiul α cu liniile de câmp (fig.7.5).

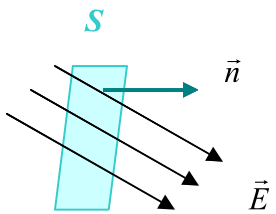


Fig.7.5 Fluxul câmpului electric uniform printr-o suprafață S înclinata față de liniile de câmp.

În acest caz fluxul câmpului electric prin suprafața S vafi

$$\Phi = \vec{E}\cdot\vec{S} = \vec{E}\cdot\vec{n}S = ES\cos\alpha \qquad (7.26)$$

Produsul $S\cos\alpha$ din relația (7.25) reprezintă proiecția suprafeței S în planul normal la liniile câmpului electric. Astfel, utilizarea produsului scalar între vectorii $\vec{E}$ şi $\vec{S}$ asigură respectarea condițiilor definiției fluxului de la cazul precedent.

Fie acum cazul cel mai general, cel al unui câmp electric neuniform şi al unei suprafețe de formă şi orientare oarecare față de liniile câmpului electric (fig.7.6).

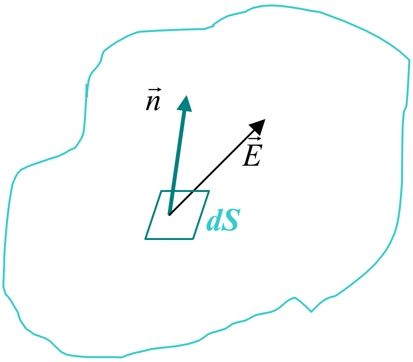


Fig.7.6 Fluxul liniilor câmpului electric printr-o suprafață elementară *dS*.

Pentru a calcula fluxul câmpului electric vom folosi rezultatul obținut pentru cazul precedent. Astfel, împărțim suprafața S în elemente de suprafață infinit mici, $d\vec{S}$. Aria elementului de suprafață trebuie să fie atât de mică încât să fie respectată cerința ca pentru aria respectivă câmpul să poată fi considerat uniform. Vectorul normal la elementul suprafață este $\vec{n}$ (fig.7.6). Dacă prin suprafața elementară $d\vec{S}$ valoarea intensității câmpului electric este $\vec{E} = const.$, atunci fluxul care trece prin această suprafață va fi

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot \vec{n} dS = E \cdot dS \cos\alpha \tag{7.27}$$

Fluxul prin suprafața macroscopică S se obține însumând (integrând) fluxurile prin toate elementele de suprafață infinit mici, $d\vec{S}$, ce alcătuiesc suprafața S

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \tag{7.28}$$

Fie o sarcină electrică punctiformă q plasată în centrul unei sfere. Conform (7.5), modulul intensității câmpului electric pentru orice punct de pe suprafață de raza R a sferei este

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \tag{7.29}$$

iar fluxul câmpului electric prin suprafața sferei va fi

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \int_S E \cdot dS \qquad (7.30)$$

unde am ținut cont că vectorul $\vec{E}$, fiind radial, este perpendicular în fiecare punct la suprafața sferei. Mai departe, ținând cont că $E = constant$ pe suprafața sferei, avem

$$\Phi = \int_S E \cdot dS = E \int_S dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (7.31)$$

Gauss a fost cel care a observat că acest rezultat poate fi generalizat pentru o suprafață închisă de formă oarecare şi a formulat ***legea lui Gauss*** *care afirmă că fluxul liniilor câmpului electric printr-o suprafață închisă de formă oarecare este egal cu raportul dintre sarcina electrică din interiorul suprafeței şi permetivitatea electrică a mediului*

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \qquad (7.32)$$

Importanța legii lui Gauss va fi relevată prin prezentarea unor aplicații în cele ce urmează.

7.8 Conductori în echilibru electrostatic

Material conductor *= un material a cărui proprietatea esențială este conferită de mobilitatea sarcinilor electrice din interiorul său.* În cele ce urmează dorim să analizăm modul în care se distribuie sarcina electrică a unui conductor. În acest sens vom discuta trei afirmații importante privind această problema.

