Теоретические материалы для проекта

Лоптев Сергей

3 ноября 2020 г.

Содержание

Часть I

Теория вероятностей

1 Дискретные распределения

1.1 Вероятность

Пусть задано некоторое множество возможных исходов (эксперимента) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. Это множество Ω называют **множеством элементарных исходов**. Всякое подмножество $A \subset \Omega$ называют **событием**. Функцию $\mathsf{P} : 2^\Omega \to [0, 1]$, удовлетворяющую следующим свойствам:

(i) $\mathsf{P}(\Omega) = 1$,

(ii) $A \cup B = \varnothing \implies \mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$ (правило суммы или аддитивность),

называют **вероятностной мерой**, а значение $\mathsf{P}(A)$ **вероятностью** события A.

1.2 Распределения

Распределение Бернулли Говорят, что случайная величина I_A обладает биномиальным распределением, если для некоторого события A и элементарного исхода ω

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

Биномиальное распределение Говорят, что случайная величина X обладает биномиальным распределением с параметром $p \in [0, 1]$, если для некоторого N

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, N\} \;\; \mathsf{P}(X = n) = \mathrm{C}_N^k \, p^k \, (1 - p)^{N-k}$$

Геометрическое распределение Говорят, что случайная величина X обладает геометрическим распределением с параметром $p \in [0, 1]$, если

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; \mathsf{P}(X = n) = p \, (1 - p)^{n-1}$$

Распределение Пуассона Говорят, что случайная величина X обладает распределением Пуассона с параметром λ ($X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$), если

$$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \;\; \mathsf{P}(X = n) = \frac{\lambda}{n!} \cdot e^{-\lambda}$$

1.3 Совместные распределения случайных величин

Пусть X, Y — две случайные величины на дискретном вероятностном пространстве с множествами (различных) значений $\{x_1, \ldots, x_k, \ldots\}$ и $\{y_1, \ldots, y_k, \ldots\}$ соответственно. Их **совместным распределением** называется вероятностная мера $\mu_{(X,Y)}$ на вероятностном пространстве всех пар (x_j, y_k), для которой

$$\mu_{(X,Y)}\left(\{(x_j, y_k)\}\right) = \mathsf{P}(\omega : \; X(\omega) = x_j, \; Y(\omega) = y_k) = \mathsf{P}(\{\omega : \; X(\omega) = x_j\} \cap \{\omega : \; Y(\omega) = y_k\})$$

1.4 Таблица совместного распределения и частное распределение

Совместное распределение двух случайных величин X, Y с множествами значений $\{x_1, \ldots, x_k, \ldots\}$ и $\{y_1, \ldots, y_k, \ldots\}$ однозначно задаётся **таблицей совместного распределения**, у которой в ячейке i, j стоит $\mathsf{P}(\omega : X(\omega) = x_i,\ Y(\omega) = y_k)$. Из такой таблицы мы можем получить **частное распределение** случайной величины X:

$$P(\omega : X(\omega) = x_j) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\omega : X(\omega) = x_j, Y(\omega) = y_k)$$

Аналогично можно получить частное распределение случайной величины Y.

1.5 Независимость случайных величин и некореллированность случайных величин

Случайные величины X, Y с множествами значений $\{x_1, \ldots, x_k, \ldots\}$ и $\{y_1, \ldots, y_k, \ldots\}$ соответственно называются **независимыми**, если

$$\mu_{(X,Y)}\left(\{(x_j, y_k)\}\right) = \mu_X\left(\{x_j\}\right) \cdot \mu_Y\left(\{y_k\}\right) \quad \forall k, j$$

или другими словами

$$\mathsf{P}(\omega :\ X(\omega) = x_j,\ Y(\omega) = y_k) = \mathsf{P}(\omega :\ X(\omega) = x_j) \cdot \mathsf{P}(\omega :\ Y(\omega) = y_k) \quad \forall k, j$$

Аналогично определяется независимость трёх и более случайных величин.

