Análisis Funcional I

Tarea 8

Operadores lineales acotados I

Maite Fernández Unzueta. maite@cimat.mx

Antonio Barragán Romero. antonio.barragan@cimat.mx

Problema 1

Sean X, Y espacios normados y $T : X \to Y$ lineal. Prueba que T no es acotado si y solo si existe una sucesión $\{x_n\}_n \subset X$ tal que $\|x_n\| \to 0$ y $\|T(x_n)\| = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Notemos, por definición, que T no es acotado si y solo si para todo $k \in \mathbb{R}_+$ existe $x \in X$ tal que $\|T(x)\| > k$ y $\|x\| \leqslant 1$. De lo anterior podemos notar que T no es acotado si y solo si existe $\{x_n\}_n \subset X$ tal que $\|T(x_n)\| > n$ y $\|x_n\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir $\|T(x_n)\| \to \infty$. Entonces, considerando $y_n = \frac{x_n}{\|T(x_n)\|}$, notemos que para todo y_n tenemos que

$$\|y_n\| = \left\| \frac{x_n}{\|T(x_n)\|} \right\| = \frac{1}{\|T(x_n)\|} \|x_n\| \leqslant \frac{1}{\|T(x_n)\|},$$

por lo cual $\|y_n\| \to 0$, pues $\|T(x_n)\| \to \infty$. Más aún podemos ver que, para todo y_n

$$\|T(y_n)\| = \left\| T\left(\frac{x_n}{\|T(x_n)\|} \right) \right\| = \left\| \frac{1}{\|T(x_n)\|} T(x_n) \right\| = \frac{1}{\|T(x_n)\|} \|T(x_n)\| = 1,$$

de lo anterior tenemos lo deseado.

□

Problema 2

Demuestra que los siguientes operadores lineales son continuos y calcula su norma

i) $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ *definido como* $T(x(t)) := \int_0^1 x(\tau) d\tau$.

ii) $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ *definido como* $T(x(t)) := t^2 x(0)$.

iii) $T : \ell_1 \to \ell_1$ *definido como* $T((x_1, x_2, ...)) = (0, x_1, x_2, ...)$.

Problema 3

Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T \in \mathcal{L}(X, Y)$

i) Si T es isomorfismo y T^{-1} es continuo, prueba que Y es completo.

ii) Si T preserva abiertos, prueba que Y es completo.

i) Demostración: Primero notemos que T^{-1} es lineal Sea $\{y_n\}_n \subset Y$ una sucesión de Cauchy entonces $y_n = T(x_n)$, $T^{-1}(y_n) = x_n$ y notemos que

$$\left\|T^{-1}(y_n - y_m)\right\| \leqslant \left\|T^{-1}\right\| \|y_n - y_m\|$$

de lo anterior por la linealidad de T^{-1} tenemos que $\left\{T^{-1}(y_n)\right\}_n \subset X$ es una sucesión de Cauchy. Dado que X es completo tenemos que existe $x \in X$ tal que $T^{-1}(y_n) \to x$, sea $y = T(x)$ □

ii) Demostración:

□

Problema 4

*Comprueba con el siguiente ejemplo, que la hipótesis de completitud del espacio es necesaria para el **Principio de Acotamiento Uniforme**. Justificalo usando los siguientes operadores: sea $X := c_{00}$ el espacio de la sucesiones eventualmente cero con la norma del supremo y los operadores definidos en él:*

$$T_k : c_{00} \to \mathbb{R}; \quad T((x_n)) = \sum_{n=1}^{k} x_n$$

Problema 5

Prueba el siguiente resultado

i) Si $Z \subset X$ es un subespacio cerrado entonces la aplicación cociente

$$Q : X \to X/Z$$

es continua y abierta.

ii) Sea $T : X \to Y$ una transformación lineal tal que $\ker T \subset X$ es cerrado. Sea $\overline{T}$ la transformación inducida por el cociente

$$\overline{T} : X/\ker T \to Y,$$

dada por $\overline{T}([x]) = T(x)$. Entonces T es abierta si y solo si $\overline{T}$ es abierta.