Билеты по дискретной математике, 5 модуль

ПАДИИ, 2 курс

25 октября 2024 г.

1 Остовные деревья. Мотивация. Рекуррентная формула вычисления количества остовных деревьев в графе(формула Кэли).

Определение:
Дерево - связный граф без циклов.

Определение:
Остовное дерево графа G - ациклический связный подграф G, в который входят все вершины из G.

Количество остовных деревьев в графе (формула Кэли):
Пусть G - граф (возможно, с петлями и кратными ребрами), $e \in E(G)$ и e - не петля.

$$T(G) = T(G \setminus e) + T(G * e),$$

где $T(G)$ - количество остовных деревьев в графе G.

Доказательство:
Количество остовных деревьев графа G без ребра e равно $T(G \setminus e)$.
Между остовными деревьями графа $G * e$ и остовными деревьями, содержащими ребро e, существует взаимно однозначное соответствие.
Значит,

$$T(G) = T(G \setminus e) + T(G * e).$$

2 Остовные деревья. Количество деревьев в полном графе (Теорема Кэли).

Теорема Кэли:

$$T(K_n) = n^{n-2}$$

Доказательство:
Построим взаимно однозначное соответствие между остовными деревьями K_n и числовыми последовательностями длины $n-2$, в которых каждый член принимает значение от 1 до n.
Пусть T - дерево на вершинах $[1...n]$. Пусть l_1 - висячая вершина наименьшего номера в дереве T, тогда t_1 - единственная смежная с l_1 вершина дерева T.
То же самое проделаем для вершин дерева $T_1 = T \setminus l_1$, и т.д. будем повторять процесс, пока не получим последовательность длины $n-2$.

Теперь построим обратное соответствие.
Пусть дана последовательность $t_1, ..., t_{n-2}$ с элементами из $[1...n]$. По построению каждая вершина x встречается в последовательности дерева T ровно $\deg_T(x) - 1$ раз, поэтому вершины, которые не встречаются в этой последовательности, - висячие.
Выберем такую вершину l_1 с наименьшим номером и соединим ее с t_1, после этого удалим l_1 из списка номеров. И так далее, повторим такую операцию $n-2$ раза. В результате будет использована вся последовательность и проведено $n-2$ ребра, останется множество V_{n-2}, состоящее из 2 вершин и одно непроведенное ребро дерева T.

3 Остовные деревья. Матричная теорема.

Определение:
Лаплассиан графа G $L(G)$ - матрица $n \times n$, где $l_{ii} = \deg i$, $l_{ij} = -1$, если ребро между вершинами i и j существует, $l_{ij} = 0$, если ребро не существует.

Теорема Кирхгофа:
G - граф без петель (возможно, с кратными ребрами) на $n \geq 2$ вершинах, L - его лаплассиан.
Тогда
$$T(G) = (-1)^{i+j} \det A_{k \neq i, l \neq j}$$
Доказательство:
При одновременной перестановке пары строк и пары столбцов с такими же номерами знак определителя не меняется. Поэтому нумерация вершин не имеет значения, что мы будем использовать.
Индукция по числу вершин.

База: $n = 1$. Очевидно.

Переход: $n \longrightarrow n+1$.

Случай $\deg(1) = 0$. $T(G) = 0$, т.к. граф не связный. Тогда в L первая строка и первый столбец состоят из нулей. Сумма элементов в каждой строке и столбце матрицы $L_{1,1}$ равна нулю $\Longrightarrow \det = 0$.

Случай $\deg(1) \geq 1$.
Предположим, что граф на $n+1$ вершине содержит ребро e. Не умаляя общности считаем, что e соединяет вершины 1 и 2.
Знаем, что $T(G) = T(G \setminus e) + T(G * e)$. Пусть $H = G * e$, из которого удалили петли, $T(H) = T(G * e)$. L' - лапласиан графа $G \setminus e$, L^* - лапласиан графа H.
По индукционному предположению $T(G \setminus e) = \det L'_{1,1}$ и $T(G * e) = \det L^*_{1,1}$.
При удалении ребра e степени 1 и 2 уменьшаются на 1, а к l_{12} и l_{21} прибавляется 1.
Тогда $L'_{1,1}$ отличается от графа $L_{1,1}$ только в элементе $l_{2,2}$: у $L'_{1,1}$ он на 1 меньше.
В графе H перенумеруем вершины так, что вершина, полученная объединением вершин 1 и 2 имеет номер 1, остальные номера остаются как прежде.
Тогда все элементы матрицы L^* вне 1 строки и 1 столбца равны элементам L с соответствующими индексами, т.е.

