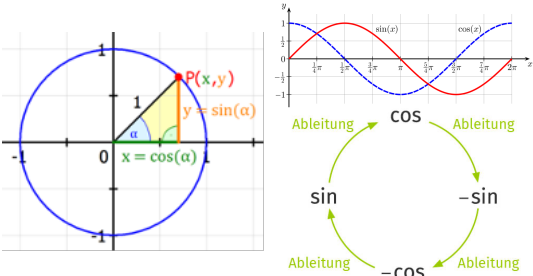


1 Grundlagen

1.1 Trigonometrie



	0°	30°	45°	60°	90°
sin(α)	0	1/2	√2/2	√3/2	1
cos(α)	1	√3/2	√2/2	1/2	0
tan(α)	0	√3/3	1	√3	—



1.2 Vektorrechnung

Länge des Vektors: $|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$

1.3 Ableitungen

Funktion	Ableitung
x^a	$a \cdot x^{a-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$

1.3.1 Physikalische Grössen

Geschwindigkeit	v	-	m/s
Beschleunigung	a	-	m/s^2
Federkonstante	D	-	N/m
Frequenz	f	Hertz	$1/s$
Kraft	F	Newton	$kg \cdot m/s^2$
Energie	E	Joule	$N \cdot m$
Arbeit = Δ Energie	W	Joule	$J = N \cdot m$
Leistung = Arbeit pro Zeit	P	Watt	J/s

* 4.19 Joule = 1 Cal, 1 Joule = 1 Watt/s => $3.6 \cdot 10^6 J = 1 kWh$

Physik Anwendung für Informatiker / Felix Tran, Joshua Beny Hürzeler / 1

1.3.2 Basisgrössen

Länge	l	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Zeit	t	Sekunde	s

1.3.3 Abhängigkeit Weg Geschwindigkeit und Beschleunigung über die Zeit

Wegfunktion	$s(t)$
Geschwindigkeitsfunktion	$v(t) = \dot{s}(t)$
Beschleunigungsfunktion	$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$

1.3.4 Konstanten

Fallbeschleunigung	g	$9.80665 m/s^2$
Lichtgeschwindigkeit	c	$2.99792458 \cdot 10^8 m/s$
Gravitationskonstante	G	$6.673 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2$

Konservative Kraft: Die Kraft ist konservativ, da sie nur von Ortskoordinaten abhängt, und da $-F(x)$ als reell wertige Funktion einer Variable eine Stammfunktion besitzt. Das Hook'sche Gesetz beschreibt eine konservative Kraft, da sie nur von Ortskoordinaten abhängt, und da $-F(x)$ als reell wertige Funktion einer Variable eine Stammfunktion besitzt.

2 Kinematik

Mittlere Geschwindigkeit: $\bar{v} = \frac{\Delta v}{\Delta s}$

Mittlere Beschleunigung: $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

Gleichförmige Bewegung: $s = s_0 + v \cdot t \Rightarrow \frac{s}{v} = t$

Geradlinige Bewegung: $\Delta s = \bar{v} \Delta t$

Gleichmässig beschleunigte Bewegung:

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2$$
$$v = v_0 + at$$
$$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0) \Rightarrow \text{wenn } v_0 = 0 \Rightarrow s = \frac{v^2}{2a}$$

$$\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

$$t = \frac{v}{a} = \frac{v_0 - v}{a}$$

2.1 Gleichförmige Kreisbewegung ($\omega = \text{konst.}$)

Umlaufzeit: T $[T] = s$

Frequenz: $f = \frac{1}{T}$ $[f] = s^{-1} = \text{Hz}$

Winkelkoordinate: $\varphi = \frac{b}{r}$ $[\varphi] = \text{rad} = \frac{m}{m}$

Winkelgeschwindigkeit: $\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$ $[\omega] = \frac{\text{rad}}{s}$

$$= 2\pi/T = 2\pi f$$

Bahngeschwindigkeit: $v = r\omega$

$$a_z = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

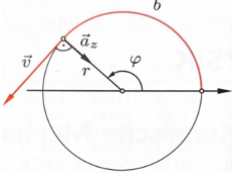
$$v_T = \frac{2\pi r}{T}$$

$$a_r = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

$$a_T = \frac{v_1 - v_0}{t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$r(t) = r \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi_0) \\ \sin(\omega t + \varphi_0) \end{pmatrix}$$

