- 第四章　LMS自适应滤波

4.6 非平稳环境下的LMS算法

一 梯度失调误差和跟踪误差

对非平稳信号，自适应滤波器期待尽可能地跟踪上信号特性的变化，但是由于时间常数的关系，总存在延迟。因此超量误差有失调和跟踪两个误差组成。自适应的有效性取决于信号特性。显然最好情况下，信号是慢变化的, 保证自适应过程能够跟踪上信号的变化。引起非平稳性的情况有：

- 参考信号是非平稳的
- AF输入信号是非平稳的
- 参考信号和输入信号都是非平稳的

由于 $H_{opt}(n)$ 是时变的，未知的，故系数误差矢量：

$$C(n) = H(n) - H_{opt}(n) \quad = \{H(n) - E[H(n)]\} + \{E[H(n)] - H_{opt}(n)\}$$

其中 $C_1(n)=H(n)-E[H(n)]$

是梯度失调引起，相当于权系数矢量噪声

$$C_2(n)=E[H(n)]-H_{opt}(n)$$

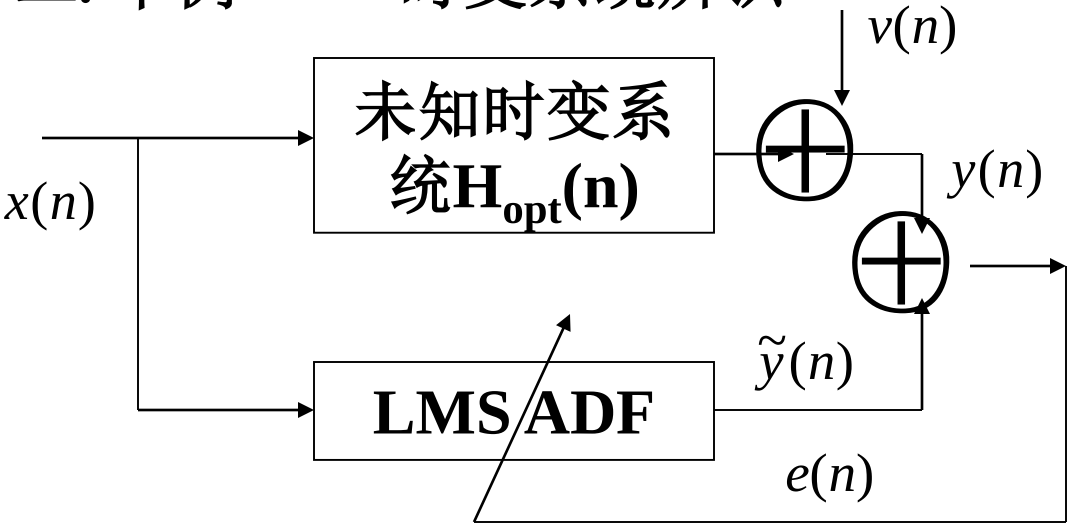
是跟踪误差，由于自适应过程的滞后引起，称为权系数矢量滞后误差.

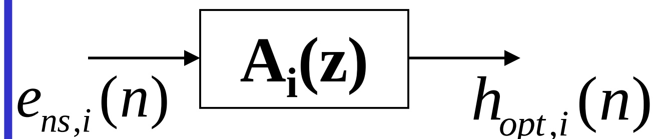
若LMS算法被应用到平稳环境时, $H_{opt}(n)$ 是常数H_{opt}

$$E[H(n)]=H_{opt} \qquad C_2(n)=0$$

即无跟踪误差.

二. 举例 —— 时变系统辨识





$$A_i(z)=\frac{1}{1-\gamma z^{-1}}$$

$\gamma<1$但接近于1

表示只有慢变化成分通过

设：

1) 未知系统的 $\mathbf{H}_{opt}(n)$ 是由一组零均值i.i.d（独立同分布），方差为δ_{ns}^{2} 的随机噪声 $e_{ns,i}(n)$，激励一个一阶低通滤波器模型所产生，有：

$$\mathbf{H}_{opt}(n+1) = \mathbf{H}_{opt}(n) + \mathbf{e}_{ns}(n+1)$$

这里

$$\mathbf{e}_{ns}(n+1) = \begin{bmatrix} e_{ns,0}(n+1) \\ e_{ns,1}(n+1) \\ \cdots \\ e_{ns,N-1}(n+1) \end{bmatrix}$$

2)输入$x(\mathrm{n})$是平稳的，具有零均值，自相关矩阵**R**

3)未知系统输出受白噪声 $\{v_n\}$ 污染（设为0均值，方差 σ_v^2 ），由于该噪声的存在和未知系统的时变性，使AF和未知系统之间匹配存在差别。

$$\boldsymbol{\alpha}(n+1)=\mathbf{Q}^T[\mathbf{H}(n+1)-\mathbf{H}_{opt}]=\mathbf{Q}^T[\mathbf{H}(n)+\delta e(n+1)\mathbf{X}(n+1)-\mathbf{H}_{opt}]$$
$$=\boldsymbol{\alpha}(n)+\delta\mathbf{Q}^T e(n+1)\mathbf{X}(n+1)$$

