Teoria circuitelor electrice

– legea lui Ohm → se aplică pe laturi $\boxed{U = R \cdot I}$

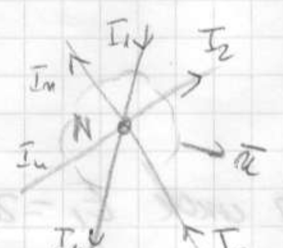
1.) Legea lui Ohm

$\boxed{U_k + E_k = R_k I_k}$; E, U, I

căderi de tensiune

2.) T. KIRCHHOFF

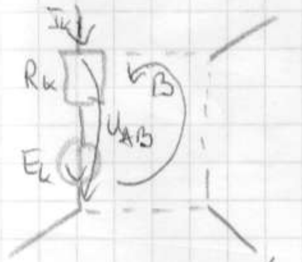
a.) I K I – noduri



$$\boxed{\sum_{m \in N} I_k = 0}$$

$I_1 - I_2 + I_3 - I_h + I_k - I_m = 0$

b.) T.K. II – ochiuri (bucle)



$$\boxed{U_k = 0 \Rightarrow \sum_{k \in B} E_k = \sum_{k \in B} R_k I_k}$$ e valabilă atunci când E, I au același sens cu sensul buclei

3.) Tensiunea între 2 noduri

$$\boxed{U_{AB} = \sum_{A \to B} \left(R_k I_k - E_k \right)}$$

4.) Teorema conservării puterilor (TCP)

$$P_G = P_R$$

$$\boxed{P_G = \sum_{k=1}^{L} E_k I_k} \; \geq \; \boxed{P_R = \sum_{k=1}^{L} R_k I_k^2 > 0}$$

Metoda teoremelor lui KIRCHHOFF

Etape: 1) Analiza Topologică : $N, L, B = L - N + 1$

2.) Stabilirea Arbitrară a sensurilor curenților din fiecare latură a circuitului

3.) Stabilirea arbitrară a sensului de parcurgere a fiecărei bucle

4.) Scrierea sistemului Kirchhoff

$$\begin{cases} (N-1) \text{ ec } TkI \\ B \text{ ec } TkII \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{k \in N} I_k = 0 \leftarrow (N-1) ec \\ \sum_{k \in B} R_k I_k = \sum_{k \in B} E_k \leftarrow (B) \ ec \end{cases}$$

Sistemul lui Kirchhoff are L ecuații cu L necunoscute

Se dă: configurația, R_k, E_k, I_{gk}

Se cere: I, U, P

Probleme

1.) Se dă circuitul din figura de mai jos unde $E_1 = 26$ [V] $E_2 = 9$ [V]. $E_6 = 31$ [V] $R_1 = 1$ [Ω] $R_3 = 2$ [Ω] $R_4 = 4$ [Ω] $R_5 = 3$ [Ω] $R_6 = 2$ [Ω]. Se cere: a.) determinarea curenților din circuit folosind MTK

b.) Tensiunea între nodurile N_1 și N_2 pe mai multe trasee

c.) Verificarea teoremei conservării puterii

$N = 4$

$L = 6$

$B = L - N + 1$

$B = 6 - 4 + 1 = 3$

a.)

$$\begin{cases} (N_1): I_1 - I_4 + I_6 = 0 \\ (N_2): I_5 - I_6 - I_3 = 0 \\ (N_3): I_4 - I_5 - I_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (B_1): R_1 I_1 + R_4 I_4 = E_1 - E_2 \\ (B_2): -R_3 I_3 - R_5 I_5 = -E_2 \\ (B_3): R_4 I_4 + R_5 I_5 + R_6 I_6 = E_6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 - I_4 + I_6 = 0 \\ -I_3 + I_5 - I_6 = 0 \\ -I_2 + I_4 - I_5 = 0 \\ I_1 + 4I_4 = 26 - 9 \\ -2I_3 - 3I_5 = -9 \\ 4I_4 + 3I_5 + 2I_6 = 31 \end{cases}$$

R: $I_1 = 1\,[A]$

$I_2 = 1\,[A]$

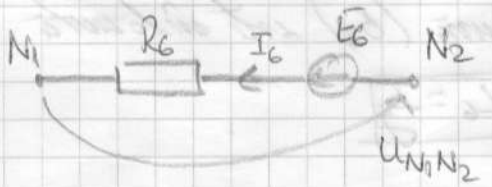
$I_3 = 0\,[A]$

$I_4 = 4\,[A]$

$I_5 = 3\,[A]$

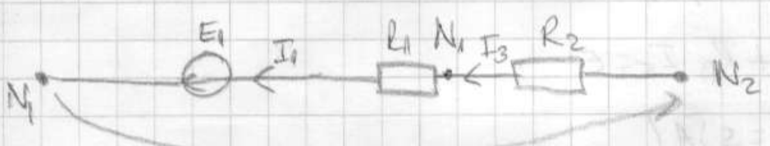
$I_6 = 3\,[A]$

b.)

