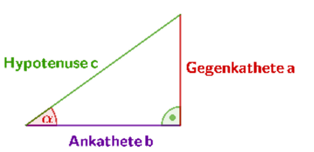
1 Grundlagen

1.1 Trigometrie

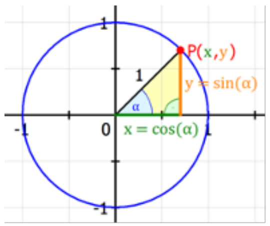


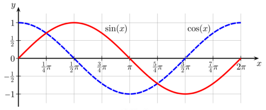
$\sin(\alpha) = \frac{G}{H}$

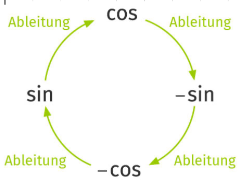
$\cos(\alpha) = \frac{A}{H}$

$\tan(\alpha) = \frac{G}{A} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–







1.2 Vektorrechnung

Länge des Vektors: $|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$

1.3 Ableitungen

Funktion	Ableitung
x^a	$a \cdot x^{a-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos(2)^x}$

Produktregel:

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Kettenregel:

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

1.3.1 Physikalische Grössen

Geschwindigkeit	v	-	m/s
Beschleunigung	a	-	m/s^2
Federkonstante	D	-	N/m
Frequenz	f	Hertz	$1/s$
Kraft	F	Newton	$kg \cdot m/s^2$
Energie	E	Joule	$N \cdot m$
Arbeit = Δ Energie	W	Joule	$J = N \cdot m$
Leistung = Arbeit pro Zeit	P	Watt	J/s

* 4.19 Joule = 1 Cal, 1 Joule = 1 Watt/s => $3.6 \cdot 10^6 J = 1$ kWh

1.3.2 Basisgrössen

Länge	l	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Zeit	t	Sekunde	s

1.3.3 Abhängigkeit Weg Geschwindigkeit und Beschleunigung über die Zeit

Wegfunktion	$s(t)$
Geschwindigkeitsfunktion	$v(t) = \dot{s}(t)$
Beschleunigungsfunktion	$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$

1.3.4 Konstanten

Fallbeschleunigung	g	$9.80665 m/s^2$
Lichtgeschwindigkeit	c	$2.99792458 \cdot 10^8 m/s$
Gravitationskonstante	G	$6.673 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2/\text{kg}^2$

Konservative Kraft: Die Kraft ist konservativ, da sie nur von Ortskoordinaten abhängt, und da $-F(x)$ als reell wertige Funktion einer Variable eine Stammfunktion besitzt. Das Hook'schen Gesetz beschreibt eine konservative Kraft, da sie nur von Ortskoordinaten abhängt, und da $-F(x)$ als reellwertige Funktion einer Variable eine Stammfunktion besitzt

2 Kinematik

Mittlere Geschwindigkeit: $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta s}$

Mittlere Beschleunigung: $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

Gleichförmige Bewegung: $s = s_0 + v \cdot ta \Rightarrow \frac{s}{v} = t$

Geradlinige Bewegung: $\Delta s = \bar{v} \Delta t$

Gleichmässig beschleunigte Bewegung:

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v = v_0 + at$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0) \Rightarrow \text{wenn } v_0 = 0 \Rightarrow s = \frac{v^2}{2a}$$

$$\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

$$t = \frac{v}{a} = \frac{v_0 - v}{a}$$

2.1 Gleichförmige Kreisbewegung (ω = konst.)

Umlaufzeit: T $\quad [T] = s$

Frequenz: $f = \frac{1}{T}$ $\quad [f] = s^{-1} = \text{Hz}$

Winkelkoordinate: $\varphi = \frac{b}{r}$ $\quad [\varphi] = \text{rad} = \frac{m}{m}$

Winkelgeschwindigkeit: $\omega = \Delta \frac{\varphi}{\Delta} t$ $\quad [\omega] = \frac{\text{rad}}{s}$

