Билеты по алгебре, 4 модуль

ПАДИИ, 1 курс

21 June 2024

1 Задача о нахождении канонического вида оператора, пример с инволюциями.

Задача:
Дана квадратная матрица, хотим найти базис, т.ч. в этом базисе матрица имеет простой вид.
Неплохо умеем решать задачу, если:
1. $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t) = \prod(t - \lambda_i),\ \lambda_i \neq \lambda_j$. В этом случае матрица диагонализуема, и есть базис из собственных векторов.
2. $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t) = t^n$, т.е. $\mathcal{A}$ - нильпотентный. (В каждом жордановом блоке везде нули, под главной диагональю единицы)

Проблемы:
1. Корни характеристического многочлена не все различные, не все одинаковые.
2. Характеристический многочлен не раскладывается на линейные множители.
3. Трудно считать характеристический многочлен или определитель.
4. Не существует характеристического многочлена (пример: пространство ∞-мерное).

Идеи решения:
1. Разбить пространство на сумму меньших.
2. Использовать какие-то тождества для A.
3. Перейти к большему, алгебраически замкнутому полю.

Пример:
$A^2 = E$ - инволюция.
$\lambda = \pm 1$.
В данном случае можем разложить любой вектор по собственным векторам:

$$x = \frac{x - Ax}{2} + \frac{x + Ax}{2} = v_1 + v_2$$

$$A\left(\frac{x - Ax}{2}\right) = \frac{Ax - x}{2} \Longrightarrow A(v_1) = -v_1,\ A(v_2) = v_2$$

2 Инвариантные подпространства, матрицы оператора в соответствующих базисах.

Определение:
$\mathcal{A} \in \mathcal{L}in(V, V),\ U \leq V$. U - инвариантное подпространство, если $\mathcal{A}(U) \subset U$.

Пример:
v - собственный вектор $\mathcal{A}$. $< v >$ - инвариантное подпространство.
$\ker \mathcal{A}, Im\mathcal{A}$ - инвариантные подпространства.
Жорданова цепочка - инвариантное подпространство.

Утверждение:
$\mathcal{A} \in \mathcal{L}in(V, V),\ U \leq V$ - инвариантное подпространство.
Базис V - $\underbrace{u_1, u_2, ..., u_k}_{U}, u_{k+1}, ..., u_n$.
Тогда

$$[\mathcal{A}]_{\{u_i\}} = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Доказательство:
$i \in \{1, 2, ..., k\}$. $\mathcal{A}(u_i) = \sum_{j=1}^{k} a_{ji} \cdot u_j$. $\mathcal{A}(u_i) \in U$, т.к. U - инвариантное подпространство. Значит, $\mathcal{A}(u_i)$ - линейная комбинация $u_1, ..., u_k$. Значит, $a_{k+1\ i}, ..., a_{n\ i} = 0$.

Замечание:
$V = V_1 \oplus V_2,\ V_1, V_2 \leq V$ - инвариантные. Тогда можно выбрать базис V $\underbrace{u_1, ..., u_k}_{V_1}, \underbrace{u_{k+1}, ..., u_n}_{V_2}$, так что:

$$A = \begin{pmatrix} [\mathcal{A}|_{V_1}] & 0 \\ 0 & [\mathcal{A}|_{V_2}] \end{pmatrix}$$

3 Фактор-пространство.

Определение:
V - векторное пространство, $U \leq V$ - инвариантное.
$v_1, v_2 \in V$, тогда $v_1 \equiv v_2 \mod U$, если $v_1 - v_2 \in U$.
V/U - фактор-пространство.
Это отношение эквивалентности, $\overline{v} = v + U$ - класс эквивалентности.
$\overline{v} = \{v + u \mid u \in U\}$.

1. $u_1 \equiv u_2, v_1 \equiv v_2 \Longrightarrow u_1 + v_1 \equiv u_2 + v_2$.

2. $u_1 \equiv u_2 \Longrightarrow\ \forall k \in K\ k \cdot u_1 \equiv k \cdot u_2$.

Определение:
$\overline{\mathcal{A}} : V/U \longrightarrow V/U$ - линейный оператор на фактор-пространстве.

$\overline{\mathcal{A}}(\overline{v}) = \overline{\mathcal{A}(v)}\ \forall u \in U$

Утверждение:
$U \leq V$, $\underbrace{u_1, u_2, ..., u_k}_{U}, u_{k+1}, ..., u_n$ - базис V. Тогда $\overline{u_{k+1}}, ..., \overline{u_n}$ - базис V/U.

Доказательство:
Докажем, что $\overline{u_{k+1}}, ..., \overline{u_n}$ - порождающая система:

$$\forall \overline{u} \in V/U\ \overline{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot u_i} = \overline{0} + \overline{\sum_{i=k+1}^{n} a_i \cdot u_i} = \sum_{i=k+1}^{n} a_i \cdot \overline{u_i}$$

Докажем, что $\overline{u_{k+1}}, ..., \overline{u_n}$ - ЛНЗ система:
Пусть $\sum_{i=k+1}^{n} a_i \cdot \overline{u_i} = 0 \implies \overline{\sum_{i=k+1}^{n} a_i \cdot u_i} = 0$, т.е. $\sum_{i=k+1}^{n} a_i \cdot u_i \in < u_1, ..., u_k >$, а это противоречие с тем, что $u_1, ..., u_n$ - ЛНЗ. Тогда $a_i = 0$.
Значит, $\overline{u_{k+1}}, ..., \overline{u_n}$ - базис.

