Билеты по дискретной математике, 2 модуль

Таисия Чегодаева, ПАДИИ, 1 курс

21 December 2023

1 Теория вероятности. Комбинаторное определение вероятности. Геометрическая вероятность. Частотная вероятность.

Под случайным экспериментом будем понимать математическую модель некоторого реального эксперимента, результат которого невозможно точно предсказать.
Любой результат ω случайного эксперимента называется элементарным событием или исходом. Множество всех возможных исходов обозначим через Ω. Далее мы всегда будем считать, что множество Ω конечно или счетно.
Случайным событием или просто событием A называется любое подмножество множества Ω.
Говорят, что в результате случайного эксперимента произошло событие A, если элементарный исход эксперимента является элементом множества A.

Пусть все различные элементарные события являются равновероятными. В этом случае для любого $\omega \in \Omega$

$$Pr(\omega) = \frac{1}{|\Omega|},$$

и, как следствие,

$$Pr(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Такой способ задания вероятности называется комбинаторным. В этом случае подсчет вероятности $Pr(A)$ события A сводится к подсчету количества исходов, к этому событию приводящих. Иными словами, в этом случае задача становится чисто комбинаторной.

Геометрической вероятностью события называется отношение меры области, благоприятствующей появлению события, к мере всей области.

Относительную частоту появления события называют частотной вероятностью.

Под относительной частотой появления события понимается отношение w = M/N, где N – число опытов; M – число появления события.

2 Теория вероятности. Общее определение вероятности. Примеры.

Припишем теперь любому элементарному событию ω Ω некоторое вещественное число Pr(ω) из диапазона [0,1]. Это отображение Pr : $\Omega \to$ R+ называется вероятностью, если для него выполняется следующее условие нормировки:

$$\sum_{\omega \in \Omega} Pr(\omega) = 1.$$

Зная вероятность $Pr(\omega)$ любого элементарного исхода, можно по формуле

$$Pr(A) = \sum_{\omega \in A} Pr(\omega)$$

Пример Рассмотрим случайный эксперимент с однократным подбрасыванием монетки. Его можно описать, задав пространство элементарных исходов

$$\Omega = \{\text{решка}, \text{орел}\}$$

и введя на нем вероятность $Pr : \Omega \to [0, 1]$ по формулам

$$Pr(\{\text{решка}\}) = p, \quad Pr(\{\text{орел}\}) = q,$$

где p, q — вещественные положительные числа, такие, что $p + q = 1$.

3 Теория вероятности. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Теорема Байеса. Примеры.

Начнем с достаточно характерного примера. Рассмотрим случайный эксперимент, связанный с подбрасыванием игральной кости. Обозначим через A событие, заключающееся в том, что у нас выпало число, большее трех, а через B — событие, состоящее в том, что у нас выпало четное число. Ясно, что

$$Pr(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \quad Pr(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

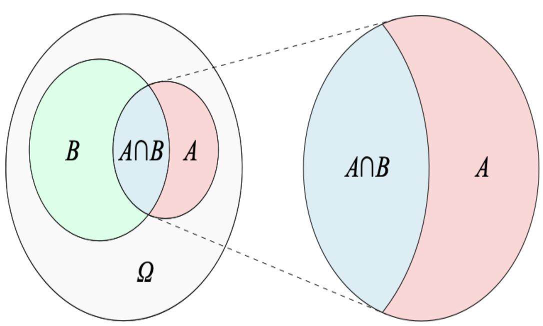
Теперь предположим, что мы получили некоторую дополнительную информацию, а именно, нам стало известно, что в результате случайного эксперимента у нас произошло событие A. Мы не знаем, произошло ли у нас событие B, однако появившаяся у нас дополнительная информация позволяет нам утверждать, что вероятность наступления события B увеличилась. Действительно, тот факт, что у нас произошло событие A, сужает множество возможных исходов случайного эксперимента до подмножества $A = \{4, 5, 6\}$. Два исхода из этих трех — выпадение чисел 4 и 6 — являются благоприятными для наступления события B. Иными словами, вероятность $Pr(B|A)$ наступления события B при условии, что событие A произошло, возрастает и становится равной $2/3$.