$= 2\frac{\pi}{T} = 2\pi f$

Bahngeschwindigkeit: $v = r\omega$

Zentripetalbeschleunigung: $a_z = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$

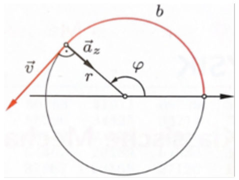
Tangentialgeschwindigkeit: $v_T = \frac{2\pi r}{T}$

Radialbeschleunigung/ Zentripetalbeschleunigung: $a_r = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$

Tangentialbeschleunigung: $a_T = \frac{v_1 - v_0}{t}$

Kreisbewegung Funktion: $r(t) = r\begin{pmatrix}\cos(wt+\varphi_0) \\ \sin(wt+\varphi_0)\end{pmatrix}$

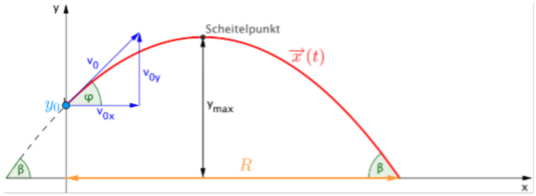
Radialgeschwindigkeit: $v = \frac{\text{Umfang}}{T}$



2.2 Schiefer Wurf

Bewegungsgleichung: $\vec{r}(t) = \vec{r_0} + \vec{v_0} t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$

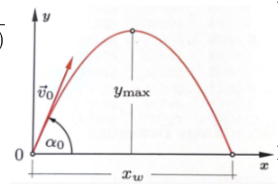
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix} + v_0 \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \cdot t + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t^2$$



$$y = x \cdot \tan(\alpha_0) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha_0)} \cdot x^2$$

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha_0)}{2g}$$

$$x_w = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha_0)}{g}$$



3 Messen und Messfehler

Systematische Fehler: z.B. Messen mit falsch kalibriertem Messgerät.

Berechnet sich der Wert einer Grösse z aus Messwerten der Grössen x und y.

$$z = f(x, y)$$

und wurden die Messgrössen x und y mit einem Fehler von Δx bzw. Δy bestimmt, so ist der Wert von z nur ungenau bestimmt. Für den prognostizierten Wert und den prognostizierten Messfehler gilt

$$z = z_0 \pm \Delta z$$

$$z_0 = f(x_0, y_0)$$

$$\Delta z = \left|\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0)\right| \cdot \Delta x + \left|\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)\right| \cdot \Delta y$$

sofern die Grössen x und y, z.B. auf Grund von fehlerhaften Messinstrumenten, systematisch falsch bestimmt wurden. Die Fehlerabschätzung durch systematische Fehler ist eine «worst-case»-Abschätzung

Statistische Fehler: Bei mehrfach messen unterschiedliche Ergebnisse

⇒ Mehrmals messen und Mittelwert nehmen verkleinert den Fehler Fehlerfortpflanzung für normalverteilte Fehler. Berechnet sich der Wert einer Grösse z aus Messwerten der Grössen x und y gemäss

$$z = f(x, y)$$

und wurden die Messgrössen x und y durch Mehrfachmessung (x n-fach gemessen, y m-fach gemessen) und ohne systematischen Fehler bestimmt, so darf von statistisch normalverteilten Fehlern ausgegangen werden. In diesem Fall errechnet sich die Standardunsicherheit der Messwerte von x und y gemäss

$$\Delta x = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

$$\Delta y = \sqrt{\frac{1}{m(m-1)} \sum_{i=1}^{m} (y_i - \bar{y})^2} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{m}}$$

σ = Standardabweichung

$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=n}^{n} x_i$ = Mittelwert

Es gilt also

$$x = \bar{x} \pm \Delta x$$

$$y = \bar{y} \pm \Delta y$$

Ausserdem ist der prognostizierte Wert und der statistische Fehler von z durch folgende Formeln berechenbar

$$z = z \pm \Delta z$$

$$\bar{z} = f(\bar{x}, \bar{y})$$

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) \cdot \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) \cdot \Delta y\right)^2}$$

