

CURS 4

UNDE (continuare)

4.1 Mărimi energetice utilizate în mecanica undelor

Orice undă transportă o cantitate de energie. Aceasta este caracterizată cu ajutorul unor mărimi energetice prezentate în cele ce urmează.

Densitatea de energie a undei = energia de oscilație a undei pe unitatea de volum

$$w = \frac{W}{V} = \frac{T_{\max}}{V} = \frac{m u_{\max}^2}{2V} = \frac{1}{2} \rho \cdot u_{\max}^2 \quad (4.1)$$

W = energia transportată de undă

T_{\max} = energia cinetică a undei

V = volumul

u_{\max} = amplitudinea vitezei de oscilație

ρ = densitatea mediului

sau, deoarece $u_{\max} = \omega A$,

$$w = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \quad (4.2)$$

Obs: Viteza de propagare a undelor (\vec{v}) este diferită de viteza de vibrație (\vec{u}) a particulelor atinse de frontul de undă.

Intensitatea undei = fluxul de energie transportată de undă în unitate de timp prin unitatea de suprafață perpendiculară pe direcția de propagare a undei

$$I = \frac{W \cdot l}{S \cdot l \cdot t} = \frac{W}{S} \cdot \frac{l}{t} = w \cdot v = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v \quad (4.3)$$

unde v = viteza undei.

Relația (4.3) arată că *intensitatea undei reprezintă puterea medie transportată pe unitatea de suprafață perpendiculară pe direcția de propagare*

$$I = \frac{P}{S} \quad (4.4)$$

Unitatea de măsură a intensității undelor în SI este $[I]_{SI} = \frac{\text{watt}}{\text{m}^2}$.

Energia transportată de undă rămâne constantă dacă nu apar pierderi de energie în timpul propagării undei. \Rightarrow Intensitatea undei va rămâne constantă în timpul propagării unei unde plane.

\Rightarrow Intensitatea undei va scădea în cazul unei unde sferice; fie o undă sferică produsă de o sursă punctiformă ce emite cu puterea P ; intensitatea acestei unde este

$$I = \frac{P}{4\pi \cdot r^2} \quad (4.5)$$

care scade cu pătratul distanței sursă - suprafață.

4.2 Absorbția undelor

Undele care se propagă într-un mediu elastic descresc în intensitate mult mai rapid decât indică relația (4.5), spre exemplu, datorită pierderilor de energie mecanică sub formă de căldură.

Fie dI pierderea de intensitate pentru unda transmisă de-a lungul stratului de mediu de grosime dx . Ea este proporțională cu intensitatea undei incidente și cu grosimea stratului

$$dI = -\mu \cdot I \cdot dx \quad (4.6)$$

unde μ = **coeficientul de absorbție** al mediului (inversul grosimii mediului la parcurgerea căruia intensitatea undei descrește cu factorul e ; este măsurat în cm^{-1}).

Ecuția se integrează între limitele $x=0$ (I_0) și x (I)

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\mu \cdot \int_0^x dx \Rightarrow I = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot x} \quad (4.7)$$

Rezultatul arată că intensitatea unei descrește exponențial cu grosimea mediului străbătut de undă.

Pentru multe materiale

$$\mu = a \cdot \omega^2 \quad (4.8)$$

unde a = constantă de material (pentru aer $a = 4 \cdot 10^{-13} \text{ s/cm}$; după parcurgerea distanței de 1 km în aer, intensitatea unei unde cu frecvența de 100 Hz scade de aproximativ 1.015 de ori).

4.3 Inteferența undelor

Interferența undelor = suprapunere a două sau mai multe unde coerente. Unda rezultată prin interferență va avea o amplitudine ce depinde de amplitudinile undelor suprapuse precum și de defazajul dintre ele (*coerența undelor* = diferența de fază a undelor se păstrează constantă).

Analizăm 2 cazuri de interferență:

1. Fie două surse punctiforme de oscilații ce produc două unde oarecare neparalele ce se întâlnesc în punctul P (4.1), descrise de ecuațiile

$$\begin{aligned} \psi_1 &= A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \psi_2 &= A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \quad (4.9)$$

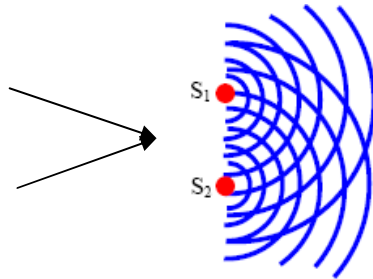


Fig.4.1 Interferența a 2 unde oarecare.

Amplitudinea unei rezultante se calculează prin metoda grafică, considerând că ecuațiile celor 2 unde se obțin prin proiectarea pe axa Oy a doi vectori rotitori, A_1 de fază $\omega_1 t + \varphi_1$ și A_2 de fază $\omega_2 t + \varphi_2$. Amplitudinea rezultantă se poate calcula însumând amplitudinile celor 2 vectori rotitori prin regula paralelogramului

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos[(\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1)] \quad (4.10)$$

Cu relația (4.11) se calculează amplitudinea medie pe o perioadă T a oscilației rezultând

$$\langle A^2 \rangle = A_1^2 + A_2^2 + \frac{1}{T} 2A_1 A_2 \int_0^T \cos[(\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1)] dt \quad (4.11)$$

Această relație este extrem de utilă la calcularea intensității unei deoarece $I \sim A^2$ (vezi (4.3)).

Discutie

- dacă diferența de fază $[(\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1)]$ nu este constantă, integrala funcției \cos pe o perioadă se anulează și (4.11) devine

$$\langle A^2 \rangle = A_1^2 + A_2^2 \quad (4.12)$$

de unde

$$I = I_1 + I_2 \quad (4.13)$$

- dacă $\omega_2 = \omega_1 = \omega$ și diferența de fază $\varphi_2 - \varphi_1 = \text{const.}$ (condiția de *coerență*), (4.13) devine

$$\langle A^2 \rangle = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (4.14)$$

Expresia (4.14) arată că intensitatea unei rezultante variază în funcție de diferența de fază.

2. Fie două unde paralele care interferează

$$\begin{aligned} \psi_1 &= A \sin(\omega t - kr_1) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right) \\ \psi_2 &= A \sin(\omega t - kr_2) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda} \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Unda rezultantă prin interferență va fi

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right) + A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda} \right) = 2A \cos 2\pi \cdot \frac{r_2 - r_1}{2\lambda} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_2 + r_1}{2\lambda} \right) \quad (4.16)$$

Expresia (4.16) descrie o nouă undă a cărei amplitudine A_R este

$$A_R = 2A \cos \Delta\varphi = 2A \cos(2\pi \frac{r_2 - r_1}{2\lambda}) = 2A \cos(\pi \frac{\Delta r}{\lambda}) \quad (4.17)$$

și care depinde de diferența de fază $\Delta\varphi$ introdusă de diferența de drum Δr dintre undele componente.

Discuție

a) **noduri** = punctele în care nu se produc oscilații; pentru aceste diferența de drum dintre cele două unde este un număr impar de semi-lungimi de undă

$$\cos(\pi \frac{\Delta r}{\lambda}) = 0 \Rightarrow \pi \frac{\Delta r}{\lambda} = \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{\pi}{2}(2n+1) \Rightarrow \Delta r = r_2 - r_1 = (2n+1) \frac{\lambda}{2} \quad (4.18)$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{r_2 - r_1}{2} = (2n+1) \frac{\pi}{2} \quad \text{unde } n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.19)$$

amplitudinea unei rezultante este nulă;

b) **ventre** = punctele în care se produc oscilații cu amplitudine maximă; pentru acestea diferența de drum dintre cele două unde este egală cu un număr par de semi-lungimi de undă

$$\cos(\pi \frac{\Delta r}{\lambda}) = \pm 1 \Rightarrow \pi \frac{\Delta r}{\lambda} = n\pi \Rightarrow \Delta r = r_2 - r_1 = 2n \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (4.20)$$

$$\Delta\varphi = n \cdot \pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{r_2 - r_1}{2} = n \cdot \pi \quad \text{unde } n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.21)$$

amplitudinile ating valorile maxime.