1. Sarcina electrică netă este repartizată în întregime pe suprafața conductorilor şi nu în interiorul lor, $Q=Q_{suprafața}$. Aceasta se datorează faptului că sarcinile electrice plasate eventual în interiorul unui corp se resping, se depărtează la distanța maximă posibilă şi se plasează în final la suprafața acestuia intr-o stare de echilibru electrostatic. După ce sarcinile respective ajung la echilibru, potențialul electric la suprafața obiectului va fi constant.

2. Pentru un conductor aflat în echilibru electrostatic câmpul electric în interiorul conductorului este egal cu zero, iar potențialul este constant, $\vec{E}_{\text{int}\,erior} = 0$ şi $V_{\text{int}\,erior=cons\,\tan t}$. Aceasta se întâmplă deoarece în interiorul corpului nu există sarcini electrice.

3. La suprafața conductorilor în echilibru electrostatic câmpul electric este orientat totdeauna normal la suprafața, iar suprafața conductorilor este o *suprafață echipotențială,* $\vec{E}_{\sup rafata} \, // \vec{S}$. Dacă intensitatea câmpului electric nu ar fi normală la suprafața conductorului, atunci ar exista o componentă tangențială a câmpului electric. Cum sarcina de pe obiect este dispusă pe suprafața conductorului ar rezulta că această sarcină ar fi pusă în mişcare şi conductorul nu ar mai fi în echilibru electrostatic.

Calculăm în cele ce urmează valoarea câmpului electric la suprafața conductorilor cunoscând densitatea superficială de sarcină σ. Se consideră o suprafață foarte mică ΔS a unui cilindru cu o bază aflată în interiorul conductorului iar o alta în afară acestuia. Bazele se aleg suficient de mici pentru ca pe întreaga lor arie câmpul electric să fie normal la suprafața conductorului şi să fie constant. Se aplică legea lui Gauss pentru acest cilindru şi se observă că numai integrala pe aria bazei exterioare a cilindrului, ΔS_{baza}, va aduce o contribuție diferită de zero la fluxul câmpului (în interiorul conductorului $\vec{E} = 0$, iar pe fețele laterale $\vec{E} \perp \vec{n}$). Atunci

$$\Phi = \int_{\Delta S} \vec{E} d\vec{S} = \int_{\Delta S_{baza}} \vec{E} d\vec{S} = \int_{\Delta S_{baza}} E dS = E \int_{\Delta S_{baza}} dS = E \Delta S_{baza} = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (7.33)$$

unde q = sarcina electrica din interiorul elementului de volum (cilindrului) considerat. Deoarece sarcina totală din interiorul suprafeței considerate este $q = \sigma \Delta S_{baza}$, intensitatea câmpului electric la suprafața conductorului va fi

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (7.34)$$

7.9 Dipolul electric

Dipolul electric *este un sistem de două sarcini electrice punctiforme de mărimi egale şi semne contrare, aflate la distanța* $\vec{d}$ *una față de cealaltă (fig.7.7). El este caracterizat cu ajutorul* ***momentului electric dipolar*** *definit prin relația*

$$\vec{p} = q\vec{d} \qquad (7.35)$$

Momentul electric dipolar este un vector orientat dinspre sarcina electrică negativă spre cea pozitivă (invers față de sensul liniilor câmpului electric).

Potențialul creat de dipolul electric la o distanță mult mai mare decât distanța dintre sarcinile sale, $r >> d$, (fig.7.7) este

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_2 \cdot r_1} \qquad (7.36)$$

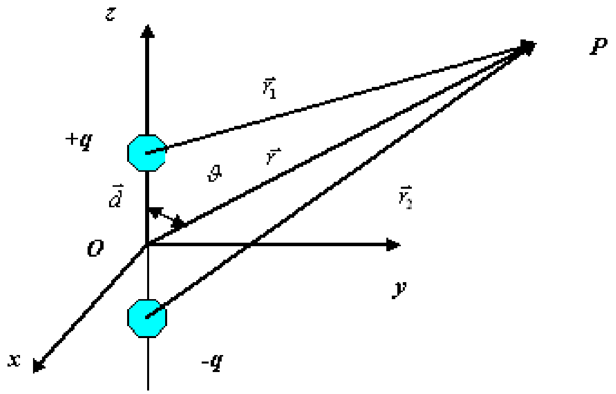


Fig.7.8 Dipol electric.

