Модуль 1 «Математические модели геометрических объектов»
Лекция 4 «B-сплайны и B-сплайновые поверхности. B-сплайновая интерполяция. NURBS-кривые»

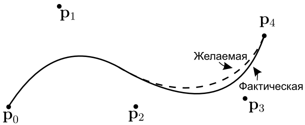
к.ф.-м.н., доц. каф. ФН-11, Захаров Андрей Алексеевич,
ауд.: 930а(УЛК)
моб.: 8-910-461-70-04,
email: azaharov@bmstu.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана

12 апреля 2019 г.

Введение

Данная категория сплайнов является наиболее используемой, и функции *B-сплайнов* широко применяются в системах автоматизированного проектирования и многих пакетах графического программирования. Подобно сплайнам Безье, B-сплайны генерируются путём аппроксимации набора контрольных точек. В то же время, B-сплайны обладают двумя преимуществами по сравнению со сплайнами Безье: во-первых, степень полинома B-сплайна можно задать независимо от числа контрольных точек (с определенными ограничениями); во-вторых, B-сплайны допускают локальный контроль над формой кривой. Платой за это является бóльшая сложность B-сплайнов по сравнению со сплайнами Безье.
В кривой Безье глобальное влияние каждой опорной точки $\mathbf{p}_i$ на всю кривую происходит из-за того, что каждая из функций B_i^n не равна нулю на всем интервале (0;1). Если бы вместо функций Бернштейна выступали функции с локальными носителями, существенно меньшими, чем область определения параметра кривой t, то удалось бы как локализовать влияние отдельной точки на всю кривую, так и добиться (за счет выбора таких функций) прохождения кривой через некоторую заданную точку.



Введение

Поэтому поставим задачу следующим образом. Пусть даны контрольные точки $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n$. Определим кривую $\mathbf{r}(t)$ по формуле

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^{n} N_i(t)\mathbf{p}_i, \qquad t_{\text{min}} \leqslant t \leqslant t_{\text{max}}, \tag{1}$$

где $N_i(t)$ — набор кусочно-полиномиальных функций, таких, что

1. $N_i(t) = 0$ при $t \notin [a_i, b_i] \subset [t_{\text{min}}, t_{\text{max}}]$;
2. для любой гладкой функции $f(t)$ существует линейная комбинация $\sum\limits_{k=0}^{n} c_k N_k(t)$, интерполирующая функцию $f(t)$ в заданных узлах $\{t_i\}_{i=0}^{n}$:

   $$f(t_i) = \sum_{k=0}^{n} c_k N_k(t_i), \quad i = 0, \ldots, n;$$

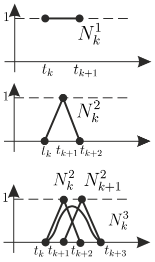
   Например, дизайнер может пожелать, чтобы кривая $\mathbf{r}(t)$ проходила через первую и последнюю контрольные точки.
3. $\sum\limits_{k=0}^{n} N_k(t) = 1$ для каждого $t \in [t_{\text{min}}, t_{\text{max}}]$.

Последнее условие вводится для того, чтобы в случае совпадения всех опорных точек кривая превращалась бы в ту же точку.
Решение поставленной задачи даётся B-кривыми (сокр. от базовые — base). B-кривые обобщают кривые Безье.

Общее выражение для расчёта координат точек B-сплайна:

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{k=0}^{n} N_k^q(t)\mathbf{p}_k, \qquad t_{\min} \leqslant t \leqslant t_{\max}, \quad 1 \leqslant q \leqslant n+1.$$

В 1972 г. Кокс (Cox) и де Бур (de Boor) предложили использовать функции N_k^q, определяемые рекурсивно:



$$N_k^1(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t_k \leqslant t < t_{k+1}, \\ 1, & \text{если } t = t_{n+q}, \quad k = n+q-1 \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \tag{2}$$

$$N_k^q(t) = \frac{t - t_k}{t_{k+q-1} - t_k} N_k^{q-1}(t) + \frac{t_{k+q} - t}{t_{k+q} - t_{k+1}} N_{k+1}^{q-1}(t).$$

Каждая точка t_k называется *узлом* (knot). Узлы определяют области, внутри которых функции сопряжения имеют ненулевые значения. Полный набор используемых узлов называется *вектором узлов* (knot vector). В (2) неопределённость $0/0$ считается равной нулю. Значения узлов можно выбирать любыми при условии, что $t_k \leqslant t_{k+1}$. В частности, расстояния между соседними узлами могут быть равны нулю, тогда говорят о кратности узлов.