Fig.4.3 prezintă rezultatul interferenței a 2 unde generate de sursele O_1 și O_2 și pune în evidență aspectele discutate mai sus. Locurile geometrice ale punctelor cu amplitudinea de oscilație constantă (având diferența de drum Δr constantă) sunt niște *hiperbole*.

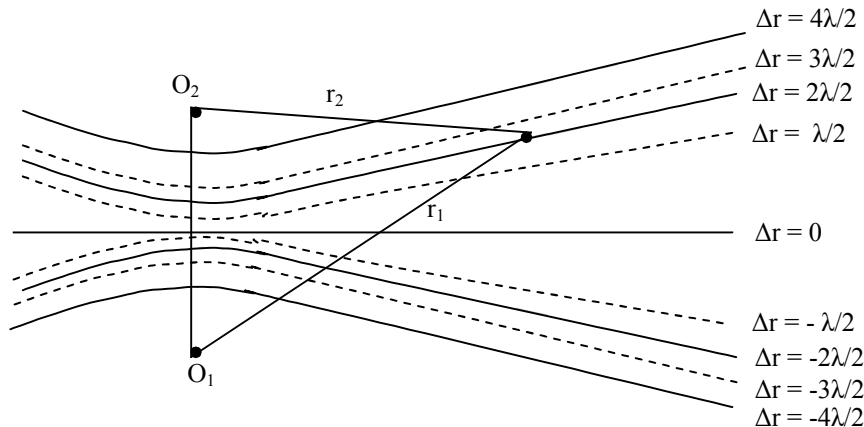


Fig.4.3 Interferența undelor.

4.4 Reflexia undelor

Reflexia undelor = fenomenul de întoarcere a unei unde în mediul din care provine atunci când întâlnește o suprafață de separație cu un alt mediu (fig.4.4). Pentru discutarea fenomenului de reflexie se definesc următoarele elemente: rază incidentă (I), rază reflectată (R), normala la suprafața de separare a două medii (N), unghiul de incidență (i) și unghiul de reflexie (r).

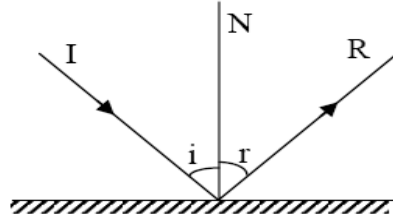


Fig.4.4 Reprezentare grafică a fenomenului de reflexie.

Legile reflexiei

- a) raza incidentă, raza reflectată și normala sunt coplanare
- b) unghiul de reflexie r este egal cu unghiul de incidență i
- c) la reflexia pe un perete rigid se face un salt de fază cu $\Delta\phi = \pi$, ce este echivalent cu o diferență de drum $\Delta r = \lambda/2$.

Pentru a demonstra a doua lege a reflexiei vom utiliza principiul lui Huygens aplicat la suprafața de reflexie (fig.46).

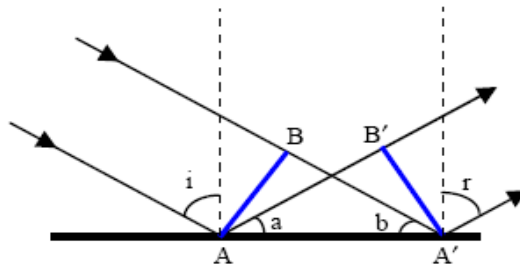


Fig.4.5 Demonstrarea legii a 2-a a reflexiei.

Deoarece frontul de undă este perpendicular pe rază, triunghiurile ABA' și $AB'A'$ sunt dreptunghice iar segmentele BA' și AB' sunt egale, ca spații parcurse de undă în același mediu și în același timp. Triunghiurile ABA' și $AB'A'$ sunt egale, de unde rezultă că unghiurile a și b sunt egale dar $a=i$ și $b=r$ ca unghiuri cu laturile perpendiculare, încât

$$i=r \quad (4.23)$$

4.5 Refracția undelor

Refracția undelor = fenomenul de schimbare a direcției de propagare a unei unde atunci când traversează suprafața de separație a două medii diferite (fig.4.7). Pentru discutarea fenomenului de refracție se definesc următoarele elemente: rază incidentă (I), rază refractată (R), normala la suprafața de separare a două medii (N), unghiul de incidență (i) și unghiul de refracție (r).

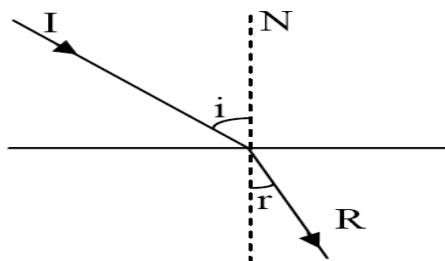


Fig.4.6 Reprezentare grafică a fenomenului de refracție.

Legile refracției

- a) raza incidentă, raza refractată și normala sunt coplanare;
- b) unghiul de refracție r are o valoare ce îndeplinește condiția:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n \quad (4.24)$$

unde n este o constanta numita *indicele de refracție* al mediului. Pentru a demonstra această lege vom utiliza principiul lui Huygens (fig.4.7).

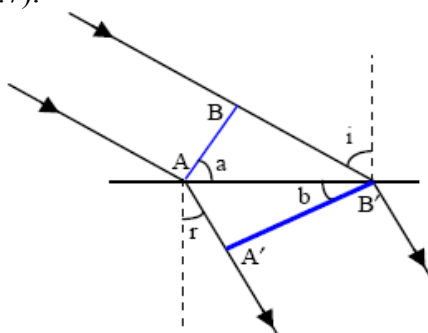


Fig.4.7 Demonstrarea legilor refracției.

Deoarece frontul de undă este perpendicular pe raze, tringhiurile ABB' și $AA'B'$ sunt dreptunghice încât se poate scrie ca $\sin a = BB'/AB'$ și $\sin b = AA'/AB'$. Făcând raportul lor și ținând cont că $a=i$ și $b=r$, rezultă

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{BB'}{AA'} \quad (4.25)$$

Deoarece $AA' = v_1 t$ și $BB' = v_2 t$ rezultă legea refracției

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2} = n \quad (4.26)$$

4.6 Unde staționare

Un caz particular de interferență cu multe aplicații este cel în care interferă două unde care au aceleași frecvențe și amplitudini și care se propagă în sensuri contrare (de exemplu, o undă directă care interferă cu unda reflectată). \Rightarrow se formează maxime (ventre) și minime (noduri) de interferență care au poziții fixe în funcție de diferența de drum dintre cele două unde. Deoarece figura de interferență este staționară în spațiu și timp se spune că se realizează o **undă staționară**.

Undele staționare apar într-un mediu finit.