Ковариацией пары случайных величин называется число

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\, X)\,(Y - \mathbb{E}\, Y)\right]$$

Заметим, что ковариация является неотрицательно определённой билинейной формой,

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}\left[X \cdot Y\right] - \left[\mathbb{E}\, X\right] \cdot \left[\mathbb{E}\, Y\right]$$

в частности $\mathbb{D}\, X = \operatorname{cov}(X, X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \left[\mathbb{E}\, X\right]^2$.

Величину

$$r(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{D}\, X}\sqrt{\mathbb{D}\, Y}}$$

называют **коэффициентом корреляции**.

Две случайные величины X, Y называются **некорреллированными**, если $r(X, Y) = 0$.

Заметим, что если две случайные величины X, Y независимы, то они некорреллированы. Обратное, вообще говоря, неверно.

1.6 Моменты распределений

Число $\mathbb{E}\, \xi^k$ называется **моментом порядка** k или k**-ым моментом случайной величины** ξ.

2 Непрерывные распределения

2.1 Плотность распределения

Предположим, что определена вероятностная мера μ. Функция

$$F(t) = \mu((-\infty, t])$$

называется **функцией распределения** меры μ.

Из определения F следует, что $\mu((a, b]) = F(b) - F(a)$.

Функция F удовлетворяет следующим свойствам:

(i) $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ не убывает;

(ii) F непрерывна справа;

(iii) $\lim\limits_{t \to -\infty} F(t) = 0$ и $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t) = 1$.

Во многих случаях задавать вероятностную меру на числовой прямой удобно плотностью.

Пусть ϱ — неотрицательная и интегрируемая (по Риману) функция на $\mathbb{R}$, причём

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varrho(x)dx = 1$$

Если функция распределения F меры μ задаётся неравенством

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} \varrho(x)dx$$

то говорят, что вероятностная мера μ задана **плотностью** ϱ. В этом случае

$$\mu((a, b]) = F(b) - F(a) = \int_a^b \varrho(x)dx$$

На самом деле можно доказать, что

$$\mu(A) = \int_A \varrho dx$$

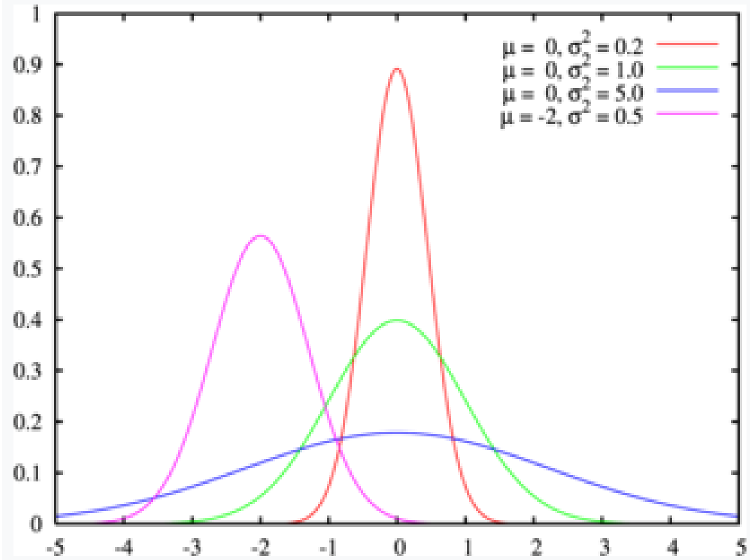
для всякого множества A, для которого имеет смысл интеграл в правой части.

2.2 Распределения

Нормальное распределение Нормальным распределением с параметрами μ и σ^2 называют вероятностную меру на числовой прямой, заданную плотностью

$$\varrho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x-\mu}{2\sigma^2}}$$

Случайную величину с нормальным распределением обозначают как $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.



Зеленая линия соответствует стандартному нормальному распределению

Определение. *Введём понятие* ***Гамма-функции***.

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)!n^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0,\ -1,\ -2, \ldots\}$$

Распределение Стьюдента Пусть $Y_0,\ Y_1,\ \ldots,\ Y_n$ — независимые стандартные нормальные случайные величины, такие что $Y_i \sim \mathcal{N}(0,1),\ i = 0, \ldots, n$. Тогда распределение случайной величины t, где

$$t = \frac{Y_0}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i^2}},$$

называется **распределением Стьюдента** с n степенями свободы $t \sim t(n)$.

