第二章　同态信号处理

2.1　引言

问题的提出：

- 加性组合信号：

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n)$$

$$X(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega)$$

- 加性组合信号的分离方法：
  - 线性滤波器
  - 维纳滤波器或卡尔曼滤波器

问题的提出：

乘性组合信号：

$x(n) = x_1(n) \times x_2(n)$

- 实际应用中存在不是加性组合的信号：
  - 例子1：图象的模型

$$x(u, v) = x_i(u, v) \times x_r(u, v)$$

其中：

$x(u, v)$：图象信号

$x_i(u, v)$：照度图

$x_r(u, v)$：反射图

问题的提出：

卷积组合信号：

$x(n) = x_1(n)*x_2(n)$

- **例子2：混响环境中的声音信号**

$$x(n) = s(n) + \sum_{k=1}^{M} \alpha_k s(n - n_k) = s(n) * h(n)$$

其中：

$$h(n) = \delta(n) + \sum_{k=1}^{M} \alpha_k \delta(n - n_k)$$

$x(n)$: 得到的声音信号

$s(n)$: 真实的声音信号

n_k: 第k个回波信号相对于真实信号的时延

α_k: 第k个回波信号的反射系数

问题的提出：

- 分离非加性信号的意义：
  - 对图象信号要压缩照度图的动态范围，同时拉伸反射图的动态范围。

$$x(u,\ v) = x_i(u,\ v) \times x_r(u,\ v)$$

  - 对混响环境中的声音信号要恢复出真实的声音信号。

$$x(n) = s(n) + \sum_{k=1}^{M} \alpha_k s(n - n_k) = s(n) * h(n)$$

问题的提出：

- 问题：
  - 怎样分离非加性组合的信号？
- 分离非加性组合信号的可能方法：
  - 根据问题特性寻找新的方法。
  - 将非加性组合信号转化为加性组合信号，用加性组合信号的分离方法处理后再转化为原来的信号。
- 研究代表性的问题：
  - 分离乘性组合信号：$x(n) = x_1(n) \times x_2(n)$
  - 分离卷积组合信号：$x(n) = x_1(n) * x_2(n)$

问题的分析：

- 乘性组合信号转化为加性组合信号的可能性： $x(n)=x_1(n)\times x_2(n)$

$$\ln[x(n)]=\ln[x_1(n)]+\ln[x_2(n)]$$

$$L\{\ln[x(n)]\}=L\{\ln[x_1(n)]\}+L\{\ln[x_2(n)]\}$$

$$x_1'(n)=\exp\{L[\ln[x_1(n)]]\}$$

$$x_2'(n)=\exp\{L[\ln[x_2(n)]]\}$$

问题的分析：

- 卷积组合信号转化为加性组合信号的可能性：$x(n)=x_1(n)*x_2(n)$ $X(z)=X_1(z)\times X_2(z)$

$$\ln[X(z)]=\ln[X_1(z)]+\ln[X_2(z)]$$

$$Z^{-1}\{\ln[X(z)]\}=Z^{-1}\{\ln[X_1(z)]\}+Z^{-1}\{\ln[X_2(z)]\}$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{x}(n)=\widehat{x}_1(n)+\widehat{x}_2(n)$$