Beispiel Systematischer Fehler: Ein Gewicht unbekannter Masse wird auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel α platziert, auf der es reibungsfrei gleiten kann. Die Hangabtriebskraft und der Neigungswinkel α werden experimentell bestimmt. Die Werte sind $\alpha = (30° \pm 2°)$, $F_H = (10 \pm 0.3)N$. Aus Tabelle $g = (9.81 \pm 0.03)$

$$F_H = mg \cdot \sin(\alpha) \Rightarrow m = \frac{F_H}{g \cdot \sin(\alpha)}$$

$$m = \frac{10N}{9.81 m/s^2 \cdot \sin(30°)} = 2.0387$$

Partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial m}{\partial g}\left(\frac{F_H}{g \cdot \sin(\alpha)}\right) = -\frac{F_H}{g^2 \cdot \sin(\alpha)}$$

$$\frac{\partial m}{\partial \alpha}\left(\frac{F_H}{g \cdot \sin(\alpha)}\right) = -\frac{F_H \cdot \cos(\alpha)}{g \cdot \sin^{2}(F_H)}$$

$$\Delta m = \left|-\frac{F_H}{g^2 \cdot \sin(\alpha)} \cdot \Delta g\right| + \left|-\frac{F_H \cdot \cos(\alpha)}{g \cdot \sin^2(F_H)} \cdot \Delta\alpha\right|$$

$$+\left|\frac{1}{g \cdot \sin(\alpha)} \cdot \Delta F_H\right| = 0.191\text{kg}$$

$$m = (2.04 \pm 0.19)\text{kg}$$

Achtung $\Delta\alpha$ muss in Bogenmass sein!

Gradmass in Bogenmass $\quad x = \frac{\alpha}{180} \cdot \pi$

Bogenmass in Gradmass $\quad \alpha = \frac{x}{\pi} \cdot 180$

4 Kraft

Kraft $\quad \vec{F}_{\text{res}} = m\vec{a}$

Gewichtskraft $\quad F_G = mg$

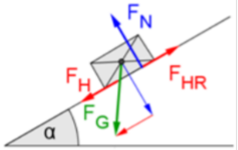
Federkraft $\quad F_F = Dy \quad D$ = Federkonst.

$y = |l - l_0|$

Hook`sches Gesetz $\quad \Delta F = D \cdot \Delta y$

Zentripetalkraft $\quad F_Z = \frac{mv^2}{r}$

Schiefe Ebene



$F_G = mg$

Normalkraft:
$F_N = mg \cdot \cos(\alpha)$

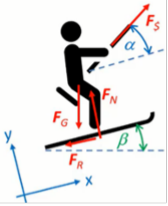
Hangabtriebskraft:
$F_H = mg \cdot \sin(\alpha)$

Haftreibungskraft:
$F_{\text{HR}} = \mu \cdot F_N$

4.1 Kraft Statik

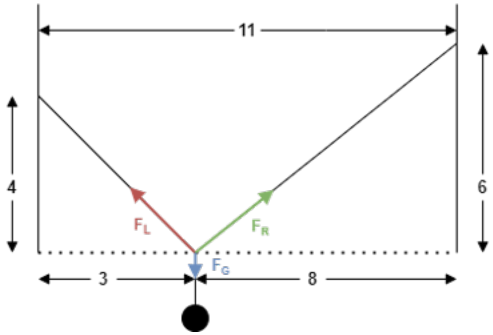
In der Statik bewegen sich die Objekte nicht. Dort gilt also:

$$\sum F = 0, v(t) = 0m/s, a(t) = 0m/s^2$$



$$\text{X)}\ F_s \cdot \cos(18°) - \mu \cdot F_N - F_G \cdot \sin(35°) = 0$$

$$\text{Y)}\ F_s \cdot \sin(18°) + F_N - F_G \cdot \cos(35°) = 0$$



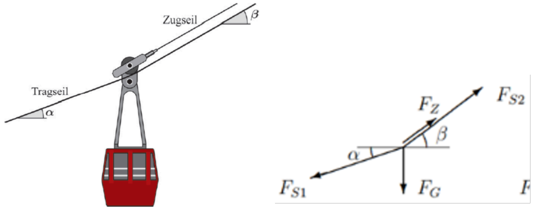
Ein Gewicht der Masse $m = 10$kg wird entsprechend der obigen Skizze durch Seile an einer Wand befestigt. Welche Kräfte wirken im linken und rechten Seil?

1. Methode:

$$\frac{F_L}{\sqrt{3^2+4^2}}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} + \frac{F_R}{\sqrt{8^2+6^2}}\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix} + mg\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = 0$$

2. Methode

$$F_L\begin{pmatrix}-\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{pmatrix} + F_R\begin{pmatrix}\cos(\beta)\\ \sin(\beta)\end{pmatrix} + mg\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = 0$$



5 Energie E

Kinetische Energie $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

Potenzielle Energie $E_p = mgh$

Spannenergie einer Feder $E_F = \frac{1}{2}Dy^2$

Energieerhaltungssatz $E_{\text{tot}} = \sum_i E_i = \text{konst.}$

E_{tot}: Gesamtenergie im abgeschlossenen System
E_i: Teilenergie

Energieerhaltung potenzielle Energie => Feder:
$mg(h+y) = \frac{1}{2}Dy^2$

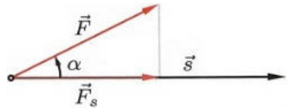
6 Arbeit W

Beziehung zwischen Arbeit und Energie:

$\Delta E = W_{\text{AB}}$ — ΔE: Energieänderung eines offenen Systems; W_{AB}: Arbeit, einer äusseren Kraft an diesem System

$W = F_s s$

$W = F \cdot s \cdot \cos(\alpha) = \vec{F} \cdot \vec{s}$



Arbeit auf der scheifen Ebene mit Reibung:
$W = (\sin(\alpha) + \mu_R \cdot \cos(\alpha)) \cdot F_G \cdot s$

7 Leistung P

mittlere Leistung $\bar{P} = \frac{W_{\text{AB}}}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta t}$

momentane Leistung $\frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

Wirkungsgrad $\eta = \frac{W_2}{W_1} = \frac{P_2}{P_1}$ — $W_1 P_1$: aufgenommene Leistung bzw. Arbeit; $W_2 P_2$: nutzbare Leistung bzw. Arbeit

Vortriebskraft $F = \frac{P}{v}$

Reibungskoeffizient $\mu = \frac{P}{F_G v}$

Steigleistung $\frac{dh}{dt} = \frac{P}{F_G + \frac{P}{v}\cot(\alpha)}$

Welche Wassermenge pro Zeiteinheit fördert eine 4-kW-Pumpe in ein 45 m höher liegendes Reservoir?

$$\frac{dV}{dt} = \frac{P}{\varrho gh}$$

Leistung auf der Schiefen Ebene in Abhängigkeit von s und h:

$$W = \left(h + \mu_R\sqrt{s^2 - h^2}\right)mg$$

8 Kosmologie

Umkreisung in geringer Höhe: Gravitationskraft zwischen Satelliten und Erde F_G ist gerade das Gewicht mg des Satelliten, welches es er auch auf der Erde hätte

$$mg = \frac{mv^2}{r}$$

Daraus folgt die Formel für die

Geschwindigkeit	Umlaufzeit
$v = \sqrt{gr}$	$T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$

Geostationär: Geostationär bedeutet, dass der Satellit gleiche Umlaufzeit T wie die Erde hat. (Umlaufzeit Erde $= T = 24 \cdot 3600s = 86400s$)

