考研数学公式汇总（线性代数篇）

1.行列式的性质

性质1 行列互换，其值不变，即$|A|=|A^T|$.

性质2 某行(列)全为0,则行列式的值为0.

性质3 某行(列)有公因子k,则可把k提到行列式外面.

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质4 某行(列)每个元素都是两个数之和,则可拆成两个行列式之和.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质5 两行(列)互换，行列式的值变号.

性质6 两行(列)元素相等或对应成比例，则行列式的值为0.

性质7 某行(列)k倍加到另一行（列），行列式的值不变.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11}+a_{21} & ka_{12}+a_{22} & ka_{13}+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2.抽象型行列式—解法

解题思路：对抽象型行列式,计算方法主要是利用行列式的性质，矩阵的性质，特征值及相似等。主要的公式有:

1.若A是n阶矩阵，A^T是A的转置矩阵，则$|A^T|=|A|$;

2.若A是n阶矩阵,则$|kA|=k^n|A|$;

3.若A,B都是n阶矩阵，则$|AB|=|A||B|$;

4.若A是n阶矩阵，则$|A^*|=|A|^{n-1}$;

5.若A是n阶可逆矩阵，则$|A^{-1}|=|A|^{-1}$;

6.若$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$n$阶矩阵$A$的特征值,则$|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$;

7.若n阶矩阵A与B相似，则$|A|=|B|$.

3.伴随矩阵的性质

1） $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$;

2） $(kA)^* = k^{n-1}A^*$;

3） $(AB)^* = B^*A^*$（A,B可逆）；

4） $|A^*| = |A|^{n-1}$.

4.逆矩阵的性质

1） $(A^{-1})^{-1} = A$;

2） $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}(k \neq 0)$;

3） $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

4） $|A^{-1}| = |A|^{-1}$;

特别注意：$(A+B)^{-1} \neq A^{-1}+B^{-1}$没公式.

5.逆矩阵—解法

方法一：用伴随 若$|A| \neq 0$,则$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$.

方法二：用初等变换 $(A|E) \to (E|A^{-1})$.

方法三：用定义 A,B都是n阶矩阵, $AB=E$,则$A^{-1}=B$.

方法四：用单位矩阵恒等变形 对$(A+B)^{-1}$型化为$(AB)^{-1}$型.

方法五：用分块公式 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}$.

6.矩阵的秩定理

定理2 初等变换不改变A的秩；

行阶梯型矩阵的秩等于其非零行数.

注：若零行（若有的话）位于最低行,且每行左起第一个非零元素所在的列下方元素都是0的,称这种矩阵为**行阶梯矩阵**;

任何矩阵都可通过初等行变换化为行阶梯矩阵.

7.矩阵的秩性质

(1) $r(A)=r(A^T)$;

(2) $r(kA)=r(A)(k\neq 0)$;

(3) $r(A_{m\times n})\leq \min\{m,n\}$.

(4) $r(AB)\leq \min\{r(A),r(B)\}$;

(5) $r(A+B)\leq r(A)+r(B)$;

(6) $A_{m\times n}B_{n\times s}=0$,则$r(A)+r(B)\leq n$;

(7) A可逆,则$r(AB)=r(B),r(BA)=r(B)$;

(8) $r(A)=r(A^TA)=r(AA^T)=r(A^T)$;

(9) $r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & r(A)=n-1 \\ 0, & r(A)<n-1 \end{cases}$.

8.具体向量组如何判定相关无关

对具体（含参数）向量组如何判定相关无关?

定理1 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$相关（无关）

$\Leftrightarrow$齐次方程组$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)x=0$有非零解（只有零解）

$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)<m$(向量个数) $(=m$(向量个数)).

推论1 $n+1$个n维向量必相关.

推论2 n个n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$相关（无关）$\Leftrightarrow |\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|=0(\neq 0)$.

定理2 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$相关,

则$\begin{cases}\text{增加个数后的向量组}\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_{m+n} \\ \text{对应减少向量坐标后的向量组}\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m\end{cases}$仍相关;

若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$无关,

则$\begin{cases}\text{减少个数后的向量组}\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-r} \\ \text{对应增加向量坐标后的向量组}\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m\end{cases}$仍无关.