由于$\mathbf{H}_{opt}(n)$是自适应滤波器跟踪的目标，当

$$\mathbf{H}(n)=\mathbf{H}_{opt}(n)$$

时，则 $J_{\min}=\sigma_v^2$ 而 $y(n)$ 是未知系统的输出，它是时变的。

$$\boxed{\mathbf{H}_{opt}(n+1)=\mathbf{H}_{opt}(n)+\mathbf{e}_{ns}(n+1)}$$

从 $$[\boldsymbol{\alpha}(n+1)]=\mathbf{Q}^T[\mathbf{H}(n+1)-\mathbf{H}_{opt}(n+1)]$$
$$=\mathbf{Q}^T[\mathbf{H}(n)+\delta e(n+1)\mathbf{X}(n+1)-\mathbf{H}_{opt}(n+1)]$$
$$=[\boldsymbol{\alpha}(n)]+\delta\mathbf{Q}^T\mathbf{X}(n+1)e(n+1)\boxed{-\mathbf{Q}^T\mathbf{e}_{ns}(n+1)}$$

和原来相比多了一项$\mathbf{Q}^T\mathbf{e}_{ns}(n+1)$，且$\mathbf{e}_{ns}(n+1)$和其他变量都不相关，因此$E\{[\boldsymbol{\alpha}(n+1)][[\boldsymbol{\alpha}(n+1)]^T\}$中多了一项

$$\mathbf{Q}^T E\{[\mathbf{e}_{ns}(n+1)][\mathbf{e}_{ns}(n+1)]^T\}\mathbf{Q}=\sigma_{ns}^2\mathbf{I}_N$$

$$J(n)=J_{\min}+\sum_{i=0}^{N-1}\lambda_i E[\alpha_i^2(n)]$$

$$E\{[\boldsymbol{\alpha}(n+1)][\boldsymbol{\alpha}(n+1)]^T\}=[\mathbf{I}_N-2\delta diag(\lambda_i)]E\{[\boldsymbol{\alpha}(n)][\boldsymbol{\alpha}(n)]^T\}+$$
$$\delta^2 E[e^2(n+1)]diag(\lambda_i)+\boxed{\sigma_{ns}^2\mathbf{I}_N}$$

$$\boldsymbol{\beta}(n+1)=E[\boldsymbol{\alpha}^2(n+1)]=\mathbf{B}\boldsymbol{\beta}(n)+\delta^2 J_{\min}\boldsymbol{\Lambda}+\boxed{\sigma_{ns}^2\mathbf{I}_N}$$

$$b_{ij}=\begin{cases}(1-\delta\lambda_i)^2 & i=j\\ \delta^2\lambda_i\lambda_j & i\neq j\end{cases}$$

$$\beta_i(n+1)=[1-\delta\lambda_i]^2\beta_i(n)+\delta^2\lambda_i\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{N-1}\lambda_j\beta_j(n)+\delta^2 J_{\min}\lambda_i+\boxed{\sigma_{ns}^2}$$

$n\to\infty$时，忽略 δ^2 项，则近似有：$\beta_i(\infty)=\dfrac{\delta}{2}J_{\min}+\boxed{\dfrac{\sigma_{ns}^2}{2\delta}\lambda_i^{-1}}$

$$\therefore J(\infty)=J_{\min}+\sum_{i=0}^{N-1}\lambda_i\beta_i(\infty)$$
$$=\underbrace{J_{\min}(1+\frac{\delta}{2}N\sigma_x^2)}_{\text{失调误差}}+\underbrace{\boxed{\frac{\sigma_{ns}^2}{2\delta}N}}_{\text{跟踪误差}}$$

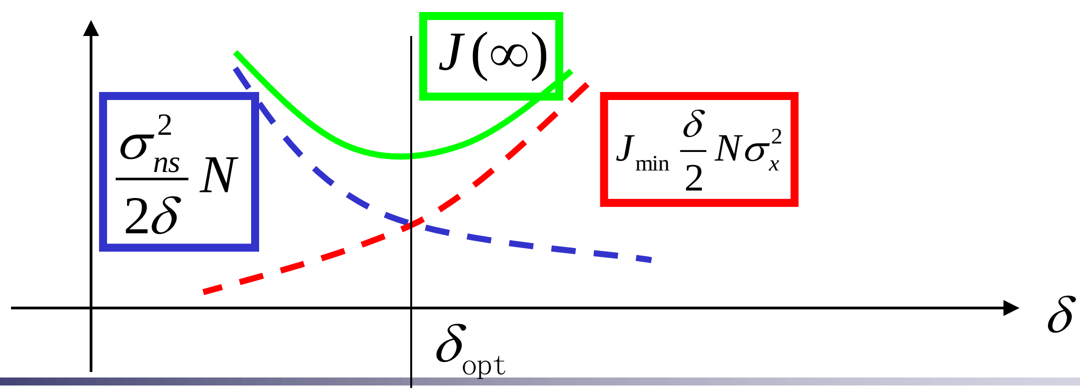
上式简洁地表示出参考信号非平稳时，失调误差和跟踪误差对总误差的贡献。显然这二项误差都与 δ大小有关，但互相制约。

因为一项与 δ 成正比，一项与 δ 成反比，δ 的一种选择是使误差平衡分布。即

$$\frac{\delta}{2}N\sigma_x^2 J_{\min} = \frac{\sigma_{ns}^2}{2\delta}N \qquad \therefore \delta_{opt} = \frac{\sigma_{ns}}{\sigma_x}$$

则 $$J(\infty) = J_{\min}\left(1+\frac{N\sigma_{ns}\sigma_x}{2\sqrt{J_{\min}}}\right)+\frac{N\sigma_{ns}\sigma_x}{2\sqrt{J_{\min}}}\sqrt{J_{\min}}$$