Уравнение B-сплайна

Формулу (2) можно переписать в другом виде. Для этого найдем индекс l в векторе узлов, при котором выполняется соотношение $t_l \leqslant t \leqslant t_{l+1}$. Тогда координаты точки B-сплайна можно определить по формуле:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{p}_l^{q-1}(t).$$

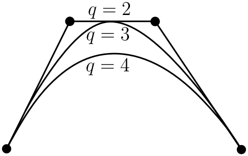
Для расчёта функций $\mathbf{p}_l^i(t)$ используем следующую последовательность, которую можно рассчитывать или рекурсивно при $q-1 \geqslant i \geqslant 1$ или итерационно для $1 \leqslant i \leqslant q-1$ и $l-q+i+1 \leqslant k \leqslant l$:

$$\mathbf{p}_k^i(t) = \frac{t-t_k}{t_{k+q-i}-t_k}\mathbf{p}_k^{i-1}(t) + \left(1 - \frac{t-t_k}{t_{k+q-i}-t_k}\right)\mathbf{p}_{k-1}^{i-1}(t).$$

Здесь предполагается, что $\mathbf{p}_k^0(t) \equiv \mathbf{p}_k$.

Свойства B-сплайнов

- Полиномиальная кривая имеет степень $q-1$ и непрерывность C^{q-2}. Значение q называется *порядком* (*order*).
- Каждая стыковочная функция N_k^q начинается в точке t_k и заканчивается в точке t_{k+q}.
- Диапазон параметра t делится на $n+q$ подынтервалов $n+q+1$ значениями, заданными в векторе узлов.
- Если значения узлов обозначить $\{t_0, t_1, \ldots, t_{n+q}\}$, получающийся B-сплайн определяется только в интервале от значения узла t_{q-1} до значения t_{n+1}, т.к. только в этом интервале $\sum\limits_{k=0}^{n} N_k^q(t) = 1$.
- Каждый участок сплайна определяется q контрольными точками.
- Любая контрольная точка может влиять на форму максимум q участков кривой.
- Чем меньше степень кривой, тем ближе она подходит к контрольным точкам. Кривые высоких порядков более гладкие.



Свойства В-сплайнов

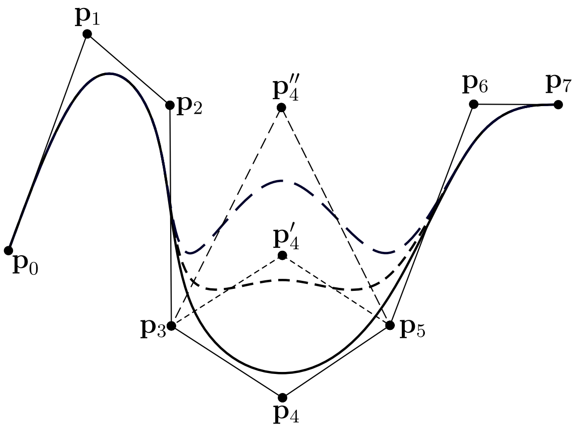
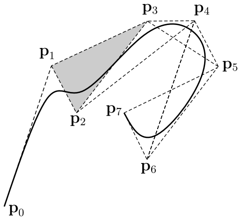


Рис.: Локальная коррекция В-сплайна.

Помимо локального контроля В-сплайны позволяют варьировать число контрольных точек, используемых в разработке кривой, без изменения степени полинома.

Свойства B-сплайнов

- Кривые на базе B-сплайнов аффинно инвариантны. Для преобразования B-сплайн кривой мы просто преобразуем каждую контрольную точку и генерируем новую кривую.
- B-сплайн кривая является выпуклой комбинацией своих контрольных точек и поэтому лежит внутри их выпуклой оболочки. Возможно более сильное утверждение: при любом значении $t \in [t_{q-1}, t_{n+1}]$ только q функций B-сплайна «активны» (то есть отличны от нуля). В этом случае кривая должна лежать внутри выпуклой оболочки не более q последовательных активных контрольных точек.
- B-сплайн кривые обеспечивают линейную точность: если q последовательных контрольных точек коллинеарны, то их выпуклая оболочка будет прямой линией, и кривая будет захвачена внутрь её.
- B-сплайн кривые уменьшают колебания: B-сплайн кривая не пересекает никакую линию чаще, чем её контрольный полигон.



