# ***Análisis Funcional I***

Tarea 3

Maite Fernández Unzueta.
maite@cimat.mx

Antonio Barragán Romero.
antonio.barragan@cimat.mx

## *Problema 1*

*Considera un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$. Denotemos por $(E^*, d^*)$ al espacio métrico completado de $(E, d)$, donde $d$ es la métrica inducida en $E$ por $\|\cdot\|$. Demuestra que $E^*$ admite una estructura vectorial y que $\|\cdot\|$ se puede extender a una función $\|\cdot\| : E^* \times E^* \to [0, \infty)$ cumpliendo que $(E^*, \|\cdot\|^*)$ es un espacio de Banach y que $\|\cdot\|^*_{|E\times E} = \|\cdot\|$.*

*Demostración*: Sea $i : E \to E^*$ la isometria tal que $E$ es isometrico a $i(E)$ que es un subespacio denso de $E^*$. Dados $x^*, y^* \in E^*$ existen sucesiones $\{x_n\}_n, \{y_n\}_n \subset E$ tales que $i(x_n) \to x^*$ y $i(y_n) \to y^*$, como $E$ es un espacio normado tenemos que $\{x_n + y_n\}_n$ es una sucesión en $E$, más aún $\{i(x_n + y_n)\}_n$ es una sucesión de Cauchy pues $i$ es isometria por lo cual converge en $E^*$, asi podemos definir la suma en $E^*$ como:

$$x^* + y^* := \lim_{n\to\infty} i(x_n + y_n),$$

de manera similar dado un escalar $\lambda$ tenemos que $\{\lambda x_n\}_n$ es una sucesión en $E$ y ademas $\{i(\lambda x_n)\}_n$ es de Cauchy, pues $i$ es isometria, por lo cual converge y entonces podemos definir la multiplicación escalar como:

$$\lambda x^* = \lim_{n\to\infty} i(\lambda x_n).$$

Notemos que tanto la suma como la multiplicación escalar están bien definidas pues

Ademas podemos ver que la conmutatividad, asociatividad y distributividad en $E^*$ se cumplen por que se cumplen en $E$.

Definamos ahora una norma en $E^*$, dado $x^* \in E^*$ existe sucesión $\{x_n\}_n \subset E$ tal que $i(x_n) \to x^*$, notemos que $\{\|x_n\|\}_n$ es de Cauchy, pues $\{i(x_n)\}$ es de Cauchy e $i$ es isometria.

Como $\mathbb{R}$ es completo se sigue que $\{\|x_n\|\}$ converge en $[0, \infty]$, pues la sucesión no es negativa. Asi pues, podemos definir la norma $\|\cdot\|^*$ en $E^*$ como $\|x^*\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n\|$

Veamos que efectivamente es una norma.

- Si $\|x^*\| = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = 0$, para alguna sucesión $\{x_n\}_n \subset E$. Notemos que

$$d^*(x^*, i(0)) \leqslant d^*(x^*, i(x_n)) + d^*(i(x_n), i(0))$$

y obtenemos $d * (x^*, i(0)) = 0$, por lo cual $x^* = i(0)$.

- Dado $\lambda$ y $x^* \in E^*$ tenemos que

$$\|\lambda x^*\| = \lim_{n\to\infty}\|\lambda x_n\| = \lim_{n\to\infty}|\lambda|\|x_n\| = |\lambda| \lim_{n\to\infty}\|x_n\| = |\lambda|\|x^*\|$$

□

## *Problema 2* 6C 7

*Muestra que $\ell^1$ con la norma definida por $\|(a_1, a_2, \ldots)\| = \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ es un espacio de Banach.*

*Demostración*: Veamos que $\ell^1$ es un espacio vectorial. Si $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_n, \boldsymbol{y} = \{y_n\}_n \in \ell^1$ tenemos que, para $m \geqslant n$ se cumple que

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i + y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|x_i| + \sum_{i=1}^{n}|y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{m}|x_i| + \sum_{i=1}^{m}|y_i|,$$

al tomar el limite $m \to \infty$, vemos que para todo $n$ ,

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i + y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}|x_i| + \sum_{i=1}^{\infty}|y_i|,$$

por lo cual $\{x_n + y_n\}_n$ es acotada y no decreciente, por tanto converge, haciendo $n \to \infty$ tenemos que $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \ell^1$, más aún, notemos que lo anterior muestra la desigualdad del tringulo para $\|\cdot\|$. De manera similar podemos ver $\lambda\boldsymbol{x} \in \ell^1$ para todo escalar $\lambda$.

Primero veamos que $\ell^1$ es un espacio vectorial normado, para ellos veamos que $\|\cdot\|$ es una norma sobre $\ell^1$.

