Análisis Funcional I

Tarea 6

Espacios de Bergman

Maite Fernández Unzueta.
maite@cimat.mx

Antonio Barragán Romero.
antonio.barragan@cimat.mx

1. Espacios de Bergman

1.1. Un poco de historia

El principio de la década de 1970 marca el inicio de los estudios teóricos de estos espacios. Progreso sustancial fue hecho por Horowitz y Korenblum, entre otros, en la parte de conjuntos de ceros, vectores cíclicos y subespacios invariantes.

En 1980 vio el florecimiento de la teoría de operadores relacionados a espacios de Bergman. Sus descubrimientos fueron presentados en el libro de Zhu de 1990 «Teoría de operadores en espacios de funciones».

La década de 1990 dio lugar a varios avances de la la teoría de funciones asi como en la teoría de operadores. De los resultados mas notables esta la caracterización geométrica de sucesiones de interpolación y muestreo de parte de Seip y el descubrimiento de Hedenmalm de los divisores contractivos de cero.

1.2. Resultados

Sea

$$\mathbb{B}_n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\},$$

la bola abierta unitaria en $\mathbb{C}^n$.

Por lo regular se escoge la bola unitaria porque la mayoría de resultados se obtienen usando formulas sencillas sin mucho problema.

Para $\alpha > -1$ la medida de Lebesgue *ponderada* dv_α esta definida por

$$dv_\alpha(z) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(n+1)}(1-|z|^2)^\alpha dv(z) = (\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha dv(z)$$

de forma que dv_α sea una medida de probabilidad en $\mathbb{B}_n$.

Para $\alpha > -1$ y $p > 0$ el **espacio de Bergman ponderado** A^p_α consiste de las funciones holomorfas en $L^p(\mathbb{B}_n, dv_\alpha)$, donde la norma esta dada por

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left[\int_{\mathbb{B}_n} |f(z)|^p dv_{\alpha(z)}\right]^{1p}$$

De lo anterior, podemos notar lo siguiente. Para $1 \leqslant p < \infty$ el espacio $L^p(\mathbb{B}_n, dv_\alpha)$ es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_{p,\alpha}$. Ademas A^p_α es un subespacio lineal de $L^p(\mathbb{B}_n, dv_\alpha)$, por lo cual para ver que A^p_α es un espacio de Banach basta ver que A^p_α es cerrado en $L^p(\mathbb{B}_n, dv_\alpha)$.

Para ver que A^p_α es cerrado se usa el siguiente Lemma 1, el cual depende de la siguiente representación integral.

Teorema 1: Si $\alpha > -1$ y $f \in A^1_\alpha$, entonces

$$f(z) = \int_{\mathbb{B}_n} \frac{f(w)dv_{\alpha(z)}}{(1 - \langle z, w \rangle)^{n+1+\alpha}},$$

para todo $z \in \mathbb{B}_n$.

Lemma 1: Si $p > 0$, $\alpha > -1$, $0 < r < 1$ y $m = (m_1, ..., m_n)$ es un multi-indice de enteros no negativos. Entonces existe una constante positiva C tal que

$$\left| \frac{\partial^m f}{\partial z^m}(z) \right| \leqslant C \|f\|_{p,\alpha},$$

para toda $f \in A^p_\alpha$ y toda $z \in \mathbb{B}_n$ con $|z| \leqslant r$.

Problema 1 *Espacios de Bergman ponderado*

Para $\alpha > -1$ y $p > 0$ el ***espacio de Bergman ponderado*** *A^p_α consiste de las funciones holomorfas $f \in L^p(\mathbb{B}_n, dv_\alpha)$, es un espacio de Banach.*

Demostración: Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión en A^p_α y supongamos que

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_{p,\alpha} = 0,$$

para algún $f \in L^p(\mathbb{B}_n, dv_\alpha)$, más aún, $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en A^p_α, luego por Lemma 1 podemos ver que $\{f_n\}_n$ converge de manera uniforme en $\{z \in \mathbb{B}_n : |z| < r\}$ el cual es compacto. Lo anterior junto con la suposición de que $f_n \to f$ en $L^p(\mathbb{B}_n, dv_\alpha)$ nos dice que $f_n(z) \to f(z)$ en $\{z \in \mathbb{B}_n : |z| < r\}$ el cual es compacto, por lo cual concluimos que f es analítica en $\mathbb{B}_n$[1] y entonces pertenece a A^p_α. □