$$L\{\widehat{x}(n)\}=L\{\widehat{x}_1(n)\}+L\{\widehat{x}_2(n)\}$$

$$x_1'(n)=Z^{-1}\{\exp\{Z[L[\hat{x}_1(n)]]\}\}$$

$$x_2'(n)=Z^{-1}\{\exp\{Z[L[\hat{x}_2(n)]]\}\}$$

问题的分析：

- 综合乘性组合信号和卷积组合信号的分离方法：

$$x(n) = x_1(n) \times x_2(n)$$

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n)$$

$$\mathit{ln}[x(n)] = \mathit{ln}[x_1(n)] + \mathit{ln}[x_2(n)]$$

$$\mathit{ln}[X(z)] = \mathit{ln}[X_1(z)] + \mathit{ln}[X_2(z)]$$

$$\Rightarrow \quad \hat{x}(n) = \hat{x}_1(n) + \hat{x}_2(n)$$

$$L\{\mathit{ln}[x(n)]\} = L\{\mathit{ln}[x_1(n)]\} + L\{\mathit{ln}[x_2(n)]\}$$

$$L\{\hat{x}(n)\} = L\{\hat{x}_1(n)\} + L\{\hat{x}_2(n)\}$$

$$x_1(n) = \mathit{exp}\{\mathit{ln}[x_1(n)]\}$$

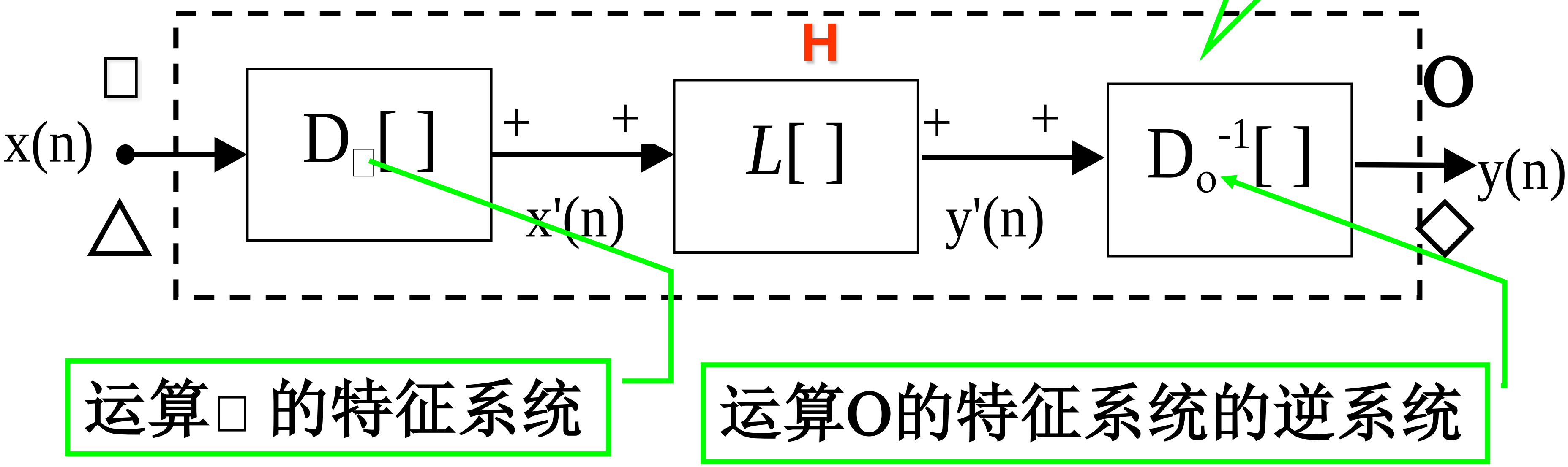
$$x_1(n) = Z^{-1}\{\mathit{exp}\{Z[\hat{x}_1(n)]\}\}$$

2.2 同态信号处理的规范形式和广义叠加原理

同态信号处理的基本概念：

- 同态系统的规范形式：

$$x(n) = [C1 \triangle x_1(n)] \square [C2 \triangle x_2(n)]$$



$D_{\square}[x(n)] = D_{\square}[\ x_1(n) \square x_2(n)\ ] = D_{\square}[\ x_1(n)] + D_{\square}[\ x_2(n)] = x_1'(n) + x_2'(n)$

$y'(n) = L[x'(n)] = L[x_1'(n) + x_2'(n)] = L[x_1'(n)] + L[x_2'(n)] = y_1'(n) + y_2'(n)$

$y(n) = D_o^{-1}[y'(n)] = D_o^{-1}[y_1'(n) + y_2'(n)] = D_o^{-1}[y_1'(n)]\ \mathrm{O}\ D_o^{-1}[y_2'(n)]$

- 广义叠加原理：
  - 线性系统：

$$L[x_1(n)+x_2(n)]=L[x_1(n)]+L[x_2(n)]$$

$$L[c\times x(n)]=c\times L[x(n)]\text{，}\ c\text{为一常数}$$

  - 定义：满足以下条件的系统***H***称之为符合广义叠加原理：

$$\boldsymbol{H}[x_1(n)\ \square\ x_2(n)] = \boldsymbol{H}[x_1(n)]\ \mathrm{O}\ \boldsymbol{H}[x_2(n)]$$

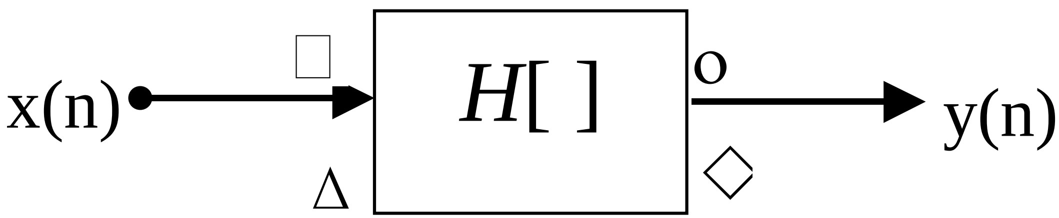
$$\boldsymbol{H}[c\triangle x(n)] = c\ \diamond\ \boldsymbol{H}[x(n)]$$