Утверждение:
$U \leq V$, $\underbrace{u_1, u_2, ..., u_k}_{U}, u_{k+1}, ..., u_n$ - базис V, U - инвариантное относительно $\mathcal{A}$.

$$[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} [\mathcal{A}|_U] & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Тогда $B = [\overline{\mathcal{A}}]_{\overline{u_{k+1}}, ..., \overline{u_n}}$.

Доказательство:
Рассмотрим $k+1$-ый столбец матрицы:

$$\mathcal{A}(u_{k+1}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i\ k+1} u_i \Longrightarrow \overline{\mathcal{A}}(\overline{u_{k+1}}) = \overline{\mathcal{A}(u_{k+1})} =$$

$$= \overline{\sum_{i=1}^{k} a_{i\ k+1} u_i + \sum_{j=k+1}^{n} a_{j\ k+1} u_j} = \overline{\sum_{i=k+1}^{n} a_{i\ k+1} u_i} = \sum_{i=k+1}^{n} a_{i\ k+1} \overline{u_i}$$

Полученная сумма - первый столбец матрицы B.

4 След и теорема Гамильтона-Кэли для 2×2.

Определение:
$\mathrm{Tr}(a_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ - след.
След и определитель не зависят от выбора базиса.

Теорема Гамильтона-Кэли для $M_2(K)$:

$$A \in M_2(K) \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t) = t^2-(a+d)t+ad-bc \Longrightarrow A^2 = (a+d)A-(ad-bc)E$$

5 Теорема Гамильтона-Кэли.

Теорема Гамильтона-Кэли:

$$\mathcal{A} \in \mathcal{L}in(V,V) \Longrightarrow \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = 0.$$

Доказательство:
Пусть K - алгебраически замкнутое поле. Индукция по $\dim V$.
База: очевидно.
Переход:
Выберем собственное значение λ оператора $\mathcal{A}$ и одноименное собственное подпространство $V_1 \in V$. Дополним собственный вектор, за который отвечает собственное число λ, до базиса K. Тогда матрица оператора $\mathcal{A}$ выглядит так:

$$[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

$\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t) = (\lambda - t) \cdot \mathcal{X}_B(t)$.
$\overline{\mathcal{A}} : V/V_1 \longrightarrow V/V_1$ - оператор на фактор-пространстве. Векторы $\overline{e_i}, i \geq 2$ образуют базис пространства V/V_1, матрица $\overline{\mathcal{A}}$ в этом базисе равна B. По индукционному предположению $\mathcal{X}_B(t) = 0$, значит, $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t) = 0$.

6 Аннуляторные подпространства и теорема о разложении в их сумму.

Теорема:
$\mathcal{A} \in \mathcal{L}in(V,V),\ f \in K[x],\ f(\mathcal{A}) = 0,\ f = f_1 \cdot f_2$, причем $\gcd(f_1, f_2) = 1$.
Тогда $V = \ker f_1(\mathcal{A}) \oplus \ker f_2(\mathcal{A})$, V_{f_1}, V_{f_2} - инвариантные подпространства.

Доказательство:
$(f_1, f_2) = 1 \ \Rightarrow\ \exists g_1, g_2 \quad f_1g_1 + f_2g_2 = 1$ (лин. представление gcd).

$$f_1(\mathcal{A})g_1(\mathcal{A}) + f_2(\mathcal{A})g_2(\mathcal{A}) = Id \tag{*}$$

$\forall v \quad v = (f_1(\mathcal{A}) \circ g_1(\mathcal{A}))(v) + (f_2(\mathcal{A}) \circ g_2(\mathcal{A}))(v) = v_2 + v_1$ (да-да, именно в таком порядке).
Заметим, что $f_2(\mathcal{A})(v_2) = f_2(\mathcal{A})f_1(\mathcal{A})g_1(\mathcal{A})(v) = f(\mathcal{A}) \circ g_1(\mathcal{A})(v) = 0$, т.е. $v_2 \in \ker(f_2(\mathcal{A}))$.
Аналогично $v_1 \in \ker(f_1(\mathcal{A}))$.

Пусть $\ker(f_1(\mathcal{A})) = V_1,\ \ker(f_2(\mathcal{A})) = V_2$. Проверим, что $V_1 \cap V_2 = \varnothing$.
Пусть $w \in V_1 \cap V_2$, тогда подставим w в $(^*)$. Каждое из слагаемых в левой части обнулится $\Longrightarrow w = 0$.

Следствие:
$\mathcal{A} \in \mathcal{L}in(V, V) \Longrightarrow V = \bigoplus V_i,\ V_i$ - инвариантное подпространство.
$\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t) = \prod p_i^{a_i},\ p_i$ - неприводимый многочлен.
$V_i = \ker p_i^{a_i}(\mathcal{A})$.

Определение:
Корневое пространство, соответствующее собственному числу λ_i: $W_{\lambda_i} = \ker(\mathcal{A} - \lambda_i \cdot Id)^{a_i}$.

7 Теорема о жордановой форме произвольного оператора в комплексном пространстве.

Теорема:
Матрица произвольного линейного оператора над полем комплексных чисел может быть приведена к жордановой нормальной форме.

Без доказательства.