Deoarece s-a presupus că $r >> l$

$$r_2 - r_1 \cong d\cos\theta$$
$$r_1 \cdot r_2 \cong r^2 \qquad (7.37)$$

iar potențialul devine

$$V = \frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (7.38)$$

Observăm că produsul $\vec{p}\cdot\vec{r} = pr\cos\theta = qdr\cos\theta$, astfel că potențialul electric al dipolului se poate scrie

$$V = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad (7.39)$$

Intensitatea câmpul electric creat de această distribuție de sarcină electrică se poate calcula cu ajutorul relației (7.15) dintre intensitatea şi potențialul câmpului electric

$$\vec{E} = -\nabla V = -\nabla\left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}\right) \qquad (7.40)$$

Observăm că

$$\nabla\left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}\right) = (\vec{p}\cdot\vec{r})\cdot\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) + \frac{1}{r^3}\nabla(\vec{p}\cdot\vec{r}) \qquad (7.41)$$

Deoarece momentul de dipol este un vector constant

$$\nabla(\vec{p}\cdot\vec{r}) = \vec{p}$$
$$\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3\vec{r}}{r^5} \tag{7.42}$$

Aşadar, intensitatea câmpului creat de un dipol electric la o distanţă mult mai mare decât cea dintre sarcinile sale este

$$\vec{E} = -\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^5} \tag{7.43}$$

7.10 Dipolul în câmp electric

Dacă introducem un dipol într-un câmp electrostatic $\vec{E}$ (fig.7.9), asupra fiecărei sarcini electrice a dipolului va acţiona câte o forţă, rezultanta acestora fiind

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q(\vec{E}_+ + \vec{E}_-) \tag{7.44}$$

unde $\vec{E}_+ = \vec{E}(\vec{r}+\vec{d})$ şi $\vec{E}_- = -\vec{E}(\vec{r})$ sunt intensităţile câmpului în punctele în care este plasată sarcina pozitivă, respectiv sarcina negativă. Forţa rezultantă poate fi scrisă deci

$$\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r}+\vec{d}) - q\vec{E}(\vec{r}) \tag{7.45}$$

sau

$$\vec{F} = q\left[E_x(\vec{r}+\vec{d}) - E_x(\vec{r})\right]\vec{i} + q\left[E_y(\vec{r}+\vec{d}) - E_y(\vec{r})\right]\vec{j} + q\left[E_z(\vec{r}+\vec{d}) - E_z(\vec{r})\right]\vec{k} \tag{7.46}$$

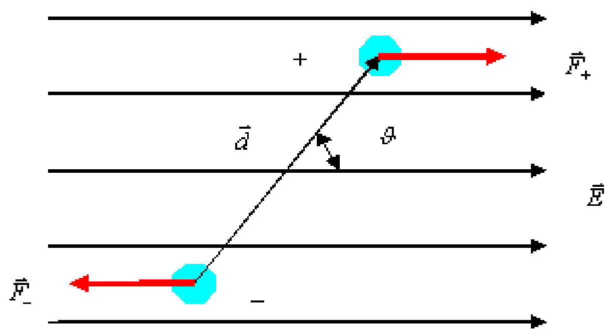


Fig.7.9 Dipolul electric în câmp electrostatic uniform.