Выпуклые оболочки для квадратичной B-сплайн кривой

Дифференцирование B-сплайна

Аналогично случаю вычисления производной от кривой Безье, производная B-сплайна записывается через уравнение B-сплайна, порядок которого на единицу меньше исходного. Если параметр t лежит между узловыми значениями t_l и t_{l+1}, то производная от B-сплайна имеет следующий вид:

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \sum_{k=l-q+2}^{l} N_k^{q-1}(t)\mathbf{p}_k^1, \tag{3}$$

где

$$\mathbf{p}_k^1 = (q-1)\frac{\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_{k-1}}{t_{k+q-1} - t_k}. \tag{4}$$

Правая часть уравнения (3) имеет форму уравнения B-сплайна, поэтому можно предполагать, что производные более высоких порядков могут быть получены рекурсивным применением формулы (3). Так, производная порядка m от B-сплайна имеет вид:

$$\frac{d^m\mathbf{r}(t)}{dt^m} = \sum_{k=l-q+m+1}^{l} N_k^{q-m}(t)\mathbf{p}_k^m, \tag{5}$$

где

$$\mathbf{p}_k^m = (q-m)\frac{\mathbf{p}_k^{m-1} - \mathbf{p}_{k-1}^{m-1}}{t_{k+q-m} - t_k}. \tag{6}$$

Равномерные периодические B-сплайны

Разные методы задания узловых значений позволяют получить разные функции сопряжения и, соответственно, разные кривые. Если расстояние между значениями в узлах постоянно, получающаяся в результате кривая называется *равномерным* B-сплайном. Например, можно задать следующий равномерный вектор узлов:

$$\{-1.5; -1.0; -0.5; 0.0; 0.5; 1.0; 1.5; 2.0\}.$$

Часто значения узлов нормируются в диапазон от 0 до 1:

$$\{0.0; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1.0\}.$$

Во многих приложениях удобно задать равномерные значения узлов с шагом 1 и начальным значением 0:

$$\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}.$$

Равномерные B-сплайны имеют *периодические* стыковочные функции. Следовательно, для данных значений n и q все стыковочные функции имеют одинаковую форму. Каждая последующая стыковочная функция является просто смещённой версией предыдущей:

$$N_k^q(t) = N_{k+1}^q(t + \Delta t) = N_{k+2}^q(t + 2\Delta t), \tag{7}$$

где Δt — интервал между соседними значениями узлов.

Пример. Равномерные квадратичные B-сплайны

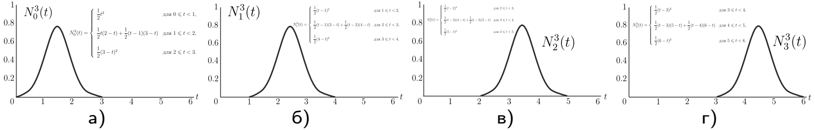


Рис.: Периодические стыковочные функции равномерного B-сплайна

Проиллюстрируем стыковочные функции B-сплайнов для равномерного целого вектора узлов при $q = n = 3$. Вектор узлов должен содержать $n + q + 1 = 7$ значений узлов: $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Каждая из четырёх стыковочных функций захватывает $q = 3$ подынтервалов. Используя рекуррентные формулы (2), получаем первую стыковочную функцию $N_0^3(t)$. Следующая функция N_1^3 получается с использованием соотношения (7) при подстановке $t - 1$ вместо t в N_0^3 и смещения начального положения t на 1 в сторону увеличения. Подобным образом, оставшиеся две периодические функции получаются последовательным смещением N_1^3 вправо. Первая контрольная точка умножается на стыковочную функцию N_0^3. Следовательно, изменение положения первой контрольной точки влияет только на форму кривой до $t = 3$. Аналогично последняя контрольная точка влияет на форму сплайновой кривой в интервале, где определена N_3^3.