8 Степень жордановой матрицы и как возводить в степень все остальные. Скорость роста компонентов степени матрицы и собственные числа.

$$A^n = (C \cdot J \cdot C^{-1}) \cdot ... \cdot (C \cdot J \cdot C^{-1}) = C \cdot J^n \cdot C^{-1}$$

$$J^n = \begin{pmatrix} J_1^n & ... & 0 \\ 0 & J_2^n & 0 \\ 0 & ... & J_k^n \end{pmatrix}$$

$$J_k^n = (\lambda \cdot E + J_0)^n = \sum C_n^k \cdot \lambda^{n-k} \cdot J_0^k$$

J_0^k - 1 столбец переходит в $k+1$, 2 столбец переходит в $k+2$ и т.д.

Собственные числа матрицы определяют скорость роста её степеней. Если матрица имеет собственные значения с модулем > 1, соответствующие компоненты матрицы A^k будут экспоненциально расти с увеличением k. В случае собственных значений с модулем меньше 1, соответствующие компоненты будут стремиться к нулю.

9 Единственность жордановой формы. Явные формулы для числа блоков.

Определение:
$\mathcal{A} \in \mathcal{L}in(V,V)$, V - векторное пространство над $\mathbb{C}$. Тогда существует жорданов базис:

$$[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & J_{k_2}(\lambda_2) & \\ 0 & & J_{k_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

k_i - размер блока.

Теорема:
Набор $(k_1, \lambda_1), (k_2, \lambda_2), ..., (k_s, \lambda_s)$ единственный для данного $\mathcal{A}$.

Доказательство
пук среньк

Явная формула:

- $n(\lambda)$ — количество жордановых клеток в $J(\mathcal{A})$ с собственным значением λ,
- $n_k(\lambda)$ — количество жордановых клеток размера $k \times k$ в $J(\mathcal{A})$ с собственным значением λ,
- $r_k(\lambda) = \operatorname{rk}(\mathcal{A} - \lambda E)^k$,
- $n = \dim V$.

Тогда:

- $n(\lambda) = n - r_1(\lambda)$ — геометрическая кратность λ,
- $n_k(\lambda) = r_{k-1}(\lambda) - 2r_k(\lambda) + r_{k+1}(\lambda)$.

10 Циклическое пространство, его матрица и характеристический многочлен.

$\mathcal{A} \in \mathcal{L}in(V,V)$
Что если $K \neq \mathbb{C}$?
Пусть $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t) = \pm p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_s$, $p_i \in K[t]$ – неразложимые. Предположим, что они все различны с точностью до константы и старшие коэффициенты равны единице.
Знаем, что $V = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_s$, причём $V_i = \mathcal{K}er(p_i(\mathcal{A}))$ — $\mathcal{A}$-инвариантное подпространство.
Пусть $V_i \neq \{0\}$, возьмём $v \in V_i$ и рассмотрим $v_1 = v$, $v_2 = \mathcal{A}v$, $v_3 = \mathcal{A}^2 v$, ...,

$v_k = \mathcal{A}^{k-1}v$ и строим такую последовательность пока такие вектора ЛНЗ. (если стали ЛЗ – закончим)

$$v_{k+1} = \sum a_i v_i = \sum a_i \mathcal{A}^i v \Leftrightarrow (t^k - a_k t^{k-1} - a_{k-1}t^{k-2} - ... - a_1)(\mathcal{A})(v)$$

Утверждение:

$$t^k - a_k t^{k-1} - a_{k-1}t^{k-2} - ... - a_1 = p_i$$

Доказательство:

бу бу бу

Заметим, что $< v_1, ..., v_k >$ – инвариантное подпространство (оно называется циклическим) с матрицей (она называется фробениусовой клеткой)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & ... & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & ... & 0 & a_3 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & a_k \end{pmatrix}$$

11 Доказательство теоремы о разложении на фробениусовы клетки (в частном случае).

12 Аксиомы евклидова пространства, КБШ, длины и углы (последнее – для евклидовых), главные примеры.

Определение:

Евклидово пространство - структура $(V, \langle , \rangle)$, где V - векторное пространство над $\mathbb{R}$, $\langle , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ - скалярное произведение, со следующими свойствами:

1. Билинейность:

$$\langle a \cdot u_1 + b \cdot u_2, u \rangle = a \cdot \langle u_1, u \rangle + b \cdot \langle u_2, u \rangle$$

$$\langle u, a \cdot u_1 + b \cdot u_2 \rangle = a \cdot \langle u, u_1 \rangle + b \cdot \langle u, u_2 \rangle$$

2. Симметричность:

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$$

3. Положительная определенность:

$$\langle u, u \rangle \geq 0,\ \langle u, u \rangle = 0 \Longleftrightarrow u = 0.$$

Определение:

V - евклидово пространство.

$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ - норма вектора.

$d(u, v) = \|u - v\|$ - метрика.

Неравенство КБШ:

$$\langle u, v\rangle^2 \leq \langle u, u\rangle \cdot \langle v, v\rangle$$

Слвойства:
1. Неравенство треугольника:

$$\|x-y\| + \|y-z\| \geq \|x-z\|$$

2. $\left|\frac{\langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2 \cdot \|v\|^2}\right| \leq 1 \Longrightarrow \exists! \alpha \in [0, \pi]$, т.ч.

$$\cos\alpha = \frac{\langle u, v\rangle^2}{\|u\|^2 \cdot \|v\|^2}$$

$\langle u, v\rangle = 0 \Longleftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$, u и v - ортогональные.

$\langle u, v\rangle = \pm\|u\| \cdot \|v\| \Longleftrightarrow \alpha = 0$ или $\alpha = \pi$, u и v - сонаправленные или противонаправленные.

13 Билинейные формы, матрица Грама.

