第三章 自适应滤波引言

- 线性滤波
- 最优滤波
- 自适应滤波
- 自适应滤波应用举例
- 维纳滤波
- 卡尔曼滤波

3.2　维纳滤波

一 维纳滤波问题

y(n)----期望输出(参考信号）,x(n)-----输入信号,e(n)-----误差信号

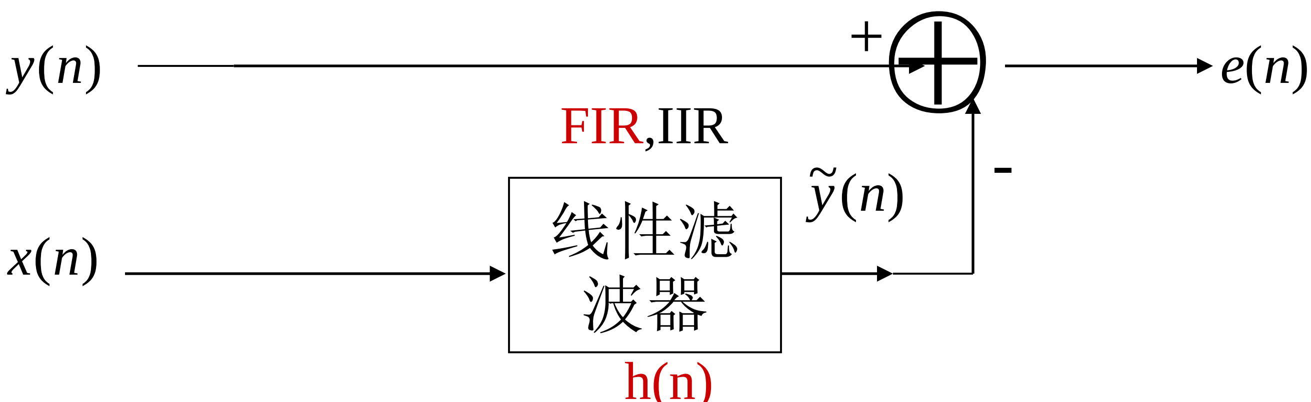
已知条件:y(n), x(n)是均值为0的平稳离散时间信号,二阶矩（自相关，互相关）已知.滤波器是线性的(FIR,IIR)

采用准则:最小均方误差(MMSE,Minimum Mean-Squared Error)

$$J = E[e^2(n)] = E\{[(y(n) - \tilde{y}(n)]^2\} = \min$$

设计滤波器[求h(n)]使在最小均方误差意义下是最优滤波.

---------维纳滤波问题



$$J=E[e^2(n)]=\min$$

$$e(n)=y(n)-\tilde{y}(n)=y(n)-\sum_i h_i x(n-i)$$

二 Weiner-Hopf 方程

设滤波器单位取样响应h(n)→h_n是实数:

$$\tilde{y}(n)=\sum_i h(i)x(n-i)=\sum_i h_i x(n-i)$$

$$\frac{\partial J}{\partial h_j}=2E[e(n)\frac{\partial e(n)}{\partial h_j}]=-2E[e(n)x(n-j)]=0,\forall j,n$$

$$\therefore \quad E[e(n)x(n-j)]=0,\forall j,n$$

$$E[y(n)x(n-j)-\sum_i h_i x(n-i)x(n-j)]=0$$

定义:

$$r_c(j)=E[y(n)x(n-j)]$$

$$r(j)=E[x(n)x(n-j)]$$

则:

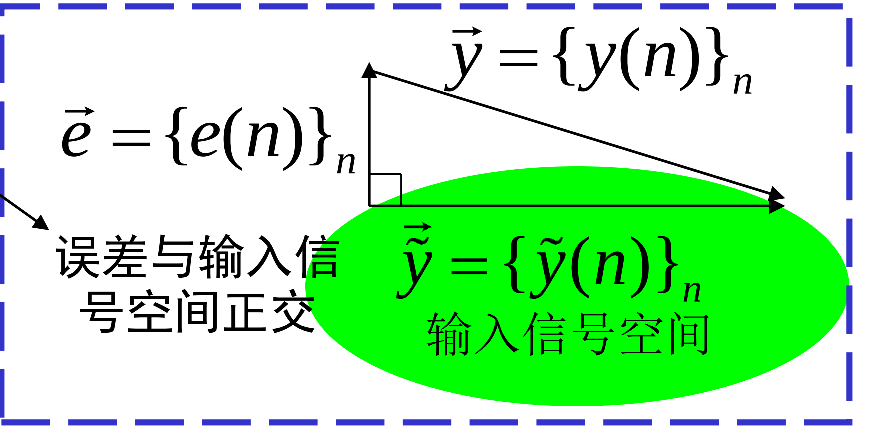
$$r_c(j)=\sum_i h_i r(j-i),\forall j$$ → Weiner-Hopf方程

三 正交原理(Principle of orthogonality)

$$E[e(n)x(n-j)]=0, \forall j,n$$

$$\tilde{y}(n)=\sum_j h_j x(n-j)$$

$$E[e(n)\tilde{y}(n)]=0, \forall n$$



正交原理:线性最优滤波(维纳滤波)的充要条件是滤波器的输出(参考信号即期望信号的估计)与误差(估计与参考信号的差)正交.