$H[x_1(n) \,\square\, x_2(n)] = H[x_1(n)] \,\mathrm{O}\, H[x_2(n)]$

$H[c \triangle x(n)] = c \diamond H[x(n)]$

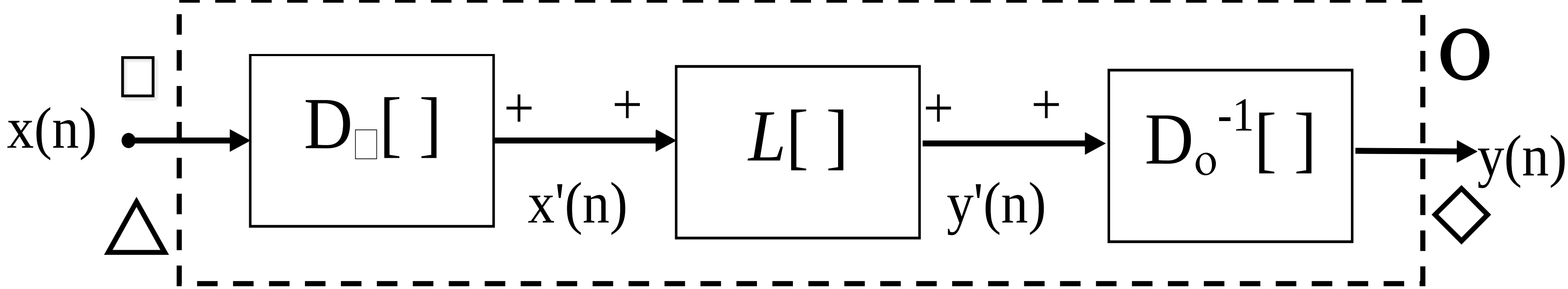
同态信号处理的基本概念：

- 同态系统：
  - 满足广义叠加原理的系统即为*同态系统*，其一般表示形式为：



  - 注意：***H***中运算□的特征系统和运算O的特征系统的逆系统必须是一一映射的。

2.3 乘法同态系统



- 乘性组合信号的一般形式：

$$x(n) = [x_1(n)]^{\alpha} \times [x_2(n)]^{\beta}$$

□：乘法运算

△：指数运算

- 运算 的特征系统$D_{\times}[\ ]$：复对数

$$ln[x(n)] = \alpha ln[x_1(n)] + \beta ln[x_2(n)]$$

$$L\{ln[x(n)]\} = L\{\alpha ln[x_1(n)]\} + L\{\beta ln[x_2(n)]\}$$

- 运算O的特征系统的逆系统$D_{\times}^{-1}[\ ]$：复指数

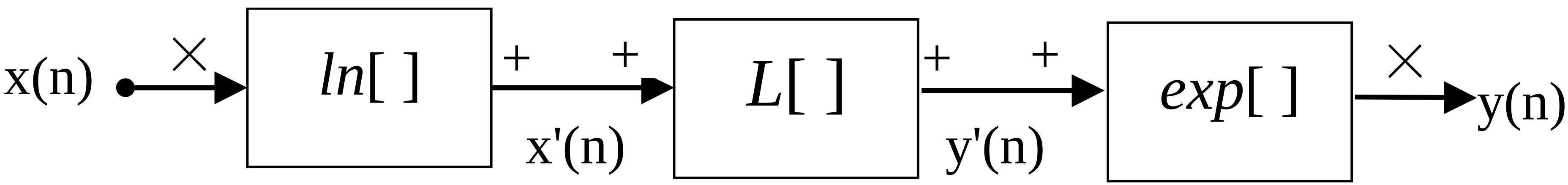
O：乘法运算

◇：指数运算

$H[x_1(n) \square x_2(n)] = H[x_1(n)] \circ H[x_2(n)]$ $H[c \triangle x(n)] = c \diamond H[x(n)]$

乘法同态系统：

- 乘法同态系统的一般形式：



$x(n) = [x_1(n)]^{\alpha} \times [x_2(n)]^{\beta}$

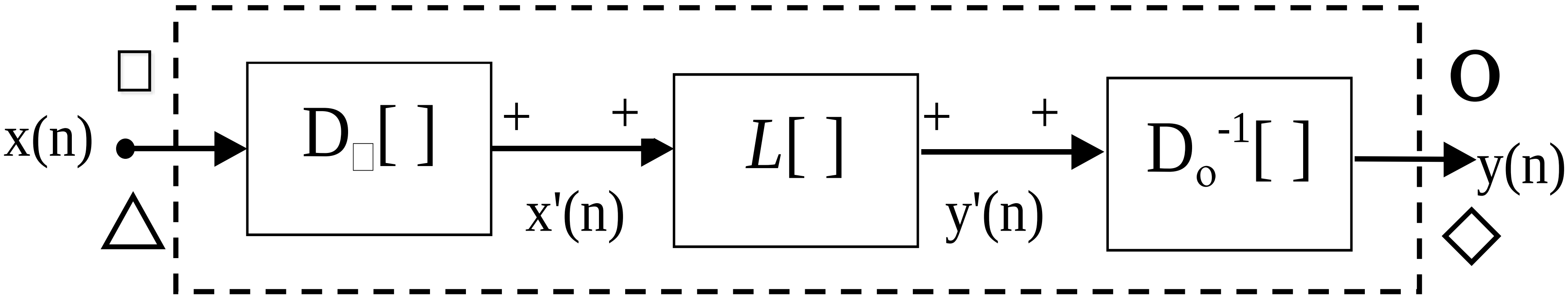
$x'(n) = \ln[x(n)] = \alpha \ln[x_1(n)] + \beta \ln[x_2(n)] = \alpha\, x'_1(n) + \beta\, x'_2(n)$

