Curs 1

Serii de numere reale

Noţiunea de serie este extinderea noţiunii de sumă finită la un şir de numere, deci pentru o mulţime infinită.

Definiţie. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$, un şir de numere reale. Cu termenii acestui şir se formează un nou şir $(S_n)_{n\geq 0}$, unde

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k.$$

Perechea $\Big((x_n)_{n\geq 0}\,, (S_n)_{n\geq 0}\Big)$ se numeşte serie de termen general x_n şi se notează cu

$$\sum_{n\geq 0} x_n \text{ sau } x_0 + x_1 + ... + x_n + ...$$

x_n este termenul de rang n al seriei, iar S_n este suma parţială de rang n a seriei.

Seria $x_{n+1} + x_{n+2} + ...$ este restul de ordinul n al seriei date şi se notează $\sum\limits_{i\geq n+1} x_i$.

Definiţie. Seria $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$ este convergentă (şi asociem notaţia CONV), dacă şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\geq 0}$ este convergent.
O serie care nu este convergentă se numeşte divergentă (şi asociem notaţia DIV).

Dacă seria este convergentă, se defineşte suma ei ca fiind numărul real

$$\lim_{n\to\infty} S_n,$$

care se notează

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n.$$

Deci suma unei serii convergente este

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Exemple

1. Fie $q \in \mathbb{R}$ un număr fixat. Seria

$$\sum_{n\geq 0} q^n = 1 + q + q^2 + ... + q^n + ...$$

se numeşte serie geometrică de raţie q. Şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\geq 0}$ are termenul general

$$S_n = 1 + q + q^2 + ... + q^n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{dacă } q \neq 1 \\ \\ n+1 & \text{dacă } q = 1 \end{cases}$$

Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{dacă } |q| < 1 \\ \infty & \text{dacă } q > 1 \end{cases}$$

iar pentru $q \leq -1$ această limită nu există, rezultă că seria geometrică este CONV dacă şi numai dacă raţia q este subunitară. Suma seriei geometrice convergente este

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \text{ pentru } |q| < 1.$$

2. Seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+n}$ este CONV pentru că

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Avem $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$, deci

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = 1.$$

3. Seria $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^{n+1}$ este DIV, deoarece şirul sumelor parţiale S_n, cu

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}$$

nu are limită.

4. Seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ este DIV deoarece

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \frac{n}{\sqrt[3]{n}} = \sqrt[3]{n^2},$$

deci $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$.

Teorema - Criteriul general de convergenţă al lui Cauchy

Seria $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$ este CONV $\Leftrightarrow \forall\epsilon > 0$, există un rang n_ϵ astfel încât pentru $\forall n > n_\epsilon$ şi $\forall p \in \mathbb{N}$, avem

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + ... + x_{n+p}| < \epsilon.$$

Demonstraţie. Seria $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$este CONV$\Leftrightarrow$ şirul sumelor parţiale (S_n) este convergent. Aceasta are loc $\Leftrightarrow$ (S_n) este şir Cauchy: $\forall\epsilon > 0$, $\exists n_\epsilon$ astfel încât $\forall n > n_\epsilon$ şi $\forall p \in \mathbb{N}$, avem

$$|S_{n+p} - S_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + ... + x_{n+p}| < \epsilon.$$

Observaţie. Fie $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$ o serie CONV, având suma S. Avem

$$x_{n+1} = S_{n+1} - S_n \text{ şi } \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (S_{n+1} - S_n) = S - S = 0$$

Rezultă că dacă seria $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$ este CONV, avem $x_n \to 0$.
Implicaţia inversă nu este adevărată: daca $x_n \to 0 \not\Rightarrow$ că seria este CONV.

Exemplu. Seria **armonică** $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ este DIV, pentru că nu este îndeplinit criteriul lui Cauchy.
Într adevăr, $\exists\ \epsilon_0 = \frac{1}{2}$ astfel încât pentru $p = n$ avem

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + ... + x_{2n}| = \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n}\right| > \frac{n}{2n} = \epsilon_0.$$

Deci $x_n = \frac{1}{n} \to 0$ şi totuşi seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ este DIV.

Definiţie. O serie $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$ este absolut convergentă, dacă seria $\sum\limits_{n\geq 0} |x_n|$ este CONV.
Definiţie. O serie CONV care nu este absolut convergentă se numeşte serie semiconvergentă.

Teorema. O serie absolut convergentă este CONV.
Demonstraţie. Folosim inegalitatea

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + ... + x_{n+p}| \leq |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + ... + |x_{n+p}|$$

şi criteriul general de convergenţă al lui Cauchy pentru seria $\sum\limits_{n\geq 0} |x_n|$.

Teorema-Criteriul Abel-Dirichlet.

Dacă seria $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ are şirul sumelor parţiale mărginit şi dacă $(a_n)_{n\geq 0}$ este un şir cu termeni pozitivi, monoton descrescător, convergent la zero, atunci seria $\sum\limits_{n\geq 0} a_n u_n$ este CONV.
Demonstraţie. Fie $\sigma_n = a_0u_0 + a_1u_1 + ... + a_nu_n$.
Vom demonstra că şirul sumelor parţiale (σ_n) este şir Cauchy. Avem

$$\sigma_{n+p} - \sigma_n = a_{n+1}u_{n+1} + a_{n+2}u_{n+2} + ... + a_{n+p}u_{n+p} =$$

$$= a_{n+1}(S_{n+1} - S_n) + a_{n+2}(S_{n+2} - S_{n+1}) + ... + a_{n+p}(S_{n+p} - S_{n+p-1}) =$$

$$= -a_{n+1}S_n + S_{n+1}(a_{n+1} - a_{n+2}) + ... + S_{n+p-1}(a_{n+p-1} - a_{n+p}) + a_{n+p}S_{n+p}.$$

Deoarece şirul (S_n) este mărginit, $\exists M > 0$ astfel încât $|S_n| \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Cum şirul (a_n) este descrescător, avem

$$|\sigma_{n+p} - \sigma_n| \leq |-a_{n+1}|\, M + M\,(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+2} - a_{n+3} + ... + a_{n+p-1} - a_{n+p} + a_{n+p}) =$$

$$= 2M \cdot a_{n+1}.$$

Deci $|\sigma_{n+p} - \sigma_n| \leq 2M \cdot a_{n+1},\ \forall n, p \in \mathbb{N}$, unde $a_n \to 0$. Rezultă că (σ_n) este şir Cauchy, deci convergent. Rezultă că seria $\sum\limits_{n\geq 0} a_nu_n$ este CONV.
Exemplu. Să se stabilească natura seriei

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(a\cdot n)}{\sqrt{n}},\ a \neq 2k\pi.$$

Soluţie. Aplicăm criteriul Abel-Dirichlet. Avem $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ monoton descrescător şi $u_n = \cos(a \cdot n)$. Calculăm

$$S_n = \cos a + \cos(2a) + ... + \cos(na) = \frac{\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}} \cdot \cos\frac{(n+1)a}{2},$$

deci $|S_n| < \frac{1}{|\sin\frac{a}{2}|}$. Rezultă că seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\cos(a\cdot n)}{\sqrt{n}}$ este CONV.

Serii alternante

Definiţie. Seria $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n a_n$, unde $a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ este o serie alternantă.

Teorema - Criteriul lui Leibniz

Dacă şirul (a_n) cu termeni pozitivi este descrescător, convergent la zero, atunci seria $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ este CONV.

Demonstraţie. Aplicăm criteriul Abel-Dirichlet. Avem

$$S_n = 1 - 1 + ... + (-1)^n \ \Rightarrow |S_n| \leq 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

şi $a_n \to 0$ monoton descrescător. Rezultă că $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ este CONV.

Exemplu. Seria armonică alternantă $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$ este CONV.

Curs 2

SERII CU TERMENI POZITIVI

Seria $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$,unde $u_n > 0,\ \forall n \in \mathbf{N}$, este o serie cu termeni pozitivi. Această serie are şirul sumelor parţiale strict crescător, deci acesta este convergent dacă şi numai dacă este şi marginit. Menţionăm că natura unei serii nu depinde de un număr finit de termeni ai săi. De asemenea, seriile $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ şi $\sum\limits_{n\geq 0} \alpha \cdot u_n,\ \alpha \in \mathbf{R}$ au aceeaşi natură.

Dăm în continuare criterii de convergenţă pentru serii cu termeni pozitivi.

Criteriul 1 de comparaţie

Fie $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ şi $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ două serii cu termeni pozitivi. Dacă există $n_0 \in \mathbf{N}$ astfel încât $u_n \leq v_n$ pentru $\forall n \geq n_)$, atunci:

1. dacă seria $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ este CONV, atunci şi seria $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ este CONV.
2. dacă seria $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ este DIV, atunci şi seria $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ este DIV.

Demonstraţie. Deoarece un număr finit de termeni ai unei serii nu influenţează natura ei, vom demonstra acest criteriu pentru cazul $n_n \leq v_n,\ \forall n \in \mathbf{N}$.
Fie $U_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ şi $V_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ sumele parţiale de ordin n ale celor două serii.

1. Din $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ CONV $\Rightarrow (V_n)$ mărginit $\underset{u_n \leq v_n}{\Rightarrow}$ (U_n) mărginit $\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} u_n$ CONV.
2. Din $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ DIV $\Rightarrow (U_n)$ nemărginit $\underset{u_n \leq v_n}{\Rightarrow}$ (V_n) nemărginit $\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} v_n$ DIV.

Exemplu. Să se studieze natura seriei

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Soluţie. Pentru că $\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ şi seria $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ este CONV, fiind serie geometrică cu raţie subunitară, rezultă că seria studiată este CONV.

Criteriul al doilea de comparaţie

Fie $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ şi $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ două serii cu termeni pozitivi. Dacă există $n_0 \in \mathbf{N}$ astfel încât

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \text{ pentru } \forall n \geq n_0,$$

atunci:

1. dacă $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ este CONV $\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} u_n$ este CONV.
2. dacă $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ este DIV $\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} v_n$ este DIV.

Demonstraţie. Din

$$\begin{array}{c} \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \leq \frac{v_{n_0+1}}{v_{n_0}} \\ \frac{u_{n_0+2}}{u_{n_0+1}} \leq \frac{v_{n_0+2}}{v_{n_0+1}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \frac{v_n}{v_{n-1}} \end{array}$$

prin înmulţire termen cu termen, obţinem

$$\frac{u_n}{u_{n_0}} \leq \frac{v_n}{v_{n_0}}, \ \forall n \geq n_0.$$

Notând $\frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} = k$, rezultă că avem $u_n \leq k \cdot v_n$ şi în continuare se aplică criteriul 1 de comparaţie.

Criteriul al treilea de comparaţie

$\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ şi $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ două serii cu termeni pozitivi. Dacă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \in (0, \infty,$$

atunci cele două serii au aceeaşi natură.

Demonstraţie. Fie $\epsilon > 0$ astfel încât $l - \epsilon > 0$. Rezultă că $\exists n_\epsilon \in \mathbf{N}$ astfel încât $\forall n > n_\epsilon$ să avem

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - l\right| < \epsilon \ \Leftrightarrow \ l - \epsilon < \frac{u_n}{v_n} < l + \epsilon.$$

Prin înmulţire cu $v_n > 0$, rezultă că

$$(l - \epsilon) \cdot v_n < u_n < (l + \epsilon) \cdot v_n, \text{ pentru } \forall n > n_\epsilon$$

şi în continuare se aplică criteriul 1 de comparaţie.

Exemplu. Studiaţi natura seriei

$$\sum_{n\geq 0} \sin \frac{a}{2^n}, \ a \in (0, \infty).$$

Alegem $v_n = \frac{1}{2^n}$. Avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{a}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = a \in (0, \infty).$$

Cum seria $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}$ este CONV, rezultă ca şi seria studiată este CONV.

Criteriul rădăcinii - Cauchy

Fie $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ o serie cu termeni pozitivi.
1. Dacă $\exists\ n_0 \in \mathbf{N}$ şi $\exists\ q < 1$ astfel încât $\sqrt[n]{u_n} \leq q$ pentru $\forall n \geq n_0$, atunci seria $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ este CONV.
2. Dacă $\exists\ n_0 \in \mathbf{N}$ astfel încât $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$, pentru $\forall n \geq n_0$, atunci seria $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ este DIV.

Demonstraţie. 1. Avem $u_n \leq q^n$, $\forall\ n \geq n_0$, iar seria $\sum\limits_{n\geq 0} q^n$ este CONV, fiind serie geometrică cu raţie subunitară. Aplcând criteriul 1 de comparaţie, rezultă că seria $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ este CONV.

2. Din $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$ pentru $\forall\ n \geq n_0$, rezultă că $u_n \geq 1$, $\forall\ n \geq n_0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$. Rezultă că seria $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ este DIV.

Corolar. Se calculează $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.

Dacă $l < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} u_n$ este CONV.

Dacă $l > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} u_n$ este DIV.

Dacă $l = 1$, criteriul este ineficient.

Exemplu. Să se studieze natura seriei $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{n!}{n^n}$.
Avem
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{1}{e} < 1.$$
deci seria dată este CONV.

Criteriul raportului - D′Alambert.

Fie $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ o serie cu termeni pozitivi.

1. Dacă $\exists\ n_0 \in \mathbf{N}$ şi $\exists\ l < 1$ astfel încât $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq l$, $\forall\ n \geq n_0$, atunci seria $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ este CONV.

2. Dacă $\exists\ n_0 \in \mathbf{N}$ astfel încât $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, $\forall\ n \geq n_0$, atunci seria $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ este DIV.

Demonstraţie. 1. Avem
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{l^{n+1}}{l^n},\ \forall\ n \geq n_0$$
unde $\sum\limits_{n\geq 0} l^n$ este CONV, fiind serie geometrică cu raţie subunutară. Din criteriul al doilea de comparaţie, rezultă că seria $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ este CONV.

2. Dacă $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, $\forall\ n \geq n_0$, atunci şirul (u_n) este crescător şi $0 < u_{n_0} \leq u_n$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$. Rezultă că seria $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ este DIV.

Corolar. Se calculează $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$.

1. Dacă $l < 1 \;\Rightarrow\; \sum\limits_{n\geq 0} u_n$ este CONV.
2. Dacă $l > 1 \;\Rightarrow\; \sum\limits_{n\geq 0} u_n$ este DIV.
3. Dacă $l = 1$, criteriul este ineficient.

Exemplu. Studiaţi natura seriei $\sum\limits_{n\geq 1} n \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}$.

Avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+2}}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2.}$$

Rezultă că seria este CONV.

Observaţie. Atunci când criteriul raportului este inficient şi criteriul rădăcinii este ineficient.

Dacă criteriul raportului este inficient, este util să se folosească criteriul lui Raabe-Duhamel. Dăm numai corolarul acestui criteriu.

Corolar Raabe - Duhamel. Se calculează

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = l.$$

1. Dacă $l > 1 \;\Rightarrow\; \sum\limits_{n\geq 0} u_n$ este CONV.
2. Dacă $l < 1 \;\Rightarrow\; \sum\limits_{n\geq 0} u_n$ este DIV.
3. Dacă $l = 1$, criteriul este inficient.

Exemplu. Să se studieze natura seriei

$$\sum_{n\geq 0} \frac{4^n \, (n!)^2}{(2n)!}.$$

Avem

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{2n+1}{2n+2} - 1 \right) = -\frac{1}{2}.$$

Rezultă că seria este DIV.

Dăm fără demonstraţie

Criteriul de condensare al lui Cauchy.

Dacă (u_n) este un şir cu termeni pozitivi descrescător, atunci seriile

$$\sum_{n\geq 0} u_n \quad \text{şi} \quad \sum_{n\geq 0} 2^n \cdot u_{2^n}$$

au aceeaşi natură.

Aplicaţie. Să se determine natura **seriei armonice generalizate**

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

Soluţie. Dacă $\alpha \leq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \neq 0$, deci seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$ este DIV.

Dacă $\alpha > 0$, aplicăm criteriul condensării: seria studiată are aceeaşi natură cu seria

$$\sum_{n\geq 1} 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^{\alpha}} = \sum_{n\geq 1} \left[2^{(1-\alpha)}\right]^n,$$

care este serie geometrică cu raţia $2^{1-\alpha}$, deci CONV pentru $2^{1-\alpha} < 1$ şi DIV pentru $2^{1-\alpha} \geq 1$. Reţinem natura seriei armonice generalizate:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \text{este} \quad \begin{cases} CONV, & \text{dacă } \alpha > 1 \\ DIV, & \text{dacă } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Exemplu. Să se studieze natura seriei

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n \cdot \ln^3 n}.$$

Şirul cu termenul general $u_n = \frac{1}{n\cdot \ln^3 n}$, $n \geq 2$ este şir de numere reale pozitive, descrescător. Aplicăm criteriul condensării şi studiem natura seriei

$$\sum_{n\geq 2} 2^n \cdot \frac{1}{2^n (\ln 2^n)^3} = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^3 (\ln 2)^3} = \frac{1}{(\ln 2)^3} \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^3}$$

care este CONV conform aplicaţiei precedente.

Observaţii.

1. Într-o serie cu termeni pozitivi termenii se pot asocia, fără a fi afectată natura sau suma ei, în caz de convergenţă. Dacă seria nu este cu termeni pozitivi, termenii nu se pot asocia.

Exemplu. Seria $1 - 1 + 1 - 1 + ... + (-1)^n + ...$ este DIV pentru că şirul

$$(S_n), \; S_n = 1 - 1 + 1 - 1 + ... + (-1)^n$$

nu are limită. În această serie, dacă se asociază termenii succesivi, rezultă seria $0+0+...+...$ care este CONV şi are suma egală cu zero. Putem asocia termenii şi în felul următor

$$1 + (-1+1) + (-1+1) + ... \;\Rightarrow\; 1 + 0 + 0 + ...$$

care este CONV şi are suma egală cu unu. Deci asociind termenii, se ajunge la rezultate false.

2. Dacă într-o serie se schimbă poziţia unui număr finit de termeni, nu se modifică natura sau suma ei, în caz de convergenţă. Proprietatea nu este adevărată dacă se schimbă poziţia unui număr infinit de termeni.

Exemplu. Seria armonică alternantă este CONV şi are suma $\ln 2$:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} + ... = \ln 2.$$

Modificăm ordinea termenilo astfel: fiecare termen negativ îl punem după doi termeni pozitivi, iar ordinea termenilor pozitivi nu o schimbăm. Rezultă seria

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + ... = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} \right).$$

Calculăm

$$S_n = \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + ... + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right).$$

În continuare vom forma şirul care are ca limită constanta lui Euler, c:

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n \ \rightarrow c$$

Avem

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - ... - \frac{1}{4n} - \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{4n} - \ln 4n + \ln 4n - \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2n} - \ln 2n + \ln 2n\right) -$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n + \ln n\right) =$$

$$= x_{4n} + \ln 4n - \frac{1}{2} \cdot (x_{2n} + \ln 2n) - \frac{1}{2} \cdot (x_n + \ln n) =$$

$$= x_{4n} - \frac{1}{2} \cdot x_{2n} - \frac{1}{2} \cdot x_n + \ln \frac{4n}{n\sqrt{2}}.$$

Rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} S_n = c - \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}c + \ln 2\sqrt{2} = \ln 2\sqrt{2}.$$

Deci schimbând ordinea unui număr infinit de termeni, s-a modificat suma ei. Condiţiile în care putem face acest lucru sunt date de

Teorema. Dacă într-o serie absolut convergentă se schimbă ordinea termenilor, se obţine tot o serie absolut canvergentă, cu aceeaşi sumă ca şi seria iniţială.