Dar

$$E_x(\vec{r}+\vec{d})-E_x(\vec{r})=\frac{\partial E_x}{\partial x}d_x+\frac{\partial E_x}{\partial y}d_y+\frac{\partial E_x}{\partial z}d_z=\vec{d}\nabla E_x$$

$$E_y(\vec{r}+\vec{d})-E_y(\vec{r})=\frac{\partial E_y}{\partial x}d_x+\frac{\partial E_y}{\partial y}d_y+\frac{\partial E_y}{\partial z}d_z=\vec{d}\nabla E_y \qquad (7.47)$$

$$E_z(\vec{r}+\vec{d})-E_z(\vec{r})=\frac{\partial E_z}{\partial x}d_x+\frac{\partial E_z}{\partial y}d_y+\frac{\partial E_z}{\partial z}d_z=\vec{d}\nabla E_z$$

Astfel

$$\vec{F}=q(\vec{d}\nabla E_x)\vec{i}+q(\vec{d}\nabla E_y)\vec{j}+q(\vec{d}\nabla E_z)\vec{k}=q(\vec{d}\nabla\vec{E})=\vec{p}\nabla\vec{E} \qquad (7.48)$$

Dacă dipolul se află într-un câmp electrostatic uniform, rezultanta forței ce acționează asupra sa este nulă (numai în câmpuri electrice neomogene forța rezultantă este diferită de zero). În schimb, în câmpul electric omogen asupra dipolului acționează un cuplu de forțe caracterizat de un moment al forțelor în raport cu centrul dipolului

$$\vec{M}=\vec{l}\times q\vec{E}=\vec{p}\times\vec{E} \qquad (7.49)$$

Când dipolul este orientat de-a lungul liniilor de câmp adică atunci când vectorii $\vec{p}$ şi $\vec{E}$ au aceiaşi direcție cuplul se anulează. Această poziție corespunde energiei potențiale minime a dipolului în câmp electric.

Calculul energiei potențiale a dipolului în câmp electric se face pornind de la faptul că lucrul mecanic efectuat la rotația dipolului cu un unghi $d\theta$ este egal cu variația energiei sale potențiale

$$dE_p=-dL=-Md\theta \qquad (7.50)$$

sau

$$dE_p=-pE\sin\theta\cdot d\theta \qquad (7.51)$$

de unde prin integrare rezultă

$$\Delta E_p=-pE\cos\theta=-\vec{p}\cdot\vec{E} \qquad (7.52)$$

Poziția de zero a energiei potențiale se alege pentru $\theta=\pi/2$, adică atunci când dipolul este perpendicular pe liniile de câmp. În acest caz cele două sarcini ale dipolului se află în acelaşi plan echipotențial.

7.11 Dielectrici în câmp electric

Dielectricii (sau izolatorii) sunt medii în care nu apare curent electric în prezenţa unui câmp electric extern. Cu toate acestea dielectricii îşi modifică starea electrică sub acţiunea câmpurilor electrice. Astfel, proprietatea electrică fundamentală a dielectricilor o constituie apariţia efectului de polarizare sub acţiunea câmpului electric. Aceasta se datorează orientării dipolilor din dielectrici sub acţiunea câmpului electric, fenomen numit ***polarizare***. Există trei mecanisme prin care un dielectric se poate polariza:

a) Polarizarea electronică se datorează electronilor din dielectricii alcătuiţi din moleculele simetrice (sau atomi, ioni simetrici), în care centrul sarcinilor pozitive coincide cu centrul sarcinilor negative. În prezenţa unui câmp electric are loc o deplasare relativă a centrului sarcinilor negative (electronii) faţă de nucleu astfel încât întreg ansamblul atomic sau ionic se manifestă ca un dipol electric. Polarizarea electronică nu depinde de agitaţia termică. Să observăm faptul că în dielectricii cu molecule simetrice (atomi, ioni simetrici) nu există dipoli electrici permanenţi, ei fiind induşi prin acţiunea câmpului electric.

b) Polarizarea de orientare dipolară este prezentă în dielectricii constituiţi din molecule nesimetrice (molecule polare) în care centrul sarcinilor pozitive nu coincide cu centrul sarcinilor negative, deci în care există dipoli electrici permanenţi. Un exemplu în acest sens îl constituie oxidul de carbon în care moleculele posedă un moment dipolar permanent. Din cauza agitaţiei termice dipolii sunt orientaţi haotic. În prezenţa unui câmp electric ei tind să se ordoneze orientându-se în direcţia acestuia.

c) Polarizarea ionică apare prin deplasarea ionilor din poziţiile de echilibru sub acţiunea unui câmp electric. Este caracteristică cristalelor ionice.