$y'(n) = L\{x'(n)\} = \alpha L\{x'_1(n)\} + \beta L\{x'_2(n)\} = \alpha y'_1(n) + \beta y'_2(n)$

$y(n) = \exp\{y'(n)\} = \exp[\alpha y'_1(n) + \beta y'_2(n)] = [y_1(n)]^{\alpha} \times [y_2(n)]^{\beta}$

$y_1(n) = \exp[y'_1(n)]$, $y_2(n) = \exp[y'_2(n)]$

2.4 卷积同态系统

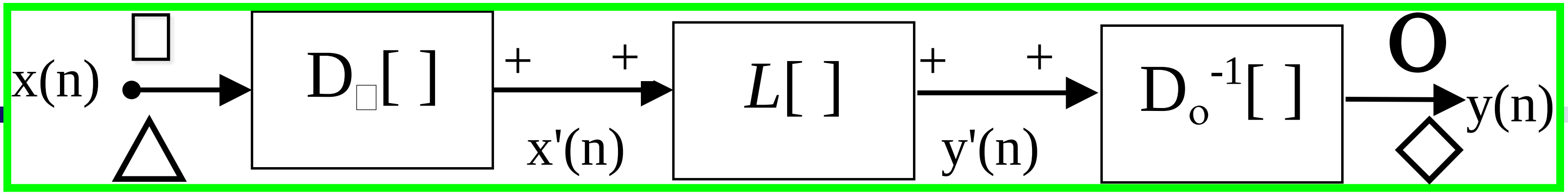


- 卷积组合信号的一般形式：

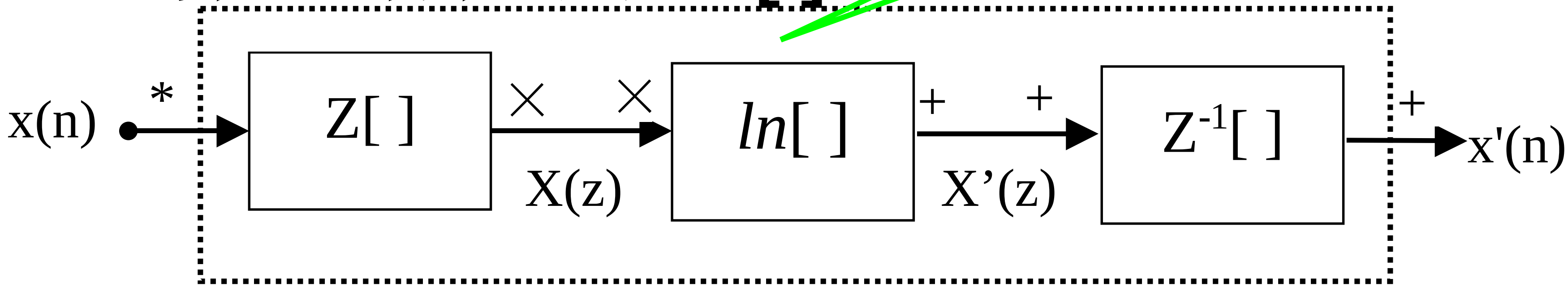
$$x(n) = x_1(n) * x_2(n)$$

□：卷积运算— “*”

O：卷积运算— “*”

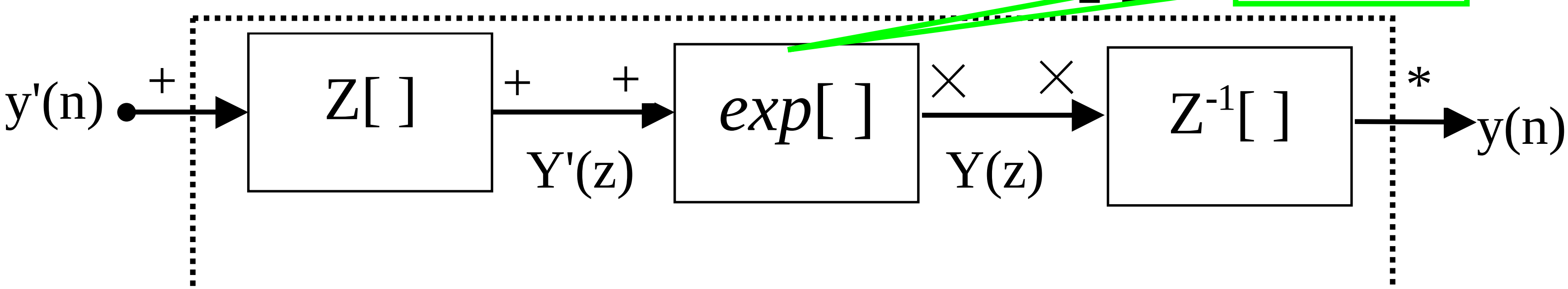


- 运算□的特征系统$D_*[\ ]$:



$$x'(n) = Z^{-1}\{ln[Z(x(n)]\} = Z^{-1}\{ln[X_1(z)]\} + Z^{-1}\{ln[X_2(z)]\} = x'_1(n) + x'_2(n)$$

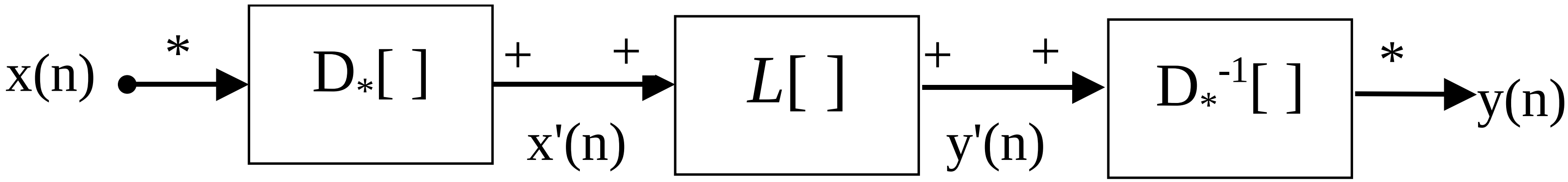
- 运算O的特征系统的逆系统$D_*^{-1}[\ ]$:



$$y(n) = Z^{-1}\{exp[Z(y'(n)]\} = Z^{-1}\{exp[Y_1'(z)] \times exp[Y_2'(z)]\} = y_1(n) * y_2(n)$$

$H[x_1(n) \,\square\, x_2(n)] = H[x_1(n)] \,\mathrm{O}\, H[x_2(n)]$ $H[c \triangle x(n)] = c \diamond H[x(n)]$

- **卷积同态系统的一般形式：**



$$x(n) = x_1(n) * x_2(n)$$

$$x'(n) = Z^{-1}\{\ln[Z(x(n)]\} = Z^{-1}\{\ln[X_1(z)]\} + Z^{-1}\{\ln[X_2(z)]\} = x'_1(n) + x'_2(n)$$

复倒谱

$$y'(n) = L\{x'_1(n) + x'_2(n)\} = y'_1(n) + y'_2(n)$$

$$y(n) = Z^{-1}\{\exp[Z(y'(n))]\} = y_1(n) * y_2(n)$$

同态信号处理的应用：

- 图象的同态处理（乘法同态系统）：
  - 问题的提出：对于图象信号，怎样压缩照度图的动态范围，同时拉伸反射图提高对比度，以改善图象的质量？

$$x(m,\ n) = x_i(m,\ n) \times x_r(m,\ n)$$

其中：

$x(m,\ n)$：图象信号

$x_i(m,\ n)$：照度图

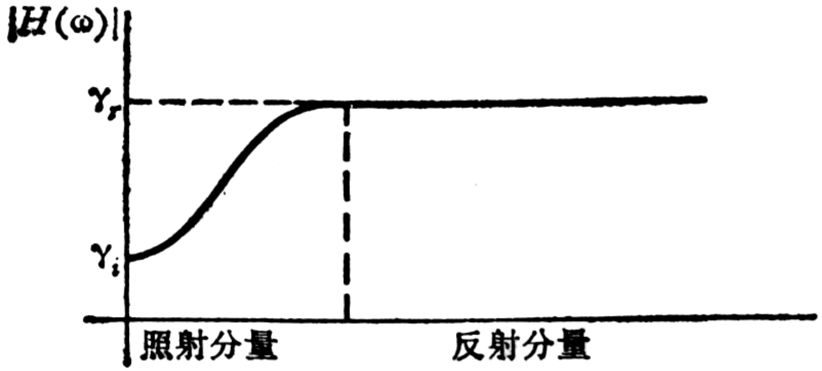
$x_r(m,\ n)$：反射图

同态信号处理的应用：

- 利用乘法同态系统处理：

$$x(m,\ n)=x_i(m,\ n)\times x_r(m,\ n)$$

$$x'(m,\ n)=\ln[x(m,\ n)]=\ln[x_i(m,\ n)]+\ln[x_r(m,\ n)]=x'_i(m,\ n)+x'_r(m,\ n)$$