$$L^*_{1,1} = (L_{1,1})_{1,1}$$

Разложим $\det L_{1,1}$ по первой строке:

$$\det L_{1,1} = \sum_{j=2}^{n} (-1)^{2+j} l_{2j} \det((L_{1,1})_{2,j})$$

$$\det L_{1,1} = \det(L^*_{1,1}) + \left((l_{22} - 1) \cdot \det(L^*_{1,1}) + \sum_{j=3}^{n} (-1)^{2+j} l_{2j} \det((L_{1,1})_{2,j}) \right)$$

$$\det L_{1,1} = \det L^*_{1,1} + \det L'_{1,1}$$

Теорема доказана.

Следствие:

$$T(G) = (-1)^{i+j} \det(L_{ij}) \forall i, j$$

Доказательство:

4 Остовные деревья. Теорема Шустера.

Обозначение
$U(T)$ - число висячих вершин в дереве T.

Теорема Шустера
G - произвольный граф.
T, T_* - остовные деревья G.

$U(T) = m,\ U(T_*) = n,\ m < n.$
Тогда $\exists\ T_{m+1}, T_{m+2}, ..., T_{n-1} :\ U(T_i) = i.$

Доказательство
Шаг 1. Пусть построены $T_m, T_{m+1}, ..., T_i,\ i \in [m, n-1]$. Покажем, что переход $i \longrightarrow i+1$ корректен.
$T_i \neq T_* \Longrightarrow \exists e_i \in E(T_*) \setminus E(T_i)$.

Шаг 2. Рассмотрим граф $G_i = T_i \cup \{e_i\}$. В G_i существует цикл, он простой и единственный.

Шаг 3. Возьмем ребро f_i, которое есть в цикле, и при этом $f_i \notin T_*$. Оно точно найдется, т.к. если бы все ребра в цикле принадлежали T_*, то T_* не было бы остовным.

Шаг 4. Рассмотрим граф $T_{i+1} = \widetilde{G_i} = G_i \setminus \{f_i\}$ - это остовное дерево.

Заметим, что с каждым повторением шагов 1 - 4 в графе $\widetilde{G_j}$ становится все больше ребер из $E(T_*)$, поэтому в какой-то момент случится, что $\widetilde{G_j} = T_*$.

Т.к. $\widetilde{G_j}$ отличается от G_j двумя ребрами, то

$$|U(G_j) - U(\widetilde{G_j})| \leq 2.$$

Нужно показать, что для каждого $i \in [m+1, n-1]$ остовное дерево с i висячими вершинами существует. Предположим обратное.

Тогда из неравенства следует, что должны существовать T_j и T_{j+1}, причем $U(T_j) = i-1,\ U(T_{j+1}) = i+1$. $T_{j+1} = G_j \setminus \{f_j\}$ и $T_j = G_j \setminus \{e_j\}$. Это значит, что в цикле существуют вершины степени 2 и вершины степени > 2, т.е.

$$\exists uv \in E(G_j) :\ \deg u = 2,\ \deg v > 2$$

Получается, при удалении uv из G_j появляется ровно 1 висячая вершина (та, у которой степень равнялась 2), т.е. остовное дерево с i висячими вершинами построить можно.

5 Остовные деревья. Теорема Клейтмана-Веста.

Теорема Клейтмана-Веста:
В связном графе G с $\delta(G) \geq 3$ существует остовное дерево с не менее чем $V(G) \cdot \frac{1}{4} + 2$ висячими вершинами.

Доказательство:
Эта оценка точная: возьмем граф из воздушных змеев.

1. Разорвем один из мостиков. В каждом квадрате не более 1 висячей вершины, значит, посередине $\leq n-2$ висячих вершины и по краям ≤ 2 у одного крайнего квадрата и ≤ 2 у другого крайнего квадрата.
Значит, всего $\leq n+2$ висячих вершин.

2. Если в квадрате удаляем связность, то в нем ≤ 3 висячих вершин, в остальных квадратах ≤ 1 висячая вершина.
Значит, всего $\leq n-1+3 = n+2$ висячих вершин.