而: $e(n)=y(n)-\tilde{y}(n) \Rightarrow y(n)=\tilde{y}(n)+e(n), \forall n$

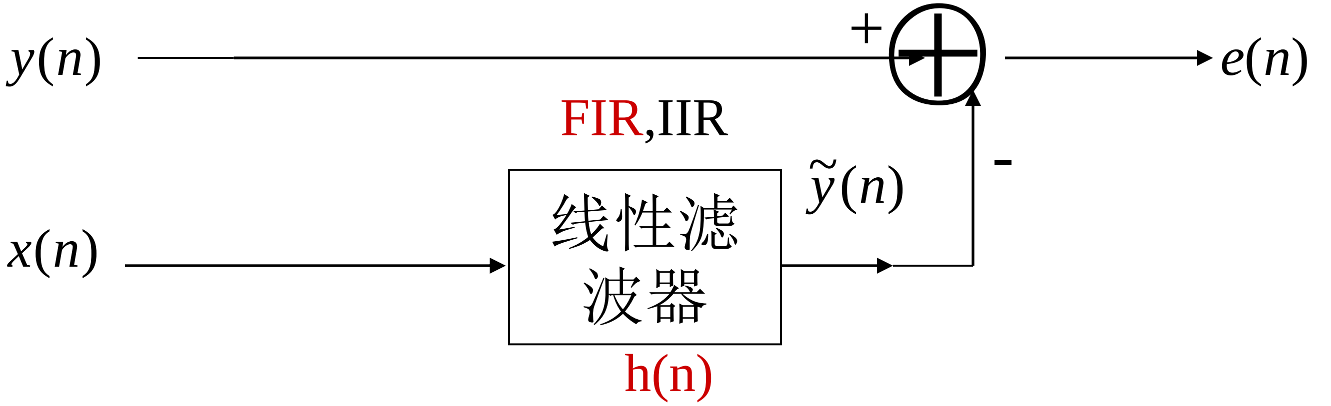
$\tilde{y}(n)=\sum_i h_i x(n-i)$ $\vec{\tilde{y}}$是输入信号空间的一个矢量

推论1:线性最优滤波(维纳滤波)的最优估计是参考信号即期望信号在输入信号空间的正交投影.

$$y(n)=\tilde{y}(n)+e(n),\forall n$$

$$E[e(n)\tilde{y}(n)]=0,\forall n$$

推论2:线性最优滤波(维纳滤波)等价于将参考信号分解为两个正交分量（误差信号分量和滤波器输出信号分量），误差信号分量与输入信号（正交)不相关，滤波器输出的信号分量与输入信号(不正交)相关.



四 N阶FIR维纳滤波器的解,0<= i <=N-1

$$\tilde{y}(n)=\sum_{i=0}^{N-1}h_i x(n-i) \xleftarrow{\text{FIR}} \tilde{y}(n)=\sum_{i}h_i x(n-i)$$

输入: $\mathbf{X}(n)=[x(n),x(n-1),\dots,x(n-N+1)]^T$

系数: $\mathbf{H}=[h_0,h_1,\dots,h_{N-1}]^T$

输出: $\tilde{y}(n)=\mathbf{H}^T\mathbf{X}(n)=\mathbf{X}^T(n)\mathbf{H}$

$$E[e(n)x(n-j)]=0;0\le j\le N-1,\forall n \Rightarrow E[e(n)\mathbf{X}(n)]=0;\forall n$$

$$E\{[y(n)-\mathbf{H}^T\mathbf{X}(n)]\mathbf{X}(n)\}$$

$$=E[y(n)\mathbf{X}(n)]-\underbrace{E[\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^T(n)]}_{\mathbf{R}_{xx}}\mathbf{H}=0$$

$$\therefore \mathbf{H}_{opt}=\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{r}_{yx}$$

$\Longrightarrow$ O(N²)

其中:

$$\mathbf{R}_{xx}=\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \dots & r(N-1) \\ r(1) & r(0) & \dots & r(N-2) \\ . & . & & . \\ & & \dots & \\ . & . & & . \\ r(N-1) & r(N-2) & \dots & r(0) \end{bmatrix}$$

$$r(p)=E[x(n)x(n-p)]$$

$\mathbf{R}_{xx}^{T}=\mathbf{R}_{xx}$(对称),且具有*Toplitz*性质

$$\mathbf{r}_{yx}=\begin{bmatrix} r_c(0) \\ r_c(1) \\ \\ r_c(N-1) \end{bmatrix}$$

$$r_c(p)=E[y(n)x(n-p)]$$

五 N阶FIR维纳滤波器的最小均方误差 $J_{\min}$

$$J = E[e^2(n)] = E\{[(y(n) - \tilde{y}(n)]^2\}$$

$$\tilde{y}(n) = \mathbf{H}^T \mathbf{X}(n) = \mathbf{X}^T(n)\mathbf{H}$$

$$J = E[y^2(n)] - 2E[y(n)\mathbf{H}^T \mathbf{X}(n)] + E[\mathbf{H}^T \mathbf{X}(n)\mathbf{X}^T(n)\mathbf{H}]$$

$$= E[y^2(n)] - 2\mathbf{r}_{yx}^T \mathbf{H} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{H}$$

$$J_{\min} = E[y^2(n)] - 2\mathbf{r}_{yx}^T \mathbf{H}_{opt} + \mathbf{H}_{opt}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{H}_{opt}$$

$$= E[y^2(n)] - \mathbf{H}_{opt}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{H}_{opt}$$

$$= E[y^2(n)] - \mathbf{H}_{opt}^T \mathbf{r}_{yx}$$

$$* E[y(n)\mathbf{X}^T(n)] = \mathbf{r}_{yx}^T = \mathbf{H}_{opt}^T \mathbf{R}_{xx} \Longleftarrow \quad \mathbf{H}_{opt} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{r}_{yx}$$

六 N阶FIR维纳滤波器的误差性能曲面 (Error-Performance Surface)

$$J(\mathbf{H}) = E[y^2(n)] - 2\mathbf{r}_{yx}^T\mathbf{H} + \mathbf{H}^T\mathbf{R}_{xx}\mathbf{H} \qquad \text{二次曲面}$$

误差性能曲面（Error-Performance Surface）

$$J(\mathbf{H}) - J_{\min} = E[y^2(n)] - 2\mathbf{r}_{yx}^T\mathbf{H} + \mathbf{H}^T\mathbf{R}_{xx}\mathbf{H} - \{E[y^2(n)] - 2\mathbf{r}_{yx}^T\mathbf{H}_{opt} + \mathbf{H}_{opt}^T\mathbf{R}_{xx}\mathbf{H}_{opt}\}$$

$$J(\mathbf{H}) = J_{\min} + (\mathbf{H} - \mathbf{H}_{opt})^T\mathbf{R}_{xx}(\mathbf{H} - \mathbf{H}_{opt})$$