Пример. Равномерные квадратичные B-сплайны

Поскольку диапазон получающейся полиномиальной кривой принадлежит промежутку от $t_{q-1} = 2$ до $t_{n+1} = 4$, начальную и конечную позицию кривой можно определить, вычислив стыковочные функции в этих точках:

$$\mathbf{r}(2) = 0.5(\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1), \qquad \mathbf{r}(4) = 0.5(\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3).$$

Т.о., кривая начинается посередине между первыми двумя контрольными точками и заканчивается посередине между двумя последними.
Вычисляя производные стыковочных функций и подставляя значения конечных точек получаем:

$$\mathbf{r}'(2) = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \qquad \mathbf{r}'(4) = \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2.$$

Параметрическая касательная кривой в начале параллельна линии, соединяющий первые две контрольные точки, а параметрическая касательная в конце кривой параллельна линии, соединяющей последние две контрольные точки.

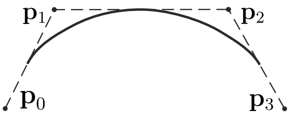
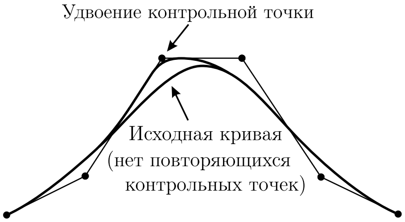


Рис.: Квадратный периодический B-сплайн, подобранный по четырём контрольным точкам на плоскости xy. Кривая проходит через середины ребер контрольного полигона

Равномерные периодические B-сплайны

В предыдущем примере было отмечено, что квадратичная кривая начинается между первыми двумя и заканчивается между двумя последними контрольными точками. Полученный результат справедлив для квадратичных периодических B-сплайнов, подобранных по любому числу различных контрольных точек. Вообще, для полиномов высокого порядка начальная и конечная точки являются взвешенным средним $q-1$ контрольных точек. Кроме того, как это было для кривых Безье, сплайновую кривую можно поместить ближе к любой контрольной точке, введя эту точку несколько раз. Кратные значения узлов уменьшают непрерывность на 1 при каждом повторе значения. При задании точки кратности $q-1$ выпуклые оболочки, окружающие эту точку состоят из ребер контрольного полигона, поэтому кривая «захватывается» этим ребром на протяжении одного диапазона полиномов.



Кубические периодические B-сплайны

Кубические периодические B-сплайны широко используются в графических пакетах. Такие сплайны особенно полезны при генерации определённых замкнутых кривых. Кроме того, если координаты трёх последовательных контрольных точек равны, кривая проходит через эту точку.

Для кубических B-сплайнов $q = 4$. Если нужно подобрать кубическую кривую по четырём контрольным точкам, можно использовать целочисленный вектор узлов

$$\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$$

и рекуррентные соотношения (2), из которых находятся периодические стыковочные функции, как было сделано в предыдущем примере для квадратных периодических B-сплайнов.

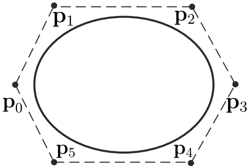


Рис.: Замкнутый периодический кусочно-гладкий B-сплайн, построенный с использованием циклической спецификации четырёх контрольных точек для каждого участка кривой

Открытые равномерные B-сплайны

Данный класс B-сплайнов является промежуточным между равномерными и неравномерными B-сплайнами. Иногда он считается частным случаем равномерного B-сплайна, а иногда он относится к неравномерным B-сплайнам. Для *открытых равномерных* B-сплайнов, или просто *открытых* B-сплайнов, расстояние между узлами равномерно, за исключением концов, где значения узлов повторяются q раз.
Примеры открытых равномерных целочисленных вектора узлов:

$$\{0, 0, 1, 2, 3, 3\} \qquad \text{для } q = 2 \text{ и } n = 3,$$
$$\{0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2\} \qquad \text{для } q = 4 \text{ и } n = 4.$$

Данные векторы можно нормировать в единичный интервал от 0 до 1:

$$\{0, 0, 0.33, 0.67, 1, 1\} \qquad \text{для } q = 2 \text{ и } n = 3,$$
$$\{0, 0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1, 1\} \qquad \text{для } q = 4 \text{ и } n = 4.$$

Для любых значений параметров q и n открытый равномерный вектор узлов с целыми значениями можно сгенерировать, используя формулы

$$t_k = \begin{cases} 0 & \text{для } 0 \leqslant k < q, \\ k - q + 1 & \text{для } q \leqslant k \leqslant n, \\ n - q + 2 & \text{для } n < k \leqslant n + q. \end{cases}$$

При этом первым q узлам присваивается значение 0, а последние q узлов имеют значение $n - q + 2$.