Пусть F - дерево в графе G. Назовем вершину x дерева F мертвой, если все соседи x в G также включены в дерево. Обозначим количество висячих вершин за $u(F)$, количество мертвых вершин за $b(F)$.

$$\alpha(F) = \frac{3}{4}u(F) + \frac{1}{4}b(F) - \frac{1}{4}v(F)$$

Пусть F - остовное.

$$\alpha(F) = u(F) - \frac{1}{4}v(F),$$

т.к. все висячие вершины являются мертвыми.

$$\alpha(F) \geq 2 \Longrightarrow u(F) \geq \frac{1}{4}v(F) + 2 = \frac{1}{4}v(G) + 2$$

Значит, нужно показать, что $\alpha(F) \geq 2$.

Теперь покажем, что в любом графе G, удовлетворяющем условию теоремы Клейтмана-Веста, найдется дерево F_0, т.ч. $\alpha(F_0) \geq \frac{3}{2}$.
Возьмем вершину с максимальной степенью - это будет корень дерева.
1. Ее степень $k \geq 4$. Тогда наше дерево - ёжик.

$$\alpha(F_0) = \frac{3}{4}u(F_0) + \frac{1}{4}b(F_0) - \frac{1}{4}v(F_0)$$

$$\alpha(F_0) = \frac{3}{4}k + (\geq 0) - \frac{1}{4}(k+1) \geq \frac{2k-1}{4} \geq \frac{7}{4} > \frac{3}{2}$$

2. $\forall v \deg v = 3$. Если хотя бы одна из вершин, смежных с корнем мертвая, то

$$\alpha(F_0) = \frac{3}{4} \cdot 3 + (\geq \frac{1}{4}) - 1 \geq \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Если мертвых нет, то существует вершина, не соединенная с двумя другими, значит, еще 2 висячих вершины существуют.

$$\alpha(F_0) = \frac{3}{4} \cdot 4 + (\geq 0) - \frac{6}{4} \geq \frac{3}{2}$$

Значит, F_0 - нужное нам дерево.

Теперь предъявим алгоритм построения такого дерева.

Пусть $P = \alpha(F_i) - \alpha(F_{i-1}) = \frac{3}{4}\Delta u + \frac{1}{4}\Delta b - \frac{1}{4}\Delta v$ - доход шага. Нужно показать, что он неотрицательный.

Шаг 1. Если в дереве F есть невисячая вершина x, смежная с y из еще не добавленных вершин, то присоединим y к дереву.

$$\Delta u = 1, \Delta v = 1, \Delta b \geq 0 \Longrightarrow P \geq \frac{1}{2}$$

Шаг 2. Если в дереве есть вершина x, смежная с еще не добавленными вершинами y_1, y_2, то присоединим их к дереву.

$$\Delta u = 1, \Delta v = 2, \Delta b \geq 0 \Longrightarrow P \geq \frac{1}{4}$$

Шаг 3. Если существует не добавленная вершина y, смежная с деревом F и хотя бы с двумя недобавленными вершинами, то присоединим к дереву вершину y и эти две вершины.

$$\Delta u = 1, \Delta v = 3, \Delta b \geq 0 \Longrightarrow P \geq 0$$

Шаг 4. Если существуют не вошедшие в дерево вершины, то существует не присоединенная вершина y, смежная с вершиной x из дерева. Соединим их.

$$\Delta u = 0, \Delta v = 1, \Delta b \geq 1 \Longrightarrow P \geq 0$$

Значит, каждый доход неотрицательный.

Покажем, что итоговая оценка $\alpha(F) \geq 2$.
Шаг 1 добавит $\geq \frac{1}{2}$ - в этом случае победа.
Шаг 2 добавит $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ - тоже победа.
Шаг 3 добавит $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ - успех.
Шаг 4 добавит $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ - успех.

Теорема доказана.

6 Паросочетания. Мотивация. Максимальные, наибольшие и совершенные паросочетания. Теорема Бержа о дополняющих путях.

Определение
Паросочетание - множество P, $P \subset E(G)$, т.ч.

$$\forall e_i, e_j \in P \nexists v : \ I(e_i, v) \wedge I(e_j, v).$$

$I(e_i, v)$ - инцидентность ребра e_i и вершины v.

Пачка определений
Паросочетание называется *максимальным*, если в него нельзя добавить ребро.

Паросочетание называется *наибольшим*, если не существует паросочетания с большей мощностью.

Паросочетание называется *совершенным*, если оно покрывает все вершины в G.

Чередующаяся цепь - последовательность ребер, в которой чередуются ребра, лежащие в паросочетании и не лажащие.

Увеличивающая цепь - цепь, крайние вершины которой не принадлежат паросочетанию.

Теорема Бёржа
Паросочетание M является наибольшим $\Longleftrightarrow$ нет увеличивающих цепей.