$$X'(\omega_1,\omega_2)=X'_i(\omega_1,\omega_2)+X'_r(\omega_1,\omega_2)$$

$$L\{X'(\omega_1,\omega_2)\}=\gamma_i X'_i(\omega_1,\omega_2)+\gamma_r X'_r(\omega_1,\omega_2)$$

$$y'(m,\ n)=\gamma_i\ln[x_i(m,\ n)]+\gamma_r\ln[x_r(m,\ n)]$$

线性系统

$$y(m,n)=\exp\{y'(m,n)\}=[x_i(m,n)]^{\gamma_i}[x_r(m,n)]^{\gamma_r}$$

同态信号处理的应用：

- 解混响（卷积同态系统）：
  - 问题的提出：怎样从混响信号中将真实的声音信号提取出来？

$$x(n)=s(n)+\alpha s(n-n_0)=s(n) * h(n)$$

其中：

$$h(n)=\delta(n)+\alpha\delta(n-n_0)$$

$x(n)$: 得到的混响信号

$s(n)$: 真实的声音信号

n_0: 回波信号相对于真实信号的时延

α: 回波信号的反射系数

同态信号处理的应用：

- 利用卷积同态系统处理：

$$x(n)=s(n)+\alpha s(n-n_0)=s(n) * h(n)$$

运算*的特征系统

$$X(z)=S(z)\times H(z)=S(z)\,[1+\alpha z^{-n_0}]$$

$$X'(z)=\ln[X(z)]=\ln[S(z)]+\ln[1+\alpha z^{-n_0}]$$

$$x'(n)=s'(n)+h'(n)$$

$$h'(n)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\dfrac{\alpha^k}{k}\delta(n-kn_0), & n>0\\ 0, & n\le 0\end{cases}$$

$$y'(n)=L[x'(n)]=x'(n)\times[1-\sum_{k=1}^{\infty}\delta(n-kn_0)]=s'(n)\times[1-\sum_{k=1}^{\infty}\delta(n-kn_0)]$$

