Análisis Funcional I

Tarea 4

Maite Fernández Unzueta.
maite@cimat.mx

Antonio Barragán Romero.
antonio.barragan@cimat.mx

Ejercicios del *Limaye*

Problema 1 5.2

Sea $X = \mathbb{K}^3$*. Para* $x = (x_1, x_2, x_3) \in X$*, sea*

$$\|x\| = \left[\left(|x_1|^2 + |x_2|\right)^{\frac{2}{3}} + |x_3|^3\right]^{\frac{1}{3}}.$$

Entonces $\|\cdot\|$ *es una norma en* $\mathbb{K}^3$

Problema 2 5.3

Sea $p \in [1, \infty]$*. Para las normas* $\| \ \|_p$ *sobre* $\boldsymbol{K}$ *introducidas en tenemos que*

$$\lim_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty,$$

para todo $x \in \boldsymbol{K}^n$*,*

$$\{x \in \boldsymbol{K}^n : \|x\|_p < 1\} \subset \{x \in \boldsymbol{K}^n : \|x\|_r < 1\},$$

para todo $1 \leqslant p < r \leqslant \infty$*, y*

$$\bigcup_{1 \leqslant p < \infty} \{x \in \boldsymbol{K}^n : \|x\|_p < 1\} = \{x \in \boldsymbol{K}^n : \|x\|_\infty < 1\}.$$

Problema 3 5.4

Sean $\| \ \|_1, \dots, \| \ \|_m$ *normas en un espacio vectorial. Sean* $r_1, \dots, r_m$ *numeros reales positivos y* $1 \leqslant p \leqslant \infty$*. Para* $x \in X$*, sea*

$$\|x\| = \begin{cases} (r_1\|x\|_1^p + \cdots + r_m\|x\|_m^p)^{\frac{1}{p}} & \text{, si } 1 \leqslant p < \infty \\ \max\{r_1\| \ \|_1, \dots, r_m\| \ \|_m\} & \text{, si } p = \infty \end{cases}$$

Entonces $\| \ \|$ *es una norma en* X*, y* $\|x_n - x\| \to 0$ *si y solo si* $\|x_n - x\|_j \to 0$ *para todo* $j = 1, \dots, m$*.*

Demostración: Separemos la prueba por casos. Si $p \in [1, \infty)$ notemos que

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow (r_1\|x\|_1^p + \cdots + r_m\|x\|_m^p)^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow r_1\|x\|_1^p + \cdots + r_m\|x\|_m^p = 0,$$

como cada sumando es no negativo tenemos, lo anterior pasa si y solo si $r_i\|x\|_i^p = 0$ para todo $i = 1, \dots, m$

La homogeneidad se sigue de que cada $\| \ \|_i$ es homogénea

Para la desigualdad del triangulo podemos ver que $\square$

Problema 4 5.5

Sea X un espacio lineal y E un subconjunto de X que es convexo, balanceado (esto es, $kx \in E$ siempre que $x \in E$ y $k \in \boldsymbol{K}$ tal que $|k| \leqslant 1$), absorbente (es decir, para todo $x \in X$, existe $r > 0$ tal que $\frac{x}{r} \in E$) y el cual no contiene ningún espacio no cero de X. Para $x \in X$, sea

$$\|x\| = \inf\left\{r > 0 : \frac{x}{r} \in E\right\}.$$

*Entonces $\| \ \|$ es una norma sobre X, llamado el **gauge de Minkowski** sobre E. Más aún*

$$\{x \in X : \|x\| < 1\} \subset E \subset \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}.$$

En particular, si Γ es una curva cerrada simple en $\mathbb{R}^2$ que encierra a un conjunto convexo E tal que $(0,0) \in E$ y $(-x_1, -x_2) \in \Gamma$ siempre que $(x_1, x_2) \in \Gamma$ entonces $\| \ \|$ es una norma sobre $\mathbb{R}^2$ tal que $\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \|(x_1, x_2)\| = 1\right\}$ coincide con Γ.

Problema 5 5.6

Sea $\| \ \|_j$ una norma sobre un espacio lineal X_n para $n = 1, 2, \ldots$. Considera $X = \left\{(x_n)_n : x_n \in X_n, \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_n^p < \infty, \text{si } 1 \leqslant p < \infty \text{y} \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\|x_n\|_n\right\} < \infty \text{ si } p = \infty\right\}$. Entonces X es un espacio lineal y para $x = (x_n) \in X$,

$$\|x\| = \begin{cases} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_n^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{, si } \ 1 \leqslant p < \infty \\ \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\|x_n\|_n\right\} & \text{, si } p = \infty. \end{cases}$$

define una norma sobre X.