Билеты по дискретной математике, 4 модуль

ПАДИИ, 1 курс

17 June 2024

1 Индивидные переменные. k-местные формулы и предикаты. Константы.

Определение:
$M \neq \varnothing$
$M^k = \{(x_1, x_2, ..., x_k) \mid x_i \in M\}$, k - валентность.

$f : M^k \longrightarrow M$ - k-местная функция.
$P : M^k \longrightarrow \mathbb{B}$ - k-местный предикат.

Определение:
Функциональные символы - обозначения для функций.
Предикатные символы - обозначения для предикатов.

Определение:
Сигнатура - произвольный набор из предикатных и функциональных символов.

Определение:
Индивидные переменные - некоторый набор переменных, предназначенный для обозначения элементов множества.

Определение:
Константа - нульместный функциональный символ.

2 Атомарные функции и термы. Формулы языка первого порядка.

Определение:
Терм - последовательность переменных, запятых, скобок и символов сигнатуры, которую можно построить по следующим правилам:
1. Индивидная переменная - терм.
2. Функциональный символ валентности 0 - терм.

3. Если $t_1, t_2, ..., t_k$ - термы, а f - функциональный символ валентности $k > 0$, то $f(t_1, ..., t_k)$ - терм.

Определение:
Атомарная формула - выражение $A(t_1, t_2, ..., t_k)$, где A - предикатный символ валентности k, а $t_1, t_2, ..., t_k$ - термы.

Правила построения формул:
1. Атомарная формула - формула.
2. Если φ - формула, то $\neg\varphi$ - формула.
3. Если φ, ψ - формулы, то $\varphi \ \& \ \psi, \varphi \mid \psi, \varphi \longrightarrow \psi$ - формулы.
4. Если φ есть формула, а ξ — индивидная переменная, то выражения $\forall\xi\ \varphi$ и $\exists\xi\ \varphi$ являются формулами.

3 Язык первого порядка. Сигнатура и интерпретация. Примеры разных интерпретаций одной сигнатуры.

Такие формулы называются *формулами первого порядка*, а сигнатуры называются *языками первого порядка.*

Определение:
Пусть σ - сигнатура. Чтобы задать интерпретацию сигнатуры σ, необходимо:
1. Указать множество M - носитель интерпретации.
2. Для каждого предикатного символа сигнатуры σ указать предикат с соответствующим числом аргументов, определенный на M.
3. Для каждого функционального символа сигнатуры σ указать функцию с соответсвующим числом аргументов с аргументами и значениями из M.

Примеры:

4 Параметры формул. Свободные и связанные вхождения переменных. Проверка истинности формул. Оценки.

Определение:
Параметр формулы - свободная переменная формулы.

1. Параметры терма - все входящие в него индивидные переменные.
2. Параметр атомарной формулы - параметры всех входящих в нее термов.

3. Параметры формулы $\neg\varphi$ такие же, что и у формулы φ.
4. Параметры формул $\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \longrightarrow \psi$ - параметры формул φ и ψ.
5.Параметры формул $\forall\xi\ \varphi$ и $\exists\xi\ \varphi$ - параметры формулы φ.

Определение:
Свобоный параметр - параметр, который входит в формулу без кванторов.
Связанный параметр - параметр, который входит в формулу с кванторами.

Определение:
Оценка - отображение, которое ставит в соответствие каждой индивидной переменной некоторый элемент носителя интерпретации. Этот элемент - значение переменной при данной оценке.

Определение:
Значение терма t при оценке π (обозначается как $[t](\pi)$:
1. Для переменных значение определено - $\pi(t)$.
2. Если t - константа, то $[t](\pi)$ не зависит от π и равно значению этой константы при данной интерпретации.
3. Если t имеет вид $f(t_1, ..., t_k)$, где f - функциональный символ валентности k, а $t_1, ..., t_k$ - термы, то $[t](\pi)$ определяется как $[f]([t_1](\pi), ..., [t_k](\pi))$.

Определение:
Значение формулы φ при оценке π (обозначается как $[\varphi](\pi)$:
1. Значение атомарной формулы $A(t_1, ..., t_k)$ определяется как $[A]([t_1](\pi), ..., [t_k](\pi))$.
2. $[\neg\varphi](\pi) = \neg[\varphi](\pi)$.
3. $[\varphi \wedge \psi](\pi) = [\varphi](\pi) \wedge [\psi](\pi)$.
4. $[\forall\xi\ \varphi](\pi) = \bigwedge_{m\in M}[\varphi](\pi + (\xi \longmapsto m))$.
5. $[\exists\xi\ \varphi](\pi) = \bigvee_{m\in M}[\varphi](\pi + (\xi \longmapsto m))$.

Замкнутая формула = суждение = формула без параметров.