Seria armonică alternantă, nu este absolut convergentă, deci în exemplul precedent nu este îndeplinită ipoteza acestei teoreme.

Curs 3

Mulţimi

Mulţimile se notează cu litere mari, iar elementele mulţimilor cu litere mici. Vom nota cu litere mari rotunde familiile de mulţimi. Dacă a este un element al mulţimii A, scriem $a \in A$. Dacă b nu este în A, scriem $b \notin A$. Mulţimea care nu are nici un element se numeşte mulţme vidă şi se notează cu $\emptyset$. O mulţime poate fi dată prin enumerarea elementelor sale, $A = \{a, b, c\}$ sau indicând o proprietate P a elementelor sale $A = \{x \,|P(x)\}$.

Relaţia de incluziune

Fie A şi B două mulţimi.
Definiţie. Mulţimea A este inclusă în mulţimea B şi notăm $A \subset B$, dacă oricare element al mulţimii A este şi în B. Deci

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \text{ avem } x \in B.$$

Dacă $A \subset B$, spunem că A este submulţime a lui B. Mulţimea vidă este submulţime a oricărei mulţimi.
Fiind dată o mulţime X, vom nota cu $P(X)$ mulţimea submulţimilor lui X sau mulţimea părţilor lui X. Este evident că $\emptyset \in P(X)$ şi $X \in P(X)$.

Exemplul 1. Fie $A = \{a, b\}$. Mulţimea părţilor lui A este

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

Exemplul 2. Dacă X este o mulţime cu n elemente, atunci $P(X)$ are $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$ elemente.
Egalitatea mulţimilor.

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ şi } B \subset A.$$

OPERAŢII CU MULŢIMI

Fie A, B două mulţimi, $I \neq \emptyset$ o mulţime de indici şi $\{A_i \mid i \in I\}$ o familie de mulţimi.
Reuniunea. Reuniunea a doua mulţimi:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}.$$

Reuniunea unei familii de mulţimi

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists\, i \in I \text{ astfel încât } x \in A_i\}.$$

Intersecţia. Intersecţia a două mulţimi:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \in B\}$$

Dacă A şi B nu au nici un element comun, ele se numesc disjuncte şi $A \cap B = \emptyset$. Intersecţia unei familii de mulţimi

$$\underset{i\in I}{\cap} A_i = \{x \mid x \in A_i,\ \forall i \in I\}.$$

Diferenţa. Fie A şi B submulţimi ale unei mulţimi nevide X.

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \notin B\}.$$

Diferenţa $X - A$ se numeşte **complementara lui A în raport cu X** şi se notează $C_X(A)$ sau numai $C(A)$, dacă mulţimea X se subânţelege:

$$C_X(A) = \{x \mid x \in X \text{ şi } x \notin A\}.$$

Avem

$$C_X(\emptyset) = X - \emptyset = X,\ C_X(X) = X - X = \emptyset,\ C_X(C_X(X)) = C_X(\emptyset) = X$$

$$A \cup C_X(A) = X,\ A \cap C_X(A) = \emptyset$$

Dacă $A_i \subset X, \forall i \in I$, atunci au loc **Legile lui De Morgan:**

$$C\left(\underset{i\in I}{\cup} A_i\right) = \underset{i\in I}{\cap} C(A_i)$$

$$C\left(\underset{i\in I}{\cap} A_i\right) = \underset{i\in I}{\cup} C(A_i)$$

Produs cartezian. Produsul cartezian al mulţimilor A şi B, notat $A \times B$, este mulţimea formată din perechile ordonate (x, y) cu proprietatea $x \in A$ şi $y \in B$, deci

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ şi } x \in B\}.$$

Dacă $A \neq B$, atunci $A \times B \neq B \times A$.
Dacă $A = B$, atunci

$$A \times A = A^2 = \{(x, y) \mid x \in A \text{ şi } y \in A\}.$$

În mod analog se poate defini produsul cartezian a n mulţimi:

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n\}$$

Dacă $A_1 = A_2 = ... = A_n = A$, atunci avem

$$A^n = \left\{(a_1, a_2, ..., a_n) \,\middle|\, a_i \in A_i,\ i = \overline{1, n}\right\}$$

MARGINE SUPERIOARĂ. MARGINE INFERIOARĂ

Fie A o mulţime mărginită, nevidă de numere reale.

Definiţie. Un element $y \in \mathbb{R}$ este un **majorant** al mulţimii A, dacă pentru $\forall x \in A$ avem $x \leq y$.
Definiţie. Un element $y \in \mathbb{R}$ este un **minorant** al mulţimii A, dacă pentru $\forall x \in A$ avem $y \leq x$.
Definiţie. Cel mai mic majorant al mulţimii A se numeşte **margine superioară**, sau **supremum** al mulţimii A. Notaţie: $\sup(A)$.
Definiţie. Cel mai mare minorant al mulţimii A se numeşte **margine inferioară**, sau **infimum** al mulţimii A. Notaţie: $\inf(A)$.

Dacă mulţimea A nu este mărginită superior, atunci $\sup(A) = \infty$, iar dacă nu este mărginită inferior, atunci $\inf(A) = -\infty$. Dacă $\inf(A) \in A$ atunci infimum de A se mai numeşte minimul lui A. Dacă $\sup(A) \in A$, atunci supremum de A se numeşte maximul lui A.

Exemplu. Să se găsească marginile mulţimii

$$A = \left\{ x_n \in \mathbb{R} \,\middle|\, x_n = \frac{n+1}{n+2},\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Avem $x_{n+1} > x_n$ şi $x_n \to 1$, crescător, deci $x_0 = \frac{1}{2} < x_1 < ... < x_n < ....$ Rezultă că $\inf(A) = \min(A) = \frac{1}{2}$ şi $\sup(A) = 1$.

RELAŢII. FUNCŢII

Definiţie. Fie A şi B două mulţimi. O submulţime R a produsului cartezian $A \times B$ se numeşte relaţie binară de la A la B. Notaţie:(A, B, R).

Spunem că x este în relaţia R cu y, dacă $(x, y) \in R$ şi folosim notaţia xRy.

Mulţimea $D_R = \{x \in A \,|\, \exists y \in B \text{ astfel încât } (x, y) \in R\}$ se numeşte mulţimea se definiţie (domeniul) relaţiei R.

Mulţimea $C_R = \{y \in B \,|\, \exists x \in A \text{ astfel încât} (x, y) \in R\}$ se numeşte mulţimea valorilor (codomeniul) relaţiei R.
O relaţie R este **univocă** dacă $\forall x \in D_R$, există un singur $y \in C_R$, astfel încât să avem xRy.
Relaţia R este **peste tot definită**, dacă $D_R = A$.

Definiţie. O relaţie f de la A la B, univocă şi peste tot definită se numeşte **funcţie** sau **aplicaţie** definită pe A cu valori în B.
Notaţie: $f : A \to B$.

Graficul funcţiei $f : A \to B$ este mulţimea

$$G_f = \{(x, f(x)) \,| x \in A\} \subset A \times B.$$

Fie $A_1 \subset A,\ B_1 \subset B$ nevide.
Imaginea mulţimii A_1 prin funcţia f este mulţimea

$$f\,(A_1) = \{f(x) \,|\, x \in A_1\} \subset B.$$

Contraimaginea mulţimii B_1 este mulţimea

$$f^{\leftarrow}\,(B_1) = \{x \in A \,|\, f(x) \in B_1\} \subset A.$$

Funcţia $f : A \to A,\ f(x) = x,\ \forall x \in A$ se numeşte funcţie identică şi se notează 1_A.

Mulţimea funcţiilor definite pe A cu valori în B se notează B^A, deci $B^A = \{f \,| f : A \to B\}$.

Definiţie. Fie A, B, C trei mulţimi şi $f : A \to B,\ g : B \to C$ două funcţii. Funcţia $h : A \to C$ definită prin egalitatea $h(x) = g(f(x)),\ \forall x \in A$, se numeşte compunerea lui g cu f şi se notează $h = g \circ f$.

Funcţia $f : A \to B$ este **injecţie**, dacă este îndeplinită una dintre condiţiile echivalente:

1. $\forall x_1,\ x_2 \in A,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

2. $\forall x_1,\ x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

3. Ecuaţia $f(x) = y$, cu necunoscuta x are cel mult o soluţie în A, pentru orice $y \in B$.

Funcţia $f : A \to B$ este o **surjecţie** dacă este îndeplinită una dintre condiţiile echivalente:

1. $\forall y \in B, \ \exists\, x \in A$ astfel încât $f(x) = y$.
2. $f(A) = B$
3. Ecuaţia $f(x) = y$, cu necunoscuta x are cel puţin o soluţie în A, pentru orice $y \in B$.

Funcţia $f : A \to B$ este **bijecţie** dacă este injecţie şi surjecţie. În acest caz, ea admite o inversă $f^{-1} : B \to A$, care satisface egalităţile: $f \circ f^{-1} = 1_B$ şi $f^{-1} \circ f = 1_A$.

Teoremă. Fie $f : A \to B$ şi $g : B \to C$ două funcţii. Atunci

1. Dacă f şi g sunt injective, atunci $g \circ f$ este injectivă.
2. Dacă f şi g sunt surjective, atunci $g \circ f$ este surjectivă.
3. Dacă f şi g sunt bijective, atunci $g \circ f$ este bijectivă şi $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Teorema următoare conţine principalele proprietăţi ale imaginii şi contraimaginii unei mulţimi.

Teoremă. Fie $f : A \to B$ o funcţie. Considerăm mulţimile $A_1, A_2 \subset A, \ B_1, B_2 \subset B$ şi $A_i \subset A, \ B_i \subset B, \ i \in I$. Avem:

1. $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$
2. $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{\leftarrow}(B_1) \subset f^{\leftarrow}(B_2)$
3. $f\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right) = \bigcup\limits_{i\in I} f\left(A_i\right)$
4. $f\left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap\limits_{i\in I} f\left(A_i\right).$
5. $f^{\leftarrow}\left(\bigcup\limits_{i\in I} B_i\right) = \bigcup\limits_{i\in I} f^{\leftarrow}\left(B_i\right)$
6. $f^{\leftarrow}\left(\bigcap\limits_{i\in I} B_i\right) = \bigcap\limits_{i\in I} f^{\leftarrow}\left(B_i\right)$
7. $A_1 \subset f^{\leftarrow}\left(f(A_1)\right)$
8. $B_1 \supset f\left(f^{\leftarrow}(B_1)\right).$

Demonstraţie.
1. Fie $y \in f(A_1) \Rightarrow \exists x \in A_1$ astfel încât $f(x) = y \Rightarrow \exists x \in A_1 \subset A_2$ astfel încât $f(x) = y$ $\Rightarrow y \in f(A_2) \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$.
2. Fie $x \in f^{\leftarrow}(B_1) \Rightarrow f(x) \in B_1 \subset B_2 \Rightarrow x \in f^{\leftarrow}(B_2) \Rightarrow f^{\leftarrow}(B_1) \subset f^{\leftarrow}(B_2)$.
4. Avem $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \subset A_i, \ \forall i \in I$. Pe baza proprietăţii 1, rezultă că

$$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset f(A_i), \ \forall i \in I \Rightarrow f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i).$$

8. Fie $y \in f\left(f^{\leftarrow}(B_1)\right) \Rightarrow \exists x \in f^{\leftarrow}(B_1)$ astfel încât $f(x) = y$. Deoarece $x \in f^{\leftarrow}(B_1) \Rightarrow f(x) \in B_1$, deci $y \in B_1$, de unde rezultă incluziunea dorită.

SPAŢII METRICE

Definiţie. Se numeşte **metrică** sau **distanţă** pe mulţimea X, o aplicaţie $d : X \times X \to \mathbb{R}$ care satisface condiţiile:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

2. $d(x, y) = d(y, x), \ \forall x, y \in X$

3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \ \forall x, y, z \in X$.

Condiţia 3 este "inegalitatea triunghiului".
Dacă în 3. punem $x = y \Rightarrow d(x, z) \geq 0, \forall x, z \in X$, deci metrica ia valori nenegative.
Prin **spaţiu metric** se înţelege mulţimea X împreună cu o metrică d definită pe X şi se notează (X, d).
Definiţie. Fie (X, d) spaţiu metric, $x_0 \in X$ şi $r \in \mathbb{R}, \ r > 0$. Mulţimile

$$B(x_0, r) = \{x \in X \, | d(x, x_0) < r\}$$

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X \, | d(x, x_0) \leq r\}$$

se numesc **bilă deschisă**, respectiv **bilă închisă** cu centrul în x_0 şi rază r. Mulţimea

$$S(x_0, r) = \{x \in X \, | d(x, x_0) = r\}$$

se numeşte **sferă** cu centrul în x_0 şi rază r.

Exemple. 1. Aplicaţia $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ d(x, y) = |x - y|$ este o metrică (distanţă) pe axa reală, numită metrica euclidiană. Bila deschisă cu centrul în x_0 şi rază r este

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \, || x - x_0| < r\} = (x_0 - r, x_0 + r).$$

2. Aplicaţia $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

unde $M_1(x_1, y_1), \ M_2(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, este o metrică pe $\mathbb{R}^2$ numită metrica euclidiană a planului.
Fie $A(a, b)$ şi $r > 0$. Bila cu centrul în A şi rază r, este

$$B(A, r) = \left\{(x, y) \left| \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < r \right.\right\},$$

deci mulţimea punctelor interioare cercului cu centrul în A şi rază r. În plan, bila deschisă o vom numi disc cu centrul în A şi rază r.

3. Orice mulţime X poate fi înzestrată cu metrica

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = y \\ 1, & \text{dacă } x \neq y \end{cases}$$

Avem

$$B(a, 1) = \{x \in X \mid d(x, a) < 1\} = \{a\},$$

iar bila cu raza $r > 1$ este

$$B(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\} = X.$$

SPAŢIUL EUCLIDIAN $\mathbb{R}^n$

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ un număr fixat. Considerăm produsul cartezian $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}}_{n\ ori}$. Un element $x \in \mathbb{R}^n$ este un n-uplu (un sistem) de n numere reale $(x_1, x_2, ..., x_n)$, care se numesc coordonatele lui x. Elementul $x \in \mathbb{R}^n$ se mai numeşte vector în $\mathbb{R}^n$, iar $(x_1, x_2, ..., x_n)$, componentele vectorului.
Adunarea în $\mathbb{R}^n$. Prin suma lui $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ cu $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ se înţelege vectorul $x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$.
Vectorul nul este $0 = (0, 0, ..., 0)$. Opusul vectorului $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ este vectorul $-x = (-x_1, ..., -x_n)$.
Este evident că $(\mathbb{R}^n, +)$ este grup abelian faţă de adunarea vectorilor.

Înmulţirea cu scalari în $\mathbb{R}^n$. Fie $x \in \mathbb{R}^n$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Se defineşte vectorul $\alpha x \in \mathbb{R}^n$ prin $\alpha x = (\alpha x_1, ..., \alpha x_n)$. Se verifică imediat ca $\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ au loc proprietăţile:

1. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
2. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
3. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
4. $1 \cdot x = x$.

Rezultă că mulţimea $\mathbb{R}^n$ este spaţiu liniar (vectorial) peste corpul numerelor reale $\mathbb{R}$.

Definiţie. Funcţia

$$< \cdot, \cdot >: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ , definită ca } < x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

se numeşte **produs scalar** al vectorilor $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ şi $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$.
Definiţie. Funcţia

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ definită prin } \|x\| = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

se numeşte **normă** euclidiană.
Spaţiul $\mathbb{R}^n$ pe care s-a definit norma euclidiană se numeşte **spaţiu euclidian n dimensional**.
Exemplu. Dacă $x \in \mathbb{R}$, atunci $\|x\| = \sqrt{x^2} = |x|$ deci pe axa reală, norma coincide cu modulul.
Dacă $x \in \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$, atunci $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ şi norma lui x coincide cu lungimea vectorului x.

Teorema. Pentru $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$, avem

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Demonstraţie. 1 şi 2 sunt evidente. Demonstrăm inegalitatea 3. Avem

$$\|x+y\|^2 =< x+y, x+y >= \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

În continuare folosim inegalitatea lui Cauchy - Buniacovski - Schwarz:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

şi obţinem

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\cdot\|x\|\cdot\|y\| = (\|x\|+\|y\|)^2.$$

Teoremă. Funcţia $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definită prin relaţia

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

este o metrică pe $\mathbb{R}^n$, numită metrica euclidiană.

Demonstraţie. Primele două axiome ale metricii sunt verificate, conform teoremei precedente. Demonstrăm inegalitatea triunghiului. Avem

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y).$$

Observaţie. Reţinem că distanţa de la $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ la $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ este

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}.$$

Curs 4

ŞIRURI ÎN SPAŢII METRICE

Fie (X,d) un spaţiu metric.
Definiţie. Se numeşte şir o aplicaţie $f:\mathbb{N}\to X,\ f(n)=x_n$.
Vom folosi pentru şirul $x_0,x_1,...,x_n,...$, notaţia $(x_n)_{n\geq 0}$ sau (x_n).

Definiţie. Un şir de puncte (x_n) din spaţiul metric (X,d) este convergent către $a\in X$, dacă $\forall\epsilon>0$, în afara bilei $B(a,\epsilon)$ se găseasc un număr finit de termeni ai şirului.
Notaţie: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, sau $x_n\to a$.
Definiţia precedentă se poate enunţa şi sub forma echivalentă:

Definiţie. $x_n\to a\Leftrightarrow\forall\epsilon>0$, există un rang $n_\epsilon\in\mathbb{N}$ astfel încât $\forall n>n_\epsilon$ să avem $d(x_n,a)<\epsilon$.
Deoarece $d(x_n,a)<\epsilon$ pentru $\forall n>n_\epsilon$, putem spune că $x_n\to a$, dacă şi numai dacă $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,a)=0$.

Definiţie. Un şir (x_n) din spaţiul metric (X,d) se numeşte şir Cauchy sau şir fundamental, dacă $\forall\epsilon>0$, există un rang $n_\epsilon\in\mathbb{N}$ astfel încât $\forall n,m>n_\epsilon$ să avem $d(x_n,x_m)<\epsilon$.

Observaţie. Pentru a demonstra că (x_n) este şir Cauchy este suficient să arătăm că există un şir de numere reale pozitive (ϵ_n), convergent la zero, astfel încât $d(x_{n+p},x_n)\leq\epsilon_n,\ \forall n,p\in\mathbb{N}$.

Definiţie. Un spaţiu metric (X,d) se numeşte spaţiu metric complet, sau spaţiu Banach, dacă orice şir Cauchy $(x_n)\in X^{\mathbb{N}}$ este convergent către un element din X.