Fie două asemenea unde descrise de relațiile

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= A \cdot \sin(\omega t - kx) \\ \Psi_2 &= A \cdot \sin(\omega t + kx) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Interferența produce unda rezultantă cu amplitudinea dată de

$$A_R^2 = A^2 + A^2 + 2A^2 \cdot \cos kx = 2A^2(1 + \cos kx) = 4A^2 \cos^2 \frac{kx}{2} \quad (4.28)$$

Discuție

Amplitudinea rezultantă este maximă (ventru) pentru $\cos \frac{kx}{2} = \pm 1$ sau $\frac{kx}{2} = n\pi$, adică pentru pozițiile

$$x = \frac{2n\pi}{k} = 2n\pi \frac{\lambda}{2\pi} = 2n \frac{\lambda}{2} \quad (4.29)$$

Amplitudinea rezultantă este minimă (nod) atunci când $\cos \frac{kx}{2} = 0$ sau $\frac{kx}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{\pi}{2}(1 + 2n)$, adică pentru pozițiile

$$x = 2(2n + 1) \frac{\pi}{2} \frac{\lambda}{2\pi} = (2n + 1) \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (4.30)$$

Modurile de vibrație pentru undele staționare generate într-o coardă fixată la capete sunt reprezentate în fig.4.8.

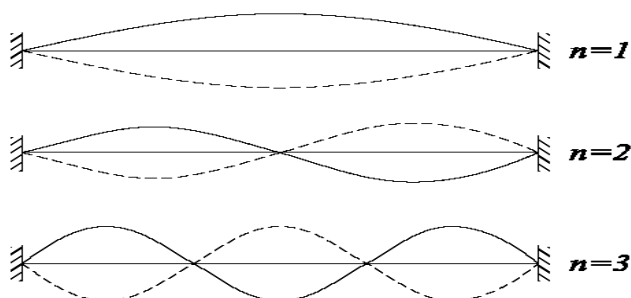


Fig.4.8 Moduri de vibrație ale unei staționare generate într-o coardă fixată la capete.

După cum se poate vedea, existența unei unde într-un spațiu limitat determină cuantificarea frecvențelor naturale permise ale vibrațiilor:

- armonică sau *frecvență fundamentală* (v) - cea mai joasă frecvență;
- *armonice superioare* - multiplii întregi ($2v$, $3v$, $4v$, ..., nv).

La realizarea undelor staționare într-o coardă fixată la capete este respectată condiția că lungimea coardei este egală cu un număr întreg de semilungimi de undă.

UNDE SONORE. ACUSTICĂ.

4.7 Natura undelor sonore.

Undele sonore = unde elastice care se caracterizează prin faptul că sunt capabile să producă senzații auditive (sunete).

Acustica = parte a fizicii care se ocupă cu producerea, propagarea și recepția sunetelor. La propagarea undelor sonore într-un mediu elastic; spațiul străbătut de acestea, în care punctele materiale se află în stare de oscilație, se numește **câmpul sonor** sau **câmp acustic**.

Câmpul sonor (câmp acustic) = spațiul străbătut de sunete, în care punctele materiale se află în stare de oscilație.

Undele sonore își au originea în corzile vibrante (pian, chitară, vioară), plăci și membrane vibrante (xilofon, boxe, tobă, corzile vocale umane), coloane de aer vibrante (orgă, clarinet), etc. Aerul transmite undele sonore care, după impactul cu membrana urechii, ajung în urechea internă. Aici, anumite vibrații de rezonanță excită nervul auditiv, acesta transmite informația la creier și apare astfel senzația de sunet.

Undele sonore periodice sau care sunt formate din unde armonice creează o senzație plăcută, asemănătoare *sunetelor muzicale*. Undele sonore de formă neregulată și aperiodică sunt percepute ca *zgomote*.

Pentru ca o undă mecanică să poată fi percepută de urechea omenească sub forma unui sunet trebuie să aibe proprietăți descrise mai jos, numite *calitățile sunetelor*.

4.8 Calitățile sunetelor

A.Înălțimea sunetului este determinată de frecvența sunetului și reprezintă calitatea sunetului de a fi mai grav (coborât) sau mai ascuțit (înalt). Frecvența sunetelor este cuprinsă între 20-20.000 Hz, undele mecanice cu frecvența în afara acestui interval neputând fi percepute ca sunete.

B Intensitatea sunetului trebuie privită din două puncte de vedere distincte și anume sub aspect fizic, atunci când vorbim despre *intensitate sonoră (acustică)*, respectiv sub aspect fiziologic, atunci când ne referim la *intensitatea auditivă*.

Intensitatea sonoră (I_s) = energia transportată în unitatea de timp pe unitatea de suprafață de către unda sonoră. Semnificația noțiunii de intensitate sonoră este identică cu aceea a intensității oricărei unde mecanice. Intensitate sonoră poate fi exprimată cu ajutorul relației (4.2)

$$I_s = \frac{1}{2} \rho \cdot v \cdot \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \frac{p_{so}^2}{\rho \cdot v} \quad (4.31)$$

Unitatea de măsură pentru intensitatea sonoră I_s , în SI, este W/m^2 .

Prag de audibilitate = valoare minimă a intensității unui sunet de o anumită frecvență, care poate fi percepută de om; este legată de energia minimă pe care unda trebuie să o transporte până la ureche și să o cedeze acesteia pentru a putea activa mecanismul său. Valoarea intensității sonore la pragul de audibilitate este $I_0 = 10^{-12} W/m^2$.

Prag de durere = valoare maximă a intensității unui sunet de o anumită frecvență, care, dacă este depășită, va produce senzația de durere la nivelul urechii. Valoarea intensității sonore la pragul de durere este de $I_d = 10^2 W/m^2$.

Nivel sonor (datorită faptului că există un domeniu extrem de larg al intensității sonore între pragul de durere și cel de audibilitate, s-a convenit definirea și utilizarea nivelului sonor) este definit

$$N_s = \log \frac{I_s}{I_0} \quad (4.32)$$

unde I_s = intensitatea sonoră a sunetului considerat

I_0 = intensitatea sonoră a sunetului de referință.

În Sistem Internațional este considerată ca intensitate de referință, intensitatea sonoră minimă care mai poate fi percepută (prag de durere) pentru sunetul de frecvență $\nu = 1000 Hz$ și are deci valoarea $I_0 = 10^{-12} W/m^2$.

Unitatea de măsură a nivelului sonor este **Belul (B)**, în practică folosindu-se însă un submultiplu al său și anume **decibelul (dB)**

$$N_s (dB) = 10 \log \frac{I_s}{I_0} \quad (4.33)$$

Intensitatea auditivă (I_a) = intensitatea sonoră a sunetului respectiv care produce aceeași senzație auditivă ca și sunetul de referință (1000 Hz). Introducerea acestei mărimi a fost necesară din motive fiziologice (urechea umană percepe două sunete care au aceeași intensitate sonoră, dar au frecvențe diferite, ca pe două sunete de tării diferite).

Nivelul auditiv

$$N_a (dB) = 10 \log \frac{I_a}{I_{a0}} \quad (4.34)$$

unde $I_a = \text{intensitatea auditivă a sunetului considerat}$
 $I_{a0} = \text{intensitatea auditivă a sunetului de referință.}$

Unitatea de măsură a nivelului auditiv este **fonul** = nivelul auditiv al unui sunet este de un fon dacă intensitatea auditivă este de 1,26 ori mai mare decât intensitatea auditivă de referință.

Tabelul 4.1 Nivelul sonor al unor sunete obișnuite.

Sursa	I_s/I_0	N_s [dB]	Descrierea
-	10^0	0	Prag de audibilitate
Respirația normală	10^1	10	De abia auzibil
Șoptit ușor (la 5 m)	10^3	30	Foarte încet
Conversație normală (la 1 m)	10^6	60	
Trafic intens	10^7	70	
Birou zgomotos, cu utilaje, fabrică	10^8	80	
Camion mare (la 15 m)	10^9	90	Pune în pericol auzul
Metrou	10^{10}	100	
Zgomot de construcții	10^{11}	110	
Concert rock, decolare avion	10^{12}	120	Pragul de durere
Pușcă cu aer comprimat, mitralieră	10^{13}	130	
Decolare de avion (apropiere)	10^{15}	150	

În fig.4.9 este reprezentat domeniul de percepție auditivă accesibil unei urechi umane normale. Sunt puse în evidență valorile minimă, respectiv maximă ale intensității unui sunet care mai poate fi percepute de om, pragul de audibilitate și respectiv, pragul senzației dureroase, ambele dependente frecvență.