Доказательство
" $\Longrightarrow$ " :
Пусть в графе G существует увеличивающая цепь $S = e_1 e_2 ... e_{2k}$.
Заменим ребра, входящие в M на не входящие, и наоборот. Размер паросочетания увеличился. Противоречие.

" $\Longleftarrow$ " :
Пусть M не является наибольшим. Рассмотрим M' - наибольшее, $|M'| > |M|$.
Пусть $N = M \triangle M' = (M \cup M') \setminus (M \cap M')$, $H = G(N)$ - индуцированный подграф G.
Степень каждой вершины в H не больше 2 (т.к. каждая вершина может быть инцидентна ребру из M и/или ребру из M'), значит H состоит из циклов и/или путей.
В каждом из этих путей/циклов ребра из M и M' чередуются. Т.к. в M' ребер больше, то в существует путь нечетной длины, в котором ребер из M' больше, и этот путь будет являться увеличивающей цепью для M. Противоречие, т.к. по условию увеличивающих цепей нет. Значит, M - наибольшее паросочетание.

7 Паросочетания. Алгоритм Куна.

Алгоритм Куна:
Пусть $G(V, E)$ - двудольный граф.
Пока в G удаётся найти увеличивающую цепь, будем выполнять чередование паросочетания вдоль этой цепи и повторять процесс поиска увели-

чивающей цепи. Как только такую цепь найти не удастся, получившееся паросочетание будет наибольшим.

8 Паросочетания в двудольном графе. Лемма Холла.

Теорема:
Пусть $G = (V_1, V_2, E)$ - двудольный граф, причем $\forall U \subset V_1\ |U| \leq |N(U)|$. Тогда это равносильно тому, что в графе существует паросочетание, покрывающее V_1.

Доказательство:
$\Longleftarrow$: Очевидно.
$\Longrightarrow$: простая индукция по построению.

Лемма Кёнига:
а) Если G - двудольный регулярный граф, то существует совершенное паросочетание.
б) Если G - двудольный $k-$регулярный граф, то $G = \bigsqcup_{i=1}^{k} P_i$, где P_i - совершенное паросочетание.

Доказательство:
а)

б) Пусть P_1 - совершенное паросочетание в графе G. $G \setminus P_1$ - двудольный $(k-1)$-регулярный граф. Продолжим выделять совершенные паросочетания, пока не кончатся ребра, т.е. k раз.

9 Величины $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$. Соотношение между ними.

Определение:
Множество $U \subset V(G)$ называется *независимым*, если все его вершины попарно не смежные.
Множество $W \subset V(G)$ называется контролирующим, если оно покрывает все ребра графа.

Определение:
α - размер наибольшего независимого множества вершин.
α' - размер наибольшего паросочетания.
β - размер наименьшего контролирующего множества.
β' - размер наименьшего реберного покрытия.

Теорема Кёнига:
G - двудольный граф.
Тогда
$$\alpha' = \beta.$$

Доказательство:
U_1 - наименьшее контролирующее множество, U_2 - множество вершин, входящих в наибольшее паросочетание.

1. $\alpha' \geq \beta$.
От противного: пусть $\alpha' < \beta$. Возьмем $v \in U_1,\ v \notin U_2$.
Если все ее соседи входят в U_1, тогда уберем v из U_1. Наименьшее контролирующее множество уменьшилось $\Longrightarrow$ противоречие.
Если у v есть соседи, которые не входят в U_1, тогда проведем между ними ребро и добавим в U_2, т.е. увеличим наибольшее паросочетание. Противоречие.
Значит, $\alpha' \geq \beta$.

2. $\alpha' \leq \beta$.
От противного: пусть $\alpha' > \beta$. Контролирующее множество вершин покрывает все ребра графа, в том числе ребра, входящие в наибольшее паросочетание, значит, $\alpha' \geq \beta \Longrightarrow$ противоречие.

Получается, $\alpha' = \beta$.

