第二章　　同态信号处理

2.6 实序列的复倒谱及其性质 (Cepstrum)

- 问题的提出：
  - 实际应用中序列x(n)一般都是实序列，因此有必要研究实序列的复倒谱的计算方法以及与x(n)的某些参数的关系。
  - 研究方法：

$$x'(n) = Z^{-1}\{ln[Z(x(n))]\} = Z^{-1}\{ln[X(z)]\}$$

时移

单位圆内零点

单位圆外零点

放大倍数

单位圆外极点

单位圆内极点

$$X(z) = Az^{r}\frac{\prod_{k=1}^{m_i}(1-a_k z^{-1})\prod_{k=1}^{m_o}(1-b_k z)}{\prod_{k=1}^{p_i}(1-c_k z^{-1})\prod_{k=1}^{p_o}(1-d_k z)},$$

其中：$|a_k|$、$|b_k|$、$|c_k|$和$|d_k|$都小于1

- **求解过程：**

$$X(z)=Az^{r}\frac{\prod_{k=1}^{m_i}(1-a_k z^{-1})\prod_{k=1}^{m_o}(1-b_k z)}{\prod_{k=1}^{p_i}(1-c_k z^{-1})\prod_{k=1}^{p_o}(1-d_k z)}, \qquad x'(n)=Z^{-1}\{\ln[X(z)]\}$$

其中：$|a_k|$、$|b_k|$、$|c_k|$和$|d_k|$都小于1

$$\ln[X(z)]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x'(n)z^{-n}$$

$$=\ln(A)+r\ln(z)+\sum_{k=1}^{m_i}\ln(1-a_k z^{-1})+\sum_{k=1}^{m_o}\ln(1-b_k z)$$

$$-\sum_{k=1}^{p_i}\ln(1-c_k z^{-1})-\sum_{k=1}^{p_o}\ln(1-d_k z)$$

$$x'(n) = Z^{-1}\{\ln[Z(x(n)]\}$$

$$X(z) = Az^{r}\frac{\prod_{k=1}^{m_i}(1-a_k z^{-1})\prod_{k=1}^{m_o}(1-b_k z)}{\prod_{k=1}^{p_i}(1-c_k z^{-1})\prod_{k=1}^{p_o}(1-d_k z)},$$

其中:$|a_k|$、$|b_k|$、$|c_k|$和$|d_k|$都小于1

- 忽略z^r项作用

$$X(z) = A\frac{\prod_{k=1}^{m_i}(1-a_k z^{-1})\prod_{k=1}^{m_o}(1-b_k z)}{\prod_{k=1}^{p_i}(1-c_k z^{-1})\prod_{k=1}^{p_o}(1-d_k z)},$$

其中:$|a_k|$、$|b_k|$、$|c_k|$和$|d_k|$都小于1;

同时假定$A>0$。

$$\ln[X(z)] = \ln(A) + \sum_{k=1}^{m_i} \ln(1 - a_k z^{-1}) + \sum_{k=1}^{m_o} \ln(1 - b_k z) - \sum_{k=1}^{p_i} \ln(1 - c_k z^{-1}) - \sum_{k=1}^{p_o} \ln(1 - d_k z)$$

$$Z^{-1}\{\ln(A)\} = \ln(A)\delta(n)$$

$$\ln(1 - x) = 0 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\ln(1 - a_k z^{-1}) = 0 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(a_k z^{-1})^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-\frac{a_k^n}{n}) z^{-n}$$

$$\ln(1 - b_k z) = 0 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(b_k z)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-\frac{b_k^n}{n}) z^{n}$$

$$\ln(1 - c_k z^{-1}) = 0 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(c_k z^{-1})^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-\frac{c_k^n}{n}) z^{-n}$$

$$\ln(1 - d_k z) = 0 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(d_k z)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-\frac{d_k^n}{n}) z^{n}$$

$$X(z)=A\frac{\prod_{k=1}^{m_i}(1-a_k z^{-1})\prod_{k=1}^{m_o}(1-b_k z)}{\prod_{k=1}^{p_i}(1-c_k z^{-1})\prod_{k=1}^{p_o}(1-d_k z)},$$

其中：$|a_k|$、$|b_k|$、$|c_k|$和$|d_k|$都小于1;