5 Выразимость предикатов. Примеры выразимых и невыразимых предикатов.

Определение:
k-местный предикат называется *выразимым*, если существует формула $\varphi(x_1, x_2, ..., x_k)$, такая что для любой оценки π $[\varphi](\pi) = 1$ и $P(x_1, x_2, ..., x_k) = 1$.

Определение:
Выразимое множество - область истинности выразимых предикатов.

Примеры:
1. $(\mathbb{N}, S, =)$. Предикат "быть нулем" выразим в данной интерпретации:

$$\neg\exists y\ (x = S(y))$$

2. $(\mathbb{Z}, =, <)$. Предикат $x = 0$ невыразим в данной интерпретации. Автоморфизм: $\alpha(x) = x + 1$. Заметим, что $\alpha(0) = 1$.

6 Арифметичность предиката. Примеры для простых предикатов и битовых строк.

Определение:
Арифметические предикаты - предикаты, выразимые с помощью формул сигнатуры $(\mathbb{N}, +, \cdot, =)$.

Метод Гёделя для доказательства арифметичности:
Зафиксируем взаимнооднозначное соответствие между натуральными числами и двоичными словами: чтобы получить слово, соответствующее числу n, нужно записать $n + 1$ в двоичной системе счисления и удалить первую единицу.

Примеры:
1. Предикат "слово x состоит из нулей" арифметичен, т.к. при переходе к числам ему соответствует предикат "$x + 1$ - степень двойки", а такой предикат арифметичен.

7 Проверка невыразимости предиката через автоморфизмы. Теорема об устойчивости относительно автоморфизмов. Примеры.

Определение:
Автоморфизм интерпретации $\alpha : M \longrightarrow M$ - отображение, при котором все функции и предикаты, входящие в интерпретацию, устойчивы относительно α.

Определение:
k-местный предикат устойчивый относительно α, если

$$P(\alpha(m_1), ..., \alpha(m_k)) \Longleftrightarrow P(m_1, ..., m_k).$$

Определение:
k-местная функция устойчивая относительно α, если

$$f(\alpha(m_1), ..., \alpha(m_k)) \Longleftrightarrow \alpha(f(m_1, ..., m_k)).$$

Теорема:
Любой предикат, выразимый в данной интерпретации, устойчив относительно ее автоморфизмов.

Доказательство:
Пусть π - некоторая оценка, α - автоморфизм.
Заметим, что $[t](\alpha \circ \pi) = \alpha([t](\pi))$ и $[\varphi](\alpha \circ \pi) = [\varphi](\pi)$, а это определение устойчивых предикатов и функций.

Примеры:
Примеры смотрите *ТУТ*

8 Элиминация кванторов в $(\mathbb{Z}, =, S, 0)$.

Теорема:
Для всякой формулы рассматриваемой сигнатуры существует эквивалентная ей бескванторная формула.

Доказательство:
Для начала скажем, что будем доказывать теорему только для знака $\exists$, т.к. $\forall$ выводится через него.
1. φ - атомарная формула/конъонкция/дизъюнкция/импликация, тогда она и так бескванторная.
2. $\varphi \equiv \exists x\ \tau(x, x_1, ..., x_k)$, τ - булева комбинация атомарных формул.
Атомарная форма в нашем случае - $S(S(S(...(S(u))...))) = S(S(...(S(v))...))$, где u, v - переменные или костанта 0.
Если переменная x входит и в левую, и в правую часть, то атомарная формула либо всегда истинна (когда количество операций S в обеих частях одинаковое), либо всегда ложна, значит, можно заменить ее на тождественно истинную или тождественно ложную формулу, не зависящую от x.
После всех этих действий останутся такие атомарные формулы:

$$x = t_1\ x = t_2\ ...\ x = t_n,$$

где t_i - какая-то константа или выражение вида $x_j + c$, где c - количество операций S, примененных к переменной x_j, x_j - другая переменная из формулы τ.
Тогда можно записать φ в бескванторном виде:

$$\varphi \equiv \tau(t_1, x_1, ..., x_k) \vee \tau(t_2, x_1, ..., x_k) \vee ... \vee \tau(t_n, x_1, ..., x_k)$$

Теперь нужно рассмотреть случай, когда x делает атомарную формулу ложной. Обозначим формулу для множества таких x как φ'. Тогда φ вычисляется так:

$$\varphi \equiv \tau(t_1, x_1, ..., x_k) \vee \tau(t_2, x_1, ..., x_k) \vee ... \vee \tau(t_n, x_1, ..., x_k) \vee \varphi'$$

9 Элиминация кванторов в $(\mathbb{Z}, =, <, S)$.

Теорема:
Всякая формула в $(\mathbb{Z}, =, <, S)$ эквивалентна некоторой бескванторной формуле.

