Problema 1 11.1

Supongamos que f es T-periodica y sea F una antiderivada de f; por ejemplo

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx, \quad -\infty < x < \infty.$$

Muestra que F es T-periodica si y solo si la integral de f sobre cualquier intervalo de longitud T es cero.

Demostración:

Sea F una antiderivada de f, entonces se cumple que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por el Teorema Fundamental del Calculo tenemos

$$F(T+x) - F(x) = \int_x^{T+x} f(x)dx.$$

De lo anterior tenemos que F es T-periodica si y solo $F(T+x) - F(x) = 0$ lo cual sucede si y solo si

$$\int_x^{T+x} f(x)dx = 0,$$

es decir, la integral sobre todo intervalo de longitud T es cero.

Problema 2 11.4

Muestra que e^x es suma de una función par y una función impar.

Demostración:

Supongamos que e^x es suma de una función par f y una función impar g, es decir, $e^x = f(x) + g(x)$. Dado que $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y que $g(-x) = -g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$e^{-x} = f(-x) + g(-x) = f(x) - g(x).$$

Lo anterior implica que $e^x + e^{-x} = 2f(x)$, por lo cual $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, de manera similar tenemos que $e^x - e^{-x} = 2g(x)$ y por tanto $g(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$, mas aún, podemos notar que f y g son unicas.

Problema 3 11.17

Considera la integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

(a) Evalua la integral de manera explicita.
(b) Usa la serie de Taylor de $\frac{1}{1+x^2}$ (una serie geometrica) para obtener una serie infinita para la integral.
(c) Iguala la parte a) y la b) para derivar una formula para π.

Demostración:

(a) Notemos que $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$, por lo cual, el Teorema Fundamental del Calculo nos dice que

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

(b) Nosotros sabemos que para $|u| < 1$ se cumple

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{k=0}^{\infty} u^k,$$

por lo cual si consideramos $u = -x^2$ tenemos que

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-x^2\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k},$$

para $\left|-x^2\right| = \left|x^2\right| < 1$. Más aún la convergencia anterior es uniforme en su radio de convergencia, que es 1, por lo cual se cumple que

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

(c) De lo anterio tenemos que

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^1 x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1},$$

por lo cual

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{2k+1}.$$

Problema 4 13.1

Para cada una de los siguientes problemas de valores iniciales en la frontera, determina si existe o no una distribución de temperatura y encuentra los valores de β para los cuales una solución de equilibrio existe.

(a) $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(a,t) = \beta,$$

(b) $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(a,t) = \beta,$$

(c) $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x - \beta, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(a,t) = 0.$$

Solución: Supongamos que existe una solución de equilibrio, entonces tenemos que existe φ (que no depende del tiempo) tal que $u(x,t) = \varphi(t)$.
(a) La ecuación la podemos escribir en terminos de φ como

$$\varphi''(x) = 1$$

Problema 5 14.11

Usando la ecuación de onda en una dimensión que gobierna el pequeño dezplasamiento de una cuerda que vibra uniformemente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

deriva la ecuación de la energia para una cuerda que vibra,

$$\frac{dE}{dt} = \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_0^L,$$

donde la energia Total E es la suma de la energia cinetica y la energia potencial, y ρ es la densidad lineal, esto es, la masa por unidad de longitud de la cuerda (suponiendo constante),

$$E(t) = \frac{\rho}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{pc^2}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial u}{(\partial x)^2}\right) dx.$$

Solución: Supongamos que existen X, T tales que $u(x,t) = X(x)T(t)$ es solución al problema anterior. Entonces tenemos que

$$X(x)T''(t) = \frac{1}{\pi^2}X''(x)T(t) \Rightarrow T''\frac{t}{T(t)} = \frac{1}{\pi^2}X''\frac{x}{X(x)},$$

Problema 6 15.1

Muestra que la función

$$u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

es armonica, es decir, es una solución a la ecuación de Laplace en tres dimensiones, $\Delta u = 0$.

Demostración: Queremos que $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$. Primero, por regla de la cadena, notemos que

$$u_x = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt[\frac{3}{2}]{x^2+y^2+z^2}}(2x) = -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}(x),$$

luego,

$$\begin{aligned} u_{xx} &= -\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}(2x)(x) - \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{3x^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

De manera similar, por simetria, tenemos que

$$u_{yy} = \frac{3y^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$u_{zz} = \frac{3z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

De lo anterior vemos que

$$\begin{aligned} u_{xx}+u_{yy}+u_{zz} &= 3\frac{x^2+y^2+z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{3\left(x^2+y^2+z^2\right) - 3\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}} \\ &= 0, \end{aligned}$$

como queremos

Problema 7 19.2

La ecuación diferencial de Hermite se lee como

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

(a) Multiplica por e^{x^2} y devuelve la ecuación diferencial en forma de Sturn-Liuville. Determina si el problema de Sturm-Liouville resultante es regular o singular.

(b) Muestra que los polinomios de Hermite

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

son funciones propias del problema de Sturm-Liouville y encuentra los valores propios correspondientes.

(c) Usa una función de peso apropiada y muestra que H_1 y H_2 son ortogonales en el intervalo $(-\infty, \infty)$ con respecto a esta función de peso.

Problema 8 19.3

Encuentra todas las funciones φ para las cuales $u(x,t) = \varphi(x - ct)$ es una solución a la ecuación del calor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad -\infty < x < \infty,$$

donde k y c son constantes.

Problema 9 19.12

Encuentra todas las funciones φ para las cuales $u(x,t) = \varphi(x + ct)$ es una solución a la ecuación del calor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t},$$

donde k y c son constantes.

Problema 10 19.15

Ademas de las ecuaciones lienales, algunos ecuaciones no lineales tambien pueden resultar en *soluciones de onda viajera* de la forma

$$u(x, t) = \varphi(x - ct).$$

La *Ecuación de Fisher*, la cual modela la propagación de un gen ventajoso en una población, donde $u(x, t)$ es la densidad del gen en la población al tiempo t y posiciín x, es dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1 - u).$$

Muestra que la ecuación de Fisher tiene solución de esta forma si φ satisface la ecuación diferencial ordinaria no lineal

$$\varphi'' + c\varphi' + \varphi(1 - \varphi) = 0.$$