误差性能曲面（Error-Performance Surface）

$$\mathbf{r}_{yx} = \mathbf{R}_{xx}\mathbf{H}_{opt}; \mathbf{r}_{yx}^T = \mathbf{H}_{opt}^T\mathbf{R}_{xx}$$

$$J(\mathbf{H}) - J_{\min} = E[y^2(n)] - 2\mathbf{r}_{yx}^T\mathbf{H} + \mathbf{H}^T\mathbf{R}_{xx}\mathbf{H} -$$

$$\{E[y^2(n)] - 2\mathbf{r}_{yx}^T\mathbf{H}_{opt} + \mathbf{H}_{opt}^T\mathbf{R}_{xx}\mathbf{H}_{opt}\}$$

$\mathbf{H}^T\mathbf{r}_{yx}$

$$= -2\mathbf{r}_{yx}^T\mathbf{H} + \mathbf{H}^T\mathbf{R}_{xx}\mathbf{H} + 2\mathbf{r}_{yx}^T\mathbf{H}_{opt} - \mathbf{H}_{opt}^T\mathbf{R}_{xx}\mathbf{H}_{opt}$$

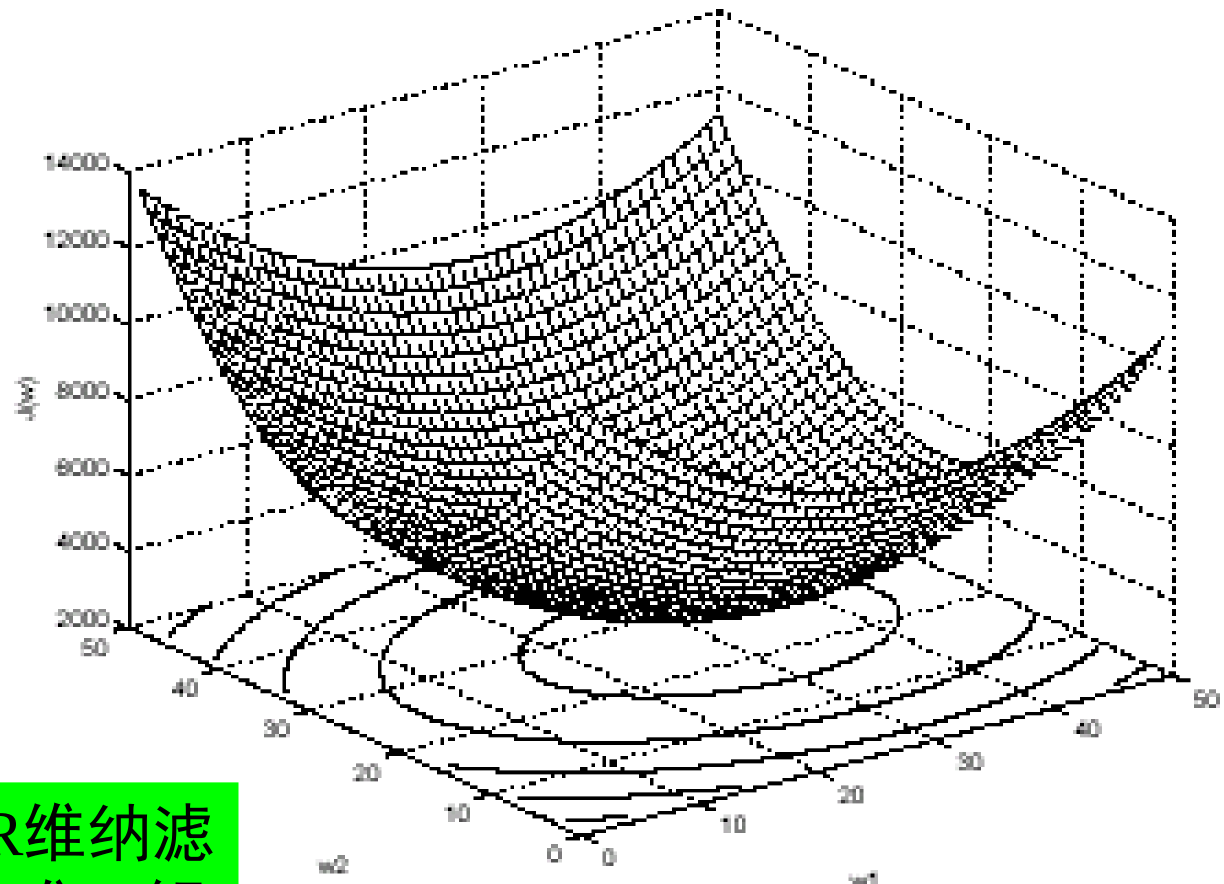
$$J(\mathbf{H}) - J_{\min} = \underbrace{-\mathbf{H}_{opt}^T\mathbf{R}_{xx}\mathbf{H} - \mathbf{H}^T\mathbf{R}_{xx}\mathbf{H}_{opt}} + \mathbf{H}^T\mathbf{R}_{xx}\mathbf{H} +$$

$$2\mathbf{H}_{opt}^T R_{xx}\mathbf{H}_{opt} - \mathbf{H}_{opt}^T\mathbf{R}_{xx}\mathbf{H}_{opt}$$

$$= -\mathbf{H}_{opt}^T\mathbf{R}_{xx}\mathbf{H} - \mathbf{H}^T\mathbf{R}_{xx}\mathbf{H}_{opt} + \mathbf{H}^T\mathbf{R}_{xx}\mathbf{H} + \mathbf{H}_{opt}^T R_{xx}\mathbf{H}_{opt}$$

$$\Downarrow$$

$$J(\mathbf{H}) = J_{\min} + (\mathbf{H} - \mathbf{H}_{opt})^T\mathbf{R}_{xx}(\mathbf{H} - \mathbf{H}_{opt})$$