Определение:
K - поле.$f : V \times V \longrightarrow K$ - билинейная форма.
$v_1, ..., v_n$ - базис V.
$u = \sum a_i \cdot v_i,\ w = \sum b_i \cdot v_i$.

$f(u, w) = \sum a_i \ \cdot b_j \cdot f(v_i, v_j) = \sum c_{ij} \cdot a_i \cdot b_j$.

$\Gamma = (c_{ij}) = f(v_i, v_j)$ - матрица Грама билинейной формы f в базисе $v_1, ..., v_n$.

$x, y \in V$. Пусть X, Y - столбцы координат x, y в базисе $\{v_i\}$. Тогда

$$f(x, y) = X^T \cdot \Gamma \cdot Y.$$

14 Матричная запись билинейной формы. Замена базиса.

Определение:
V - векторное пространство над полем K, f - билинейная форма.
$v_1, v_2, ..., v_n$ - базис V.
$v'_1, v'_2, ..., v'_n$ - базис V.
A - матрица f в базисе $\{v_i\}$.

Пусть C - матрица перехода от базиса $\{v_i;\}$ к базису $\{v_i\}$: $v'_j = \sum c_{ij} \cdot v_i$.

Тогда $f(v_i', v_j') = C_i^T \cdot A \cdot C_j$, т.е.

$$\widetilde{A} = (f(v_i', v_j')) = C^T \cdot A \cdot C$$

Замечание:
f симметрична $\Longleftrightarrow A_f = A_f^T$.

15 Ортогональность, ортонормированные базисы, свойства координат в них.

Определение:
V - евклидово пространство.
Ортогональный базис - базис $e_1, ..., e_n$, т.ч. $\langle e_i, e_j \rangle = 0,\ i \neq j$.
Ортонормированный базис - базис $e_1, ..., e_n$, т.ч. $\|e_i\| = 1\ \forall i$.

Замечание:
В матричных терминах: $e_1, ..., e_n$ - ОНБ $\Longleftrightarrow \Gamma_{\{e_i\}} = E$.

Замечание:
$e_1, e_2, ..., e_n$ - ортогональный базис.

$$\left\langle \frac{e_i}{\|e_i\|}, \frac{e_i}{\|e_i\|} \right\rangle = \frac{\langle e_i, e_i \rangle}{\|e_i\|^2} = 1$$

Значит, $\left\{ \frac{e_i}{\|e_i\|} \right\}$ - ОНБ.

Определение:
$e_1, ..., e_n$ - ОНБ, $x, y \in V,\ X, Y$ - столбцы координат.

$$\langle x, y \rangle = X^T \cdot E \cdot Y = \sum_i x_i \cdot y_i$$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{X^T \cdot X} = \sqrt{\sum_i x_i^2}$$

Замечание:
$u, v \in V,\ \langle u, v \rangle = 0$. Тогда

$$\|u \pm v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

16 Трансмутация любого базиса в ортонормированный (Грам-Шмидт). Изометрия евклидовых пространств.

Теорема:
V - векторное пространство, $v_1, ..., v_n$ - базис V.

Тогда существует ОНБ $e_1, ..., e_n$, такой что $< v_1, ..., v_n > = < e1, ..., e_n >$ (линейные оболочки) $\forall k = 1...n$.

Доказательство:
Индукция по $\dim V$.
База: $n = 1$. $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$, $\|e_1\| = 1$ $< e_1 > = < v_1 >$.
Переход $n \longrightarrow n+1$:
По индукционному предположению знаем, что $< e_1, ..., e_n > = < v_1, ..., v_n >$, значит, $< e_1, ..., e_n, v_{n+1} > = < v_1, ..., v_n, v_{n+1} >$.
Пусть $\widetilde{v}_{n+1} = v_{n+1} + \sum a_i e_i$, тогда $< e_1, ..., e_n, v_{n+1} > = < e_1, ..., e_n, \widetilde{v}_{n+1} >$.
$\langle \widetilde{v}_{n+1}, e_i \rangle = \langle v_{n+1}, e_i \rangle + a_i$.
Пусть $a_i = -\langle v_{n+1}, e_i \rangle$, тогда $\langle \widetilde{v}_{n+1}, e_i \rangle = 0$.
Значит, $\widetilde{v}_{n+1}$ подходит для того, чтобы базис $< e_1, ..., e_n, \widetilde{v}_{n+1} >$ был ортогональным.
Тогда пусть $e_{n+1} = \frac{\widetilde{v}_{n+1}}{\|\widetilde{v}_{n+1}\|}$.

Следствие:
Любое евклидово пространство изометрично $\mathbb{R}^n$ с стандартным скалярным произведением.

17 Ортогональное дополнение к подпространству: основная теорема.

Определение: V - евклидово пространство, $U \leq V$. Ортогональное дополнение $U^{\perp} = \{v \in V \mid \langle u, v \rangle = 0 \ \forall u \in U\}$.

Теорема:
f - симметричная билинейная форма на $V, U \leq V$. $\dim V = n, \dim U = k$. Тогда:
1. $(U^{\perp})^{\perp} \supset U, \dim U^{\perp} \geq n - k$.
2. f невырожденная. $\dim U^{\perp} = \dim V - \dim U$ и $(U^{\perp})^{\perp} = U$.
3. V - евклидово, f - скалярное произведение. $V = U \oplus U^{\perp}$.

