第六章　现代谱估计

6.6 最大熵谱估计

一.问题的提出

传统的谱估计方法存在缺点的原因：

人为地假定观察到的数据以外的数据为零

↓

导致自相关估计也是有限长

↓

而实际情况是没有观察到的数据不一定为零

如何解决？

注意到没有观察到的数据和已观察到的数据之间是有关系的。因此，我们有可能根据已观察到的数据推测未观察到的数据。

如何推测？　增加信息量

二.信息和熵

信息量：事件**A**以概率P_A出现所携带的信息量

$$I_A = -\log_r P_A, \begin{cases} r = 2,\text{比特} \\ r = e,\text{奈特} \\ r = 10,\text{哈特} \end{cases}$$

平均信息量（熵）：信息源发送一组彼此独立的不同的消息X_j,(j=1,2,…,n),概率为P_j,

每一个消息： $I_j = -\log_{10} p_j$

平均信息量（熵）：

$$H = E[I_j] = -\sum_{j=1}^{n} p_j \log_{10} p_j$$

例：零均值高斯平稳随机序列x(n)的熵

$$H=\frac{1}{2}\log_{10}\det[\mathbf{R}_x]_{M+1}$$

Rx是x(n)的自相关阵。

熵率（Entropy rate)

$$h=\lim_{M\to\infty}\frac{H}{M+1}=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2}\log_{10}\det[\mathbf{R}_x]^{\frac{1}{M+1}}$$

若$x(n)$的功率谱$S_x(f)$限制在$-f_c\le f\le f_c$范围内，有：

$$h=\frac{1}{2}\ln(2f_c)+\frac{1}{2f_c}\int_{-f_c}^{f_c}\ln[S_x(f)]df$$

(上述结论对一般平稳序列也是适应的）

三.最大熵谱估计原理

***x*(n)的频谱范围**

[-f_c, f_c],f_s=1/T,f_c=f_s/2

$$\begin{cases} R_x(m) = \int_{-f_c}^{f_c} S_x(f) e^{j2\pi fmT} df \\ S_x(f) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_x(m) e^{-j2\pi fmT} \end{cases}$$

问题：已知**R_x(0),…, R_x(M)→**估计 $S_x(f) \Rightarrow \widehat{S}_x(f)$

方法：按最大熵原理，在已知

$$R_x(m) = \int_{-f_c}^{f_c} S_x(f) e^{j2\pi fmT} df, m = 0,1,\ldots,M$$

的条件下，估计**R_x(m),m>=M+1,**使得

$$S_x(f) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_x(m) e^{-j2\pi fmT}$$

时对应的熵率

$$h = \frac{1}{2}\ln(2f_c) + \frac{1}{2f_c}\int_{-f_c}^{f_c} \ln[S_x(f)] df$$

最大，或使

$$H = \frac{1}{2}\log_{10}\det[\mathbf{R}_x]$$

最大。

按熵率最大的方法：利用**Lagrangian**乘数法解此有约束优化问题。得：

$$\hat{S}_x(f)=\frac{1}{\sum_{m=-M}^{M}}$$

$$\boxed{R_x(m)=\int_{-f_c}^{f_c}S_x(f)e^{j2\pi fmT}df, m=0,1,\ldots,M}$$

其中，$c(m)$ 是**Lagrangian**乘数，可由约束条件求得，并代入上式可得：

$$\hat{S}_x(f)=\frac{\sigma^2}{\left|1+\sum_{m=1}^{M}a(m)e^{-j2\pi fmT}\right|^2}$$

其中**a(m)**可由**Yule-Walker**方程，由**M+1**个自相关函数求取：

$$\sum_{k=0}^{M}a_k R_x(m-k)=\begin{cases}\dfrac{2f_c}{|g(0)|^2}=2f_c\sigma^2, m=0\\ 0, m=1,2,..,M\end{cases}, \sigma^2=\frac{1}{|g(0)|^2}$$

