

Práctico 9 – Desarrollo de Taylor.

Ejercicio de repaso

Calcular el límite cuando $x \rightarrow 0$:

- $\frac{1 - \cos(x)}{x^2}$
- $\frac{(e^x - 1) \operatorname{sen}(x) - x^2}{x^3}$
- $\frac{\operatorname{sen}(x^2) - x^2}{x^6}$
- $\frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4}$

Taylor en varias variables

- Sean $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas como $g(x) = e^x$ y $h(x) = \operatorname{sen}(x)$.

- Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de g y h en $x = 0$.
- Considere ahora $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x, y) = g(x)h(y)$
- Calcular df y df^2 de f en $(0, 0)$ y escribir el desarrollo de Taylor de orden 2 de f en $(0, 0)$.

Observar que $T_2 f$ en $(0, 0)$ puede obtenerse multiplicando los polinomios de Taylor de orden 2 de g y h , y luego removiendo los terminos de orden mayor a 2. Este procedimiento es válido para cualquier orden, cualquier par de funciones g y h , y pueden utilizarlo para realizar cálculos de manera más eficiente.

- Sea $f(x, y) = e^{\operatorname{sen}(x)+y}$ y $g(x, y) = \operatorname{sen}(x) + y$

- Calcular el desarrollo de Taylor de orden 3 de g en $(0, 0)$.
- Calcular el desarrollo de Taylor de orden 3 de f en $(0, 0)$.

Observar que $T_3(f)$ puede obtenerse componiendo $T_3 h \circ T_3 g$ donde $h(x) = e^x$, y luego removiendo los terminos de orden mayor a 3. Este procedimiento es válido para cualquier orden, cualquier par de funciones f y g , y pueden utilizarlo para realizar cálculos de manera más eficiente.

- Calcular los siguientes límites:

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy - \sin(x) \sin(y)}{x^2 + y^2}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x^2+y(y+1)} - (1 + y + \frac{y^2}{2})}{x^2 + y^2}$

- Hallar el polinomio de Taylor de grado 3 en $(0, 0)$ de las siguientes funciones:

$$(a) f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x^2 + 1}\right) \quad (b) f(x, y) = e^x \cos y \quad (c) f(x, y) = \log(xy + 1)$$

- Calcular el polinomio de Taylor de grado 3 de la función $f(x, y, z) = \frac{yz}{x}$ en el punto $(1, 0, 0)$.

6. Desarrollar xyz^2 en potencias de x , $y - 1$ y $z + 1$.
7. Calcular el polinomio de Taylor de grado n de las siguientes funciones:
 - a) $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$, en el origen.
 - b) $f(x, y) = \sin(y) \cos(x)$, en el origen.
 - c) $f(x, y) = \frac{1}{xy}$, en el punto $(1, 1)$.
 - d) $f(x, y) = \frac{x}{y}$, en el punto $(1, 1)$.
8. El polinomio de Taylor de grado 3 de $f(x, y) = \sin(x + y^2) + e^{x^2}$ en un entorno de $(0, 0)$ es:
 - a) $1 + x + x^2 + y^2 + x^3$.
 - b) $x + x^2 + y^2 + x^3$.
 - c) $1 + x + x^2 + y^2 + x^3/3$.
 - d) $1 + x + x^2 + y^2 - x^3/6$.
 - e) $x + x^2 + y^2 - x^3/3$.
9. El polinomio de Taylor de grado 3 de $f(x, y) = \log(1 + x + 3y)$ en un entorno de $(0, 0)$ es:
 - a) $x + 3y - (1/2)(x + 3y)^2 + (1/3)(x + 3y)^3$.
 - b) $x + 3y + (1/2)(x + 3y)^2 + (1/3)(x + 3y)^3$.
 - c) $x + 3y + (1/2)(x + 3y)^2 + (1/6)(x + 3y)^3$.
 - d) $x + 3y - (1/2)(x + 3y)^2 + (1/6)(x + 3y)^3$.
 - e) $1 + x + 3y + (1/2)(x + 3y)^2 + (1/3)(x + 3y)^3$.

Ejercicios propuestos en evaluaciones anteriores

1. (**Segundo parcial segundo semestre 2023**) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x, y) = e^{x^2+y} - 1 - y - x^2$. Entonces el polinomio de Taylor de orden 3 de f en el punto $(0, 0)$ es:
 - (A) $\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}x^3$
 - (B) $2xy + \frac{1}{3}y^3$
 - (C) $\frac{1}{2}y^2 + x^2y + \frac{1}{6}y^3$
 - (D) $\frac{1}{2}xy$
 - (E) $\frac{1}{2}x^2 + y^2 - 2xy^2$
2. (**Segundo parcial segundo semestre 2022**) El polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x, y) = \log(x^2 + y)$ en el punto $(1, 0)$ es:
 - (A) $p_2(x, y) = 1 + 2x - y + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + 3xy$
 - (B) $p_2(x, y) = -3 + 4x + 3y - x^2 - \frac{y^2}{2} - 2xy$
 - (C) $p_2(x, y) = 2x + y - \frac{x^2}{2} + y^2 - 2xy$

(D) $p_2(x, y) = 1 - 2x + y + x^2 + \frac{y^2}{2} + 2xy$

(E) $p_2(x, y) = 2(x - 1) + y + (x - 1)^2 + y^2 + (x - 1)y$

3. (**Examen febrero 2022**) Sean $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{xy + \ln(x^2 + y) - (a + bx + cy + dx^2 + ey^2 + fxy)}{x^2 + (y - 1)^2} = 0.$$

Entonces la suma $a + b + c + d + e + f$ es igual a:

(A) 2

(B) 0

(C) 1

(D) -1

(E) 3

(F) -2

4. (**Segundo parcial primer semestre 2019**) Dado $D = \{(x, y) : x + 2y + 1 > 0\}$, considere $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x, y) = x \ln(1 + x + 2y).$$

Sea $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ el polinomio de Taylor de f de orden 2 en un entorno de $(0, 0)$. Entonces:

(A) $p(2, 1) = 8$

(B) $p(2, 1) = 16$

(C) $p(2, 1) = 6$

(D) $p(2, 1) = 12$

Ejercicios complementarios

- a) Calcular con un error menor que $3,2 \times 10^{-5}$ el valor de $\arctan(0, 8)$.

b) Calcular con un error menor que 10^{-4} el valor de $\sqrt{5}$.
- ¿Cuál es el menor número de términos que hay que tomar en el desarrollo de Taylor de e^x en $x = 0$, para obtener un polinomio que aproxime, con un error menor que 10^{-4} , a e^x en el intervalo $[-1, 1]$?
- Estimar el error de reemplazar $\frac{\cos(x)}{\cos(y)}$ por $1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ para $|x|, |y| \leq \frac{\pi}{6}$