

Análisis Funcional I

Tarea 2

Maite Fernández Unzueta.
maite@cimat.mx

Antonio Barragán Romero.
antonio.barragan@cimat.mx

Problema 1

Dos espacios métricos sobre el mismo conjunto (M, d_1) y (M, d_2) se dice que son homeomorfos si la función identidad es bicontinua. En tal caso se dice que las métricas d_1 y d_2 son equivalentes.

- i) Prueba que si $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es un homeomorfismo, entonces la métrica en \mathbb{R} definida por $d'(x, y) := |\varphi(x) - \varphi(y)|$ es equivalente a la métrica usual en \mathbb{R} .
- ii) Prueba que $d'(x, y) := \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|$ determina una métrica equivalente a la métrica usual en \mathbb{R} .

- i) Demostración: Sea $I : (\mathbb{R}, d') \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ la función identidad, veamos que (\mathbb{R}, d') y $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ son homeomorfos. Primero veamos que I_d es continua. Dado $x \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$

□

- ii) Demostración:

□

Problema 2

Considera dos métricas d_1 y d_2 en un espacio X tales que existen $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ cumpliendo

$$\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y).$$

- i) Prueba que d_1 y d_2 son equivalentes (según la definición en el ejercicio anterior).
- ii) Dada una métrica d_1 , prueba que $d_2(x, y) := d_1 \frac{x, y}{1+d_1(x, y)}$ determina una métrica equivalente a d_1 .
- iii) Utiliza este ejemplo para probar que dos métricas pueden ser equivalentes sin que necesariamente existan α y β cumpliendo

SSS

Problema 3

Dado un espacio métrico (X, d) un conjunto $K \subset X$ se dice que es totalmente acotado si para cada $\varepsilon > 0$ existen $x_1, \dots, x_n \in X$ tales que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon).$$

Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i) K no es totalmente acotado en X ,
- ii) Para algún $\delta > 0$ existe una sucesión $\{x_n\}_n \subset K$ tal que $d(x_i, x_j) > \delta$ para todo $i \neq j$.

Si X no es totalmente acotado existe $\delta > 0$ tal que no existe un conjunto finito de puntos $x_1, \dots, x_n \in X$ tales que $K \not\subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \delta)$. Es claro que K es no vacío. Lo anterior nos dice que podemos escoger un punto $x_1 \in K$ tal que $\frac{K}{B(x_1, \delta)} \neq \emptyset$

Problema 4

Sea X un espacio métrico y $K \subset X$ un subconjunto. Prueba que son equivalentes:

- i) K es compacto.
- ii) Toda sucesión en K admite una subsucesión convergente cuyo límite está en K
- iii) K es totalmente acotado y completo.

Supongamos que K es compacto y sea $\{x_n\} \subset K$ una sucesión y consideremos $\{B(x_i, \frac{1}{i})\}$

Problema 5

Da un ejemplo de un espacio métrico que sea acotado pero no totalmente acotado.

Solución: En este caso consideremos un espacio métrico X infinito y consideremos la métrica discreta $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$,

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Se puede ver que X es acotado pues podemos tomar cualquier punto $x \in X$ y se tiene que $X \subset B(x, 2)$. Sin embargo para $\varepsilon < 1$ tenemos que $B(x, \varepsilon) = \{x\}$ para todo $x \in X$, por lo cual si queremos cubrir X , necesitamos una cantidad infinita de bolas.

Problema 6

Sea $f : X \rightarrow Y$ una función entre dos espacios métricos, X, Y . Prueba que si X es compacto y f es continua, entonces f es uniformemente continua.

Sea $\varepsilon > 0$, como f es continua para todo $x \in X$ existe $\delta_x > 0$ tal que $f(B(x, \delta_x)) \subset B(f(x), \varepsilon)$, luego, podemos notar que $\{B(x, \delta_x)\}$ es una cubierta abierta de X

Consideremos esta colección de bolas abiertas, dado que X es compacto tenemos $\{B(x, \delta_x)\}$ admite una sub-cubierta finita, es decir existen $x_1, \dots, x_n \in X$ y $\delta_1, \dots, \delta_n \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$X \subset \cup B(x_i, \delta_i).$$

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ y notemos que si $x, y \in X$ tales que $d(x, y) < \delta$ entonces X consideremos la siguiente cubierta abierta de X $\{B(x, \delta)\}$ la cual admite sub-cubierta finita, pues X es compacto. Entonces