Открытые равномерные В-сплайны обладают характеристиками, весьма подобными характеристикам сплайнов Безье. Фактически при $q = n + 1$ (степень полинома равна n) открытые В-сплайны сводятся к сплайнам Безье, и все значения узлов равны 0 или 1. Это означает, что

$$N_k^q(t) = B_k^{q-1}(t),$$

где $k = 0, \ldots, n$. Отметим, что, согласно принятому соглашению, верхний индекс у $B()$ — это степень (degree), в то время как верхний индекс у $N()$ — это порядок (order).
Например, при кубическом открытом В-сплайне ($q = 4$) и четырех контрольных точках вектор узлов равен:

$$\{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1\}.$$

Полиномиальная кривая для открытого В-сплайна соединяет первую и последнюю контрольную точку. Кроме того, параметрическая касательная кривой в первой контрольной точке параллельна прямой линии, сформированной первыми двумя контрольными точками, а параметрическая касательная в последней контрольной точке параллельна линии, определённой двумя последними контрольными точками. Таким образом, геометрические условия для согласования участков кривой не отличаются от условий для кривых Безье.

Неравномерные B-сплайны

Для данного класса сплайнов вектор узлов может принимать любые значения из любых интервалов. Для *неравномерных* B-сплайнов можно выбирать несколько одинаковых внутренних значений узлов и неравномерное размещение значений узлов. Например, внутренние значения могут быть пропорциональны длинам ребер между вершинами многоугольника:

$$t_k = \begin{cases} 0 & \text{для } 0 \leqslant k < q, \\ \left(\dfrac{\left(\dfrac{k-q+1}{n-q+2}\right) c_{k-q+2} + \sum\limits_{i=1}^{k-q+1} c_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i} \right)(n-q+2) & \text{для } q \leqslant k \leqslant n, \\ n-q+2 & \text{для } n < k \leqslant n+q, \end{cases}$$

где $c_k = |\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_{k-1}|$.
Неравномерные B-сплайны предлагают повышенную гибкость в управлении формой кривой. Неравномерные интервалы в векторе позволяют получать различные формы стыковочных функций в различных интервалах, что может использоваться для воспроизведения определённых особенностей аппроксимации. В любой момент работы с неравномерным B-сплайном в состав кривой можно ввести дополнительный узел и изменить её форму при помощи дополнительных контрольных точек.

Неравномерные В-сплайны

Рассмотрим проблему объединения двух или более кривых Безье в один В-сплайн. Пусть имеется две кривые Безье второй степени $\mathbf{r}_0(t)$ и $\mathbf{r}_1(t)$, определённые с помощью контрольных точек $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ и $\mathbf{p}'_0$, $\mathbf{p}'_1$, $\mathbf{p}'_2$. Требуется объединить эти кривые в одну кривую $\mathbf{r}(t)$, которая состоит из $\mathbf{r}_0(t)$, за которой следует $\mathbf{r}_1(t)$. То есть $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t)$ для $0 \leqslant t \leqslant 1$ и $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1(t)$ для $1 \leqslant t \leqslant 2$. Это можно сделать с помощью квадратичного В-сплайна $\mathbf{r}(t)$ с узловым вектором $\{0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2\}$ и с шестью контрольными точками $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}'_0$, $\mathbf{p}'_1$, $\mathbf{p}'_2$. Обычно две кривые Безье образуют единую непрерывную кривую, то есть $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_0$. В в этом случае $\mathbf{r}(t)$ совпадает с В-сплайном, у которого вектор узлов равен $\{0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2\}$ и который строится по пяти контрольным точкам $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}'_1$, $\mathbf{p}'_2$.

Это правило можно обобщить. Если есть три кривые Безье второй степени, которые образуют одну непрерывную кривую, то они эквивалентны квадратичному В-сплайну с вектором узлов$\{0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3\}$. Аналогичным образом можно построить В-сплайн по любому числу квадратичных кривых Безье, непрерывно стыкующихся между собой.

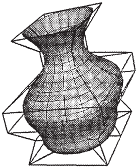
В-сплайновые поверхности

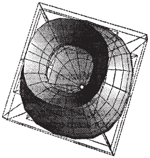
Формулировка В-сплайновой поверхности подобна формулировке поверхностных сплайнов Безье. Векторную функцию В-сплайновой поверхности можно получить, используя декартово произведение стыковочных В-сплайновых функций вида

$$\mathbf{r}(t,\tau) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \mathbf{p}_{i,j} N_i^q(t) N_j^p(\tau), \tag{8}$$

где векторные значения $\mathbf{p}_{i,j}$ задают положения $(n+1)$ на $(m+1)$ контрольных точках.