Exemplu. Spaţiul numerelor raţionale $(\mathbb{Q},d)$ cu metrica euclidiană $d(x,y)=|x-y|$ nu este spaţiu metric complet, deoarece şirul (x_n) cu termenul general $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ este şir de numere raţionale, este şir Cauchy, dar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=e\notin\mathbb{Q}$.

TEOREMA DE PUNCT FIX A LUI S.BANACH

Fie (X,d) şi (Y,σ) două spaţii metrice.
Definiţie. Aplicaţia $f:X\to Y$ se numeşte contracţie, dacă $\exists\alpha\in(0,1)$ astfel încât $\sigma(f(x),f(y))\leq\alpha\cdot d(x,y),\ \forall x,y\in X$.

Definiţie. Punctul $x_0\in X$ este punct fix al aplicaţiei $f:X\to X$, dacă $f(x_0)=x_0$.

Teorema lui S.Banach

Dacă (X,d) este spaţiu metric complet (spaţiu Banach), iar aplicaţia $f:X\to X$ este contracţie, atunci ea are un punct fix, unic.

Demonstraţie. Fie $x_0 \in X$ un punct oarecare. Formăm prin recurenţă şirul

$$(x_n) \in X^{\mathbb{N}} : \ x_{n+1} = f(x_n), \ n = 0, 1, ...$$

Demonstraţia cuprinde patru etape.

1. Arătăm prin inducţie că $d(x_k, x_{k+1}) \leq \alpha^k \cdot d(x_1, x_0), \ \forall k \in \mathbb{N}$.
Pentru $k = 0$, $d(x_0, x_1) \leq d(x_1, x_0)$, deci relaţia este verificată.
Presupunem că proprietatea are loc pentru $k : d(x_k, x_{k+1}) \leq \alpha^k \cdot d(x_1, x_0)$ şi demonstrăm că are loc şi pentru $k+1 : d(x_{k+1}, x_k) \leq \alpha^{k+1} \cdot d(x_1, x_0)$.
Într-adevăr, folosind recurenţa şi faptul că f este contracţie, avem

$$d(x_{k+1}, x_{k+2}) = d(f(x_k), f(x_{k+1})) \leq \alpha \cdot d(x_k, x_{k+1}) \leq \alpha^{k+1} \cdot d(x_1, x_0).$$

2. Arătăm că (x_n) este şir Cauchy. Aplicând în mod repetat inegalitatea triunghiului şi apoi punctul unu al demonstraţiei, avem

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_n) \leq ...$$

$$\leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, d(x_{n+p-2}) + ... + d(x_{n+1}, x_n) \leq$$
$$\leq \left(\alpha^{n+p-1} + \alpha^{n+p-2} + ... + \alpha^n\right) \cdot d(x_1, x_0) =$$
$$= \alpha^n \cdot \frac{1 - \alpha^p}{1 - \alpha} \cdot d(x_1, x_0) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \cdot d(x_1, x_0).$$

Deci

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \cdot d(x_1, x_0), \quad \text{unde } \alpha^n \to 0 \quad \text{pentru} n \to \infty.$$

Rezultă că (x_n) este şir Cauchy. Deoarece X este spaţiu metric complet, rezultă că (x_n) este convergent şi $x^* = \lim\limits_{n \to \infty} x_n \in X$.

3. Arătăm că x^* este punctul fix al aplicaţiei f.
Folosind inegalitatea triunghiului, recurenţa şi apoi faptul că f este contracţie, avem:

$$0 \leq d(x^*, f(x^*)) \leq d(x^*, x_n) + d(x_n, f(x^*)) =$$

$$= d(x^*, x_n) + d(f(x_{n-1}), f(x^*)) \leq d(x^*, x_n) + \alpha \cdot d(x_{n-1}, x^*).$$

Deci

$$0 \leq d(x^*, f(x^*)) \leq d(x^*, x_n) + \alpha \cdot d(x_{n-1}, x^*) \to 0, \ \text{pentru } n \to \infty.$$

Cum metrica nu poate fi negativă, rezultă că $d(x^*, f(x^*)) = 0$, adică $x^* = f(x^*)$, deci x^* este punct fix pentru f.

4. Arătăm că punctul fix este unic.
Presupunem că f are două puncte fixe x^* şi x^{**}, deci $f(x^*) = x^*$ şi $f(x^{**}) = x^{**}$. Avem:

$$d(x^*, x^{**}) = d(f(x^*), f(x^{**})) \leq \alpha \cdot d(x^*, x^{**})$$

sau

$$(1 - \alpha) \cdot d(x^*, x^{**}) \leq 0.$$

Cum $1 - \alpha > 0$, rezultă că $d(x^*, x^{**}) = 0$, deci $x^* = x^{**}$.

Metoda folosită pentru determinarea punctului fix se numeşte **metoda aproximaţiilor succesive, MAS.**
Din inegalitatea $d(x_{n+p}, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot d(x_1, x_0)$, trecând la limită pentru $p \to \infty$, obţinem

$$d(x^*, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \cdot d(x_1, x_0), \ \forall n \in \mathbb{N},$$

deci aproximarea punctului fix x^* este cu atât mai bună cu cât n este mai mare.

Teoremă. Fie I un interval compact al axei reale. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă astfel încât $|f'(x)| \leq M < 1$, $\forall x \in I$, atunci ecuaţia $f(x) = x$ are o soluţie unică ce se poate determina prin MAS.

Demonstraţie. Fie $x, y \in I$, oarecare. Aplicând teorema de medie a lui Lagrange funcţiei f, rezultă că $\exists c \in (x, y)$ astfel încât

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)(x - y)| \leq M \cdot |x - y| .$$

Deci f este contracţie şi se aplică în continuare teorema lui Banach.

Exemplu. Să se aproximeze prin metoda aproximaţiilor succesive rădăcina din intervalul $[0, 1]$ a ecuaţiei $x^4 + 6x - 6 = 0$. Să se determine cu o precizie mai mare de 10^{-3} soluţia acestei ecuaţii.
Soluţie. Scriem ecuaţia sub forma $x = 1 - \frac{x^4}{6}$. Considerăm funcţia

$$f : [0, 1] \to [0, 1],\ f(x) = 1 - \frac{x^4}{6}$$

Avem $|f'(x)| = \left|-\frac{2}{3}x^3\right| \leq \frac{2}{3}$. Conform teoremei precedente, ecuaţia $f(x) = x$ are soluţie unică pe care o putem aproxima prin MAS Construim şirul aproximaţiilor succesive (x_n) :

$$x_0 = 0,\ x_{n+1} = 1 - \frac{x_n^4}{6},\ n = 0, 1, ...,$$

care converge spre soluţia ecuaţiei. La fiecare pas, eroarea aproximării soluţiei x^* prin x_n este dată de

$$|x_n - x^*| \leq \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} |x_1 - x_0| = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n .$$

Punem condiţia $|x_n - x^*| \leq 3\left(\frac{2}{3}\right)^n < 10^{-3}$ şi rezolvăm această inegalitate. Obţinem

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{1}{3 \cdot 10^3} \Rightarrow n \cdot \lg\frac{2}{3} < -\lg 3 - 3 \Rightarrow n > \frac{3 + \lg 3}{\lg 3 - \lg 2} = 19,75...$$

Rezultă că după 20 de paşi se obţine precizia dorită.

TOPOLOGIA UNUI SPAŢIU METRIC

Fie (X, d) spaţiu metric, $a \in X$ fixat şi $r > 0$. Reamintim că bila deschisă cu centrul în a de rază r este mulţimea

$$B(a, r) = \{x \in X\, |d(x, a) < r\}$$

Definiţie. O mulţime $V \subset X$ este vecinătate a punctului $a \in X$, dacă $\exists r > 0$ astfel încât $B(a, r) \subset V$.
Notaţie: V_a= mulţimea vecinătăţilor lui a.

Teoremă - Proprietăţile vecinătăţilor.
Fie (X, d) spaţiu metric, $a \in X$.

1. Dacă $V \in V_a \Rightarrow a \in V$.

2. Dacă $V \in V_a$ şi $V \subset U \Rightarrow U \in V_a$.

3. Dacă $V_1, V_2 \in V_a \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in V_a$.

4. Dacă $a, b \in X,\ a \neq b$, atunci $\exists V \in V_a$ şi $\exists W \in V_b$ astfel încât $V \cap W = \Phi$.

Definiţie. Mulţimea $D \subset X$ se numeşte **deschisă**, dacă $\forall a \in D, \exists r > 0$ astfel încât $B(a, r) \subset D$.
Din definiţie, rezultă că $D \in V_a,\ \forall a \in D$. Deci o mulţime deschisă este vecinătate pentru orice punct al său.

Observaţie. Consederăm că mulţimea vidă Φ este mulţime deschisă.

Teoremă - Proprietăţile mulţimilor deschise.

Fie (X, d) spaţiu metric.

1. $X,\ \Phi$ sunt mulţimi deschise.

2. Orice reuniune de mulţimi deschise este mulţime deschisă.

3. Orice intersecţie finită de mulţimi deschise este mulţime deschisă.

Demonstraţie.
1. X este deschisă: $\forall a \in X,\ \exists r > 0$ astfel încât $B(a, r) \subset X$.
2. Dacă $D_i,\ i \in I$ sunt deschise $\overset{?}{\Rightarrow} \bigcup\limits_{i \in I} D_i$ deschisă.
Fie

$$a \in \bigcup_{i \in I} D_i \Rightarrow \exists i \in I \text{ astfel încât } a \in D_i \underset{D_i \text{deschise}}{\Rightarrow} \exists r_i > 0 \text{ astfel încât } B(a, r_i) \subset D_i$$

$$\Rightarrow B(a, r_i) \subset \bigcup_{i \in I} D_i \ \Rightarrow \bigcup_{i \in I} D_i \text{ este deschisă}$$

3. Dacă D_1, D_2 sunt deschise $\overset{?}{\Rightarrow} D_1 \cap D_2$ este deschisă.
Fie

$$a \in D_1 \cap D_2 \Rightarrow a \in D_1 \text{ şi } a \in D_2.$$

Cum $D_1,\ D_2$ sunt deschise

$$\Rightarrow \exists r_1, r_2 > 0 \text{ astfel încât } B(a, r_1) \subset D_1 \text{ şi } B(a, r_2) \subset D_2.$$

Fie $r = \min\{r_1, r_2\}$.

$$\Rightarrow B(a, r) \subset D_1 \cap D_2 \Rightarrow D_1 \cap D_2 \text{ este deschisă.}$$

Definiţie. $F \subset X$ este **închisă** dacă are complementara deschisă.
Deci F este închisă $\Leftrightarrow C_X(F)$ este deschisă
Teoremă - Proprietăţile mulţimilor închise

Fie (X, d) spaţiu metric.

1. $X,\ \Phi$ sunt închise.

2. Orice intersecţie de mulţimi închise este mulţime închisă.

3. Orice reuniune finită de mulţimi închise este mulţime închisă.

Demonstraţie.

1. Avem $C_X(X) = \Phi$ este deschisă $\Rightarrow X$ este închisă.

$C_X(\Phi) = X$ este deschisă $\Rightarrow \Phi$ este închisă.

2. Fie $F_i,\ i \in I$ mulţimi închise $\Rightarrow C(F_i),\ i \in I$ sunt deschise $\Rightarrow \underset{i\in I}{\cup} C(F_i)$ este deschisă. Dar folosind legile lui Morgan avem

$$C(\underset{i\in I}{\cap} F_i) = \underset{i\in I}{\cup} C(F_i) \text{ deschisă } \Rightarrow \underset{i\in I}{\cap} F_i \text{ închisă.}$$

3. Fie F_1, F_2 mulţimi închise $\Rightarrow C(F_1), C(F_2)$ sunt deschise $\Rightarrow C(F_1) \cup C(F_2)$ este deschisă $\underset{Morgan}{\Rightarrow}$ $C(F_1 \cap F_2) = C(F_1) \cup C(F_2)$ este deschisă $\Rightarrow F_1 \cap F_2$ este închisă.

Exemplu. Fie $(\mathbb{R}, d)$ spaţiul metric al numerelor reale. Intervalele $(a, b),\ b > a,\ (a, \infty)$ sunt mulţimi deschise. Într-adevăr $\forall x \in (a, b)\ \exists \epsilon > 0$ astfel încât $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset (a, b)$.
$[a, b]$ este mulţime închisă, deoarece $C([a, b]) = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ este deschisă.
$[a, b)$ nu este nici deschisă nici închisă, pentru că $\exists a \in [a, b)$ astfel încât $\forall \epsilon > 0$ intervalul $(a - \epsilon, a + \epsilon) \not\subset [a, b)$.
$[a, \infty)$ este mulţime închisă: $C([a, \infty)) = (-\infty, a)$ este deschisă.

Definiţie. Fie X o mulţime nevidă. O familie τ de submulţimi ale lui X cu proprietăţile:

1. $X,\ \Phi \in \tau$
2. $G_i \in \tau,\ i \in I \Rightarrow \underset{i\in I}{\cup} G_i \in \tau$
3. $G_1,\ G_2 \in \tau \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau$

se numeşte **topologie pe** X.

Perechea (X, τ) se numeşte spaţiu topologic.

Rezultă că mulţimile deschise dintr-un spaţiu metric (X, d)formează o topologie pe X.

Curs 5

Fie (X,d) un spaţiu metric $A \subset X$.
Definiţie. $a \in X$ este punct interior lui A, dacă $\exists r > 0$ astfel încât $B(a,r) \subset A$.
Rezultă că $A \in V_a$.
Mulţimea punctelor interioare lui A se notează $int(A)$. Avem

$$int(A) = \{a \in X \,| \exists r > 0 \text{ astfel încât } B(a,r) \subset A\}.$$

Din definiţie rezultă că $int(A) \subset A$.

Definiţie. $a \in X$ este punct aderent mulţimii A, dacă $\forall V \in V_a$ avem $V \cap A \neq \Phi$.
Mulţimea punctelor aderente lui A se notează cu $\overline{A}$. Avem

$$\overline{A} = \{a \in X \,| \forall V \in V_a \text{ avem } V \cap A \neq \Phi\}.$$

Avem $A \subset \overline{A}$. Într-adevăr, dacă $a \in A$, avem $a \in A \cap V$, $\forall V \in V_a \Rightarrow A \cap V \neq \Phi$, $\forall V \in V_a$ $\Rightarrow a \in \overline{A} \Rightarrow A \subset \overline{A}$.

Dăm, fără demonstraţie, câteva proprietăţi:

1. $Int(A)$ este cea mai mare mulţime deschisă inclusă în A.

2. $\overline{A}$ este cea mai mică mulţime închisă care include pe A.

3. O mulţime A este deschisă dacă şi numai dacă $Int(A) = A$.

4. O mulţime A este închisă dacă şi numai dacă $\overline{A} = A$.

Definiţie. Un punct $a \in X$ se numeşte punct de acumulare pentru mulţimea A, dacă $\forall V \in V_a$ avem $A \cap (V - \{a\}) \neq \Phi$.
Punctul de acumulare se mai numeşte punct limită pentru mulţimea A. Mulţimea punctelor de acumulare ale lui A se notează A'. Avem

$$A' = \{a \in X \,| \forall V \in V_a \text{ avem } A \cap (V - \{a\}) \neq \Phi\}.$$

Dar $A \cap (V - \{a\}) = (A - \{a\}) \cap V$, deci din definiţie rezultă că

$$a \in A' \Leftrightarrow a \in \overline{A - \{a\}}.$$

Se demonstrează că

$$\overline{A} = A' \cup A.$$

Observaţie. Fie A închisă $\Leftrightarrow \overline{A} = A \Leftrightarrow A = A' \cup A \Leftrightarrow A' \subset A$. Deci o mulţime închisă îşi conţine punctele de acumulare.

Definiţie. Exteriorul mulţimii A este mulţimea $ext(A) = intC_X(A)$.

Definiţie. Frontiera lui A este mulţimea $fr(A) = X - int(A) \cup ext(A)$.

Se demonstrează că $fr(A) = \overline{A} - int(A)$.

Exemplu. Fie $(\mathbb{R}, d)$ spaţiul metric al numerelor reale şi $A = [0, 1)$. Avem $int(A) = (0, 1)$; $\overline{A} = [0, 1]$; $fr(A) = \overline{A} - int(A) = \{0, 1\}$.

Definiţie. O familie de mulţimi $\{A_i \mid i \in I\}$ este o acoperire pentru $K \subset X$, dacă $K \subset \underset{i \in I}{\cup} A_i$.
Definiţie. O submulţime $K \subset X$ se numeşte **compactă**, dacă din orice acoperire a sa cu mulţimi deschise se poate extrage o subacoperire finită.

Teoremă. O mulţime $K \subset X$ este compactă, dacă orice şir de puncte din K are un subşir convergent către un punct din K.
Observaţie. O mulţime compactă este spaţiu metric complet.

Definiţie. Fie $[a_i, b_i]$, $i = \overline{1, p}$ intervale închise şi mărginite din $\mathbb{R}$. Mulţimea $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_p, b_p]$ se numeţe paralelipiped închis în $\mathbb{R}^p$.
Se demonstrează

Teoremă. Orice paralelipiped închis este mulţime compactă.

Dacă $p = 1 \;\Rightarrow [a, b]$ este compactă.
Dacă $p = 2 \;\Rightarrow$ că dreptunghiul $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ este mulţime compactă.

Definiţie. Mulţimea $A \subset X$ este **conexă**, dacă nu se poate reprezenta ca o reuniune de două mulţimi nevide, disjuncte, ambele deschise sau ambele închise.
Intuitiv, o mulţime conexă este formată dintr-o singură "bucată" nu este o reuniune de mulţimi disjuncte.
În spaţiul metric $(\mathbb{R}, d)$,

$A \subset \mathbb{R}$ este compactă $\Leftrightarrow$ A este închisă şi mărginită.

$A \subset \mathbb{R}$ este conexă $\Leftrightarrow$ A este un interval.
Exemplu.

$$[0, 1] \text{ este conexă şi compactă.}$$

$$(0, 1) \text{ este conexă şi nu-i compactă.}$$

$$[0, 1] \cup [2, 3] \text{ este compactă şi nu-i conexă.}$$

FUNCŢII CONTINUE PE SPAŢII METRICE

Fie (X, d), (Y, σ) spaţii metrice.

Definiţie. Funcţia $f : X \to Y$ este continuă în punctul $x \in X$, dacă $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta(x, \epsilon)$ astfel încât pentru $\forall x' \in X$ cu proprietatea $d(x, x') < \delta(x, \epsilon)$ avem $\sigma(f(x), f(x')) < \epsilon$.
f este continuă pe X dacă este continuă pe orice punct din X.

Definiţie. Funcţia $f : X \to Y$ este **uniform continuă** pe X, dacă $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta(\epsilon)$ astfel încât $\forall x'$, $x'' \in X$ cu proprietatea $d(x', x'') < \delta(\epsilon)$ să avem $\sigma(f(x'), f(x'')) < \epsilon$.
O funcţie uniform continuă este contunuă.

Observaţie. Pentru a arăta că o funcţie nu este uniform continuă, este suficient să arătăm că există două şiruri (x'_n), (x''_n) astfel încât $d(x'_n, x''_n) \to 0$, dar $\sigma\left(f(x'_n), f(x''_n)\right) \not\to 0$ pentru $n \to \infty$.

