Ecuaciones Diferenciales Parciales
Tarea 1

Antonio Barragán Romero antonio.barragan@cimat.mx

Problema 1 11.1

Supongamos que f es T-periódica y sea F una antiderivada de f; por ejemplo

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx, \quad -\infty < x < \infty.$$

Muestra que F es T-periódica si y solo si la integral de f sobre cualquier intervalo de longitud T es cero.

Demostración:

Sea F una antiderivada de f, entonces se cumple que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por el Teorema Fundamental del Calculo tenemos

$$F(T+x) - F(x) = \int_x^{T+x} f(x)dx.$$

De lo anterior tenemos que F es T-periódica si y solo $F(T+x) - F(x) = 0$ lo cual sucede si y solo si

$$\int_x^{T+x} f(x)dx = 0,$$

es decir, la integral sobre todo intervalo de longitud T es cero.

Problema 2 11.4

Muestra que e^x es suma de una función par y una función impar.

Demostración:

Supongamos que e^x es suma de una función par f y una función impar g, es decir, $e^x = f(x) + g(x)$. Dado que $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y que $g(-x) = -g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$e^{-x} = f(-x) + g(-x) = f(x) - g(x).$$

Lo anterior implica que $e^x + e^{-x} = 2f(x)$, por lo cual $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, de manera similar tenemos que $e^x - e^{-x} = 2g(x)$ y por tanto $g(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$. Por ultimo notemos que

$$f(x) + g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^x,$$

mas aún, f y g son únicas.

Problema 3 11.17

Considera la integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

(a) Evalúa la integral de manera explicita.
(b) Usa la serie de Taylor de $\frac{1}{1+x^2}$ (una serie geométrica) para obtener una serie infinita para la integral.
(c) Iguala la parte a) y la b) para derivar una formula para π.

Demostración:

(a) Notemos que $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$, por lo cual, el Teorema Fundamental del Calculo nos dice que

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

(b) Nosotros sabemos que para $|u| < 1$ se cumple

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{k=0}^{\infty} u^k,$$

por lo cual si consideramos $u = -x^2$ tenemos que

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k},$$

para $\left|-x^2\right| = \left|x^2\right| < 1$. Más aún la convergencia anterior es uniforme en su radio de convergencia, que es 1, por lo cual se cumple que

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

(c) De lo anterior tenemos que

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^1 x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1},$$

por lo cual

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{2k+1}.$$

Problema 4 13.1

Para cada una de los siguientes problemas de valores iniciales en la frontera, determina si existe o no una distribución de temperatura y encuentra los valores de β para los cuales una solución de equilibrio existe.

(a) $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(a,t) = \beta,$$

(b) $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(a,t) = \beta,$$

(c) $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x - \beta, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(a,t) = 0.$$

Solución: Supongamos que existe una solución de equilibrio, entonces tenemos que existe φ (que no depende del tiempo) tal que $u(x,t) = \varphi(t)$.

(a) De lo anterior tenemos que la ecuación la podemos escribir en términos de φ como

$$\varphi''(x) = -1,$$

al integrar obtenemos que

$$\varphi'(x) = -x + C \quad \text{y que } \varphi(x) = -\frac{x^2}{2} + Cx + D.$$

Por lo cual $u_x(x,t) = -x + C$ y $u(x,t) = -\frac{x^2}{2} + Cx + D$ para todo x, t, usando las condiciones iniciales vemos que $u_{x(0,t)} = C = 1$, entonces $u_x(x,t) = -x + 1$, se sigue que $u_{x(a,t)} = -a + 1 = \beta$. De lo anterior, existe una solución de equilibrio si y solo si $\beta = 1 - a$ y la solución es:

$$u(x,t) = -\frac{x^2}{2} + x + D \text{ para } 0 < x < a^1,$$

donde D es constante.