Формула:
$U \subset V(G)$ - контролирующее множество $\Longleftrightarrow V(G) \setminus U$ - независимое множество.
Тогда
$$\alpha(G) + \beta(G) = V(G).$$

Теорема Галлаи:
$$\alpha'(G) + \beta'(G) = |V(G)|.$$

Доказательство:
1. $\alpha'(G) + \beta'(G) \leq |V(G)|$.
P - наибольшее паросочетание, U - множество вершин, не покрытых P, тогда
$$|U| = |V| - 2\alpha'$$

Выберем множество F из $|U|$ ребер, покрывающее U, тогда $F \cup P$ - покрытие графа G.

$$\beta'(G) \leq |F \cup P| \leq \alpha'(G) + |V(G)| - 2\alpha'(G) \Longrightarrow \alpha' + \beta' \leq |V|.$$

2. $\alpha'(G) + \beta'(G) \geq |V(G)|$.
Пусть L - наименьшее реберное покрытие.
Рассмотрим граф $H = (V(G), L)$. В нем $C(H)$ компонент связности. Возьмем по 1 ребру из каждой компоненты, получим какое-то паросочетание Q в графе H.
Тогда

$$\begin{cases} \alpha' \geq |Q| = |C(H)| \\ \beta' = |L| = |E(H)| \geq |V(H)| - |C(H)| = |V(G)| - |C(H)| \end{cases} \Longrightarrow \alpha' + \beta' \geq |V(G)|. \tag{1}$$

Формула:
G - двудольный граф. Тогда

$$\alpha(G) = \beta'(G).$$

10 Паросочетания в произвольном графе. Теорема Татта.

Определение:
$O(G)$ - количество нечетных компонент связности графа G.

Условие Татта:
$O(G \setminus S) \leq |S|$ - условие Татта.

Множество Татта:
S - множество Татта, если $O(G \setminus S) > |S|$.

теорема Татта:
$\forall S \subset V(G)\ O(G \setminus S) \leq |S| \Longleftrightarrow$ в G есть совершенное паросочетание.

Доказательство:
$\Longleftarrow$ Пусть $S \subset V(G)$, M - совершенное паросочетание. Тогда хотя бы одна из вершин каждой нечетной компоненты связности графа $G \setminus S$ должна быть соединена с вершиной из S ребром из паросочетания M, получили $O(G \setminus S) \leq |S|$.

$\Longrightarrow$ Пусть существует граф G, в котором нет совершенного паросичетания, и который не содержит множество Татта. Возьмем такой, что в нем максимальное число ребер и минимальное число вершин.

Лемма 1
Пусть u и v - не смежные вершины. Тогда
$$O(G \cup uv) \leq O(G).$$

Доказательство:
Добавление ребра не увеличивает число нечетных компонент связности.

Лемма 2
Если G не содержит множество Татта и u, v - несмежные вершины, то $G \cup uv$ тоже не содержит множество Татта.

Доказательство:
Рассмотрим $S \subset V(G)$.
$(G \cup uv) \setminus S)$ равен $G \setminus S$ или $(G \setminus S) \cup uv$, значит, $O((G \cup uv) \setminus S) \leq O(G \setminus S) \implies O((G \cup uv) \setminus S) \leq |S|$.

Вернемся к доказательству теоремы Татта.
G содержит четное число вершин, т.к. он удовлетворяет условию Татта. $G \neq K_n$.
Рассмотрим $U = \{v | \deg v = n - 1\}, U \neq V(G)$.

Лемма 3
Компоненты связности $G \setminus U$ - полные графы.

Доказательство:
Предположим, что в $G \setminus U$ есть компонента связности, которая не является полным графом. В ней как минимум 2 ребра.
Выберем ребра xy и xz, т.ч. y и z не связаны ребром. $x \notin U \implies \exists w$, т.ч. x и w не связаны ребром.
Заметим, что при добавлении любого ребра в G в нем появится совершенное паросочетание (мы так его определили).
Если добавим в G ребро yz, получим совершенное паросочетание M_1, $yz \in M_1$.
Если добавим в G ребро xw, получим совершенное паросочетание M_2, $xw \in M_2$.
В $M = M_1 \oplus M_2$ содержатся какие-то ребра из G, а также yz и xw.
В M содержатся только циклы и изолированные вершины (путей быть не может, т.к. все вершины покрыты паросочетанием) $\implies$ все компоненты связности M - циклы.

1. yz и xw содержатся в разных компонентах связности M.
Найдем паросочетание в G без ребер yz и xw: в компоненте связности, содержащей yz, выберем ребра из M_2, в компоненте связности, содержащей xw, выберем ребра из M_1, в остальных компонентах связности возьмем любое

паросочетание. Если какие-то ребра лежали в $M_1 \cap M_2$, то их всех возьмем. Получается, в G существует совершенное паросочетание (в котором нет ребер yz и xw).