Aplicaţie. Să dăm definiţiile de mai sus pentru spaţiul metric $(\mathbb{R}, d)$.
Fie $f : A \to \mathbb{R},\ A \subset \mathbb{R}$.
Funcţia f este continuă pe punctul $x \in A$, dacă $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ \delta(x, \epsilon)$ astfel încât $\forall\ x' \in A$ cu proprietatea $|x - x'| < \delta(x, \epsilon)$ avem şi $|f(x) - f(x')| < \epsilon$.
Funcţia f este uniform continuă pe A, dacă $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ \delta(\epsilon)$ astfel încât $\forall\ x',\ x'' \in A$ cu proprietatea $|x' - x''| < \delta$, avem şi $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$.

Observaţia 1. Dacă $a \in A \subset \mathbb{R}$ este punct de acumulare al lui A, atunci f este continuă în a dacă şi numai dacă $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. În acest caz,

$$\lim_{x \nearrow a} f(x) = \lim_{x \searrow a} f(x) = f(a). \tag{5.1}$$

Un punct în care f nu este continuă, se numeşte punct de discontinuitate.

Definiţie. Punctul a este punct de discontinuitate de prima speţă, dacă există $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x)$, există $\lim\limits_{x \searrow a} f(x)$, sunt finite, dar nu are loc (5.1).
Exemple de funcţii cu puncte de discontinuitate de prima speţă.
a) Funcţia semn $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

are în 0 un punct de discontinuitate de prima speţă, vezi Figura 5.1.
b) Funcţia parte întreagă $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$ are toate punctele întregi de pe axă ca puncte de discontinuitate de prima speţă, vezi Figura 5.2.

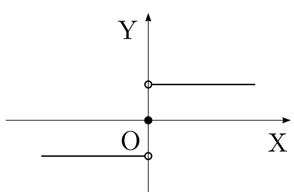

Figura 5.1: Funcţia semn

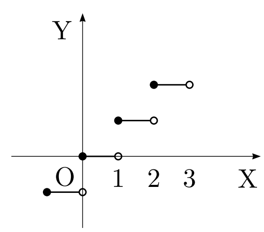

Figura 5.2: Funcţia parte întreagă

Definiţie. Punctul $a \in A \subset \mathbb{R}$ este punct de discontinuitate de speţa a doua pentru f, dacă nu există limita la stânga sau (şi) limita la dreapta în a, sau aceste limite sunt infinite.

Exemple de funcţii cu puncte de discontinuitate de speţa a doua. a) Funcţia $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

are în 0 un punct de discontinuitate de speţa a doua, pentru că limitele laterale nu sunt finite: $\lim_{x \nearrow 0} f(x) = -\infty$ şi $\lim_{x \searrow 0} f(x) = +\infty$, vezi Figura 5.3.
b) Funcţia $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

are în 0 un punct de discontinuitate de speţa a doua, pentru că limitele laterale nu există, vezi Figura 5.4.

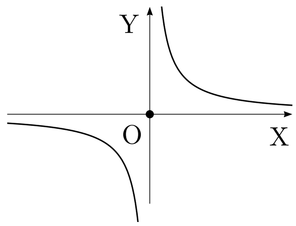

Figura 5.3: Funcţia $\frac{1}{x}$

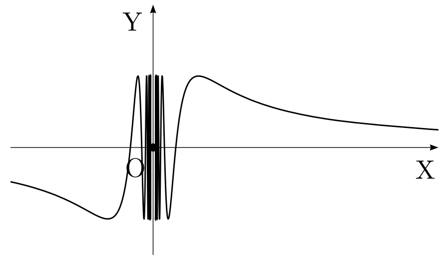

Figura 5.4: Funcţia $\sin \frac{1}{x}$

Observaţia 2. Dacă $a \in A \subset \mathbb{R}$ este punct izolat al lui A (adică $a \in A - A'$), atunci f este continuă în a.

Exemple. 1. Fie $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$. Să se arate că f este uniform continuă pe $[1, \infty)$.
Soluţie. Fie $x', x'' \in [1, \infty)$. Avem

$$|f(x') - f(x'')| = \left|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}\right| = \frac{|x' - x''|}{\sqrt{x'} + \sqrt{x''}} < \frac{|x' - x''|}{2}.$$

Fie $\epsilon > 0$, oarecare. Din inegalitatea de mai sus $\Rightarrow \exists\ \delta(\epsilon) = 2\epsilon$ astfel încât pentru $|x' - x''| < 2\epsilon$, avem şi $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$. Rezultă că f este uniform continuă pe $[1, \infty)$.

2. Fie $f : [1, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x^2}$. Să se demonstreze că f este uniform continuă. Avem

$$|f(x') - f(x'')| = \left|\frac{1}{(x')^2} - \frac{1}{(x'')^2}\right| = \frac{|x' - x''|\,(x' + x'')}{(x')^2(x'')^2} \leq$$

$$\leq |x' - x''| \cdot (x' + x'') < 4\,|x' - x''|\,.$$

Fie $\epsilon > 0$, oarecare. Rezultă că există $\delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{4}$ astfel încât pentru $|x' - x''| < \delta(\epsilon)$ avem şi $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$. Rezultă că f este uniform continuă pe $[1, 2]$.

3. Să se demonstreze că $f : (0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x^2}$, nu este uniform continuă.
Fie $x'_n = \frac{1}{n},\ x''_n = \frac{1}{n+1}$. Avem

$$|x'_n - x''_n| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| \to 0,\ \text{pentru } n \to \infty$$

dar

$$|f(x'_n) - f(x''_n)| = \left|n^2 - (n+1)^2\right| \not\to 0.$$

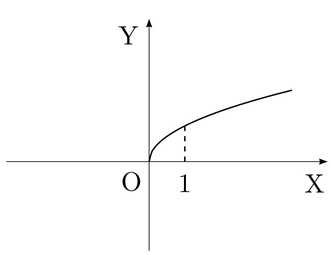

Figura 5.5: Funcţia $\sqrt{x}$

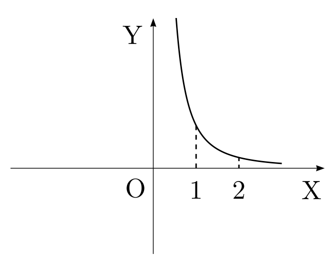

Figura 5.6: Funcţia $\frac{1}{x^2}$

Se demonstrează că au loc:

Teoremă. Dacă $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$ este continuă şi $A \subset X$ este conexă, atunci $f(A)$ este conexă.
Teoremă. Dacă $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$ este continuă şi $A \subset X$ este compactă, atunci $f(A)$ este compactă.
Caz particular. Dacă $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ este continuă şi $A \subset X$ este compactă, atunci $f(A)$ este mărginită.

Teorema lui Weierstrass.
Dacă funcţia $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ este continuă şi $A \subset X$ este compactă, atunci f îşi atinge marginile pe A (f are minim şi maxim pe A).

Demonstraţie. Din teorema precedentă, rezultă că mulţimea $f(A)$ este mărginită. Fie

$$m = \inf_{x\in A} f(x), \quad M = \sup_{x\in A} f(x)$$

Presupunem că f nu-şi atinge marginile pe A. Dacă f nu-şi atinge supremumul, $\forall x \in A$, avem $f(x) < M$. Considerăm funcţia

$$g : A \to \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{M - f(x)},$$

care este continuă, deci mărginită.

$$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \text{ astfel încât } g(x) \le c \Rightarrow \frac{1}{M - f(x)} \le c,\ \forall x \in A$$

$$\Rightarrow M - f(x) \ge \frac{1}{c},\ \forall x \in A\ \Rightarrow f(x) \le M - \frac{1}{c},\ \forall x \in A$$

$\Rightarrow M - \frac{1}{c}$ este un majorant pentru mulţimea $f(A)$, deci M nu este cel mai mic majorant $\Rightarrow M$ nu este supremum (contradicţie). Rezultă că $\exists x_1 \in A$ astfel încât $f(x_1) = M$.

Teorema lui Cantor. Fie $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$. Dacă f este continuă pe X şi X este mulţime compactă, atunci f este uniform continuă pe X.

Curs 6

FUNCŢII VECTORIALE

Vom studia un caz particular de funcţii, în care domeniul de definiţie şi domeniul valorilor sunt respectiv $\mathbb{R}^n$ şi $\mathbb{R}^m$, înzestrate cu metrica euclidiană.
Fie $A \subset \mathbb{R}^n$. Funcţia $f : A \to \mathbb{R}^m$, unde $m > 1$ se numeşte funcţie vectorială de n variabile reale. Funcţia f are m componente, deci este de forma

$$f = (f_1, f_2, ..., f_m) \text{ unde } \ f_1, f_2, ..., f_m : X \to \mathbb{R}.$$

Dacă $m = n = 1$, atunci $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este funcţie reală de o variabilă reală.
Dacă $m = 1$, atunci $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este funcţie (scalară) de n variabile reale.
Exemplu. Funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = \big(xy, x^2 + y^2, y\big)$, este funcţie vectorială de două variabile reale. Componentele funcţiei sunt

$$f_1(x, y) = xy,\ f_2(x, y) = x^2 + y^2,\ f_3(x, y) = y.$$

Graficul funcţiei $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este mulţimea

$$\Gamma_f = \{(x, y)\,|y = f(x),\ x \in A\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

Prin urmare, $y = f(x),\ x \in A$ înseamnă

$$(y_1, y_2, ..., y_m) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)),\ \text{unde } x = (x_1, x_2, ..., x_n).$$

De aici se vede că funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este echivalentă cu un sistem de m funcţii reale de n variabile reale $x_1, x_2, ..., x_n$.

Definiţia limitei într-un punct

Considerăm funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Fie $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in A'$ un punct de acumulare şi $l = (l_1, l_2, ..., l_m) \in \mathbb{R}^m$.

Definiţie. Punctul $l \in \mathbb{R}^m$ este limita funcţiei f în punctul $a \in A'$ dacă şi numai dacă $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_\epsilon$ astfel încât $\forall x \in A,\ x \neq a$ cu proprietatea $\|x - a\| < \delta_\epsilon$, avem şi $\|f(x) - l\| < \epsilon$.
Notaţie: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, sau $f(x) \to l$, pentru $x \to a$.

Ţinând seama de defintia dată normei în spaţiul euclidian $\mathbb{R}^n$, această definiţie se poate enunţa astfel:
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta_\epsilon > 0$ astfel încât $\forall x \in A,\ x \neq a$, cu proprietatea
$|x_i - a_i| < \delta_\epsilon,\ i = \overline{1, n}$, avem şi $|f_k(x) - l_k| < \epsilon,\ k = \overline{1, m}$.

Teoremă. Fie $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$, $a \in A'$ un punct de acumulare şi $l = (l_1, l_2, ..., l_m) \in \mathbb{R}^m$.
Atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, dacă şi numai dacă

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = l_1,\ \lim_{x\to a} f_2(x) = l_2, ..., \lim_{x\to a} f_m(x) = l_m.$$

Să considerăm, în continuare, o funcţie de două variabile reale $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Fie $(x_0, y_0) \in A'$.
$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ se numeşte limita globală a lui f în punctul (x_0, y_0).
$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x, y)$ şi $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$ se numesc limite iterate ale lui f în punctul (x_0, y_0).

Exemple.
1. Fie $f : \mathbb{R}^2 - (0, 0) \to \mathbb{R},\ f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Avem

$$\lim_{x\to 0} f(x, y) = -1,\ \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x, y) = -1.$$

$$\lim_{y\to 0} f(x, y) = 1,\ \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x, y) = 1.$$

2. Fie $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^3+y^3}$, $(x, y) \neq (0, 0)$, $x \neq -y$. Avem

$$\lim_{x\to 0} f(x, y) = 0;\ \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x, y) = 0.$$

$$\lim_{y\to 0} f(x, y) = 0;\ \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x, y) = 0$$

deci limitele iterate în $(0, 0)$ sunt egale. Această funcţie nu are limită globală în $(0, 0)$, pentru că dacă punctul (x, y) tinde la $(0, 0)$ pe o dreaptă $y = mx$, limita depinde de m, deci ia valori diferite pentru drepte diferite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{m^2x^3}{x^3(1 + m^3)} = \frac{m^2}{1 + m^3}.$$

3. Fie $f : \mathbb{R} - (0, 0) \to \mathbb{R},\ f(x, y) = \frac{x^5+y^5}{x^2+y^2}$
Limitele iterate în $(0, 0)$şi limita pe drepte $y = mx$, pentru $x \to 0$ sunt egale cu zero. Limita globală în $(0, 0)$ este tot zero. Într-adevăr:

$$|f(x, y)| = \frac{\left|x^5 + y^5\right|}{x^2 + y^2} \le \frac{\left|x^5\right|}{x^2 + y^2} + \frac{\left|y^5\right|}{x^2 + y^2} \le \left|x^3\right| + \left|y^3\right| \to 0 \text{ pentru } (x, y) \to (0, 0).$$

Rezultă că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

Funcţii vectoriale continue

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ şi $f : A \to \mathbb{R}^m$.
Definiţie. Funcţia $f : A \to \mathbb{R}^m$ este continuă în punctul $a = (a_1, ..., a_n) \in A$, dacă şi numai dacă $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_\epsilon > 0$ astfel încât $\forall x \in A$ cu proprietatea $\|x - a\| < \delta_\epsilon$ avem şi $\|f(x) - f(a)\| < \epsilon$.

Observaţie. Ţinând seama de definiţia dată normei euclidiene, această definiţie revine la: funcţia $f = (f_1, ..., f_m)$ este continuă în punctul $a = (a_1, ...a_n) \in A$, dacă şi numai dacă $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_\epsilon$ astfel încât $\forall x = (x_1, ..., x_n) \in A$ cu proprietatea $|x_i - a_i| < \delta_\epsilon$ pentru $i = \overline{1, n}$, avem şi $|f_k(x) - f_k(a)| < \epsilon$, pentru $k = \overline{1, m}$.

De aici deducem că funcţia vectorială $f = (f_1, ..., f_m)$ este continuă dacă şi numai dacă funcţiile componente $f_1, ..., f_m$ sunt continue.

Exemplu. Să se studieze continuitatea funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(xy, \frac{x^3y^3}{(x^2+y^2)^2}\right) & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ (0,0) & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Soluţie. Problema revine la studiul continuităţii funcţiilor $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f_1(x,y) = \begin{cases} x \cdot y & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Funcţia f_1 este continuă pe $\mathbb{R}^2$. Studiem continuitatea funcţiei f_2 în $(0,0)$. Avem:

$$|f_2(x,y)| = \frac{|x^3y^3|}{(x^2+y^2)^2} < \frac{|xy|^3}{4\,|x^2y^2|} = \frac{1}{4}\,|xy| \to 0 \text{ pentru } (x,y) \to (0,0).$$

Rezultă că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = 0 = f_2(0,0)$, deci f_2 este continuă în $(0,0)$.
Pentru că $f = (f_1, f_2)$ are componentele continue, rezultă că f este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

CALCUL DIFERENŢIAL

DERIVABILITATEA FUNCŢIILOR DE O VARIABILĂ

Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulţime de numere reale, $x_0 \in A \cap A'$ un punct de acumulare al lui A şi $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie.
Definiţie. Funcţia f este derivabilă în x_0, dacă

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

există şi este finită.
Această limită se notează cu $f'(x_0)$ sau $\frac{df}{dx}(x_0)$ şi se numeşte derivata lui f în punctul x_0.

Vom spune f este derivabilă pe A, dacă f este derivabilă în fiecare punct $x \in A$. Atunci aplicaţia $f' : A \to \mathbb{R}$ care asociază fiecărui punct $x \in A$ derivata funcţiei în acest punct, se numeşte derivata lui f.
Observaţii. 1. Dacă într-un punct x_0, avem

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty\,(\text{sau} - \infty)$$

atunci funcţia f nu este derivabilă în x_0, dar se spune că f are derivată finită în punctul x_0.
2. Dacă f nu este derivabilă în x_0, dar există limitele laterale

$$f'_s(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x< x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

sau

$$f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x> x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

atunci aceste limite se numesc derivate laterale ale funcţiei f în punctul x_0.

Se ştie că derivata funcţiei în punctul x_0 este coeficientul unghiular al tangentei la graficul lui f în punctul $(x_0, f(x_0))$. În punctele în care derivatele laterale sunt diferite, graficul lui f are o tangentă la stânga şi o tangentă la dreapta, adică în aceste puncte nu există tangentă unică.

Teorema. O funcţie derivabilă într-un punct este continuă în acel punct.
Demonstraţie. Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabilă în x_0. Pentru orice $x \in A,\ x \neq x_0$ avem

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)\,.$$

Trecem la limită şi ţinem seama că

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

este un număr finit. Rezultă că

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) = f(x_0),$$

deci funcţia f este continuă în x_0.

Reciproca nu este adevărată: nu orice funcţie continuă într-un punct este şi derivabilă în acel punct. De exemplu, funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ este continuă în $x = 0$, dar nu este derivabilă în acest punct.
Reamintim câteva reguli de bază ale calculului diferenţial.
Dacă $f, g : A \to \mathbb{R}$ sunt derivabile într-un punct $x_0 \in A \cap A'$, atunci:
1. $f \pm g$ este derivabilă în x_0 şi $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$.
2. $\lambda f,\ \lambda \in \mathbb{R}$ este derivabilă în x_0 şi $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$.
3. $f \cdot g$ este derivabilă în x_0 şi

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

4. dacă $g(x_0) \neq 0$, atunci $\frac{f}{g}$ este derivabilă în x_0 şi

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

5. Derivarea funcţiei compuse. Fie $f : D \to E$ şi $g : E \to \mathbb{R}$ două funcţii. Dacă f este derivabilă în $x_0 \in D$ şi g este derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0)$, atunci funcţia compusă $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ este derivabilă în x_0 şi $(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$.
Dacă f este derivabilă pe D şi g este derivabilă pe E, atunci $g \circ f$ este derivabilă pe D şi are loc formula $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$.
6. Derivarea funcţiei inverse. Fie $f : D \to E$ o funcţie bijectivă, derivabilă în $x_0 \in D$ şi $f'(x_0) \neq 0$. Atunci inversa $g = f^{-1}$ este derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0)$ şi $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.
Deci, dacă f admite inversă şi $f'(x) \neq 0,\ \forall x \in D$, atunci funcţia inversă $f^{-1} : E \to E$ este derivabilă şi are loc formula

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

7. Derivata unui determinant

$$\left(\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}\right)' = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

Proprietăţi ale funcţiilor derivabile

Fie $f : A \to \mathbb{R},\ A \subset \mathbb{R}$.
Definiţie. Punctul $x_0 \in A$ este punct de extrem local pentru funcţia f, dacă $\exists \delta > 0$ astfel încât diferenţa $f(x) - f(x_0)$ nu-şi schimbă semnul pentru $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Teorema lui Fermat. Într-un punct interior de extrem local al unei funcţii, derivata funcţiei, dacă există, este egală cu zero.
Demonstraţie. Fie $f : A \to \mathbb{R},\ x_0 \in A$ punct de extrem local al funcţiei în care există $f'(x_0)$. Rezultă că $\exists \delta > 0$ astfel încât $f(x) - f(x_0)$ nu-şi schimbă semnul pentru orice $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Fie

$$x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap A \text{ şi } x' \in (x_0, x_0 + \delta) \cap A.$$

Avem

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} \leq 0.$$

Trecem la limită pentru $x \to x_0,\ x < x_0$ şi $x' \to x_0,\ x' > x_0$ şi obţinem

$$f'_s(x_0) \cdot f'_d(x_0) \leq 0.$$

Dar f fiind derivabilă în x_0, avem

$$f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0),$$

deci $[f'(x_0)]^2 \leq 0$, de unde rezultă că $f'(x_0) = 0$.
Definiţie. Punctele în care derivata unei funcţii se anulează se numesc puncte critice sau staţionare ale lui f.