原始信号

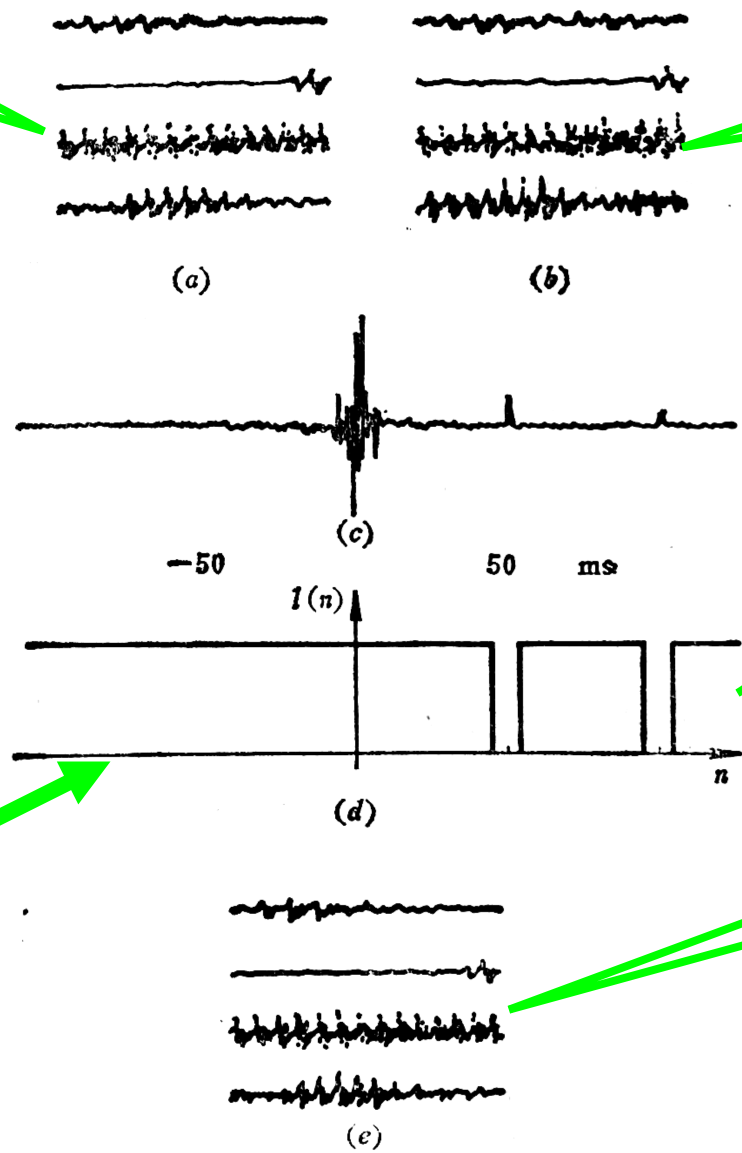
混响信号

复倒谱

滤波器

$$[1-\sum_{k=1}^{\infty}\delta(n-kn_0)]$$

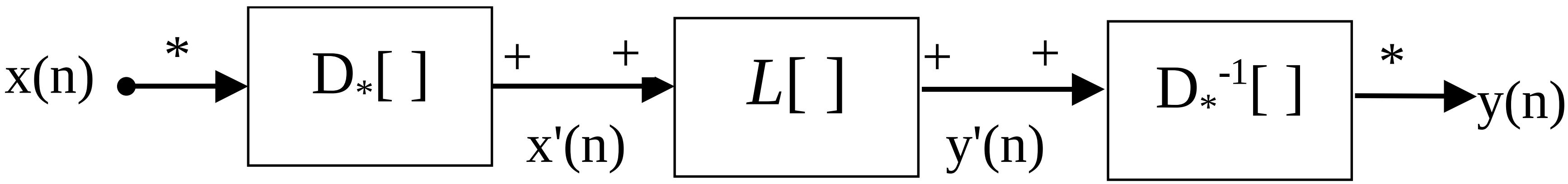
恢复结果



2.5 复倒谱

卷积同态系统:

- 卷积同态系统的一般形式:



$$\boldsymbol{ln[X(z)] = ln[|X(z)|] + j(arg[X(z)] + 2\pi k)},$$
$$\boldsymbol{k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 ......}$$

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n)$$

$$x'(n) = Z^{-1}\{ln[Z(x(n))]\} = Z^{-1}\{ln[X_1(z)]\} + Z^{-1}\{ln[X_2(z)]\} = x'_1(n) + x'_2(n)$$

$$y'(n) = L\{x'_1(n) + x'_2(n)\} = Z^{-1}\{ln[Y_1(z)]\} + Z^{-1}\{ln[Y_2(z)]\}$$

怎么求?

$$y(n) = Z^{-1}\{exp[Z(y'(n))]\} = y_1(n) * y_2(n)$$

复倒谱：

- 定义：
  - 序列x(n)的复倒谱定义为：

$$x'(n) = Z^{-1}\{ln[Z(x(n))]\}$$

- 存在的问题：
  - 复对数的多值性问题：

$$ln[X(z)] = ln[|X(z)|] + j(arg[X(z)] + 2\pi k)\text{ , } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots\ldots$$

  - X'(z)的解析性问题：

$$X'(e^{jw}) = ln[|X(e^{jw})|] + j(arg[X(e^{jw})] + 2\pi k)\text{ , } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots\ldots$$

- 复对数的多值性问题的解决：
  - 问题的分析：

    x’(n) = Z^{-1}\{*ln*[X(z)]\}

    X’(z) = *ln*[X(z)] = *ln*|X(z)| + j(*arg*\{X(z)\} + 2kπ),

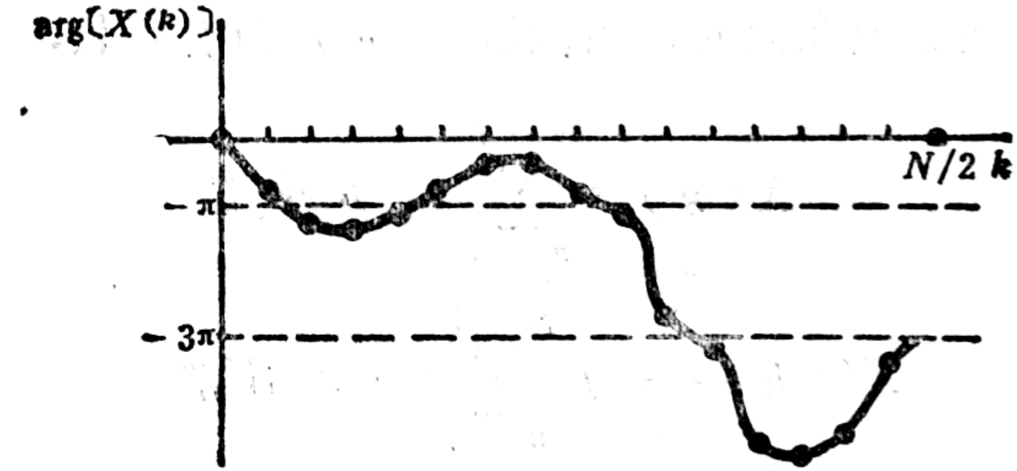
    k = 0, ±1, ±2, ±3 ......
  - 解决的方法：
    - 按照一定的规则取一个幅角值，一般情况下取主值，即将幅角对π取模得到的结果，令其为***ARG*\{X(z)\}**，则：