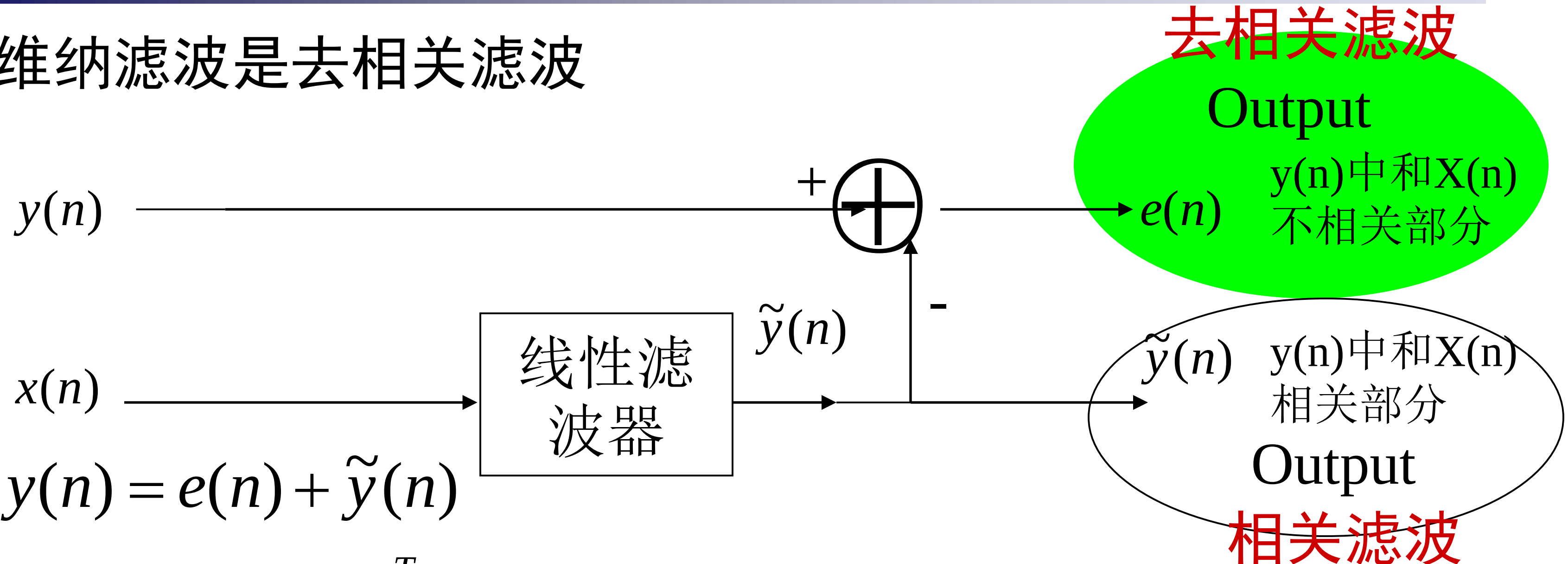


结论：N阶FIR维纳滤波器有解且有唯一解

误差性能曲面（Error-performance surface）

$E[e(n)x(n-j)]=0, \forall j, n$

七 维纳滤波是去相关滤波



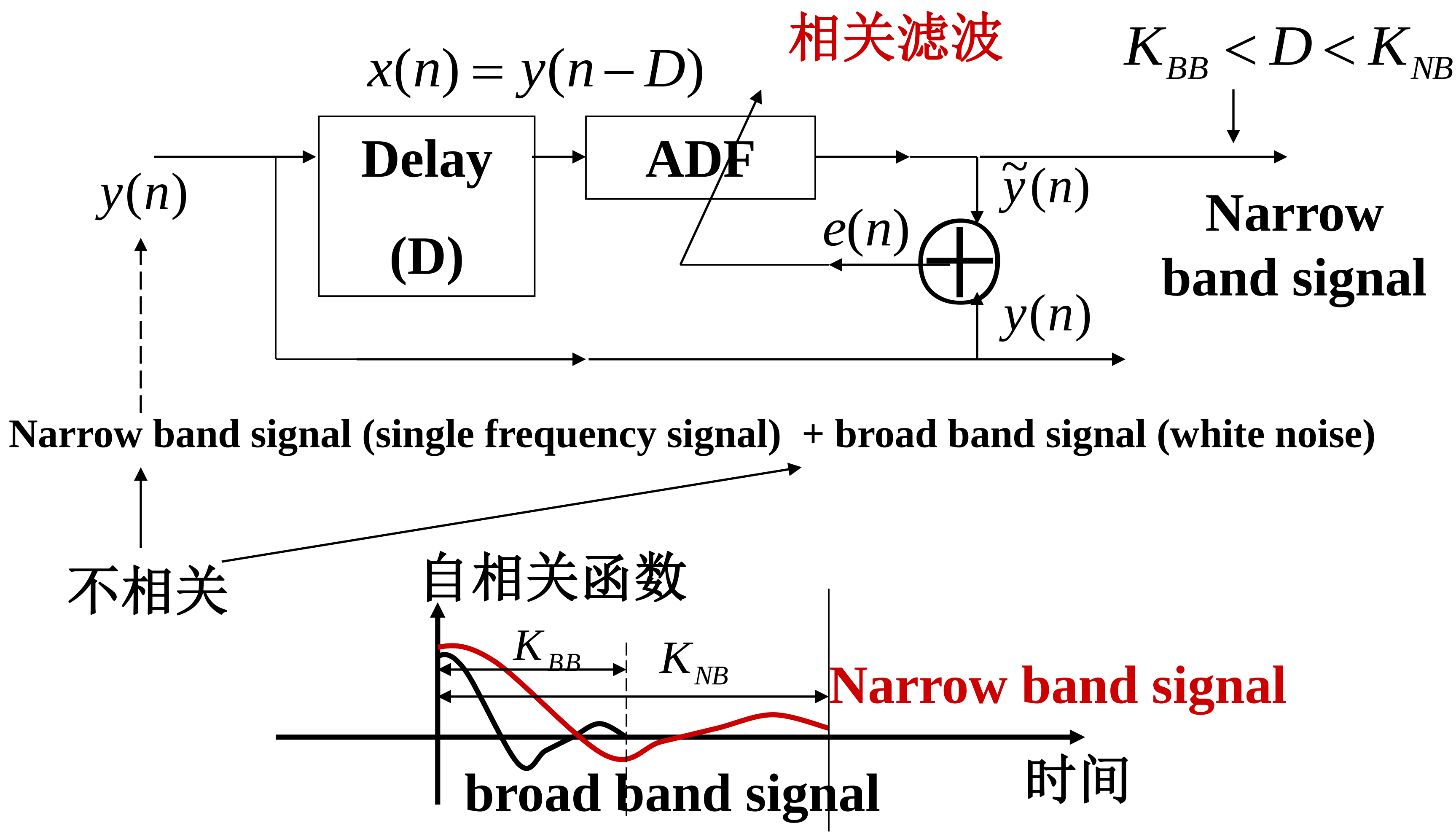
$$y(n)=e(n)+\tilde{y}(n)$$
$$=e(n)+\mathbf{H}_{opt}^{T}\mathbf{X}(n)$$