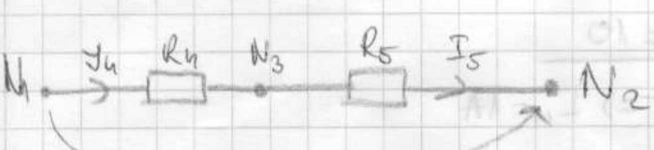


$$U_{AB} = \sum_{A \to B} (R_k \cdot I_k - E_k); \quad U, E, I \text{ au acelaşi sens}$$

$$U_{N_1N_2} = -R_6 \cdot I_6 \overset{(--)}{+} E_6 = -2 \cdot 3 + 31 = 25\,\{V\}$$



$$U_{N_1N_2} = -R_1 I_1 - R_3 I_3 - (-E_1) = -1 - 3 \cdot 0 + 26 = 25\,\{V\}$$



$$U_{N_1N_2} = R_4 I_4 + R_5 I_5 = 25\,\{V\}$$

c)

$P_G = P_R$

$$P_G = \sum_{k=1}^{L} E_k I_k \qquad P_R = \sum_{k=1}^{L} R_k I_k^2$$

$P_G = E_1 I_1 - E_2 I_2 + E_6 I_6 = 110$ {watt}

deoarece E_2 și I_2 au sensuri opuse

$P_R = R_1 I_1^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 + R_6 I_6^2 = 110$

(2) Se dă circuitul din figura de mai jos în care $E = 10\{V\}$, $I_G = 5\{A\}$, $R_1 = 1\{\Omega\}$, $R_2 = 2\{\Omega\}$, $R_3 = 3\{\Omega\}$, $R_4 = 4\{\Omega\}$

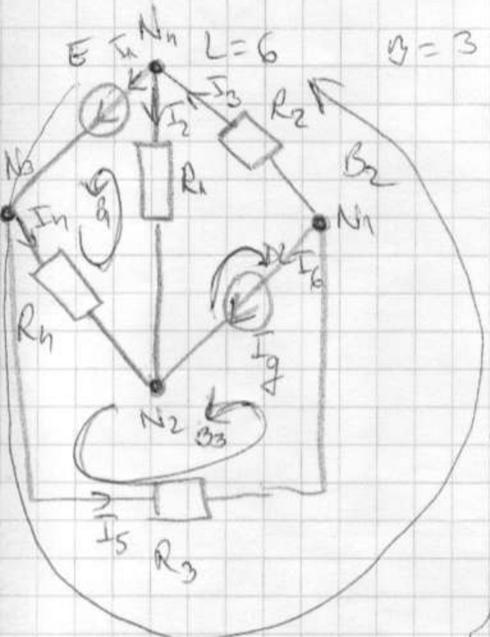
Se cer: a.) Af. curenților din circuit folosind M.T.K

b.) Tensiunea între $U_{N_2 N_1}$

c.) T.C.P

$N = 4$ $\quad B = 6 - 4 + 1$

$L = 6$ $\quad B = 3$



Teoremă: prin sursa ideală de curent poate să treacă o singură buclă. În cazul în care avem circuite care conțin și surse ideale de curent teorema a 2-a a lui Kirchhoff pt bucla care conține această sursă (B_3) este înlocuită cu relația evidentă $\boxed{I_6 = I_g}$

a.)

$$\begin{cases} (N_1): -I_6 - I_3 + I_5 = 0 \\ (N_2): I_6 + I_4 + I_2 = 0 \\ (N_3): I_1 - I_4 - I_5 = 0 \\ (B_1): -R_1 I_2 + R_4 I_4 = E \\ (B_2): R_2 I_3 + R_3 I_5 = E \\ (B_3): I_6 = I_g = 5\{A\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -I_3 + I_5 - \overset{5}{I_6} = 0 \\ I_2 + I_4 = -5 \\ -I_4 - I_5 = 0 \\ -I_2 + 4I_4 = 10 \\ 2I_3 + 3I_5 = 10 \\ I_6 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_2 + I_4 = -5 \\ -I_2 + 4I_4 = 10 \end{cases}$$