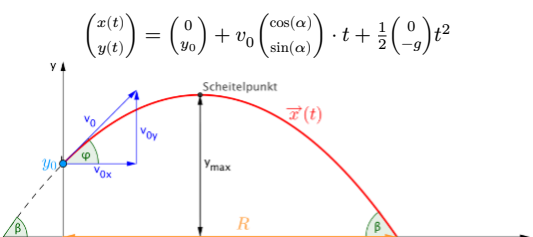
Radialgeschwindigkeit: $v = \frac{\text{Umfang}}{T}$



2.2 Schiefer Wurf

Bewegungsgleichung:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$



$$y = x \cdot \tan(\alpha_0) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha_0)} x^2$$

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha_0)}{2g}$$

$$x_w = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha_0)}{g}$$

3 Messen und Messfehler

Systematische Fehler: z.B. messen mit falsch kalibriertem Messgerät. Berechnet sich der Wert einer Grösse z aus Messwerten der Grössen x und y.

$z = f(x, y)$
und wurden die Messgrössen x und y mit einem Fehler von Δx bzw. Δy bestimmt, so ist der Wert von z nur ungenau bestimmt. Für den prognostizierten Wert und den prognostizierten Messfehler gilt

$$z = z_0 \pm \Delta z$$
$$z_0 = f(x_0, y_0)$$

$$\Delta z = \left| \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) \right| \cdot \Delta x + \left| \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) \right| \cdot \Delta y$$

sofern die Grössen x und y, z.B. auf Grund von fehlerhaften Messinstrumenten, systematisch falsch bestimmt wurden. Die Fehlerabschätzung durch systematische Fehler ist eine «worst-case»-Abschätzung. **Statistische Fehler:** bei mehrfach messen unterschiedliche Ergebnisse => mehrmals messen und Mittelwert nehmen verkleinert den Fehler. Fehlerfortpflanzung für normalverteilte Fehler. Berechnet sich der Wert einer Grösse z aus Messwerten der Grössen x und y gemäss

$z = f(x, y)$
und wurden die Messgrössen x und y durch Mehrfachmessung (x n-fach gemessen, y m-fach gemessen) und ohne systematischen Fehler bestimmt, so darf von statistisch normalverteilten Fehlern ausgegangen werden. In diesem Fall errechnet sich die Standardunsicherheit der Messwerte von x und y gemäss

$$\Delta x = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$
$$\Delta y = \sqrt{\frac{1}{m(m-1)} \sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{m}}$$

σ = Standardabweichung
 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ = Mittelwert
Es gilt also

$$x = \bar{x} \pm \Delta x$$
$$y = \bar{y} \pm \Delta y$$

Ausserdem ist der prognostizierte Wert und der statistische Fehler von z durch folgende Formeln berechenbar

$$z = z \pm \Delta z$$
$$\bar{z} = f(\bar{x}, \bar{y})$$

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) \cdot \Delta x \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) \cdot \Delta y \right)^2}$$

Beispiel Systematischer Fehler: Ein Gewicht unbekannter Masse wird auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel α platziert, auf der es reibungsfrei gleiten kann. Die Hangabtriebskraft und der Neigungswinkel α werden experimentell bestimmt. Die Werte sind $\alpha = (30^\circ \pm 2^\circ)$, $F_H = (10 \pm 0.3) N$. Aus Tabelle $g = (9.81 \pm 0.03)$

$$F_H = mg \cdot \sin(\alpha) \Rightarrow m = \frac{F_H}{g \cdot \sin(\alpha)}$$
$$m = \frac{10 N}{9.81 m/s^2 \cdot \sin(30^\circ)} = 2.0387$$

Partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial g} \left(\frac{F_H}{g \cdot \sin(\alpha)} \right) = -\frac{F_H}{g^2 \cdot \sin(\alpha)}$$
$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{F_H}{g \cdot \sin(\alpha)} \right) = -\frac{F_H \cdot \cos(\alpha)}{g \cdot \sin^2(\alpha)}$$

$$\Delta m = \left| -\frac{F_H}{g^2 \cdot \sin(\alpha)} \cdot \Delta g \right| + \left| -\frac{F_H \cdot \cos(\alpha)}{g \cdot \sin^2(\alpha)} \cdot \Delta \alpha \right|$$
$$+ \left| \frac{1}{g \cdot \sin(\alpha)} \cdot \Delta F_H \right| = 0.191 kg$$
$$m = (2.04 \pm 0.19) kg$$

Achtung Δα muss in Bogenmass sein!