以上模型是相对粗糙的，但是它对更复杂情况下的滤波器的行为给出了很多启示。



$$\tau_e \approx \frac{1}{\delta\sigma_x^2}$$

三. 归一化LMS方法（NLMS）

如果输入信号的一些重要的参数可以实时估计的话，自适应滤波器的性能可以大大改善。

对LMS算法来讲，最重要的参数是输入信号的功率，因为它影响 δ 的大小。如果输入信号的功率可以实时估计的话，则可以采用归一化的LMS算法

$$\mathbf{H}(n+1) = \mathbf{H}(n) + \frac{\Delta}{\sigma_x^2} e(n+1)\mathbf{X}(n+1) \qquad \boxed{\sigma_x^2(n)}$$

此时相当于**step size**为$\delta = \dfrac{\Delta}{\sigma_x^2}$，是在浮动的。

优点是:

- 原来递推式中 δ 是固定值，要考虑到σ_x^2 的变化，即 σ_x^2 最大时 δ 要满足的收敛条件（$\delta < \dfrac{2}{N\sigma_x^2}$），因此，

δ的值不敢取得太大，而归一化后, 等效 δ 在浮动，故 Δ 可取较大值;实际中多数情况下， σ_x^2 小，等效 δ 值也比较大，故收敛快。

•残差：

$$J(\infty) \approx J_{\min}(1+\frac{\delta N\sigma_x^2}{2})$$

$$= J_{\min}(1+\frac{\Delta N}{2})$$

时间常数：$\tau_e \approx \frac{1}{\delta\sigma_x^2} = \frac{1}{\Delta}$

这里 $\delta\sigma_x^2 = \Delta$ 是常数，故归一化的结果，使残差 $J(\infty)$ 和时间常数 τ_e 近似不随信号的性质变化。

σ_x^2的估计:

$$P_x(n) = (1-\alpha)P_x(n-1) + \alpha x^2(n)$$

4.7 级联型FIR梯度自适应滤波器

在某些应用中，跟踪自适应滤波器的传输函数根的情况（是不是在单位圆内）是很重要的。例如，逆系统要实现时，为保证稳定性，根必须在单位园内。因此把滤波器设计成一个二阶**H(z)**的级联会带来方便。

一个二阶FIR滤波器：

$$H_l(z) = 1 + h_{1l} z^{-1} + h_{2l} z^{-2}$$

对实数h_{1l}, h_{2l}，根z_l是复的情况, 有：

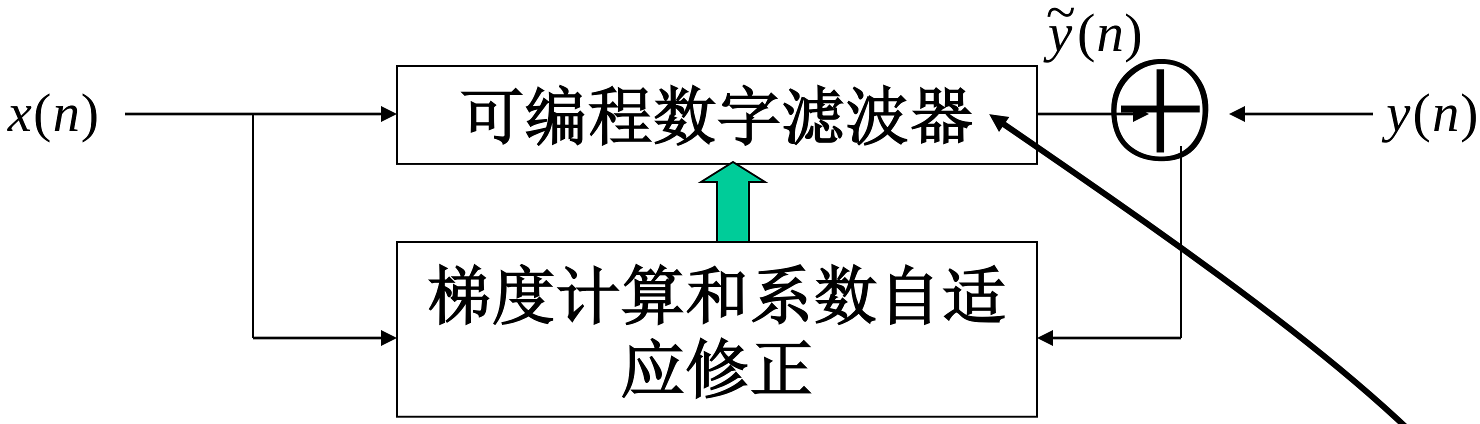
$$z_l = |z_l| e^{\pm j\alpha_l} \quad \text{且} \quad h_{1l} = -2\,\mathrm{Re}(z_l) \quad h_{2l} = |z_l|^2$$

不难证明：

若$|h_{2l}| < 1$满足，　则复根将在单位园内，即 $|z_l| < 1$,

若是实根，x_1, x_2，则要求$|h_{1l}| < 1 + h_{2l}$ 满足, 则有$|x_1| < 1$，$|x_2| < 1$

$$\mathbf{H}=[h_0,h_1,\ldots,h_{N-1}]^T$$



梯度自适应滤波原理框图

$$\mathbf{H}=[h_{11},h_{21},h_{12},h_{22}\ldots,h_{1L},h_{2L}]^T$$

整个滤波器的传递函数 $H(z)=\prod_{l=1}^{L}(1+h_{1l}z^{-1}+h_{2l}z^{-2})$

$$e(n+1)=y(n+1)-\tilde{y}(n+1)$$

$$\frac{\partial e^2(n+1)}{\partial \mathbf{H}(n)}$$

$$H(z)=\prod_{l=1}^{L}(1+h_{1l}z^{-1}+h_{2l}z^{-2})$$

$$x(n) \rightarrow \boxed{\mathbf{H_1(z)}} \rightarrow \boxed{\mathbf{H_2(z)}} \;---\; \boxed{\mathbf{H_L(z)}} \rightarrow \tilde{y}(n)$$

