

# Análisis Funcional I

## Tarea 8

### Operadores lineales acotados I

Maite Fernández Unzueta.  
maite@cimat.mx

Antonio Barragán Romero.  
antonio.barragan@cimat.mx

#### Problema 1

Sean  $X, Y$  espacios normados y  $T : X \rightarrow Y$  lineal. Prueba que  $T$  no es acotado si y solo si existe una sucesión  $\{x_n\}_n \subset X$  tal que  $\|x_n\| \rightarrow 0$  y  $\|T(x_n)\| = 1$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demostración:* Notemos, por definición, que  $T$  no es acotado si y solo si para todo  $k \in \mathbb{R}_+$  existe  $x \in X$  tal que  $\|T(x)\| > k$  y  $\|x\| \leq 1$ . De lo anterior podemos notar que  $T$  no es acotado si y solo si existe  $\{x_n\}_n \subset X$  tal que  $\|T(x_n)\| > n$  y  $\|x_n\| \leq 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , es decir  $\|T(x_n)\| \rightarrow \infty$ . Entonces, considerando  $y_n = \frac{x_n}{\|T(x_n)\|}$ , notemos que para todo  $y_n$  tenemos que

$$\|y_n\| = \left\| \frac{x_n}{\|T(x_n)\|} \right\| = \frac{1}{\|T(x_n)\|} \|x_n\| \leq \frac{1}{\|T(x_n)\|},$$

por lo cual  $\|y_n\| \rightarrow 0$ , pues  $\|T(x_n)\| \rightarrow \infty$ . Más aún podemos ver que, para todo  $y_n$

$$\|T(y_n)\| = \left\| T\left(\frac{x_n}{\|T(x_n)\|}\right) \right\| = \left\| \frac{1}{\|T(x_n)\|} T(x_n) \right\| = \frac{1}{\|T(x_n)\|} \|T(x_n)\| = 1,$$

de lo anterior tenemos lo deseado. □

#### Problema 2

Demuestra que los siguientes operadores lineales son continuos y calcula su norma

- i)  $T : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$  definido como  $T(x(t)) := \int_0^1 x(\tau) d\tau$ .
- ii)  $T : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$  definido como  $T(x(t)) := t^2 x(0)$ .
- iii)  $T : \ell_1 \rightarrow \ell_1$  definido como  $T((x_1, x_2, \dots)) = (0, x_1, x_2, \dots)$ .

#### Problema 3

Sea  $X$  un espacio de Banach,  $Y$  un espacio normado y  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$

- i) Si  $T$  es isomorfismo y  $T^{-1}$  es continuo, prueba que  $Y$  es completo.
- ii) Si  $T$  preserva abiertos, prueba que  $Y$  es completo.

- i) *Demostración:* Primero notemos que  $T^{-1}$  es lineal. Sea  $\{y_n\}_n \subset Y$  una sucesión de Cauchy entonces  $y_n = T(x_n)$ ,  $T^{-1}(y_n) = x_n$  y notemos que

$$\|T^{-1}(y_n - y_m)\| \leq \|T^{-1}\| \|y_n - y_m\|$$

de lo anterior por la linealidad de  $T^{-1}$  tenemos que  $\{T^{-1}(y_n)\}_n \subset X$  es una sucesión de Cauchy. Dado que  $X$  es completo tenemos que existe  $x \in X$  tal que  $T^{-1}(y_n) \rightarrow x$ , sea  $y = T(x)$   $\square$

ii) Demostración:  $\square$

### Problema 4

Comprueba con el siguiente ejemplo, que la hipótesis de completitud del espacio es necesaria para el **Principio de Acotamiento Uniforme**. Justificalo usando los siguientes operadores: sea  $X := c_{00}$  el espacio de la sucesiones eventualmente cero con la norma del supremo y los operadores definidos en él:

$$T_k : c_{00} \rightarrow \mathbb{R}; \quad T((x_n)) = \sum_{n=1}^k x_n$$

### Problema 5

Prueba el siguiente resultado

i) Si  $Z \subset X$  es un subespacio cerrado entonces la aplicación cociente

$$Q : X \rightarrow X/Z$$

es continua y abierta.

ii) Sea  $T : X \rightarrow Y$  una transformación lineal tal que  $\ker T \subset X$  es cerrado. Sea  $\bar{T}$  la transformación inducida por el cociente

$$\bar{T} : X/\ker T \rightarrow Y,$$

dada por  $\bar{T}([x]) = T(x)$ . Entonces  $T$  es abierta si y solo si  $\bar{T}$  es abierta.