

# Análisis Funcional I

## Tarea 7

Maite Fernández Unzueta.  
maite@cimat.mx

Antonio Barragán Romero.  
antonio.barragan@cimat.mx

### Problema 1 6E 5

Supongamos que

$$X = \{0\} \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k} \right\},$$

y  $d(x, y) = |x - y|$  para  $x, y \in X$ .

- i) Muestra que  $(X, d)$  es un espacio métrico completo.
- ii) Cada conjunto de la forma  $\{x\}$  para  $x \in X$  es un subconjunto cerrado de  $\mathbb{R}$  que tiene interior vacío como subconjunto de  $\mathbb{R}$ . Claramente  $X$  es una unión numerable de tales conjuntos. Explica porque esto no viola el enunciado del Teorema de Baire que un espacio métrico completo no es la unión contable de conjuntos cerrados con interior no vacío.

### Problema 2 AE 6

Da un ejemplo de un espacio métrico que es la unión contable de subconjuntos cerrados con interior vacío.

### Problema 3 AE 7

i) Define  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ \frac{1}{n} & \text{si } x \text{ es racional y } n \text{ es el menor entero positivo} \\ & \text{tal que } x = \frac{m}{n} \text{ para algún entero } m \end{cases}$$

- ii) Muestra que no existe una colección contable de subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}$  cuya intersección sea igual a  $\mathbb{Q}$ .
- iii) Prueba que no existe una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f$  es continua en  $\mathbb{Q}$  pero discontinua en  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

### Problema 4 6E 10

Da un ejemplo de un espacio de Banach  $V$ , un espacio vectorial normado  $W$ , un mapeo lineal acotado  $T$  de  $V$  sobre  $W$  y un conjunto abierto  $G$  de  $V$  tal que  $T(G)$  no es un conjunto abierto de  $W$ .

**Problema 5** 6E 11

Muestra que existe un espacio vectorial normado  $V$ , un espacio de Banach  $W$ , un mapeo lineal acotado  $T$  de  $V$  a  $W$ , y un conjunto abierto  $G$  de  $V$  tal que  $T(G)$  no es un conjunto abierto de  $W$ .

**Problema 6** 6E 12

Supongamos que  $T : V \rightarrow W$  es un mapeo lineal acotado donde  $V, W$  son espacios de Banach. Demuestra que  $T$  está acotado por abajo si y solo si  $T$  es inyectiva y  $T(V)$  es un subespacio cerrado de  $W$ .

**Problema 7**

Prueba que

$$\sum_{j \geq 0} 2^{-j} \exp(\sqrt{-1} 3^j x)$$

es una función continua que no es diferenciable en ningún punto.

**Problema 8**

Demuestra que

$$\sum_{j \geq 0} 10^{-j} \{10^j x\},$$

donde  $\{x\}$  es la distancia al entero más cercano.