В-сплайновые поверхности демонстрируют те же свойства, что и составляющие их В-сплайны. Поверхность можно построить по выбранным значениям параметров q и p, которые задают степени полиномов равными $q-1$ и $p-1$. Для каждого параметра t и τ также выбираются значения вектора узлов, которые определяют диапазон параметров стыковочных функций.





На рисунке показан другой вид, откуда становится ясно, что данная поверхность не является поверхностью вращения.

Дифференцирование В-сплайновой поверхности

Достаточно часто возникает необходимость вычисления производных В-сплайновой поверхности:

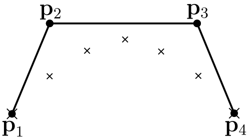
$$\frac{\partial \mathbf{r}(t,\tau)}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}(t,\tau)}{\partial \tau}.$$

Продифференцируем выражение (8) по t и τ:

$$\frac{\partial \mathbf{r}(t,\tau)}{\partial t} = \sum_{j=0}^{m} \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=0}^{n} \mathbf{p}_{i,j} N_i^q(t)\right) N_j^p(\tau),$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}(t,\tau)}{\partial \tau} = \sum_{i=0}^{n} \frac{d}{d\tau}\left(\sum_{j=0}^{m} \mathbf{p}_{i,j} N_j^p(\tau)\right) N_i^q(t),$$

Производную В-сплайна можно вычислить по формуле (3).



Мы рассмотрели построение B-сплайна по заданным координатам контрольных точек $\mathbf{p}_k$. Рассмотрим теперь задачу нахождения координат контрольных точек $\mathbf{p}_k$, порождающих B-сплайн, для заданного множества точек $\mathbf{r}_i(u_i)$, где $u_i < u_{i+1}$.
Точка, принадлежащая B-сплайну, должна удовлетворять уравнению (1). Запишем уравнение (1) для всех $n+1$ заданных точек

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_0(u_0) &= N_0^q(u_0)\mathbf{p}_0 + N_1^q(u_0)\mathbf{p}_1 + \ldots + N_n^q(u_0)\mathbf{p}_n, \\
\mathbf{r}_1(u_1) &= N_0^q(u_1)\mathbf{p}_0 + N_1^q(u_1)\mathbf{p}_1 + \ldots + N_n^q(u_1)\mathbf{p}_n, \\
&\vdots \\
\mathbf{r}_n(u_n) &= N_0^q(u_n)\mathbf{p}_0 + N_1^q(u_n)\mathbf{p}_1 + \ldots + N_n^q(u_n)\mathbf{p}_n,
\end{aligned} \tag{9}$$

где $2 \leqslant q \leqslant n+1 \leqslant m+1$.

В матричной форме (9) имеет вид

$$\mathbf{R} = \mathbf{N}\mathbf{P}, \tag{10}$$

где

$$\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0(t_0) & \mathbf{r}_1(t_1) & \cdots & \mathbf{r}_n(t_n) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 & \mathbf{p}_1 & \cdots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_0^q(t_0) & \cdots & \cdots & N_n^q(t_0) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ N_0^q(t_n) & \cdots & \cdots & N_n^q(t_n) \end{bmatrix}$$

Чтобы решить уравнение (9), нам нужно задать значения параметров t_i, при которых B-сплайн будет проходить через заданные точки; вектор узлов и степень (или порядок) кривой.
Степень кривой в практических приложениях обычно выбирается равной 2 или 3. Рассмотрим метод, который позволяет строить сплайн произвольной степени.
Один из методов для вычисления величины параметров t_i для каждой заданной точки состоит в вычислении меры расстояния до точки вдоль B-сплайна. Удобна аппроксимация параметра с помощью длин хорд между заданными точками:

$$u_0 = 0, \qquad \frac{u_i}{u_{\max}} = \frac{\sum_{j=1}^{i} |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j-1}|}{\sum_{j=1}^{m} |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j-1}|}, \qquad i \geqslant 1. \tag{11}$$

Учитывая значения параметров t_i, нужно сформировать вектор узлов, который отражает распределение этих параметров. Для практических приложений часто используют вектор узлов следующего вида:

$$t_k = \begin{cases} 0 & \text{для } 0 \leqslant k < q, \\ \dfrac{1}{q-1} \sum\limits_{i=k-q+1}^{k-1} & \text{для } q \leqslant k \leqslant n, \\ 1 & \text{для } n < k \leqslant n+q. \end{cases} \tag{12}$$

Тогда можно показать, что матрица СЛАУ $\mathbf{N}$ является положительной с количеством ненулевых диагоналей меньшим чем q-1. СЛАУ ((10)) может быть решена с помощью метода Гаусса без выбора ведущего элемента, а при $q =$ методом прогонки.