C.Timbrul sunetului = *acea calitate care permite deosebirea a două sunete de aceeași intensitate și frecvență dar emise de două surse diferite; se datorează faptului că, în general, sunetul emis de o sursă sonoră nu este unul simplu, de o anumită frecvență, ci este compus dintr-o suprapunere de mai multe sunete simple, fundamentală însoțită de un număr de armonice superioare, într-o combinație unică; numărul acestor sunete, precum și distribuția energiei (amplitudinii) între ele, diferă de la o sursă la alta, determinând timbrul sunetului.*

Deoarece orice funcție periodică poate fi scrisă ca sumă de \sin și \cos (serie Fourier), forma unei unde sonore poate fi reprezentată prin expresia

$$f(t) = a_0 + a_1 \sin \omega_1 t + a_2 \sin \omega_2 t + b_1 \cos \omega_1 t + b_2 \cos \omega_2 t + \dots \quad (4.35)$$

$$\omega_2 = 2\omega_1, \omega_3 = 3\omega_1, \omega_4 = 4\omega_1 \dots$$

Valorile coeficienților $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ și b_1, b_2, b_3, \dots determină amplitudinea armonicii prezente în **spectrul acustic al sunetului**. Acesta diferă de la o sursă de sunet la alta (vezi fig.4.10).

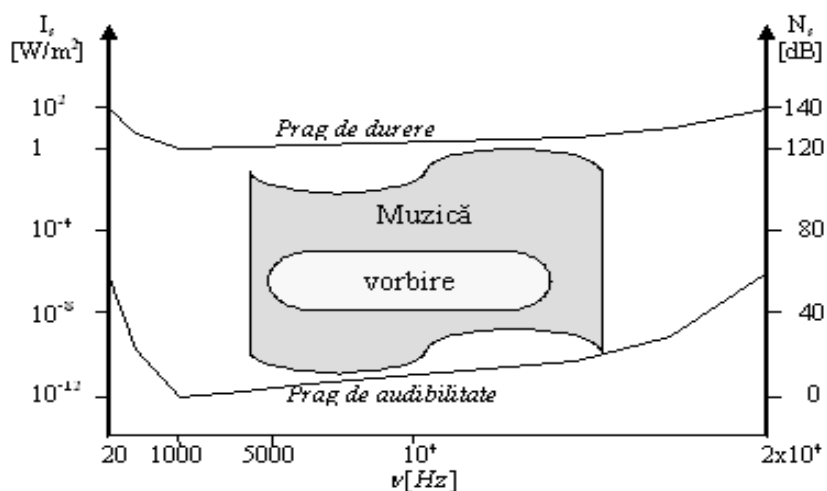


Fig.4.9 Domeniul de percepție auditivă accesibil urechii umane.

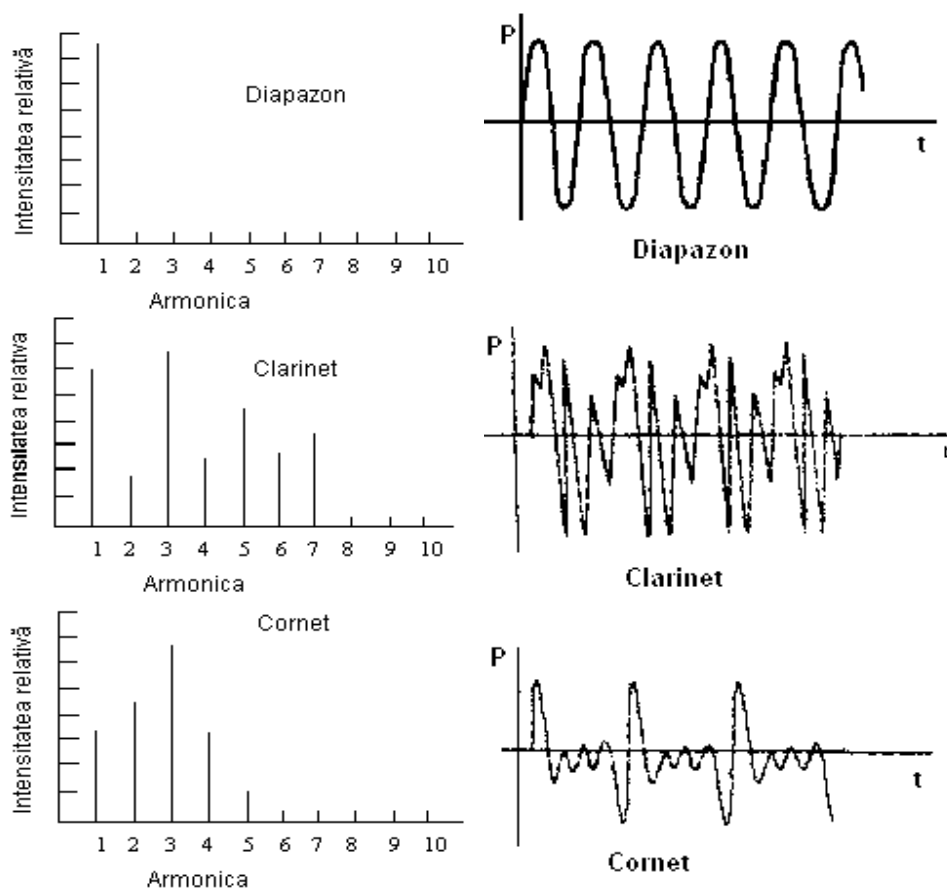


Fig.4.10 Spectrul acustic, respectiv formele undei notei LA pentru diferite instrumente.

Analiza sunetelor = decompunerea sunetelor în frecvențele componente.

Sinteza sunetelor = construcția unei unde sonore din componentele sale armonice.

4.9 Viteza undelor longitudinale

Undele sonore sunt unde longitudinale. Dorim să determinăm viteza undelor longitudinale într-o bară metalică (fig.4.11). Un capăt al barei este conectat la o sursă de unde longitudinale. Pentru

simplitate, vom studia propagarea unei unde sonore în lungul axei Ox. Planele verticale divid mediul de propagare compact în niște “felii” infinit mici, de masă dm fiecare. O undă produsă de sursă va trece prin bară cauzând deformări (compresii și destinderi succesive) de-a lungul direcției de propagare. Deplasarea atomilor oscilanți într-un anumit punct x este dată de funcția de undă $\Psi(x)$, care în punctul $x+dx$ devine $\Psi(x+dx)$.

Legea lui Hooke ce descrie forțele elastice produse în bară la trecerea undei este

$$\frac{F}{S} = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0} \quad (4.36)$$

unde E este modulul lui Young al barei, S este aria secțiunii barei, l_0 este lungimea nedeformată a unei porțiuni de bară, iar Δl este deformarea produsă acesteia de forța elastică.