Это распределение абсолютно непрерывно с плотностью:

$$\varrho_t(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{y^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},$$

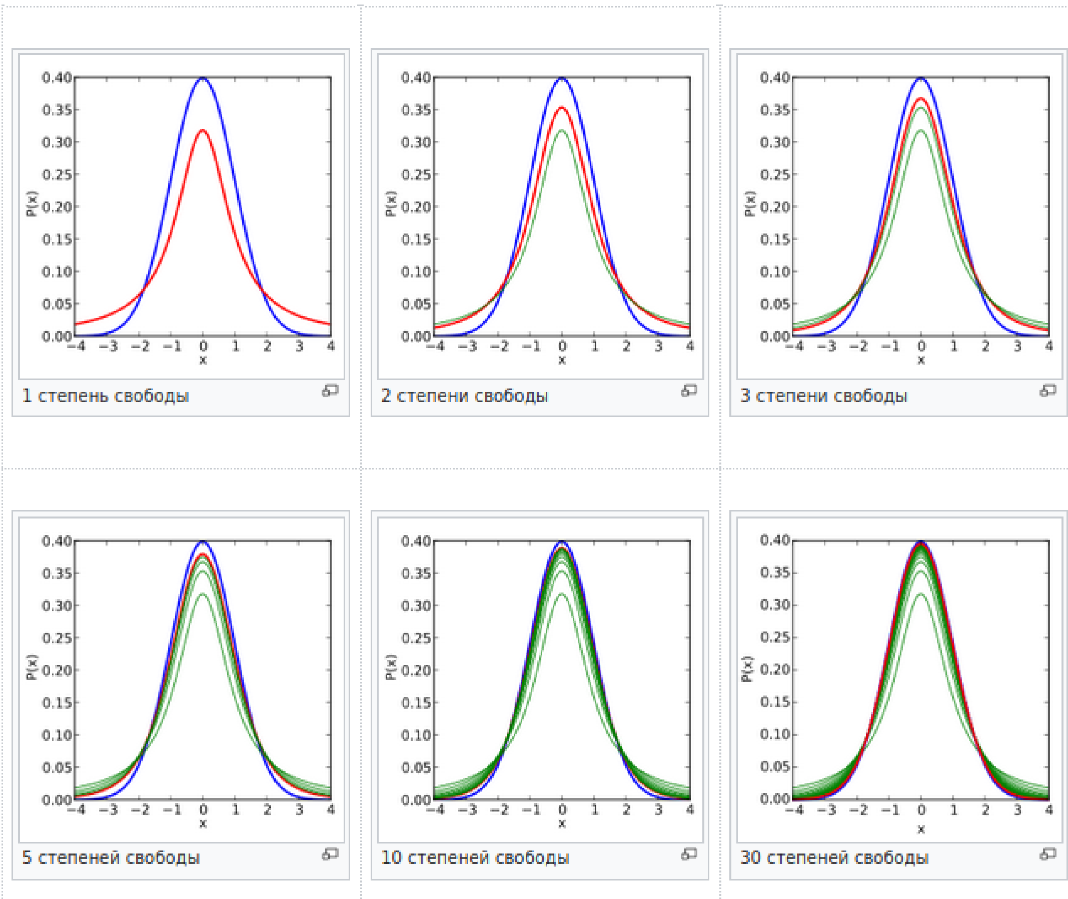
где Γ — гамма-функция. Таким образом:

$$\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{(n-1)(n-3)\cdots5\cdot3}{2\sqrt{n}(n-2)(n-4)\cdots4\cdot2}, \text{ для чётных } n$$

и соответственно

$$\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{(n-1)(n-3)\cdots4\cdot2}{\pi\sqrt{n}(n-2)(n-4)\cdots5\cdot3}, \text{ для нечётных } n.$$

Плотность t-распределения (красная линия) для 1, 2, 3, 5, 10 и 30 степеней свободы в сравнении со стандартным нормальным распределением (синяя линия). Предыдущие графики показаны зеленым.