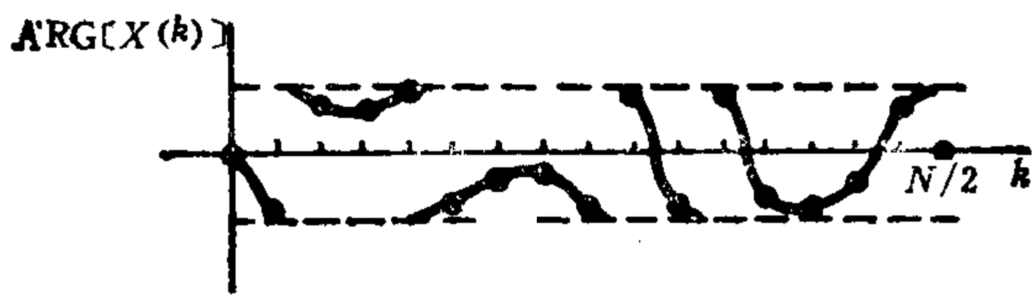
$$ARG\{X(z)\} = \left\langle \arg\{X(z)\} + 2k\pi \right\rangle_{\pi}$$

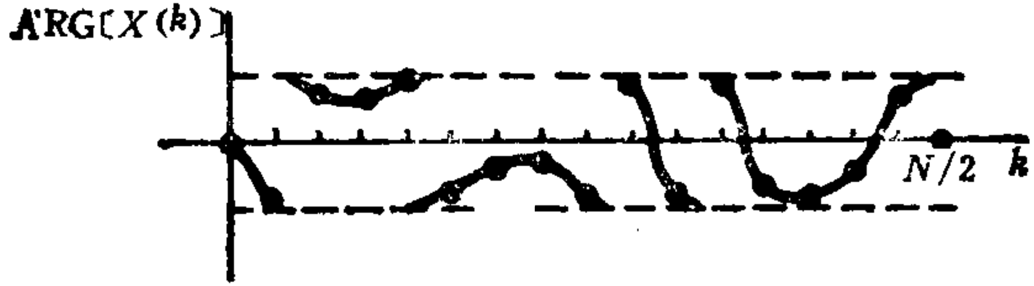
$$-\pi < ARG\{X(z)\} < \pi$$

$$\mathrm{ARG}\{X(z)\}=\left\langle \arg\{X(z)\}+2k\pi\right\rangle_{\pi}$$

- 例子：





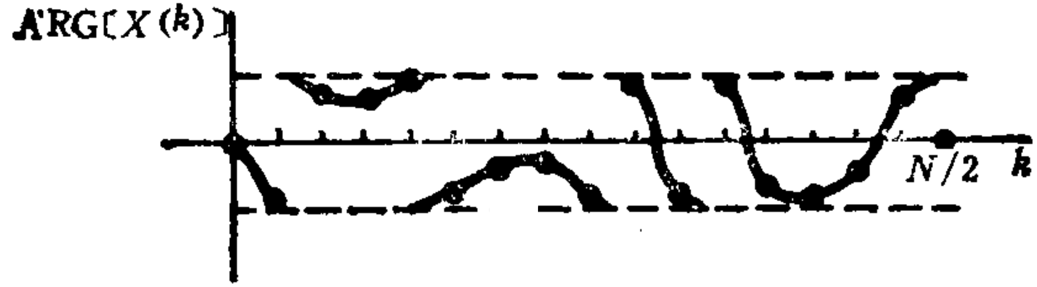


- X'(z)的解析性问题的解决：
  - 解析性问题的提出：

$$X'(z) = ln[X(z)]$$

$$X'(e^{jw}) = ln[|X(e^{jw})|] + jARG\,[X(e^{jw})]$$

- X'(z)为一个序列的Z变换的条件是X'(z)在其收敛域内为一解析函数（连续、可微）。
- 一般要求x'(n)为一稳定的且是因果的序列，则X'(z)的收敛域包含单位圆，故X'(e^{jw})应为解析函数。
- 从以上解决复对数的多值性的结果可以看出，至少有X'(e^{jw})的虚部是不连续的，因而存在X'(z)的解析性问题。



- 问题的分析：
  - $X'(e^{jw}) = \ln|X(e^{jw})| + jARG[X(e^{jw})]$，若要使 $X'(e^{jw})$解析， $X'(e^{jw})$ 的实部和虚部都要解析。
  - x(n)稳定，则X(z)的极点不在单位圆上，故只要X(z)在单位圆上无零点， $X'(e^{jw})$的实部解析。
  - 当$X'(e^{jw})$的虚部为$jARG[X(e^{jw})]$时，$X'(e^{jw})$的虚部不解析。
- $X'(e^{jw})$的虚部不解析的解决方法：
  - 根据$jARG[X(e^{jw})]$的特点，利用幅角可以加$2k\pi$复数值仍不变的特点，通过在不连续处选择适当的k值来使$X'(e^{jw})$成为连续函数（相当于在圆柱面上求幅角）。

- 例子：