Práctico 8 – Derivadas parciales y diferenciabilidad.

1. Calcular las derivadas parciales de cada una de las siguientes funciones $f = f(x, y)$, especificando en cuáles puntos las derivadas existen.

$$\begin{array}{cccc} ax^\alpha + by^\beta & \frac{3x}{y} + \frac{4y}{x} & x^2y^{3/2} & \arctan(xy) \\ \log\left(x + \frac{y}{x^2}\right) & e^y \operatorname{sen}(x) & \text{máx}\{|x|, |y|\} & \text{máx}\{x^2, y^3\} \end{array}$$

2. Calcular las derivadas parciales de primer y segundo orden de las siguientes funciones $f = f(x, y)$.

$$(a)\ xy \quad (b)\ \log(xy) \quad (c)\ \sin(x^2 + y^2)$$

3. Verificar que la función $u(x,t) = e^{-a^2k^2t}\sin(kx)$ satisface la ecuación del calor: $u_t = a^2u_{xx}$.

4. Estudiar la continuidad de cada función y la existencia de las derivadas direccionales respectivas.

$$(a)\ f(x,y) = \begin{cases} (xy)/(\sqrt{x^2+y^2}) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ a & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$(b)\ f(x,y) = \begin{cases} (e^{xy}-1)/x & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad (c)\ f(x,y) = \begin{cases} x^3/y & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

$$(d)\ f(x,y) = \begin{cases} xy \sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ a & \text{si } xy = 0 \end{cases} \qquad (e)\ f(x,y) = \begin{cases} x^3 & \text{si } y \geq 1 \\ x^3y^2 & \text{si } y < 1 \end{cases}$$

5. Consideremos $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Probar que exiten todas las derivadas direccionales de f en $(0,0)$, pero sin embargo f no es continua en $(0,0)$. En otras palabras derivar respecto a cualquier dirección no garantiza la continuidad en el punto.

6. Representar gráficamente la siguiente función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bosquejando las curvas de nivel.

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq x^2 \text{ o } 2x^2 \leq y \\ |x| & \text{si } x^2 < y < 2x^2 \end{cases}$$

Demostrar que f es continua y que existen todas las derivadas direccionales en $(0,0)$ y que, sin embargo, f no es diferenciable en dicho punto.

7. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x} + e^{xy} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Estudiar la continuidad y la diferenciabilidad de f en los puntos $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1,0)$, hallando, si existen, las derivadas parciales.

8. ¿Existe alguna función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $f_x(x,y) = e^{x+y}$ y $f_y(x,y) = \cos(xy)$?

9. Sea $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) = 0$$

a) Probar que existen derivadas parciales en todos los puntos y calcularlas.

b) Probar que f es diferenciable.

c) Probar que f no es de clase C^1.

10. Sea $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definida como $f(x,y) = x^3y$. Sean $a = (0,0)$ y $b = (1,2)$. Hallar ξ en el segmento $[a,b]$ tal que $f(b) - f(a) = df(\xi)(b-a)$.

11. Sean $f : V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g : U \subset \mathbb{R}^2 \to V$, donde f es diferenciable y g esta definida por $g(\rho,\theta) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$. Calcular $\frac{\partial f\circ g}{\partial \rho}$ y $\frac{\partial f\circ g}{\partial \theta}$

12. Se sabe que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ verifica $f_x(0,0) = 2$, $f_y(0,0) = -1$ y que f es diferenciable en el origen. Calcular $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ para $v = (h,k)$ no nulo.

13. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que se sabe lo siguiente:

- $f(x,1) = x^3 + x^2$, $\forall x \neq 0$
- $f(0,y) = y^2 - 2y + 1$, $\forall y \in \mathbb{R}$
- $f(x,1-x) = x$, $\forall x \neq 0$

a) Indique en qué puntos es posible hallar la derivada parcial respecto a x o respecto a y. ¿En qué puntos es posible hallar el gradiente?

b) Calcular la derivada direccional en $(0,1)$ respecto a $v = (1,-1)$

c) Indique en qué puntos se puede decir algo sobre la diferenciabilidad de f.

14. Se sabe que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ verifica $f(x,x) = x$, que $f(0,y) = 0$ para todo x, $y \in \mathbb{R}$ y que f es diferenciable en el origen. Calcular $f_x(0,0)$.

15. Calcular la matriz Jacobiana en el punto a y el diferencial $df(a)(\Delta x, \Delta y)$ de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = e^{x+y} + 2\sin(2x-y)$, $\quad a = (0,0)$

b) $f(x,y,z) = (e^{z+x+y}, x+y+2z)$, $\quad a = (0,1,2)$

c) $f(x,y) = (e^{x+y}, \sin(2x-y), \log(1+y^2))$, $\quad a = (\pi,\pi)$

d) $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, en $a \in \mathbb{R}^p$ fijo cualquiera, donde $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, siendo A una matriz $q \times p$ y $\mathbf{x}$ se escribe como una matriz columna $p \times 1$.

e) $f(x,y) = \langle g(x,y), h(x,y)\rangle$ donde $g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ son funciones de clase C^1

16. Hallar, en cada caso, las matrices jacobianas de f, g, $f\circ g$ y $g \circ f$.

a) $f(u,v) = \left(\frac{12}{\log(u^2+v^2)}, \arctan(u/v)\right)$, $g(x,y) = (e^x\cos y, e^x\,\sin(y))$.

b) $f(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$, $g(x,y) = (x\cos y, x\,\sin y)$.

c) $f(u,v) = (e^u\cos v, e^u\,\sin\, v)$, $g(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$.

