

Análisis Funcional I

Tarea 8

Operadores lineales acotados I

Maite Fernández Unzueta.
maite@cimat.mx

Antonio Barragán Romero.
antonio.barragan@cimat.mx

Problema 1

Sean X, Y espacios normados y $T : X \rightarrow Y$ lineal. Prueba que T no es acotado si y solo si existe una sucesión $\{x_n\}_n \subset X$ tal que $\|x_n\| \rightarrow 0$ y $\|T(x_n)\| = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Notemos, por definición, que T no es acotado si y solo si para todo $k \in \mathbb{R}_+$ existe $x \in X$ tal que $\|T(x)\| > k$ y $\|x\| \leq 1$. De lo anterior podemos notar que T no es acotado si y solo si existe $\{x_n\}_n \subset X$ tal que $\|T(x_n)\| > n$ y $\|x_n\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir $\|T(x_n)\| \rightarrow \infty$. Entonces, considerando $y_n = \frac{x_n}{\|T(x_n)\|}$, notemos que para todo y_n tenemos que

$$\|y_n\| = \left\| \frac{x_n}{\|T(x_n)\|} \right\| = \frac{1}{\|T(x_n)\|} \|x_n\| \leq \frac{1}{\|T(x_n)\|},$$

por lo cual $\|y_n\| \rightarrow 0$, pues $\|T(x_n)\| \rightarrow \infty$. Más aún podemos ver que, para todo y_n

$$\|T(y_n)\| = \left\| T\left(\frac{x_n}{\|T(x_n)\|}\right) \right\| = \left\| \frac{1}{\|T(x_n)\|} T(x_n) \right\| = \frac{1}{\|T(x_n)\|} \|T(x_n)\| = 1,$$

de lo anterior tenemos lo deseado. □

Problema 2

Demuestra que los siguientes operadores lineales son continuos y calcula su norma

- i) $T : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ definido como $T(x(t)) := \int_0^1 x(\tau) d\tau$.
- ii) $T : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ definido como $T(x(t)) := t^2 x(0)$.
- iii) $T : \ell_1 \rightarrow \ell_1$ definido como $T((x_1, x_2, \dots)) = (0, x_1, x_2, \dots)$.

Problema 3

Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T \in \mathcal{L}(X, Y)$

- i) Si T es isomorfismo y T^{-1} es continuo, prueba que Y es completo.
- ii) Si T preserva abiertos, prueba que Y es completo.

- i) *Demostración:* Primero notemos que T^{-1} es lineal. Sea $\{y_n\}_n \subset Y$ una sucesión de Cauchy entonces $y_n = T(x_n)$, $T^{-1}(y_n) = x_n$ y notemos que

$$\|T^{-1}(y_n - y_m)\| \leq \|T^{-1}\| \|y_n - y_m\|$$

de lo anterior por la linealidad de T^{-1} tenemos que $\{T^{-1}(y_n)\}_n \subset X$ es una sucesión de Cauchy. Dado que X es completo tenemos que existe $x \in X$ tal que $T^{-1}(y_n) \rightarrow x$, sea $y = T(x)$ \square

ii) Demostración: \square

Problema 4

Comprueba con el siguiente ejemplo, que la hipótesis de completitud del espacio es necesaria para el **Principio de Acotamiento Uniforme**. Justificalo usando los siguientes operadores: sea $X := c_{00}$ el espacio de la sucesiones eventualmente cero con la norma del supremo y los operadores definidos en él:

$$T_k : c_{00} \rightarrow \mathbb{R}; \quad T((x_n)) = \sum_{n=1}^k x_n$$

Problema 5

Prueba el siguiente resultado

i) Si $Z \subset X$ es un subespacio cerrado entonces la aplicación cociente

$$Q : X \rightarrow X/Z$$

es continua y abierta.

ii) Sea $T : X \rightarrow Y$ una transformación lineal tal que $\ker T \subset X$ es cerrado. Sea \bar{T} la transformación inducida por el cociente

$$\bar{T} : X/\ker T \rightarrow Y,$$

dada por $\bar{T}([x]) = T(x)$. Entonces T es abierta si y solo si \bar{T} es abierta.