Observaţie. O funcţie poate avea puncte critice care nu sunt puncte de extrem. De exemplu $f(x) = |x|\,,\ x \in \mathbb{R}$ are în $x = 0$ punct de extrem, dar nu este derivabilă în acest punct, deci $x = 0$ nu este punct critic pentru f.
De asemenea, există funcţii care în punctele critice nu au extrem. De exemplu $g(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ are $x = 0$ punct critic, care nu este şi punct de extrem.

Teorema lui Rolle. Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă pe $[a, b]$, este derivabilă pe (a, b) şi dacă $f(a) = f(b)$, atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

Teorema lui Cauchy. Dacă funcţiile $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt continue pe $[a, b]$, derivabile pe (a, b) şi $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$, atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Teorema lui Lagrange - teorema creşterilor finite. Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b), atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

Curs 7

DERIVATE DE ORDIN SUPERIOR

Fie $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe un subinterval $I \subset A$. Funcţia f este derivabilă de două ori în punctul $x_0 \in I \cap I'$, dacă funcţia f' este derivabilă în x_0, adică

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

există şi este finită. Această limită se notează cu $f''(x_0)$ sau $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$ şi se numeşte derivata a doua a funcţiei f în punctul x_0.
Dacă funcţia f' este derivabilă pe mulţmea I, atunci derivata de ordinul doi a funcţiei f, notată f'', se defineşte prin relaţia $f'' = (f')'$. În general, derivata de ordinul n a funcţiei f , notată $f^{(n)}$, se defineşte prin recurenţă

$$f^{(n)} = \left[f^{(n-1)} \right]',\ n = 1, 2, ...$$

Pentru derivata de ordinul n se mai foloseşte notaţia $\frac{d^n f}{dx^n}$.
Mulţimea funcţiilor care au derivată de ordinul n continuă pe $[a, b]$ se notează $C^n[a, b]$, deci

$$C^n[a, b] = \left\{ f : [a, b] \to \mathbb{R} \;\middle|\; \exists f^{(n)} \text{ continuă} \right\}.$$

Exemple. 1. Să se calculeze derivata de ordinul n a funcţiei

$$f(x) = \ln(ax + b),\ x > -\frac{b}{a}.$$

Avem succesiv:

$$f'(x) = \frac{a}{ax + b},\ f'' = \frac{-a^2}{(ax + b)^2},\ f''' = \frac{2a^3}{(ax + b)^3}, ..., f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n - 1)!a^n}{(ax + b)^n}.$$

2. Se arată prin inducţie că

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \text{ şi } (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Pentru a calcula derivata de ordin superior a unui produs de două funcţii, se foloseşte **formula lui Leibniz**:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}.$$

Exemplu. Să se calculeze derivata de ordinul n a funcţiei $f(x) = \left(x^2 + 1\right) \cdot e^{ax}$. Soluţie. Aplicând formula lui Leibniz, avem

$$f^{(n)}(x) = \left(x^2 + 1\right) \cdot (e^{ax})^{(n)} + C_n^1 \cdot 2x \cdot (e^{ax})^{(n-1)} + C_n^2 \cdot 2 \cdot (e^{ax})^{(n-2)} =$$

$$= e^{ax}\left[\left(x^2+1\right)a^n + 2nxa^{n-1} + n\left(n-1\right)a^{n-2}\right].$$

FORMULA LUI TAYLOR PENTRU FUNCŢII DE O VARIABILĂ

Formula lui Taylor permite exprimarea unei funcţii cu ajutorul unui polinom şi al unui rest. Se pot aproxima valorile unei funcţii în vecinătatea unui punct cunoscând derivatele sale în punctul respectiv.

Teorema lui Taylor.

Fie $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $[a,b] \subset I$. Dacă
1. $f \in C^n[a,b]$.
2. există derivata de ordinul $n+1$ pe (a,b),
atunci pentru orice $x, x_0 \in [a,b]$, există relaţia

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + ... + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + R_n(x),$$

unde

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}\left(x_0 + \theta(x-x_0)\right),\ 0<\theta<1,$$

numită formula lui Taylor de ordinul n a funcţiei f, relativă la punctul x_0.
Demonstraţie. Se consideră funcţia $F : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = f(x) + \frac{b-x}{1!}f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2!}f''(x) + ... + \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x) + A\cdot(b-x)^{n+1},$$

unde A este o constantă care se determină din condiţia $F(a) = F(b)$. Funcţia F verifică ipotezele teoremei lui Rolle. Rezultă că există $c \in (a,b)$ astfel încât $F'(c) = 0$. Avem

$$F'(x) = f'(x) - \frac{1}{1!}f'(x) + \frac{(b-x)}{1!}f''(x) - \frac{2(b-x)}{2!}f''(x) + ... + \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x) -$$

$$-A\cdot(n+1)(b-x)^n = \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x) - A\cdot(n+1)(b-x)^n.$$

Cum $F'(c) = 0$, rezultă că

$$A = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},\ c \in (a,b).$$

Egalând

$$F(a) = f(a) + \frac{b-a}{1!}f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + ... + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{(n+1)},$$

cu

$$F(b) = f(b),$$

rezultă

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!}f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + ... + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c),$$

unde $c \in (a,b)$.
Dacă în această formulă înlocuim b cu x şi a cu x_0, se obţine formula lui Taylor, cu restul

$R_n(x) = \dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$, unde $c \in (x_0, x)$ se poate scrie sub forma $c = x_0 + \theta(x-x_0)$.

Observaţii. Polinomul

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + ... + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

se numeşte polinomul lui Taylor de grad n relativ la funcţia f şi punctul x_0.
Funcţia

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}\left(x_0 + \theta(x-x_0)\right),\ 0 < \theta < 1,$$

se numeşte restul de ordinul n al formulei lui Taylor, scris sub forma lui Lagrange.
Conseciţa 1. $T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0),\ k = \overline{0,n}.$
Derivând de k ori funcţia T_n, obţinem

$$T_n^{(k)}(x) = f^{(k)}(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} \cdot f^{(k+1)}(x_0) + ... + \frac{(x-x_0)^{(n-k)}}{(n-k)!} f^{(n)}(x_0),$$

deci $T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0),\ k = \overline{0,n}.$
Consecinţa 2. Restul de ordinul n al formulei lui Taylor pentru un polinom de gradul n este identic nul, adică

$$P(x) = P(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} P'(x_0) + ... + \frac{(x-x_0)^n}{n!} P^{(n)}(x_0).$$

Fie o o funcţie care satisface condiţia

$$\lim_{y\to 0} \frac{o(y)}{y} = 0.$$

Restul în formula lui Taylor se poate exprima şi cu ajutorul funcţiei o. Într-adevăr

$$\frac{(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!} = o\left((x-x_0)^n\right),\ \text{pentru că} \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{1}{(x-x_0)^n} = 0,$$

deci dacă derivata de ordin $n+1$, $f^{(n+1)}$ este mărginită în $[a,b]$, atunci formula lui Taylor se poate scrie ca

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + ... + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + o\left((x-x_0)^n\right),$$

care se numeşte formula lui Taylor cu restul sub forma lui Peano.
Dacă în formula lui Taylor se consideră $x_0 = 0$, se obţine formula lui **Mac Laurin:**

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x),\ \theta \in (0,1).$$

Formula lui Mac Laurin cu restul sub forma lui Peano este

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + o\left(x^n\right).$$

Exemplu. Formula lui Mac Laurin pentru funcţia $f(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}$ este

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x},\ 0 < \theta < 1.$$

Unei funcţii care admite derivată de orice ordin i se poate ataşa **seria ei Taylor**

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0),$$

care poate fi convergentă sau nu. Dacă $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, pentru $x \in D$, atunci seria Taylor ataşată acestei funcţii este convergentă şi suma ei este f:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0),\ x \in D.$$

În acest caz se spune că am dezvoltat pe f în serie Taylor, într-o vecinătate a punctului x_0, sau în serie de puteri ale lui $x - x_0$.
Seria Mac Laurin ataşată funcţiei f se obţine pentru $x_0 = 0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0), \ x \in D.$$

Exemplu. Să revenim la funcţia e^x. Avem

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \ 0 < \theta < 1.$$

Să demonstrăm că

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!} e^{\theta x} = 0, \ x \in \mathbb{R}.$$

Pentru x fixat, $e^{\theta x}, \ \theta \in (0,1)$ este mărginit. Arătăm că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)1} = 0.$$

Dacă x este fixat, există un număr natural N astfel încât $|x| < N$. Notăm $\frac{|x|}{N} = q < 1$. Avem

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \left|\frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot ... \cdot \frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n+1}\right| =$$

$$= \left|\frac{x}{1}\right| \cdot \left|\frac{x}{2}\right| \cdot ... \cdot \left|\frac{x}{N-1}\right| \cdot \left|\frac{x}{N}\right| \cdot ... \cdot \left|\frac{x}{n}\right| \cdot \left|\frac{x}{n+1}\right| <$$

$$< \left|\frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot ... \cdot \frac{x}{N-1}\right| \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot ... \cdot q}_{n+1-(N-1)} = \frac{|x|^{N-1}}{(N-1)!} \cdot q^{n-N+2},$$

unde $\frac{|x|^{N-1}}{(N-1)!}$ este o constantă ce nu depinde de n, iar $\lim_{n\to\infty} q^{n-N+2} = 0$. Rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

deci funcţia $f(x) = e^x$ se poate dezvolta în serie de puteri ale lui x şi avem

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Dăm în continuare câteva exemple de dezvoltări în serie de puteri ale lui x. Avem

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \ x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \ x \in (-1,1)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \ x \in (-1,1]$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1}{2!} x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot ... \cdot (\alpha-n+1}{n!} x^n + ..., \ x \in (-1,1), \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Curs 8

DERIVATE PARŢIALE

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie de n variabile reale şi $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in A \cap A'$ un punct de acumulare al lui A.
Definiţie. Funcţia f este derivabilă în punctul x^0 în raport cu variabila x_k, dacă

$$\lim_{x_k \to x_k^0} \frac{f(x_1^0, ..., x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, ...x_n^0) - f(x_1^0, ..., x_{k-1}^0, x_k^0, x_{k+1}^0, ..., x_n^0)}{x_k - x_k^0},$$

există şi este finită.
Această limită se numeşte derivata parţială a funcţiei f în raport cu x_k în punctul x^0 şi se notează

$$f'_{x_k}(x^0) \text{ sau } \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0).$$

Definiţie. Funcţia f are derivată parţială în raport cu x_k pe mulţimea A, dacă ea admite derivate parţiale în raport cu x_k în orice punct din A.
Atunci funcţia care ataşează fiecărui punct din A valoarea derivatei parţiale în raport cu x_k în acel punct, se numeşte derivata parţială a lui f în raport cu x_k şi se notează

$$f'_{x_k} \text{ sau } \frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

Derivata parţială f'_{x_k} este de fapt derivata funcţiei $f(x_1, ..., x_{k-1}, \cdot, x_{k+1}, ..., x_n)$ de o singură variabilă, x_k, în care celelalte variabile ale funcţiei f, adică $x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ...x_n$, sunt fixate.

Exemple. 1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x^3 - xy^2 + y^3$. Derivatele parţiale sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2xy + 3y^2.$$

2. $f(x, y) = y^x,\ y > 0$. Derivatele parţiale sunt

$$f'_x(x, y) = y^x \cdot \ln y, \quad f'_y(x, y) = x \cdot y^{x-1}.$$

Dacă funcţia f este derivabilă în raport cu variabila x_k în punctul x^0, atunci ea este continuă în raport cu variabila x_k în punctul x^0, dar derivabilitatea în raport cu fiecare variabilă în parte, nu implică continuitatea globală.
Exemplu.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^3+y^3}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Calculăm derivatele parţiale în origine:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0 \ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=0 \ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0,$$

deci f are derivate parţiale în $(0,0)$, dar nu este continuă în $(0,0)$, pentru că nu are limită globală în origine:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}}\frac{m^2x^3}{x^3(1+m^3)}=\frac{m^2}{1+m^3}.$$

Derivate parţiale de ordin superior

Fie $f : A \to \mathbb{R},\ A\subset\mathbb{R}^n$ o funcţie de n variabile derivabilă în raport cu variabila x_k pe o mulţime $I\subset A$.
Spunem că f este derivabilă de două ori în raport cu x_k şi x_i în punctul $x^0\in I\cap I'$ dacă funcţia f'_{x_k} este derivabilă în raport cu x_i în punctul x^0, adică următoarea limită există şi este finită:

$$\lim_{x_i\to x_i^0}\frac{f'_{x_k}(x_1^0,...,x_{i-1}^0,x_i,x_{i+1}^0,...x_n^0)-f'_{x_k}(x_1^0,...x_{i-1}^0,x_i^0,x_{i+1}^0,...,x_n^0)}{x_i-x_i^0}.$$

Această limită se numeşte derivata parţială de ordinul doi a lui f în raport cu x_k şi x_i, calculată în punctul x^0 şi se notează

$$f''_{x_kx_i}(x^0)\ \text{ sau }\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_k}(x^0).$$

Rezultă că derivata parţială de ordinul doi este derivata parţială a unei derivate de ordinul întâi:

$$f''_{x_kx_i}=\left(f'_{x_k}\right)'_{x_i}\ \text{ sau }\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right).$$

Dacă $i\neq k$, atunci derivata $f''_{x_kx_i}$ se numeşte derivată mixtă. Dacă $i=k$, atunci derivata se notează $f''_{x_k^2}$ sau $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$. În general, o derivată parţială de ordinul n este o derivată de ordinul întâi a unei derivate parţiale de ordinul $n-1$.

Exemplul 1. Să se calculeze derivatele parţial de ordinul doi pentru o funcţie $f : A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ într-un punct (x_0,y_0). Avem

$$f'_x(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

$$f'_y(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

$$f''_{x^2}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'_x(x,y_0)-f'_x(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f'_x(x_0,y)-f'_x(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

$$f''_{yx}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'_y(x,y_0)-f'_y(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

$$f''_{y^2}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f'_y(x_0,y)-f'_y(x_0,y_0)}{y-y_0}.$$

Exemplul 2. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul doi pentru funcţia $f(x,y) = x^2y^3 - y^2 + x$. Avem

$$f'_x(x,y) = 2xy^3 + 1$$
$$f'_y(x,y) = 3x^2y^2 - 2y$$
$$f''_{x^2}(x,y) = 2y^3$$
$$f''_{y^2}(x,y) = 6x^2y - 2$$
$$f''_{xy}(x,y) = 6xy^2, \quad f''_{yx}(x,y) = 6xy^2.$$

În anumite condiţii, derivatele mixte f''_{xy} şi f''_{yx} sunt egale.

Teorema lui Schwarz.

Dacă funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admite derivate parţiale mixte f''_{xy} şi f''_{yx} continue într-o vecinătate V a punctului (x_0, y_0), atunci

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Demonstraţie. Fie $(x,y) \in V$. Considerăm funcţiile auxiliare

$$h = f(\cdot, y) - f(\cdot, y_0), \quad g = f(x, \cdot) - f(x_0, \cdot).$$

Avem $h(x) - h(x_0) = g(y) - g(y_0)$. Aplicând teorema lui Lagrange, rezultă că există punctul ξ între x_0 şi x şi există punctul η între y_0 şi y astfel încât

$$h'(\xi) \cdot (x - x_0) = g'(\eta) \cdot (y - y_0)$$

sau

$$[f'_x(\xi, y) - f'_x(\xi, y_0)] \cdot (x - x_0) = \left[f'_y(x, \eta) - f'_y(x_0, \eta)\right] \cdot (y - y_0).$$

Aplicăm din nou teorema lui Lagrange: există punctul η_1 între y_0 şi y şi există punctul ξ_1 între x_0 şi x astfel încât

$$f''_{xy}(\xi, \eta_1) \cdot (y - y_0) \cdot (x - x_0) = f''_{yx}(\xi_1, \eta) \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0),$$

sau

$$f''_{xy}(\xi, \eta_1) = f''_{yx}(\xi_1, \eta).$$

Dacă

$$(x,y) \to (x_0, y_0) \ \Rightarrow \ (\xi, \eta_1) \to (x_0, y_0) \ \text{ şi } \ (\xi_1, \eta) \to (x_0, y_0).$$

Cum f''_{xy} şi f''_{yx} sunt funcţii continue în (x_0, y_0) rezultă că

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

DERIVAREA FUNCŢIILOR COMPUSE

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu din plan. Fie funcţiile $f : D \to \mathbb{R}$ şi $u, v : (a, b) \to \mathbb{R}$ astfel încât punctul $(u(x), v(x)) \in D$, $\forall x \in (a, b)$. Considerăm funcţia compusă

$$F : (a, b) \to \mathbb{R}, \quad F(x) = f(u(x), v(x)).$$

Teoremă. Dacă funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ are derivate parţiale f'_u, f'_v dintre care cel puţin una este continuă şi dacă funcţiile $u, v : (a, b) \to \mathbb{R}$ sunt derivabile, atunci funcţia

$$F : (a, b) \to \mathbb{R} \quad F(x) = f(u(x), v(x))$$

este derivabilă şi avem

$$F'(x) = f'_u\,(u(x), v(x)) \cdot u'(x) + f_v\,(u(x), v(x)) \cdot v'(x).$$

Demonstraţie. Să presupunem că f'_u este continuă. Fie $x_0 \in (a, b)$. Vom calcula $F'(x_0)$. Avem

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(u(x), v(x)) - f(u(x_0), v(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{f(u(x), v(x)) - f(u(x_0), v(x))}{x - x_0} + \frac{f(u(x_0), v(x)) - f(u(x_0), v(x_0))}{x - x_0}.$$

Aplicăm teorema lui Lagrange diferenţei de la numărătorul primei fracţii. Rezultă că există ξ între $(u(x_0)$ şi $u(x)$ astfel încât

$$\frac{F(x) - F(x_0}{x - x_0} =$$

$$= f'_u(\xi, v(x)) \cdot \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} + \frac{f(u(x_0), v(x)) - f(u(x_0), v(x_0))}{v(x) - v(x_0)} \cdot \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}.$$

Trecem la limită în ambii membri ai acestei egalităti pentru $x \to x_0$ şi ţinem seama că f'_u este continuă. Rezultă că

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f'_u(u(x_0), v(x_0)) \cdot u'(x_0) + f'_v(u(x_0), v(x_0)) \cdot v'(x_0).$$

Formula dată de această teoremă se mai poate scrie sub forma

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Dacă funcţia compusă este de forma $F(x) = f\,[u_1(x), ..., u_n(x)]$, formula de derivare se poate generaliza:

$$F'(x) = f'_{u_1} \cdot u'_1 + f'_{u_2} \cdot u'_2 + ... + f'_{u_n} \cdot u'_n$$

sau

$$\frac{dF}{dx} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_i} \cdot \frac{du_i}{dx}.$$

Formula dedusă se aplică şi pentru calculul derivatelor de ordin superior. Să calculăm derivata de ordinul doi a lui F, în cazul în care derivatele mixte f''_{uv} şi f''_{vu} sunt continue, deci egale.