Доказательство:
3. Фиксируем ОНБ U : $e_1, ..., e_k$, дополним его до базиса V и ортогонализуем, не меняя первые k элементов. Получили $\{e_i\}$ - ОНБ V. Тогда $U^{\perp} = < e_{k+1}, ..., e_n > \Longrightarrow \dim U^{\perp} = n - k$ и V разбито в прямую сумму.
Покажем, что $U^{\perp} = < e_{k+1}, ..., e_n >$: пусть $v = \sum_{i=1}^{k} a_i e_i + \sum_{j=k+1}^{n} a_j e_j$.

$$v \in < e_{k+1}, ..., e_n > \Longleftrightarrow v = \sum_{j=k+1}^{n} a_j e_j \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \langle v, e_i \rangle = 0, \ i \leq k \Longleftrightarrow \langle v, \sum_{i=1}^{k} b_i e_i \rangle = 0 \Longleftrightarrow v \in U^{\perp}$$

1. $U \subset (U^\perp)^\perp$ по определению.
Пусть $U =< e_1, ..., e_k >$. Дополним базис U до базиса V.
Пусть $\varphi : V \longrightarrow K^k,\ \varphi : v \mapsto \begin{pmatrix} f(v, u_1) \\ f(v, u_2) \\ ... \\ f(v, u_k) \end{pmatrix}$
$\dim Im(\varphi) \leq k \Longrightarrow \dim \ker \varphi \geq n - k,\ \ker \varphi = U^\perp$.

2. Пусть f – невырожденная. Имеем систему линейных уравнений $\sum a_{ij} x_i = 0,\ j = 1...k$. A невырожденная $\Longrightarrow$ k строк ЛНЗ $\Longrightarrow$ пространство решений $n - k$-мерное.
$\dim(U^\perp)^\perp = n - \dim U^\perp = k$, значит, $(U^\perp)^\perp = U$.

Замечание:
$U_1, U_2 \leq V$ - евклидовы. Тогда

$$(U_1 \oplus U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$$
$$(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp \oplus U_2^\perp$$

18 Симметрические матрицы как матрицы билинейных форм. Необходимое условие их положительной определенности.

Необходимое условие положительной определенности билинейной формы:
Все главные миноры матрицы билинейной формы положительные.

Доказательство:
$1 = \det(E) = \det(C^T AC) = \det(C)^2 \cdot \det(A)$. Если f положительно определена, то $det(A) > 0$.
Главный минор - определитель сужения $f|_{<e_{i_1}, ..., e_{i_k}}$. Т.к. билинейная форма все еще положительно определена, то минор положительный.

19 Критерий Сильвестра. Разложение Холецкого.

Критерий Сильвестра:
f - билинейная форма с матрицей A.
f положительно определена $\Longleftrightarrow \det(A_k) > 0\ \forall k = 1...n$.

Доказательство:
$\Longrightarrow$: уже доказали.

$\Longleftarrow$: Пусть q - соответсвующая квадратичная форма. Индукция по $\dim V$.

База: $n = 1$. $Q(x) = ax^2$ положительно определена $\Longleftrightarrow a > 0$.
Переход $n \longrightarrow n+1$:
Пусть $v_1, ..., v_n, v_{n+1}$ - базис. Сужение f на $< v_1, ..., v_n >$ имеет матрицу Грама A_n.
По индукционному предположению все главные миноры положительные $\Longrightarrow f$ положительно определена, т.е. f - скалярное произведение. Значит, существует ОНБ $e_1, ..., e_n$.
Рассмотрим базис $e_1, ..., e_n, v_{n+1}$: в нем матрица Грама для f выглядит так:

$$\begin{pmatrix} E & x^T \\ x & a \end{pmatrix}$$

$\widetilde{e}_{n+1} = v_{n+1} - \sum a_i e_i$.
$\forall j = 1...n$ $\langle e_j, \widetilde{e}_{n+1} \rangle = \langle e_j, v_{n+1} \rangle - \sum a_i \langle e_i, e_j \rangle = a_j - a_j = 0$.
Получается, $e_1, ..., e_n, \widetilde{e}_{n+1}$ - базис V. Матрица Грама в этом базисе:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \widetilde{a} \end{pmatrix}$$

$\det(\widetilde{A}) = \det(C^T A C) = \det(C)^2 \cdot \det(A)$. $\det(\widetilde{A}) > 0$ при $\widetilde{a} > 0 \Longrightarrow \det(A) > 0$ при $\widetilde{a} > 0$.

Разложение Холецкого:
f - положительно определенная симметричная билинейная форма с матрицей $A \Longleftrightarrow \exists B$ $A = B^T \cdot B$, B - невырожденная.

Доказательство:
f положительно определена $\Longleftrightarrow$ существует ОНБ, в котором матрица Грама равна $E \Longleftrightarrow$ сущестует C - невырожденная, т.ч. $A = C^T \cdot E \cdot C = C^T \cdot C$.

20 Квадратичные формы, их соответствие с симметричными билинейными.

Определение:
$f : V \times V \longrightarrow K$ - билинейная форма.
$Q : V \longrightarrow K$, $Q(v) = f(v, v)$ - квадратичная форма.

Утверждение: Симметричная билинейная форма однозначно восстанавливается по квадратичной.

Доказательство:

$$f(u+v, u+v) = f(u, u) + 2f(u, v) + f(v, v) \Longrightarrow f(u, v) = \frac{Q(u+v) - Q(u) - Q(v)}{2}$$

Теорема Лагранжа:
Любая симметричная билинейная форма имеет ОНБ.