2. Espacios $C^k_b(U)$

Se utiliza en el análisis de señales y imágenes, pues se usan para modelar transformaciones de imágenes y filtros en espacios con restricciones de suavidad. En general el espacio $C^k_b(U)$ no es isomorfo a $L^p(U)$ ya que C^k_b contiene funciones continuas con derivadas acotadas, mientras que $L^p(U)$ al estar definido en términos de integrabilidad permite descontinuidades.

[1] Aquí usamos un resultado de variable compleja que nos dice que si $\{f_n\}_n$ es una sucesión de funciones analíticas en un abierto Ω que convergen de manera uniforme en conjuntos compactos de Ω a f. Entonces f es analítica en Ω

Problema 2

Dado $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, sea $C_b^k(U)$ el conjunto de todas las funciones C^k $f : U \to \mathbb{C}$ tales que

$$\|f\| := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m, |\alpha| \leqslant k} \sup_{x \in U} |\partial^\alpha f(x)| < \infty,$$

es un espacio de Banach.

Demostración: Veamos primero que $\|\cdot\|$ es una norma. Notemos que por definición es no negativa, luego, si $f = 0$ es claro que $\|f\| = 0$, ahora si $\|f\| = 0$ se cumple que $\partial^\alpha f(x) = 0$ para todo α, tomando $\alpha = 0$, se sigue que $f = 0$. La homogeneidad se sigue de la homogeneidad de la derivación y de que el supremo saca escalares. Finalmente para la desigualdad del triangulo, dadas $f, g \in C_b^k(U)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|f + g\| &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m, |\alpha| \leqslant k} \sup_{x \in U} |\partial^\alpha (f + g)(x)| = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m, |\alpha| \leqslant k} \sup_{x \in U} |\partial^\alpha f(x) + \partial^\alpha g(x)| \\
&\leqslant \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m, |\alpha| \leqslant k} \sup_{x \in U} \{|\partial^\alpha f(x)| + |\partial^\alpha g(x)|\} \\
&\leqslant \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m, |\alpha| \leqslant k} \sup_{x \in U} |\partial^\alpha f(x)| + \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m, |\alpha| \leqslant k} \sup_{x \in U} |\partial^\alpha g(x)| \\
&= \|f\| + \|g\|.
\end{aligned}$$

Por ultimo veamos que $\left(C_b^k(U), \|\cdot\|\right)$ es un espacio de Banach. Dada $\{f_n\}_n$ una sucesión de Cauchy en C_b^k. Por definición, para toda $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f_m\| = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m, |\alpha| \leqslant k} \sup_{x \in U} |\partial^\alpha f_n(x) - \partial^\alpha f_m(x)| < \varepsilon, \quad \forall n.m \geqslant N,$$

en particular tenemos que cada $\sup_{x \in U} |\partial^\alpha f_n(x) - \partial^\alpha f_m(x)|$ tiende a cero. Dado que las funciones $\partial^\alpha f$ son acotadas y que $(\mathcal{B}(U), \|\cdot\|_\infty)$ es completo, se cumple que para cada α existe $g_\alpha \in (\mathcal{B}(U), \|\cdot\|_\infty)$ tal que $\partial^\alpha f \to g_\alpha$, por lo cual g_α también es continua. Tomando $\alpha = (0, ..., 0)$, tenemos que $f_n \to g_0$ uniformemente a una g_0. Sea $f = g_0$ y veamos que $f \in C_b^k(U)$, por lo anterior tenemos que $\partial^\alpha f_n \to g_\alpha$, por lo cual $\partial^\alpha f = g_\alpha$ para toda α. Ademas, cada $\partial^\alpha f$ esta acotada por la convergencia uniforme a g_α. Lo anterior nos asegura que $f \in C_b^k(U)$ y que $\|f_n - f\| \to 0$, como queremos. □

