Geometría Diferencial
Tarea 6

Antonio Barragán Romero

Del libro **Differential Geometry of Curves and Surfaces** .

0.1. Problema 1

Muestra que la ecuación del plano tangente a una superficie que es la gráfica de una función diferenciable $z = f(x, y)$, en el punto $p_0 = (x_0, y_0)$ esta dada por

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Recuerda la definición de la diferencial df de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y muestra que el plano tangente es la gráfica de la diferencial df_p.

Solución: Recordemos que la ecuación general de un plano esta dada por

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

donde (a, b, c) es un vector ortogonal al plano. Sea $\sigma(x, y) = (x, y, f(x, y))$ una parametrización de S Sabemos que el plano tangente esta dado por una base de vectores:

$$\sigma_u(p_0) = (1, 0, f_u(x_0, y_0)) \quad \sigma_v(p_0) = (0, 1, f_v(x_0, y_0)),$$

y queremos encontrar un vector ortogonal al plano generado por ellos, el cual sabemos esta dado por

$$\sigma_u(p_0) \times \sigma_v(p_0) = (-f_u(x_0, y_0), -f_v(x_0, y_0), 1),$$

entonces la ecuación del plano esta dada por

$$-f_u(x_0, y_0)(x - x_0) - f_v(x_0, y_0)(y - y_0) + (z - z_0) = 0,$$

recordando que $z_0 = f(x_0, y_0)$ y desarrollando obtenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= -f_u(x_0, y_0)(x - x_0) - f_v(x_0, y_0)(y - y_0) + (z - f(x_0, y_0)) \\ \Rightarrow z &= f(x_0, y_0) + f_u(x_0, y_0)(x - x_0) + f_v(x_0, y_0)(y - y_0), \end{aligned}$$

como queremos.

0.2. Problema 2

Un *punto critico* de una función diferenciable $f : S \to \mathbb{R}$ definida en una superficie regular S es un punto $p \in S$ tal que $df_p = 0$.

1. Sea $f : S \to \mathbb{R}$ dado por $f(p) = |p - p_0|$, $p \in S$, $p_0 \notin S$. Muestra que $p \in S$ es un punto critico de f si y solo si la linea que une p con p_0 es normal a S en p.
2. Sea $h : S \to \mathbb{R}$ dada por $h(p) = p \cdot v$, donde $v \in \mathbb{R}^3$ es un vector unitario. Muestra que $p \in S$ es un punto critico de h si y solo si v es un vector normal a S en p.

Solución:

1. Supongamos que $p \in S$ es un punto critico de f, entonces $df_{p(w)} = 0$ para todo $w \in T_pS$. Sea $w \in T_pS$ y $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ una curva diferenciable con $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = w$, notemos que $f(\alpha(t)) = |\alpha(t) - p_0|$, dado que $p_0 \notin S$ tenemos que $\alpha(t) \neq p_0$ para todo t y por tanto f es diferenciable, luego

$$\begin{aligned} df_{p(w)} &= \frac{d}{dt} f(\alpha(t))|_{t=0} = \frac{d}{dt}|\alpha(t) - p_0||_{t=0} \\ &= \frac{2\langle \alpha'(t), \alpha(t) - p_0 \rangle}{2|\alpha(t) - p_0|}|_{t=0} \\ &= \frac{\langle w, p - p_0 \rangle}{|p - p_0|}. \end{aligned}$$

   Dado que p es punto critico tenemos que $df_{p(w)} = 0$, lo cual implica que $\langle w, p - p_0 \rangle = 0$, como lo anterior es valido para todo $w \in T_pS$ tenemos que $p - p_0$ es normal a T_pS.

   Ahora si, $p - p_0$ es normal a S en p, se cumple que $\langle w, p - p_0 \rangle = 0$ para todo $w \in T_pS$ y por lo notado anteriormente tenemos que

$$df_{p(w)} = \frac{\langle w, p - p_0 \rangle}{|p - p_0|} = 0,$$

   para todo $w \in T_pS$, como queremos.

2. Supongamos que $p \in S$ es un punto critico de h, entonces $dh_{p(w)} = 0$, para todo $w \in T_pS$. Sea $w \in T_pS$ notemos que dada $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ con $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = w$, como $h(\alpha(t)) = \alpha(t) \cdot v$ y por tanto

$$dh_p(w) = \frac{d}{dt} h(\alpha(t))|_{t=0} = \alpha'(0) \cdot v = w \cdot v,$$

   como lo anterior es valido para todo $w \in T_pS$ tenemos que v es normal a T_pS, como queremos.

   Supongamos ahora que v es un vector normal a S en p, entonces tenemos que $w \cdot v = 0$ para todo $w \in T_pS$, de manera similar tenemos que $dh_p(w) = w \cdot v = 0$ para todo $w \in T_pS$ y por tanto p es punto critico de h.