由于级联的关系，误差梯度矢量估计

$$\frac{\partial \tilde{y}(n+1)}{\partial \mathbf{H}(n)} \neq \mathbf{X}(n+1) \text{ 需修正}$$

级联滤波器的输出可以从逆z变换求得：

$$\tilde{y}(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_z z^{(n-1)}\prod_{l=1}^{L}(1+h_{1l}z^{-1}+h_{2l}z^{-2})X(z)dz$$

LMS算法系数修正中用到梯度矢量估计 $\dfrac{\partial e^2(n+1)}{\partial \mathbf{H}(n)}$

$$e(n+1)=y(n+1)-\tilde{y}(n+1)$$

$$\tilde{y}(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_z z^{(n-1)}\prod_{l=1}^{L}(1+h_{1l}z^{-1}+h_{2l}z^{-2})X(z)dz$$

这样 $$\frac{\partial e^2(n+1)}{\partial \mathbf{H}(n)}=2e(n+1)\frac{\partial e(n+1)}{\partial \mathbf{H}(n)}=-2e(n+1)\frac{\partial \tilde{y}(n+1)}{\partial \mathbf{H}(n)}$$

即 $$\frac{\partial e(n+1)}{\partial h_{ki}}=-\frac{\partial \tilde{y}(n+1)}{\partial h_{ki}}\qquad 1\le i\le L\qquad k=1,2$$

$$H(z)=\prod_{l=1}^{L}(1+h_{1l}z^{-1}+h_{2l}z^{-2})$$

变换微积分次序

$$\frac{\partial e(n+1)}{\partial h_{ki}}=-\frac{1}{2\pi j}\oint_z z^{(n+1)-1}z^{-k}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{L}(1+h_{1l}z^{-1}+h_{2l}z^{-2})X(z)dz$$

为简洁表示，令

$$g_{ki}(n+1)=-\frac{\partial e(n+1)}{\partial h_{ki}}=\frac{1}{2\pi j}\oint_z z^n z^{-k}\frac{H(z)}{1+h_{1i}z^{-1}+h_{2i}z^{-2}}X(z)dz$$

得到修正公式： $h_{k,i}(n+1)=h_{k,i}(n)+\delta g_{ki}(n+1)e(n+1)\quad 1\le i\le L\qquad k=1,2$

由前面公式可见，$g_{ki}(n+1)$看成一个滤波器的输出，它的传递函数是两个函数的级联：$H(z)$和 $H_i(z)$ ，而它的输入是信号矢量$\mathbf{X}(n+1)$

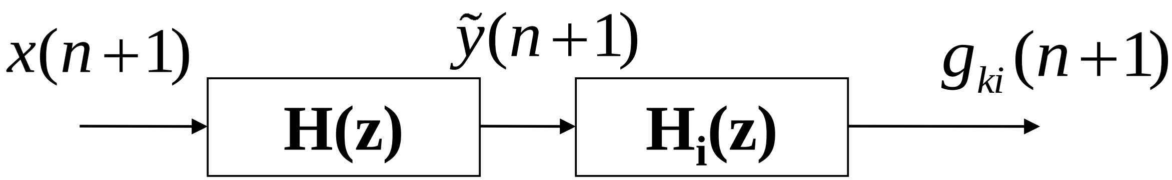
$$g_{ki}(n+1)=\frac{1}{2\pi j}\oint_z\frac{z^{-k}}{1+h_{1i}z^{-1}+h_{2i}z^{-2}}H(z)X(z)z^n dz$$

$$g_{ki}(n+1)=\frac{1}{2\pi j}\oint_z \frac{z^{-k}}{1+h_{1i}z^{-1}+h_{2i}z^{-2}}H(z)X(z)z^n dz$$

$$H(z)=\prod_{l=1}^{L}(1+h_{1l}z^{-1}+h_{2l}z^{-2})$$

$$H_i(z)=\frac{z^{-k}}{(1+h_{1l}z^{-1}+h_{2l}z^{-2})}$$

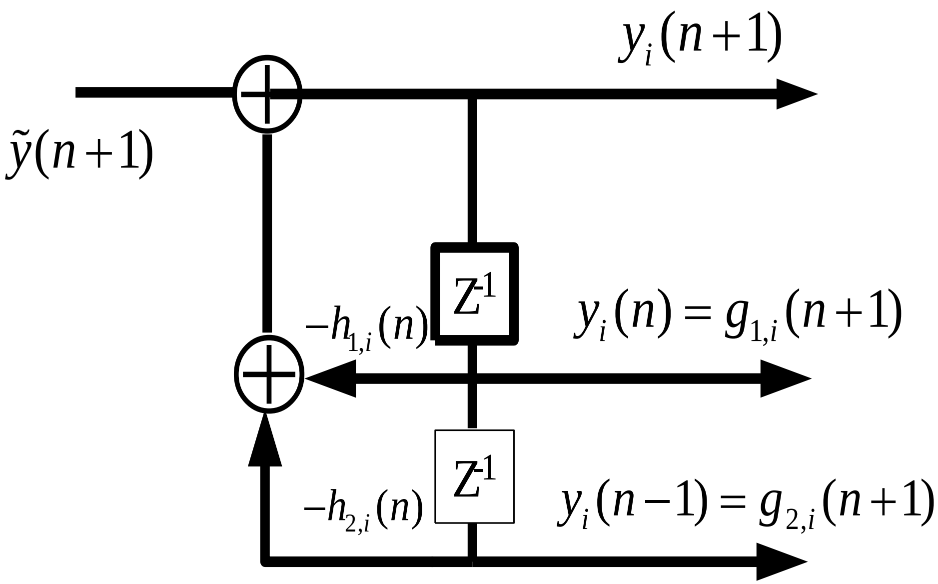
由于 $\tilde{y}(z)=H(z)X(z)$ ，即 $\tilde{y}(n+1)$是$X(n+1)$ 输入到整个滤波器的输出，然后将 $\tilde{y}(n+1)$ 输入到第二个滤波器 $H_i(z)$。$H_i(z)$ 是一个二阶IIR滤波器，它的传递函数是第i节的倒数乘以 z^{-k}。



