Ecuaciones Diferenciales Parciales
Tarea 4

Antonio Barragán Romero antonio.barragan@cimat.mx

Problema 1

Recuelva el siguiente problema

$$u_{tt} - 9u_{xx} = e^x - e^{-x} \quad -\infty < x < \infty, t > 0,$$
$$u(x,0) = x \quad -\infty < x < \infty,$$
$$u_t(x,0) = \sin(x) \quad -\infty < x < \infty.$$

Solución: Si tenemos una solución particular $v(x,t)$ del sistema anterior, entonces por el principio de superposición la solución general es de la forma $u = v + w$, donde w es solución del sistema homogeneo.

Dado que $e^x - e^{-x}$ no depende de t, podemos suponer $v(x,t) = v(x)$, luego v debe satisfacer

$$-9v'' = e^x - e^{-x} \Rightarrow v'' = -\frac{e^x - e^{-x}}{9},$$

integrando dos veces respecto a x tenemos que

$$v' = -\frac{1}{9}\int e^x dx - \frac{1}{9}\int e^{-x}(-dx) = -\frac{1}{9}e^x - \frac{1}{9}e^{-x},$$
$$\Rightarrow v = -\frac{1}{9}\int e^x + \frac{1}{9}\int e^{-x}(-dx) = -\frac{1}{9}e^x + \frac{1}{9}e^{-x}$$

Resolvamos ahora el caso homogeneo. Notemos que $u_{tt} - 9u_{xx}$ lo podemos escribir como

$$(\partial_t - 3\partial_x)(\partial_t + 3\partial_x)u = 0,$$

sea $v = u_t + 3u_x$, entonces se debe cumplir que $v_t - 3v_x = 0$, asi tenemos las siguientes ecuaciones de primer orden

$$v_t - 3v_x = 0, \quad u_t + 3u_x = v.$$

Nosotros sabemos que la solución a la primera ecuación es $v(x,t) = h(x+3t)$, luego queremos encontrar solución a la ecuacion $u_t + 3u_x = h(x+3t)$, la cual podemos notar que es lineal entonces la solución general esta dada por $u = v + w$, donde v es una solucón al caso particular y w es solución al caso homogeneo. De manera similar sabemos que la solución al caso homogeneo esta dada por $g(x-3t)$, por otro lado una solución del caso particular esta dada por $u(x,t) = f(x+3t)$, con $f'(s) = \frac{h(s)}{6}$, entonces la solucón general esta dada por

$$u(x,t) = f(x+3t) + g(x-3t).$$

Las condiciones inciales nos dicen que:

$$u(x,0) = f(x) + g(x) = x, \quad u_t(x,0) = 3f'(x) - 3g'(x) = \sin(x),$$

de donde obtenemos que $f'(x) + g'(x) = 1$, despejamos para obtener f' y g', y vemos que

$$f'(s) = \frac{\sin(s)}{6} + \frac{1}{2}, \quad g'(s) = -\frac{\sin(s)}{6} + \frac{1}{2},$$

integrando obtenemos que

$$f(s) = \frac{s}{2} + \frac{1}{6}\int_0^s \sin(x) + A + \quad g(s) = \frac{s}{2} + -\frac{1}{6}\int_0^s +B,$$

como $f + g = x$ tenemos que $A + B = 0$, luego sustituyendo $s = x + 3t$ para f y $s = x - 3t$ para g, se cumple que

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \tfrac{1}{2}[(x+3t) + (x-3t)] + \tfrac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t} \sin(s) ds \\ &= x - \tfrac{1}{6}[\cos(x+3t) - \cos(x-3t)]., \end{aligned}$$

como solución al caso homogeneo.

Por lo dicho al inicio, tenemos que la solución esta dad por

$$u(x,t) = x - \frac{1}{6}[\cos(x+3t) - \cos(x-3t)] - \frac{1}{9}e^{x} + \frac{1}{9}e^{-x},$$

además (haciendo las cuentas) se puede comprobar que es solución.

Problema 2

Resuelve el siguiente problema

$$\begin{gathered} u_t - u_{xx} - \frac{9}{4}u = 0, \quad 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = \sin\left(3\frac{x}{2}\right) + \sin\left(9\frac{x}{2}\right), \quad 0 \leq z \leq \pi. \end{gathered}$$

Solución: De manera similar supongamos que $u(x,t) = X(x)T(t)$, sustituyendo en la ecuación obtenemos que

$$XT' - X''T - \frac{9}{4}XT = 0 \Rightarrow \frac{T'}{T} - \frac{9}{4} = \frac{X''}{X} = -\lambda,$$

el cual nos genera los siguientes sistemas

$$\begin{gathered} X'' + \lambda X = 0, \quad T' - \frac{9}{4}T + \lambda T = 0 \\ X(0) = 0 \\ X'(\pi) = 0. \end{gathered}$$

De donde podemos notar que $p(x) = 1$, $q(x) = 0$, $\sigma(x) = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_2 = 1$, luego por Teorema 4.7 nos asegura que los valores propios son no negativos, entonces $\lambda = \mu^2$.

Si $\mu = 0$, entonces $X'' = 0$ lo cual implica que $X(x) = Ax + B$, luego $X(0) = 0 = B$ y $X'(\pi) = 0 = A$, entonces X es la solución cero, la cual no nos interesa.