2. yz и xw лежат в одной компоненте связности M.
Тогда в правой части цикла возьмем ребра из M_1, в левой части цикла возьмем ребра из M_2. Тогда останутся непокрытыми 2 вершины: x и z. Ребро xz существует, добавим его в паросочетание. Получили совершенное паросочетание в G.
Аналогично рассматривается ситуация для ребра xy.

По предположению в G нет совершенного паросочетания, значит, такой ситуации не существует. Получается, в $G \setminus U$ все компоненты связности - полные графы.

Воспользуемся *леммой 3*: граф $G \backslash U$ распался на несколько компонент связности (т.к. вершины в U имеют степень $n-1$, соответственно, они связывают между собой все вершины). В четных компонентах связности выделим совершенные паросочетания (это можно сделать, т.к. по лемме граф распался на полные подграфы). В нечетных компонентах связности выберем наибольшее паросочетание, тогда останется некоторое количество непокрытых вершин.

U не является множеством Татта $\Longrightarrow O(G \setminus U) \leq |U|$. Тогда для каждой непокрытой вершины из нечетных компонент связности выберем вершину из U и добавим ребро между ними в паросочетание (это можно сделать, т.к. вершины из U соединены со всеми вершинами в графе G).
Оставшиеся вершины из U соединим парами между собой. Значит, в G существует совершенное паросочетание.

Теорема доказана.

11 Паросочетания в произвольном графе. Теорема Петерсена о кубическом графе.

Лемма:
G - k-регулярный граф, $U \subset V(G)$, $|U|$ нечетно, m - число ребер, соединяющих вершины U с $V(G) \setminus U$.
Тогда
$$m \equiv k \mod 2.$$

Доказательство:

$$m = \Big(\sum_{v \in U} \deg v\Big) - 2|E(G(U))| = k|U| - 2|E(G(U))| \equiv k \mod 2$$

Теорема Петерсена:
Любой кубический граф, имеющий не более 2 мостов, обладает совершенным паросочетанием.

Доказательство:
Пусть в таком графе нет совершенного паросочетания. Тогда $\exists S \subset V(G)$: $O(G \setminus S) > |S|$.
Пусть $U_1, ..., U_n$ - компоненты связности нечетного размера.
Из каждой U_i могут идти ребра только в S, причем для каждой U_i их нечетное число по лемме. Обозначим количество таких ребер за $m_1, ..., m_n$.
В G не более 2 мостов $\Longrightarrow$ только у двух m_i мощность равна 1, у остальных мощность хотя бы 3.
$O(G \setminus S) > |S|$. Количество вершин в кубическом графе четно (по лемме о рукопожатиях), $S \neq \emptyset$, $O(G \setminus S) \equiv |S| \mod 2$. Значит, $n = O(G \setminus S) \geq |S| + 2$.

$$\sum_{v \in S} \deg v \geq \sum_{i=1}^{n} m_i \geq 3n - 4 \geq 3(|S| + 2) - 4 > 3|S| = \sum_{v \in S} \deg v.$$

Противоречие. Значит, любой кубический граф обладает совершенным паросочетанием.

12 Дефицит графа. Формула Бержа.

Определение:
Дефицит графа - множество вершин, не покрытых наибольшим паросочетанием.

Теорема Бержа:

$$|V(G)| - 2\alpha'(G) = \max(O(G \setminus S) - |S|)$$

Доказательство:
$\forall S \; |V(G)| + |S| + O(G \setminus S) \equiv 0 \mod 2$.
$\geq$: Пусть M - наибольшее паросочетание графа G, $S \subset V(G), n = O(G \setminus S)$, $U_1, ..., U_n$ - все нечетные компоненты связности $G \setminus S$.
Тогда в каждой U_i существует хотя бы одна вершина u_i, которая не покрыта ребром M или покрыта ребром $e = u_i x_i \in M$, где $x_i \in S$.
Значит, не менее $n - |S|$ из вершин $u_1, ..., u_n$ не покрыты M, т.е.

$$def(G) \geq O(G \setminus S) - |S|$$

.

$\leq$: Пусть

$$k = \max_{S \subset V(G)} O(G \setminus S) - |S|.$$

Если $k = 0$, то в графе существует совершенное паросочетание и $def(G) = 0$. Пусть $k > 0$. Создадим граф $W = K_k$, т.е. $W \cap V(G) = \emptyset$. H - граф, полученный присоединением W к G, причем каждая из вершин W смежна со всеми вершинами из G.

Докажем, что $\forall S \subset V(H)$ $O(G \setminus S) \leq |S|$.