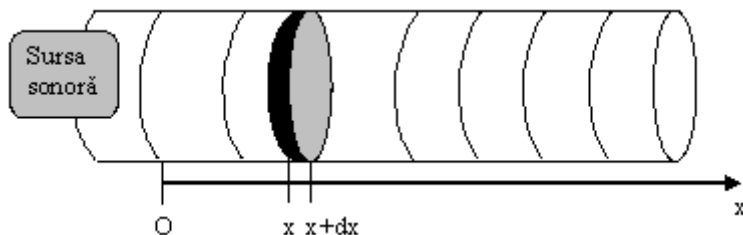


Fig.4.11 Deplasarea undelor sonore printr-o bară metalică

Fie forța elastică ce acționează asupra elementului infinit mic de bară de lungime inițială dx (înlocuim în formula (4.36) pe l_0 cu dx și Δl cu $d\Psi$, rezultând

$$\frac{F}{S} = E \cdot \frac{d\Psi}{dx} \quad F = ES \cdot \frac{d\Psi}{dx} \quad (4.37)$$

Diferențiala ecuației (4.37) ne dă forța elementară, dF , care acționează asupra elementului de volum $dV = S \cdot dx$

$$dF = \frac{dF}{dx} \cdot dx = \frac{d}{dx} \left(E \cdot S \frac{d\Psi}{dx} \right) dx = E \cdot S \frac{d^2\Psi}{dx^2} dx \quad (4.38)$$

Folosind legea II a lui Newton, dF se poate scrie

$$dF = dm \cdot a = dF = \rho \cdot dV \cdot \frac{d^2\Psi}{dt^2} = \rho \cdot S \cdot dx \frac{d^2\Psi}{dt^2} \quad (4.39)$$

unde am ținut cont că $dm = \rho \cdot dV$, ρ fiind densitatea barei și $a = \frac{d^2\Psi}{dt^2}$.

Din relațiile (4.38) și (4.39) rezultă

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \cdot \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \quad (4.40)$$

Comparând rezultatul obținut cu ecuația diferențială a undelor (3.36), obținem **viteza undelor longitudinale în mediu solid**

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (4.41)$$

Pentru a exprima viteza sunetelor în lichide, modulul lui Young trebuie substituit de

$$E = \frac{\frac{dF}{S}}{\frac{dl}{l_0}} = \frac{\frac{dp}{|dl| \cdot S}}{\frac{l_0 \cdot S}{V_0}} = \frac{dp}{|dV|} = \frac{1}{\chi} \quad (4.42)$$

unde $\chi = \text{coeficientul de compresibilitate al lichidului}$ (schimbarea relativă a volumului corespunzătoare variației relative de presiune; este negativă deoarece o creștere a presiunii ($dp > 0$) cauzează o micșorare a volumului ($dV < 0$))

$$\chi = -\frac{1}{dp} \cdot \frac{dV}{V} \quad (4.43)$$

Viteza undelor longitudinale în lichide va fi dată de relația

$$v = \sqrt{\frac{1}{\chi \cdot \rho}} \quad (4.44)$$

Pentru gaze, vom considera propagarea sunetului ca pe o transformare adiabatică (deoarece are loc foarte repede); fiind dată ecuația transformării adiabactice $pV^\gamma = \text{const.}$, o derivăm și obținem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp}(pV^\gamma) &= V^\gamma \cdot \frac{dp}{dp} + p\gamma \cdot V^{\gamma-1} \frac{dV}{dp} \\ \frac{d}{dp}(pV^\gamma) &= V^\gamma \left(1 + \frac{p\gamma}{V} \cdot \frac{dV}{dp} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.45)$$

de unde coeficientul de compresibilitate va fi

$$\chi = -\frac{1}{dp} \cdot \frac{dV}{V} = \frac{1}{\gamma \cdot p} \quad (4.46)$$

Viteza sunetului în gaze

$$v = \sqrt{\frac{\gamma \cdot p}{\rho}} \quad (4.47)$$

unde $\gamma = \text{coeficientul adiabatic al gazului}$, $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$.

În cazul gazului ideal, folosind ecuația de stare a gazului ideal $p/\rho = RT/\mu$, unde μ reprezintă masa unui mol de gaz, viteza sunetului în gazul ideal este:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma \cdot RT}{\mu}} \quad (4.48)$$

Unele valori experimentale ale vitezei undelor longitudinale în diferite medii sunt date în Tabelul 4.2 (valorile sunt date pentru frecvența undei $\nu = 1087 \text{ Hz}$, la temperatura $T = 300 \text{ K}$ și presiunea $p = 1 \text{ atm}$).

Tabel 4.2 Viteza sunetului în diferite medii

Mediu	$E \text{ sau } \chi [N/m^2]$	$\rho [g/cm^3]$	$v [m/sec]$
Sticlă	7.65×10^{10}	2.4	5990
Oțel	2.16×10^9	8	5000
Lemn	7×10^{10}	4.1	4200
Apă	$7 \times 10^{10}(\chi)$	1	1440
Aer	-	-	331

Sunetele se propagă cu o viteză mai mare în solide și cu o viteză mai mică în gaze (care au o densitate mai mică).

4.10 Presiunea sunetului

Fie propagarea sunetului într-un mediu gazos. Notăm deplasarea moleculelor la trecerea undei cu Ψ , viteza de oscilație a unei molecule va fi $v = d\Psi/dt$. La trecerea undei se produce o creșterea locală de presiune, $\Delta p = p_s$, numită *presiunea sonoră*. Din ecuația (4.43) presiunea sunetului este

$$\Delta p = p_s = -\gamma \cdot p \frac{dV}{V} \quad (4.49)$$

unde p este presiunea gazului.

Din ecuația (4.49) presiunea sunetului este

$$p_s = -\rho \cdot v^2 \frac{dV}{V} \quad (4.50)$$

Există o legătură directă între presiunea p_s și compresia relativă a gazului la un moment al propagării undei sonore. Compresia relativă a volumului dV/V este în legătură cu deplasarea maximă, sau cu amplitudinea A a particulelor oscilante. Fie în fig.4.14 un tub cu o coloană de gaz, respectiv volumul de gaz cuprins între secțiunile de la pozițiile x , respectiv $x+dx$. O dată cu mișcarea undei de-a lungul coloanei de gaz, moleculele se vor deplasa. Pentru a calcula deplasarea relativă de-a lungul tubului pentru o porțiune a coloanei de lungime infinit mică dx , trebuie să-i găsim prima derivată în raport cu x . Dacă admitem că $\Psi(x, t) = A \sin \omega(t - x/v)$, atunci deplasarea relativă este

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{\omega}{v} \cdot A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad (4.51)$$

Putem exprima variația relativă a volumului elementului infinit mic de coloană având secțiunea S

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{S \cdot \partial \Psi}{S \cdot \partial x} = \frac{dV}{V} \quad (4.52)$$

Din relațiile (4.52) și (4.53) obținem

$$\frac{dV}{V} = -\frac{\omega}{v} \cdot A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad (4.53)$$

Presiunea sunetului este atunci

$$p_s = \rho v \omega \cdot A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad (4.54)$$

4.11 Efectul Doppler

Efectul Doppler a fost descoperit de Johann Christian Doppler în anul 1842. El constă în faptul că frecvența la care undele sonore sunt recepționate la observator este diferită de frecvența la care acestea au fost emise de sursă atunci când sursa și observatorul sunt în mișcare relativă una față de cealaltă. Astfel, dacă sursa se mișcă și observatorul este în repaus, observatorul recepționează frecvența ν' diferită de frecvența ν a undelor emise de sursă. La fel, atunci când observatorul este în mișcare și sursa este în repaus, observatorul recepționează frecvența ν'' , diferită de frecvențele ν și ν' . Explicația constă în faptul că numărul de fronturi de undă care ajung la observator în unitatea de timp, care reprezintă frecvența sunetului perceput la observator, se modifică la mișcare relativă a sursei și observatorului. Astfel, din viața de toate zilele se cunoaște faptul că o persoană aflată pe peronul unei gări aude sirena locomotivei la o frecvență tot mai mare pe măsură ce aceasta se apropie, respectiv la o frecvență tot mai coborâtă după ce aceasta se îndepărtează.

