Análisis Funcional I

Tarea 1

Maite Fernández Unzueta.
maite@cimat.mx

Antonio Barragán Romero.
antonio.barragan@cimat.mx

Problema 1 6A 1

Verifica que cada una de las siguientes susodichas métricas en efecto es métrica.

i) Supón que V es un conjunto no vació. Define $d : V \times V \to [0, \infty)$ como sigue:

$$d(f, g) = \begin{cases} 1 \text{ si } f \neq g \\ 0 \text{ si } f = g \end{cases}.$$

Entonces d es una metric en V.

ii) Define d en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ como $d(x, y) = |x - y|$. Entonces d es una métrica sobre $\mathbb{R}$.

iii) Para $n \in \mathbb{Z}^+$, define d en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ como

$$d((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\}.$$

Entonces d es una métrica sobre $\mathbb{R}^n$.

Problema 2 6A 2

Demuestra que todo conjunto finito de un espacio métrico es cerrado.

Basta ver que los singulares $\{x\}$ son cerrados.

$$\{x\} =$$

Cualquier sucesion convergente tiene que ser eventualmente constante y por tanto contiene su limite.

Problema 3 6A 3

Prueba que todo bola cerrada en un espacio métrico es cerrada.

Veamos que el complemento es abierto.

Problema 4 6A 6

i) Demuestra que si V es un espacio métrico, $f \in V$, y $r > 0$, entonces $\overline{B(f, r)} \subset \overline{B}(f, r)$.

ii) Da un ejemplo de un espacio métrico V, $f \in V$, y $r > 0$ tal que $\overline{B(f, r)} \neq \overline{B}(f, r)$.

Problema 5 *6A 8 (cerradura)*

Demuestra que si V es un espacio métrico y $E \subset V$. Entonces

i) $\overline{E} = \{g \in V : \text{existe una sucesión } \{f_n\} \subset E \text{ tal que} \lim_{k\to\infty} f_k = g\}$;

ii) $\overline{E}$ *es la intersección de todos los conjuntos cerrados de V que contienen a E;*

iii) $\overline{E}$ *es un conjunto cerrado de V;*

iv) $\overline{E}$ *es cerrado si y solo si $\overline{E} = E$;*

v) E *es cerrado si y solo si E contiene el limite de cualquier sucesión convergente de elementos de E.*

Problema 6 *6A 10*

Prueba o da un contraejemplo: Si V es un espacio métrico y U, W son subconjuntos de V, entonces $\overline{U} \cup \overline{W} = \overline{U \cup W}$.

Problema 7 *6A 11*

Prueba o da un contraejemplo: Si V es un espacio métrico y U, W son subconjuntos de V, entonces $\overline{U} \cap \overline{W} = \overline{U \cap W}$.

Problema 8 *6A 15*

Prueba que cada uno de los espacios métricos son espacios métricos completos

Problema 9 *6A 16*

Supongamos que (U, d) es un espacio métrico. Sea W el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy de elementos de U.

i) Para (f_n) y (g_n) en W, definimos $(f_n) \equiv (g_n)$ como

$$\lim_{k\to\infty} d(f_k, g_k) = 0.$$

Muestra que $\equiv$ es una relación de equivalencia en W.

ii) Sea V el conjunto de las clases de equivalencia de elementos de W bajo la relación de equivalencia anterior. Para $(f_n) \in W$, sea

iii) Muestra que (V, d_V) es un espacio métrico completo.

iv) Muestra que el mapeo de U a V toma $f \in U$

v) Explica por que lo anterior muestra que todo espacio métrico es subconjunto de un espacio métrico completo.