由正交原理：$e(n)$是y(n)中和$\mathbf{X}(n)$不相关的部分;

但$\tilde{y}(n)$是y(n)中和$\mathbf{X}(n)$相关的部分;

结论：$e(n)$作为输出时的维纳滤波（最优线性滤波），则是从$y(n)$中移掉和输入$X(n)$相关的部分$\tilde{y}(n)$，输出$y(n)$中和输入$X(n)$不相关的部分

自适应谱线增强(Adaptive line Enhancer)



八 维纳滤波和一般线性滤波的比较

Weiner-Hopf方程: $r_c(j)=\sum_i h_i r(j-i), \forall j$

$x(n)=y(n)+v(n)\quad v(n): noise$ 和 $y(n)$ 不相关

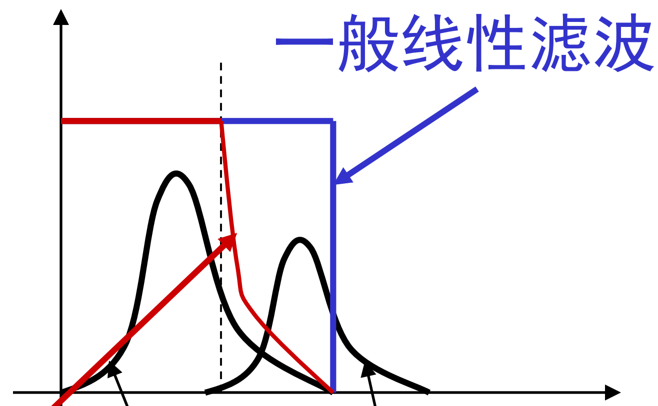
$r_c(j)=r_{yx}(j)=r_{y(y+v)}(j)=r_{yy}(j);$

$r_{xx}(j)=r_{(y+v)(y+v)}(j)=r_{yy}(j)+r_{vv}(j)$

$r_c(j)=\sum_i h_i r(j-i), \forall j$

Z　　Z

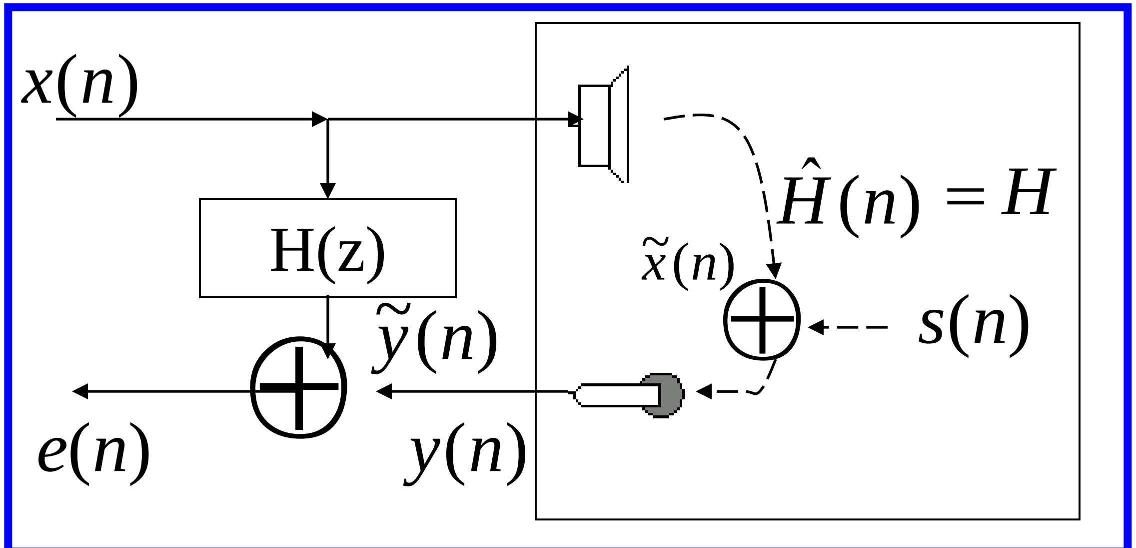
$S_{yy}(z)=H(z)[S_{yy}(z)+S_{vv}(z)]$



$$H(z)=\frac{S_{yy}(z)}{S_{yy}(z)+S_{vv}(z)} \Rightarrow \left|H(e^{j\omega})\right|=\frac{\left|S_{yy}(e^{j\omega})\right|}{\left|S_{yy}(e^{j\omega})+S_{vv}(e^{j\omega})\right|}$$