Доказательство:
Доказательство похоже на предыдущее, только кроме $x = t_i$ добавляются атомарные формулы $x < t_i$. Тогда φ состоит из дизъюнкций бескванторных формул 3 видов: $\tau(t_i, x_1, ..., x_k),\ \tau(t_i - 1, x_1, ..., x_k)$ и $\tau(t_i + 1, x_1, ..., x_k)$.
Почему именно так: $t_1, ..., t_n$ делят ось $\mathbb{Z}$ на промежутки, значит, чтобы проверить истинность формулы φ на всем множестве, нужно проверить истинность хотя бы на 1 числе из каждого промежутка.

10 Общезначимые формулы. Выполнимость и эквивалентность формул.

Определение:
Пусть σ - сигнатура.
Формула φ этой сигнатуры называется *общезначимой*, если она истинна в любой интерпретации σ на любой оценке.

Определение:
Формулы φ и ψ называются *эквивалентными*, если в любой интерпретации и на любой оценке, на которой истинна одна из них, истинна и другая.

Определение:
Формула называется *выполнимой*, если она истинна в некоторой интерпретации на некоторой оценке.

11 Аксиомы исчисления предикатов.

Определение:
Область действия квантора - подформула, начинающаяся с этого квантора.

Определение:
Свободное вхождение индивидной переменной в формулу - вхождение, не попадающее в область действия одноименного квантора.

1. Любое вхождение переменной в терм или атомарную формулу свободно.
2. Свободные вхождения переменной в формулу φ являются свободными вхождениями в формулу $\neg\varphi$.
3. Свободные вхождения переменной в одной из формул φ и ψ являются

свободными вхождениями в формулах конъюнкции, дизъюнкции и импликации.
4. Переменная ξ не имеет свободных вхождений в формулы $\forall\xi\ \varphi$ и $\exists\xi\ \varphi$; свободные вхождения остальных переменных в φ являются свободными вхождениями в эти две формулы.

Определение:
Связанное вхождение переменной в формулу - вхождение переменной, не являющееся свободным.

Аксиома 12:
$\forall\xi\ \varphi \longrightarrow \varphi(t/\xi)$.

Аксиома 13:
$\varphi(t/\xi) \longrightarrow \exists\xi\ \phi$.

12 Правила вывода исчисления предикатов.

Правила Бернайса:

$$\frac{\psi \longrightarrow \varphi}{\psi \longrightarrow \forall\xi\ \varphi}$$

$$\frac{\varphi \longrightarrow \psi}{\exists\xi\ \varphi \longrightarrow \psi}$$

Правила обобщения:

$$\frac{\varphi}{\forall\xi\ \varphi}$$

13 Коллизии переменных. Корректные подстановки термов.

Определение:
Коллизия переменных - ситуация, когда при переименовании переменной x в y в формуле есть переменная, которая из свободной превращается в связанную.

Определение:
Корректная подстановка терма t вместо переменной ξ - такая подстановка, если в процессе текстуальной замены всех свободных вхождений переменной ξ на t никакая переменная из t не попадет в область действия одноименного квантора.

1. $\xi(t/\xi) = t$.
2. $\mu(t/\xi) = \mu,\ \mu \neq \xi$.
3. $f(t_1, ..., t_k)(t/\xi) = f(t_1(t/\xi), ..., t_k(t/\xi))$.

Для формул:
1. $A(t_1, ..., t_k)(t/\xi) = A(t_1(t/\xi), ..., t_k(t/\xi))$.
2. $[\neg\varphi](t/\xi) = \neg[\varphi(t/\xi)]$.
3. $(\varphi \vee \psi)(t/\xi) = (\varphi(t/\xi) \vee \psi(t/\xi))$, аналогично для конъюнкции и импликации.
4a. ξ не является параметром формулы $\forall\mu\ \varphi$, тогда подстановка ничего не меняет в формуле.
4b. ξ является параметром формулы $\forall\mu\ \varphi$, но переменная μ не входит в терм t и подстановка $\varphi(t/\xi)$ корректна. Тогда

$$[\forall\mu\ \varphi](t/\xi) = \forall\mu\ [\varphi(t/\xi)].$$

14 Корректность исчисления предикатов. Схема доказательства теоремы о корректности.

Теорема:
Всякая выводимая в исчислении предикатов формула является общезначимой.

Доказательство:
Простая схема доказательства *ТУТ*

15 Вывод в исчислении предикатов. Примеры вывода. Вывод из посылок.

Примеры вывода:
Выведем формулу $\forall x\ \varphi \longrightarrow \exists x\ \varphi$.
Заметим, что подстановка переменной вместо себя является допустимой, поэтому по аксиомам 12 и 13 формула выводима.