同时假定$A>0$。

- 结果：

$$x'(n)=\begin{cases}\ln(A), & n=0\\ -\sum_{k=1}^{m_i}\frac{a_k^n}{n}+\sum_{k=1}^{p_i}\frac{c_k^n}{n}, & n>0\\ \sum_{k=1}^{m_o}\frac{b_k^{-n}}{n}-\sum_{k=1}^{p_o}\frac{d_k^{-n}}{n}, & n<0\end{cases}$$

$$X(z)=A\frac{\prod_{k=1}^{m_i}(1-a_k z^{-1})\prod_{k=1}^{m_o}(1-b_k z)}{\prod_{k=1}^{p_i}(1-c_k z^{-1})\prod_{k=1}^{p_o}(1-d_k z)},$$

其中：$|a_k|$、$|b_k|$、$|c_k|$和$|d_k|$都小于1;
同时假定$A>0$。

$$x'(n)=\begin{cases}\ln(A), & n=0\\ -\sum_{k=1}^{m_i}\frac{a_k^n}{n}+\sum_{k=1}^{p_i}\frac{c_k^n}{n}, & n>0\\ \sum_{k=1}^{m_o}\frac{b_k^{-n}}{n}-\sum_{k=1}^{p_o}\frac{d_k^{-n}}{n}, & n<0\end{cases}$$

- **性质1：若x(n)为实序列，x’(n)也为是实序列**

根据实序列的Z变换的性质，零、极点若是复数总是共轭出现。

- **性质2：若x(n)为最小相位序列，则x’(n)为因果序列。**
- **性质3：若x(n)为最大相位序列，则x’(n)为非因果序列。**

$$x'(n) = Z^{-1}\{\ln[Z(x(n))]\}$$

$$x'(n) = \begin{cases} \ln(A), & n = 0 \\ -\sum_{k=1}^{m_i} \frac{a_k^n}{n} + \sum_{k=1}^{p_i} \frac{c_k^n}{n}, & n > 0 \\ \sum_{k=1}^{m_o} \frac{b_k^{-n}}{n} - \sum_{k=1}^{p_o} \frac{d_k^{-n}}{n}, & n < 0 \end{cases}$$

- 性质4：即使x(n)为有限长的时间序列，x’(n)也总是无限长的时间序列。
- 性质5：复倒谱的衰减速度很快，至少是以1/|n|的速度衰减。
- 性质6：间隔为N_p的冲激序列的复倒谱仍然是一个间隔为N_p冲激序列。

$$\mathrm{x(n)} = \sum_{k=-(M-1)}^{(M-1)} \alpha_k \delta(n - kN_p)$$

$$\boxed{\ln(1-x) = 0 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}}$$

$$X(z) = \sum_{k=-(M-1)}^{(M-1)} \alpha_k z^{-kN_p} = \prod_k (1 - u_k z^{-N_p}) \prod_k (1 - v_k z^{N_p}), |u_k| < 1, |v_k| < 1$$

$$X'(z) = \ln X(z) = \sum_k \ln(1 - u_k z^{-N_p}) + \sum_k \ln(1 - v_k z^{N_p})$$

$$X'(z) = \sum_k \sum_{n=1}^{\infty} [-\frac{(u_k)^n}{n} z^{-nN_p}] + \sum_k \sum_{n=1}^{\infty} [-\frac{(v_k)^n}{n} z^{nN_p}]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n z^{-nN_p} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^{nN_p}$$

$$x'(n) = \sum_{r=1}^{\infty} \beta_n \delta(n - rN_p) + \sum_{r=-\infty}^{-1} \gamma_n \delta(n - rN_p)$$