九 Examples

Example 1:Echo cancellation



$$r_c(j)=\sum_i h_i r(j-i),\forall j$$

$$S_{yx}(z)=H(z)S_{xx}(z)$$

$$y(n)=\tilde{x}(n)+s(n)$$

$$r_c(j)=r_{yx}(j)=r_{(\tilde{x}+s)x}(j)=r_{\tilde{x}x}(j);$$

在维纳滤波的情况下,e(n)是s(n)的MMSE估计

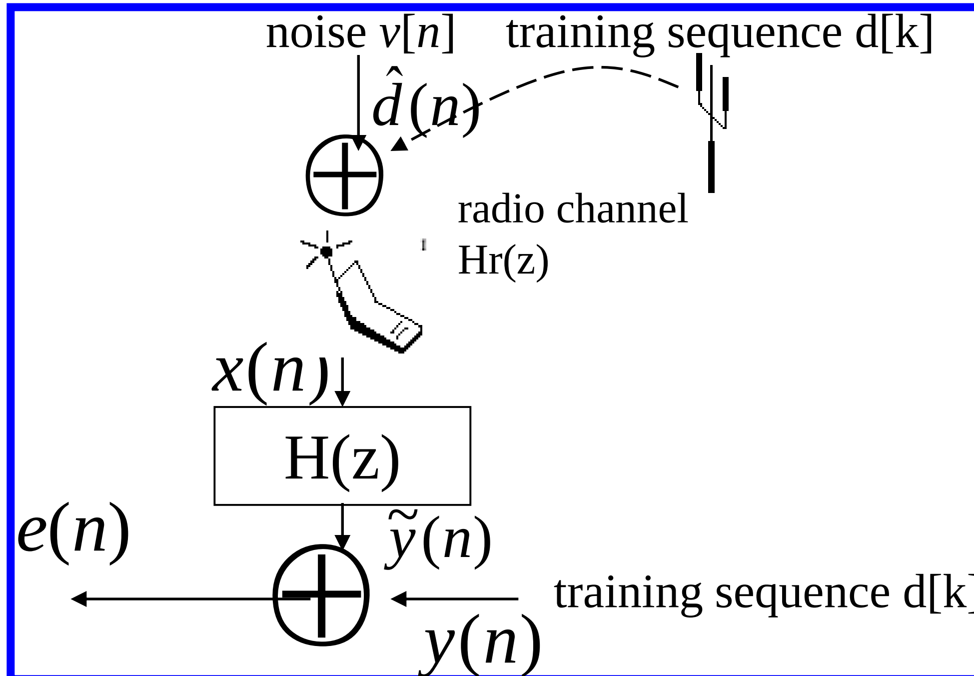
$$r_{\tilde{x}x}(j)=\sum_i \hat{h}(i)r(j-i) \Longleftarrow \tilde{x}(n)=\sum_i \hat{h}(i)x(n-i)$$

$$\hat{H}(z)S_{xx}(z)=H(z)S_{xx}(z)\Rightarrow H(z)=\hat{H}(z)$$

Example 2:inverse modeling problem

$$r_c(j)=\sum_i h_i r(j-i),\forall j$$

$$S_{yx}(z)=H(z)S_{xx}(z)$$



$$x(n)=\hat{d}(n)+v(n)=h_r(n)*d(n)+v(n)$$

$$y(n)=d(n)$$

$$r_{yx}(j)=r_{d(h_r*d+v)}(j)=r_{d(h_r*d)}(j)$$

$$S_{yx}(z)=H_r(z^{-1})S_{dd}(z)$$

$$r_{xx}(j)=r_{(h_r*d+v)(h_r*d+v)}(j)=r_{(h_r*d)(h_r*d)}(j)+r_{vv}(j)$$

$$S_{xx}(z)=H_r(z)H_r(z^{-1})S_{dd}(z)+S_{vv}(z)$$

$$H(z)=\frac{H_r(z^{-1})S_{dd}(z)}{H_r(z)H_r(z^{-1})S_{dd}(z)+S_{vv}(z)}\overset{S_{vv}(z)=0}{\Rightarrow}H(z)=\frac{1}{H_r(z)}$$

Example 2:inverse modeling problem

$$S_{yx}(z) = H_r(z^{-1})S_{dd}(z)$$

$$r_{yx}(p) = E[y(n)x(n-p)] \quad r_{xx}(p) = E[x(n)x(n-p)]$$

$$r_{d(h_r*d)}(p) = E[d(n)\sum_k h_r(k)d(n-p-k)]$$

$$= \sum_k h_r(k)E[d(n)d(n-p-k)]$$

$$= \sum_k h_r(k)r_{dd}(p+k)$$

3.3 卡尔曼滤波(标量)

一 问题的提出

在最小均方误差准则下,维纳滤波是一种最优线性滤波,但其要求信号平稳,且由于不是递推算法,计算效率不高.

设:(1)观察信号 $x(1), x(2), \ldots, x(n)$;

(2)由n-1时刻及此前的观察信号, $x(1), x(2), \ldots, x(n-1)$,

按最小均方误差准则得到$y(n$-1)的最优估计,记为:

$$\tilde{y}(n-1|n-1)$$

问题:当得到新的观察信号$x(n)$,估计: $\tilde{y}(n|n)$

途径:1)根据 $x(1), x(2), \ldots, x(n)$ ，估计$\tilde{y}(n|n)$;(Weiner Filter)

2)叠代的方法: $\tilde{y}(n-1|n-1) \longrightarrow \tilde{y}(n|n)$

$$\uparrow$$

$$x(n)$$

二 解决方法:

(1) 一步预测(One-step prediction)

由 $x(1), x(2), \ldots, x(n-1) \longrightarrow x(n)$ $\tilde{x}(n|n-1)$

预测误差: $\alpha(n) = x(n) - \tilde{x}(n|n-1)$ ⟸ 新息(Innovation)

$x(n)$中无法预测的信息,

或$x(n)$所提供的新的信息

若真实信号y(n)具有信号模型:

$$y(n) = ay(n-1) + w(n)$$ 状态方程

而观察信号$x(n)$是通过如下测量模型获得:

$$x(n) = cy(n) + v(n)$$ 测量方程

其中a,c是绝对值小于1的常数,$w(n),v(n)$是方差分别为Q和R的白噪音.且$v(n)$和$y(n),w(n)$不相关.则新息的计算可分为:

(a) 由已有估计$\tilde{y}(n-1|n-1)$通过状态方程对$y(n)$做一步预测:

$$\tilde{y}(n|n-1)=a\tilde{y}(n-1|n-1) \Longleftarrow y(n)=ay(n-1)+w(n)$$

(b) 根据测量方程,对测量值$x(n)$作一步预测

$$\tilde{x}(n|n-1)=c\tilde{y}(n|n-1)=ca\tilde{y}(n-1|n-1) \Leftarrow x(n)=cy(n)+v(n)$$