Gradmass in Bogenmass $x = \frac{\alpha}{180} \cdot \pi$

Bogenmass in Gradmass $\alpha = \frac{x}{\pi} \cdot 180$

4 Kraft

Kraft $\vec{F}_{\text{res}} = m\vec{a}$

Gewichtskraft $F_G = mg$

Federkraft $F_F = D y$ D = Federkonst.

$$y = |l - l_0|$$

$$\Delta F = D \cdot \Delta y$$

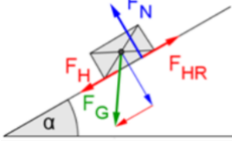
$$F_Z = \frac{mv^2}{r}$$

$$F_G = mg$$

Hook'sches Gesetz
Normalkraft: $F_N = mg \cdot \cos(\alpha)$

Hangabtriebskraft: $F_H = mg \cdot \sin(\alpha)$

Haftreibungskraft: $F_{HR} = \mu \cdot F_N$

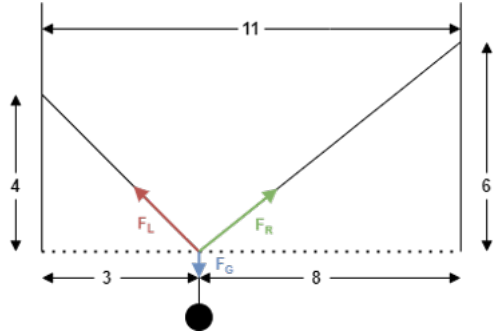
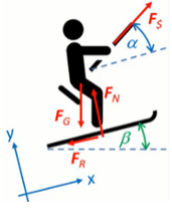


4.1 Kraft Statik

In der Statik bewegen sich die Objekte nicht. Dort gilt also:

$$\sum F = 0, v(t) = 0m/s, a(t) = 0m/s^2$$

$$\begin{aligned} \text{X) } F_s \cdot \cos(18^\circ) - \mu \cdot F_N \\ - F_G \cdot \sin(35^\circ) = 0 \\ \text{Y) } F_s \cdot \sin(18^\circ) + F_N \\ - F_G \cdot \cos(35^\circ) = 0 \end{aligned}$$



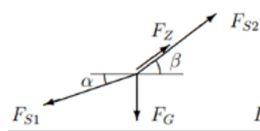
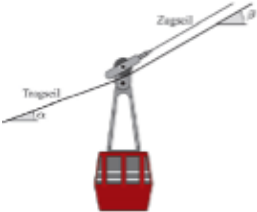
Ein Gewicht der Masse $m = 10\text{kg}$ wird entsprechend der obigen Skizze durch Seile an einer Wand befestigt. Welche Kräfte wirken im linken und rechten Seil?

1. Methode:

$$\frac{F_L}{\sqrt{3^2+4^2}} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{F_R}{\sqrt{8^2+6^2}} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} + mg \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

2. Methode

$$F_L \begin{pmatrix} -\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} + F_R \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix} + mg \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$



5 Energie E

kinetische Energie

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

potenzielle Energie

$$E_p = mgh$$

spannenergie einer Feder

$$E_F = \frac{1}{2}Dy^2$$

Energieerhaltungssatz

$$E_{\text{tot}} = \sum_i E_i = \text{konst.}$$

E_{tot} : Gesamtenergie im abgeschlossenen System

E_i : Teilenergie

Energieerhaltung potenzielle Energie => Feder:

$$mg(h+y) = \frac{1}{2}Dy^2$$

6 Arbeit W

Beziehung zwischen Arbeit und Energie:

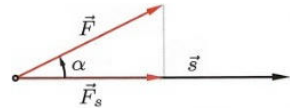
$$\Delta E = W_{AB}$$

ΔE : Energieänderung eines offenen Systems

W_{AB} : Arbeit, einer äusseren Kraft an diesem System

$$W = F_s s$$

$$W = F \cdot s \cdot \cos(\alpha) = \vec{F} \cdot \vec{s}$$



Arbeit auf der scheinbaren Ebene mit Reibung:

$$W = (\sin(\alpha) + \mu_R \cdot \cos(\alpha)) \cdot F_G \cdot s$$

7 Leistung P

$$\text{mittlere Leistung } \bar{P} = \frac{W_{AB}}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

momentane Leistung

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{W_2}{W_1} = \frac{P_2}{P_1}$$

$W_1 P_1$:
aufgenommene
Leistung bzw. Ar-
beit
 $W_2 P_2$:
nutzbare
Leistung bzw. Ar-
beit

Vortriebskraft

$$F = \frac{P}{v}$$

Reibungs-
koeffizient

$$\mu = \frac{P}{F_G v}$$

Steigleistung

$$\frac{dh}{dt} = \frac{P}{F_G + \frac{P}{v} \cot(\alpha)}$$

Welche Wassermenge pro Zeiteinheit fördert eine 4-kW-Pumpe in ein 45 m höher liegendes Reservoir?

