Ecuaciones Diferenciales Parciales
Tarea 2

Antonio Barragán Romero antonio.barragan@cimat.mx

Problema 1

Considere la ecuación

$$uu_x + u_y = 1.$$

con los datos

$$x = s, y = s, z = \frac{s}{2}; \quad 0 \leq s \leq 1$$

Resolver el problema y calcular el Jacobiano asociado.

Solución: Notemos que las ecuaciones caracteristicas son:

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{y} = 1 \\ \dot{u} = 1 \end{cases},$$

cuyas soluciones estan dadas por

$$x(t,s) = \frac{t^2}{2} + \frac{st}{2} + C_1(s) \quad y(t,s) = t + C_2(s) \quad u(t,s) = t + \frac{s}{2}.$$

Por hipotesis tenemos que

$$\begin{cases} x(0,s) = s \\ y(0,s) = s \\ z(0,s) = \frac{s}{2} \end{cases},$$

cuyo Jacobiano asociado

$$J = \det\begin{pmatrix} x_t & y_t \\ x_s & y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = u - 1.$$

Luego, con las parametrizaciones dadas tenemos que

$$x(t,s) = \frac{t^2}{2} + \frac{st}{2} + s \quad y(t,s) = t + s \quad u(t,s) = t + \frac{s}{2}.$$

De lo anterior vemos que $t = \frac{2x-2y}{y+2}$ y que $s = y - t$, por lo cual la solución es:

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \frac{2x-2y}{y+2} + \frac{y - \frac{2x-2y}{y+2}}{2} \\
&= \frac{2x-2y}{y+2} + \frac{y(y+2)-2x+2y}{2(y+2)}.
\end{aligned}
$$

Problema 2

Considere la ecuación del ejercicio anterior pero con los datos

$$x = \frac{s^2}{2}, y = s, z = s, \quad 0 \leq s \leq 1$$

Calcular el Jacobiano asociado, encontrar todas las soluciones y grafique algunas de ellas.

Solución: En este caso tenemos que

$$u(t,s) = t + C_3(s) \quad y(t,s) = t + C_2(s) \quad x = \frac{t^2}{2} + tC_3(s) + C_1(s),$$

por hipotesis se cumple que $u(0,s) = s = C_3(s)$, $y(0,s) = s = C_2(s)$ y $x(0,s) = \frac{s^2}{2} = C_1(s)$. De lo anterior obtenemos que

$$u(t,s) = t + s \quad y(t,s) = t + s \quad x = \frac{t^2}{2} + ts + \frac{s^2}{2},$$

cuyo Jacobiano asociado (en $t = 0$) es

$$J = \det\begin{pmatrix} x_t & y_t \\ x_s & y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 1 \\ s & 1 \end{pmatrix} = u - s.$$

De lo anterior podemos notar que $x = \frac{1}{2}(t+s)^2$ y $y = t + s$, por lo cual $u(x,y) = \pm\sqrt{2x}$, $u(x,y) = y$ y por superposición se cumple que

$$u(x,y) = \pm\sqrt{2x} + y.$$

Ahora veamos las graficas:

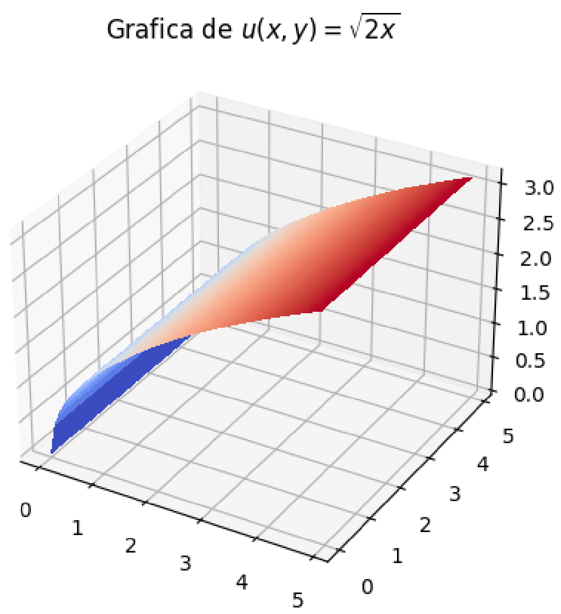

Figure 1:

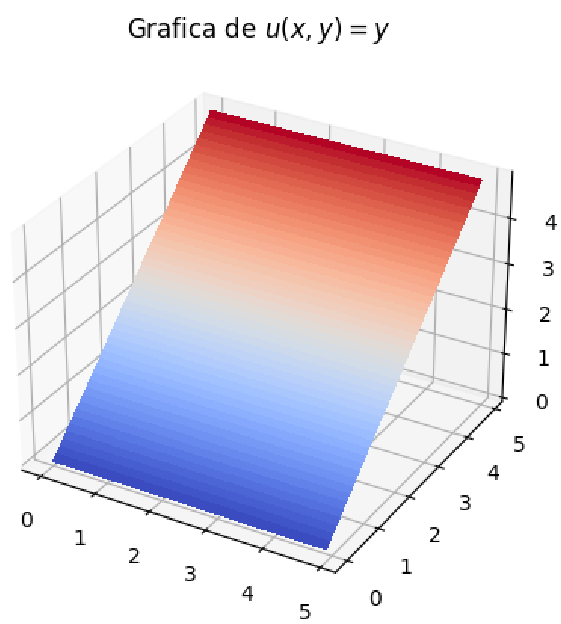

Figure 2:

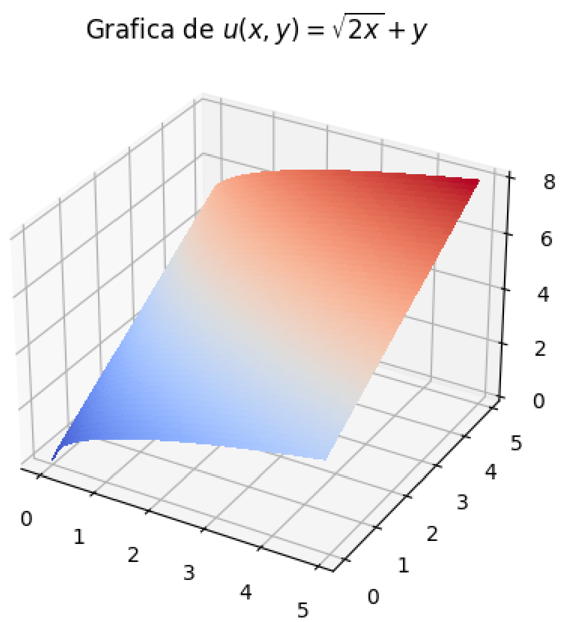

Figure 3:

Problema 3

Resolver la ecuación

$$u_x + 3y^{\frac{2}{3}}u_y = 2$$

con la condición inicial $u(x, 1) = 1 + x$.

Solución: Notemos que las ecuaciones caracteristicas son:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = 3y^{\frac{2}{3}}, \\ \dot{u} = 2 \end{cases}$$

por lo cual

$$x(t,s) = t + C_1(s) \quad y(t,s) = (t + C_2(s))^3 \quad u(t,s) = 2t + C_3(s).$$

Consideremos la parametrizacion:

$$\begin{cases} x(0,s) = s \\ y(0,s) = 1 \\ u(0,s) = 1 + s \end{cases},$$

cuyo Jacobiano es

$$J = \det\begin{pmatrix} x_t & y_t \\ x_s & y_s \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 3y^{\frac{2}{3}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -3y^{\frac{2}{3}},$$

el cual es invertible siempre que $y \neq 0$.

De lo anterior obtenemos que

$$x(t,s) = t + s \quad y(t,s) = (t+1)^3 \quad u(t,s) = 2t + 1 + s,$$

y notemos que la solución esta dada por:

$$U(x,y) = 2t + 1 + s = (t+s) + (t+1) = x + y^{\frac{1}{3}}.$$

Problema 4

Considere el problema de Cauchy $u_x + u_y = 1, u(x,x) = x$. Mostrar que tiene una infinidad de soluciones.

Solución: Notemos que las ecuaciones caracteristicas son:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = 1, \\ \dot{u} = 1 \end{cases}$$

y la parametrización esta dada por: $x = s, \quad y = s, \quad u = s$, cuyo Jacobiano es

$$J = \det\begin{pmatrix} x_t & y_t \\ x_s & y_s \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

por lo cual la solución no es unica.

Más aún, notemos que $u = x$ y $u = y$ son solucón por lo cual $u(x,y) = \alpha x + \beta y$ debe ser solución, entonces se debe cumplir que

$$1 = u_x + u_y = \alpha + \beta,$$

y por tanto $\beta = 1 - \alpha$, luego $u(x, y) = \alpha x + (1 - \alpha)y$, por ultimo notemos que $u(x, x) = \alpha x + (1 - \alpha)x = x$.

De lo anterior tenemos que $u(x, y) = \alpha x + (1 - \alpha)y$, es solución para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Problema 5

Considere la ecuación

$$(y + u)u_x + yu_y = x - y,$$

con la condición inicial $u(x, 1) = 1 + x$.

Solución: Las ecuaciones caracteristicas son:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + u \\ \dot{y} = y \\ \dot{u} = x - y \end{cases},$$

una parametrizacion natural es:

$$x = s, \quad y = 1, \quad u = 1 + s,$$

luego el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x + 1 \\ \dot{y} = y \\ \dot{u} = x - y \end{cases}.$$

Entonces se cumple que $y = c_1 e^t$, la condicion inicial nos dice que $y = e^t$, por lo cual ahora debemos resolver $\dot{x} = e^t + x + 1$, procedamos por factor integrante:

$$\begin{aligned} \dot{x} = e^t + x + 1 \Rightarrow \dot{x} - x = e^t + 1 \Rightarrow e^{-t}\dot{x} - e^{-t}x = e^{-t}(e^t + 1) \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt}(e^{-t}x) = 1 + e^{-t} \\ &\Rightarrow \int \frac{d}{dt}(e^{-t}x)dt = \int 1 + e^{-t}dt \\ &\Rightarrow e^{-t}x = t - e^{-t} + C_2 \\ &\Rightarrow x = te^t - 1 + C_2 e^t. \end{aligned}$$

Por la condición inicial tenemos que $C_2 = s + 1$, así que $x(t, s) = te^t - 1 + (s + 1)e^t$.

Por ultimo resolvamos

$$\begin{aligned} \dot{u} = x - y = te^t - 1 + (s + 1)e^t - e^t \\ \Rightarrow \int du = \int (te^t - 1 + (s + 1)e^t - e^t)dt \\ \Rightarrow u = e^t(t - 1) - t + se^t + C_3, \end{aligned}$$

dada la parametrización obtenemos que $C_3 = 2$ y por tanto

$$\begin{cases} x(t,s) = te^t - 1 + (s+1)e^t \\ y(t,s) = e^t \\ u(t,s) = e^t(t-1) - t + se^t + 2 \end{cases}.$$

De lo anterior tenemos que $t = \ln(y)$ y $s = \frac{x - \ln(y)y + 1}{y} - 1$, por lo que

$$\begin{aligned} u(x,y) &= y(\ln(y) - 1) - \ln(y) + \left(\frac{x - \ln(y)y + 1}{y} - 1\right)y + 2 \\ &= x - 2y - \ln(y) + 3. \end{aligned}$$