$$H_i(z)=\frac{z^{-k}}{(1+h_{1l}z^{-1}+h_{2l}z^{-2})}$$

注：这里的 $h_{k,i}$ 均是n时刻的$H(n)$ 的分量

$$y_i(n+1)=\tilde{y}(n+1)-h_{1i}y_i(n)-h_{2i}y_i(n-1)$$



$$Y_i(z)=\frac{\tilde{Y}(z)}{(1+h_{1i}z^{-1}+h_{2i}z^{-2})}$$

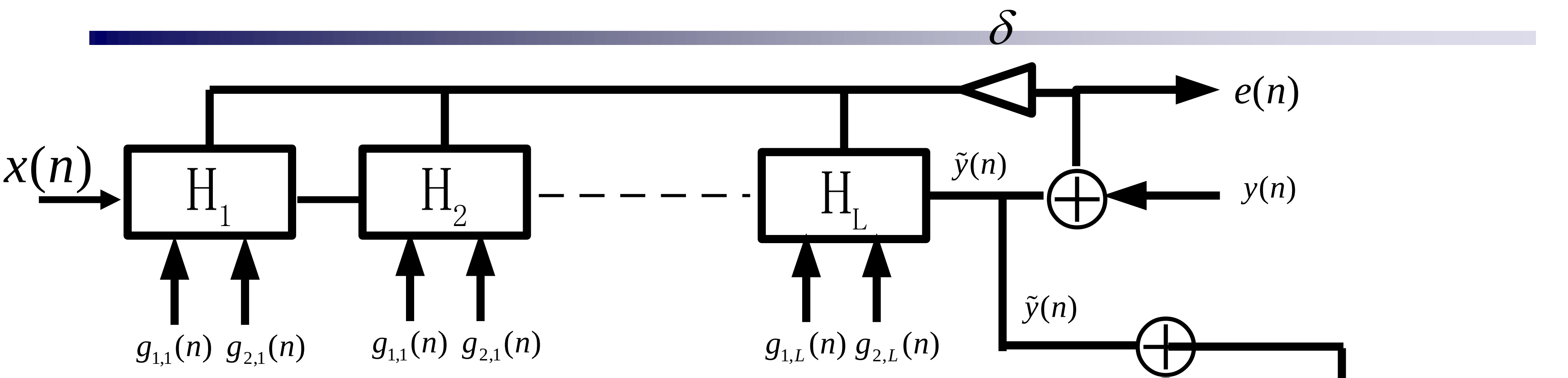
由图中$y_i(n)=g_{1,i}(n+1)$满足

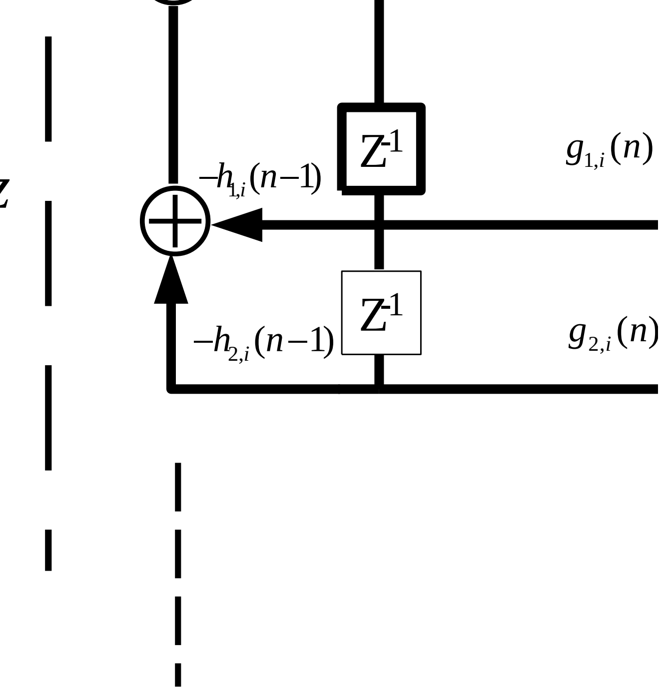
$$\frac{z^{-1}}{(1+h_{1i}z^{-1}+h_{2i}z^{-2})}\quad k=1$$

$y_i(n-1)=g_{2,i}(n+1)$ 满足

$$\frac{z^{-2}}{(1+h_{1i}z^{-1}+h_{2i}z^{-2})}\quad k=2$$

最后我们得到





$$\tilde{y}(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_z z^{(n-1)}\prod_{l=1}^{L}(1+h_{1l}z^{-1}+h_{2l}z^{-2})X(z)dz$$

$$h_{k,i}(n) = h_{k,i}(n-1)+\delta g_{ki}(n)e(n)$$

讨论：

这种滤波器虽然要比一般横向滤波器要复杂，但是它提供了一种简单发现和跟踪根的方法。由于有递归部分存在（指算 $g_{k,i}$ 时），故根应该在Z平面的单位园内，以保证稳定。然而也存在一些实现上的问题：每一节必须具有适当的特性，以保证整个滤波器有效地工作。

