Análisis Funcional I

Tarea 3

Maite Fernández Unzueta.
maite@cimat.mx

Antonio Barragán Romero.
antonio.barragan@cimat.mx

Problema 1

Considera un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$. Denotemos por (E^*, d^*) al espacio métrico completado de (E, d), donde d es la métrica inducida en E por $\|\cdot\|$. Demuestra que E^* admite una estructura vectorial y que $\|\cdot\|$ se puede extender a una función $\|\cdot\| : E^* \times E^* \to [0, \infty)$ cumpliendo que $(E^*, \|\cdot\|^*)$ es un espacio de Banach y que $\|\cdot\|^*_{|E\times E} = \|\cdot\|$.

Demostración: Sea $i : E \to E^*$ la isometria tal que E es isometrico a $i(E)$ que es un subespacio denso de E^*. Dados $x^*, y^* \in E^*$ existen sucesiones $\{x_n\}_n, \{y_n\}_n \subset E$ tales que $i(x_n) \to x^*$ y $i(y_n) \to y^*$, como E es un espacio normado tenemos que $\{x_n + y_n\}_n$ es una sucesión en E, más aún $\{i(x_n + y_n)\}_n$ es una sucesión de Cauchy pues i es isometria por lo cual converge en E^*, asi podemos definir la suma en E^* como:

$$x^* + y^* := \lim_{n\to\infty} i(x_n + y_n),$$

de manera similar dado un escalar λ tenemos que $\{\lambda x_n\}_n$ es una sucesión en E y ademas $\{i(\lambda x_n)\}_n$ es de Cauchy, pues i es isometria, por lo cual converge y entonces podemos definir la multiplicación escalar como:

$$\lambda x^* = \lim_{n\to\infty} i(\lambda x_n).$$

Notemos que tanto la suma como la multiplicación escalar están bien definidas pues

Ademas podemos ver que la conmutatividad, asociatividad y distributividad en E^* se cumplen por que se cumplen en E.

Definamos ahora una norma en E^*, dado $x^* \in E^*$ existe sucesión $\{x_n\}_n \subset E$ tal que $i(x_n) \to x^*$, notemos que $\{\|x_n\|\}_n$ es de Cauchy, pues $\{i(x_n)\}$ es de Cauchy e i es isometria.

Como $\mathbb{R}$ es completo se sigue que $\{\|x_n\|\}$ converge en $[0, \infty]$, pues la sucesión no es negativa. Asi pues, podemos definir la norma $\|\cdot\|^*$ en E^* como $\|x^*\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n\|$

Veamos que efectivamente es una norma.

- Si $\|x^*\| = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = 0$, para alguna sucesión $\{x_n\}_n \subset E$. Notemos que

$$d^*(x^*, i(0)) \leqslant d^*(x^*, i(x_n)) + d^*(i(x_n), i(0))$$

y obtenemos $d * (x^*, i(0)) = 0$, por lo cual $x^* = i(0)$.
- Dado λ y $x^* \in E^*$ tenemos que

$$\|\lambda x^*\| = \lim_{n\to\infty}\|\lambda x_n\| = \lim_{n\to\infty}|\lambda|\|x_n\| = |\lambda| \lim_{n\to\infty}\|x_n\| = |\lambda|\|x^*\|$$

$\square$

Problema 2 6C 7

Muestra que ℓ^1 con la norma definida por $\|(a_1, a_2, \ldots)\| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ es un espacio de Banach.

Demostración: Veamos que ℓ^1 es un espacio vectorial. Si $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_n, \boldsymbol{y} = \{y_n\}_n \in \ell^1$ tenemos que, para $m \geqslant n$ se cumple que

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{m} |x_i| + \sum_{i=1}^{m} |y_i|,$$

al tomar el limite $m \to \infty$, vemos que para todo n ,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| + \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|,$$

por lo cual $\{x_n + y_n\}_n$ es acotada y no decreciente, por tanto converge, haciendo $n \to \infty$ tenemos que $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \ell^1$, más aún, notemos que lo anterior muestra la desigualdad del tringulo para $\|\cdot\|$. De manera similar podemos ver $\lambda \boldsymbol{x} \in \ell^1$ para todo escalar λ.

Primero veamos que ℓ^1 es un espacio vectorial normado, para ellos veamos que $\|\cdot\|$ es una norma sobre ℓ^1.

- Veamos que $\|\cdot\|$ es **definida positiva**. Notemos que $\|(a_1, a_2, \ldots,)\| = 0$ si y solo si $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ lo cual pasa si y solo si $|a_k| = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, es decir, si $a_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
- Notemos que dado $\lambda \in \mathbb{F}$,

$$\begin{aligned} \|\lambda(a_1, a_2, \ldots)\| &= \|(\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots)\| \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda a_k| \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda| (a_k) = |\lambda| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \right) = |\lambda| \|(a_1, a_2, \ldots)\|. \end{aligned}$$

-

Ahora veamos que ℓ^1 es completo. □

Problema 3 6C 10

Supongamos que U es un subespacio de un espacio vectorial normado V tal que una bola abierta de V esta contenida en U. Prueba que $U = V$.

