Análisis Funcional I

Tarea 5

Maite Fernández Unzueta.
maite@cimat.mx

Antonio Barragán Romero.
antonio.barragan@cimat.mx

Problema 1 7A 2

Suponga que $a \geqslant 0, b \geqslant 0$, y $1 < p < \infty$. Demuestra que

$$ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

si y solo si $a^p = b^q$, donde q es el exponente dual de p.

Demostración: Si a ó b son cero, la desigualdad es clara, asi que supongamos que ninguno es cero. Dado que la función $f(t) = e^t$ es estrictamente convexa pues $f''(t) = e^t > 0$, se cumple que

$$e^{\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y} \leqslant \frac{1}{p}e^x + \frac{1}{q}e^y,$$

con igualdad si y solo si $x = y$. Luego, para $x = p\ln(a), y = q\ln(b)$, se cumple que

$$ab = e^{\frac{1}{p}(p\ln(a)) + \frac{1}{q}(q\ln(y))} \leqslant \frac{1}{p}e^{p\ln(a)} + \frac{1}{q}e^{q\ln(b)} = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q,$$

con igualdad si y solo si $p\ln(a) = q\ln(b)$, es decir si y solo si $a^p = b^q$, como queremos. $\square$

Problema 2 7A 3

Suponga que $a_1, \dots, a_n$ son números no negativos. Prueba que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^5 \leqslant n^4(a_1^5 + \dots + a_n^5)$$

Demostración: Notemos que 5 es el exponente dual de $\frac{5}{4}$, por lo tanto por la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot a_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} 1^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{4}{5}} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^5\right)^{\frac{1}{5}}$$
$$= n^{\frac{4}{5}} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^5\right)^{\frac{1}{5}},$$

se sigue que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^5 \leqslant n^4(a_1^5 + \dots + a_n^5),$$

como queremos. $\square$

Problema 3 7A 7

Supongamos que $(X, \mathcal{S}, \mu)$ *es un espacio métrico y* $f, h : X \to \boldsymbol{F}$ *son* $\mathcal{S}$*-medibles. Prueba que*

$$\|fh\|_r \leqslant \|f\|_p \|h\|_q,$$

para todos los números positivos p, q, r *tales que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$.

Demostración: Primero notemos que como f, h son $\mathcal{F}$-medibles entonces $|f|^r$ y $|h|^r$ también lo son. Luego, de la hipótesis de que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ obtenemos que

$$\frac{1}{\frac{p}{r}} + \frac{1}{\frac{q}{r}} = 1,$$

y ademas $r(p+q) = pq$, de donde se deduce que $pq > rp$ y que $pq > rq$ pues $rp, rq > 0$, lo cual implica que $q > r$ y $p > r$ pues p, q son positivos y por tanto $\frac{q}{r} > 1$ y $\frac{p}{r} > 1$, pues r es positivo. Lo anterior no dice que podemos usar la desigualdad de Hölder sobre $|f|^r, |h|^r$, con $\frac{p}{r}$ y $\frac{q}{r}$ para obtener que

$$\begin{aligned}\int |fh|^r d\mu = \int ||f|^r|h|^r| d\mu &\leqslant \left(\int ||f|^r|^{\frac{p}{r}} d\mu\right)^{\frac{1}{\frac{p}{r}}} \left(\int ||h|^r|^{\frac{q}{r}} d\mu\right)^{\frac{1}{\frac{q}{r}}} \\ &= \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{r}{p}} \left(\int |h|^q d\mu\right)^{\frac{r}{q}},\end{aligned}$$

de donde, al elevar lo anterior a $\frac{1}{r}$, obtenemos que

$$\left(\int |fh|^r d\mu\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |h|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}},$$

es decir, $\|fh\|_r \leqslant \|f\|_p \|h\|_q$, como queremos. $\square$

Problema 4 7A 8

Supongamos que $(X, \mathcal{S}, \mu)$ *es un espacio métrico y* $n \in \mathbb{Z}^+$. *Prueba que*

$$\left\| \prod_{i=1}^n f_i \right\|_1 \leqslant \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i},$$

para todos los números positivos $p_1, \ldots, p_n$ *tales que* $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1$ *y todas la funciones* $\mathcal{S}$*-medibles* $f_1, f_2, \ldots, f_n : X \to \boldsymbol{F}$.