(c) $x(n)$到来后,计算新息

$$\alpha(n)=x(n)-c\tilde{y}(n|n-1)=x(n)-ca\tilde{y}(n-1|n-1)$$

(2)根据新息,对预测值 $\tilde{y}(n|n-1)$ 进行修正,从而得到估计值**:** $\tilde{y}(n|n)$

$$\tilde{y}(n|n)=\tilde{y}(n|n-1)+G_n\alpha(n)$$

其中G_n是加权因子(预测增益), G_n的选取应使根据新息修正所得到的估计 $\tilde{y}(n|n)$ 最佳,即使当前时刻的估计和真实值均方误差最小:

$$J(n)=E[e^2(n)]=E[(y(n)-\tilde{y}(n|n))^2]=\min$$

$$\frac{\partial J(n)}{\partial G_n}=2E[e(n)\frac{\partial e(n)}{\partial G_n}]=0$$

$$\frac{\partial e(n)}{\partial G_n}=-\alpha(n) \qquad \tilde{y}(n|n)=\tilde{y}(n|n-1)+G_n\alpha(n)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{E[e(n)\alpha(n)]=0 \quad \text{or} \quad E\{e(n)[x(n)-c\tilde{y}(n|n-1)]\}=0}$$

$$\tilde{y}(n|n) = \tilde{y}(n|n-1) + G_n\alpha(n)$$

$$\alpha(n) = x(n) - c\tilde{y}(n|n-1) = x(n) - ca\tilde{y}(n-1|n-1)$$

(1)求Gn

$$E[e(n)\alpha(n)] = 0 \quad \text{or} \quad E\{e(n)[x(n) - c\tilde{y}(n|n-1)]\} = 0$$

令: $e_1(n) = y(n) - \tilde{y}(n|n-1)$ (调整前误差,一步预测误差)

$p(n) = E[e_1^2(n)]$ (一步预测误差功率)

$$\begin{aligned} e(n) &= y(n) - \tilde{y}(n|n) \quad \text{(调整后误差)} \\ &= \underline{y(n) - \tilde{y}(n|n-1)} - G_n[x(n) - c\tilde{y}(n|n-1)] \\ &= e_1(n) - G_n[cy(n) + v(n) - c\tilde{y}(n|n-1)] \\ &= (1 - cG_n)e_1(n) - G_n v(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha(n) &= x(n) - c\tilde{y}(n|n-1) \\ &= cy(n) + v(n) - c\tilde{y}(n|n-1) \\ &= ce_1(n) + v(n) \end{aligned}$$

测量方程

$x(n) = cy(n) + v(n)$

$$E[e(n)\alpha(n)] = E\{[(1-cG_n)e_1(n) - G_n v(n)][ce_1(n)+v(n)]\}$$

$$= c(1-cG_n)p(n) - G_n R \quad \text{$v(n)$和$e_1(n)$不相关}$$

$$= 0$$

$$G_n = \frac{cp(n)}{R + c^2 p(n)}$$

$$= \frac{c}{R/p(n) + c^2} \qquad [p(n)\uparrow \Rightarrow G_n \uparrow]$$

(2)求J(n)

最优线性滤波,由正交原理: $\boxed{E[e(n)\tilde{y}(n|n)]=0}$

同时: $E[e(n)\alpha(n)]=0$

$$\tilde{y}(n|n)=\tilde{y}(n|n-1)+G_n\alpha(n)$$

$$0=E[e(n)\tilde{y}(n|n)]=E[e(n)\tilde{y}(n|n-1)+e(n)G_n\alpha(n)]$$

$$=E[e(n)\tilde{y}(n|n-1)$$

$$\boxed{E[e(n)\tilde{y}(n|n-1)]=0}$$

$$E[e(n)\alpha(n)]=0$$

$$\alpha(n)=x(n)-c\tilde{y}(n|n-1)$$

$$\boxed{E[e(n)x(n)]=0}$$

$+$

$$x(n)=cy(n)+v(n)$$

$$\boxed{E[e(n)y(n)]=-\frac{1}{c}E[e(n)v(n)]}$$

$$J(n)=E[e^2(n)]=E[e(n)(y(n)-\tilde{y}(n|n))]$$

$$=E[e(n)y(n)]$$

$$E[e(n)y(n)]=-\frac{1}{c}E[e(n)v(n)]$$

$$=-\frac{1}{c}E[e(n)v(n)]$$

$$e(n)=(1-cG_n)e_1(n)-G_nv(n)$$ $v(n)$和$e_1(n)$不相关

$$J(n)=\frac{1}{c}G_nR$$

$$G_n=\frac{cp(n)}{R+c^2p(n)}\Rightarrow G_nR=cp(n)[1-cG_n]$$

$$J(n)=[1-cG_n]p(n)$$

(3)求p(n)

$$
\begin{aligned}
p(n) &= E[e_1^2(n)] = E\{[y(n) - \tilde{y}(n|n-1)]^2\} \\
&= E\{[y(n) - a\tilde{y}(n-1|n-1)]^2\} \\
&= E\{[ay(n-1) + w(n) - a\tilde{y}(n-1|n-1)]^2\} \\
&= E\{[ae(n-1) + w(n)]^2\} \\
&= a^2 E[e^2(n-1)] + E[w^2(n)] \\
&= a^2 J(n-1) + Q
\end{aligned}
$$