Figura 4.12 prezintă emisia unei unde de către o sursă S aflată în repaus, respectiv aflată în mișcare. Să considerăm mai întâi că observatorul O este în repaus în timp ce sursa S se apropie de O cu viteza u (fig.4,13) Unda emisă de sursă se propagă cu viteza v în mediul considerat.

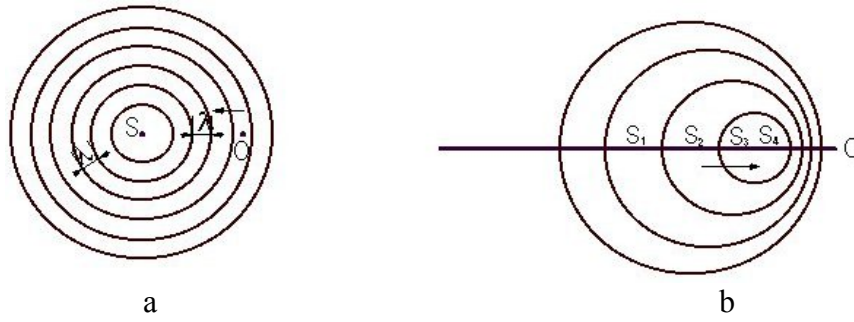


Fig.4.12 a. Sursă în repaus; b. sursă în mișcare.

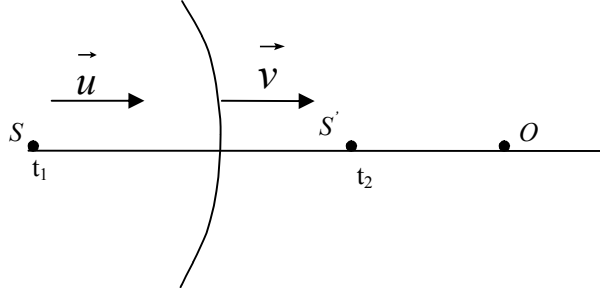


Fig.4.13 Sursa S se apropie cu viteza u de observatorul O aflat în repaus.

Presupunem că prima undă este emisă de sursa S la momentul t_1 . Frontul de undă va ajunge la observatorul O la momentul t_2 , după ce parcurge distanța $SO = v(t_2 - t_1) = v\Delta t$. La momentul t_2 sursa ocupă o nouă poziție S' , mai apropiată de O , deoarece sursa se apropie de O cu viteza u . Momentul t_2 corespunde emisiei ultimei unde de către sursa înainte ca prima undă emisă să fie recepționată de O . Să reținem faptul că undele emise de sursă în intervalul de timp $\Delta t = t_2 - t_1$, necesar primei unde pentru a atinge O , sunt cuprinse în intervalul spațial $S'O$. Dacă mai observăm faptul că numărul acestor unde, n , poate fi calculat ca

$$n = \frac{\Delta t}{T} \quad (4.55)$$

unde T reprezintă perioada undelor emise de sursă, putem exprima lungimea de undă a undelor recepționate de O sub forma

$$\lambda' = \frac{S'O}{n} = \frac{SO - S'S}{n} = \frac{(v\Delta t - u\Delta t)}{n} = \frac{(v - u)\Delta t}{\frac{\Delta t}{T}} = (v - u)T = \frac{v - u}{v} \quad (4.56)$$

Conform definiției lungimii de undă mai putem scrie

$$\lambda' = vT' = \frac{v}{v'} \quad (4.57)$$

unde T' este frecvența undelor recepționate de O . Egalarea relațiilor (4.56) și (4.57) ne conduce la

$$v' = \frac{1}{T'} = v \frac{v}{v - u} \quad (4.58)$$

În general, când observatorul este în repaus și sursa se deplasează cu viteza u față de observator, frecvența recepționată la observator este

$$v' = v \cdot \frac{v}{v \mp u} \quad (4.59)$$

unde semnul “-” la u se utilizează atunci când sursa se apropie de observator și “+” atunci când sursa se depărtează de observator.

Să presupunem acum că sursa este în repaus și observatorul se apropie de sursă cu viteza w (fig.4.14).

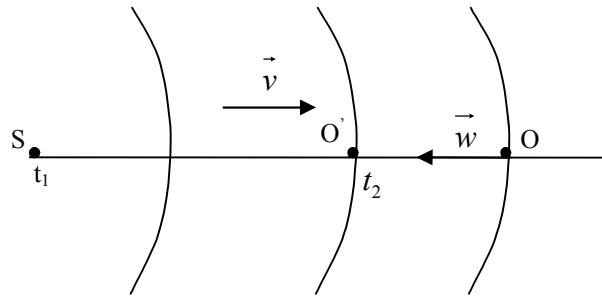


Fig.4.14 Observator O în mișcare, sursa S în repaus.

Să observăm faptul că în acest caz viteza relativă a undelor față de observator este $v+w$. Putem să exprimăm lungimea de undă a undelor emise de sursă ca

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu} \quad (4.60)$$

iar pe aceea a undelor recepționate de observator ca

$$\lambda'' = (v + w)T'' = \frac{v + w}{\nu''} \quad (4.61)$$

Din simpla observare a faptului că în cazul analizat nu se produce de fapt nici o schimbare a lungimii de undă ($\lambda = \lambda'$) rezultă egalitatea relațiilor (4.60) și (4.61), adică

$$\frac{v}{\nu} = \frac{v + w}{\nu''} \quad (4.62)$$

sau

$$\nu'' = \nu \frac{v + w}{v} \quad (4.63)$$

În general, când observatorul se deplasează cu viteza w și sursa este în repaus, frecvența recepționată la observator este

$$\nu'' = \nu \cdot \frac{v \pm w}{v} \quad (4.64)$$

unde semnul “+” la w se utilizează atunci când observatorul se apropie de sursă și “-” atunci când observatorul se depărtează de sursă.

Reunind relațiile (4.59) și (4.64) obținem formula

$$\nu' = \nu_0 \cdot \frac{v \pm w}{v \mp u} \quad (4.65)$$

care descrie toate situațiile legate de deplasarea relativă sursă-observator. Putem reține ușor rezultatul exprimat de formula (4.65) observând că atunci când sursa sau/și receptorul se apropie reciproc, frecvența recepționată la observator crește, iar când acestea se depărtează, frecvența recepționată la observator scade.

Efectul Doppler are aplicații importante:

- **radarul** folosit de poliție pentru măsurarea vitezei mașinilor aflate în trafic se bazează pe efectului *Doppler* al unde electromagnetice;

- **deplasarea spre roșu a spectrului luminii** provenite de la galaxiile îndepărtate (deoarece galaxiile se depărtează de noi, lumina emisă de ele va fi recepționată ca având frecvențe mai joase și lungimi de undă mai mari decât la sursă; cunoașterea acestui efect permițând măsurarea vitezei de deplasare a galaxiilor față de Pământ).

4.12 Unda de șoc

Dacă sursa sonoră (presupusă punctiformă) este în repaus, undele sonore care pornesc din acest punct sunt unde sferice, iar fronturile de undă sunt suprafețe sferice concentrice. În funcție de raportul ce poate exista între viteza sursei și viteza sunetului emis, distingem următoarele situații:

a) Viteza sursei sonore (u) mai mică decât viteza undei sonore emise (v) ($u < v$) (fig.4.15). Undele sonore se înconjoară una pe alta fără să se întretaie. Ele nu mai au același centru ci se aglomerează spre direcția în care se mișcă sursa. Se vede cum punctual A, spre care se îndreaptă sursa sonoră, este străbătut de un număr mai mare de unde în unitatea de timp (frecvența crește conform efectului Doppler). Situația se prezintă invers pentru punctual B, față de care izvorul se îndepărtează.