Доказательство:
пук пук

21 Приведение квадратичной формы к сумме квадратов.

22 Полуторалинейность, унитарное пространство, эрмитовы формы. Матричные формулы в унитарном случае.

Определение:
V - векторное пространство над $\mathbb{C}$.
$f : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ - полуторалинейная форма, если:
1. $f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y),\ f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y),\ \lambda \in \mathbb{C}$.
2. $f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2),\ f(x, \lambda y) = \overline{\lambda} f(x, y),\ \lambda \in \mathbb{C}$.

Определение:
Эрмитова форма - 1.5-линейная форма, т.ч. $\forall x, y \in V\ f(x, y) = \overline{f(y, x)}$.

Определение:
Пространство с положительно определенной эрмитовой формулой называется *унитарным*.

Утверждение:
A - матрица Грама 1.5-линейной формы f.

$$f(x, y) = X^T \cdot A \cdot \overline{Y}$$

Формула замены базиса выглядит так:

$$\widetilde{A} = C^T \cdot A \cdot \overline{C}$$

Эрмитовость: $f(e_i, e_j) = \overline{f(e_j, e_i)} \Longrightarrow a_{ij} = \overline{a_{ji}} \Longrightarrow a_{ii} \in \mathbb{R}$.

Матрица Грама в $\mathbb{C}$ - эрмитова матрица, $A^T = \overline{A}$.

23 Сопряженный оператор, его существование.

Определение:
V - евклидово (унитарное) пространство на $\mathbb{R}$ (на $\mathbb{C}$).
$\mathcal{A} \in \mathcal{L}in(V, V)$.
$\mathcal{B}$ - сопряженный к $\mathbb{A}$, если

$$\forall u, v \in V\ \langle \mathcal{A}u, v \rangle = \langle u, \mathcal{A}^* v \rangle,\ \mathcal{A}^* = \mathcal{B}.$$

Теорема:
Сопряженный оператор существует и единственнен.

Доказательство:
пук пук

Обозначение:

$$A \in M_n(\mathbb{C}) \Longrightarrow A^* = \overline{A^T}.$$

24 Собственные числа ССО и лемма об ортогональном дополнении.

Определение:
V - евклидово (унитарное) пространство.
$\mathcal{A} \in \mathcal{L}in(V, V)$ - самосопряженный оператор, если $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$.

Лемма:
V - унитарное пространство, $\mathcal{A}$ - самосопряженный на V.
Тогда все собственные числа $\mathcal{A}$ - вещественные.

Доказательство:
$\mathcal{A}v = \lambda v,\ v \neq 0.$
$\langle \mathcal{A}v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle.$
$\langle v, \mathcal{A}v \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \overline{\lambda} \langle v, v \rangle.$
$\lambda \langle v, v \rangle = \overline{\lambda} \langle v, v \rangle \Longrightarrow \lambda = \overline{\lambda} \Longrightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$

Следствие:
$\mathcal{A}$ - самосопряженный в евклидовом пространстве, тогда $\lambda_i \in \mathbb{R}\ \forall i$.

Доказательство:
пук пук

Лемма:
$\mathcal{A}$ - самосопряженный оператор, U - инвариантное подпространство V. Тогда $U^\perp$ - инвариантное подпространство.

Доказательство:
пук пук

25 Теорема о канонической форме ССО (с леммой).

Теорема (канонический вид самосопряженного оператора):
Существует ОНБ, т.ч.

$$[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_n \end{pmatrix},$$

где $c_1, ..., c_n$ - собственные числа, $e_1, ..., e_n$ - собственные векторы, $c_i \in \mathbb{R}$.

Доказательство:
пук пук

26 Оценка квадратичной формы.

$\sum a_{ij}x_ix_j$ - квадратичная форма, A - ее матрица.
$\sum a_{ij}x_ix_j = \langle Ax, x\rangle$. Т.к. $A = A^T$, то A - матрица самосопряженного оператора, значит, существует ОНБ из собственных векторов $e_1, ..., e_n$ и $\lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n$.
$\langle Ax, x\rangle = \langle A(\sum b_ie_i), \sum b_ie_i\rangle = \langle \sum b_ie_i\lambda_i, \sum b_ie_i\rangle = \sum b_i^2\lambda_i \leq \lambda_n \sum b_i^2 = \lambda_n\|x\|^2$.
Значит,

$$\sum a_{ij}x_ix_j \leq \lambda_n\|x\|^2,$$

где λ_n - максимальное собственное число.

27 Ортогональные и унитарные операторы, равносильные матричные и геометрические переформулировки.

Определение:
V - евклидово (унитарное) пространство.
$\mathcal{A}$ - ортогональный (унитарный) линейный оператор (A - его матрица), если выполнено 1 из равносильных свойств:

1. $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle \; \forall x, y \in V$.

2. $\|Ax\| = \|x\| \; \forall x \in V$.

3. $A^* = A^{-1}$, в частности, A обратима.

4. $A \cdot \overline{A^T} = \overline{A^T} \cdot A = A^T \cdot \overline{A} = E$.

5. A переводит любой ОНБ в ОНБ.

6. Существует ОНБ, который под действием A переходит в ОНБ.

Доказательство равносильности:
пук кряк

28 Ортогональная/унитарная группа, примеры. Ориентация.

> Ориентация - север, я хочу, чтоб ты верил, я хочу, чтоб ты плакал.
>
> Лолита Милявская

> М.А.: А вы знаете, что такое ориентация?
> С: Вопрос философский...
> М.А.: Вопрос насущный)))
>
> Антипов М.А. и студенты

Ортогональные/унитарные операторы на V образуют группу по умножению.