四.最大熵自相关外推

$$H = \frac{1}{2}\log_{10}\det[\mathbf{R}_x]$$

$R_x(0),\ldots, R_x(M)$ ➡ $R_x(M+1) \rightarrow R_x(M+2) \rightarrow \ldots$

$$\frac{\partial \det[\mathbf{R}_x(M+1)]}{\partial R_x(M+1)} = 0, \frac{\partial \det[\mathbf{R}_x(M+2)]}{\partial R_x(M+2)} = 0, \ldots$$

$$[\mathbf{R}_x(M+1)] = \begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(1) & \ldots & R_x(M+1) \\ R_x(1) & R_x(0) & \ldots & R_x(M) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_x(M+1) & R_x(M) & \ldots & R_x(0) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \det[\mathbf{R}_x(M+1)]}{\partial R_x(M+1)]} = 0 \Rightarrow \det\begin{bmatrix} R_x(1) & R_x(0) & \ldots & R_x(M-1) \\ R_x(2) & R_x(1) & \ldots & R_x(M-2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_x(M+1) & R_x(M) & \ldots & R_x(1) \end{bmatrix} = 0$$

$$(-1)^{M+3}\det\begin{bmatrix} R_x(1) & R_x(2) & \dots & 0 \\ R_x(0) & R_x(1) & \dots & R_x(M) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_x(M-1) & R_x(M-2) & \dots & R_x(1) \end{bmatrix}$$

$$\det[\mathbf{R}_x(M+1)]$$

$$= \det\begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(1) & \dots & 0 \\ R_x(1) & R_x(0) & \dots & R_x(M) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_x(M+1) & R_x(M) & \dots & R_x(0) \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} R_x(1) & R_x(0) & \dots & R_x(M) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_x(M+1) & R_x(M) & \dots & R_x(0) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial R_x(M+1)}(*) = (-1)^{M+3}\det\begin{bmatrix} R_x(1) & R_x(0) & \dots & R_x(M-1) \\ & & \dots & R_x(M-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_x(M+1) & R_x(M) & \dots & R_x(1) \end{bmatrix}$$

$$+(-1)^{M+3}\det\begin{bmatrix} 0 & R_x(0) & \dots & R_x(M-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & R_x(M-1) & \dots & R_x(0) \\ R_x(M+1) & R_x(M) & \dots & R_x(1) \end{bmatrix}$$

$$\partial \det[\mathbf{R}_x(M+1)] / \partial R_x(M+1)$$

$$= (-1)^{M+3} \det \begin{bmatrix} R_x(1) & R_x(0) & \dots & R_x(M-1) \\ R_x(2) & R_x(1) & \dots & R_x(M-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & R_x(M) & \dots & R_x(1) \end{bmatrix}$$

$$+(-1)^{M+3} \det \begin{bmatrix} R_x(1) & R_x(0) & \dots & R_x(M-1) \\ & & \dots & R_x(M-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_x(M+1) & R_x(M) & \dots & R_x(1) \end{bmatrix}$$

$$+(-1)^{M+3} \det \begin{bmatrix} 0 & R_x(0) & \dots & R_x(M-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & R_x(M-1) & \dots & R_x(0) \\ R_x(M+1) & R_x(M) & \dots & R_x(1) \end{bmatrix}$$

$$\widehat{S}_x(f)=\frac{1}{\sum_{m=-M}^{M} c(m)e^{-j2\pi fmT}}$$

五.最大熵谱估计的解

$$h=\frac{1}{2}\ln(2f_c)+\frac{1}{2f_c}\int_{-f_c}^{f_c}\ln[S_x(f)]df$$

$$S_x(f)=T\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_x(m)e^{-j2\pi fmT}$$

$$\frac{\partial h}{\partial R_x(m)}=\frac{\partial h}{\partial S_x(f)}\frac{\partial S_x(f)}{\partial R_x(m)}=\frac{1}{2f_c}\int_{-f_c}^{f_c}\frac{1}{S_x(f)}\frac{\partial S_x(f)}{\partial R_x(m)}df$$

$$=\frac{1}{2f_c}\int_{-f_c}^{f_c}\frac{1}{S_x(f)}Te^{-j2\pi fmT}df=0,|m|\geq M+1$$

$$c_m=\int_{-f_c}^{f_c}\frac{1}{S_x(f)}e^{j2\pi fmT}df=0,|m|\geq M+1$$

$$\frac{1}{S_x(f)}=\sum_{m=-M}^{M}c_m e^{-j2\pi fmT},c_m=c_{-m}$$

$$\hat{S}_x(f)=\frac{1}{\sum_{m=-M}^{M}c_m e^{-j2\pi fmT}}$$

代入约束条件：$R_x(m) = \int_{-f_c}^{f_c} S_x(f) e^{j2\pi fmT} df, m = 0,1,\dots,M$

$$= \int_{-f_c}^{f_c} \frac{e^{j2\pi fmT}}{\sum_{n=-M}^{M} c_n e^{-j2\pi fnT}} df, m = 0,1,\dots,M$$