Demostración: Es claro que $U \subset V$, por lo cual veamos que $V \subset U$. Notemos primero que podemos trasladar la bola al origen, pues si $B(x_0, r)$ es la bola de V contenida en U, notemos que para todo $y \in B(x_0, r)$ se cumple que $\|y - x_0\| < r$ si y solo si $y - x_0 \in B(0, r)$, como U es subespacio tenemos que $y - x_0 \in U$, para $y \in U$, pues $x_0 \in U$, por lo cual $B(0, r) \subset U$. Entonces, sin perdida de generalidad podemos suponer que $B(0, r) \in U$, luego, dado $x \in V$ notemos que $\frac{r}{2} \frac{x}{\|x\|} \in B(0, r)$, se sigue que

$$\left(2\frac{\|x\|}{r}\right)\left(\frac{r}{2}\frac{x}{\|x\|}\right) = x \in U,$$

pues $\left(2\frac{\|x\|}{r}\right)$ es un escalar, de lo anterior tenemos que $V \subset U$ como queremos. $\square$

Problema 4 *6C 14*

Supongamos que U es un subespacio de un espacio vectorial normado V. Suponga ademas que W es un espacio de Banach y $S : U \to W$ es un mapeo lineal acotado.

i) Prueba que existe una única función continua $T : \overline{U} \to W$ tal que $T|_U = S$.

ii) Prueba que la función T en es un mapeo lineal acotado de $\overline{U}$ hacia W y $\|T\| = \|S\|$.

iii) Da un ejemplo para ver que la puede fallar si la suposición que W es un espacio de Banach es remplazada por la suposición que W es un espacio vectorial normado.

i) Demostración: Primero veamos la unicidad, si $T_1, T_2 : \overline{U} \to W$ tales que $T_1|_U = T_2|_U = S$ entonces como U es denso en $\overline{U}$ tenemos que $T_1 = T_2$. Ahora mostraremos su existencia. Sea $u \in \overline{U}$, entonces existe $\{u_n\}_n \subset U$ tal que $u_n \to u$, consideremos $\{S(u_n)\}_n \subset W$ veamos es una sucesión de Cauchy en W. Como S es un mapeo lineal acotado tenemos que

$$\|S(u_n) - S(u_m)\|_W = \|S(u_n - u_m)\|_W \leqslant \|S\|\|u_n - u_m\|_U,$$

dado que $\{u_n\}_n$ es una sucesión de Cauchy tenemos que $\{S(u_n)\}_n$ también. El hecho que W es un espacio de Banach tenemos que $S(u_n) \to w$, para algún $w \in W$. De lo anterior podemos definir $T : \overline{U} \to W$, dada por

$$T(u) = \lim_{n\to\infty} S(u_n),$$

para $u_n \to u$. Es claro que T es un mapeo lineal. Notemos que T esta bien definida, pues $u_n \to u$ y $v_n \to u$, con $u \in \overline{U}$ Ademas es claro que $T|_U = S$ $\square$

ii) Demostración:

$\square$

iii) Solución 0.1: Consideremos el siguiente ejemplo:

Problema 5 6C 15

Supongamos que V es un espacio vectorial normado y U es un subespacio de V. Define $\|\cdot\|$ sobre V/U por

$$\|f+U\| = \inf\{\|f+g\| : g \in U\}.$$

i) Prueba que $\|\cdot\|$ es una norma sobre V/U si y solo si U es un subespacio cerrado de V.

ii) Prueba que si V es un espacio de Banach y U es un subespacio cerrado de V, entonces V/U (con la norma definida anteriormente) es un espacio de Banach.

iii) Prueba que si U es un espacio de Banach (con la norma que hereda de V) y V/U es un espacio de Banach (con la norma definida anteriormente), entonces V es un espacio de Banach.

i) Demostración: Primero notemos lo siguiente: $\|f+U\| = 0$ si y solo si $\inf\{\|f+g\| : g \in U\} = 0$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $g \in U$ tal que $\|f+g\| < \varepsilon$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $g \in U$ tal que $\|f-g\| < \varepsilon$, pues $-g \in U$ al ser subespacio, si y solo si $f \in \overline{U}$.

Sabemos que V/U es un espacio vectorial.

Si $\|\cdot\|$ es una norma sobre V/U se cumple la observación anterior, a ademas podemos notar que $[0] = U$, por lo cual si $\|f+U\| = 0$ si y solo si $f+U = U$ si y solo si

Supongamos ahora que U es cerrado entonces por la observación anterior $\|f+U\| = 0$ si y solo si $f \in U$, pues $U = \overline{U}$, de lo cual se sigue $\|f+U\| = 0$ si y solo si $f+U = U$.

$\square$

ii) Demostración:

$\square$

iii) Demostración:

$\square$