$$\frac{dV}{dt} = \frac{P}{\rho gh}$$

Leistung auf der Schiefen Ebene in Abhängigkeit von s und h :

$$W = (h + \mu_R \sqrt{s^2 - h^2}) mg$$

8 Kosmologie

Umkreisung in geringer Höhe: Gravitationskraft zwischen Satelliten und Erde F_G ist gerade das Gewicht mg des Satelliten, welches es er auch auf der Erde hätte

$$mg = \frac{mv^2}{r}$$

Daraus folgt die Formel für die

Geschwindigkeit	Umlaufzeit
$v = \sqrt{gr}$	$T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}}$

Geostationär: Geostationär bedeutet, dass der Satellit gleiche Umlaufzeit T wie die Erde hat. (Umlaufzeit Erde = $T = 24 \cdot 3600s = 86400s$)

Gravitation:

Gravitationskraft
zweier Massenpunkte

$$F_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$\vec{F}_G = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

$$E_p = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM_E}{r_E}}$$

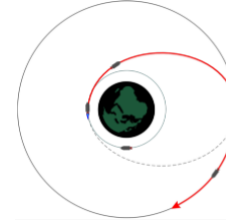
Potenzielle Energie

Kreisbahngeschwindigkeit

Felix Tran, Joshua Beny Hürzeler / 2

Fluchtgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2GM_E}{r_E}}$$



Energie Änderung
bei Bahnänderung

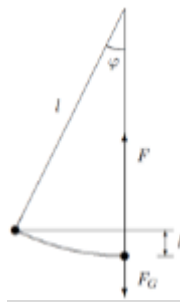
$$\Delta E = \frac{GM_E m}{r} \frac{r' - r}{r' r}$$

$r' =$ Radius neue Bahn

potenzielle Energie eines Objekts im Gravitationsfeld eines anderen:

$$E_p = \frac{GM_E m}{r}$$

9 Fadenpendel



$$\left. \begin{aligned} F &= \text{Fadenkraft} \\ F_G &= \text{Gewichtskraft} \end{aligned} \right\} F_{\text{res}} = F - F_G = \left(\frac{mv^2}{l} \right)$$

Die Energie-Erhaltung sagt uns, dass potenzielle Energie gleich kinetische Energie ist. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{2} &= mgh \\ &= mg(l - l \cdot \cos(\varphi)) \\ &= mgl(1 - \cos(\varphi)) \end{aligned}$$

Schwingungsdauer:

$$\begin{aligned} \text{Feder} \quad T &= 2\varphi \sqrt{\frac{m}{D}} \\ \text{Mathematisches Pendel} \quad T &\approx 2\varphi \sqrt{\frac{l}{g}} \end{aligned}$$

10 Mehrdimensionale Analysis

Linearisierung:

$$f(x) \underset{x \approx x_0}{\approx} f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Häufig mit Funktionen mehrerer Variablen zu tun, die weitere Funktionen beinhalten.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 \cdot \sin(y) \\ x(t) &= \sin(t) \\ y(t) &= t^3 \end{aligned}$$

Partielle Ableitung:

Nach x und y getrennt ableiten.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x^2 \cdot \sin(y)) = 2x \cdot \sin(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y}(x^2 \cdot \sin(y)) = x^2 \cdot \cos(y) \end{aligned}$$

Totale Ableitung:

$x(t)$ und $y(t)$ in $f(x, y)$ einsetzen und dann ableiten.

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt}(x(t), y(t)) &= \frac{d}{dt}(\sin(t)^2 \cdot \sin(t^3)) \\ &= 2 \sin(t) \cdot \cos(t) \cdot \sin(t^3) + \sin(t)^2 \cdot \cos(t^3) \cdot 3t^2 \end{aligned}$$

Alternativ mit mehrdimensionale Kettenregel möglich. Bei dieser werden die partiellen Ableitungen mit der Ableitung der Funktion multipliziert und addiert.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

11 Weiteres

11.1 Taschenrechner

- **Menu** → **3** → **1** für solve()
- **Menu** → **3** → **7** → **1** für Gleichungssystem lösen
- **doc** → **7** → **2** für Umstellung von Grad auf Rad

11.2 Fundamentum Mathematik und Physik Inhalt

- **Trigonometrie:** Seite 26
- **Ableitungen:** Seite 60
- **Kinematik:** Seite 81
- **Kräfte:** Seite 83
- **Energie:** Seite 85