Capitolul 4

Integrale curbilinii în raport cu arcul

4.1 Noţiuni teoretice

Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$ un drum neted. Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe un domeniu $D \subset \mathbb{R}^3$ ce conţine traiectoria (γ), atunci are loc formula de calcul

$$\int_\gamma f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt.$$

4.2 Exerciţii

Problema 4.1. Să se calculeze $\int_C ye^{-x}\, ds$, unde C are ecuaţia

$$\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = 2 \operatorname{arctg} t - t \end{cases} \qquad t \in [0, 1].$$

Problema 4.2. Să se calculeze lungimea drumului

$$C\colon \quad x = e^{at} (a \sin bt - b \cos bt), \quad y = e^{at} (a \cos bt + b \sin bt), \quad t \in [0, 1], a, b > 0.$$

Problema 4.3. Să se calculeze masa spiralei logaritmice omogene

$$\begin{cases} x = \frac{1}{5}\, e^{\frac{t}{10}} \cos t \\ y = \frac{1}{5}\, e^{\frac{t}{10}} \sin t \end{cases} \qquad t \in [-4\pi, 4\pi].$$

Problema 4.4. Să se calculeze lungimea drumului parabolic $y = x^2$, $x \in [0, 3]$.

Problema 4.5. Să se calculeze lungimea cardioidei, reprezentată în coordonate polare prin $\rho = a(1 + \cos\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, unde $a > 0$.

Problema 4.6. Să se calculeze $\int_C (x+z)\,ds$, unde curba C are reprezentarea vectorială

$$C\colon \vec{r} = t^2\cos t\vec{\imath} + t^2\sin t\vec{\jmath} + 2t\vec{k}, \quad t\in[0,\pi].$$

Problema 4.7. Să se calculeze $\int_C (x^2-2y+z)\,ds$, unde C este cercul

$$C\colon \begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ y+z=0. \end{cases}$$

Problema 4.8. Să se calculeze masa şi centrul de greutate pentru firul material cu densitatea $\rho(x,y)=xy$, de grosime neglijabilă în raport cu lungimea, care are forma arcului din primul cadran al elipsei $3x^2+4y^2=1$.

4.3 Soluţii

Soluţie 4.1. Calculăm derivatele lui x şi y în funcţie de parametrul t

$$x'(t) = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$y'(t) = \frac{2}{1+t^2} - 1.$$

Cu formula $ds = \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$ se obţine elementul de arc

$$ds = \sqrt{\frac{4t^2}{(1+t^2)^2} + \left(\frac{2}{1+t^2}-1\right)^2}\,dt = \sqrt{\frac{4t^2}{(1+t^2)^2} + \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}}\,dt = dt.$$

Atunci

$$\begin{aligned} \int_C ye^{-x}\,ds &= \int_0^1 (2\operatorname{arctg} t - t)\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2u\,du - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt \\ &= \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\ln 2. \end{aligned}$$

Soluţie 4.2. Lungimea drumului C se calculează cu formula $\ell = \int_C ds$. Calculăm mai întâi derivatele lui x şi y în raport cu parametrul t.

$$x'(t) = ae^{at}(a\sin bt - b\cos bt) + e^{at}\left(ab\cos bt + b^2\sin bt\right) = \left(a^2+b^2\right)e^{at}\sin bt,$$
$$y'(t) = ae^{at}(a\cos bt + b\sin bt) + e^{at}\left(-ab\sin bt + b^2\cos bt\right) = \left(a^2+b^2\right)e^{at}\cos bt.$$

Acum calculăm elementul de arc ds cu formula $ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$.

$$ds = \sqrt{\left(a^2+b^2\right)^2 e^{2at} \sin^2 bt + \left(a^2+b^2\right)^2 e^{2at} \cos^2 bt}\, dt = \left(a^2+b^2\right) e^{at}\, dt.$$

Lungimea drumului va fi

$$\ell = \int_0^1 \left(a^2+b^2\right) e^{at}\, dt = \frac{a^2+b^2}{a}\left(e^a - 1\right).$$

Soluţie 4.3. Masa curbei C cu densitatea ρ se calculează cu $m = \int_C \rho\, ds$. Pentru problema noastră densitatea este o funcţie constantă $\rho = \rho_0$. Calculăm derivatele lui x şi y şi obţinem

$$x' = \frac{1}{50}\, e^{\frac{t}{10}} \cos t - \frac{1}{5}\, e^{\frac{t}{10}} \sin t,$$
$$y' = \frac{1}{50}\, e^{\frac{t}{10}} \sin t + \frac{1}{5}\, e^{\frac{t}{10}} \cos t$$