$e(n) = y(n) - \tilde{y}(n|n)$

$w(n)$和$e(n-1)$不相关

(4)综合:

$$\tilde{y}(n|n) = a\tilde{y}(n-1|n-1) + G_n[x(n) - ca\tilde{y}(n-1|n-1)]$$

$$p(n) = a^2 J(n-1) + Q$$

$$G_n = \frac{cp(n)}{R + c^2 p(n)}$$

$$J(n) = \frac{R}{C} G_n = (1 - cG_n) p(n)$$

初始条件： $\tilde{y}(0|0), J(0)$

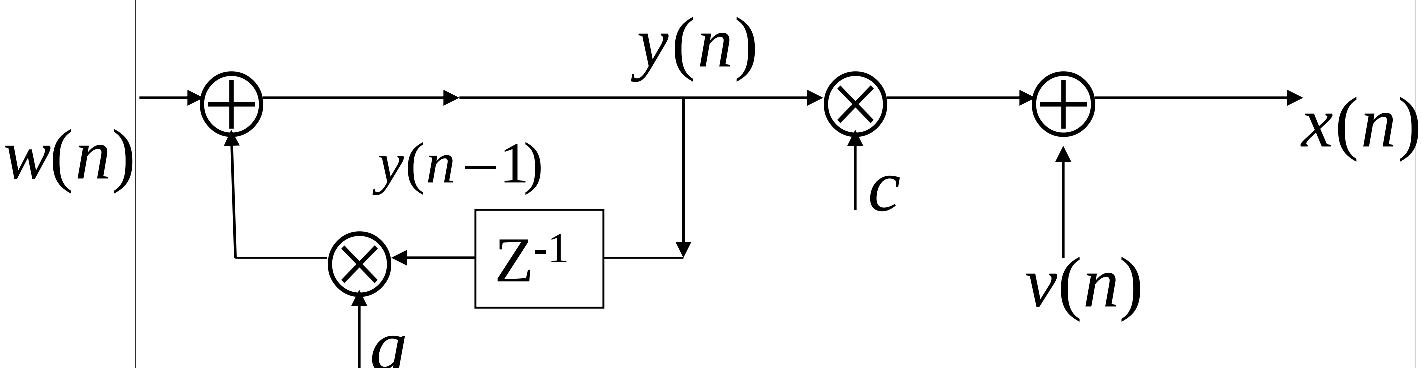
三 Summary of Kalman Filter

已知真实信号$y(n)$具有信号模型:

$$y(n) = ay(n-1) + w(n) \qquad \text{状态方程}$$

及观察信号$x(n)$的测量模型:

$$x(n) = cy(n) + v(n) \qquad \text{测量方程}$$



由n时刻及此前的观察信号 $x(1), x(2), \ldots, x(n)$
估计n时刻的真实信号$y(n)$

3.3卡尔曼滤波

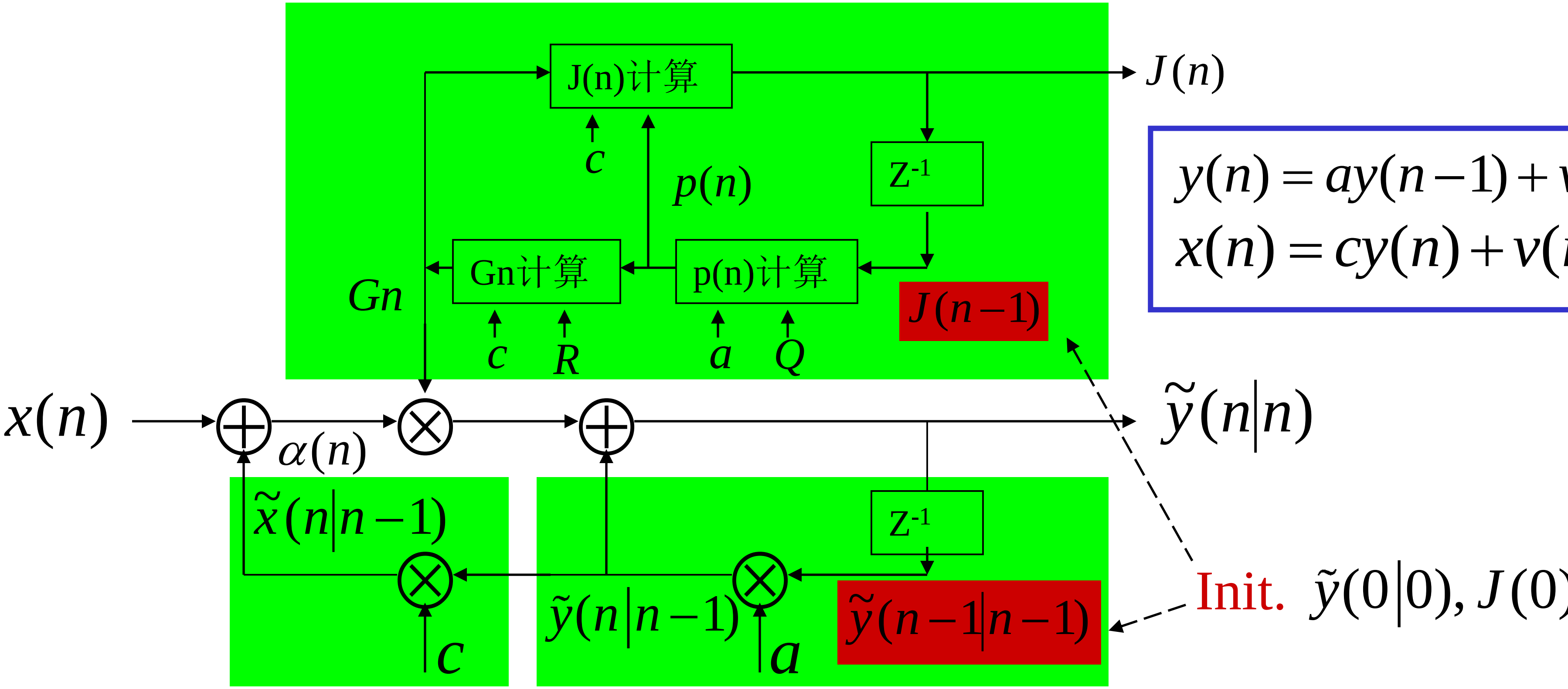
基于一步预测的Kalman Filter

$$\tilde{y}(n|n)=a\tilde{y}(n-1|n-1)+G_n[x(n)-ca\tilde{y}(n-1|n-1)]$$

$$p(n)=a^2J(n-1)+Q$$

$$G_n=\frac{cp(n)}{R+c^2p(n)}$$

$$J(n)=\frac{R}{C}G_n=(1-cG_n)p(n)$$



$$y(n)=ay(n-1)+w(n)$$
$$x(n)=cy(n)+v(n)$$