令$z = e^{j2\pi fT}, df = \frac{f_c}{j\pi}(\frac{dz}{z}), f_c = \frac{f_s}{2} = \frac{1}{2T}$

$$R_x(m) = \frac{f_c}{j\pi} \oint_{u.c} \frac{z^{m-1}}{\sum_{n=-M}^{M} c_n z^{-n}} dz, m = 0,1,\dots,M$$

$$\sum_{n=-M}^{M} c_n z^{-n} = G_M(z) G^*_M(\frac{1}{z^*}) = |g(0)|^2 A_M(z) A^*_M(\frac{1}{z^*})$$

$$G_M(z) = \sum_{n=0}^{M} g(n) z^{-n}, G^*_M(\frac{1}{z^*}) = \sum_{n=0}^{M} g^*(n) z^n$$

$$R_x(m) = \frac{f_c}{j\pi} \oint_{u.c} \frac{z^{m-1}}{\sum_{n=-M}^{M} c_n z^{-n}} dz, m = 0,1,\ldots, M$$

$$A_M(z) = \sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k}, A^*_M(\frac{1}{z^*}) = \sum_{k=0}^{M} a_k^* z^k, a_0 = 1$$

$$R_x(m) = \frac{f_c}{j\pi} \oint_{u.c} \frac{z^{m-1}}{G_M(z) G^*_M(\frac{1}{z^*})} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_{u.c} \frac{2 f_c}{G_M(z) G^*_M(\frac{1}{z^*})} z^{m-1} dz$$

$$R_x(m) \longrightarrow \boxed{G_M(z)} \longrightarrow y(m) = R_x(m) * g(m)$$

$$y(m) = \sum_{k=0}^{M} g(k) R_x(m-k)$$

$$= \frac{f_c}{j\pi} \oint_{u.c} \frac{1}{G_M(z) G^*_M(\frac{1}{z^*})} \bullet G_M(z) \bullet z^{m-1} dz = \frac{f_c}{j\pi} \oint_{u.c} \frac{1}{G^*_M(\frac{1}{z^*})} \bullet z^{m-1} dz$$

$$A_M(z) = \sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k}, \quad A^*_M\left(\frac{1}{z^*}\right) = \sum_{k=0}^{M} a_k^* z^n$$

$$y(m) = \frac{f_c}{j\pi} \oint_{u.c} \frac{1}{G^*_M\left(\frac{1}{z^*}\right)} \bullet z^{m-1} dz = 2 f_c \bullet \frac{1}{2\pi j} \oint_{u.c} \frac{z^m}{G^*_M\left(\frac{1}{z^*}\right)} \frac{dz}{z}$$

$$y(m) = \begin{cases} \dfrac{2f_c}{g^*(0)}, m = 0 \\ 0, m = 1, 2, .., M \end{cases} \quad G \sum_{k=0}^{M} g(k) R_x(m-k) = \begin{cases} \dfrac{2f_c}{g^*(0)}, m = 0 \\ 0, m = 1, 2, .., M \end{cases} \quad {}^*(n) z^n$$

$$\sum_{k=0}^{M} a_k R_x(m-k) = \begin{cases} \dfrac{2f_c}{|g(0)|^2} = 2 f_c \sigma^2, m = 0 \\ 0, m = 1, 2, .., M \end{cases}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{|g(0)|^2}$$

$$\therefore \hat{S}_x(f) = \frac{1}{\sum_{n=-M}^{M} c_n e^{-j2\pi f n T}} = \left. \frac{1}{\sum_{n=-M}^{M} c_n z^{-n}} \right|_{z=e^{-j2\pi fT}} = \left. \frac{1}{|g(0)|^2 A_M(z) A^*_M\left(\frac{1}{z^*}\right)} \right|_{z=e^{-j2\pi fT}}$$

$$\therefore \hat{S}_x(f) = \frac{\sigma^2}{\left| 1 + \sum_{n=1}^{M} a_n e^{-j2\pi f n T} \right|^2}$$