4.8 IIR梯度自适应滤波器

一般来讲，IIR滤波器可以用少于FIR的阶数实现所需的性能。所以IIR也是一种重要的滤波器

IIR滤波器输出： $\tilde{y}(n)=\sum_{l=0}^{L} a_l x(n-l)\ +\sum_{k=1}^{K} b_k \tilde{y}(n-k)$

传递函数 $$H(z)=\frac{\sum_{l=0}^{L} a_l z^{-l}}{1-\sum_{k=1}^{K} b_k\ z^{-k}}=\frac{N(z)}{D(z)}$$

对误差梯度矢量的估计，可通过对滤波器输出求导来计算

$$\frac{\partial\hat{y}(n)}{\partial a_l}=x(n-l)+\sum_{k=1}^{K} b_k\frac{\partial\hat{y}(n-k)}{\partial a_l}\quad 0\le l\le L$$

$$\frac{\partial\hat{y}(n)}{\partial b_k}=\hat{y}(n-k)+\sum_{i=1}^{K} b_i\frac{\partial\hat{y}(n-i)}{\partial b_k}\quad 1\le k\le K$$

$$H(z)=\frac{\sum_{l=0}^{L} a_l z^{-l}}{1-\sum_{k=1}^{K} b_k\ z^{-k}}=\frac{N(z)}{D(z)}$$

如前节采用的方法, 因为

$$\widehat{y}(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_z z^{(n-1)}H(z)X(z)dz$$

令

$$\alpha_l(n)=\frac{\partial\widehat{y}(n)}{\partial a_l}=\frac{1}{2\pi j}\oint_z z^{(n-1)}z^{-l}\frac{X(z)}{D(z)}dz$$

$$\beta_k(n)=\frac{\partial\widehat{y}(n)}{\partial b_\mathrm{k}}=\frac{1}{2\pi j}\oint_z z^{(n-1)}z^{-k}\frac{1}{D(z)}\underbrace{H(z)X(z)}_{\tilde{Y}(z)}dz$$

这样梯度矢量估计可以分别将

$x(n)$ 输入到 $\frac{1}{D(z)}$ ，将输出适当延迟 (**l**) 得 $\frac{\partial\widehat{y}(n)}{\partial a_l}$

$\tilde{y}(n)$ 输入到 $\frac{1}{D(z)}$ ，将输出适当延迟 (**k**) 得 $\frac{\partial\widehat{y}(n)}{\partial b_\mathrm{k}}$

$$x(n) \xrightarrow{\dfrac{z^{-l}}{1-\sum_{k=1}^{K} b_k\ z^{-k}}} \alpha_l(n)$$

$$\alpha_l(n) = x(n-l) + \sum_{k=1}^{K} b_k \alpha_l(n-k)$$

$$\widehat{y}(n) \xrightarrow{\dfrac{z^{-k}}{1-\sum_{l=1}^{K} b_l\ \ z^{-l}}} \beta_k(n)$$

$$\beta_k(n) = \tilde{y}(n-k) + \sum_{l=1}^{K} b_l \beta_k(n-l)$$

$$\boxed{\tilde{y}(n) = \sum_{l=0}^{L} a_l x(n-l) \ + \sum_{k=1}^{K} b_k \tilde{y}(n-k)}$$

$$e(n+1) = y(n+1) - [\mathbf{A}^T(n), \mathbf{B}^T(n)]\left[{}^{\mathbf{X}(n+1)}_{\tilde{\mathbf{y}}(n)}\right]$$

式中

$$\mathbf{A}(n) = \begin{bmatrix} a_0(n) \\ a_1(n) \\ \vdots \\ a_L(n) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}(n) = \begin{bmatrix} b_1(n) \\ b2(n) \\ \vdots \\ bK(n) \end{bmatrix}$$