Gravitation:

Gravitationskraft zweier Massenpunkte $F_G = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$

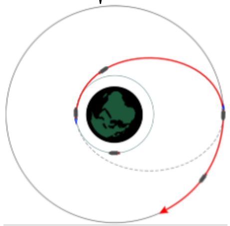
$\vec{F_G} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$

Potenzielle Energie $E_p = -G\frac{m_1 m_2}{r}$

Kreisbahngeschwindigkeit $v = \sqrt{\frac{GM_E}{r_E}}$

Fluchtgeschwindigkeit $v = \sqrt{\frac{2GM_E}{r_E}}$

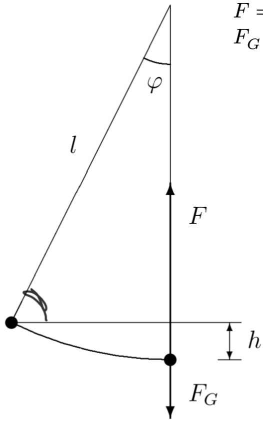
Energie Änderung bei Bahnänderung
$\Delta E = \frac{GM_E m}{r}\frac{r'-r}{r'r}$
r' = Radius neue Bahn



potenzielle Energie eines Objekts im Gravitationsfeld eines anderen:

$$E_p = \frac{GM_E m}{r}$$

9 Fadenpendel



$$\left.\begin{array}{l} F = \text{Fadenkraft} \\ F_G = \text{Gewichtskraft}\end{array}\right\} F_{\text{res}} = F - F_G = \left(\frac{mv^2}{l}\right)$$

Die Energie-Erhaltung sagt uns, dass potenzielle Energie gleich kinetische Energie ist. Daraus folgt:

$$\frac{mv^2}{2} = mgh = mg(l - l \cdot \cos(\varphi)) = mgl(1 - \cos(\varphi))$$

Schwingungsdauer:

Feder $T = 2\varphi\sqrt{\frac{m}{D}}$

Mathematisches Pendel $T \approx 2\varphi\sqrt{\frac{l}{g}}$

10 Mehrdimensionale Analysis

Linearisierung:

$$f(x) \underbrace{\approx}_{x \approx x_0} f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Häufig mit Funktionen mehrerer Variablen zu tun, die weitere Funktionen beinhalten.

$$f(x,y) = x^2 \cdot \sin(y)$$
$$x(t) = \sin(t)$$
$$y(t) = t^3$$

Partielle Ableitung:
Nach x und y getrennt ableiten.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x^2 \cdot \sin(y)) = 2x \cdot \sin(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x^2 \cdot \sin(y)) = x^2 \cdot \cos(y)$$

Totale Ableitung:
$x(t)$ und $y(t)$ in $f(x,y)$ einsetzen und dann ableiten.

$$\frac{df}{dt}(x(t), y(t)) = \frac{d}{dt}\left(\sin(t)^2 \cdot \sin(t^3)\right)$$
$$= 2\sin(t) \cdot \cos(t) \cdot \sin(t^3) + \sin(t)^2 \cdot \cos(t^3) \cdot 3t^2$$

Altenativ mit mehrdimensionale Kettenregel möglich. Bei dieser werden die partiellen Ableitungen mit der Ableitung der Funktion multipliziert und addiert.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

11 Weiteres

11.1 Taschenrechner

- **Menu** ⟶ **3** ⟶ **1** für solve()
- **Menu** ⟶ **3** ⟶ **7** ⟶ **1** für Gleichungsystem lösen
- **doc** ⟶ **7** ⟶ **2** für Umstellung von Grad auf Rad
- **Menu** ⟶ **4** ⟶ **1** für Ableitungen

11.2 Fundamentum Mathematik und Physik Inhalt

- **Trigometrie:** Seite 26
- **Ableitungen:** Seite 60
- **Kinematik:** Seite 81
- **Kräfte:** Seite 83
- **Energie:** Seite 85