Geometría Diferencial
Tarea 5
Antonio Barragán Romero

Del libro **Differential Geometry of Curves and Surfaces** .

Problema 1

Construye un difeomorfismo entre el elipsoide

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}, \tag{1}$$

y la esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Solución: Consideremos $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(x, y, z) = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right)$, donde a, b, c son distintos de cero. Es claro que φ es diferenciable, más aún, podemos notar que φ es una biyección, claramente es inyectiva y es sobre pues si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ notemos que $\varphi(ax, by, cz) = (x, y, z)$, tenemos que su inversa $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ esta dada por $\varphi^{-1}(x, y, z) = (ax, by, cz)$, la cual es diferenciable. De lo anterior tenemos que φ es un difeomorfismo.

Por ultimo notemos que $\varphi(E) = S^2$, si $p \in E$ podemos notar que $\varphi(p) \in S^2$, luego $\varphi(E) \subset S^2$, por otro lado si $(x, y, z) \in S^2$ notemos que $(ax, by, cz) \in E$, luego $\varphi(ax, by, cz) = (x, y, z)$, por lo cual $\varphi(E) = S^2$. Se sigue que $\varphi|_E : E \to S^2$ es una biyección diferenciable y su inversa también es diferenciable, y por tanto $\varphi|_E : E \to S^2$ es un difeomorfismo.

Problema 2

Prueba que la relación "S_1 es difeormorfo a S_2" es una relación de equivalencia en el conjunto de todas las superficies regulares.

Proof Primero recodemos que S_1 es difeomorfo a S_2 si existe un difeomorfismo $f : S_1 \to S_2$, es decir, f es biyectiva y si $\sigma_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \to S_1$, $\sigma_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \to S_2$ son parametrizaciones, entonces $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1 : U_1 \to U_2$ y $\sigma_1^{-1} \circ f^{-1} \circ \sigma_2 : U_2 \to U_1$ son suaves.

Sea R el conjunto de todas las superficies regulares, y sea "$\sim$" la relación. Es claro que $\sim$ es **reflexiva** a traves del mapeo identidad, pues dada $S \in R$ consideremos el mapeo identidad $I : S \to S$, notemos que I es una biyección (es su propia inversa) y si $\sigma : U \to S$ es una parametrización de S entonces

$$\sigma^{-1} \circ I \circ \sigma = \sigma^{-1} \circ \sigma_1 = I : U_1 \to U_1 \tag{2}$$

es suave y por tanto I es un difeomorfismo.

Para ver que $\sim$ es **simétrica**, sean $S_1, S_2 \in R$ tales que $S_1 \sim S_2$ entonces existe difeomorfismo $f : S_1 \to S_2$, veamos que $f^{-1} : S_2 \to S_1$ es un difeomorfismo. Es claro que f^{-1}

es biyectiva pues f lo es, luego, si $\sigma_1 : U_1 \to S_1$ y $\sigma_2 : U_2 \to S_2$ son parametrizaciones, notemos que

$$\sigma_1^{-1} \circ f^{-1} \circ \sigma_2 = \left(\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1\right)^{-1}, \tag{3}$$

dado que f es un difeomorfismo tenemos que $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1$ es suave, luego, la regla de la cadena nos dice que su inversa es suave, es decir, $\sigma_1^{-1} \circ f^{-1} \circ \sigma_2$ es suave y por tanto $f^{-1} : S_2 \to S_1$ es un difeomorfismo.