- Veamos que $\|\cdot\|$ es **definida positiva**. Notemos que $\|(a_1, a_2, \ldots, )\| = 0$ si y solo si $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ lo cual pasa si y solo si $|a_k| = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, es decir, si $a_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
- Notemos que dado $\lambda \in \mathbb{F}$,

$$\begin{aligned}\|\lambda(a_1, a_2, \ldots)\| &= \|(\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots)\| \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}|\lambda a_k| \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}|\lambda|(a_k) = |\lambda|\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\right) = |\lambda|\|(a_1, a_2, \ldots)\|.\end{aligned}$$

- 

Ahora veamos que $\ell^1$ es completo. □

## *Problema 3* 6C 10

*Supongamos que $U$ es un subespacio de un espacio vectorial normado $V$ tal que una bola abierta de $V$ esta contenida en $U$. Prueba que $U = V$.*

*Demostración*: Es claro que $U \subset V$, por lo cual veamos que $V \subset U$. Notemos primero que podemos trasladar la bola al origen, pues si $B(x_0, r)$ es la bola de $V$ contenida en $U$, notemos que para todo $y \in B(x_0, r)$ se cumple que $\|y - x_0\| < r$ si y solo si $y - x_0 \in B(0, r)$, como $U$ es subespacio tenemos que $y - x_0 \in U$, para $y \in U$, pues $x_0 \in U$, por lo cual $B(0, r) \subset U$. Entonces, sin perdida de generalidad podemos suponer que $B(0, r) \in U$, luego, dado $x \in V$ notemos que $\frac{r}{2}\frac{x}{\|x\|} \in B(0, r)$, se sigue que

$$\left(2\frac{\|x\|}{r}\right)\left(\frac{r}{2}\frac{x}{\|x\|}\right) = x \in U,$$

pues $\left(2\frac{\|x\|}{r}\right)$ es un escalar, de lo anterior tenemos que $V \subset U$ como queremos. $\square$

## *Problema 4* *6C 14*

*Supongamos que $U$ es un subespacio de un espacio vectorial normado $V$. Suponga ademas que $W$ es un espacio de Banach y $S : U \to W$ es un mapeo lineal acotado.*

*i) Prueba que existe una única función continua $T : \overline{U} \to W$ tal que $T|_U = S$.*

*ii) Prueba que la función $T$ en es un mapeo lineal acotado de $\overline{U}$ hacia $W$ y $\|T\| = \|S\|$.*

*iii) Da un ejemplo para ver que la puede fallar si la suposición que $W$ es un espacio de Banach es remplazada por la suposición que $W$ es un espacio vectorial normado.*

*i) Demostración*: Primero veamos la unicidad, si $T_1, T_2 : \overline{U} \to W$ tales que $T_1|_U = T_2|_U = S$ entonces como $U$ es denso en $\overline{U}$ tenemos que $T_1 = T_2$. Ahora mostraremos su existencia. Sea $u \in \overline{U}$, entonces existe $\{u_n\}_n \subset U$ tal que $u_n \to u$, consideremos $\{S(u_n)\}_n \subset W$ veamos es una sucesión de Cauchy en $W$. Como $S$ es un mapeo lineal acotado tenemos que

$$\|S(u_n) - S(u_m)\|_W = \|S(u_n - u_m)\|_W \leqslant \|S\|\|u_n - u_m\|_U,$$

dado que $\{u_n\}_n$ es una sucesión de Cauchy tenemos que $\{S(u_n)\}_n$ también. El hecho que $W$ es un espacio de Banach tenemos que $S(u_n) \to w$, para algún $w \in W$. De lo anterior podemos definir $T : \overline{U} \to W$, dada por

$$T(u) = \lim_{n\to\infty} S(u_n),$$

para $u_n \to u$. Es claro que $T$ es un mapeo lineal. Notemos que $T$ esta bien definida, pues $u_n \to u$ y $v_n \to u$, con $u \in \overline{U}$ Ademas es claro que $T|_U = S$ $\square$

*ii) Demostración*:

$\square$

*iii) Solución 0.1*: Consideremos el siguiente ejemplo:

## *Problema 5* 6C 15

*Supongamos que $V$ es un espacio vectorial normado y $U$ es un subespacio de $V$. Define $\|\cdot\|$ sobre $V/U$ por*

$$\|f+U\| = \inf\{\|f+g\| : g \in U\}.$$

*i) Prueba que $\|\cdot\|$ es una norma sobre $V/U$ si y solo si $U$ es un subespacio cerrado de $V$.*

*ii) Prueba que si $V$ es un espacio de Banach y $U$ es un subespacio cerrado de $V$, entonces $V/U$ (con la norma definida anteriormente) es un espacio de Banach.*

*iii) Prueba que si $U$ es un espacio de Banach (con la norma que hereda de $V$) y $V/U$ es un espacio de Banach (con la norma definida anteriormente), entonces $V$ es un espacio de Banach.*

*i) Demostración*: Primero notemos lo siguiente: $\|f+U\| = 0$ si y solo si $\inf\{\|f+g\| : g \in U\} = 0$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $g \in U$ tal que $\|f+g\| < \varepsilon$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $g \in U$ tal que $\|f-g\| < \varepsilon$, pues $-g \in U$ al ser subespacio, si y solo si $f \in \overline{U}$.

Sabemos que $V/U$ es un espacio vectorial.

Si $\|\cdot\|$ es una norma sobre $V/U$ se cumple la observación anterior, a ademas podemos notar que $[0] = U$, por lo cual si $\|f+U\| = 0$ si y solo si $f+U = U$ si y solo si

Supongamos ahora que $U$ es cerrado entonces por la observación anterior $\|f+U\| = 0$ si y solo si $f \in U$, pues $U = \overline{U}$, de lo cual se sigue $\|f+U\| = 0$ si y solo si $f+U = U$.

$\square$

*ii) Demostración*:

$\square$

*iii) Demostración*:

$\square$