(b) De manera similar tenemos que $\varphi''(x) = 0$, lo cual implica que

$$\varphi'(x) = C \quad \text{y que} \quad \varphi(x) = Cx + D,$$

usando las condiciones iniciales tenemos que $u_x(0,1) = 1 = C$, por tanto $u_x(x,t) = 1$, por otro lado también se debe cumplir que $u_x(a,t) = 1 = \beta$. De lo anterior vemos que existe *solución de equilibrio* dada por

$$u(x,t) = x + D \quad \text{para } 0 < x < a,$$

donde D es constante.

(c) En este caso se debe cumplir que $\varphi''(x) = -(x - \beta)$ al integrar[2] obtenemos que $\varphi'(x) = -\frac{(x-\beta)^2}{2} + C$ y que $\varphi(x) = -\frac{(x-\beta)^3}{6} + Cx + D$. Por las condiciones iniciales tenemos que $u_x(0,t) = -\frac{\beta^2}{2} + C = 0$ y que $u_x(a,t) = -\frac{(a-\beta)^2}{2} + C = 0$, lo cual implica que $C = \frac{\beta^2}{2}$ y que

$$\frac{\beta^2}{2} = \frac{(a-\beta)^2}{2} \Rightarrow \beta^2 = a^2 - 2a\beta + \beta^2 \Rightarrow 0 = a(a-2\beta).$$

Como es un problema de frontera podemos suponer que $a \neq 0$ y por tanto se debe cumplir que $a - 2\beta = 0$, entonces existe *solución de equilibrio* si y solo si $\beta = \frac{a}{2}$ y $C = \frac{a^2}{8}$, la solución esta dada por

$$u(x,t) = -\frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^3}{6} + \frac{a^2}{8}x + D, \text{para } 0 < x < a$$

donde D es constante.

Problema 5 14.11

Usando la ecuación de onda en una dimensión que gobierna el pequeño desplazamiento de una cuerda que vibra uniformemente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

deriva la ecuación de la energía para una cuerda que vibra,

$$\frac{dE}{dt} = \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_0^L,$$

donde la energía Total E es la suma de la energía cinética y la energía potencial, y ρ es la densidad lineal, esto es, la masa por unidad de longitud de la cuerda (suponiendo constante),

$$E(t) = \frac{\rho}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{\rho c^2}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial u}{(\partial x)^2}\right) dx.$$

Solución: Supongamos que u satisface

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

entonces por la formula de integración de Leibniz se cumple que

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{\rho}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^L u_t^2 dx\right) + \frac{\rho c^2}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^L u_x^2 dx\right) \\ &= \frac{\rho}{2}\int_0^L \frac{\partial}{\partial t} u_t^2 dx + \frac{\rho c^2}{2}\int_0^L \frac{\partial}{\partial t} u_x^2 dx,\end{aligned}$$

[1]Pues es un problema de frontera.

[2]Usando ideas de **EDO**.

luego, por regla de la cadena se cumple que

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\rho}{2}\int_0^L 2u_t u_{tt} dx + \frac{\rho c^2}{2}\int_0^L 2u_x u_{xt} dx,$$

por hipótesis tenemos que $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ y ademas se cumple que $u_{xt} = u_{tx}$ pues $u \in C^2$, por lo cual

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \rho c^2 \int_0^L u_t u_{xx} dx + \rho c^2 \int_0^L u_x u_{xt} dx \\ &= \rho c^2 \int_0^L (u_t u_{xx} + u_x u_{tx}) dx \\ &= \rho c^2 \int_0^L \frac{\partial}{\partial x}(u_t u_x) dx,\end{aligned}$$

se sigue por el Teorema Fundamental del Calculo que

$$\frac{dE}{dt} = \rho c^2 (u_t u_x)\Big|_0^L,$$

como queremos.

Problema 6 15.1

Muestra que la función

$$u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

es armonica, es decir, es una solución a la ecuación de Laplace en tres dimensiones, $\Delta u = 0$.