3. Espacios de Sobolev

3.1. Motivación

Se origina en las ecuaciones diferenciales, por ejemplo

$$\begin{cases} -u'' + u = f \\ u(a) = u(b) = 0 \quad \text{para } f \in C[a, b]\text{'} \end{cases}$$

una solución exacta u es lo que llamaríamos una solución clásica, pero como sabemos encontrar la u es difícil sino que imposible, es por eso que se tienen en cuenta otro tipo de soluciones, las llamadas soluciones débiles que provienen de resolver una ecuación integral que se deduce de la ecuación original, por ejemplo si u es solución entonces para cualquier φ se debe cumplir que $f\varphi = -u''\varphi + u\varphi$, y también

$$\begin{aligned}\int_a^b f\varphi &= \int_a^b -u''\varphi + \int_a^b u\varphi \\ &= -[\varphi u]_a^b - \int_a^b u'\varphi' + \int_a^b u\varphi \\ &= \int_a^b u'\varphi' + \int_a^b u\varphi.\end{aligned}$$

notar de lo anterior que para que u sea solución de la ecuación integral necesitamos que $u' \in L^p$, y por tanto el rango de soluciones débiles es mas grade que el clásico.

3.2. Resultados

Primero definamos $W^{1,p}$ y el caso general $W^{p,s}$ se define de manera recursiva. Definimos

$$W^{p,1}(U) = \left\{ u \in L^{p(U)} : \exists\ g \in L^p(U) \text{ tal que} \int u\varphi' = -\int g\varphi \quad \text{para toda} \quad \varphi \in C_0^1(U) \right\},$$

donde escribimos $u' := g$ para decir que u' es la derivada de u en el sentido $W^{p,1}$, asi, podemos definir

$$W^{p,s} = \{u \in W^{p,s-1} : u' \in W^{p,s-1}\}.$$

Luego, podemos equipar a $W^{p,1}$ ocn la norma

$$\|u\|_{W^{p,1}} = \|u\|_p + \|u'\|_p.$$

y para $W^{p,s}$ como

$$\|u\|_{W^{p,s}} = \|u\|_p + \|u'\|_p + \cdots + \|u^s\|_p.$$

Problema 3 Espacios de Sobolev

Dado $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $1 \leqslant p \leqslant \infty$, sea $W^{p,s}(U)$ el espacio vectorial de (las clases de equivalencia) las funciones $f : U \to \mathbb{C}$ en L^p para las cuales todas sus derivadas distribucionales de orden total $\leqslant s$ son representadas por funciones L^p, equipadas con la norma

$$\|f\| := \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m, |\alpha| \leqslant s} \|\partial^\alpha f\|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

*es un espacio de Banach. Estos son los **espacios de Sobolev**.*

Demostración: Por la definición recursiva, mostraremos el resultado para $W^{p,1}$. si $\{u_n\}_n \subset W^{p,1}$ es una sucesión de Cauchy podemos notar que $\{u_n\}$ y $\{u_{n'}\}$ son sucesiones de Cauchy en L^p por lo cual convergen a ciertas $u, g \in L^p$. Luego,

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int u_n\varphi' + \int u_{n'}\varphi$$

$$= \int u\varphi' + \int g\varphi,$$

por lo cual $u \in W^{p,1}$. □

4. Espacios de Hölder

4.1. Un poco de historia

Otto Hölder introdujo la condición de Hölder en su tesis doctoral «Contribuciones a la teoría de potencial» al estudiar el comportamiento de una función potencial y sus derivadas cerca de la frontera, en 1882. Su principal aplicación es en Ecuaciones diferenciales parciales elípticas.== Resultados

Se define la α-seminorma de Hölder en el espacio de funciones $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ como

$$|f| = \sup_{x,y\in[0,1],x\neq y} \left\{ \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \right\},$$

y esta se hace norma con

$$\|f\| = |f(0)| + |f|.$$

Entonces $\Lambda^\alpha([0,1])$ es el espacio de funciones tales que $\|f\| < \infty$.

