Análisis Funcional I

Tarea 2

Maite Fernández Unzueta.
maite@cimat.mx

Antonio Barragán Romero.
antonio.barragan@cimat.mx

Problema 1

Dos espacios métricos sobre el mismo conjunto (M, d_1) y (M, d_2) se dice que son homeomorfos si la función identidad es bicontinua. En tal caso se dice que las métricas d_1 y d_2 son equivalentes.

i) Prueba que si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un homeomorfismo, entonces la métrica en $\mathbb{R}$ definida por $d'(x, y) := |\varphi(x) - \varphi(y)|$ es equivalente a la métrica usual en $\mathbb{R}$.

ii) Prueba que $d'(x, y) := \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right|$ determina una métrica equivalente a la métrica usual en $\mathbb{R}$.

i) Demostración: Sea $I : (\mathbb{R}, d') \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ la función identidad, veamos que $(\mathbb{R}, d')$ y $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ son homeomorfos. Primero veamos que I_d es continua. Dado $x \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$
□

ii) Demostración:

□

Problema 2

Considera dos métricas d_1 y d_2 en un espacio X tales que existen $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ cumpliendo

$$\alpha d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y) \leqslant \beta d_1(x, y).$$

i) Prueba que d_1 y d_2 son equivalentes (según la definición en el ejercicio anterior).

ii) Dada una métrica d_1, prueba que $d_2(x, y) := d_1 \frac{x,y}{1+d_1(x,y)}$ determina una métrica equivalente a d_1

iii) Utiliza este ejemplo para probar que dos métricas pueden ser equivalentes sin que necesariamente existan α y β cumpliendo

sss

Problema 3

Dado un espacio métrico (X, d) un conjunto $K \subset X$ se dice que es totalmente acotado *si para cada $\varepsilon > 0$ existen $x_1, ..., x_n \in X$ tales que*

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon).$$

Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) K no es totalmente acotado en X,

ii) Para algún $\delta > 0$ existe una sucesión $\{x_n\}_n \subset K$ tal que $d\big(x_i, x_j\big) > \delta$ para todo $i \neq j$.

Si X no es totalmente acotado existe $\delta > 0$ tal que no existe un conjunto finito de puntos $x_1, ..., x_n \in X$ tales que $K \not\subset \cup_{i=1}^{n} B(x_i, \delta)$. Es claro que K es no vació. Lo anterior nos dice que podemos escoger un punto $x_1 \in K$ tal que $\frac{K}{B(x_1,\delta)} \neq \emptyset$

Problema 4

Sea X un espacio métrico y $K \subset X$ un subconjunto. Prueba que son equivalentes:

i) K es compacto.

ii) Toda sucesión en K admite una subsucesión convergente cuyo limite está en K

iii) K es totalmente acotado y completo.

Supongamos que K es compacto y sea $\{x_n\} \subset K$ una sucesión y consideremos $\left\{B\left(x_i, \frac{1}{i}\right)\right\}$

Problema 5

Da un ejemplo de un espacio métrico que sea acotado pero no totalmente acotado.

Solución: En este caso consideremos un espacio métrico X infinito y consideremos la métrica discreta $d : X \times X \to X$,

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \neq y \\ 0 \text{ si } x = y. \end{cases}$$

Se puede ver que X es acotado pues podemos tomar cualquier punto $x \in X$ y se tiene que $X \subset B(x, 2)$. Sin embargo para $\varepsilon < 1$ tenemos que $B(x, \varepsilon) = \{x\}$ para todo $x \in X$, por lo cual si queremos cubrir X, necesitamos una cantidad infinita de bolas.

Problema 6

Sea $f : X \to Y$ una función entre dos espacios métricos, X, Y. Prueba que si X es compacto y f es continua, entonces f es uniformemente continua.

Sea $\varepsilon > 0$, como f es continua para todo $x \in X$ existe $\delta_x > 0$ tal que $f(B(x, \delta_x)) \subset B(f(x), \varepsilon)$, luego, podemos notar que $\{B(x, \delta_x)\}$ es una cubierta abierta de X

Consideremos esta colección de bolas abiertas, dado que X es compacto tenemos $\{B(x, \delta_x)\}$ admite una sub-cubierta finita, es decir existen $x_1, ..., x_n \in X$ y $\delta_1, ..., \delta_n \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$X \subset \cup B(x_i, \delta_i).$$

Sea $\delta = \min\{\delta_1, ..., d_n\}$ y notemos que si $x, y \in X$ tales que $d(x, y) < \delta$ entonces Y consideremos la siguiente cubierta abierta de X $\{B(x, \delta)\}$ la cual admite sub-cubierta finita, pues X es compacto. Entonces