Данный пример удобно иллюстрировать на диаграммах Эйлера-Венна (рис.8). Как мы знаем, в случае, когда все элементарные исходы равновероятны, вероятности наступления событий A и B равны

$$Pr(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \quad Pr(B) = \frac{|B|}{|\Omega|}.$$

Информация о том, что у нас произошло событие A, сужает для B пространство возможных исходов с Ω до A. При этом все исходы, принадлежащие $A \cap B$, являются благоприятными для наступления события B, так что вероятность $Pr(B|A)$ наступления события B при условии, что событие A произошло, становится равной

$$Pr(B|A) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(A)}.$$



Вернемся к примеру с подбрасыванием игральной кости. Предположим теперь, что нам кто-то сообщил о том, что в результате случайного эксперимента событие A не произошло (или, что то же самое, произошло событие $A = \Omega \setminus A$). В этом случае шансы на наступление события B уменьшились — из множества $A = \{1, 2, 3\}$ возможных исходов только один исход — выпадение числа 2 — является для B благоприятным. Иными словами, вероятность $Pr(B|A)$ при условии, что произошло событие A, равна $1/3$. Заметим, что у нас при этом выполняется любопытное равенство вида

$$Pr(A) \cdot Pr(B|A) + Pr(A) \cdot Pr(B|A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} = Pr(B).$$

(31)

Полученная формула называется формулой полной вероятности. В ее справедливости легко убедиться, проанализировав рис.8.

Формулу полной вероятности обычно записывают в несколько более общем виде. Именно, рассмотрим полную группу несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Ясно, что

$$B = B \cap \Omega = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n),$$

откуда на основании свойства (25) следует, что

$$Pr(B) = Pr(B \cap A_1) + Pr(B \cap A_2) + \ldots + Pr(B \cap A_n).$$

(32)

С учетом формулы (30) вероятность $Pr(B \cap A_i)$ можно выразить через условные вероятности $Pr(B|A_i)$:

$$Pr(B \cap A_i) = Pr(B|A_i) \cdot Pr(A_i).$$

(33)

Отсюда окончательно получается следующая обобщенная формула полной вероятности:

$$Pr(B) = \sum_{i=1}^{n} Pr(B|A_i) \cdot Pr(A_i).$$

Приведем достаточно характерный пример использования формулы (33).

Пример 5.3. Пусть в магазине имеется 100 лампочек, 60 из которых сделаны производителем номер 1, 25 — производителем номер 2, и 15 — производителем номер 3. Вероятность выхода из строя лампочки в первую неделю ее работы у первого производителя равна 0.02, у второго — 0.01, и у третьего — 0.03. Какова вероятность того, что случайно купленная в магазине лампочка выйдет из строя в течение первой недели?

Решение. Обозначим через A_i событие, заключающееся в том, что купленная лампочка принадлежит i-му производителю. Очевидно, что событие Ω, отвечающее покупке лампочки, является достоверным событием (то есть $Pr(\Omega) = 1$), а $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$, то есть события A_i образуют полную группу несовместных событий. При этом $Pr(A_1) = 0.6$, $Pr(A_2) = 0.25$, $Pr(A_3) = 0.15$.

Далее, вероятность выхода из строя лампочки в первую неделю ее работы от i-го производителя является, очевидно, условной вероятностью $Pr(B|A_i)$, где B — событие, состоящее в выходе из строя лампочки в первую неделю ее работы. Следовательно, согласно формуле (33) полной вероятности,

$$Pr(B) = 0.6 \cdot 0.02 + 0.25 \cdot 0.01 + 0.03 \cdot 0.15 = 0.019.$$

В примере 5.3 остановка задачи была в определенном смысле прямой: у нас было известно, что хотя бы одно из трех событий A_i произошло (лампочка была куплена), и мы искали вероятность наступления события B, соответствующего тому, что купленная нами в магазине лампочка в первую неделю перегорела. На практике, однако, нас может интересовать и такая постановка задачи: пусть лампочка у нас в первую неделю все же перегорела; какова вероятность того, что в этом случае (то есть при наступлении события B) эта лампочка принадлежит, к примеру, 2-му производителю?

С формальной точки зрения речь идет о вычислении условной вероятности $Pr(A_i|B)$: событие B произошло, лишь произошло и какое-то из трех возможных событий A_i; нас же интересует вероятность того, что в этом случае до наступления события B случилось именно событие A_2, а не два других события.