Vom deriva funcţia $F'(x) = f'_u(u, v) \cdot u' + f'_v(u, v) \cdot v'$. Avem

$$F''(x) = (f''_{u^2} \cdot u' + f''_{uv} \cdot v') \cdot u' + f'_u \cdot u'' + (f''_{vu} \cdot u' + f''_{v^2} \cdot v') \cdot v' + f'_v \cdot v'' =$$

$$= f''_{u^2} \cdot (u')^2 + 2f''_{uv} \cdot u' \cdot v' + f''_{v^2} \cdot (v')^2 + f'_u \cdot u'' + f'_v \cdot v'',$$

sau, cu altă notaţie

$$\frac{d^2F}{dx^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{d^2v}{dx^2}.$$

Exemplu. Să se calculeze derivatele de ordinul întâi şi ordinul doi pentru funcţia $F(x) = f(x^2, \sin x)$, unde f are derivate parţiale de ordinul întâi şi ordinul doi continue.

Notăm $u = x^2$ şi $v = \sin x$, deci $F(x) = f[u(x), v(x)]$.

$$F'(x) = f'_u(u,v) \cdot u'(x) + f'_v(u,v) \cdot v'(x) = 2x \cdot f'_u(u,v) + \cos x \cdot f'_v(u,v).$$

$$F''(x) = 2f'_u(u,v) + 2x\,(f''_{u^2} \cdot u'(x) + f''_{uv} \cdot v'(x)) - \sin x \cdot f'_v(u,v) +$$
$$+ \cos x \cdot (f''_{vu} \cdot u'(x) + f''_{v^2} \cdot v'(x)) =$$
$$= 2f'_u + 2x\,(2x \cdot f''_{u^2} + \cos x \cdot f''_{uv}) - \sin x \cdot f'_v + \cos x\,(2xf''_{uv} + f''_{v^2} \cdot \cos x) =$$
$$= 4x^2 f''_{u^2} + 4x \cos x \cdot f''_{uv} + \cos^2 x \cdot f''_{v^2} + 2f'_u - \sin x \cdot f'_v.$$

Funcţiile compuse considerate până acum sunt funcţii compuse de o variabilă. Regula dedusă se aplică şi funcţiilor compuse de două sau mai multe variabile.
Să considerăm $F(x,y) = f(u,v)$, unde u şi v sunt funcţii de x şi y. Atunci

$$F(x,y) = f[u(x,y), v(x,y)]$$

este o funcţie compusă de variabile x şi y. Presupunem că f are derivate parţiale de ordinul întâi şi cel puţin una este continuă, iar u şi v au derivate parţiale. Derivatele parţiale ale funcţiei F sunt

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

sau, cu altă scriere a derivatelor parţiale

$$F'_x(x,y) = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x$$

$$F'_y(x,y) = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y$$

Dacă f, u şi v au derivate parţiale de ordinul doi, în condiţiile în care teorema lui Schwarz are loc să calculăm de exemplu F''_{y^2}. Trebuie să derivăm în raport cu y funcţia

$$F'_y(x,y) = f'_u(u,v) \cdot u'_y + f'_v(u,v) \cdot v'_y.$$

Avem

$$F''_{y^2}(x,y) = \left(f''_{u^2} \cdot u'_y + f''_{uv} \cdot v'_y\right) \cdot u'_y + f'_u \cdot u''_{y^2} + \left(f''_{vu} \cdot u'_y + f''_{v^2} \cdot v'_y\right) \cdot v'_y + f'_v \cdot v''_{y^2} =$$

$$= f''_{u^2} \cdot \left(u'_y\right)^2 + 2 \cdot f''_{uv} \cdot u'_y \cdot v'_y + f''_{v^2} \cdot \left(v'_y\right)^2 + f'_u \cdot u''_{y^2} + f'_v \cdot v''_{y^2}.$$

Curs 9

FUNCŢII OMOGENE

Considerăm o mulţime $D \subset \mathbb{R}^n$ cu proprietatea că pentru $\forall x \in D$ şi $\forall t > 0$, avem $tx \in D$. O astfel de mulţime se numeşte **con** în $\mathbb{R}^n$.

Definiţie. Funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ este omogenă de ordinul p, $p \in \mathbb{R}$, dacă pentru orice $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D$ şi pentru orice $t > 0$, avem

$$f(tx_1, tx_2, ..., tx_n) = t^p \cdot f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Exemplu. $f(x, y) = \frac{xy^3}{x^2+y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$ este omogenă de ordinul doi pentru că

$$f(tx, ty) = \frac{t^4 xy^3}{t^2x^2 + t^2y^2} = t^2 f(x, y).$$

Teoremă. Identitatea lui Euler.

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie care are derivate parţiale continue.
Funcţia f este omogenă de ordinul p, dacă şi numai dacă este îndeplinită relaţia

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = p \cdot f(x),\ \forall x = (x_1, ..., x_n) \in D,$$

numită identitatea lui Euler.

Demonstraţie. Condiţia este necesară: presupunem că f este omogenă şi demonstrăm că are loc identitatea lui Euler.
Cum f este omogenă, avem

$$f(tx_1, tx_2, ..., tx_n) = t^p \cdot f(x_1, x_2, ..., x_n),\ \forall x = (x_1, ..., x_n) \in D,\ \forall t > 0.$$

Notăm $tx_1 = u_1, ..., tx_n = u_n$ şi avem $f(u_1, ...u_n) = t^p \cdot f(x_1, ..., x_n)$. Derivăm această relaţie în raport cu t:

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot u_1'(t) + ... + \frac{\partial f}{\partial u_n} \cdot u_n'(t) = pt^{p-1} \cdot f(x_1, ..., x_n)$$

sau

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{\partial f}{\partial u_i}(tx_1, ..., tx_n) = pt^{p-1} \cdot f(x_1, ..., x_n).$$

Pentru $t = 1$, obţinem

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n) = p \cdot f(x_1, ..., x_n).$$

Condiţia este suficientă: presupunem că f îndeplineşte identitatea lui Euler şi arătăm că atunci f este omogenă.
Considerăm funcţia

$$F:(0,\infty)\to\mathbb{R},\quad F(t)=\frac{f(tx_1,...,tx_n)}{t^p}.$$

Notăm $tx_i=u_i,\ i=\overline{1,n}$ şi derivăm:

$$F'(t)=\frac{t^p\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial u_i}(u_1,...,u_n)\cdot u_i'-pt^{p-1}f(u_1,...,u_n)}{t^{2p}}=$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^n tx_i\frac{\partial f}{\partial u_i}(u_1,...,u_n)-pf(u_1,...,u_n)}{t^{p+1}}=0,$$

pentru că la numărător apare identitatea lui Euler scrisă în punctul $tx=(tx_1,...,tx_n)=(u_1,...,u_n)$.
Din $F'(t)=0$ rezultă că F este constantă, deci $F(t)=F(1)$.

$$\Rightarrow\frac{f(tx_1,...,tx_n)}{t^p}=f(x_1,...,x_n),$$

deci f este funcţie omogenă.

Exemplu. Fie $f(x,y,z)=x^k\cdot\frac{xy+yz}{z^2},\ z\neq0$. Să se calculeze $xf'_x+yf'_y+zf'_z$.
Soluţie. Funcţia f este omogenă de ordinul k: $f(tx,ty,tz)=t^k\cdot f(x,y,z)$, deci este îndeplinită identitatea lui Euler

$$\Rightarrow xf'_x+yf'_y+zf'_z=k\cdot f(x,y,z).$$

FORMULA LUI TAYLOR PENTRU FUNCŢII DE MAI MULTE VARIABILE

Această formulă permite exprimarea unei funcţii ca suma dintre un polinom şi un rest. Vom da mai întâi formula pentru funcţii de două variabile.
Fie $D\subset\mathbb{R}^2$ un domeniu convex: $\forall M_0,M_1\in D$ rezultă că şi segmentul $M_0M_1\subset D$. Vom folosi operatorul de derivare:

$$\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]f=(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(n)}f=\sum_{k=0}^n C_n^k\cdot(x-a)^{n-k}\cdot(y-b)^k\cdot\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\,\partial y^k}$$

Teoremă. Fie $f:D\to\mathbb{R}$. Dacă $f\in C^n(D)$ şi dacă f are derivate parţiale de ordinul $n+1$, atunci pentru orice două puncte $(a,b)\in D$, şi $(x,y)\in D$, are loc relaţia

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{1}{1!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]f(a,b)+\frac{1}{2!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(2)}f(a,b)+$$

$$+...+\frac{1}{n!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(n)}f(a,b)+R_n(x,y),$$

unde

$$R_n(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(n+1)}f(c,d),$$

iar $c=a+\theta(x-a),\ d=b+\theta(y-b),\ \theta\in(0,1)$ numită formula lui Taylor de ordinul n a funcţiei f, relativ la punctul (a,b).

Dacă considerăm $(a,b)=(0,0)$, atunci se obţine formula lui Mac-Laurin:

$$f(x,y)=f(0,0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(k)}f(0,0)+R_n(x,y),$$

unde

$$R_n(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)}f(\theta x,\theta y),\ \theta\in(0,1).$$

Formula lui Taylor restrânsă la primul termen (n=0) este formula lui Lagrange pentru funcţii de două variabile: dacă f este continuă pe $D\subset\mathbb{R}^2$ şi are derivate parţiale de ordinul întâi, atunci

$$f(x,y)-f(a,b)=(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(\xi\,\eta)+(y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta),$$

unde $\xi=a+\theta(x-a),\ \eta=b+\theta(y-b),\ \theta\in(0,1)$.

Exemplul 1. Să se scrie formula lui Taylor pentru

$$f(x,y)=x^2-xy+2y^2-x+1,\ \text{în punctul } (2,1).$$

Soluţie. Avem nevoie de valoarea lui f şi de derivatele parţiale ale funcţiei f în punctul $(2,1)$.

$$f(2,1)=3,\ f'_x(2,1)=2,\ f'_y(2,1)=2,\ f''_{x^2}=2,\ f''_{y^2}=4,\ f''_{xy}=-1.$$

Avem:

$$f(x,y)=f(2,1)+\frac{1}{1!}\left[(x-2)\frac{\partial}{\partial x}+(y-1)\frac{\partial}{\partial y}\right]f(2,1)+\frac{1}{2!}\left[(x-2)\frac{\partial}{\partial x}+(y-1)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(2)}f(2,1)=$$

$$=f(2,1)+\frac{1}{1!}\left[(x-2)\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)+(y-1)\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)\right]+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[(x-2)^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1)+(y-1)^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,1)+2(x-2)(y-1)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(2,1)\right]=$$

$$=3+2(x-2)+2(y-1)+(x-2)^2+2(y-1)^2-(x-2)(y-1).$$

În ipoteze analoage celor de mai sus, formula lui Taylor se poate generaliza pentru funcţii de p variabile. Fie $D\subset\mathbb{R}^p$, $f:D\to\mathbb{R}$, $x=(x_1,...,x_p)\in D$, $a=(a_1,...,a_p)\in D$. Avem:

$$f(x)=f(a)+\frac{1}{1!}\left[(x_1-a_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+...+(x_p-a_p)\frac{\partial}{\partial x_p}\right]f(a)+...+$$

$$+\frac{1}{n!}\left[(x_1-a_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+...+(x_p-a_p)\frac{\partial}{\partial x_p}\right]^{(n)}f(a)+R_n(x),$$

unde

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}\left[(x_1-a_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+...+(x_p-a_p)\frac{\partial}{\partial x_p}\right]^{(n+1)}f(c),\ \text{iar } c=a+\theta(x-a),\ 0<\theta<1.$$

Exemplul 2. Să se liniarizeze funcţia $f(x,y,z)=xyz+\ln(xyz)$ în jurul punctului $(1,1,2)$. Soluţie. Scriem formula lui Taylor pentru $n=1$. Avem

$$f(x,y,z)=f(1,1,2)+\frac{1}{1!}\left[(x-1)\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,2)+(y-1)\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,2)+(z-2)\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,2)\right]+R_1$$

$$f(1,1,2)=2+\ln 2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(1,1,2)=3,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,,2)=3,\ \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,2)=\frac{3}{2}.$$

$$\Rightarrow f(x,y,z) \approx 2 + \ln 2 + 3(x-1) + 3(y-1) + \frac{3}{2}(z-2) = 3x + 3y + \frac{3}{2}z - 7 + \ln 2.$$

DIFERENŢIALA

Fie U şi V spaţii vectoriale peste corpul numerelor reale.

Definiţie. Aplicaţia $T : U \to V$ se numeşte aplicaţie linară dacă îndeplineşte condiţiile:

1. $T(x+y) = T(x) + T(y), \ \forall x, y \in U.$

2. $T(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot T(x), \ \forall x \in U, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

Observaţie. Dacă aplicaţia T este liniară, atunci $T(0) = 0$.

Definiţie. Aplicaţia $\|\cdot\| : U \to [0, \infty)$ care îndeplineşte condiţiile:
1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \ \forall x \in U, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + |y\|, \ \forall x, y \in U,$
se numeşte normă.

Exemplu. Funcţia $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty), \ \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$, este normă numită norma euclidiană.
Aplicaţia $d : U \times U \to \mathbb{R}, \ d(x,y) = \|x-y\|$ este metrică pe U. Un spaţiu liniar pe care s-a definit o normă, se numeşte **spaţiu liniar normat.**
Se demonstrează

Teorema. Fie U şi V spaţii normate. O aplicaţie liniară $T : U \to V$ este continuă, dacă şi numai dacă $\exists M > 0$ astfel încât $\|T(x)\| \leq M \cdot \|x\|$.

Corolar. Dacă $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este o aplicaţie liniară, atunci ea este continuă şi transferă mulţimi mărginite în mulţimi mărginite.

Definiţie. Fie U şi V spaţii liniare normate. Aplicaţia $f : U \to V$ este diferenţiabilă Fréchet în punctul $x_0 \in int(U)$, dacă există o aplicaţie $T : U \to V$ liniară şi continuă astfel încât
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\|f(x) - f(x_0) - T(x-x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Aplicaţia T se numeşte diferenţiala Fréchet a funcţiei f în punctul x_0 şi se notează $d\,f(x_0)$.
Notând $x - x_0 = h$, avem

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - T(h)\|}{\|h\|} = 0,$$

unde $T(h) = d\,f(x_0)(h)$ este diferenţiala lui f în punctul x_0 pentru creşterea h.
Funcţia f este diferenţiabilă pe U, dacă este diferenţiabilă în orice punct din U.

Teoremă. Diferenţiala unei funcţii într-un punct, dacă există, este unică.

Demonstraţie. Presupunem că f are două diferenţiale în punctul $x_0 : T_1$ şi T_2.
Fie $h \in U, \ h \neq 0$. Avem

$$\frac{\|T_1(h) - T_2(h)\|}{\|h\|} = \frac{\|T_1(th) - T_2(th)\|}{\|th\|} =$$

$$= \frac{\|T_1(th) + f(x_0) - f(x_0+th) + f(x_0+th) - f(x_0) - T_2(th)\|}{\|th\|} \leq$$

$$\leq \frac{\|T_1(th) + f(x_0) - f(x_0 + th)\|}{\|th\|} + \frac{\|f(x_0 + th) - f(x_0) - T_2(th)\|}{\|th\|} \to 0 \text{ pentru } t \to 0,$$

deoarece T_1 şi T_2 sunt diferenţiale ale lui f în punctul x_0. Rezultă că

$$T_1(h) = T_2(h), \quad \text{pentru} \;\; h \neq 0.$$

Dacă $h = 0$, atunci $T_1(h) = T_2(h) = 0$ pentru că T_1 şi T_2 sunt aplicaţii liniare. Rezultă că $T_1(h) = T_2(h)$, $\forall h \in U$.

Se demonstrează
Teorema. Fie U şi V spaţii liniare finit dimensionale. Dacă $f : U \to V$ este diferenţiabilă în punctul x_0, atunci f este continuă în punctul x_0.

DIFERENŢIALA FUNCŢIILOR REALE DE O VARIABILĂ REALĂ

Fie $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ derivabilă într-un punct $x \in A \cap A'$, $x \in int(A)$. Pentru că domeniul de defintţie şi domeniul valorilor lui f sunt $\mathbb{R}$, unde norma coincide cu modulul, definiţia diferenţiabilităţii în punctul x revine la:

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{|f(x+h) - f(x) - T(h)|}{|h|} = 0.$$

Pe de altă parte

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{|f(x+h) - f(x) - f'(x) \cdot h|}{|h|} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| = 0.$$

Din unicitatea diferenţialei unei funcţii într-un punct, rezultă că aplicaţia liniară

$$T : A \to \mathbb{R}, \; T(h) = f'(x) \cdot h,$$

este diferenţiala funcţiei f în punctul x, deci $d\,f(x)(h) = f'(x) \cdot h$.

Observaţie. Diferenţiala funcţiei identice $1_A : A \to A$, $1_A(x) = x$, $\forall x \in A$ este $d\,1_A(x)(h) = [1_A(x)]\,' \cdot h = h$ şi de aceea este justificată notaţia $h = dx$. Rezultă că

$$d\,f(x)(dx) = f'(x) \cdot dx, \; \forall x \in A.$$

În această egalitate, litera x din expresiile $d\,f(x)$ şi $f'(x)$ indică punctul la care se referă diferenţiala, respectiv derivata; dx este argumentul diferenţialei $d\,f(x)$.
Reţinem că diferenţiala este o funcţie: pentru orice $x \in A$, $d\,f(x)$ este o funcţie de argument dx.
Exemplu. Fie $f(x) = x - x^3 + 2$, $x \in \mathbb{R}$.
1. Să se calculeze diferenţiala lui f relativ la punctul x şi la punctul $x = -1$.
2. Să se calculeze diferenţiala lui f relativ la punctul x şi de argument $dx = 3$.
3. Să se calculeze valoarea diferenţialei lui f relativ la punctul $x = -1$ şi de argument $dx = 3$.
Soluţie.
1. $d\,f(x) = f'(x)dx = (1 - 3x^2)dx$, $d\,f(-1) = f'(-1)dx = -2dx$.
2. $d\,f(x)(3) = f'(x) \cdot 3 = (1 - 3x^2) \cdot 3 = 3 - 9x^2$.
3. $d\,f(-1)(3) = f'(-1) \cdot 3 = (-2) \cdot 3 = -6$.