0.3. Problema 3

Muestra que si todas las normales a una superficie conexa pasan por un punto, la superficie esta contenida en una esfera.

Solución:

Primero probaremos el siguiente resultado más general,

Proposition 0.3.1 Sea $f : S \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en una superficie regular conexa S. Si $D_pf = 0$ para todo $p \in S$ entonces f es constante

Proof Dado $p \in S$, sea $\mathtt{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathtt{x}(U) \subset S$ con $p \in \mathtt{x}(U)$ un difeomorfismo tal que $\mathtt{x}(U)$ es conexo por caminos, como f es diferenciable tenemos que $f \circ \mathtt{x} : U \to R$ es diferenciable,

Primero veamos que f en $\mathtt{x}(U)$ es constante Definamos $a := \mathtt{x}^{-1}(p) \in U$ y sea b un punto en una bola contenida en U, entonces podemos unir a y b por una linea recta $\beta : [0,1] \to U$ dad por $\beta(t) = ta + (1-t)b$. Como U es abierto podemos extender β a $(-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, entonces $f \circ \mathtt{x} \circ \beta : (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to \mathbb{R}$, esta definida en un intervalo abierto y se cumple que

$$d(f \circ \mathtt{x} \circ \beta) = \left(d_p f \circ d\mathtt{x} \circ d\beta\right)_t = 0,$$

para todo $t \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ pues $d_p f$ es identicamente cero. Se sigue que $f \circ \mathtt{x} \circ \beta$ es constante y por tanto $f(\mathtt{x}(\beta(0))) = f(\mathtt{x}(b)) = f(\mathtt{x}(a)) = f(\mathtt{x}(\beta(1)))$. Como b fue arbitrario tenemos que f es constante en una bola contenida en U.

Como $\mathtt{x}(U)$ es conexo por caminos entonces $U = \mathtt{x}^{-1}(\mathtt{x}(U))$ es conexo por caminos , pues $\mathtt{x}^{-1}$ es un homeomorfismo. Luego si r es otro punto en U, existe una curva continua $\alpha : [0,1] \to U$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = r$, la función $f \circ \mathtt{x} \circ \alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$ es continua en $[0,1]$.

Notemos que para todo $t \in [0,1]$ tenemos un punto $\alpha(t)$ en U, y por lo notado al principio existe un entorno contenido en U donde $f \circ \mathtt{x}$ es constante, luego existe un intervalo I_t abierto en $[0,1]$ donde $f \circ \mathtt{x} \circ \alpha$ es constante. De lo anterior $[0,1] = \bigcup_t I_t$ es una cubierta abierta, por lo cual existe una subcubierta finita $I_1, ..., I_k$ tal que $[0,1] = \bigcup_i I_i$ para $i = 1, ..., k$. Como I_i son intervalos abiertos tenemos que se intersectan, sin perdida de generalidad podemos suponer que los intervalos consecutivos se intersectan, entonces $f \circ \mathtt{x} \circ \alpha$ es constante en la union de intervalos consecutivos, se sigue que $f \circ \mathtt{x} \circ \alpha$ es constante en $[a,b]$, en especial $f(\mathtt{x}(\alpha(0))) = f(\mathtt{x}(a)) = f(\mathtt{x}(r)) = f(\mathtt{x}(\alpha(1)))$.

Lo anterior nos dice que $f \circ \mathtt{x}$ es constante en todo U, como $\mathtt{x}$ es un difeomorfismo tenemos que f es constante en $\mathtt{x}(U)$.

Veamos ahora que f es constante en todo S. Sean $p, q \in S$, como S es conexa por caminos existe una curva continua $\gamma : [0,1] \to S$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$ y simplemente notemos que para todo $t \in [0,1]$ por lo notado anteriormente existe un entorno de $\gamma(t) \in S$ donde f es constante y por tanto obtenemos un intervalo abierto I_t donde $f \circ \gamma$ es constante, el resultado se concluye de manera similar a lo hecho anteriormente. $\square$

Ahora, siguiendo con la demostración, dada S una superficie regular sea p_0 el punto de intersección de las normales y consideremos $f : S \to \mathbb{R}$ dado por $f(p) = |p - p_0|$, donde $p_0 \notin S$. Por hipótesis tenemos que para todo $p \in S$ la linea que une a p con p_0 es normal, por el ejercicio anterior tenemos que p es un punto critico de S, por lo cual $D_p f = 0$. La proposición anterior nos dice que f es constante, es decir $|p - p_0| = r$ para todo $p \in S$ y algún $r \in \mathbb{R}$. Lo anterior nos dice que S esta contenida en la circunferencia centrada en p_0 de radio r, como queremos.