$/ \quad 5I_4 = 5 \Rightarrow I_4 = 1A$

$I_2 = -5 - I_4 = -5 - 1 \Rightarrow I_2 = -6A$

$$\begin{cases} -I_3 + I_5 = 5 \quad / \cdot (2) \\ 2I_3 + 3I_5 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2I_3 + 2I_5 = 10 \\ 2I_3 + 3I_5 = 10 \end{cases}$$

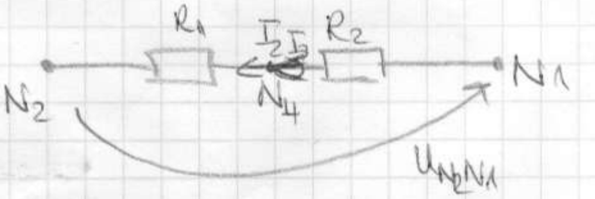
$5I_5 = 20 \Rightarrow I_5 = 4A$

$I_3 = I_5 - 5 \Rightarrow I_3 = -1A$

$I_1 = I_4 + I_5 = 1 + 4 \Rightarrow I_1 = 5A$

$$\begin{cases} I_1 = 5A \\ I_2 = -6A \\ I_3 = -1A \\ I_4 = -1A \\ I_5 = 4A \\ I_6 = 5A \end{cases}$$

b)



$U_{N_2N_1} = -R_1 I_2 - R_2 I_3 = 6 + 2 = 8\ [V]$

c) $P_G = P_R$

$P_G = \sum_{k=1}^{4} E_k \cdot I_k = J_1 E + J_g U_{N_2N_1}$

$P_R = \sum_{k=1}^{4} R_k I_k^2 = R_2 I_3^2 + R_3 \cdot I_5^2 + R_4 I_4^2$

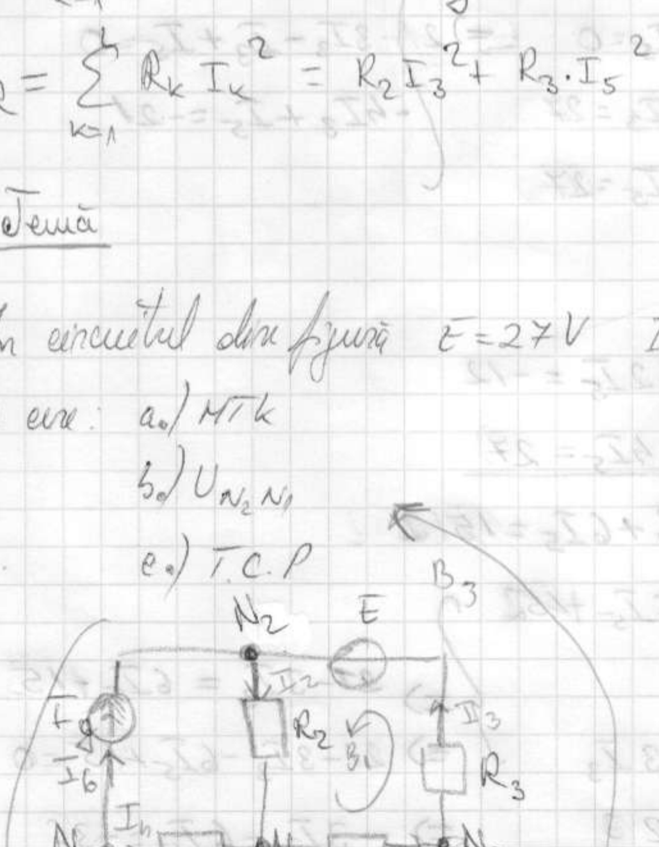
Temă

1. În circuitul din figură $E = 27V$ $I_g = 6A$ $R_1 = R_2 = 1[\Omega]$, $R_3 = R_4 = 2[\Omega]$, $R_5 = 4[\Omega]$

Se cere: a) MTK

b) $U_{N_2N_1}$

c) T.C.P

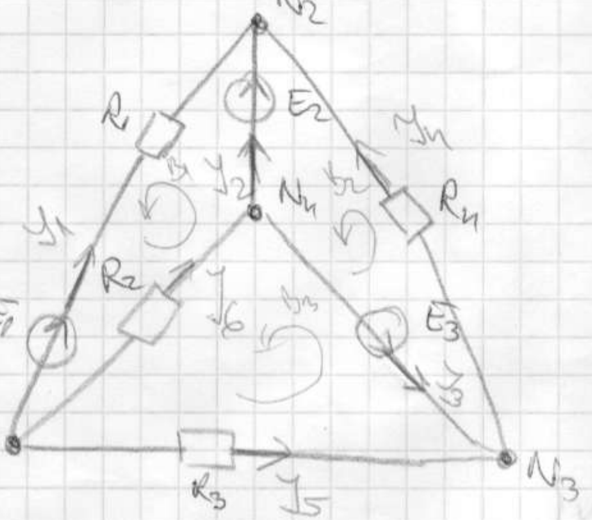


2) În circ din fig $E_1 = 13\,V$, $E_2 = 9V$, $E_3 = 1\,V$, $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 3\Omega$