Если в дополнение к координатам точек, в них заданы ещё и производные (касательные векторы), тогда потребуется $2(n+1)$ контрольных точек, чтобы построить интерполяционный сплайн. Системы уравнений имеют вид:

$$\mathbf{r}_k(u_k) = \sum_{i=0}^{2n} \mathbf{p}_i N_i^k(u_k), \tag{13}$$

$$\mathbf{r}'_k(u_k) = (q-1) \sum_{i=1}^{2n} \frac{\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}}{t_{i+q-1} - t_i} N_i^{q-1}(u_k). \tag{14}$$

Вектор узлов для этой задачи можно сформировать следующим образом: нам нужно $2(n+1)+q+1$ узлов, потому что есть $2(n+1)$ точек данных. Поскольку квадратичные и кубические кривые являются наиболее часто используемыми кривыми, рассмотрим случаи $q=3$ и $q=4$. Если $q=3$, то вектор узлов имеет вид:

$$\left\{0, 0, 0, \frac{u_1}{2}, u_1, \frac{u_1+u_2}{2}, \ldots, \frac{u_{n-1}+1}{2}, 1, 1, 1\right\}$$

Если $q=4$, то вектор узлов равен:

$$\left\{0, 0, 0, 0, \frac{u_1}{2}, \frac{2u_1+u_2}{3}, \frac{u_1+2u_2}{3} \ldots, \frac{u_{n-2}+2u_{n-1}}{3}, \frac{u_{n-1}+1}{2}, 1, 1, 1, 1\right\}$$

Если мы объединим уравнения (13) и (14) поочерёдно, то полученная

B-сплайновая интерполяция поверхности

Обобщим метод интерполяции кривой для задачи интерполяции поверхности. Предположим, что нам дан набор $(n+1)\times(m+1)$ точек данных $\mathbf{r}(u_k, v_l)$, $k = 0, \ldots, n$, $l = 0, \ldots, m$. Построим поверхность порядка (q, p), которая проходит через эти точки при заданных значениях параметров:

$$\mathbf{r}(u_k, v_l) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \mathbf{p}_{i,j} N_i^q(u_k) N_j^p(v_l) \qquad (15)$$

Чтобы решить уравнение (15), требуется задать значения параметров и два вектора узлов. Чтобы вычислить значения параметров u_k, $k = 0, \ldots, n$, можно воспользоваться методом их вычисления (11) для всех сечений $l = 0, \ldots, m$, а затем провести осреднение. Аналогично вычислить v_l, $l = 0, \ldots, m$. Затем можно сформировать векторы узлов по аналогии с (12).

Рациональные B-сплайны

Аналогично случаю рациональных кривых Безье, задающие точки рационального B-сплайна указываются с использованием однородных координат. Функции сопряжения применяются именно к этим однородным координатам. Координаты точки рационального B-сплайна в однородном пространстве получаются по формулам:

$$x \cdot h = \sum_{k=0}^{n} N_k^q(t)\,(h_k \cdot x_k)\,; \tag{16}$$

$$y \cdot h = \sum_{k=0}^{n} N_k^q(t)\,(h_k \cdot y_k)\,; \tag{17}$$

$$z \cdot h = \sum_{k=0}^{n} N_k^q(t)\,(h_k \cdot z_k)\,; \tag{18}$$

$$h = \sum_{k=0}^{n} N_k^q(t) h_k. \tag{19}$$

Уравнение рационального B-сплайна

Координаты точки в трёхмерном пространстве x, y и z получаются делением xh, yh и zh на h, поэтому уравнение рационального B-сплайна в векторном виде может быть записано следующим образом (поделим (16), (17) и (18) на (19)):

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} h_k \mathbf{p}_k N_k^q(t)}{\sum\limits_{k=0}^{n} h_k N_k^q(t)} = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{p}_k R_k^q(t), \tag{20}$$

где

$$R_k^q(t) = \frac{h_k N_k^q(t)}{\sum\limits_{i=0}^{n} h_i N_i^q(t)}$$

— базисные функции рационального B-сплайна.
Открытый рациональный B-сплайн с порядком, равным количеству вершин определяющего многоугольника, представляет собой рациональную кривую Безье. В случае $h_k = 1$ рациональная кривая Безье сводится к нерациональной. Таким образом, B-сплайны включают как рациональные, так и нерациональные кривые Безье.

