Aufgabe 1.1

Die bekannte vereinfachte Rekurrenz für die Einheitskostenfunktion für i,j>0 lautet:

$$\min \begin{cases} E_\delta(i-1,j)+1 \\ E_\delta(i,j-1)+1 \\ E_\delta(i-1,j-1)+ \\ \quad (\text{if } u[i]=v[j] \text{ then } 0 \text{ else } 1) \end{cases} \text{if } i>0 \text{ and } j>0$$

Das Lemma 1 aus dem GIK Script lautet:

1. $E_\delta(i-1,j)-1 \leq E_\delta(i,j) \leq E_\delta(i-1,j)+1$, für alle $i,j, 1 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n.$
2. $E_\delta(i,j-1)-1 \leq E_\delta(i,j) \leq E_\delta(i,j-1)+1$, für alle $i,j, 0 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$
3. $E_\delta(i-1,j-1) \leq E_\delta(i,j) \leq E_\delta(i-1,j-1)+1$, für alle $i,j, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$

Fall 1: Eδ (i – 1, j - 1), falls u[i] = v[j]

In der bekannten Rekurrenz würde man das Minimum für den Fall eines Matches

$$min \begin{cases} E_\delta(i-1,j)+1 \\ E_\delta(i,j-1)+1 \\ E_\delta(i-1,j-1)+0 \end{cases}$$

ermitteln.

Aus Lemma 1 ist zu erkennen, dass

$E_\delta(i-1,j-1)+0 \leq E_\delta(i,j)$

$E_\delta(i,j) \leq E_\delta(i-1,j)+1$

$E_\delta(i,j) \leq E_\delta(i,j-1)+1$

und damit

$E_\delta(i-1,j-1)+0 \leq E_\delta(i,j) \leq \{E_\delta(i-1,j)+1, E_\delta(i,j-1)+1\}$ ist.

Daraus wird ersichtlich, dass, wenn $u[i] = v[j]$, der Term $E_\delta(i-1,j-1)$ in jedem Fall den kleinsten Wert ausbildet (oder kleiner gleich den anderen Werten ist).

Fall 2: 1 + Eδ (i – 1, j) , falls Eδ (i – 1, j) < Eδ (i – 1, j - 1) & u[i] ≠ v[j]

Wenn $E_\delta(i-1,j) < E_\delta(i-1,j-1)$, dann muss $E_\delta(i-1,j)$ aufgrund der Einheitskostenfunktion um den Wert 1 kleiner sein als $E_\delta(i-1,j-1)$.

Daraus folgt $E_\delta(i-1,j)+1 = E_\delta(i-1,j-1)$.

Aufgrund von Lemma 1 gilt die zuvor in Fall 1 gezeigte Beziehung

$E_\delta(i-1,j-1) \leq E_\delta(i,j) \leq E_\delta(i,j-1)+1.$

Setzt man nun $E_\delta(i-1,j-1)$ für $E_\delta(i-1,j)+1$ in die Rekurrenz ein erhält man als Minimum

$$min \begin{cases} E_\delta(i-1,j)+1 \\ E_\delta(i,j-1)+1 \\ E_\delta(i-1,j-1)+1 \end{cases} = min \begin{cases} E_\delta(i-1,j-1) \\ E_\delta(i,j-1)+1 \\ E_\delta(i-1,j-1)+1 \end{cases} = E_\delta(i-1,j-1) = E_\delta(i-1,j)+1$$

Damit bildet der Term $E_\delta(i-1,j)+1$ in Fall 2 den kleinsten Wert (oder einen Wert kleiner gleich den anderen Werten) aus.

Fall 3: 1 + min { Eδ (i , j - 1) , Eδ (i – 1, j -1) } , sonst.

Die Werte $E_\delta(i-1,j)+1$ und $E_\delta(i-1,j-1)+0$ aus den zuvor behandelten Fällen können aus der Rekurrenz entfernt werden.
Daraus ergibt sich aus der ursprünglichen Rekurrenz die folgende für Fall 3:

$$min\begin{cases} E_\delta(i,j-1)+1 \\ \\ E_\delta(i-1,j-1)+1 \end{cases} = 1+min\begin{cases} E_\delta(i,j-1)+1 \\ \\ E_\delta(i-1,j-1)+1 \end{cases}$$