Распределение хи-квадрат Пусть $z_1, \dots, z_k$ — совместно независимые стандартные нормальный случайные величины, то есть $z_i \sim \mathcal{N}(0,1)$. Тогда случайная величина

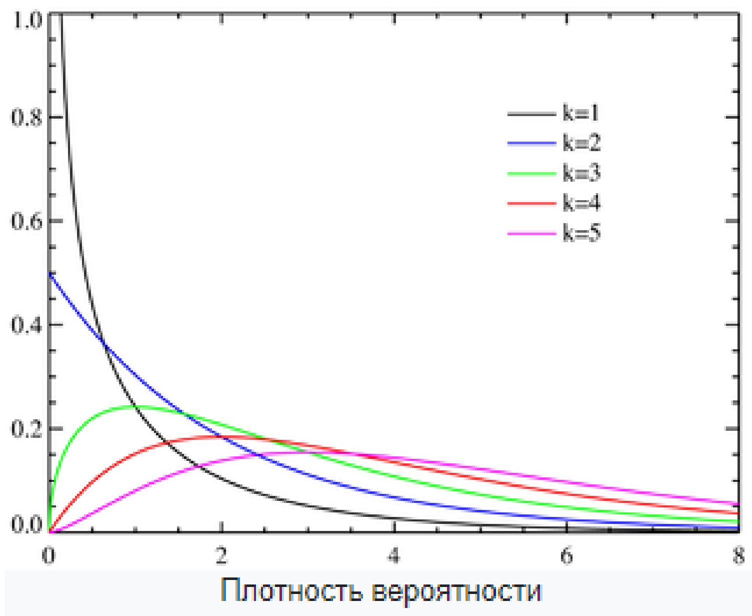
$$x = z_1^2 + \ldots + z_k^2$$

имеет **распределение хи-квадрат** с k степенями свободы, то есть $x \sim \varrho_{\chi^2(k)}(x)$ или, если записать по-другому:

$$x = \sum_{i=1}^{k} z_i^2 \sim \chi^2(k)$$

Плотность распределения хи-квадрат имеет вид:

$$\varrho_{\chi^2(k)}(x) = \frac{(1/2)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\, x^{\frac{k}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}}$$



Определение. *Введём понятие **Бета-функции**.*

Формула через Гамма-функции:

$$\mathrm{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

где $\Gamma(x)$ *— Гамма-функция.*

Формула через нисходящий факториал:

$$\mathrm{B}(x, y) = \frac{1}{y}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(y)_{n+1}}{n!\,(x+n)},$$

где $(x)_n$ *— нисходящий факториал, равный* $x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \ldots \cdot (x-n+1)$.

Распределение Фишера Пусть $Y_1,\ Y_2$ — две независимые случайные величины, имеющие распределение хи-квадрат: $Y_i \sim \chi^2(d_i)$, где $d_i \in \mathbb{N},\ i = 1, 2$. Тогда распределение случайной величины

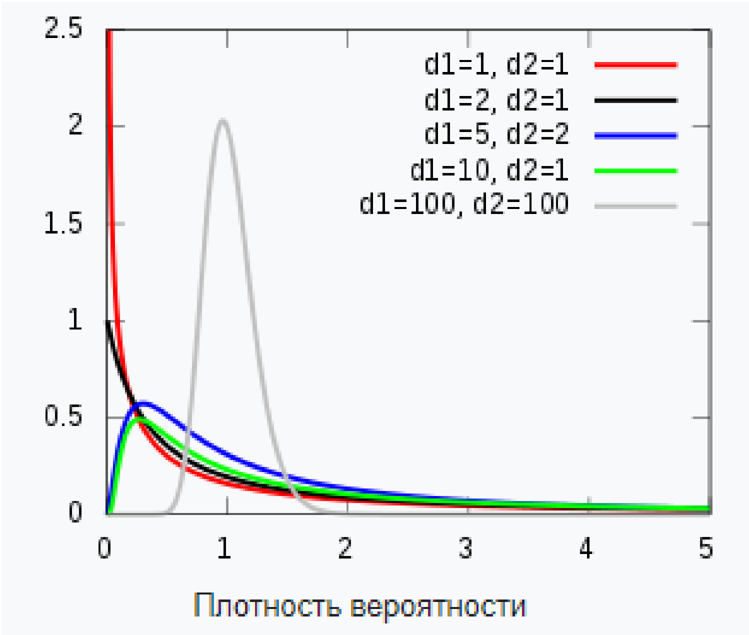
$$F = \frac{Y_1/d_1}{Y_2/d_2}$$

называется **распределением Фишера** со степенями свободы d_1 и d_2. Пишут $F \sim \mathrm{F}(d_1, d_2)$.