Interpretare geometrică. Diferenţa $f(x_0 + h) - f(x_0) = MN$ reprezintă creşterea funcţiei f, pentru creşterea h a argumentului.

$$d\,f(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h = \operatorname{tg} \alpha \cdot h = \frac{TN}{M_0N} \cdot M_0N = TN.$$

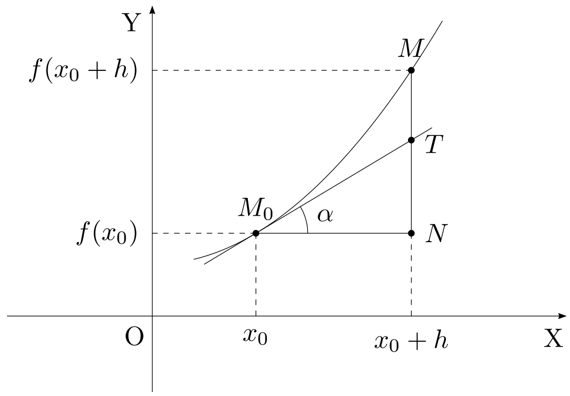

Figura 9.1: Interpretarea geometrică a diferenţialei

Când aproximăm creşterea $f(x_0+h)-f(x_0)$ prin $d\,f(x_0)(h)$, înlocuim segmentul MN cu TN.
Regulile de diferenţiere sunt o consecinţă a regulilor de derivare:

$$d\,(f+g) = d\,f + d\,g$$
$$d\,(f\cdot g) = g\cdot d\,f + f\cdot d\,g$$
$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\cdot d\,f - f\cdot d\,g}{g^2},\ g(x)\neq 0$$
$$d\,(f\circ u) = f'(u)\cdot d\,u.$$

Fie $f: A\to\mathbb{R}$ derivabilă de două ori într-un punct $x\in A\cap A'$. Diferenţiala de ordinul doi a funcţiei f calculată în punctul x, pentru creşterea h, se obţine prin diferenţierea primei diferenţiale, conform regulii deduse. Cum $d\,f(x)(h) = f'(x)\cdot h$, avem

$$d^2f(x)(h) = [d\,f(x)(h)]'\cdot h = (f'(x)\cdot h)'\cdot h = f''(x)\cdot h^2,$$

sau folosind convenţia $h = d\,x$, rezultă că $d^2f = f''\cdot d\,x^2$.

Analog, dacă f admite derivată de ordinul n în punctul x, atunci diferenţiala de ordinul n este $d^n\,f(x) = f^{(n)}(x)\cdot d\,x^n$.

Atenţie la notaţii:
1. $d\,x^2 = d\,x\cdot d\,x$
2. $d^2\,x = 0$, pentru că este diferenţiala a doua a funcţiei $f(x)=x$.
3. $d\,(x^2) = 2x\cdot d\,x$.

Observaţie. Formula lui Taylor se poate scrie folosind diferenţialele funcţiei f relative la punctul x_0 pentru creşterea $x-x_0$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{d\,f(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{d^2\,f(x_0)(x-x_0)}{2!} + ... + \frac{d^n\,f(x_0)(x-x_0)}{n!} + R_n,$$

unde

$$R_n = \frac{d^{n+1}\,f(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0)}{(n+1)!},\ 0<\theta<1.$$

Curs 10

DIFERENŢIALA FUNCŢIILOR REALE DE MAI MULTE VARIABILE REALE

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$ şi $a = (a_1, ..., a_n) \in int(A)$ punct de acumulare al mulţimii A.
Teoremă. Dacă $f : A \to \mathbb{R}$ este continuă şi are derivate parţiale continue în punctul a, atunci ea este diferenţiabilă în punctul a şi avem

$$d\,f(a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \cdot h_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \cdot h_n,$$

pentru $\forall h = (h_1, h_2, ..., h_n) \in A$.

Notând $h = (h_1, ..., h_n) = (d\,x_1, ..., d\,x_n)$, obţinem

$$d\,f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot d\,x_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \cdot d\,x_n.$$

Exemplu. Să se calculeze diferenţiala funcţiei

$$f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x^2 - xz + y^2$$

calculată în punctul (a, b, c).
Soluţie. Avem

$$d\,f(a, b, c) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c) \cdot d\,x + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c) \cdot d\,y + \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) \cdot d\,z = (2a - c) \cdot d\,x + 2b \cdot d\,y - a \cdot d\,z.$$

Diferenţiale de ordin superior

Dacă funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ are într-o vecinţate a punctului $a = (a_1, ..., a_n)$toate derivatele parţiale de ordinul p şi aceste derivate sunt continue în a, atunci f este diferenţiabilă de p ori în punctul a. Diferenţiala de ordinul p este

$$d^p\,f(a) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \cdot d\,x_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n} \cdot d\,x_n\right)^{(p)} f(a).$$

Dacă $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, atunci

$$d^p\,f(a, b) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot d\,x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot d\,y\right)^{(p)} f(a, b) = \sum_{k=0}^{p} C_p^k \frac{\partial^p\,f}{\partial x^{p-k} \partial y^k}(a, b) \cdot d\,x^{p-k} \cdot d\,y^k.$$

Observaţie. Formula lui Taylor pentru funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se poate exprima şi cu ajutorul diferenţialelor funcţiei f. Dacă $a = (a_1, ..., a_n)$ şi $x = (x_1, ..., x_n)$, atunci

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} d\,f(a)(x - a) + \frac{1}{2!} d^2\,f(a)(x - a) + ... + + \frac{1}{m!} d^m\,f(a)(x - a) + R_m,$$

unde

$$R_m = \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1} f(c)(x-a), \text{ iar } c = a + \theta(x-a), \ 0 < \theta < 1.$$

FUNCŢII IMPLICITE

Fie mulţimile $A, B \subset \mathbb{R}$ şi funcţia $F : A \times B \to \mathbb{R}$. Considerăm ecuaţia

$$(1) \qquad F(x,y) = 0$$

Definiţie. Dacă ecuaţia (1) are o singură soluţie în raport cu y, $\forall x \in A$, atunci funcţia $f : A \to B$ care satisface egalitatea

$$F(x, f(x)) = 0, \ \forall x \in A$$

se numeşte funcţie definită implicit de ecuaţia (1).

Mulţimea punctelor $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ care verifică ecuaţia (1) este graficul funcţiei implicite f.

Exemple 1. Fie $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x,y) = x^2 - y^3 + 1.$$

În acest caz, ecuaţia $F(x,y) = 0$, defineşte implicit funcţia $f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$.

2. Fie $F(x,y) = x^6 + x^2 + y^2 + 1, \ x, y \in \mathbb{R}$. Ecuaţia $F(x,y) = 0$ nu defineşte o funcţie implicită, deoarece nu are soluţii reale în raport cu necunoscuta y.

3. Dacă $F(x,y) = y^5 + 2x^3y^4 + y - 2$, atunci nu ştim dacă funcţia definită implicit de ecuaţia $F(x,y) = 0$ există şi ce reprezentare are ea.
Teorema care urmează dă condiţii suficiente pentru existenţa şi unicitatea funcţiei implicite în vecinătatea unui punct care verifică ecuaţia $F(x,y) = 0$.

Teoremă Fie $x_0, y_0 \in \mathbb{R}, \ U \in \mathcal{V}_{x_0}, \ V \in \mathcal{V}_{y_0}$. Dacă funcţia $F : U \times V \to \mathbb{R}$ este continuă şi satisface condiţiile:

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. există $F'_x, \ F'_y$ continue pe $u \times V$
3. $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$,

Atunci există vecinătăţile $U_0 \in \mathcal{V}_{x_0}, \ V_0 \in \mathcal{V}_{y_0}$ şi există funcţia $f : U_0 \to V_0$, astfel încât

(a) $f(x_0) = y_0$

(b) $F(x, f(x)) = 0, \ \forall x \in U_0$

(c) f are derivată continuă pe U_0 şi

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}.$$

Exemplu. Să se arate că ecuaţia

$$2 \cdot x \cdot e^y + y + 1 = 0$$

defineşte într-o vecinătate a punctului $x_0 = 0$ o funcţie implicită $y = y(x)$. Calculaţi $y'(x_0)$.
Soluţie. Verificăm dacă sunt îndeplinite ipotezele teoremei.
1. Trebuie ca $F(x_0, y_0) = 0$. $\Rightarrow y_0 = -1$. $\Rightarrow (x_0, y_0) = (0, -1)$.

2. $F'_x = 2 \cdot e^y,\ F'_y = 2 \cdot x \cdot e^y + 1$ sunt continue.

3. $F'_y(0, -1) = 1 \neq 0$

$\Rightarrow \exists U_0 \in \mathcal{V}_0,\ \exists V_0 \in \mathcal{V}_{-1}$ şi $\exists f : U_0 \to V_0$ astfel încât $y(0) = -1,\ F(x, y(x)) = 0,\ \forall x \in U_0$.
Funcţia implicită y are derivată continuă în U_0 şi

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \Rightarrow y'(x) = -\frac{2e^y}{2 \cdot x \cdot e^y + 1} = \frac{2 \cdot e^y}{y} \Rightarrow y'(0) = -\frac{2}{e}.$$

Practic, derivata funcţiei implicite definite de ecuaţia $F(x, y) = 0$ se găseşte derivând ecuaţia $F(x, y(x)) = 0$. Avem

$$F'_x(x,y) + F'_y(x,y) \cdot y'(x) = 0 \Rightarrow y'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

Pentru calculul derivatelor de ordin superior, se porneşte de la relaţia
$F'_x(x,y) + F'_y(x,y) \cdot y'(x) = 0$. Avem

$$F''_{x^2}(x,y) + F''_{xy}(x,y) \cdot y' + \left[F''_{yx}(x,y) + F''_{y^2}(x,y) \cdot y'\right] \cdot y' + F'_y(x,y) \cdot y'' = 0.$$

Aici se înlocuieşte y' şi găsim

$$y'' = -\frac{F''_{x^2}\left(F'_y\right)^2 - 2F''_{xy}F'_xF'_y + F''_{y^2}\left(F'_x\right)^2}{\left(F'_y\right)^3}.$$

Rezultatele anterioare se extind pentru ecuaţii cu trei şi mai multe variabile. Enunţăm teorema de existenţăa funcţiilor implicite de două variabile. Ne punem problema în ce condiţii o ecuaţie de forma $F(x, y, z) = 0$ defineşte o funcţie $z = z(x, y)$?

Teoremă. Fie $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$, $U \in \mathcal{V}_{(x_0,y_0)}$ şi $V \in \mathcal{V}_{z_0}$. Dacă $F : U \times V \to \mathbb{R}$ este continuă şi satisface condiţiile

1. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$
2. există $F'_x,\ F'_y,\ F'_z$ continue pe $U \times V$
3. $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$,

atunci există vecinătăţile $U_0 \in \mathcal{V}_{(x_0,y_0)},\ V_0 \in \mathcal{V}_{z_0}$ şi o funcţie $z : U_0 \to V_0$ astfel încât

(a) $z(x_0, y_0) = z_0$

(b) $F(x, y, z(x, y)) = 0,\ \forall x \in U_0$

(c) z are derivate parţiale continue pe U_0 şi

$$z'_x(x,y) = -\frac{F'_x(x, z(x,y))}{F'_z(x, z(x,y))},\ z'_y(x,y) = -\frac{F'_y(x, z(x,y))}{F'_z(x, z(x,y))}.$$

Exemplu. Să se arate că ecuaţia $z^3 - (x + y) \cdot z - 8 = 0$ defineşte într-o vecinătate a punctului $(0,0)$ o funcţie implicită z=z(x,y). Să se calculeze $z'_x(0,0),\ z'_y(0,0)$.

Soluţie. Din $F(x_0,y_0,z_0)=0 \Rightarrow z_0=2$.
$F'_x=-z,\ F'_y=-z,\ F'_z=3z^2-(x+y)$ sunt continue pe orice vecinătate a punctului $(0,0)$.
$F'_z(0,0,2)=12\neq 0$.
Rezultă că există o vecinătate U_0 a punctului $(0,0)$ şi o vecinătate V_0 a punctului $z_0=2$ şi o funcţie $z:U_0\to V_0$ astfel încât $z(0,0)=2,\ F(x,y,z(x,y))=0,\ \forall(x,y)\in U_0$. Derivatele parţiale sunt

$$z'_x(x,y)=-\frac{F'_x}{F'_z}=\frac{z}{3z^2-(x+y)},\ z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}=\frac{z}{3z^2-(x+y)}.$$

$$\Rightarrow z'_x(0,0)=\frac{1}{6},\ z'_y(0,0)=\frac{1}{6}.$$

Curs 11

EXTREME

Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ şi aplicaţia $f : D \to \mathbb{R}$.
Definiţie. Punctul $x_0 \in D$ se numeşte punct de minim local pentru funcţia f, dacă există o vecinătate $V \in \mathcal{V}_{x_0}$ astfel încât $f(x) \geq f(x_0),\ \forall x \in V \cap D$.
Punctul $x_0 \in D$ se numeşte punct de maxim local pentru funcţia f, dacă există o vecinătate $V \in \mathcal{V}_{x_0}$ astfel încât $f(x) \leq f(x_0),\ \forall x \in V \cap D$.

Punctele de maxim sau minim local se numesc puncte de extrem local, iar valorile funcţiei în aceste puncte, se numesc extreme locale.
Să presupunem că f are derivate parţiale în punctul $x_0 \in D$.

Definiţie. Punctul x_0 este punct critic sau punct staţionar pentru funcţia f, dacă

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0,\ i = \overline{1,n}.$$

Punctele de extrem din $int(D)$ se pot caracteriza printr-o teoremă analoagă teoremei lui Fermat.

Teoremă. Dacă $x_0 \in Int(D)$ este punct de extrem local pentru funcţia f şi f are derivate parţiale de ordinul întâi în punctul x_0, atunci x_0 este punct critic.

Demonstraţie. Fie $x_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in int(D)$, punct de extrem local pentru f. Dacă fixăm $n-1$ variabile, obţinem o funcţie de o variabilă

$$F(x_k) = f(x_1^0, ..., x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, ..., x_n^0),$$

care are în punctul x_k^0 un punct de extrem local. Conform teoremei lui Fermat rezultă

$$F'(x_k^0) = \frac{d}{d\,x_k} f\left(x_1^0, ..., x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, ..., x_n^0\right)\Big|_{x_k = x_k^0} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = 0,\ k = \overline{1,n}.$$

deci x_0 este punct critic.

Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă. Presupunem că $f : D \to \mathbb{R}$ este de clasă $C^p(D),\ p \geq 2$.

Definiţie. Aplicaţia $d^2f(x)$ este

pozitiv definită dacă $d^2f(x)(h) > 0,\ \forall h \in \mathbb{R}^n,\ h \neq 0$

negativ definită dacă $d^2f(x)(h) < 0,\ \forall h \in \mathbb{R}^n,\ h \neq 0$

pozitiv semidefinită dacă $d^2f(x)(h) \geq 0\ \forall h \in \mathbb{R}^n,\ h \neq 0$

negativ semidefinită dacă $d^2f(x)(h) \leq 0\ \forall h \in \mathbb{R}^n,\ h \neq 0.$

În alte situaţii, $d^2f(x)$ este nedefinită.

Teoremă. Fie $x_0 \in D$ punct critic pentru f.
Dacă $d^2f(x_0)$ este pozitiv definită, atunci x_0 este punct de minim local pentru f.
Dacă $d^2f(x_0)$ este negativ definită, atunci x_0 este punct de maxim local pentru f.

Demonstraţie. Scriem formula lui Taylor ataşată funcţiei f în punctul $x_0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$. Oricare este $x = (x_1, ..., x_n) \in D$, avem

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}\left[(x_1 - x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1} + ... + (x_n - x_n^0)\frac{\partial}{\partial x_n}\right] f(x_0) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[(x_1 - x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1} + ... + (x_n - x_n^0)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{(2)} f(c),$$

unde $c = x_0 + \theta(x - x_0),\ 0 < \theta < 1$. Pentru că x_0 este punct critic,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0,\ i = \overline{1,n},$$

deci

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2!}\left[(x_1 - x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1} + ... + (x_n - x_n^0)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{(2)} f(c),$$

sau

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}d^2f\left(x_0 + \theta(x - x_0)\right)(x - x_0).$$

Rezultă că pentru x într-o vecinătate a lui x_0, semnul diferenţei $f(x) - f(x_0)$ este dat de semnul diferenţialei a doua a funcţiei f în punctul x_0, pentru creşterea $x - x_0$.
Dacă $d^2f(x_0)(x-x_0) > 0$ într-o vecinătate V a lui $x_0 \Rightarrow f(x)-f(x_0) > 0,\ \forall x \in V \cap D$, deci x_0 este punct de minim local.
Dacă $d^2f(x_0)(x - x_0) < 0$ într-o vecinătate V a lui $x_0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) < 0,\ \forall x \in V \cap D$, deci x_0 este punct de maxim local pentru f.

Observaţie. Dacă $d^2f(x_0)$ este semidefintă, nu se poate spune dacă în x_0 există sau nu extrem. În acest caz se studiază valorile lui f într-o vecinătate a lui x_0. Dacă $d^2f(x_0)$ este nedefinită, atunci f nu are extrem în x_0. Un punct staţionar care nu este punct de extrem se numeşte punct şa.

Pentru a decide dacă un punct critic este punct de extrem, se poate folosi şi teorema lui Sylvester, care apare în teoria formelor pătratice.

Teorema lui Sylvester. Fie $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $x \in D$. Notăm

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x), \; i, j = \overline{1, n}.$$

1) $d^2 f(x)$ este pozitiv definită dacă şi numai dacă

$$a_{11} > 0, \; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, ..., \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

2) $d^2 f(x)$ este negativ definită dacă şi numai dacă

$$a_{11} < 0, \; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, ..., (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Observaţie. Fie cazul particular $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Presupunem că (x_0, y_0) este punct critic. Avem

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \; a_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = a_{21}, \; a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

şi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2.$$

Ţinând seama de teorema lui Sylvester şi de observaţiile anterioare, rezultă că:
Dacă $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 > 0$, atunci punctul (x_0, y_0) este punct de extrem. Acesta este punct de minim, dacă $a_{11} > 0$ sau este punct de maxim dacă $a_{11} < 0$.

Dacă $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 0$, atunci nu se poate decide dacă punctul (x_0, y_0) este punct de extrem. În acest caz se pot studia valorile lui f într-o vecinătate a punctului critic.

Dacă $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 < 0$, atunci (x_0, y_0) nu este punct de extrem.

Exemplu. Să se studieze extremele funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$.
Soluţie. Căutăm punctele critice, soluţiile sistemului

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4(x - y) = 0 \\ 4y^3 + 4(x - y) = 0 \end{cases}$$

rezolvăm sistemul şi găsim punctele critice $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(0, 0)$.
Diferenţiala a doua a funcţiei f este

$$d^2 f(x, y)(dx, dy) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 = (12x^2 - 4)dx^2 + 8dxdy + (12y^2 - 4)dy^2.$$

Studiem semnul diferenţialei a doua în punctele critice:

$$d^2 f(\sqrt{2}, -\sqrt{2})(dx, dy) = 4(5dx^2 + 2dxdy + 5dy^2).$$

Considerând această expresie ca o funcţie de gradul doi în dx, cu discriminantul $\Delta_x = 4dy^2 - 100dy^2 < 0 \Rightarrow 5dx^2 + 2dxdy + 5dy^2 > 0,\ \forall (dx, dy) \neq (0,0)$. Rezultă că $d^2 f(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ este pozitiv definită. Deci punctul $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ este punct de minim, iar $f_{min} = f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -8$.