间隔为$\mathbf{N_p}$的冲激序列的复倒谱仍然是一个间隔为$\mathbf{N_p}$的冲激序列。

同态信号处理的应用：

- 利用卷积同态系统处理：

$$x(n)=s(n)+\alpha s(n-n_0)=s(n) * h(n)$$

运算*的特征系统

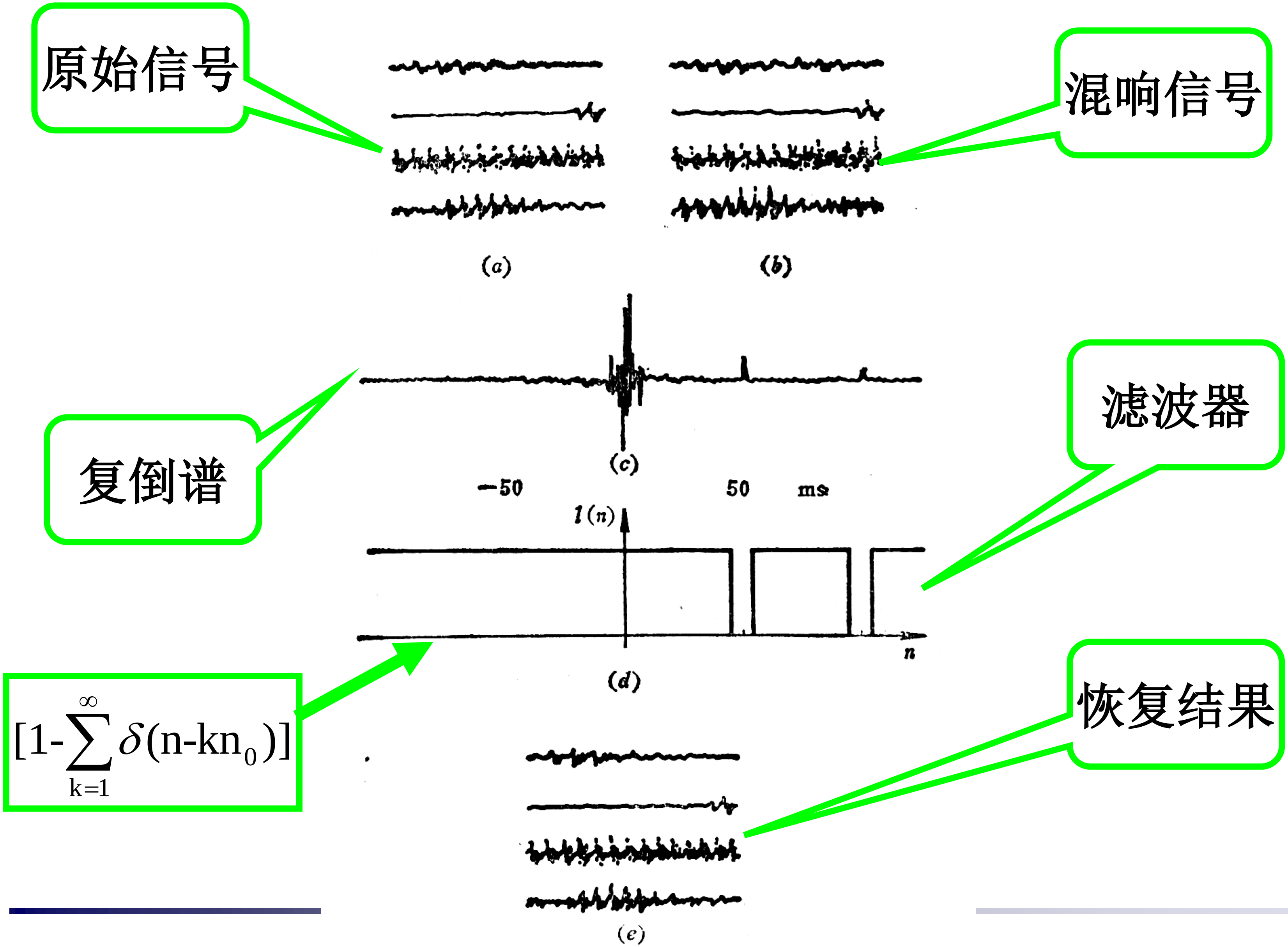
$$X(z)=S(z)\times H(z)=S(z)\,[1+\alpha z^{-n_0}]$$

$$X'(z)=\ln[X(z)]=\ln[S(z)]+\ln[1+\alpha z^{-n_0}]$$

$$x'(n)=s'(n)+h'(n)$$

$$h'(n)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\dfrac{\alpha^k}{k}\delta(n-kn_0), & n>0\\ 0, & n\le 0\end{cases}$$

$$y'(n)=L[x'(n)]=x'(n)\times[1-\sum_{k=1}^{\infty}\delta(n-kn_0)]$$


原始信号
混响信号
(a)
(b)
复倒谱
(c)
滤波器
−50
50
ms
l(n)
n
(d)
$[1-\sum_{k=1}^{\infty}\delta(n-kn_0)]$
恢复结果
(e)