Si $\mu > 0$, tenemos que $X'' + \mu^2 X = 0$ cuya solución general

$$X(x) = a\cos(\mu x) + b\sin(\mu x),$$

por las condiciones iniciales tenemos que $X(0) = a = 0$, lo cual implica que $X(x) = b\sin(\mu x)$, entonces $X'(x) = -b\mu\cos(\mu x)$ y por tanto $X'(\pi) = 0 = -b\mu\cos(\mu\pi)$, b no puede ser 0 pues tendriamos la solución trivial, luego se debe cumplir que $\cos(\mu\pi) = 0$, lo cual nos genera los valores propios $\mu_n = \frac{2n-1}{2}$, las correspondientes funciones propias son $X_n(x) = \sin(\mu_n x)$.

Ademas sabemos que la solución a $T' - \frac{9}{4}T + \lambda T = 0$ correspondiente a μ_n es $T_n(t) = e^{-(\mu_n^2 - \frac{9}{4})t}$. Por el principio de superposición tenemos que

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\mu_n x) e^{-(\mu_n^2 - \frac{9}{4})t},$$

de donde podemos notar que

$$u(x,0) = \sin\left(3\frac{x}{2}\right) + \sin\left(9\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\mu_n x),$$

como la representación en series de Fourier es unica tenemos que $c_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ exepto $n = 2, 5$. De lo anterior obtenemos que

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sin\left(\frac{3}{2}x\right) e^{-\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}} t + \sin\left(\frac{9}{2}x\right) e^{-\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}} t \\ &= \sin\left(\frac{3}{2}x\right) + \sin\left(\frac{9}{2}x\right) e^{\frac{9}{4} - \frac{81}{4}} t \\ &= \sin\left(\frac{3}{2}x\right) + \sin\left(\frac{9}{2}x\right) e^{-18} t. \end{aligned}$$

Problema 3

Resuelve la ecuación de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

en el rectangulo

$$0 < x < b, \quad 0 < y < d,$$

sujeto a las condiciones

$$u(0,y) = f(y), u(b,y) = g(y), u(x,0) = 0, u(x,d) = 0$$

Solución: Supongamos que $u(x,y) = X(x)Y(y)$ entonces se debe cumplir que

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = -\lambda,$$

donde λ es constante. Usando las condiciones de frontrera, se debe cumplir que $X(x)Y(0) = 0$ y $X(x)Y(d) = 0$, para tener soluciones no triviales suponemos $Y(0) = Y(d) = 0$ y tenemos el sistema

$$\begin{aligned} Y'' + \lambda Y = 0, \quad 0 < y < d, \\ Y(0) = 0 \\ Y(d) = 0, \end{aligned}$$

el cual podemos notar es un problema de Sturm-Liouville, cuyos valores propios son

$$\lambda_n = \mu_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{d^2},$$

y funciones propias

$$Y_n(y) = \sin\left(\frac{n\pi y}{d}\right),$$

para $n \geq 1$. Para estos valores de λ_n, la ecuación para X es:

$$X'' - \mu_n^2 X = 0,$$

cuya solución general es

$$X_n(x) = \alpha_n \cosh(\mu_n x) + \beta_n \sinh(\mu_n x).$$

Luego, por el principio de superposición tenemos que

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cosh(\mu_n x) + \beta_n \sinh(\mu_n x)) \sin(\mu_n y),$$

usando las condiciones inicales se debe cumplir que

$$u(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(\mu_n y) = f(y),$$

entonces los α_n's deben ser los coeficientes seno de la serie de Fourier de f y por tanto

$$\alpha_n = \frac{2}{d}\int_0^d f(y)\sin(\mu_n y)dy.$$

Para $x = b$ tenemos que

$$u(b,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cosh(\mu_n b) + \beta_n \sinh(\mu_n b)) \sin(\mu_n y) = g(y),$$

y de manera similar, los $(\alpha_n \cosh(\mu_n b) + \beta_n \sinh(\mu_n b))$'s deben ser los coeficientes seno de la serie de Fourier de g y por tanto

$$(\alpha_n \cosh(\mu_n b) + \beta_n \sinh(\mu_n b)) = \frac{2}{d} \int_0^d g(y) \sin(\mu_n y) dy = \gamma_n,$$

lo cual implica que

$$\beta_n = \frac{\gamma_n - \alpha_n \cosh(\mu_n b)}{\sinh(\mu_n b)},$$

se sigue que

$$\begin{aligned} X_n(x) &= \alpha_n \cosh(\mu_n x) + \frac{\gamma_n - \alpha_n \cosh(\mu_n b)}{\sinh(\mu_n b)} \sinh(\mu_n x) \\ &= \frac{1}{\sinh(\mu_n b)} \left[\alpha_n \sinh\left(\mu_{n(b-y)}\right) + \gamma_n \sinh_{\mu_n y}\right]. \end{aligned}$$

De lo anteior tenemos que la solución es:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sinh(\mu_n b)} \left[\alpha_n \sinh\left(\mu_{n(b-y)}\right) + \gamma_n \sinh_{\mu_n y}\right] \sin(\mu_n y),$$

con α_n, β_n y γ_n como se describieron anteriormente.