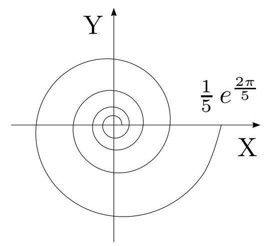

Figura 4.1: Spirala logaritmică

şi cu acestea elementul de arc este egal cu

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt = \frac{\sqrt{101}}{50}\, e^{\frac{t}{10}}\, dt.$$

Masa va fi

$$m = \rho_0 \int_{-4\pi}^{4\pi} \frac{\sqrt{101}}{50}\, e^{\frac{t}{10}}\, dt = \frac{\rho_0\sqrt{101}}{5}\left(e^{\frac{2\pi}{5}} - e^{-\frac{2\pi}{5}}\right) \approx 6.49\rho_0.$$

Soluţie 4.4. Elementul de arc se va exprima cu ajutorul formulei

$$ds = \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx.$$

Lungimea drumului parabolic va fi

$$\begin{aligned}\ell &= \int_0^3 \sqrt{4x^2+1}\, dx = \int_0^3 \frac{4x^2+1}{\sqrt{4x^2+1}}\, dx \\ &= \int_0^3 x \cdot \frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}\, dx + \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\, dx.\end{aligned}$$

Calculând prin părţi prima din cele două integrale, obţinem

$$\begin{aligned}\ell &= \int_0^3 x \cdot \left(\sqrt{4x^2+1}\right)' \, dx + \int_0^3 \frac{1}{2\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}} \, dx \\ &= x\sqrt{4x^2+1}\Big|_0^3 - \int_0^3 \sqrt{4x^2+1}\, dx + \frac{1}{2} \ln \left(x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} \right) \Bigg|_0^3 \\ &= 3\sqrt{37} - \ell + \frac{1}{2} \ln \left(3 + \frac{\sqrt{37}}{2} \right) + \frac{\ln 2}{2},\end{aligned}$$

de unde rezultă valoarea lungimii

$$\ell = \frac{3\sqrt{37}}{2} + \frac{1}{4} \ln \left(3 + \frac{\sqrt{37}}{2} \right) + \frac{\ln 2}{4} \approx 9.747.$$

Soluţie 4.5. Cardioida este o curbă care are forma unei inimi, vezi Figura 4.2. Calculăm elementul de arc cu ajutorul lui $\rho = \rho(\varphi)$, care este o funcţie de φ. Atunci conform transformării în coordonate polare vom avea

$$\begin{aligned} x &= \rho(\varphi) \cos \varphi, \\ y &= \rho(\varphi) \sin \varphi. \end{aligned}$$

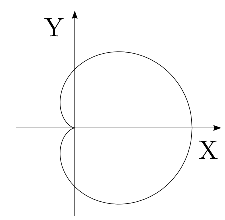

Figura 4.2: Cardioida

Derivatele lui x şi y în raport cu parametrul φ vor fi

$$\begin{aligned} x' &= \rho'(\varphi) \cos \varphi - \rho(\varphi) \sin \varphi, \\ y' &= \rho'(\varphi) \sin \varphi + \rho(\varphi) \cos \varphi. \end{aligned}$$

Folosind formula $ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$, deducem că formula generală a elementul de arc în coordonate polare va fi descrisă prin

$$ds = \sqrt{[\rho'(\varphi)]^2 + \rho^2(\varphi)}\, d\varphi.$$

În cazul nostru $\rho(\varphi) = a(1 + \cos \varphi)$ şi $\rho'(\varphi) = -a \sin \varphi$. Aşadar

$$ds = a\sqrt{1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\, d\varphi = a\sqrt{2 + 2\cos\varphi}\, d\varphi.$$

Lungimea cardioidei, datorită simetriei va fi, dublu lungimii curbei aflată în semiplanul superior.

$$\ell = 2\int_0^\pi a\sqrt{2(1+\cos\varphi)}\, d\varphi = 2a\int_0^\pi \sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi = 4a\int_0^\pi \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8a.$$

Soluţie 4.6. Avem $x(t) = t^2 \cos t$, $y(t) = t^2 \sin t$ şi $z(t) = 2t$. Calculăm elementul de arc

$$ds = \sqrt{(2t\cos t - t^2 \sin t)^2 + (2t \sin t + t^2 \cos t)^2 + 4}\, dt = (t^2 + 2)\, dt.$$

Va rezulta că

$$\int_C (x+z)\, ds = \int_0^\pi (t^2 \cos t + 2t)(t^2+2)\, dt = \frac{\pi^4}{2} - 4\pi^3 + 2\pi^2 + 20\pi.$$