Demostración:

$\square$

Problema 5 7A 10

Supongamos que $0 < p < q \leqslant \infty$.

i) Prueba que $\ell^p \subset \ell^q$.

ii) Prueba que $\left\|\{a_n\}_n\right\|_p \geqslant \left\|\{a_n\}_n\right\|_q$ *para toda sucesión* $\{a_n\}_n \subset \boldsymbol{F}$.

i) *Demostración*: Dada $\{x_n\}_n \in \ell^p$, se cumple que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$, lo cual implica que $|x_n|^p \to 0$, es decir, $\{|x_n|^p\}_n$ es convergente y por tanto es acotada, se sigue que $\{|x_n|\}_n$ es acotada y en consecuencia $\{x_n\}_n \in \ell^\infty$, de modo que $\ell^p \subset \ell^\infty$.

Como $|x_n|^p \to 0$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n|^p < 1$ para $n \geqslant N$, como $q > p$ se sigue que $|x_n|^q < |x_n|^p$ para todo $n \geqslant N$. Dado que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$, se sigue que $\sum_{n=N}^{\infty} |x_n|^q \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} |x_n|^p < \infty$, lo cual implica que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q < \infty$, pues $\sum_{n=1}^{N-1} |x_n|^q < \infty$, es decir $\{x_n\}_n \in \ell^q$ y por tanto $\ell^p \subset \ell^q$.

$\square$

ii) *Demostración*: Dado $\{a_n\}_n \subset \boldsymbol{F}$, sea $\alpha = \left\|\{a_n\}_n\right\|_p$ y notemos que

$$\frac{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_n}{\alpha}\right|^q\right)^1}{q} = \frac{1}{\alpha}\|\{a_n\}\| = 1,$$

entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x_n}{\alpha}\right|^p = 1$ lo cual implica que $\left|\frac{x_n}{\alpha}\right| \leqslant 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado que $q > p$ se cumple que $\left|\frac{x_n}{\alpha}\right|^q \leqslant \left|\frac{x_n}{\alpha}\right|^p$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo cual

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x_n}{\alpha}\right|^q \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x_n}{\alpha}\right|^p = 1,$$

$\square$

Problema 6 7A 11

Demuestra que:

$$\bigcap_{p>1} \ell^p \neq \ell^1.$$

Demostración: Consideremos $\left\{\frac{1}{n}\right\}_n \subset \boldsymbol{F}$, dado $1 < p < \infty$ sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge, y por tanto $\left\{\frac{1}{n}\right\}_n \in \ell^p$. Mas aun, es claro que $\left\{\frac{1}{n}\right\}_n$ esta acotada, y por tanto $\left\{\frac{1}{n}\right\}_n \in \ell^\infty$. De lo anterior vemos que

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_n \in \bigcap_{p>1} \ell^p,$$

sin embargo, sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, es decir , $\left\{\frac{1}{n}\right\}_n \notin \ell^1$, y por tanto no se puede dar la igualdad. $\square$

Problema 7 7A 12

Muestra que

$$\bigcap_{p<\infty} \mathcal{L}^p([0,1]) \neq \mathcal{L}^\infty([0,1]).$$

Demostración: Dado que una función *esencialmente acotada* (en $[0,1]$) es $\mathcal{L}^p$ integrable para todo $0 < p < \infty$ (en $[0, 1]$), se cumple que $\bigcap_{p<\infty} \mathcal{L}^p([0,1]) \supset \mathcal{L}^\infty([0,1])$, por lo que para ver que no se da la igualdad mostraremos una función $\mathcal{L}^p([0,1])$ integrable para todo $0 < p < \infty$ tal que no sea *esencialmente acotada* en $[0,1]$.

Para ello consideremos $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -\log(x) \text{ si } x \in (0,1], \\ 0 \text{ si no.} \end{cases}$$

VEamos que $-\log(x) \leqslant \frac{1}{x}$ para todo $x \in (0,\infty)$, en especial para $x \in (0,1)$ se cumple que

$$-\log(x) \leqslant \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

□

Problema 8 7A 13

Demuestra que

$$\bigcup_{p>1} \mathcal{L}^p([0,1]) \neq \mathcal{L}^1([0,1]).$$

Demostración: Consideremos la siguiente función □

Problema 9 7A 14

Supongamos que $p, q \in (0,\infty]$, con $p \neq q$. Prueba que niguno de los conjuntos $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ y $\mathcal{L}^q(\mathbb{R})$ es subconjunto del otro.

Demostración:

□

Problema 10 7A 15

Muestra que existe $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ tal que $f \notin \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ para todo $p \in (0,\infty] \setminus \{2\}$.