Este evident faptul că toate substanţele prezintă polarizare electronică. În plus, unele substanţe prezintă şi polarizare ionică sau polarizare de orientare.

Observăm faptul că mecanismele responsabile pentru realizarea procesului de polarizare electrică acţionează la scară atomică. În cele ce urmeză, vom utiliza denumirea de dipoli elementari pentru dipolii ce apar la nivelul atomilor.

Fie un dielectric ce conţine N dipoli electrici elementari pe unitatea de volum, fiecare având momentul dipolar electric $\vec{p}$. Pentru simplitate vom neglija interacţiunea dintre momentele de dipol precum şi câmpul electric produs de aceştia. Momentul de dipol asociat unui element de volum infinit mic dv este $\vec{p}Ndv$, unde produsul $\vec{p}N$ se numeşte ***densitate de polarizare***, $\vec{P}$.

Datorită alinierii dipolilor elementari în câmp electric, la suprafaţa dipolului produce o acumulare de sarcină electrică. Vom încerca să asociem momentele de dipol cu densitatea de sarcină de la suprafaţa dielectricului.

Pentru aceasta se consideră un element de volum de dielectric, de formă paralelipipedică, cu suprafața bazei *dxdy* şi grosimea *d* (Fig.7.10). Presupunând dielectricul omogen şi izotrop, direcția vectorului de polarizare generat de elementul de volum de dielectric va coincide cu direcția câmpului electric.

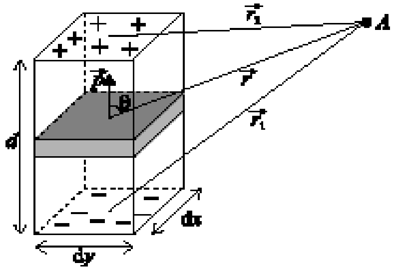


Fig.7.10 Câmp electric creat de un element de volum dintr-un dielectric polarizat.

Fie acum un element de volum volum infinitezimal, $dv = dxdydz$, din paralelipipedul considerat. Conform celor afirmate anterior, acesta va avea un moment dipolar electric

$$\vec{P}dv = \vec{P}dxdydz \qquad (7.53)$$

iar potențialul creat de acesta în punctul *A* (situat suficient de depărtat) este

$$dV = \frac{Pdxdydz\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (7.54)$$

Notând $dS = dxdy$ şi integrând în raport cu *z* se obține

$$V_A = \frac{PdS}{4\pi\varepsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz\cos\theta}{r^2} = \frac{PdS}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{PdS}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \qquad (7.55)$$

Rezultatul obținut este echivalent cu expresia potențialului creat de două sarcini punctiforme egale şi de semn contrar având valoarea *PdS*, cu sarcina +*PdS* situată un capăt al paralelipipedului (la distanța $\vec{r}_1$ față de punctul *A*) şi sarcina -*PdS* situată la celălalt capăt al acestuia (la distanța $\vec{r}_2$ față de punctul *A*). Să observăm că *P* joacă rolul unei densități superficiale de sarcină electrică.

O placă dielectrică introdusă între plăcile unui condensator plan poate fi descompusă în elemente de volum paralelipipedice de tipul prezentat anterior. În consecință, pe suprafața plăcii vor apare două distribuții de sarcini electrice plan paralele, având densitățile electrice superficiale $\sigma_+ = +P$ şi $\sigma_- = -P$.

Dacă $\vec{P}$ nu este perpendicular pe suprafața dielectricului, densitatea de sarcină de pe suprafața acestuia este egală cu componenta normală a densității de polarizare

$$\sigma = P_n = P\cos\theta \tag{7.56}$$

unde θ este unghiul dintre $\vec{P}$ şi normala la suprafață.

7.12. Capacitatea condensatorului

Fie un condensator cu fețe plan paralele (Fig.7.11). Introducem între plăcile condensatorului o placă de material dielectric. Sarcinile electrice induse prin polarizare la suprafața dielectricului produc un câmp electric macroscopic în interiorul materialului. Acesta se numeşte *câmp de depolarizare* deoarece el este de sens contrar câmpului electric exterior. Apariția câmpului de depolarizare produce creşterea capacității condensatorului.