Вывод из посылок:
Γ - произвольное множество замкнутых формул в сигнатуре σ.
Формула A выводима из Γ, если ее можно вывести, используя аксиомы и формулы из Γ.
Теорема - выводимая из Γ формула.

16 Лемма о дедукции в исчислении предикатов. Лемма о свежих константах. Лемма о добавлении констант.

Лемма о дедукции в исчислении предикатов:
Пусть Γ - множество замкнутых формул, A - замкнутая формула.

Тогда $\Gamma \vdash (A \longrightarrow B) \Longleftrightarrow \Gamma \cup \{A\} \vdash B$

Доказательство:
$\Longrightarrow$: Т.к. выводимо $\Gamma \vdash A \longrightarrow B$, то выводимо $\Gamma \vdash A \Longrightarrow$ по Modus Ponens выводимо $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$.
$\Longleftarrow$: $C_1, C_2, ..., C_n$ - вывод B из $\Gamma \cup \{A\}$, значит, выводимо $\Gamma \vdash A \longrightarrow C_i$
1. C_i - аксиома, тогда выводимы $C_i, C_i \longrightarrow (A \longrightarrow C_i), A \longrightarrow C_i$.
2a. $C_i \in \Gamma$, C_i - посылка. Аналогично пункту 1.
2b. $C_i = A$. Тогда выводимо $A \longrightarrow A$.
3. C_i по Modus Ponens получено из C_j: тогда

$$\Gamma \vdash (A \longrightarrow C_j), \Gamma \vdash (A \longrightarrow (C_j \longrightarrow C_i)) \implies (A \longrightarrow (C_j \longrightarrow C_i)) \longrightarrow ((A \longrightarrow C_j) \longrightarrow (A \longrightarrow C_i))$$

4. C_i по правилу Бернайса 1, т.е. $C_j \equiv \psi \longrightarrow \varphi$, $C_i \equiv \psi \longrightarrow \forall x\ \varphi$. Значит, $\Gamma \vdash A \longrightarrow (\psi \longrightarrow \varphi)$.
Заметим, что эта фрмула равносильна $\Gamma \vdash (A \wedge \psi) \longrightarrow \varphi$. Из этого следует, что $\Gamma \vdash (A \wedge \psi) \longrightarrow \forall x\ \varphi$.
Последнюю формулу заменим на равносильную: $\Gamma \vdash A \longrightarrow (\psi \longrightarrow \forall x\ \varphi)$.
5. C_i по правилу Бернайса 2: аналогично пункту 4.

$$\Gamma \vdash A \longrightarrow (\varphi \longrightarrow \psi) \Longleftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \longrightarrow (A \longrightarrow \psi) \Longrightarrow$$

$$\Gamma \vdash \forall x\ \varphi \longrightarrow (A \longrightarrow \psi) \Longleftrightarrow \Gamma \vdash A \longrightarrow (\forall x\ \varphi \longrightarrow \psi)$$

Лемма о свежих константах:
Пусть выводима формула $\varphi(c/\xi)$, где φ - произвольная формула, c - константа, не входящая в φ, ξ - переменная. Тогда выводима φ.

Доказательство:
Возьмем переменную η, которой нет в выводе $\varphi(c/\xi)$, и во всем выводе заменим константу c на η. Значит, выводима формула $\varphi(\eta/\xi)$.
По правилу обобщения выводима формула $\forall\eta\ \varphi(\eta/\xi)$.
По 12 аксиоме $\forall\eta\ \varphi(\eta/\xi) \longrightarrow \varphi(\eta/\xi)(\xi/\eta)$, подстановка в правой части дает φ.

Лемма о добавлении констант:
Пусть формула φ некоторой сигнатуры σ выводима в исчислении предикатов расширенной сигнатуры σ', полученной из σ путем добавления констант. Тогда φ выводима и в исчислении предикатов сигнатуры σ.

Доказательство:
Пусть φ, не содержащая новых констант, имеет вывод, в котором новые константы встречаются. Заменим их на свежие переменные, не входящие в вывод, тогда вывод останентся выводом, но без новых констант.

17 Противоречивые и непротеворечивые теории. Совместные множества. Полнота исчисления предикатов (б.д.).

Определение:
Теория Г - произвольное множетсво замкнутых формул сигнатуры σ.

Определение:
Теория Г противоречива, если в ней выводится формула φ и $\overline{\varphi}$. В этом случае из Г выводима любая формула.

Определение:
Совместное множество - множество формул Г, т.ч. существует набор значений переменных, при которых все формулы из Г истинны.

Теорема о полноте исчисления предикатов:
Всякая общезначимая формула выводима.

18 О теореме Геделя о неполноте.

Смотрим *ТУТ*, без пересказа сразу допса.