考研数学公式汇总（高等数学篇）

1. 等价代换的补充

$x \to 0$时，

$$x-\sin x \sim \frac{1}{6}x^3, \arcsin x - x \sim \frac{1}{6}x^3, x-\tan x \sim -\frac{1}{3}x^3, \arctan x - x \sim -\frac{1}{3}x^3,$$

$$x-\ln(1+x) \sim \frac{1}{2}x^2, e^x-1-x \sim \frac{1}{2}x^2, \tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3.$$

注：等价代换只能在乘除运算中使用.

2. 泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+o(x^n)$$

$$\sin x = x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

$$\cos x = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)$$

$$\arcsin x = x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

$$\tan x = x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

$$\arctan x = x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+o(x^2)$$

3.基本导数公式

$$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}(a>0, a\neq 1)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(arc\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

4. 几个常用函数的高阶导数

$$\left(e^{ax+b}\right)^{(n)}=a^n e^{ax+b};$$

$$\left[\sin\left(ax+b\right)\right]^{(n)}=a^n\sin\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right),$$

$$\left[\cos\left(ax+b\right)\right]^{(n)}=a^n\cos\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right);$$

$$[\ln(ax+b)]^{(n)}=(-1)^{n-1}a^n\frac{(n-1)!}{(ax+b)^n},$$

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=(-1)^n a^n\frac{n!}{(ax+b)^{n+1}}.$$

5. 不定积分的基本积分公式

$$1.\int x^{\mu}dx=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C,\qquad 2.\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C,$$

$$3.\int e^x dx=e^x+C,\qquad 4.\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C,$$

$$5.\int\sin xdx=-\cos x+C,\qquad 6.\int\cos xdx=\sin x+C,$$

$$7.\int\tan xdx=-\ln|\cos x|+C,\qquad 8.\int\cot xdx=\ln|\sin x|+C,$$

$$9.\int\sec xdx=\ln|\sec x+\tan x|+C,\qquad 10.\int\csc xdx=\ln|\csc x-\cot x|+C,$$

$$11.\int\sec x\tan xdx=\sec x+C,\qquad 12.\int\csc x\cot xdx=-\csc x+C,$$

$$13.\int\sec^2 xdx=\tan x+C,\qquad 14.\int\csc^2 xdx=-\cot x+C,$$

$$15.\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C,\qquad 16.\int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C,$$

$$17.\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+C,\qquad 18.\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C,$$

$$19.\int\frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C,\qquad 20.\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C,$$

$$21.\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C.$$

6. 定积分性质

约定：$\int_a^a f(x)dx=0,\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx.$

1.等式性质

(1) $\int_a^b 1dx=b-a;$

(2) $\int_a^b\left[k_1f(x)\pm k_2g(x)\right]dx=k_1\int_a^b f(x)dx\pm k_2\int_a^b g(x)dx;$

(3) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx,\forall c.$

2.不等式性质（$b>a$）

(1) 设$f(x)\le g(x)$，则$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx;$

(2) $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx;$

(3) 设$m\le f(x)\le M$，则$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a).$

3.积分中值定理

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$\exists\xi\in(a,b)$，使$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a).$

7. 渐近线

1.水平渐近线

若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$或$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=a$，则称$y=a$是$f(x)$在右侧或左侧的水平渐近线.

2.铅直渐近线

若$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$或$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$，则称$x=x_0$是$f(x)$的铅直渐近线.

注：一般将无定义点作为铅直渐近线的的考查对象.

3.斜渐近线

若$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k\ne0,\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=b$，则称$y=kx+b$是$f(x)$在右侧的斜渐近线；

若$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k\ne0,\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-kx\right]=b$，则称$y=kx+b$是$f(x)$在左侧的斜渐近线.

注：在同一侧，水平渐近线与斜渐近线不会同时存在.

8. 微分中值定理

定理1　罗尔定理

设$f(x)$满足$\begin{cases}[a,b]\text{上连续}\\(a,b)\text{内可导}\\f(a)=f(b)\end{cases}$,则$\exists\xi\in(a,b)$,使$f'(\xi)=0$.

定理2　拉格朗日中值定理

设$f(x)$满足$\begin{cases}[a,b]\text{上连续}\\(a,b)\text{内可导}\end{cases}$,则$\exists\xi\in(a,b)$, 使$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

注: 若又有$f(a)=f(b)$,则$f'(\xi)=0$,此时拉格朗日中值定理退化成了罗尔定理.

定理3　柯西中值定理

设$f(x)$、$g(x)$满足$\begin{cases}[a,b]\text{上连续}\\(a,b)\text{内可导}\\g'(x)\neq0\end{cases}$,则$\exists\xi\in(a,b)$, 使$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

注: (1) 若取$g(x)=x$,则柯西中值定理退化成了拉格朗日中值定理;

(2) 条件$g'(x)\neq0$是保证右端分母, 但左端呢? 事实上只要$g'(x)\neq0$,必有$g(a)\neq g(b)$.

定理4　泰勒定理

1. 带拉格朗日余项的n阶泰勒公式

若$f(x)$在含x_0的某区间(a,b)内具有$n+1$阶导数,则对任一$x\in(a,b)$, 有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1},\text{其中}\xi\text{介于}x\text{与}x_0\text{之间}$$

2. 带佩亚诺余项的n阶泰勒公式

若$f(x)$在x_0处有n阶导数,那么存在x_0的一个邻域, 对于该邻域内任一x, 有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right).$$

注: 若$x_0=0$,则称为**麦克劳林**展开式.