Por ultimo veamos que $\sim$ es **transitiva**. Sean $S_1, S_2, S_3 \in R$ tales que $S_1 \sim S_2$ y $S_2 \sim S_3$, etonces existen difeomorfismo $f : S_1 \to S_2$, $g : S_2 \to S_3$, veamos que $g \circ f : S_1 \to S_3$ es un difeomorfismo entre S_1 y S_3. Dado que f, g son biyeciones tenemos que $g \circ f$ es biyección, luego, si $\sigma_1 : U_1 \to S_1$, $\sigma_3 : U_3 \to S_3$ son parametrizaciones notemos que

$$\begin{aligned} \sigma_3^{-1} \circ (g \circ f) \circ \sigma_1 &= \left(\sigma_3^{-1} \circ g\right) \circ \left(\sigma_2 \circ \sigma_2^{-1}\right) \circ \left(f \circ \sigma_1\right) \\ &= \left(\sigma_3^{-1} \circ g \circ \sigma_2\right) \circ \left(\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1\right), \end{aligned} \tag{4}$$

donde $\sigma_2 : U_2 \to S_2$ es una parametrización, dado que f, g son difeomorfismos tenemos que $\sigma_3^{-1} \circ g \circ \sigma_2$ y $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1$ son suaves, se sigue que su composición es suave, es decir, $\sigma_3^{-1} \circ (g \circ f) \circ \sigma_1$ es suave. De lo anterior tenemos que $g \circ f$ es un difeomorfismo entre S_1 y S_3

Por lo an terior tenemos que $\sim$ es una relación de equivalencia, como queremos.

$\square$

Problema 3

Sea $A \subset S$ un subconjunto de una superficie regular S. Prueba que A es una superficie regular si y solo si A es abierto en S, es decir, $A = U \cap S$, donde U es un abierto en $\mathbb{R}^3$

Proof

Primero supongamos que A es una superficie regular, dado $p \in A$ se cumple que existe difeomorfismo $\mathtt{x}_A : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathtt{x}_A(U) \subset A$, $A \subset S$ implica que $p \in S$, y por tanto también existe difeomorfismo $\mathtt{x}_S : V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathtt{x}_S(V) \subset S$.

Notemos que $\mathtt{x}_S^{-1} \circ \mathtt{x}_A : U \to V$ es suave, luego, el Teorema de la Función Inversa nos dice que existen entorno W de $\mathtt{x}_A^{-1}(p)$ tal que $\mathtt{x}_S^{-1} \circ \mathtt{x}_A(W)$ es un entorno de $\mathtt{x}_S^{-1} \circ \mathtt{x}_A\left(\mathtt{x}_A^{-1}(p)\right)$.

Dado que $\mathtt{x}_S^{-1} \circ \mathtt{x}_A(W)$ es abierto contenido en V tenemos que $\mathtt{x}_S\left(\mathtt{x}_S^{-1} \circ \mathtt{x}_A(W)\right)$ es abierto de S, pues $\mathtt{x}_S$ es difeomorfismo, por otro lado notemos que $\mathtt{x}_A(W) = \mathtt{x}_S\left(\mathtt{x}_S^{-1} \circ \mathtt{x}_A(W)\right)$, el cual es un abierto de A, pues $\mathtt{x}_A$ es difeomorfismo y W es abierto.

Por lo anterior podemos ver que para cada $p \in A$ encontramos un conjunto $\mathtt{x}_A(W)$ el cual es abierto en A y en S, por tanto su union cubre a A y ademas es abierto en S, como queremos.

Supongamos ahora que A es abierto en S, entonces $A = S \cap W$ con W abierto de $\mathbb{R}^3$. Dado $p \in A$, se cumple que $p \in S$, como S es una superficie regular existe U abierto de $\mathbb{R}^2$ y W_p entorno de p en $\mathbb{R}^3$ tal que existe un difeomorfismo (parametrización) $\mathtt{x} : U \to S \cap W_p$.

Podemos notar que $W \cap W_p$ es entorno de p en $\mathbb{R}^3$, por la continuidad de $\mathtt{x}$ tenemos que $U_p := \mathtt{x}^{-1}\big(W \cap W_p\big)$ es abierto en $\mathbb{R}^2$, luego se cumple que

$$\mathtt{x}|_{U_p} : U_p \to S \cap W \cap W_p, \tag{5}$$

es una parametrización en p. Dado que p fue arbitrario, tenemos que A es una superficie regular.

$\square$