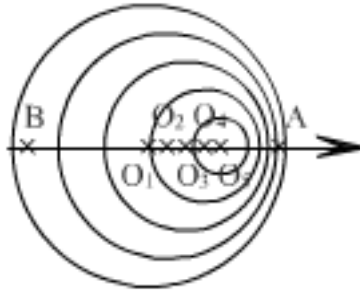


Fig.4.15 Undele sonore emise de sursă cu viteză mai mică decât a undelor emise ($u < v$).

b) Viteza sursei sonore (u) este egală cu viteza (v) a undei sonore emise ($u = v$) (fig.4.16). Undele sonore sunt tangente în fiecare moment într-un punct comun, punctul în care se găsește sursa în acel moment. Un observator așezat pe direcția spre care se mișcă sursa primește deodată toate undele sub forma unui bubuit (bangul sonic).

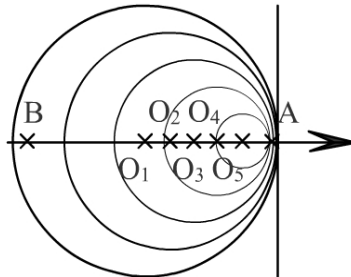


Fig.4.16 Undele sonore emise de sursă au viteza egală cu a undelor emise ($u = v$).

c) Viteza sursei sonore (u) este mai mare decât viteza (v) a undei sonore emise ($u > v$) (fig.4.17). Undele sonore se întretaie. Înfășurătoarea acestor unde este un con cu vârful în punctual în care se găsește sursa în momentul respectiv.

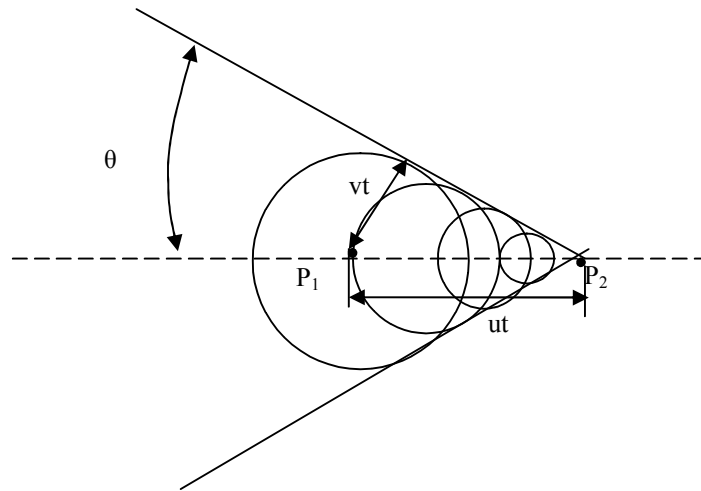


Fig.4.17 Undele sonore emise de o sursă ce are viteză mai mare decât a undelor emise ($u > v$). Unda de șoc.

Corpurile care se mișcă cu o viteză mai mare decât cea a sunetului (supersonice) produc o undă numită **unda de șoc (unda balistică, bang supersonic)**. Ea se realizează prin comprimarea aerului pe direcția de înaintare și nu are caracter periodic, reprezentând o perturbare a aerului care se propagă cu viteza sunetului. Asemenea unde apar în cazul avioanelor cu reacție și al proiectilelor. Să reținem că atunci când sursa se mișcă cu o viteză mai mare decât viteza undei, atunci nu vor exista unde în fața sursei. Lucrurile se petrec ca și cum sursa sonora ar trage după ea undele sonore emise. Astfel, un observator situat în partea spre care înaintează sursa recepționează undele sonore în ordinea inversă față de aceea în care au fost ele emise. Undele din spatele sursei se suprapun una peste alta formând unda de șoc care este auzită ca un zgomot puternic (bubuit) când ajunge la receptor. Să observăm faptul că învelitoarea undelor formează un con cu sursa la vârf.

Am amintit faptul că bang-ul supersonic este produs de avioanele care zboară cu viteza supersonică. O greșală obișnuită este că se consideră că fenomenul bang-ului sonic se produce numai în momentul depășirii vitezei sunetului. De fapt se produce tot timpul cât avionul se deplasează cu viteza supersonică și un bubuit va fi auzit de fiecare dată când unda de șoc trece pe deasupra unei persoane cu auz bun. Avionul produce de fapt două unde de șoc, una asociată cu vârful și, respectiv, a doua asociată cu coada sa. Cele două unde de șoc au forma de conuri cu vârfurile la vârful și, respectiv, la coada avionului. Fig.4.18 prezintă fenomenul bang-ului supersonic evidențiind unda de șoc, unghiul înfășurătoareii undelor sonore emise de avion 2θ și un grafic al variației presiunii la nivelul solului.

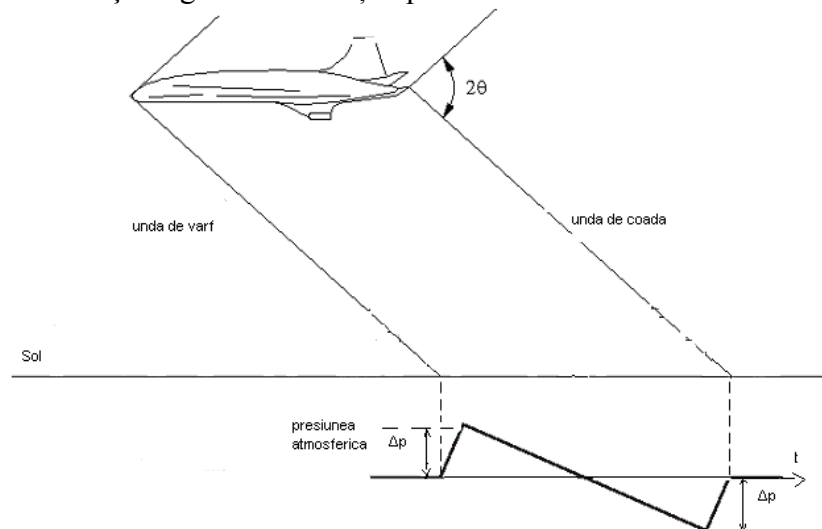


Fig.4.18 Undă de șoc dublă. Variația presiunii atmosferice sub influența undei de șoc.

Fig.4.18 prezintă și variația presiunii, datorată bang-ului supersonic, în funcție de timp.

4.13 Ultrasunetele

Undele ultrasonore (ultrasunetele) = unde cu frecvențe de peste 20.000 Hz, ieșind astfel din limitele de audibilitate ale urechii omenești.

Orientarea liliacilor se bazează pe faptul că aceștia emit semnale ultrasonore de frecvențe 30 – 60 kHz. O parte din acestea sunt recepționate de liliac sub formă de semnale ecou, ceea ce permite liliacului să simtă poziția unor obstacole. De asemenea, delfinii comunică între ei prin semnale ultrasonore.

Datorită lungimii undă mici, ultrasunetele se propagă sub formă de fascicule bine direcționate, spre deosebire de sunetele obișnuite care se împrăștie în toate direcțiile; de aceea ultrasunetele nu se difractă decât pentru obstacolele de dimensiuni foarte mici în timp ce sunetele obișnuite se difractă pe orice obstacol întâlnit.

Deoarece, intensitatea undelor este proporțională cu pătratul frecvenței, energia transportată de ultrasunete este mai mare decât energia sunetelor de aceeași amplitudine.

Deoarece coeficientul de absorbție depinde de frecvența undelor, ultrasunetele sunt puternic absorbite. Spre exemplu, distanța de propagare a ultrasunetelor în aer este mică (în jur de 1 km) decât a sunetelor. Un ultrasunet cu o frecvență de cca. 3000 kHz este practic absorbit complet după parcurgerea distanței de cca. 0,6 cm.