Demostración: Queremos que $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$. Primero, por regla de la cadena, notemos que

$$u_x = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt[\frac{3}{2}]{x^2 + y^2 + z^2}}(2x) = -\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}}(x),$$

luego,

$$\begin{aligned}u_{xx} &= -\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{5}{2}}(2x)(x) - \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{3x^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

De manera similar, por simetría, tenemos que

$$u_{yy} = \frac{3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$u_{zz} = \frac{3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

De lo anterior vemos que

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} &= 3\frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{3(x^2+y^2+z^2) - 3(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \\ &= 0, \end{aligned}$$

como queremos

Problema 7 19.2

La ecuación diferencial de Hermite se lee como

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

(a) Multiplica por e^{-x^2} y devuelve la ecuación diferencial en forma de Sturm-Liuville. Determina si el problema de Sturm-Liouville resultante es regular o singular.

(b) Muestra que los polinomios de Hermite

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

son funciones propias del problema de Sturm-Liouville y encuentra los valores propios correspondientes.

(c) Usa una función de peso apropiada y muestra que H_1 y H_2 son ortogonales en el intervalo $(-\infty, \infty)$ con respecto a esta función de peso.

Solución

(a) Recordemos primero que un problema de Sturm-Liouville tiene la forma

$$(p(x)\varphi'(x))' + [q(x) + \lambda\sigma(x)]\varphi(x) = 0, \quad a < x < b,$$

donde p', q y σ son continuas en $[a, b]$ y p, σ son positivas. Desarrollando un poco notemos que un problema de Sturm-Liouville también tiene la forma

$$p(x)'\varphi'(x) + p(x)\varphi''(x) + [q(x) + \lambda\sigma(x)]\varphi(x) = 0, \quad a < x < b,$$

Luego, tenemos que

$$0 = (y'' - 2xy' + \lambda y)e^{-x^2} = e^{-x^2}y'' - 2xe^{-x^2}y' + \lambda e^{-x^2}y,$$

comparando coeficientes podemos notar que $p(x) = e^{-x^2}$, $q(x) = 0$ y $\sigma(x) = e^{-x^2}$ las cuales son continuas y positivas en todo $\mathbb{R}$. Entonces la forma de Sturm-Liouville de la ecuación de Hermite es:

$$\left(e^{-x^2}y'\right)' + \lambda e^{-x^2}y = 0,$$

dado que el intervalo es infinito el sistema es singular.

(b) • Para $y = H_0(x) = 1$, entonces $y' = 0$ y el sistema se convierte en

$$+\lambda e^{-x^2} = 0,$$

dado que la exponencial es positiva se sigue que $\lambda = 0$.

- Suponiendo $y = H_1(x) = 2x$ tenemos que $y' = 2$ y por tanto el sistema se ve como

$$\left(e^{-x^2}2\right)' + \lambda e^{-x^2}2x = -4xe^{-x^2} + \lambda e^{-x^2}2x = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)e^{-x^2}x = 0,$$

$x \neq 0$ implica que $\lambda = 2$.

- Si $y = H_2(x) = 4x^2 - 2$ entonces $y' = 8x$, el sistema queda como

$$\left(e^{-x^2}8x\right)' + \lambda e^{-x^2}(4x^2 - 2) = 0,$$

de hecho se debe cumplir que

$$0 = (y'' - 2xy' + \lambda y)e^{-x^2},$$

como e^{-x^2} es positiva entonces se debe cumplir que $0 = y'' - 2xy' + \lambda y$, como $y'' = 8$, se debe cumplir que
$8 - 16x^2 + \lambda\left(4x^2 - 2\right) = 0 \Rightarrow (4\lambda - 16)x^2 + (8 - 2\lambda) = 0$, lo cual implica que $4\lambda - 16 = 0$ y $8 - 2\lambda = 0$ y por tanto $\lambda = 4$.

- Suponiendo $y = H_3(x) = 8x^3 - 12x$, tenemos que $y' = 24x^2 - 12$ y $y'' = 48x$, por tanto se debe cumplir que

$$48x - 2x\left(24x^2 - 12\right) + \lambda\left(8x^3 - 12x\right) = 0 \Rightarrow (8\lambda - 48)x^3 + (72 - 12\lambda)x = 0,$$

es decir $8\lambda - 48 = 0$ y $72 - 12\lambda = 0$ lo cual implica $\lambda = 6$.