$R_4 = 4\Omega$. Se cere: a) MTK

b) $U_{N_4N_2}$

c) T.C.P



1. a.) $L=6 \quad N=4 \quad B=3$

$$\begin{cases} (N_1): -I_4 - I_5 - I_6 = 0 \\ (N_2): -I_2 + I_3 + I_6 = 0 \\ (N_3): I_1 - I_3 + I_5 = 0 \\ (B_1): I_1 + I_2 + 2I_3 = 27 \\ (B_2): -I_1 - 2I_4 + 4I_5 = 0 \\ (B_3): I_6 = I_G = 6\,A \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_4 + I_5 = -6 \\ -I_2 + I_3 = -6 \\ I_1 - I_3 + I_5 = 0 \\ I_1 + I_2 + 2I_3 = 27 \\ -I_1 - 2I_4 + 4I_5 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow 21 - 3I_3 - I_3 + I_5 = 0$

$-4I_3 + I_5 = -21$

$$\begin{cases} I_4 + I_5 = -6 \quad /\cdot 2 \\ -I_1 - 2I_4 + 4I_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2I_4 + 2I_5 = -12 \\ -I_1 - 2I_4 + 4I_5 = 0 \end{cases}$$

$/ \quad -I_1 + 6I_5 = -12$

$\Rightarrow I_1 = 6I_5 + 12$

$$\begin{cases} -I_2 + I_3 = -6 \\ I_1 + I_2 + 2I_3 = 27 \end{cases}$$

$/ \quad I_1 + 3I_3 = 21 \quad \Rightarrow \quad I_1 = 21 - 3I_3$

$\Rightarrow 21 - 3I_3 = 6I_5 + 12$

$\Rightarrow 21 - 3I_3 - 6I_5 - 12 = 0$

$\Rightarrow -3I_3 - 6I_5 = -9$

$\Rightarrow I_3 + 2I_5 = 3$

$$\begin{cases} I_3 + 2I_5 = 3 \\ -4I_3 + I_5 = -21 \quad /(-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_3 + 2I_5 = 3 \\ 8I_3 - 2I_5 = 42 \end{cases}$$

$9I_3 = 45 \Rightarrow I_3 = 5A$

$-I_2 + 5 = -6 \Rightarrow I_2 = 11\,A$

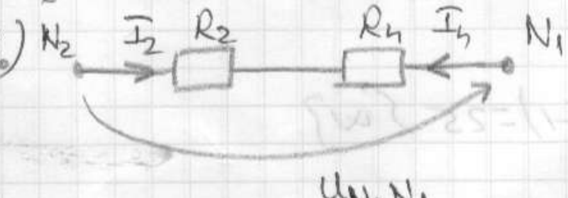
$I_1 + 11 + 10 = 27 \Rightarrow I_1 = 6A$

$6 - 5 + I_5 = 0$ $\qquad$ $I_4 + I_5 = -6 \Rightarrow I_4 = -5\,A$

$1 + I_5 = 0 \Rightarrow I_5 = -1\,A$

$$\begin{cases} I_1 = 6\,A \\ I_2 = 11\,A \\ I_3 = 5\,A \\ I_4 = -5\,A \\ I_5 = -1\,A \\ I_6 = 6\,A \end{cases}$$

b.)



$$U_{N_2N_1} = R_2 I_2 - R_4 I_4 = 11 + 10 = 21\ [V]$$

c.) $P_G = P_R$

$$P_G = \sum_{k=1}^{L} E_k \cdot I_k = E \cdot I_3 + U_{N_2N_1} \cdot I_6 = 27 \cdot 5 + 21 \cdot 6 = 135 + 126 = 261\ [W]$$

$$P_R = \sum_{k=1}^{L} R_k \cdot I_k^2 = R_5 \cdot I_5^2 + R_3 \cdot I_3^2 + R_2 I_2^2 + R_4 I_4^2 + R_1 I_1^2$$
$$= 4 \cdot 1 + 2 \cdot 25 + 121 + 2 \cdot 25 + 36 = 261\ [W]$$