Рассмотрим $S \subset V(H)$.
1. Если W не является подмножеством S, то W - связный. Тогда $O(H \setminus S) \leq 1$.
a) $O(H \setminus S) = 0$ - все хорошо.
b) $O(H \setminus S) = 1$.
$|V(H)| = n + k = n + O(G \setminus A) - |A|$ - четное число, значит, $|S|$ нечетная, т.е. $|S| \geq 1$.

2. $W \subset S$.
$O(H \setminus S) = O(G \setminus (S \cap V(G))) \leq |S \cap V(G)| + k \leq |S|$.

Значит, в графе H выполняется условие Татта и в нем есть совершенное паросочетание.

В графе существует паросочетание M, т.ч. $|M| \geq |N| - k$, значит,

$$\alpha'(G) \geq |M| \geq \frac{V(G) + k}{2} - k = \frac{V(G) - k}{2}$$

13 Фактор-критические графы. Теорема Галлаи о фактор-критическом графе.

Определение:
Фактор-критический граф - граф, в котором при удалении любой вершины можно построить совершенное паросочетание.

Теорема Галлаи:
G - фактор-критический $\iff \alpha'(G \setminus u) = \alpha'(G)$.

Доказательство:
$\Longrightarrow$ по определению.

$\Longleftarrow$ Возьмем множество Татта S, т.ч. $O(G \setminus S) = |S| = def(G)$. Предположим, что $S \neq \emptyset$.

Пусть $v \in S, G' = G \setminus v, S' = S \setminus v$. $G' \setminus S' = G \setminus S$. Тогда

$$def(G \setminus v) = def(G') \geq O(G' \setminus S') - |S'| = O(G \setminus S) - |S| + 1 = def(G) + 1$$

$$def(G \setminus v) \geq def(G) + 1 = |V(G)| - 2\alpha'(G) + 1$$

$$\alpha'(G) \geq \frac{|V(G)| - def(G \setminus v) + 1}{2} = \frac{|V(G \setminus v)| - def(G \setminus v)}{2} + 1 = \alpha'(G \setminus v) + 1$$

Пришли к противоречию. Значит, $S = \emptyset$ и $def(G) = O(G) \leq 1$. В графе нет совершенного паросочетания, тогда $O(G) = 1 \Longrightarrow G$ – фактор-критический.

14 Лемма об устойчивости.

Обозначение:
$D(G)$ - множество всех вершин из $V(G)$, для каждой из которой существует наибольшее паросочетание, не покрывающее ее.
$A(G)$ - множество всех вершин графа G, не входящих в $D(G)$, но смежных хотя бы с одной вершиной оттуда.
$C(G)$ - оставшиеся вершины.

Лемма:
$a \in A(G)$.
Тогда

$$D(G \setminus a) = D(G)$$

$$A(G \setminus a) = A(G) \setminus a$$

$$C(G \setminus a) = C(G)$$

$$\alpha'(G \setminus a) = \alpha'(G) - 1$$

Доказательство:
1. $\alpha'(G \setminus a) = \alpha'(G) - 1$.
Это очевидно, т.к. при выкидывании любой вершины не из $D(G)$ размер паросочетания уменьшится не более чем на 1.

2. $D(G) \subset D(G \setminus a)$.
Рассмотрим $u \in D(G)$. Существует M_u - наибольшее паросочетание G, не покрывающее u (по определению).
Любое наибольшее паросочетание покрывает a, поэтому если $ax \in M_u$, то $M_u \setminus ax$ - наибольшее паросочетание в графе $G \setminus a$, не покрывающее u.
Значит, $D(G) \subset D(G \setminus a)$.

3. $D(G \setminus a) \subset D(G)$.
Рассмотрим $v \notin D(G),\ v \in D(G \setminus a)$.
Предположим, что существует M' - наибольшее паросочетание графа $G \setminus a$,

не покрывающее v.
У a есть сосед $w \in D(G) \Longrightarrow$ существует M_w - наибольшее паросочетание в G, не покрывающее w. M_w покрывает v, т.к. $v \notin D(G)$.

$M' \oplus M_w$ - какие-то четные циклы и четные и нечетные пути.
v - конец какого-то пути, т.к. M' не покрывает v.
a - конец какого-то пути, т.к. M' не покрывает a.

1. v - конец пути четной длины. Тогда a является концом другого пути. Тогда в пути, содержащем v возьмем в паросочетание ребра, входящие в паросочетание M', тогда v не будет содержаться в новом паросочетании, а размер нового и старого паросочетаний будут совпадать.
Значит, $v \in D(G) \Longrightarrow$ противоречие.