Свойства рациональных B-сплайнов

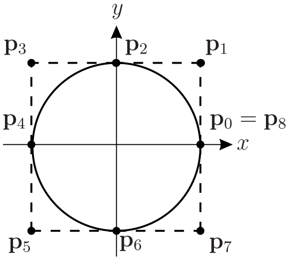
Рациональные B-сплайны и их базисы это обобщение нерациональных B-сплайнов и базисов. При $h_k \geqslant 0$ для всех k они наследуют почти все аналитические и геометрические свойства последних. В частности:

- каждая функция рационального базиса положительна или равна нулю для всех значений параметра, т.е. $R_k^q \geqslant 0$;
- для любого значения параметра t сумма базисных функций рационального B-сплайна равна единице, т.е.

$$\sum_{i=0}^{n} R_i^q(t) \equiv 1;$$

- кроме $q = 1$ каждая рациональная базисная функция имеет ровно один максимум;
- рациональный B-сплайн порядка q (степени $q - 1$) везде C^{q-2} непрерывен;
- максимальный порядок рационального B-сплайна равен количеству вершин определяющего многоугольника;
- рациональный B-сплайн обладает свойством уменьшения вариации;
- общая форма рационального B-сплайна повторяет очертания определяющего многоугольника.

Представление единичной окружности



С помощью рациональных квадратичных B-сплайнов можно сразу целиком построить окружность или какое-либо другое коническое сечение. Т.е. с их помощью можно сшить отдельные дуги, представляемые с помощью рациональных сплайнов Безье. Это возможно сделать, например, задав в вершинах и на серединах сторон девять контрольных точек, причём начальная и конечная вершины должны совпадать в одной из середин. Узловой вектор можно задать в следующем виде: $\left\{0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1\right\}$. Вес контрольной точки $h_i = 1$, если i — чётное и $h_i = \frac{\sqrt{2}}{2}$, если i — нечётное.

Обычно в пакетах графической разработки для построения рациональных B-сплайнов используются неравномерные представления вектора узлов. Данные сплайны называются «NURBS» (Nonuniform Rational B-splines — неравномерные рациональные B-сплайны). NURBS с 1983 г. являются стандартом IGES. IGES — это стандарт обмена проектной информацией между системами автоматизированного проектирования, а также между ними и системами автоматизированного производства. Рациональные B-сплайны реализованы аппаратно в некоторых графических рабочих станциях.

NURBS-поверхности

Распространим понятие NURBS-кривых на NURBS-поверхности, для чего используем декартово произведение:

$$\mathbf{r}(t,\tau) = \frac{\sum\limits_{j=0}^{m}\sum\limits_{k=0}^{n} h_{j,k}\mathbf{p}_{j,k}N_j^p(\tau)N_k^q(t)}{\sum\limits_{j=0}^{m}\sum\limits_{k=0}^{n} h_{j,k}N_j^p(\tau)N_k^q(t)}, \tag{21}$$

где $\mathbf{p}_{j,k}$ — векторы задающих точек с компонентами x, y и z, а $h_{j,k}$ — однородные координаты задающих точек.
Благодаря общности и гибкости NURBS-поверхности стали пользоваться популярностью у дизайнеров кривых и поверхностей. Поскольку B-сплайны являются частным случаем NURBS-поверхностей (при $h_{j,k} = 1$), можно использовать единый алгоритм для создания обширного семейства поверхностей. Поверхность NURBS к тому же позволяет точно описать квадратичные поверхности, такие как цилиндр, конус, сфера, параболоид и гиперболоид. Поэтому дизайнеру вместо инструментария, состоящего из большого числа различных алгоритмов для создания поверхностей, потребуется всего один метод. Уравнение NURBS-поверхности часто используется для внутреннего представления квадратичных поверхностей в системах геометрического моделирования.