2.) $N = 4 \qquad L = 6 \qquad B = 3$

$$\begin{cases} (N_1): -I_1 - I_5 - I_6 = 0 \\ (N_2): +I_1 + I_2 + I_4 = 0 \\ (N_3): +I_3 - I_4 + I_5 = 0 \\ (B_1): R_2 \cdot I_6 + (-I_1 \cdot R_1) = E_2 - E_1 \\ (B_2): R_4 \cdot I_4 = E_3 - E_2 \\ (B_3): R_3 I_5 - R_2 I_6 = -E_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 + I_5 + I_6 = 0 \\ I_1 + I_2 + I_4 = 0 \\ I_3 - I_4 + I_5 = 0 \\ 2I_6 - I_1 = -4 \\ 4I_4 = -8\,A \Rightarrow I_4 = -2\,A \\ 3I_5 - 2I_6 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 + I_5 + I_6 = 0 \\ I_1 + I_2 = 2A \\ I_3 + I_5 = -2A \\ 2I_6 - I_1 = -4 \\ 3I_5 - 2I_6 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 + I_5 + I_6 = 0 & \mid (-3) \\ 3I_5 - 2I_6 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3I_1 - 3I_5 - 3I_6 = 0 \\ 3I_5 - 2I_6 = -1 \end{cases} +$$

$$\begin{cases} 3I_1 + 5I_6 = 1 \Leftarrow -3I_1 - 5I_6 = -1 \\ -I_1 + 2I_6 = -4 \quad / \cdot 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3I_1 + 5I_6 = 1 \\ -3I_1 + 6I_6 = -12 \end{cases} +$$

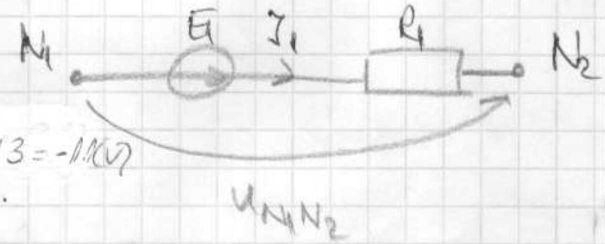
$$11 I_6 = -11 \Rightarrow I_6 = -1\,A$$

$-I_1 = -4 + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow I_1 = 2\,A$

$$\begin{cases} I_1 = 2A \\ I_2 = 0A \\ I_3 = -1A \\ I_4 = -2A \\ I_5 = -1A \\ I_6 = -1A \end{cases}$$

b.) $U_{N_1N_2} =$



$= I_1R_1 - E_1 = 2 - 13 = -11(V)$

c.) $P_G = P_R$

$P_G = \sum_{k=1}^{L} E_k \cdot I_k = 26 + I_2E_2 + I_3E_3 = 26 + (-1) = 25$ [W]

$P_R = \sum_{k=1}^{L} R_k I_k^2 = I_1^2 R_1 + R_2 I_6^2 + R_4 I_4^2 + R_3 I_5^2 = 4 + 2 + 16 + 3 = 25$ [W]

Curs 3

Metoda curenților ciclici (de buclă, independenți)

Def Curenții ciclici (de buclă, independenți) sunt curenți fictivi care circulă de-a lungul fiecărei bucle independente

Etape: 1.) Analiza topologică N, L, B

2.) Stabilirea arbitrară a sensului de parcurgere a curentului pentru fiecare latură a circuitului

3.) Fixarea buclelor independente considerând pe fiecare buclă câte un curent ciclic și stabilind un sens de parcurgere

4.) Scrierea sistemului alcătuit de ec. liniare format din B ec. de forma

$$R_{11}I_1' + R_{12}I_2' + \ldots + R_{1b}I_b' = \sum_{k \in B_1} E_k$$

$$R_{21}I_1' + R_{22}I_2' + \ldots + R_{2b}I_b' = \sum_{k \in B_2} E_k$$

$$\ldots$$

$$R_{b1}I_1' + R_{b2}I_2' + \ldots + R_{bb}I_b' = \sum_{k \in B_b} E_k$$

- $I_1', I_2' \ldots I_b'$ ∈ curenții ciclici
- $R_{kk} > 0$ se numește rezistența proprie a buclei k și este dată de suma tuturor rezistențelor care aparțin buclei k (toate cu semnul +)

• $R_{kj} = R_{jk} \geq 0$: se numește rezistența comună buclei k și buclei j și este dată