2.7 实序列的复倒谱计算方法

- 问题的提出：
  - 怎样快速准确地计算复倒谱**x'(n) = Z^{-1}{*ln*[Z(x(n))]}**？

$$x'(n)=\begin{cases}\ln(A), & n=0\\ -\sum_{k=1}^{m_i}\frac{a_k^n}{n}+\sum_{k=1}^{p_i}\frac{c_k^n}{n}, & n>0\\ \sum_{k=1}^{m_o}\frac{b_k^{-n}}{n}-\sum_{k=1}^{p_o}\frac{d_k^{-n}}{n}, & n<0\end{cases}$$

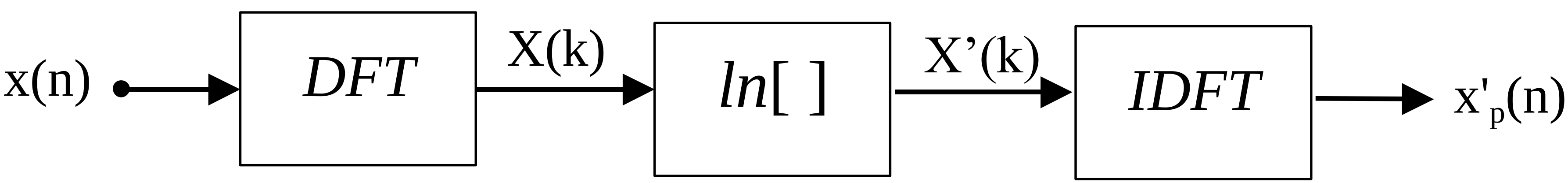
- 研究两种情况下复倒谱的计算方法：
  - 一般情况下。
  - **x(n)**为最小相位序列或最大相位序列的情况下。

一般情况下复倒谱的计算方法：

- 方法1：按复倒谱的定义计算
  - 基本原理：

$$x'(n) = Z^{-1}\{ln[Z(x(n))]\}$$

$$x'(n) = IDFT\{ln[DFT(x(n))]\}$$



$x'_p(n) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x'(n+rN)$， 其中：$N$为计算$FFT$所取的点数，要取足够大以避免混淆失真。

一般情况下复倒谱的计算方法：

- 方法2：复对数求导数计算法
  - 基本思想：利用Z变换的微分性质以及对数函数的导数性质避免计算复对数的困难。
    - $X'(z) = ln[X(z)]$，求$X'(z)$的反变换的主要困难是复对数运算的存在。
    - Z变换的微分性质：$-z\,dX(z)/dz = Z[nx(n)]$。
    - $d\,ln(x)/dx = 1/x$

一般情况下复倒谱的计算方法：

- 主要原理：

$-z\,dX(z)/dz = Z[nx(n)]$。

$$X'(z) = ln[X(z)]$$

$$\frac{d\,X'(z)}{d\,z} = \frac{d\,ln[X(z)]}{d\,z} = \frac{1}{X(z)}\frac{d\,X(z)}{d\,z}$$

$$nx'(n) = Z^{-1}\{-\frac{z}{X(z)}\frac{d\,X(z)}{d\,z}\}$$

$$nx'(n) = F^{-1}\{-\frac{e^{j\omega}}{X(e^{j\omega})}\frac{dX(e^{j\omega})}{de^{j\omega}}\} = F^{-1}\{-\frac{1}{jX(e^{j\omega})}\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}\}$$

$$x'(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[X'_r(e^{j\omega}) + jX'_i(e^{j\omega})]d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|X(e^{j\omega})|d\omega$$

- 性质1：若x(n)为实序列，x’(n)也是实序列

$$nx'(n) = F^{-1}\{-\frac{1}{jX(e^{j\omega})}\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}\}$$

一般情况下复倒谱的计算方法：

- 实际计算方法：

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\frac{dX(k)}{dk} = -j\frac{2\pi}{N}\sum_{n=0}^{N-1} nx(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$x'(n) = -\frac{1}{j2\pi n}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{X(k)}\frac{dX(k)}{dk}e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad 1 \le n \le N-1$$

$$x'(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|X(e^{j\omega})|d\omega \Rightarrow x'(0) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\ln|X(k)|$$

与第一种方法相比，混叠失真加重，因此这种算法虽然避免了计算复对数问题，但导致了更严重的混叠失真。

最小相位条件下复倒谱的计算方法：

- 方法1：利用最小相位条件简化基于定义的复倒谱计算方法
  - 基本思想：利用最小相位条件避免对复对数的计算。
    - 原理1：任何实序列x(n)都可分解为奇序列$x_o(n)$和偶序列$x_e(n)$，同时$X_r(jw)$与$x_e(n)$构成傅立叶变换对，而$jX_i(jw)$与$x_o(n)$构成傅立叶