Fie S suprafața armăturilor condensatorului, d distanța dintre plăcile sale şi σ densitatea de sarcină electrică de pe plăci. Aplicând legea lui Gauss pentru una dintre plăcile condensatorului rezultă

$$\begin{aligned} ES &= \frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma - P)S \\ E\varepsilon_0 &= \sigma - P \end{aligned} \tag{7.57}$$

de unde

$$\sigma = E\varepsilon_0 + P \tag{7.58}$$

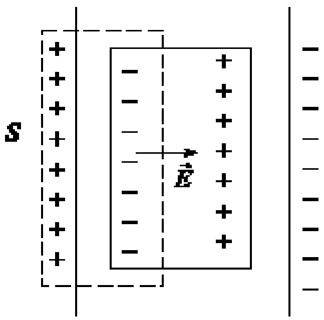


Fig.7.11 Condensator plan cu dielectric între plăci.

Capacitatea condensatorului cu dielectric este

$$C = \frac{q}{U} \tag{7.59}$$

unde q reprezintă sarcina electrică de pe plăcile condensatorului iar U reprezintă diferența de potențial dintre plăci. Tinând cont de relația (7.58) putem scrie mai departe

$$\begin{gathered} C = \frac{\sigma S}{Ed} = \frac{E\varepsilon_0 + P}{E}\frac{S}{d} \\ C = \left(1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E}\right)\frac{\varepsilon_0 S}{d} = \left(1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E}\right)C_o \end{gathered} \tag{7.60}$$

Aici

$$C_o = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \tag{7.61}$$

reprezintă capacitatea condensatorului în absența dielectricului. Factorul ε_r cu care creşte capacitatea condensatorului la introducerea dielectricului între plăci se numeşte ***permitivitatea electrică relativă*** a dielectricului

$$\varepsilon_r = \frac{C}{C_o} = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E} \tag{7.62}$$

Menționăm faptul că ε_r depinde numai de natura dielectricului nu şi de dimensiunile acestuia. Din relație (7.62) se exprimă densitatea de polarizare

$$P = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E \tag{7.63}$$

care poate fi scrisă

$$P = \chi E \tag{7.64}$$

unde

$$\chi = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \tag{7.65}$$

se numeşte ***susceptibilitatea electrică*** a dielectricului.

7.13 Energia câmpului electrostatic

Orice câmp electrostatic posedă o energie deoarece existența sa depinde de realizarea distribuției de sarcini electrice care generează câmpul. Fie cazul simplu al câmpului electrostatic dintre plăcile condensatorului plan. Presupunem că am realizat acest câmp deplasând sarcini electrice infinitezimale dq de pe o placă pe cealaltă a condensatorului. Aceste sarcini electrice trebuie să fie suficient de mici încât la deplasarea lor diferența de potențial dintre plăcile condensatorului să rămână neschimbată. La deplasarea sarcinii electrice infinitezimale *dq* variatia energiei condensatorului va fi

$$dW = dL = Udq \tag{7.66}$$

Energia totală înmagazinată în câmpul electric al condensatorului se va afla însumând toate cantitățile de sarcină electrică *dq* până la încărcarea plăcilor condensatorului cu sarcina *q*. Aceasta se realizează integrând relația (7.66) ceea ce conduce la

$$W = \int_0^q Udq = \int_0^q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C}\int_0^q qdq = \frac{q^2}{2C} \tag{7.67}$$

unde am folosit relația (7.59). Relația (7.67) se mai poate scrie

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} V \tag{7.68}$$

unde am folosit (7.14) şi (7.61), respectiv am ținut cont că $V = Sd$ este volumul dintre plăcile condensatorului. De aici

$$w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \qquad (7.69$$

reprezintă ***densitatea de energie*** a câmpului electrostatic dintre plăcile condensatorului. Relația (7.69) nu mai depinde de parametri geometrici ai condensatorului fiind valabilă pentru orice câmp electrostatic. O demonstrație mai riguroasă a acestei formule este prezentată în anexa 7A.