9.抽象向量组如何证明无关

对抽象向量组如何证明无关?

以三个向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为例:

方法一:用定义 设$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$,则必有$k_1=k_2=k_3=0$.

方法二:用秩 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$(向量个数).

方法三:用结论 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$无关,

$$\beta_1=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3,$$

$$\beta_2=b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+b_3\alpha_3,$$

$$\beta_3=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3.$$

$$\text{则}\beta_1,\beta_2,\beta_3\text{无关}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}\neq0.$$

10.特征值和特征向量的性质

(1) $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$, $\Pi\lambda_i=|A|$;

(2) k重特征值λ**至多**有k个线性无关的特征向量;

(3) α_1,α_2是A的属于不同特征值λ_1, λ_2的特征向量,则 α_1,α_2线性无关;

(4) 若α_1,α_2是A的属于同一特征值λ的特征向量,

则 $k_1\alpha_1$(非零)、 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$(非零)**仍是**A的属于特征值λ的特征向量;

(5) 若α_1,α_2是A的属于不同特征值λ_1, λ_2的特征向量,

则$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$**不再是**A的特征向量.

11.相似矩阵的性质

(1) A∽B(必要条件)

$\Rightarrow|A|=|B|$;

$\Rightarrow r(A)=r(B)$;

$\Rightarrow|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$,即$\lambda_A=\lambda_B$;

$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum_{i=1}^{n}b_{ii}$.

（2）如$A\sim B$,设$P^{-1}AP=B$,则$P^{-1}\left(A+kE\right)P=B+kE,P^{-1}A^{n}P=B^{n}$,因此

由$A\sim B$要想到$A+kE\sim B+kE$,进而$\left|A+kE\right|=\left|B+kE\right|,r\left(A+kE\right)=r\left(B+kE\right)$;

由$A\sim B$要想到$A^{n}\sim B^{n}$,进而可用相似求$A^{n}=PB^{n}P^{-1}$.

12.矩阵相似对角化的条件

$A_n\sim\Lambda$

$\Leftrightarrow A$有n个线性无关的特征向量;

$\Leftrightarrow A$的i重特征值λ_i有i个无关的特征向量, 即$n-r\left(\lambda_i E-A\right)=i$;

$\Leftarrow A$有n个不同的特征值;

$\Leftarrow A$是实对称阵.

注: 对$r\left(A_n\right)=1$或$A=\alpha\beta^{T}$的矩阵, $A\sim\Lambda\Leftrightarrow\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}\neq 0$.

13.正定定理

定理4 二次型$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=x^{T}Ax$正定

$\Leftrightarrow\forall x\neq 0$,有$x^{T}Ax>0$;

$\Leftrightarrow A$的特征值都大于0;

$\Leftrightarrow A$的全部顺序主子式大于0.

注: 若A的主对角线某元素$a_{ii}\leq 0$,则A必不正定.

14.等价、相似、合同

两个同型矩阵A与B, 若A可经过初等变换变成B,称A与B等价, 记作$A\cong B$.

判定 同型矩阵矩阵A与B等价

$\Leftrightarrow$存在可逆矩阵P和Q,使$PAQ=B$;

$\Leftrightarrow r\left(A\right)=r\left(B\right)$.

两个方阵A与B,若存在可逆矩阵P,使$P^{-1}AP=B$,称A与B相似, 记作$A\sim B$.

判定 若A与B的迹或秩或行列式或特征值不相等, 则A与B不相似;

若$A\sim\Lambda$, 但B不能对角化,则A与B不相似;

若$A\sim\Lambda$, 且$B\sim\Lambda$,则A与B相似.

两个实对称矩阵A与B,若存在可逆矩阵C,使$C^{T}AC=B$,称A与B合同, 记作$A\simeq B$.

判定 实对称矩阵A与B合同

$\Leftrightarrow$二次型$x^{T}Ax$和$x^{T}Bx$有相同的正、负惯性指数;

$\Leftrightarrow$实对称矩阵A与B有相同的正、负特征值个数.