

# Análisis Funcional I

## Tarea 5

Maite Fernández Unzueta.  
maite@cimat.mx

Antonio Barragán Romero.  
antonio.barragan@cimat.mx

### Problema 1 7A 2

Suponga que  $a \geq 0, b \geq 0$ , y  $1 < p < \infty$ . Demuestra que

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

si y solo si  $a^p = b^q$ , donde  $q$  es el exponente dual de  $p$ .

*Demostración:* Si  $a$  ó  $b$  son cero, la desigualdad es clara, así que supongamos que ninguno es cero. Dado que la función  $f(t) = e^t$  es estrictamente convexa pues  $f''(t) = e^t > 0$ , se cumple que

$$e^{\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y} \leq \frac{1}{p}e^x + \frac{1}{q}e^y,$$

con igualdad si y solo si  $x = y$ . Luego, para  $x = p \ln(a), y = q \ln(b)$ , se cumple que

$$ab = e^{\frac{1}{p}(p \ln(a)) + \frac{1}{q}(q \ln(b))} \leq \frac{1}{p}e^{p \ln(a)} + \frac{1}{q}e^{q \ln(b)} = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q,$$

con igualdad si y solo si  $p \ln(a) = q \ln(b)$ , es decir si y solo si  $a^p = b^q$ , como queremos.

□

### Problema 2 7A 3

Suponga que  $a_1, \dots, a_n$  son números no negativos. Prueba que

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^5 \leq n^4 (a_1^5 + \dots + a_n^5)$$

*Demostración:* Notemos que 5 es el exponente dual de  $\frac{5}{4}$ , por lo tanto por la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i &= \sum_{i=1}^n 1 \cdot a_i \leq \left( \sum_{i=1}^n 1^{\frac{5}{4}} \right)^{\frac{4}{5}} \left( \sum_{i=1}^n a_i^5 \right)^{\frac{1}{5}} \\ &= n^{\frac{4}{5}} \left( \sum_{i=1}^n a_i^5 \right)^{\frac{1}{5}}, \end{aligned}$$

se sigue que

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^5 \leq n^4 (a_1^5 + \dots + a_n^5),$$

como queremos. □

### Problema 3 7A 7

Supongamos que  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  es un espacio métrico y  $f, h : X \rightarrow \mathbf{F}$  son  $\mathcal{S}$ -medibles. Prueba que

$$\|fh\|_r \leq \|f\|_p \|h\|_q,$$

para todos los números positivos  $p, q, r$  tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ .

*Demostración:* Primero notemos que como  $f, h$  son  $\mathcal{F}$ -medibles entonces  $|f|^r$  y  $|h|^r$  también lo son. Luego, de la hipótesis de que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$  obtenemos que

$$\frac{1}{\frac{p}{r}} + \frac{1}{\frac{q}{r}} = 1,$$

y además  $r(p+q) = pq$ , de donde se deduce que  $pq > rp$  y que  $pq > rq$  pues  $rp, rq > 0$ , lo cual implica que  $q > r$  y  $p > r$  pues  $p, q$  son positivos y por tanto  $\frac{q}{r} > 1$  y  $\frac{p}{r} > 1$ , pues  $r$  es positivo. Lo anterior no dice que podemos usar la desigualdad de Hölder sobre  $|f|^r, |h|^r$ , con  $\frac{p}{r}$  y  $\frac{q}{r}$  para obtener que

$$\begin{aligned} \int |fh|^r d\mu &= \int ||f|^r |h|^r| d\mu \leq \left( \int ||f|^r|^{\frac{p}{r}} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int ||h|^r|^{\frac{q}{r}} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left( \int |f|^p d\mu \right)^{\frac{r}{p}} \left( \int |h|^q d\mu \right)^{\frac{r}{q}}, \end{aligned}$$

de donde, al elevar lo anterior a  $\frac{1}{r}$ , obtenemos que

$$\left( \int |fh|^r d\mu \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left( \int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int |h|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}},$$

es decir,  $\|fh\|_r \leq \|f\|_p \|h\|_q$ , como queremos. □

### Problema 4 7A 8

Supongamos que  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  es un espacio métrico y  $n \in \mathbb{Z}^+$ . Prueba que

$$\left\| \prod_{i=1}^n f_i \right\|_1 \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i},$$

para todos los números positivos  $p_1, \dots, p_n$  tales que  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1$  y todas la funciones  $\mathcal{S}$ -medibles  $f_1, f_2, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbf{F}$ .