Soluţie 4.7. Înlocuind pe $z = -y$ în ecuaţia sferei, obţinem $x^2 + 2y^2 = 9$. Parametrizând această elipsă prin $x = 3\cos t$ şi $y = \frac{3}{\sqrt{2}} \sin t$, cu $t \in [0, 2\pi)$, obţinem parametrizarea cercului C

$$C\colon \begin{cases} x = 3\cos t \\ y = \frac{3}{\sqrt{2}} \sin t \\ z = -\frac{3}{\sqrt{2}} \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi).$$

Elementul de arc este

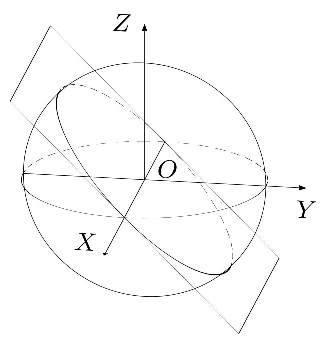

Figura 4.3: Intersecţia planului $y + z = 0$ cu sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

$$ds = \sqrt{(-3\sin t)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \cos t\right)^2 + \left(-\frac{3}{\sqrt{2}} \cos t\right)^2}\, dt = 3\, dt.$$

Avem

$$\int_C (x^2 - 2y + z)\, ds = \int_0^{2\pi} \left(9\cos^2 t - \frac{9}{\sqrt{2}} \sin t\right) 3\, dt = 27\pi.$$

Soluţie 4.8. Masa M se calculează prin $M = \int_C \rho(x,y)\,ds$, iar coordonatele centrului de greutate cu formulele

$$x_G = \frac{1}{M}\int_C x\cdot\rho(x,y)\,ds \quad \text{şi} \quad y_G = \frac{1}{M}\int_C y\cdot\rho(x,y)\,ds.$$

Parametrizând arcul de elipsă prin $x = \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t$ şi $y = \frac{1}{2}\sin t$, cu $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, obţinem

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t\cos t}{2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}\sin^2 t + \frac{1}{4}\cos^2 t}\,dt = \frac{1}{24\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\cdot\sqrt{7-\cos 2t}\,dt \\ &= \frac{1}{48\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\sqrt{7-u}\,du = \frac{8-3\sqrt{3}}{36}. \end{aligned}$$

Abscisa centrului de greutate este

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}\cos^2 t\cdot\frac{1}{2}\sin t\cdot\sqrt{\frac{1}{3}\sin^2 t + \frac{1}{4}\cos^2 t}\,dt \\ &\overset{u=\cos t}{=} \frac{9+8\sqrt{3}}{37}\int_0^1 u^2\sqrt{4-u^2}\,du \\ &\overset{u=2\sin t}{=} \frac{9+8\sqrt{3}}{37}\int_0^{\frac{\pi}{6}} 16\sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{9+8\sqrt{3}}{37}\int_0^{\frac{\pi}{6}} 4\sin^2 2t\,dt \\ &= \frac{9+8\sqrt{3}}{37}\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2(1-\cos 4t)\,dt = \frac{\pi(9+8\sqrt{3})}{37}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right). \end{aligned}$$

Ordonata centrului de greutate se calculează la fel

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{1}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t\cdot\frac{1}{4}\sin^2 t\cdot\sqrt{\frac{1}{3}\sin^2 t + \frac{1}{4}\cos^2 t}\,dt \\ &\overset{u=\sin t}{=} \frac{3(8+3\sqrt{3})}{74}\int_0^1 u^2\sqrt{3+u^2}\,du \\ &\overset{u=\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,t}{=} \frac{27(8+3\sqrt{3})}{74}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 t}{\cos^5 t}\,dt \\ &\overset{u=\sin t}{=} \frac{27(8+3\sqrt{3})}{74}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{u^2}{(1-u^2)^3}\,du. \end{aligned}$$

Desfăcând în fracţii simple expresia de sub integrală

$$\frac{u^2}{(1-u^2)^3} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{(1-u)^2} + \frac{C}{(1-u)^3} + \frac{D}{1+u} + \frac{E}{(1+u)^2} + \frac{F}{(1+u)^3},$$

cu coeficienţii $A = B = D = E = -\frac{1}{16}$ şi $C = F = \frac{1}{8}$, obţinem

$$y_G = \frac{27(8+3\sqrt{3})}{74}\cdot\frac{20-9\ln 3}{144} = \frac{3(8+3\sqrt{3})(20-9\ln 3)}{1184}.$$