В матрицах:
Ортогональная группа:

$$O_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^T = E\}$$

Унитарная группа:

$$U_n = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A \cdot \overline{A^T} = E\}$$

Замечание:
В O_n $\det A = \pm 1$.
В U_n $|\det A|^2 = 1$.

O_n состоит из 2-х компонент связности:
1. $SO_n = \{A \in O_n \mid \det A = 1\}$ - Special Orthogonal group
2. $\{A \in O_n \mid \det A = -1\}$.

Замечание:
$\det A = 1$ - преобразования, сохраняющие ориентацию.
$\det A = -1$ - преобразования, меняющие ориентацию.

Ориентация - это отношение эквивалентности, состоящее из РОВНО ДВУХ классов.

Факт:
$\mathcal{A}$ - оператор, $[\mathcal{A}] = A$.
$\det A > 0 \Longrightarrow \mathcal{A}$ не меняет ориентацию базиса.
$\det A < 0 \Longrightarrow \mathcal{A}$ меняет ориентацию базиса.
$\det A = 0 \Longrightarrow \mathcal{A}$ убивает базис.

29 Собственные числа и теорема канонической форме унитарного оператора.

Лемма:
$\mathcal{A}$ - ортогональный (унитарный), λ - собственные числа $\mathcal{A}$.
Тогда $|\lambda| = 1$. В частности, в $\mathbb{R}$ $\lambda = \pm 1$.

Доказательство:

$$Ax = \lambda x \Longrightarrow \langle Ax, Ax \rangle = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = \langle x, x \rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle x, x \rangle \Longrightarrow \lambda\overline{\lambda} = 1 \Longleftrightarrow |\lambda| = \pm 1.$$

Замечание:
$\mathcal{A}$ - ортогональный в $\mathbb{R} \Longrightarrow \mathcal{A}$ - унитарный в $\mathbb{C} \Longrightarrow$ все корни характеристического многочлена равны 1 по модулю.

Лемма:
$\mathcal{A}$ - ортогональный (унитарный). U - инвариантное подпространство.
Тогда $U^{\perp}$ - инвариантное подпространство.

Доказательство:
пук среньк

Теорема:
$\mathcal{A}$ - унитарный оператор, тогда существует ОНБ из собственных векторов $\mathcal{A}$.

$$[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1 & & 0 \\ & ... & \\ 0 & & \cos\alpha_n + i\sin\alpha_n \end{pmatrix}$$

Доказательство:
пуньк чпоньк

30 Матричные переформулировки. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.

Матричная переформулировка:

$$\forall A \in U_n \; \exists C \in U_n : \; \overline{C^T} AC \text{ – диагональная.}$$

Аналогично:

$$\forall B : \; B^T = \overline{B} \; \exists C : \; \overline{C^T} BC \text{ – диагональная.}$$

Для квадратичных форм:
Любая квадратичная форма приводится к диагональному виду ортогональной заменой координат.

Замечание:
У ортогональных операторов диагонализуемости нет, однако матрица унитарного оператора всегда может быть диагонализуема.

31 Превращение вещественного базиса для унитарного вещественного оператора в канонический вид ортогонального оператора. Геометрический смысл канонического вида.

Теорема:
Для любого ортогонального оператора $\mathcal{A}$ существует ОНБ, т.ч. матрица оператора $\mathcal{A}$ состоит из блоков $\begin{pmatrix} \cos\alpha_i & \sin\alpha_i \\ -\sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{pmatrix}$ и блоков (1) и (-1).

Доказательство:
Фиксируем базис. НУО $V = \mathbb{R}^n, \; A \cdot A^T = E, \; A : x \mapsto Ax$.
Рассмотрим ортогональный оператор как унитарный: $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n, \; A : x \mapsto Ax, \; A \cdot \overline{A^T} = E$.
Значит, существует ОНБ в $\mathbb{C}^n$ $x_1, ..., x_n$, т.ч. $Ax_i = z_i x_i$.

НУО все собственные числа $\mathcal{A}$ различные. Собственные числа вещественные $\Longrightarrow \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t) = (t - z_i)(t - \overline{z_i})(t-1)^a(t+1)^b$.

Пусть $Ax = (\cos\alpha + i\sin\alpha)x, \; x = y + iz, \; y, z = \in \mathbb{R}^n$.
$A(y + iz) = Ay + iAz$.

$$\begin{cases} Ay = \cos\alpha \cdot y - \sin\alpha \cdot z \\ iAz = i(\cos\alpha \cdot z + \sin\alpha \cdot y) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Ay = \cos\alpha \cdot y - \sin\alpha \cdot z \\ Az = \cos\alpha \cdot z + \sin\alpha \cdot y \end{cases}$$

Отсюда:
$y + iz$ - собственное число z, $y - iz$ - собственное число $\overline{z}$.
Базис выглядит так: $y_1 + iz_1, y_1 - iz_1, ...$, могут быть собственные числа ± 1.
Этот базис ортонормированный.
Заменим этот базис на $y_1, z_1, y_2, z_2, ...$ - ортогональный базис.
В этом базисе матрица оператора $\mathcal{A}$ будет состоять из блоков матриц поворота и единичных блоков (± 1).