În mod analog se arată că $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ este tot punct de minim local cu $f_{min} = -8$.

În punctul critic $(0,0)$, avem $d^2 f(x,y)(dx, dy) = 4 \cdot (dx - dy)^2 \leq 0$. Diferenţiala a doua poate fi egală cu zero pentru $dx = dy$, $(dx, dy) \neq (0,0)$ deci $d^2 f(0,0)$ este semidefinită. În acest caz studiul diferenţialei nu dă natura punctului critic. Vom studia valorile funcţiei într-o vecinătate a punctului $(0,0)$. Comparăm pe $f(0,0)$ cu valorile lui f într-o vecinătate a punctului $(0,0)$. Avem

$$f(x,x) = 4x^4 > 0,\ \forall x \neq 0.$$

$$f(x,0) = x^2(x^2 - 2) < 0, \text{ pentru } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow f(x,0) < f(0,0), \text{ pentru } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Rezultă că într-un disc cu centrul în $(0,0)$ şi rază mai mică decât $\sqrt{2}$, diferenţa $f(x,y) - f(0,0)$ nu-şi păstrează semnul, deci $(0,0)$ nu este punct de extrem.

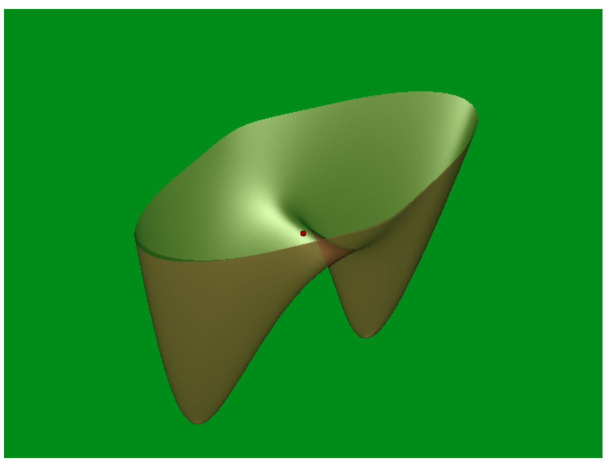

Figura 11.1: Punctul $(0,0)$ este punct şa al suprafeţei $z = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$

Extreme condiţionate.

Considerăm o funcţie de două variabile $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pe care o vom numi funcţie scop sau funcţie obiectiv. Fie $F(x,y) = 0$ o ecuaţie care defineşte implicit funcţia $y(x)$. Notăm $A = \{(x,y) \in D \mid F(x,y) = 0\}$.

Definiţie. Spunem că (x_0, y_0) este punct de extrem condiţionat al funcţiei f, cu legătura $F(x,y) = 0$ dacă există $V \in \mathcal{V}_{(x_0,y_0)}$ astfel încât $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ nu-şi schimbă semnul $\forall (x,y) \in V \cap A$.

Observaţie. Extremele lui f cu condiţia $F(x, y) = 0$ sunt extremele libere ale restricţiei lui f la mulţimea A. Ilustrăm această observaţie cu un exemplu:

Exemplu. Să se împartă un număr $a > 0$ în trei numere astfel încât produsul lor să fie maxim.
Soluţie. Notând cu x,y şi z cele trei numere, vom căuta maximul funcţiei
$f(x, y, z) = xyz,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0$ cu condiţia $x + y + z = a$.
Din legătură avem $z = a - x - y$, care se înlocuieşte în f şi se obţine o problemă de extrem liber pentru funcţia $g(x, y) = xy(a-x-y)$. Aceasta are în punctul $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ un maxim. Rezultă că soluţia problemei de extrem condiţionat este: în $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ funcţia $f(x, y, z) = xyz$ are un maxim egal cu $\frac{a^3}{27}$.
Metoda folosită la rezolvarea acestui exemplu se numeşte metoda înlocuirii variabilelor.

Revenim la problema de extrem condiţionat: căutăm extremele funcţiei $f(x, y)$ unde $y = y(x)$ este definită de ecuaţia $F(x, y) = 0$. Deci căutăm extremele funcţiei $f(x, y(x))$, funcţie de o variabilă. În punctele de extrem trebuie ca $f'(x, y(x)) = 0$. Avem

$$f'_x + f'_y \cdot y' = 0,\ \text{unde } y' = \frac{F'_x}{F'_y} \Rightarrow f'_x - f'_y \cdot \frac{F'_x}{F'_y} = 0 \text{ sau } f'_x \cdot F'_y = f'_y \cdot F'_x.$$

Punem această relaţie sub forma

$$\frac{f'_x}{F'_x} = \frac{f'_y}{F'_y} = -\lambda,$$

de unde

$$\begin{cases} f'_x + \lambda F'_x = 0 \\ f'_y + \lambda F'_y = 0 \\ F(x, y) = 0 \end{cases}$$

Ţinând seama de aceste consideraţii, este justificată
Metoda multiplicatorilor lui Lagrange:
1. Se scrie funcţia lui Lagrange: $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot F(x, y)$.
2. Se rezolvă sistemul

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = f'_x + \lambda F'_x = 0 \\ \mathcal{L}'_y = f'_y + \lambda F'_y = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda = F(x, y) = 0 \end{cases}$$

şi găsim punctele critice pentru funcţia $\mathcal{L}$.

3. Se studiază semnul diferenţialei $d^2\,\mathcal{L}$ în punctele critice, folosind dacă este nevoie şi diferenţiala legăturii.

Exemplul 1. Să se înscrie în elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ un dreptunghi de arie maximă.
Soluţie. Fie $M(x, y)$ un vîrf al dreptunghiului, situat pe elipsă. Vom căuta maximul funcţiei

$f(x,y) = 4xy,\ x > 0,\ y > 0$, cu legătura $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Funcţia lui Lagrange este

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 4xy + \lambda \cdot \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right).$$

Rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 4y + \frac{2\lambda}{a^2}x = 0 \\ \mathcal{L}'_y = 4x + \frac{2\lambda}{b^2}y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

Primele două ecuaţii

$$\begin{cases} \frac{\lambda}{a^2}x + 2y = 0 \\ 2x + \frac{\lambda}{b^2}y = 0 \end{cases}$$

formează un sistem omogen, a cărui soluţie trebuie să verifice ecuaţia elipsei, deci soluţie diferită de cea banală. Condiţia este

$$\begin{vmatrix} \frac{\lambda}{a^2} & 2 \\ 2 & \frac{\lambda}{b^2} \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow \lambda = \pm 2ab$$

Pentru $\lambda = -2ab$ rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} -\frac{2b}{a}x + 2y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

şi obţinem soluţia $\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\ \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$.
Pentru $\lambda = 2ab$ nu se obţin soluţii strict pozitive.
În continuare studiem semnul diferenţialei a doua a funcţiei $\mathcal{L}$ în punctul critic. Avem

$$d^2\mathcal{L}(x,y)(d\,x, d\,y) = \mathcal{L}''_{x^2}d\,x^2 + 2\mathcal{L}''_{xy}d\,xd\,y + \mathcal{L}''_{y^2}d\,y^2 = \frac{2\lambda}{a^2}d\,x^2 + 8d\,xd\,y + \frac{2\lambda}{b^2}d\,y^2$$

şi

$$d^2\mathcal{L}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)(d\,x, d\,y) = -4\left(\frac{b}{a}d\,x^2 - 2d\,xd\,y - \frac{a}{b}d\,y^2\right) = -4\left(\sqrt{\frac{b}{a}}d\,x - \sqrt{\frac{a}{b}}d\,y\right)^2 \leq 0.$$

Deci $d^2\mathcal{L}$ este negativ semidefinită. Vom studia diferenţiala legăturii. Avem

$$\frac{2x}{a^2}d\,x + \frac{2y}{b^2}d\,y = 0, \text{ iar pentru } x = \frac{a}{\sqrt{2}},\ y = \frac{b}{\sqrt{2}} \ \Rightarrow d\,x = -\frac{a}{b}d\,y.$$

$$\Rightarrow d^2\mathcal{L}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)(d\,x, d\,y) = -4\left(-2\sqrt{\frac{a}{b}}d\,y\right)^2 < 0,\ \forall (d\,x, d\,y) \neq (0,0).$$

Rezultă că în punctul $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ funcţia are un punct de maxim local.

Curs 12

ŞIRURI DE FUNCŢII

Fie $(f_n)_{n\geq 1}$ un şir de funcţii reale definite pe aceeaşi mulţime $A \subset \mathbb{R}$. Punctul $x_0 \in A$ se numeşte punct de convergenţă pentru şirul (f_n), dacă şirul de numere reale $(f_n(x_0))$ este convergent. Totalitatea punctelor de convergenţă ale şirului (f_n) formează mulţimea de convergenţă a şirului de funcţii (f_n). Această mulţime poate să fie egală sau inclusă în A sau poate fi vidă.

Exemplul 1. Şirul de funcţii (f_n), $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x+n^2$ are mulţimea de convergenţă vidă, pentru că

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} (x+n^2) = \infty, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Exemplul 2. Fie şirul de funcţii (f_n),

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n + 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Să determinăm mulţimea de convergenţă. Avem

$$\lim_{n\to\infty} \left(x^n + 1 + \frac{1}{n+1} \right) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } |x| < 1 \\ 2, & \text{dacă } x = 1 \\ \infty, & \text{dacă } x > 1 \\ \nexists, & \text{dacă } x \leq -1. \end{cases}$$

Rezultă că mulţimea de convergenţă este $(-1, 1]$.

Considerăm din nou şirul de funcţii (f_n), definite pe mulţimea A având mulţimea de convergenţă $M \neq \emptyset$. Fie $f : M \to \mathbb{R}$.

Definiţie. Şirul de funcţii (f_n) **converge punctual** la f pe mulţimea M, dacă pentru orice $x \in M$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.
Notaţie: $f_n \xrightarrow{p} f$ pentru $n \to \infty$ sau $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.
O definiţie echivalentă este următoarea:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \ \exists n(\epsilon, x) \text{ astfel încât } \forall n > n(\epsilon, x) \text{ să avem } |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Definiţie. Şirul de funcţii (f_n) este **convergent uniform** către funcţia f pe mulţimea M, dacă şi numai dacă $\forall \epsilon > 0$, există un rang $n(\epsilon)$, care depinde numai de ϵ, astfel încât $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ pentru $\forall n > n(\epsilon)$.
Notaţie: $f_n \xrightarrow{u} f$.

Interpretare geometrică. Dacă (f_n) converge uniform la f pe mulţimea M, atunci $\forall \epsilon > 0$, în jurul graficului funcţiei f există o bandă de lăţime 2ϵ în care se găsesc graficele tuturor funcţiilor f_n, cu $n > n(\epsilon)$.

Observaţie. În cazul convergenţei uniforme, avem

$$f_n \xrightarrow{u} f \Leftrightarrow \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| \to 0, \quad (n \to \infty).$$

Exemplu. Fie şirul de funcţii (f_n), $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{nx}{e^{nx}}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Să se arate că:
1. $f_n \xrightarrow{p} 0$.
2. Convergenţa nu este uniformă.
3. Restricţia la $[a, \infty)$ converge uniform $(a > 0)$.

Soluţie. 1. Pentru $x = 0$, avem

$$f_n(0) = 0, \text{ deci } \lim_{n \to \infty} f_n(0) = 0.$$

Pentru $x > 0$, avem

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{nx}{e^{nx}} = 0.$$

Rezultă că $f_n \xrightarrow{p} 0$.

2. Vom studia variaţia unei funcţii f_n. Avem

$$f_n'(x) = ne^{nx}\frac{1 - nx}{e^{2nx}}.$$

x	0		$\frac{1}{n}$		∞
f_n'	$+$	$+$	0	-	-
f_n	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

Figura 12.1: Tabel de variaţie

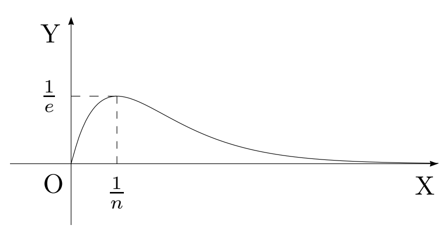

Figura 12.2: Graficul funcţiei f_n

Avem

$$\sup_{x \geq 0} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \geq 0} |f_n(x)| = \frac{1}{e}$$

şi deci

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \geq 0} |f_n(x)| \neq 0$$

adică şirul (f_n) nu converge uniform la funcţia 0.

3. Fie $x \geq a > 0$ şi fie $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $a > \frac{1}{n_0}$. Pentru $\forall n > n_0$ avem $\frac{1}{n} < a$. Din studiul variaţiei funcţiei f_n, observăm că pentru $x > \frac{1}{n}$, f_n descreşte.

$$\Rightarrow \forall n > n_0, \ \sup_{x \geq a} |f_n(x) - 0| = \sup_{x \geq a} |f_n(x)| = f_n(a) = \frac{na}{e^{na}} \to 0 \ \ (n \to \infty),$$

deci restricţia şirului (f_n) la $[a, \infty)$, $a > 0$, este uniform convergentă la zero.

Proprietăţi ale şirurilor de funcţii uniform convergente

Teoremă. Fie (f_n) un şir de funcţii, $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dacă funcţiile f_n sunt continue şi $f_n \stackrel{u}{\to} f$, atunci funcţia f este continuă pe intervalul $[a, b]$.

Demonstraţie. Fie $x_0 \in [a, b]$. Avem

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|. \quad (1)$$

Din $f_n \stackrel{u}{\to} f$, rezultă că $\forall \epsilon > 0$, există un rang $n(\epsilon)$ astfel încât pentru $n > n(\epsilon)$ avem

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{3} \text{ şi } |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Pentru că funcţiile f_n sunt continue pe compactul $[a, b]$, rezultă că $\exists \delta(\epsilon) > 0$ astfel încât

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3} \text{ pentru } |x - x_0| < \delta(\epsilon).$$

Cum membrul întâi al inegalităţii (1) nu depinde de numărul natural n, înseamnă că în membrul doi, acest număr poate fi oricât de mare, deci $n > n(\epsilon)$. Rezultă că are loc

$$|f(x) - f(x_0)| < 3 \cdot \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \quad \text{pentru} \quad |x - x_0| < \delta(\epsilon),$$

deci f este continuă în punctul x_0.

Teoremă. Fie şirul de funcţii (f_n), $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dacă funcţiile f_n sunt continue şi $f_n \stackrel{u}{\to} f$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx.$$

Demonstraţie. Din teorema anterioară, rezultă că funcţia f este continuă, deci integrabilă. Arătăm că

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Avem

$$\left| \int_a^b f_n(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx.$$

$$f_n \stackrel{u}{\to} f \Rightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists n(\epsilon) \text{ astfel încât } \forall n > n(\epsilon) \text{ avem } |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{b - a},\ \forall x \in [a, b].$$

Rezultă că

$$\left| \int_a^b f_n(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx \right| < \int_a^b \frac{\epsilon}{b - a}\, dx = \epsilon,$$

pentru $n > n(\epsilon)$, deci

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Observaţie. Teorema stabileşte condiţiile în care un şir de funcţii se poate integra termen cu termen.

Teoremă. Dacă (f_n) este un şir de funcţii din $C^1[a, b]$, care converge punctual spre o funcţie f şi dacă şirul derivatelor (f'_n) este uniform convergent, atunci f este derivabilă şi

$$\lim_{n\to\infty} f'_n(x) = f'(x),\ \forall x \in [a, b].$$

Demonstraţie. Să presupunem că $f_n' \xrightarrow{u} g$. Vom arăta că $g(x) = f'(x),\ \forall x \in [a, b]$.
Pentru $\forall n \in \mathbb{N}$ şi $\forall x \in [a, b]$, avem

$$\int_a^x f_n'(t)\, dt = f_n(x) - f_n(a).$$

Trecem la limită pentru $n \to \infty$ şi ţinem seama de teorema anterioară. Obţinem

$$\int_a^x g(t)\, dt = f(x) - f(a),$$

de unde, prin derivare, rezultă $g(x) = f'(x)$.
Observaţie. Teorema stabileşte condiţiile în care un şir de funcţii se poate deriva termen cu termen.

SERII DE FUNCŢII

Rezultatele privind şirurile de funcţii se transpun seriilor de funcţii prin intermediul şirului sumelor parţiale.

Fie $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ o serie de funcţii definite pe aceeaşi mulţime A şi $(S_n)_{n\geq 1}$, $S_n = f_1 + ... + f_n$ şirul sumelor parţiale ale seriei. Notăm cu M mulţimea de convergenţă a şirului de funcţii (S_n) şi considerăm o funcţie $S : M \to \mathbb{R}$.

Seria $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ este convergentă punctual la funcţia S, dacă $S_n \xrightarrow{p} S$.
Seria $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge uniform la funcţia S, dacă $S_n \xrightarrow{u} S$.
Funcţia $S : M \to \mathbb{R}$, definită ca $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$, se numeşte suma seriei $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ şi se notează

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Seria $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ este absolut convergentă, dacă seria $\sum\limits_{n\geq 1} |f_n|$ este convergentă.

Teorema lui Weierstrass.

Fie $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ o serie de funcţii definite pe o mulţime A. Dacă $|f_n(x)| \leq a_n,\ \forall n \in \mathbb{R},\ \forall x \in A$, unde $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ este o serie convergentă de numere reale, atunci seria de funcţii $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ este absolut şi uniform convergentă pe A.

Demonstraţie. Se foloseşte criteriul general de convergenţă al lui Cauchy şi inegalitatea

$$|f_{n+1}(x) + ... + f_{n+p}(x)| \leq a_{n+1} + ... + a_{n+p},\ \forall n,\ p \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in A.$$

Exemplu. Să se studieze natura seriei

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^2 + x^4},\ x \in \mathbb{R}.$$

Soluţie. Aplicăm teorema lui Weierstrass. Avem

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\cos(nx)}{n^2 + x^4}\right| \leq \frac{1}{n^2 + x^4} < \frac{1}{n^2},\ \text{unde} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ este convergentă}$$

deci seria de funcţii este absolut şi uniform convergentă.

Proprietăţile seriilor de funcţii sunt analoage celor ale şirurilor de funcţii:

1. Dacă $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ este o serie de funcţii continue, definite pe $[a, b]$, şi $\sum\limits_{n\geq 1} f_n \stackrel{u}{\to} S$, atunci S este funcţie continuă pe $[a, b]$.

2. Dacă $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ este o serie de funcţii continue pe $[a, b]$ şi $\sum\limits_{n\geq 1} f_n \stackrel{u}{\to} S$, atunci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b S(x)\, dx.$$

3. Dacă $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ este o serie de funcţii de clasă $C^1[a, b]$, convergentă punctual la S şi dacă seria $\sum\limits_{n\geq 1} f'_n$ este uniform convergentă pe $[a, b]$, atunci funcţia S este derivabilă şi

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x),\ \forall x \in [a, b].$$

Observaţie. Ultimele două proprietăţi dau condiţiile în care o serie de funcţii se poate integra sau deriva termen cu termen.