Geometria Diferencial
Tarea 2
Antonio Barragán Romero

Del libro **Differential Geometry of Curves and Surfaces** .

Problemas

Problema 1

Dados los vectores $\boldsymbol{v} \neq 0$ y $\boldsymbol{w}$, muestra que existe un vector $\boldsymbol{u}$ tal que $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$ si y solo si $\boldsymbol{v}$ es perpendicular a $\boldsymbol{w}$. ¿Este vector queda determinado de manera unica? Sino, ¿Cual es la solución mas general?

Demostración: Supongamos primero que existe $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$, entonces se cumple que $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v} = 0$, es decir $\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v} = 0$.

Para la implicación contraria tenemos que $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 0$ y supongamos que existe $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$, entonces se debe cumplir que

$$w_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2, \quad w_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3, \quad w_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1, \tag{1}$$

lo cual lo podemos ver como

$$A := \begin{pmatrix} 0 & v_3 & -v_2 \\ -v_3 & 0 & v_1 \\ v_2 & -v_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Notemos que $\det(A) = 0$, entonces el sistema tiene infinitas soluciones o no tiene solución.tenmos los siguientes casos:

a) *Las tres entradas de v son distintas de cero,* En este caso se cumple que $\det(A) \neq 0$ y por tanto existe solución y ademas es unica.

b) *Una entrdad de v es cero.* Sin perdida de generalidad sea $v_1 = 0$. En este caso tenemos que

$$w_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2, \quad w_2 = -u_1 v_3, \quad w_3 = u_1 v_2, \tag{3}$$

y por tanto $u_1 = \frac{w_3}{v_2} = -\frac{w_2}{v_3}$

c) *Dos entradas de v son cero.* Sin perdida de generalidad sean $v_1 = 0$, $v_2 = 0$. Tenemos que $w_1 = u_2 v_3, \quad w_2 = -u_1 v_3, \quad w_3 = 0$, lo cual implica que $u_1 = -\frac{w_2}{v_3}$ y $u_2 = \frac{w_1}{v_3}$ y $u_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$, por lo cual u no es unico, ademas se debe cumplir que $w_3 = 0$, por lo que u no siempre existe.

Problema 2

Sean $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ y $v(t) = (v_1(t), v_2(t), v_3(t))$ funciones diferenciables del intervalo Las derivadas $u'(t)$ y $v'(t)$ satisfacen las condiciones

$$u'(t) = au(t) + bv(t), \quad v'(t) = cu(t) - av(t), \tag{4}$$

donde a, b, c son constantes. Muestra que $u(t) \times v(t)$ es un vector constante.

Demostración: Para ver que $u(t) \times v(t)$ es constante probaremos que $\frac{d}{dt}(u(t) \times v(t))$ es igual a cero. Recordemos que

$$\frac{d}{dt}(u(t) \times v(t)) = \frac{du(t)}{dt} \times v(t) + u(t) \times \frac{dv}{dt}, \tag{5}$$

usando las hipotesis tenemos que

$$\frac{d}{dt}(u(t) \times v(t)) = (au(t) + bv(t)) \times v(t) + u(t) \times (cu(t) - av(t)), \tag{6}$$

por un lado tenemos que

$$\begin{aligned} (au(t) + bv(t)) \times v(t) &= au(t) \times v(t) + bv(t) \times v(t) \\ &= au(t) \times v(t), \end{aligned} \tag{7}$$

y por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} u(t) \times (cu(t) - av(t)) &= -(cu(t) - av(t)) \times u(t) = (av(t) - cu(t)) \times u(t) \\ &= av(t) \times u(t) - cu(t) \times u(t) \\ &= av(t) \times u(t). \end{aligned} \tag{8}$$

De lo anterior obtenemos que

$$\frac{d}{dt}(u(t) \times v(t)) = au(t) \times v(t) + av(t) \times u(t) = au(t) \times v(t) - au(t) \times v(t) = \mathbf{0}, \tag{9}$$

como queremos.

Problema 3

Encuentra todos los vectores unitarios que son perpendiculares al vector $(2, 2, 1)$ y paralelos al plano determinado por los puntos $(0, 0, 0)$, $(1, -2, 1)$, $(-1, 1, 1)$.

Solución: Sea $ax + by + cz + d = 0$ la ecuación del plano, entonces al sustituir los puntos que lo determinan obtenemos que $d = 0$, $a - 2b + c = 0$ y $-a + b + c = 0$ lo cual implica que $2c = b$ y que $2a = 3b$, haciendo $c = 1$, obtenemos $b = 2$, $a = 3$, entonces la ecuación del plano es

$$3x + 2y + z = 0, \tag{10}$$

su vector normal es $n = (3, 2, 1)$. Supongamos $v = (x, y, z)$ es perpendicular a $(2, 2, 1)$ y además es paralelo al plano, entonces es ortogonal al vector normal, por lo cual se cumplir que

$$2x + 2y + z = 0 \quad y \quad 3x + 2y + z = 0. \tag{11}$$

De lo anterior tenemos que $x = 0$ y que $z = -2y$, se sigue que $v = (0, y, -2y)$, para que v sea unitario debemos normalizarlo por su norma, la cual vale:

$$\|v\| = \sqrt{y^2 + 4y^2} = \sqrt{5}|y|, \tag{12}$$

es decir $v = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(0, \frac{y}{|y|}, -2\frac{y}{|y|}\right)$, si $y > 0$ entonces $v = \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ y si $y < 0$ obtenemos $v = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.