- 二重积分的性质

1.等式性质

(1) $\iint\limits_D 1d\sigma = A_D$, 其中$A_D$表示区域$D$的面积;

(2) $\iint\limits_D [k_1 f(x,y) \pm k_2 g(x,y)] d\sigma = k_1 \iint\limits_D f(x,y) d\sigma \pm k_2 \iint\limits_D g(x,y) d\sigma$;

(3) $\iint\limits_D f(x,y) d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y) d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y) d\sigma, D_1 \cup D_2 = D, D_1 \cap D_2 = \Phi$;

2.不等式性质

(1) 在D上,若$f(x,y) \le g(x,y)$,则$\iint\limits_D f(x,y) d\sigma \le \iint\limits_D g(x,y) d\sigma$;

(2) $\left| \iint\limits_D f(x,y) d\sigma \right| \le \iint\limits_D |f(x,y)| d\sigma$;

(3) 在D上,若$m \le f(x,y) \le M$,则$m \cdot A_D \le \iint\limits_D f(x,y) d\sigma \le M \cdot A_D$,其中$A_D$表示$D$的面积.

3.积分中值定理

设$f(x,y)$在D上连续,则存在一点$(\xi,\eta) \in D$,使$\iint\limits_D f(x,y) d\sigma = f(\xi,\eta) \cdot A_D$.

- 对称性

普通对称性 设D关于y轴对称,D_1是D在$x \ge 0$的部分,则

$$\iint\limits_D f(x,y) dxdy = \begin{cases} 2\iint\limits_{D_1} f(x,y) dxdy, & f(x,y)\text{对}x\text{是偶函数} \\ 0, & f(x,y)\text{对}x\text{是奇函数} \end{cases};$$

设D关于x轴对称,D_1是D在$y \ge 0$的部分,则

$$\iint\limits_D f(x,y) dxdy = \begin{cases} 2\iint\limits_{D_1} f(x,y) dxdy, & f(x,y)\text{对}y\text{是偶函数} \\ 0, & f(x,y)\text{对}y\text{是奇函数} \end{cases}.$$

轮换对称性 若D关于直线$y = x$对称,则$\iint\limits_D f(x,y) dxdy = \iint\limits_D f(y,x) dxdy$

● 级数的基本性质

性质1 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$也收敛;

性质2 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都收敛,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$也收敛;

注: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$发散;

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$不一定发散.

性质3 去掉、加上或改变前有限项,不影响级数的收敛性;

性质4 收敛级数任意加括号后所得的级数仍收敛;

注: 加括号后的级数收敛,则去掉括号后原来的级数不一定收敛;

加括号后的级数发散,则去掉括号后原来的级数一定发散.

性质5 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

注: $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$不一定收敛;

$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$一定发散.

● 莱布尼茨判别法则

设交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$满足:(1)$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$;(2) $u_n \ge u_{n+1}$,则交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛.

注:(1) 条件“$u_n \ge u_{n+1}$”不满足时,交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛也可能收敛;

(2) 说明“$u_n \ge u_{n+1}$”常用以下几种方法:

方法一: 利用$u_{n+1}-u_n \le 0$或利用$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\le 1$;

方法二: 构造一个可导函数$f(x)$,使$u_n=f(n)$,利用当$x\to+\infty$时,$f'(x)<0$说明.

- **幂级数的分析性质**

设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为$R$,收敛域为$I$,和函数为$S(x)$,即$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,则

1.连续性 $S(x)$在收敛域I上连续;

2.可积性 $S(x)$在收敛域I上可积,且有逐项积分公式:

$$\int_0^x S(t)dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^ndt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nt^ndt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}a_nx^{n+1};$$

积分后的幂级数的收敛半径与原来的幂级数的收敛半径相同.

3.可导性 $S(x)$在收敛区间$(-R,R)$上可导,且有逐项求导公式:

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_nx^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1};$$

求导后的幂级数的收敛半径与原来的幂级数的收敛半径相同.

- **麦克劳林级数**

(1) $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots,-\infty<x<+\infty;$

(2) $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,-\infty<x<+\infty;$

(3) $\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,-\infty<x<+\infty;$

(4) $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+\cdots,-1<x\le 1;$

(5) $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,-1<x<1;$

(6) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots,-1<x<1.$

- **狄利克雷收敛定理**

设$f(x)$在$[-l,l]$上满足：

（1）连续，或只有有限个第一类间断点；（2）只有有限个极值点，

则$f(x)$的傅里叶级数在$[-l,l]$上处处收敛，且

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)=\begin{cases} f(x), & \text{若}x\in(-l,l)\text{为}f(x)\text{的连续点} \\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & \text{若}x\in(-l,l)\text{为}f(x)\text{第一类间断点} \\ \dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}, & \text{若}x=\pm l \end{cases}$$

- **奇偶函数的傅里叶级数**

$[-l,l]$上的奇偶函数$f(x)$（包括经奇延拓或偶延拓的函数）的傅里叶级数如下：

(1)奇函数（包括经奇延拓的函数）

$a_n=0, n=0,1,2,\cdots,$

$b_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx, n=1,2,3,\cdots$

$f(x)\sim\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$（正弦级数）

(2)偶函数（包括经偶延拓的函数）

$a_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx, n=0,1,2,\cdots,$

$b_n=0, n=1,2,3,\cdots$

$f(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x$（余弦级数）

- **常用的二次曲面**

椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

双叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z.$

椭圆锥面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2.$