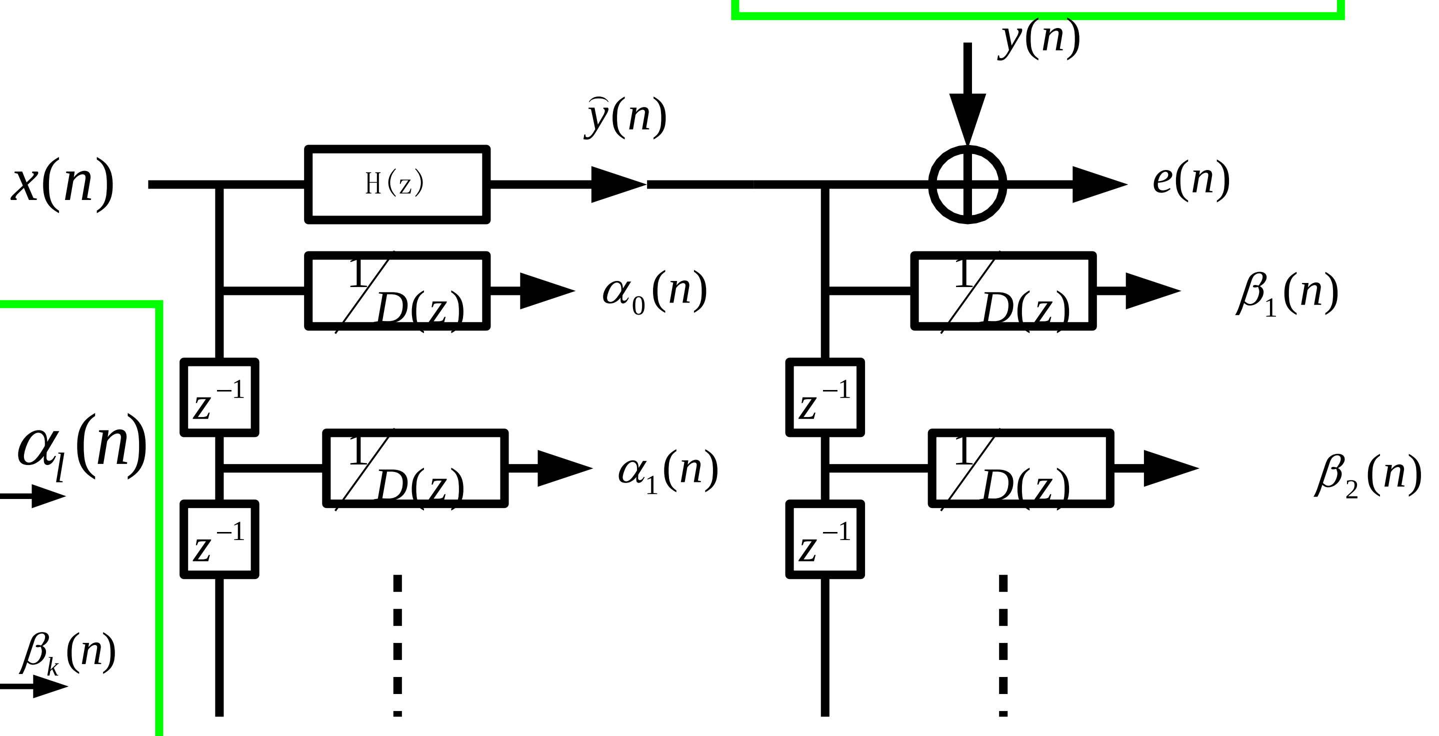
$$\tilde{\mathbf{y}}(n) = \begin{bmatrix} \tilde{y}(n) \\ \tilde{y}(n-1) \\ \vdots \\ \tilde{y}(n-K+1) \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}(n+1) = \begin{bmatrix} x(n+1) \\ x(n) \\ \vdots \\ x(n-L+1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}(n+1)=\mathbf{A}(n)+\delta e(n+1)\boldsymbol{\alpha}(n+1)$$

$$\mathbf{B}(n+1)=\mathbf{B}(n)+\mu e(n+1)\boldsymbol{\beta}(n+1)$$

$$\boldsymbol{\alpha}(n)=\begin{bmatrix}\alpha_0(n)\\ \alpha_1(n)\\ \vdots\\ \alpha_L(n)\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}(n)=\begin{bmatrix}\beta_1(n)\\ \beta_2(n)\\ \vdots\\ \beta_K(n)\end{bmatrix}$$



$$x(n)\rightarrow \boxed{\frac{z^{-l}}{1-\sum_{k=1}^{K} b_k\, z^{-k}}}\rightarrow \alpha_l(n)$$

$$\hat{y}(n)\rightarrow \boxed{\frac{z^{-k}}{1-\sum_{k=1}^{K} b_k\, z^{-k}}}\rightarrow \beta_k(n)$$

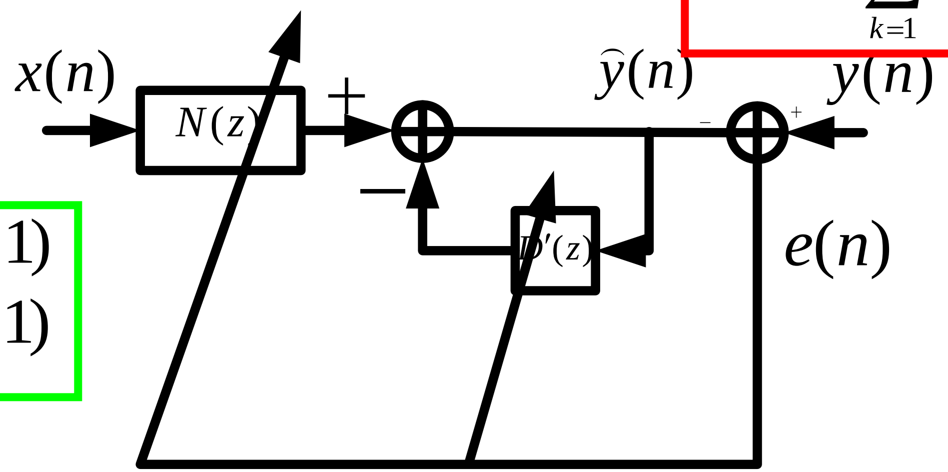
$$\alpha_l(n) = x(n-l) + \sum_{k=1}^{K} b_k \alpha_l(n-l-k)$$

$$\beta_k(n) = \tilde{y}(n-k) + \sum_{l=1}^{K} b_l \beta_k(n-k-l)$$

为了实现简单，忽略 $\alpha_l(n)$和$\beta_k(n)$ 中求和项

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}(n+1) \\ \mathbf{B}(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(n) \\ \mathbf{B}(n) \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} \mathbf{X}(n+1) \\ \tilde{\mathbf{y}}(n) \end{bmatrix} e(n+1)$$

$$D'(z) = \sum_{k=1}^{K} b_k \quad z^{-k}$$



$$\mathbf{A}(n+1) = \mathbf{A}(n) + \delta e(n+1)\boldsymbol{\alpha}(n+1)$$
$$\mathbf{B}(n+1) = \mathbf{B}(n) + \mu e(n+1)\boldsymbol{\beta}(n+1)$$

这称为**并联IIR梯度自适应滤波器**。要分析这样的滤波器不是一件容易的事，因为系统出现了$\tilde{y}(n)$，即最近滤波器输出矢量。

$$\boxed{e(n+1)=y(n+1)-[\mathbf{A}^T(n),\mathbf{B}^T(n)]\begin{bmatrix}\mathbf{X}(n+1)\\ \tilde{\mathbf{y}}(n)\end{bmatrix}}$$