Cavitația = apariția unor bule care se ridică la suprafață și se sparg în zona parcursă de ultrasunete; ele se explică prin faptul că dilatările și comprimările succesive extrem de rapide care se produc în lichide la propagarea ultrasunetelor duc la apariția unor tensiuni mecanice locale foarte mari care fac să se “rupă” moleculele de lichid. Datorită energiei degajate prin acest proces iau naștere bulele care conțin vaporii și gazele dizolvate în lichid. Bulele se sparg dând naștere unor presiuni locale foarte mari care se manifestă sub formă de șocuri hidraulice în volume foarte mici. Deteriorarea paletelor turbinelor și a elicelor vapoarelor se explică prin fenomenul de cavitație produs de ultrasunetele generate de vibrațiilor mașinilor.

Pentru producerea ultrasunetelor pot fi folosite mai multe tipuri de generatoare de ultrasunete: *generatoare mecanice* (fluier ultrasonor, sirena ultrasonoră), *generatoare termice* (generarea ultrasunetelor se face pe baza vibrațiilor unui arc electric), *generatoare piezoelectrice*, *generatoare magnetostrictive*.

Generatorul piezoelectric (fig.4.19) se bazează pe *efectul piezoelectric* \Rightarrow supunând un cristal la deformări de tracțiune sau comprimare după anumite direcții, între fețele sale apar tensiuni electrice dependente de sensul și amplitudinea deformării. Efectul invers este *efectul de electrostricțiunea* = dilatări și comprimări succesive ale cristalului piezoelectric sub acțiunea unui câmp electric alternativ produc comprimări-dilatare succesive ale piezocuarțului \Rightarrow produc ultrasunete. Partea esențială a generatorului piezoelectric o constituie lama piezoelectrică pe fețele căreia sunt aplicați doi electrozi legați la o sursă de tensiune alternativă, lama vibrând cu frecvența egală cu a tensiunii aplicate \Rightarrow vibrațiile produc ultrasunete în mediul înconjurător. Asemenea generatoare produc ultrasunete cu frecvențe de cca. 150.000 kHz și intensități de la câteva zeci de W/cm^2 până la câteva sute de W/cm^2 .

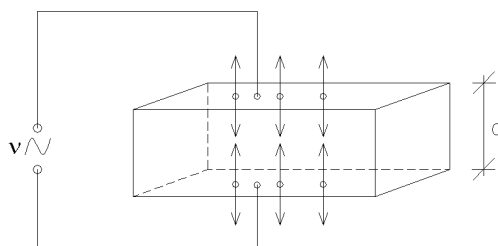


Fig.4.19 Generatorul ultrasonor piezoelectric.

Generatorul magnetostrictiv (fig.4.20) se bazează pe *efectul de magnetostricțiune* = deformarea corpurilor feromagnetice (fier, nichel, cobalt) sub acțiunea unui câmp magnetic. Introducând o bară realizată dintr-un astfel de material într-un câmp magnetic paralel cu lungimea ei (produs de exemplu de o bobină în care este introdusă bara), aceasta se deformează (se scurtează sau se alungește). Deformarea produsă depinde de sensul și intensitatea câmpului magnetic. Când câmpul magnetic variază periodic (curentul care străbate bobina fiind alternativ) bara se va comprima/alungi cu perioada de oscilație a câmpului (curentului). În cazul unor frecvențe suficient de mari ale curentului alternativ vibrațiile capetelor barei dau naștere la unde ultrasonore. Generatorul magnetostrictiv este avantajos pentru producerea ultrasunetelor de frecvență joasă (de la 20 ÷ 60 kHz) și energii considerabile.

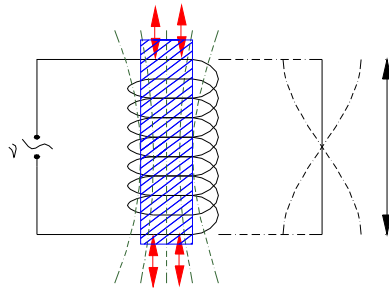


Fig.4.20 Generatorul ultrasonor magnetostrictiv.

Efectele fizico-chimice ale ultrasunetelor - distrugerea stărilor labile de echilibru, încălzirea mediului; formarea de sisteme disperse (emulsii și suspensii) și distrugerea de astfel de sisteme (coagulări); voalarea plăcilor fotografice; creșterea vitezei unor reacții chimice; explozia substanțelor puțin stabile (de exemplu iodura de azot) etc.

Terapia cu ultrasunete -ultrasunetele produc încălzirea și redistribuirea substanței din celulele vii ceea ce duce la folosirea lor în terapeutică (încălzirea anumitor țesuturi și masaje adânci) precum și la conservarea alimentelor (folosirea ultrasunetelor pentru distrugerea microorganismelor).

Măsurători cu ultrasunete – ex., măsurarea adâncimii mărilor. Procedul este același ca și în cazul folosirii sunetelor obișnuite, prezentând însă avantajul fasciculelor dirijate. De asemenea, se pot produce semnale foarte scurte ceea ce mărește precizia măsurării intervalului de timp dintre producerea semnalului direct și înregistrarea celui reflectat.

Ultrasunetele în procesele tehnologice - spălarea, curățarea, uscarea sau sudarea unor corpuri și de asemenea pentru prelucrarea unor piese; se introduce piesa (sau porțiunea de piesă) care trebuie prelucrată într-un lichid în care se găsesc în suspensie particule de praf abraziv dur \Rightarrow sub acțiunea unei surse de ultrasunete în lichid apare fenomenul de cavitație \Rightarrow datorită șocurilor hidraulice particulele de abraziv sunt lovite cu putere de suprafața piesei smulgând așchii din aceasta (pe acest principiu se bazează construirea unor mașini unelte care taie filetele și dinții pinioanelor fine, care rectifică piese complicate, efectuează operațiuni de tăiere și găurire pretențioase, etc.).

Defectoscopia ultrasonoră = controlul ultrasonor permite stabilirea existenței unor defecte (fisuri, goluri) în interiorul unor piese metalice masive. Principalele tipuri de defectoscoape ultrasonore utilizează transmisia sau reflexia ultrasunetelor.

Fig.4.21 prezintă un defectoscop ultrasonor care lucrează prin transmisie. Aici emițătorul și receptorul de ultrasunete sunt situate de o parte și de alta a piesei de studiat.

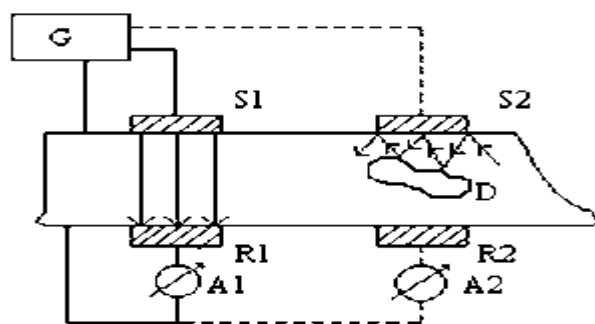


Fig.4.21 Defectoscop prin transmisie

Dacă între emițător și receptor nu există nici un defect (de exemplu între sursa S_1 și receptorul R_1) semnalul ultrasonor transmis va trece neatenuat producând o anumită deviație a acului aparatului de înregistrare (A_1). În cazul în care întâlnește un gol (D) o parte a semnalului ultrasonor este reflectat pe suprafața de separare dintre metal și aerul din golul respectiv și semnalul este mult atenuat ceea ce se va observa la aparatul indicator (A_2).