17. En cada caso hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función en el punto P.

- $3x^2 + 4y^2, P = (0,1)$
- $2\cos(x-y) + 3\,\sin(x), P = (\pi, \pi/2)$
- $2xy + e^{yx}x, P = (1,1)$

18. Demostrar que todos los planos tangentes a la gráfica de la función $f(x,y) = y\,h(y/x)$, en donde $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, tienen un punto en común.

Ejercicios propuestos en evaluaciones anteriores

1. (***Examen diciembre 2022***) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función.

   a) Definir diferenciabilidad de f en un punto $a = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

   Sea ahora $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como:

   $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y + xy^3}{x^2 + y^2 + \sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   b) Calcular las derivadas parciales de f en el $(0,0)$.

   c) Estudiar la diferenciabilidad de la función en el origen.

2. (***Segundo parcial primer semestre 2022***) De la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se conoce que:

   - f es diferenciable en $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
   - $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, t\right) = t^2 + 2t$
   - $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$ con $\vec{v} = (1, -2)$

   Si $g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, calcular $\dfrac{\partial(f \circ g)}{\partial \theta}\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

3. (***Examen febrero 2022***) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x,y) = \left|x + e^{y^2}\right|$. Indicar si cada una de las siguientes afirmaciones sobre f es verdadera o falsa.

   a) f es continua en $(0,0)$.

   b) f no es continua en $(-1,0)$.

   c) f es diferenciable en $(0,0)$ y su gradiente en ese punto es $(1,0)$.

   d) Existe la derivada parcial de f respecto a x en $(-1,0)$ y vale 1.

   e) Existe la derivada parcial de f respecto a y en $(-1,0)$ y vale 0.

4. (***Examen febrero 2022***) Consideremos la siguiente función escalar sobre $\mathbb{R}^2$:

   $$f(x,y) = \begin{cases} y\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   a) Determinar si f es continua en el punto $(0,0)$.

   b) Calcular, en caso de existir, todas las derivadas direccionales de f en el punto $(0,0)$.

   c) Determinar si f es diferenciable en $(0,0)$.

5. (***Segundo parcial segundo semestre 2021***) Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función tal que $g(1,1) = (1,0)$ y

   $$J_g(1,2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está dada por $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y}{y^2 + 1}$, indicar cuánto vale $\dfrac{\partial f \circ g}{\partial x}(1,1)$.

6. (***Segundo parcial primer semestre 2021***) Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una función diferenciable con $\alpha(0) = (0,0)$, y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función dada por $f(x,y) = (e^{x+y}, e^{x-y})$. Sabiendo que $(f \circ \alpha)'(0) = (2,0)$, calcular el jacobiano de α en 0.

7. (***Segundo parcial primer semestre 2019***) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} y - x, & \text{si } y \geq x \\ \dfrac{2x^3y}{x^2+y^2} + y - x, & \text{si } y < x \end{cases}$$

   a) Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$.
   b) Mostrar que la función f es diferenciable en $(0,0)$.
   c) Hallar el plano tangente al gráfico de f en el punto $(0,0)$.

Ejercicios complementarios

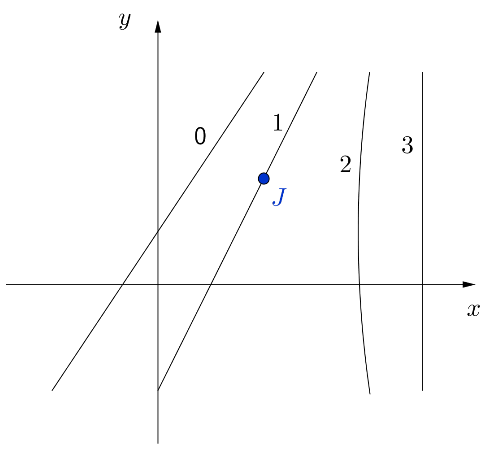
1. Calcular en un punto genérico los planos tangentes a:
   a) La Esfera
   b) El Cono
   c) El Cilindro
   d) El Paraboloide

2. La ecuación de Van der Waals para n moles de un gas está dada por:

$$\left(P + \frac{n^2a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

   donde R es la constante universal del gas y a y b son constantes positivas características de un gas en particular. Calcular $\frac{\partial T}{\partial V}$, $\frac{\partial T}{\partial P}$

3. Se muestran las curvas de nivel para una función f. Determine si las derivadas parciales tienen signo negativo o positivo en el punto J, asumiendo que no se anulan.



4. Demuestre que las siguientes funciones verifican la ecuación de la onda $u_{tt} = au_{xx}$

a) $u = \sin(kx)\cos(akt)$

b) $u = (x - at)^6 + (x + at)^6$

c) $u = \frac{t}{a^2t^2 - x^2}$

5. *a)* Sea $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una transformación lineal. Hallar $\partial_i T$ para $i = 1, \ldots, n$.

   b) Sea A una matriz simétrica $n \times n$ y $Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la función dada por $Q(x) = x^t A x$, esto es, $Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$, si $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$. Hallar $\partial_i Q$ para $i = 1, \ldots, n$.

   c) Sea $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal y $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = \langle x, T(x)\rangle$. Hallar la derivada direccional $\partial f/\partial u$ para todo versor $u \in \mathbb{R}^n$.