偶，实

奇，虚

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n) \qquad X(j\omega) = X_r(j\omega) + jX_i(j\omega)$$

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)] \qquad X_r(j\omega) = F\{x_e(n)\}$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)] \qquad jX_i(j\omega) = F\{x_o(n)\}$$

最小相位条件下复倒谱的计算方法：

- 原理2：因果实序列x(n)可由偶序列恢复出来。

$$x(n)=0,\quad n<0$$

$$x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x(-n)]$$

$$x(n)=\begin{cases}2x_e(n), & n>0\\ x_e(n), & n=0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

最小相位条件下复倒谱的计算方法：

- 计算原理：最小相位条件下复倒谱**x’(n)**为因果实序列，故可由其偶序列完全决定，也就是由其傅立叶变换的实部完全决定。

$$X'(j\omega)=\ln[X(j\omega)]=\ln|X(j\omega)|+j\arg[X(j\omega)]$$

$$x'_e(n)=F^{-1}\{\ln|X(j\omega)|\}$$

$$x'_e(n)=\frac{1}{2}[x'(n)+x'(-n)]$$

$$x'(n)=\begin{cases}2x'_e(n), & n>0\\ x'_e(n), & n=0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

$$\boxed{\ln|X(j\omega)| \quad \Rightarrow \quad x'_e(n) \quad \Rightarrow \quad x'(n)}$$

最小相位条件下复倒谱的计算方法：

- 具体方法：

$$\boxed{\ln|X(j\omega)| \quad \Rightarrow \quad x'_e(n) \quad \Rightarrow \quad x'(n)}$$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn},$$ N取足够大,减少混叠的影响。

$$X'_r(k)=\ln|X(k)|$$

$$x'_e(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X'_r(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

由于复倒谱是无限长的，用**DFT**计算会产生混叠失真，因此**N**应取得足够大。

$$x'(n)=\begin{cases}2x'_e(n), & 1\le n<N/2\\ x'_e(n), & n=0,\ n=N/2\\ 0, & N/2<n\le N-1\end{cases}$$

最小相位条件下复倒谱的计算方法：

- 方法**2**：递推计算方法
  - 基本思想：
    - 利用复对数求导数计算法中得到的关系式，并利用**x(n)**和**x'(n)**都为因果序列进行化简，以得到**x'(n)**的递推关系式。

$$\frac{dX'(z)}{dz} = \frac{1}{X(z)} \frac{dX(z)}{dz}$$

$$Z^{-1}\left\{-z\frac{dX(z)}{dz}\right\} = nx(n)$$

最小相位条件下复倒谱的计算方法：

- 求解过程：

$$\frac{dX'(z)}{dz} = \frac{1}{X(z)} \frac{dX(z)}{dz}$$

$$X(z)\{-z\frac{dX'(z)}{dz}\} = -z\frac{dX(z)}{dz}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} kx'(k)x(n-k) = nx(n)$$

$$x(n) = x'(n) = 0, \quad n < 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} kx'(k)x(n-k) = nx(n)$$

最小相位条件下复倒谱的计算方法：

$$\sum_{k=0}^{n} kx'(k)x(n-k) = nx(n)$$

$$\boxed{x'(n) = \begin{cases} \ln(A), & n=0 \\ -\sum_{k=1}^{m_i} \frac{a_k^n}{n} + \sum_{k=1}^{p_i} \frac{c_k^n}{n}, & n>0 \end{cases}}$$

$$nx'(n)x(0) + \sum_{k=0}^{n-1} kx'(k)x(n-k) = nx(n)$$

$$\boxed{x'(n) = \frac{x(n)}{x(0)} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{nx(0)} x'(k)x(n-k) \quad , \quad n \neq 0}$$

$$X(z) = |A| \frac{\prod_{k=1}^{m_i} (1-a_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{p_i} (1-c_k z^{-1})}$$

$$x(0) = \lim_{z \to +\infty} X(z) = |A|$$

$$\boxed{x'(0) = \ln|A| = \ln[x(0)]}$$

总结：

- 通过分析乘性组合信号和卷积组合信号的分离问题，引出了同态系统的概念，所谓同态系统是符合广义叠加原理的系统。
- 具体介绍了两种类型的同态系统：乘法同态系统和卷积同态系统。
- 介绍了卷积同态系统中的复倒谱的性质以及计算方法。