2. v и a - концы одного пути.
Возьмем в паросочетание такие ребра в этом пути, которые принадлежат M', а также ребро aw. Тогда новое паросочетание будет такого же размера, что и старое, но оно не будет покрывать v. Противоречие.

3. v - конец нечетного пути, но другой конец - не a.
Тогда в пути, содержащем вершину v, возьмем ребра из M_W. Получается, размер наибольшего паросочетания увеличился $\Longrightarrow$ противоречие с выбором наибольшего паросочетания.

Значит, $D(G \setminus a) \subset D(G)$.

4. $A(G \setminus a) = A(G) \setminus a$.
$A(G \setminus a) = N(D(G \setminus a)) \setminus D(G \setminus a) = N(D(G)) \setminus D(G) \setminus a = D(G) \setminus a$.

5. $C(G \setminus a) = C(G)$.
$C(G\setminus a) = V(G\setminus a)\setminus D(G\setminus a)\setminus A(G\setminus a) = (V(G)\setminus a)\setminus(A(G)\setminus a)\setminus D(G) = C(G)$.

15 Структурная теорема Галлаи-Эдмондса.

Теорема:
G - произвольный граф, $U_1, ..., U_k$ - компоненты связности $D(G)$, $D_i = G(U_i)$.

1. В $C(G)$ существует совершенное паросочетание.
2. $D(G) = \sqcup D_i$, D_i - фактор-критические, их k штук.
3. Любое наибольшее паросочетание G содержит совершенное паросочетание в $C(G)$, почти совершенное паросочетание в $D_1, ..., D_k$ и любая вершина из $A(G)$ покрыта ребром в $D(G)$.
4. $def(G) = k - |A(G)|$.

Доказательство:
Воспользуемся леммой о стабильности столько раз, что $A(G) = \emptyset$. Тогда

$$D(G \setminus A) = D(G)$$

$$A(G \setminus A) = \emptyset$$

$$C(G \setminus A) = C(G)$$

$$\alpha'(G \setminus A) = \alpha'(G) - |A|$$

1. $C(G)$ имеет совершенное паросочетание, т.к. $A = \emptyset$, все вершины из D имеют соседей только в D и любое наибольшее паросочетание покрывает все вершины из $C(G)$.

2. $U_1, ..., U_k$ - компоненты связности графа $G \setminus A$.
$\forall u \in U_i$ существует наибольшее паросочетание M_u в графе $G \setminus A$, не содержащее u, тогда наибольшее паросочетание графа D_i содержится в M_u.
Значит, $\alpha'(D_i \setminus u) = \alpha'(D_i)$ $\forall u \in D_i$, и по т. Галлаи D_i - фактор-критический граф.

3. Пусть M - наибольшее паросочетание в G. M' - наибольшее паросочетание в графе $G \setminus A$.
$|M'| \geq |M| - |A| = \alpha'(G) - |A| = \alpha'(G \setminus A) \Longrightarrow M'$ - наибольшее паросочетание в $G \setminus A$.

$$M' = M_C \cup \bigcup_{i=1}^{k} M_{D_i}$$

Тогда какие-то вершины из A соединены с непокрытыми вершинами в D_i.

4. Следует из п.3.

16 Идеи следствий из структурной теоремы: f-факторы, алгоритм соцветий, критерии наличия совершенного паросочетания.

Следствие:
1. $O(G \setminus B(G)) \leq |B(G)|$.

Критерий существования совершенного паросочетания:
абоба

Алгоритм поиска соцветий:
На практике построение множеств A, B, C - не очень простая идея.
Тогда будем решать немного другую задачу. Знаем, что любой граф можно представить в виде множеств , , . Научимся искать фактор-критические

компоненты из . Такие компоненты - нечетные, любая вершин из компоненты может не быть в совершенном паросочетании. Тогда эти фактор-критические компоненты будут образововывать циклы нечетной длины. Таким образом, мы можем выделять в графе фактор-критические компоненты.

Сам алгоритм разбирать не будем. Рассмотрим лишь его краткую версию. Пусть у нас есть цикл нечетной длины. Присоединим к нему ребро. Такой цикл не даст нам фактор-критического множества. Идея заключается в том, чтобы находить циклы нечетной длины с путем четной длины (добавили еще одно ребро для четности). Такой набор будем называть соцветием.

Определение:
$k-$фактор – $k-$регулярный остовный подграф.