Оказывается, на такой вопрос также достаточно легко ответить. Именно, предположим, что вероятность $Pr(B)$ события B строго больше нуля. Заметим, что тогда наряду с формулами

$$Pr(B|A_i) = \frac{Pr(B \cap A_i)}{Pr(A_i)} \quad \Leftrightarrow \quad Pr(B \cap A_i) = Pr(B|A_i) \cdot Pr(A_i) \tag{1}$$

для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ мы можем написать и аналогичные равенства

$$Pr(B \cap A_i) = Pr(A_i|B) \cdot Pr(B) \quad \Leftrightarrow \quad Pr(A_i|B) = \frac{Pr(B \cap A_i)}{Pr(B)} \tag{2}$$

Вспоминая теперь, что $Pr(B \cap A_i)$ вычисляется по формуле (32), а также то, что для $Pr(B)$ справедлива формула полной вероятности (5.3), мы для $Pr(A_i|B)$ получаем соотношение

$$Pr(A_i|B) = \frac{Pr(A_i) \cdot Pr(B|A_i)}{Pr(A_1) \cdot Pr(B|A_1) + Pr(A_2) \cdot Pr(B|A_2) + \ldots + Pr(A_n) \cdot Pr(B|A_n)}$$

(34)

В частности, в нашей задаче вероятность того, что лампочка была изготовлена вторым производителем, равна

$$Pr(A_2|B) = \frac{0.25 \cdot 0.01}{0.6 \cdot 0.02 + 0.25 \cdot 0.01 + 0.15 \cdot 0.03} = \frac{5}{38} \approx 0.13.$$

Формула (34) носит название теоремы Байеса и играет достаточно важную роль в ряду практических задачах. В этих задачах события A_i часто называют гипотезами, вероятность $Pr(A_i)$ — априорной вероятностью гипотезы A_i, а вероятность $Pr(A_i|B)$ трактуется как апостериорная вероятность наступления события A_i, то есть вероятность этого события после наступления события B.

Одна из наиболее популярных задач в этой области — это нахождение так называемой наиболее вероятной гипотезы, то есть события A_i, для которого $Pr(A_i|B)$ будет наибольшим среди всех A_i. В нашей задаче таковой будет, очевидно, гипотеза, состоящая в том, что перегоревшая лампочка была изготовлена первым производителем:

$$Pr(A_1|B) = \frac{0.6 \cdot 0.02}{0.019} = \frac{12}{19} \approx 0.63.$$

Так как знаменатель в формуле Байеса (34) равен $Pr(B)$ и не зависит от A_i, то общем случае для определения наиболее вероятной гипотезы следует найти такую гипотезу A_i, для которой величина $Pr(B|A_i) \cdot Pr(A_i)$ будет максимальной.

Довольно часто в такого рода задачах все априорные вероятности считаются одинаковыми и равными $1/n$. В этом случае наиболее вероятной гипотезой будет, очевидно, событие A_i с наибольшей условной вероятностью $Pr(B|A_i)$.

4 Теория вероятности. Испытания Бернулли. Формула Бернулли. Наивероятнейшее число исхо- дов. Примеры.

5 Теория вероятности. Теорема Пуассона. Примеры.

6 Теория вероятности. Локальная теорема Муавра-Лапласа. Примеры.

7 Теория вероятности. Интегральная теорема Муавра-Лапласа(б.д.). Примеры

8 Теория вероятности. Дискретные случайные величины. Закон распределения. Функция распределения. Примеры

9 Непрерывные случайные величины. Функция распределения. Плотность распределения. При- меры.

10 Теория вероятности. Математическое ожидание. Свойства. Дискретные и непрерывные приме- ры.

11 Теория вероятности. Моменты случайных величин. Дисперсия. Свойства. Дискретные и непре- рывные примеры

12 Теория вероятности. Ковариация. Коэффициент корреляции. Свойства. Примеры.

13 Теория вероятности. Неравенство Маркова. Неравенство Чебышёва. Примеры использования.

14 Теория вероятности. Закон Больших Чисел. Примеры использования. Выводы из ЗБЧ.

15 Теория вероятности. Центральная предельная теорема(б.д.). Примеры использования (теоремы Муавра-Лапласа). Выводы из ЦПТ.

Определение: Простой граф - граф, не содержащий петель и мультиребер.

Определение: Мультиграф - граф, не являющийся простым.

Определение: Если в $G = (V, E, I)$ $I : e \in E \mapsto (x, y) \in V$, где (x, y) - упорядоченная пара, то G - ориентированный граф (орграф). Говорят, что ребро e выходит из вершины x и входит в вершину y.

Определение: Полный граф K_n - граф на n вершинах, у которого любые две различные вершины соединены одним ребром.