Problema 4

Dado $\alpha \in (0,1]$, sea $\Lambda^\alpha([0,1])$ es espacio vectorial de funciones $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ tales que

$$\|f\| = |f(0)| + \sup_{x,y\in[0,1],x\neq y} \left\{ \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \right\} < \infty,$$

*es espacio de Banach. Estos son los **espacios de Hölder**. $\Lambda^1([0,1])$ es el **espacio Lipchitz**.*

Demostración: Primero veamos que $\|\cdot\|$ es norma. Es claro que es no negativa, la homogeneidad se obtiene dado que el supremo saca escalares y la desigualdad del triangulo se obtiene de propiedades del supremo. Por ultimo, si $f = 0$ tenemos que $\|f\| = 0$ y si $\|f\| = 0$ entonces $f(0) = 0$ y ademas

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} = 0,$$

para $x, y \in [0,1]$ distintos, lo cual implica que $f(x) = f(y)$, es decir, $f = 0$.

Ahora veamos que $\Lambda^\alpha([0,1])$ es completo. Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión de Cauchy, entonces se cumple que

$$\|f_n - f_m\| = |f_n(0) - f_m(0)| + |f_n - f_m| \to 0,$$

lo cual nos dice que $\left\{f_{n(0)}\right\}$ es de Cauchy y por tanto $f_n(0) \to c$, para algún $c \in \mathbb{C}$. De manera similar, como $|f_n - f_m| \to 0$ tenemos que, para $x \in (0,1]$

$$|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(0)| \leqslant \varepsilon|x|^\alpha \leqslant \varepsilon,$$

como $(f_n - f_m)(0) \to 0$, tenemos que $\{(f_n - f_m)(x)\}$ es de Cauchy. Por lo anterior, definimos $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ y notemos que como se cumple que

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \quad \forall n, m \geqslant N,$$

haciendo $m \to \infty$ tenemos que

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon,$$

para todo x y por tanto la convergencia es uniforme, Veamos que $f \in \Lambda^\alpha([0,1])$ para ello notemos que para n suficientemente grande

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &\leqslant 2\varepsilon + |f_n||x-y|^\alpha, \end{aligned}$$

recodemos que $|f_n|$ es acotado por lo cual

$$|f(x) - f(y)| \leqslant 2\varepsilon + C|x-y|^\alpha,$$

se sigue que

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x-y|^\alpha,$$

como queremos. Por ultimo veamos que $f_n \to f$ en la norma. Para ello basta ver que $|f_n - f| \to 0$, simplemente notemos que

$$\frac{|(f_n - f)(x) - (f_n - f)(y)|}{|x-y|^\alpha} = \lim_{m\to\infty} \frac{|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(y)|}{|x-y|^\alpha} = \lim_{m\to\infty} |f_n - f_m|,$$

y recordando que $|f_n - f_m| \to 0$. □

5. Espacios de Hardy

5.1. Un poco de historia

La teoría de estos espacios se remonta a estudios hechos por G.H. Hardy, J.E. Littlewood, I.I. Privalov, F. y M. Riesz, V. Smirnov, y G.Szegö. Inicialmente el enfoque se centraba mucho en los elementos individuales, con el paso del tiempo la perspectiva cambio y empezó a ver como un todo, como espacios lineales.

5.2. Resultados

Algunas observaciones sobre este espacio, se cumple que $F \in H^2(\mathbb{B})$ si y solo si $F = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$, con $\sum_{n=0}^\infty |a_n|^2 < \infty$. Más aún se tiene que $\sum_{n=0}^\infty |a_n|^2 = \|F\|$. Lo anterior nos dice que $H^2(\mathbb{B})$ puede verse como un espacio de Hilbert (ℓ^2).

Problema 5 Espacios de Hardy

Sea $\mathbb{B}$ el disco unitario complejo centrado en 0. El ***espacio de Hardy*** *$H^2(\mathbb{B})$ consiste de todas las funciones holomorfas F en el disco unitario $\mathbb{B}$ que satisfacen*

$$\sup_{r\in[0,1]} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|F\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta < \infty.$$

Definimos la norma en este espacio como la raíz cuadrada de la cantidad anterior.

El resultado para $H^2(\mathbb{B})$ se basa en la identidad de Parseval, la cual nos dice que si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, entonces

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re(i\theta))|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n},$$

también

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\big(re^{i\theta}\big)e^{-in\theta} d\theta.$$

La prueba se basa en tomar la expansión del Teorema de Taylor truncada al terminó n, tomar el limite radial, y la convergencia a los puntos de cerradura.