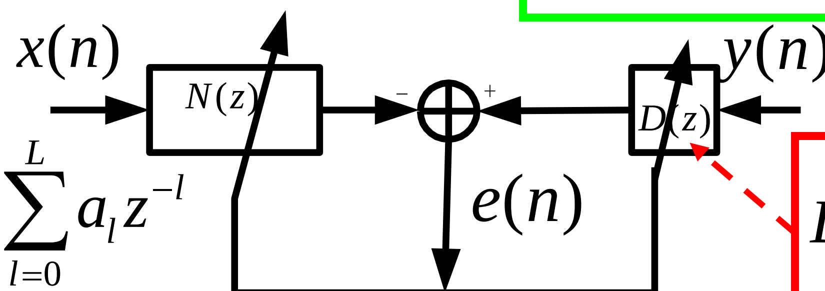
另一种简单的方法，考虑到收敛后误差信号一般较小，$\tilde{y}(n)$接近$y(n)$，因此系统方程中，滤波器输出矢量用参考矢量代替：

$$e(n+1)=y(n+1)-[\mathbf{A}^T(n),\mathbf{B}^T(n)]\begin{bmatrix}\mathbf{X}(n+1)\\ \mathbf{y}(n)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}A(n+1)\\ B(n+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A(n)\\ B(n)\end{bmatrix}+\delta\begin{bmatrix}X(n+1)\\ y(n)\end{bmatrix}e(n+1)$$

$$\boxed{\begin{bmatrix}\mathbf{A}(n+1)\\ \mathbf{B}(n+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}(n)\\ \mathbf{B}(n)\end{bmatrix}+\delta\begin{bmatrix}\mathbf{X}(n+1)\\ \tilde{\mathbf{y}}(n)\end{bmatrix}e(n+1)}$$

此种滤波器称为**串并型：**



$$N(z)=\sum_{l=0}^{L}a_l z^{-l}$$

$$\boxed{D(z)=1-\sum_{k=1}^{K}b_k\ z^{-k}}$$

这种情况下，**只有FIR结构出现**，不存在滤波器的稳定性问题。稳定性和性能分析可以类似以前那样进行。

$$\boxed{e(n+1) = y(n+1) - [\mathbf{A}^T(n), \mathbf{B}^T(n)]\begin{bmatrix}\mathbf{X}(n+1)\\ \mathbf{y}(n)\end{bmatrix}}$$

例：将 $N\sigma_x^2$ 用 $L\sigma_x^2 + K\sigma_y^2$ 代替： $0 < \delta < \dfrac{2}{L\sigma_x^2 + K\sigma_y^2}$

可简单比较并联和串并型的性能，考虑收敛后的递推部分（分母）系数均值:

$$\boxed{\begin{bmatrix}\mathbf{A}(n+1)\\ \mathbf{B}(n+1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{A}(n)\\ \mathbf{B}(n)\end{bmatrix} + \delta\begin{bmatrix}\mathbf{X}(n+1)\\ \tilde{\mathbf{y}}(n)\end{bmatrix}e(n+1)}$$

$$\mathbf{B}_\infty = \lim_{n\to\infty} E[\mathbf{B}(n+1)]$$ $A(n)$是一样的。

并型 $\mathbf{B}(n+1) = \mathbf{B}(n) + \delta\tilde{\mathbf{y}}(n)e(n+1)$

$$= \mathbf{B}(n) + \delta\tilde{\mathbf{y}}(n)[y(n+1) - \mathbf{A}^T(n)\mathbf{X}(n+1) - \tilde{\mathbf{y}}^T(n)\mathbf{B}(n)]$$

$$\therefore \mathbf{B}_\infty = E[\tilde{\mathbf{y}}(n)\tilde{\mathbf{y}}^T(n)]^{-1}E\{\tilde{\mathbf{y}}(n)[y(n+1) - \mathbf{A}^T(n)\mathbf{X}(n+1)]\}$$

串并型产生类似结果，改成 $E[\mathbf{y}(n)\mathbf{y}^T(n)]^{-1}$ $\boxed{e(n+1) = y(n+1) - \tilde{y}(n+1)}$

如果输出误差用一个功率为σ_e^2 白噪声近似。

$$E[\mathbf{y}(n)\mathbf{y}^T(n)] = \sigma_e^2\mathbf{I}_N + E[\tilde{\mathbf{y}}(n)\tilde{\mathbf{y}}^T(n)]$$

$$\boxed{E[\mathbf{y}(n)\mathbf{y}^T(n)] = \sigma_e^2\mathbf{I}_N + E[\tilde{\mathbf{y}}(n)\tilde{\mathbf{y}}^T(n)]}$$

- 因此，串并型中，递归部分系数被引入一个偏量，所以残差要大一些。 $\boxed{\mathbf{B}_\infty = E[\tilde{\mathbf{y}}(n)\tilde{\mathbf{y}}^T(n)]^{-1}E\{\tilde{\mathbf{y}}(n)[y(n+1) - \mathbf{A}^T(n)\mathbf{X}(n+1)]\}}$
- 但是并型中，使用 $\tilde{\mathbf{y}}(n)$ ，$E[\tilde{\mathbf{y}}(n)\tilde{\mathbf{y}}^T(n)]$ 可能是奇异阵，出现稳定性问题。
- 二者自适应速度差不多，特别是对小的step size，二者初始时刻的误差序列几乎相同，都是 $y(n+1)$

注意：还有其他各种结构形式，在应用中，IIR梯度自适应滤波器是一种有吸引力的结构。