Опишем теперь функцию плотности случайной величины F:

$$\varrho_F(x) = \frac{\sqrt{\frac{(d_1\,x)^{d_1}\ d_2^{d_2}}{(d_1\,x+d_2)^{d_1+d_2}}}}{x\,\mathrm{B}\left(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}\right)}$$

Картинка:



2.3 Совместное распределение случайных величин

Пусть ξ и η — случайные величины. Рассмотрим отображение $\omega \to (\xi(\omega), \eta(\omega))$. Это отображение определяет на плоскости вероятностную меру μ следующим образом:

$$\mu(B) = \mathsf{P}(\{\omega : \ (\xi(\omega), \eta(\omega)) \in B\})$$

Меру μ называют **совместным распределением** случайных величин ξ и η. Функцию

$$F(x, y) = \mu((-\infty, x] \times (-\infty, y]) = \mathsf{P}(\{\omega : \ \xi(\omega) \leqslant x \text{ и } \eta(\omega) \leqslant y\})$$

называют **функцией совместного распределения** случайных величин ξ и η.

Аналогичным образом определяется совместное распределение любого конечного числа случайных величин.

2.4 Совместная и частная плотность

Если существует интегрируемая (по Риману) и неотрицательная функция $\varrho(x, y)$ такая, что

$$\mu(A) = \int\int_A \varrho(x, y) dx dy$$

для всякого допустимого (измеримого по Жордану) множества A, то ϱ называется **совместной плотностью распределения**.

Если известна плотность ϱ совместного распределения ξ и η, то можно найти плотности распределения каждой из случайных величин. Например, для случайной величины ξ:

$$\mu_\xi((a, b]) = \mu((a, b] \times \mathbb{R}) = \int_a^b \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varrho(x, y) dy \right) dx$$

и, следовательно,

$$\varrho_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varrho(x, y) dy$$

Если распределение каждой из случайных величин задаётся плотностью, то совместное распределение может не иметь плотность.

2.5 Независимые случайные величины и некореллированность случайных величин

Случайные величины ξ и η называются **независимыми**, если для всяких промежутков U и V выполняется равенство

$$\mathsf{P}(\{\omega : \ \xi(\omega) \in U \text{ и } \eta(\omega) \in V\}) = \mathsf{P}(\{\omega : \ \xi(\omega) \in U\}) \cdot \mathsf{P}(\{\omega : \ \eta(\omega) \in V\})$$

В терминах совместного распределения это равенство записывается так:

$$\mu(U \times V = \mu_\xi(U) \cdot \mu_\eta(V)$$

Говорят, что мера μ является произведением мер μ_ξ и μ_η и пишут $\mu = \mu_\xi \otimes \mu_\eta$.

Независимость ξ и ν равносильна тому, что

$$F(x, y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y)$$

где F — совместная функция распределения ξ и η.

Для непрерывных случайных величин меняется определение математического ожидания. Математическое ожидание непрерывной случайной величины, распредление которой задаётся плотностью $\varrho(x)$, равно

$$\mathbb{E}[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varrho(x)dx$$

Определения дисперсии, ковариации и коэффициента корреляции требуют лишь дополнительного условия $\mathbb{E}\,\xi^2 < \infty$. Таким образом, определение некорреллированности случайных величин остаётся тем же: две случайные величины X, Y называются **некорреллированными**, если $r(X, Y) = 0$.

Заметим, что если две случайные величины X, Y независимы, то они некорреллированы. Обратное, вообще говоря, неверно.

2.6 Моменты распределений

Число $\mathbb{E}\,\xi^k$ называется **моментом порядка k или k-ым моментом случайной величины** ξ.