(c) Para checar que H_1, H_2 son ortogonales consideremos $\sigma(x) = e^{-x^2}$, entonces tenemos que

$$\langle H_1, H_2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} 2xe^{-x^2}dx,$$

como $2xe^{-x^2}$ es una función impar y los limites de integración son simétricos tenemos que la integral vale cero, como queremos.

Problema 8 19.3

Encuentra todas las funciones φ para las cuales $u(x,t) = \varphi(x - ct)$ es una solución a la ecuación del calor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad -\infty < x < \infty,$$

donde k y c son constantes.

Solución: Supongamos $u(x,t) = \varphi(x - ct)$ es solución y sea $s = x - ct$ entonces por regla de la cadena tenemos que

$$u_{xx} = \varphi''(s) \quad \text{y que} \quad u_t = -c\varphi'(s),$$

por lo cual se debe cumplir que

$$\varphi''(s) = -\frac{c}{k}\varphi'(s) \Rightarrow \varphi''(s) + \frac{c}{k}\varphi'(s) = 0,$$

cuyo polinomio característico es $\lambda^2 + \frac{c}{k}\lambda = 0$, sus ceros son $\lambda = 0$ y $\lambda = -\frac{c}{k}$, por lo cual la solución general esta dada por:

$$\varphi(s) = A + Be^{-\frac{c}{k}s},$$

se sigue entonces que

$$u(x,t) = \varphi(x - ct) = A + Be^{-\frac{c}{k}(x-ct)},$$

donde A, B son constantes.

Problema 9 19.12

Encuentra todas las funciones φ para las cuales $u(x,t) = \varphi(x + ct)$ es una solución a la ecuación del calor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t},$$

donde k y c son constantes.

SoLución: Sea $s = x + ct$, la regla de la cadena implica que

$$u_{xx} = \varphi''(s) \quad \text{y que} \quad u_t = c\varphi'(s),$$

entonces de debe cumplir que

$$\varphi''(s) = \frac{c}{k}\varphi'(s) \Rightarrow \varphi''(s) - \frac{c}{k}\varphi'(s) = 0,$$

su polinomio característico es $\lambda^2 - \frac{c}{k}\lambda = 0$ cuyas raíces son $\lambda = 0$ y $\lambda = \frac{c}{k}$, entonces la solución general es:

$$\varphi(s) = A + Be^{\frac{c}{k}s},$$

y por tanto

$$u(x,t) = \varphi(x - ct) = A + Be^{\frac{c}{k}(x-ct)},$$

con A, B constantes.

Problema 10 19.15

Ademas de las ecuaciones lineales, algunos ecuaciones no lineales también pueden resultar en *soluciones de onda viajera* de la forma

$$u(x,t) = \varphi(x - ct).$$

La *Ecuación de Fisher,* la cual modela la propagación de un gen ventajoso en una población, donde $u(x,t)$ es la densidad del gen en la población al tiempo t y posición x, es dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u).$$

Muestra que la ecuación de Fisher tiene solución de esta forma si φ satisface la ecuación diferencial ordinaria no lineal

$$\varphi'' + c\varphi' + \varphi(1-\varphi) = 0.$$

Solución: Supongamos que $u(x,t) = \varphi(x - ct)$ cumple que $\varphi'' + c\varphi' + \varphi(1-\varphi) = 0$, por regla de la cadena notemos que $u_t = -c\varphi'$ y que

$$u_{xx} = \varphi'',$$

por hipótesis $\varphi'' + c\varphi' + \varphi(1-\varphi) = 0$ lo cual implica que $-c\varphi' = \varphi'' + \varphi(1-\varphi)$, sustituyendo lo anterior notemos que

$$u_t = u_{xx} + u(1-u),$$

es decir, u satisface la ecuación de Fisher, como queremos.