Geometría Diferencial
Tarea 4
Antonio Barragán Romero

Del libro **Differential Geometry of Curves and Surfaces** .

Problema 1

Muestra que la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ no es regular.

Demostración: Supongamos que S es regular y consideremos una parametrización X en $p = (0, 0, 0) \in S$. Entonces por la proposición 3 tenemos que existe una vecindad V de p en S tal que es la gráfica de una función diferenciable que tiene una de las siguientes tres formas $z = f(x, y)$, $y = g(x, z)$ o $x = h(y, z)$.

Podemos notar g y h se pueden descartar pues la proyección de S sobre los planos xz y yz no son inyectivos. Entonces si existiera f debería coincidir con $z = \pm(x^2 + y^2)$ la cual no es siquiera una función. Por lo tanto S no es una superficie regular.

Otro argumento podría ser el siguiente: Supongamos que $\sigma : U \to S \cap W$ es un homeomorfismo y sea $a = \sigma^{-1}(p)$, podemos suponer que U es una bola abierta con centro en a, pues U es abierto. Entonces W debe contener puntos q_1 con $z > 0$ y q_2 con $z < 0$, sean $b = \sigma^{-1}(q_1)$ y $c = \sigma^{-1}(q_2)$ y sea γ una curva en U que una b y c y no pase por a entonces la imagen de γ bajo σ esta contenida en S y no pasa por p ,lo cual no es posible.

Problema 2

Sea $f(x, y, z) = (x + y + z - 1)^2$.

a) Encuentra los puntos y valores críticos de f.
b) ¿Para qué valores de c es el conjunto $f(x, y, z) = c$ una superficie regular?
c) Responde las preguntas a) y b) para la función $f(x, y, z) = xyz^2$.

Solución:

a) En este caso tenemos que dado $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se cumple que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f_p = \nabla f(p) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p)\right) \\ &= (2(x + y + z - 1), 2(x + y + z - 1), 2(x + y + z - 1)) \\ &= 2(x + y + z - 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

de donde podemos notar que $\mathrm{d}f_p$ es sobre si y solo si $2(x + y + z - 1) \neq 0$ y por tanto p es un punto critico si y solo si $2(x + y + z - 1) = 0$, es decir, si $x + y + z - 1 = 0$. Entonces si p es un punto critico se cumple que $f(p) = 0$, lo cual implica que 0 es el único valor critico el cual corresponde al plano

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z - 1 = 0\}.$$

b) Primero notemos que $f \geq 0$ y además es sobre, por el inciso anterior 0 es el único valor critico, entonces si $c > 0$ por la proposición 2 tenemos que $f^{-1}(c)$ es una superficie regular.

c) En este caso, si $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tenemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f_p = \nabla f(p) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p)\right) \\ &= (yz^2, xz^2, 2xyz) \\ &= z(yz, xz, 2xy), \end{aligned}$$

entonces p es un punto critico si

$$yz^2 = 0 \quad , xz^2 = 0 \quad , 2xyz = 0,$$

es decir, si y solo si $z = 0$ o $x = y = 0$. De lo anterior tenemos que los puntos críticos de f son:

$$\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3\} \cup \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3\}.$$

Podemos notar que si p es un punto critico entonces $f(p) = 0$.

En este caso $f(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}$, por lo anterior 0 es el único punto critico, por lo cual si $c \in \mathbb{R} - \{0\}$, la proposición 2 nos dice que $f^{-1}(c)$ es una superficie regular.

Problema 3

Encuentra una parametrización del hiperboloide de dos mantas
$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x^2 - y^2 + z^2 = 1\}$.

Solución: Sea

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x^2 - y^2 + z^2 = 1\},$$

sabemos que S es una superficie regular y consideremos las siguientes parametrizaciones $\sigma_\pm : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dadas por:

$$\sigma_\pm(u, v) = \left(u, v, \pm\sqrt{1 + u^2 + v^2}\right),$$

podemos notar que $\sigma_\pm$ son diferenciables, pues tienen derivadas parciales continuas de todos los ordenes.

Además, dado $p = (u, v) \in \mathbb{R}^2$ tenemos que

$$\mathrm{d}\sigma_\pm(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \pm\frac{2u}{\sqrt{1+u^2+v^2}} & \pm\frac{2v}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \end{pmatrix},$$

y se puede ver que las columnas son linealmente independientes para todo p, entonces se cumple que $\mathrm{d}\sigma_\pm(p)$ es inyectiva.

Más aún podemos notar que $\sigma_{\pm}$ son inyectivas, luego por la por la proposición 4 tenemos que $\sigma_{\pm}^{-1}$ son continuas y por tanto $\sigma_{\pm}$ son parametrizaciones que cubren a S.