Геометрический смысл:
1. Если все блоки - (1), но i-тый блок - (-1): это зеркальная симметрия относительно $< e_i >^{\perp}$.
2. Если есть один блок 2×2 на позициях $i, i+1$, остальное - блоки (1): это матрица поворота в плоскости $< e_i, e_{i+1} >$ относительно $n-2$-мерной оси.
Любое ортогональное преобразование - композиция двумерных поворотов в попарно ортогональных плоскостях и зеркальной симметрии.

32 Положительный самосопряженный оператор – переформулировка через собственные числа, существование квадратного корня.

Определение:
$\mathcal{A} \in \mathcal{L}in(V, V)$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ (самосопряженный)
Если $\langle \mathcal{A}x, x \rangle > 0$, то называем такой оператор положительным самосопряженным оператором
Обозначение – $\mathcal{A} > 0$

Теорема:
$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ и $\mathcal{A} > 0 \Leftrightarrow \lambda_i > 0$ (с.ч. оператора $\mathcal{A}$)
Доказательство:
$\langle e_1, ..., e_n \rangle$ – базис из собственных векторов
$\mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i$

$$\Big(\mathcal{A}(\sum a_i e_i), \sum a_i e_i\Big) = \sum \lambda_i a_i^2 > 0 \text{ при } \forall a_1, ..., a_r \Leftrightarrow \forall i \ \lambda_i > 0$$

Теорема:
Для любого положительного самосопряженного оператора существует единственный $\sqrt{\mathcal{A}}$ – положительный самосопряженный
Доказательство (существование): $\langle e_1, ..., e_n \rangle$ – базис из собственных векторов

$$\mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i; \ \mathcal{B} \circ \mathcal{B} = \mathcal{A}; \ \mathcal{B}e_i = \sqrt{x_i} e_i$$

$$\sqrt{\begin{pmatrix} x_1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & x_n \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \sqrt{x_1} & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & \sqrt{x_n} \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B}$ имеет собственный ОНБ $\Rightarrow \mathcal{B} = \mathcal{B}^*$ все $\sqrt{\lambda_i} > 0 \Rightarrow \mathcal{B} > 0$

33 Полярное разложение матрицы, геометрический смысл.

Теорема (полярное разложение):
V – евклидово пространство, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}in(V, V)$, A – обратима,
тогда существуют единственный $\mathcal{S}$ – положительный самосопряженный и $\mathcal{U}$ – ортогональный оператор такие, что $\mathcal{A} = \mathcal{S}\mathcal{U}$
Геометрический смысл – $\mathcal{S}$ коэффициент растяжения, $\mathcal{U}$ поворотная симметрия.
Доказательство (существование):
Пусть $\mathcal{S} = \sqrt{\mathcal{A}\mathcal{A}^T}$, $\mathcal{U} = \mathcal{S}^{-1}\mathcal{A}$, $\mathcal{S}\mathcal{U} = \mathcal{S}\mathcal{S}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{A}$, $\mathcal{S} > 0$
$\mathcal{U}$ – ортогональный, тогда

$$(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{A})(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{A})^T = \mathcal{S}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{A}^T{\mathcal{S}^{-1}}^T = \mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}^2\mathcal{S}^{-1} = E$$

34 Единственность квадратного корня и полярного разложения.

Доказательство (квадратный корень):
$\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t) = (t - \lambda_1)^{a_1} ... (t - \lambda_k)^{a_k}$
$V = V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_k}$ – сумма собственных подпространств
Пусть $\mathcal{C}^2 = A$, а $\mu_1, ...\mu_e$ – собственнные числа $\mathcal{C}$
$V = \hat{V}_{\mu_1} \oplus ... \oplus \hat{V}_{\mu_e}$ – собственные подпространства для $\mathcal{C}$

$$\forall x \in \hat{V}_{\mu_i};\ \mathcal{C}x = \mu_i x;\ \mathcal{A}x = \mathcal{C}^2 x = \mu_i^2 x \Rightarrow \mu_i^2 = \lambda_i$$

НУО $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ при этом $\hat{V}_{\sqrt{\lambda_i}} \leq V_{\lambda_i}$

$$V = \oplus\hat{V}_{\lambda_i} \leq \oplus V_{\lambda_i} = V \Rightarrow \hat{V}_{\lambda_i} = V_{\lambda_i}$$

То есть $\forall x \in V_{\lambda_i}$ $\mathcal{C}x = \sqrt{\lambda_i}$, то есть $\mathcal{C}$ – определён однозначно

Доказательство (полярное разложение):
На матричном языке: $\mathcal{A} = \mathcal{S}\mathcal{U}$, $\mathcal{S} = \mathcal{S}^T$, $\mathcal{S} > 0, \mathcal{U} = \mathcal{U}^{-1}$

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^T = \mathcal{S}\mathcal{U}(\mathcal{S}\mathcal{U}^T) = \mathcal{S}\mathcal{U}\mathcal{U}^T\mathcal{S}^T = \mathcal{S}^2$$

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^T > 0\ \ \mathcal{A}\mathcal{A}^T = (\mathcal{A}\mathcal{A}^T)^T$$

$$(\mathcal{A}\mathcal{A}^T x, x) > 0$$

$\mathcal{A}\mathcal{A}^T = \mathcal{S}^2$ – определено однозначно по предыдущей теореме
$\mathcal{U} = \mathcal{S}^{-1}\mathcal{A}$ – определено однозначно $\Rightarrow$ доказали единственность

35 SVD-разложение.

Теорема (SVD разложение):
Любую матрицу размера $m \times n$ можно представить в виде композиции 3 матриц: ABC, где A и C – ортогональные матрицы поворота, а B – диагональная.