Определение: Дополнение графа G - граф $\overline{G}$ на вершинах из V_G, ребра которого дополняют E_G до множества ребер полного графа.

Определение: Пустой граф - $\overline{K_n}$, т.е. граф без ребер.

Определение: Если вершина x - конец ребра e, то x и e называются инцидентными.

Определение:
Смежные ребра - ребра, имеющие общий конец.
Смежные вершины - вершины, соединенные ребром.

Определение: Степень вершины $d_G(v)$ (валентность вершины) - количество ребер, инцидентных x. Считается, что петля дает вклад, равный 2, в степень любой вершины.
Минимальная степень вершины графа G обозначается как $\delta(G)$.
Максимальная степень вершины графа G обозначается как $\Delta(G)$.

Теорема (лемма о двух рукопожатиях):

$$\sum_{x \in V_G} deg(x) = 2|E_G|$$

Доказательство: Пусть G - пустой граф, тогда сумма степеней вершин равна 0.
Добавим ребро, связывающее любые две вершины, тогда сумма всех степеней увеличится на 2. Значит, если добавим n ребер, то сумма всех степеней увеличится на $2n$.

Определение: Регулярный граф - граф G, у которого степени всех его вершин одинаковы. Если степени равны k, то такой граф называют k-регулярным графом.

17 Теория графов. Маршруты, пути и простые пути в графах. Разные подходы к определению путей. Связность.

Определение: Маршрут - последовательность вершин $a_1a_2...a_n$ и ребер $e_1...e_{n-1}$ графа G, где $e_i = a_ia_{i+1}$ $\forall i \in [1, ..., n-1]$.

Определение:
Путь - подграф графа G, состоящий из ребер и вершин, по которым этот путь проходит.
Путь - маршрут $a_1a_2...a_n$, не проходящий ни по какому ребру дважды.
a_1 - начало пути, a_n - конец пути.
Длина пути - количество его ребер.

Определение: Простой путь - путь, в котором все вершины $a_1a_2...a_n$ различны.

Определение: Если граф P - простой путь, то его внутренность $Int(P)$ - множество всех вершин, отличных от начала и конца этого пути. Вершины из $Int(P)$ называются внутренними вершинами пути P.

Определение: Вершины a и b графа G называются связанными, если в графе существует путь между ними.

Определение: Связный граф - граф, в котором все вершины связанные.

Определение: Связанность - отношение эквивалентности, которое делит граф G на классы эквивалентности (т.н. компоненты связности).

Определение:
Компонент графа G - подграф G, индуцированный на его компонентах связности.
$c(G)$ - количество компонент связности в графе G.

18 Теория графов. Замкнутые маршруты, циклы и простые циклы. Разные подходы к определению циклов. Двусвязность.

Определение: Замкнутый маршрут - маршрут, у которого $a_1 = a_n$.

Определение:
Цикл - последовательность вершин $a_1a_2...a_n$ и *различных* ребер $e_1e_2...e_n$ графа G, где $e = a_ia_{i+1}$ $\forall i \in [1, ..., n-1]$.

Цикл - подграф графа G, состоящий из вершин и ребер, по которым этот цикл проходит.
Длина цикла - количество его ребер.

Определение: Простой цикл - цикл, у которого все вершины различны. Простой цикл из трех вершин - треугольник.

Определение: Двусвязность -

19 Теория графов. Мосты и шарниры. K-связность. Соотношение Уитни.

Определение: Мост - ребро e графа G, т.ч. при удалении его из G граф $G-e$ имеет больше компонент связности по сравнению с G. Ребро является мостом тогда и только тогда, когда оно не входит ни в один цикл.

Определение: Шарнир - вершина v графа G, при удалении которой количество компонент связности возрастает.

Определение:
Граф называется вершинно k-связным, если удаление любых $k-1$ вершин оставляет граф связным.
Граф называется реберно k-связным, если удаление любых $k-1$ ребер оставляет граф связным.

Соотношение Уитни:

$$\kappa \leq \lambda \leq \delta$$

κ - вершинная связность.
λ - реберная связность.
δ - минимальная степень вершины в графе.

Доказательство:
Докажем сначала первое неравенство. Рассмотрим этот набор из λ рёбер, делающих граф несвязным. Если мы возьмём от каждого из этих ребёр по одному концу (любому из двух) и удалим из графа, то тем самым с помощью $\leq \lambda$ удалённых вершин (поскольку одна и та же вершина могла встретиться дважды) мы сделаем граф несвязным. Таким образом, $\kappa \leq \lambda$.
Докажем второе неравенство. Рассмотрим вершину минимальной степени, тогда мы можем удалить все δ смежных с ней рёбер и тем самым отделить эту вершину от всего остального графа. Следовательно, $\lambda \leq \delta$.