*Demostración:* □

**Problema 5** 7A 10

Supongamos que  $0 < p < q \leq \infty$ .

i) Prueba que  $\ell^p \subset \ell^q$ .

ii) Prueba que  $\|\{a_n\}_n\|_p \geq \|\{a_n\}_n\|_q$  para toda sucesión  $\{a_n\}_n \subset \mathbf{F}$ .

i) *Demostración:* Dada  $\{x_n\}_n \in \ell^p$ , se cumple que  $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ , lo cual implica que  $|x_n|^p \rightarrow 0$ , es decir,  $\{|x_n|^p\}_n$  es convergente y por tanto es acotada, se sigue que  $\{|x_n|\}_n$  es acotada y en consecuencia  $\{x_n\}_n \in \ell^\infty$ , de modo que  $\ell^p \subset \ell^\infty$ .

Como  $|x_n|^p \rightarrow 0$  entonces existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n|^p < 1$  para  $n \geq N$ , como  $q > p$  se sigue que  $|x_n|^q < |x_n|^p$  para todo  $n \geq N$ . Dado que  $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ , se sigue que  $\sum_{n=N}^{\infty} |x_n|^q \leq \sum_{n=N}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ , lo cual implica que  $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q < \infty$ , pues  $\sum_{n=1}^{N-1} |x_n|^q < \infty$ , es decir  $\{x_n\}_n \in \ell^q$  y por tanto  $\ell^p \subset \ell^q$ . □

ii) *Demostración:* Dado  $\{a_n\}_n \subset \mathbf{F}$ , sea  $\alpha = \|\{a_n\}_n\|_p$  y notemos que

$$\frac{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_n}{\alpha}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}}{q} = \frac{1}{\alpha} \|\{a_n\}_n\| = 1,$$

entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x_n}{\alpha}\right|^p = 1$  lo cual implica que  $\left|\frac{x_n}{\alpha}\right| \leq 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Dado que  $q > p$  se cumple que  $\left|\frac{x_n}{\alpha}\right|^q \leq \left|\frac{x_n}{\alpha}\right|^p$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , por lo cual

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x_n}{\alpha}\right|^q \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x_n}{\alpha}\right|^p = 1,$$

□

**Problema 6** 7A 11

Demuestra que:

$$\bigcap_{p>1} \ell^p \neq \ell^1.$$

*Demostración:* Consideremos  $\left\{\frac{1}{n}\right\}_n \subset \mathbf{F}$ , dado  $1 < p < \infty$  sabemos que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  converge, y por tanto  $\left\{\frac{1}{n}\right\}_n \in \ell^p$ . Mas aun, es claro que  $\left\{\frac{1}{n}\right\}_n$  esta acotada, y por tanto  $\left\{\frac{1}{n}\right\}_n \in \ell^\infty$ . De lo anterior vemos que

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_n \in \bigcap_{p>1} \ell^p,$$

sin embargo, sabemos que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  diverge, es decir,  $\left\{\frac{1}{n}\right\}_n \notin \ell^1$ , y por tanto no se puede dar la igualdad. □

**Problema 7** 7A 12

Muestra que

$$\bigcap_{p < \infty} \mathcal{L}^p([0, 1]) \neq \mathcal{L}^\infty([0, 1]).$$

*Demostración:* Dado que una función *esencialmente acotada* (en  $[0, 1]$ ) es  $\mathcal{L}^p$  integrable para todo  $0 < p < \infty$  (en  $[0, 1]$ ), se cumple que  $\bigcap_{p < \infty} \mathcal{L}^p([0, 1]) \supset \mathcal{L}^\infty([0, 1])$ , por lo que para ver que no se da la igualdad mostraremos una función  $\mathcal{L}^p([0, 1])$  integrable para todo  $0 < p < \infty$  tal que no sea *esencialmente acotada* en  $[0, 1]$ .

Para ello consideremos  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} -\log(x) & \text{si } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Veamos que  $-\log(x) \leq \frac{1}{x}$  para todo  $x \in (0, \infty)$ , en especial para  $x \in (0, 1)$  se cumple que

$$-\log(x) \leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

□

**Problema 8** 7A 13

Demuestra que

$$\bigcup_{p > 1} \mathcal{L}^p([0, 1]) \neq \mathcal{L}^1([0, 1]).$$

*Demostración:* Consideremos la siguiente función

□

**Problema 9** 7A 14

Supongamos que  $p, q \in (0, \infty]$ , con  $p \neq q$ . Prueba que ninguno de los conjuntos  $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$  y  $\mathcal{L}^q(\mathbb{R})$  es subconjunto del otro.

*Demostración:*

□

**Problema 10** 7A 15

Muestra que existe  $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  tal que  $f \notin \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$  para todo  $p \in (0, \infty] \setminus \{2\}$ .