20 Теория графов. Деревья. 7 определений и их эквивалентность.

Определение:
Дерево - связный граф без циклов.
Лес - граф без циклов.
Лист - вершина графа G, имеющая степень 1.

7 определений дерева:
1. G - дерево.
2. Любые две вершины графа G соединены единственным простым путем.
3. G - связный граф; количество вершин = количество ребер + 1.
4. G - ацикличный граф; количество вершин = количество ребер + 1.
5. G - ацикличный граф и при добавлении любого ребра к двум несмежным вершинам образуется один простой цикл.
6. G - связный граф, отличный от K_n для $n > 3$, а также при добавлении любого ребра для несмежных вершин появляется один простой цикл.
7. G - граф, отличный от $K_3 \cup K_1$ и $K_3 \cup K_2$, а также количество вершин = количество ребер + 1, и при добавлении любого ребра для несмежных вершин появляется один простой цикл.

Доказательство:

21 Теория графов. DFS и BFS.

DFS:

BFS:

22 Теория Графов. Эйлеровы графы. Теорема Эйлера. Следствие о эйлеровом пути. Алгоритм нахождения цикла Эйлера.

Определение: Эйлеров путь в графе G - путь, проходящий по каждому ребру ровно 1 раз.

Определение: Эйлеров цикл в графе G - цикл, проходящий по каждому ребру ровно 1 раз.

Определение: Эйлеров граф - граф, в котором есть эйлеров цикл.

Теорема Эйлера:
В графе $G = (V, E)$ существует эйлеров цикл тогда и только тогда, когда:

1. Все вершины имеют четную степень.
2. Все компоненты связности (кроме, может быть, одной) не содержат ребер.

Доказательство:

Следствие о эйлеровом пути:
В графе $G = (V, E)$ существует эйлеров путь тогда и только тогда, когда:
1. Количество вершин с нечетной степенью меньше или равно двум.
2. Все компоненты связности кроме, может быть одной, не содержат ребер.

Доказательство:

Алгоритм нахождения цикла Эйлера:
Начиная со стартовой вершины v строим путь, добавляя на каждом шаге не пройденное еще ребро, смежное с текущей вершиной. Вершины пути накапливаются в стеке S. Когда наступает такой момент, что для текущей вершины w все инцидентные ей ребра уже пройдены, записываем вершины из S в ответ, пока не встретим вершину, которой инцидентны не пройденные еще ребра. Далее продолжаем обход по не посещенным ребрам.

Псевдокод для тех, у кого лапки:

23 Теория Графов. Гамильтоновы графы. Определения. Необходимые условия. Критерий Дирака (как следствие критерия Оре).

Определение: Гамильтонов путь в графе - простой путь, проходящий по каждой вершине графа.

Определение: Гамильтонов цикл в графе - простой цикл, проходящий по каждой вершине графа.

Определение: Гамильтонов граф - граф, в котором есть гамильтонов цикл.

Критерий Дирака:
Если $n \geq 3$ и $d_G(v) \geq \frac{n}{2}$ для любой вершины v неориентированного графа G, то G - гамильтонов граф.

Доказательство:

24 Теория графов. Гамильтоновы графы. Критерий Оре.

Критерий Оре:
Если $n \geq 3$ и $d_G(v) + d_G(u) \geq n$ для любых двух различных несмежных вершин u и v неориентированного графа G, то G - гамильтонов граф.

Доказательство:

25 Теория графов. Алгоритмы нахождения гамильтонова цикла в условиях выполнения критериев Оре и Дирака.

О кайф я это на алгосах вчера сдавала

26 Теория графов. Последовательности де Брёйна. Определение. Нахождение с помощью гамильтонова цикла. Нахождение с помощью эйлерова цикла. Примеры.

Определение: Последовательность де Брёйна - циклический порядок $a_1, ..., a_t$ элементы которого принадлежат заданному конечному множеству (обычно рассматривают множество $\{0, 1, ..., k-1\}$), такой, что все его подпоследовательности $a_{i+1}, ..., a_{i+n}$ заданной длины n различны.

Нахождение с помощью гамильтонова цикла:

Нахождение с помощью эйлерова цикла:

Примеры: