1. Einführung

1.1. Quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Mitternachtsformel:

$$x_{\{1,2\}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1.2. Formen

1.2.1. Kreis

Umfang C:

$$C = \pi \cdot 2r$$

Fläche A:

$$A = \pi \cdot r^2$$

1.2.2. Dreieck

Umfang C:

$$C = a + b + c$$

Fläche A:

$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$$

Pythagoras:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

1.2.3. Kugel

Volumen V:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Oberfläche A:

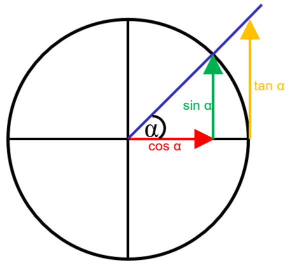
$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

1.3. Trigonometrie

a = Ankathete
g = Gegenkathete
h = Hypothenuse

$$\sin(a) = \frac{g}{h}, \quad \cos(a) = \frac{a}{h}, \quad \tan(a) = \frac{g}{a} = \frac{\sin(a)}{\cos(a)}$$

$$g = h \cdot \sin(a), \ h = \frac{g}{\sin(a)}, \ a = \arcsin\left(\frac{g}{h}\right)$$



Grad Rad

$$\text{Rad} = \frac{\text{Grad} \cdot \pi}{180}$$

$$\text{Grad} = \frac{\text{Rad} \cdot 180}{\pi}$$

1.4. Vektor

Kreuzprodukt:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

1.5. Ableitung

Funktion	Ableitung
x^a	$a \cdot x^{a-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos(2)^x}$

1.6. Integration

Funktion	Ableitung
x^a	$\frac{1}{a+1} x^{a+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x \rvert)$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + \text{const}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + \text{const}$

2. Statik

2.1. Schwerkraft

m1 = Massepunkt 1
m2 = Massepunkt 2

Gravitationsgesetz:

$$F_G = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Gravitationskonstante G:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

Fallbeschleuningung g:

$$m_E = 5.972 \cdot 10^{24} kg$$

$$r_E = 6378 \text{ km}$$

$$g = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{m_E}{r_E^2}$$

$$g = 9.81 \frac{m}{s^2}$$

2.2. Reibung

Wenn Körper auf horizontale Fläche liegt:

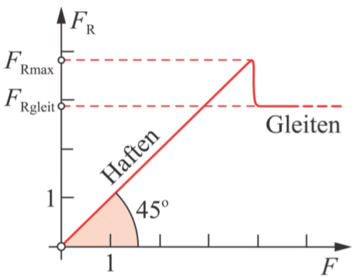
$$F_G = -F_N$$

Gleitreibungskraft:
F_N = Gleitreibung
μ_G = Gleitreibungskoeffizient

$$F_R = \mu_G \cdot F_N$$

Haftreibungskraft:
F_N = Gleitreibung
μ_H = Haftreibungskoeffizient

$$F_R = \mu_H \cdot F_N$$

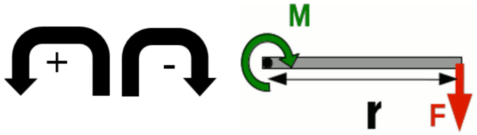


2.3. Drehmoment

Linke Hand Regel (Schraubenzieher):

Drehmoment M:
a = Hebellänge

$$M = a \cdot F$$



2.4. Deformierbarer Körper

A = Fläche m^2,
F = Kraft senkrecht zur Fläche N,
E = Elastizitätsmodul Nm^{-2},
μ = Poissonzahl (< 0.5),
G = Schubmodul
p = Druckspannung

2.4.1. Spannung

Zugspannung σ:

$$\sigma := \frac{F_\perp}{A} = -p$$

$$\sigma \cdot E = \frac{F}{A}$$

Druckspannung p:

$$p = \frac{F}{A} = -\sigma$$

Hook'sche Gesetz:
Relative Änderung [0-1]

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

2.4.2. Dehnung

A = Querschnittsfläche

Verlängerung $\triangle l$:

$$\triangle l = l\frac{F}{A}$$

Dehnung ε:

$$\varepsilon = \frac{\triangle l}{l}$$

Schubspannung τ:

$$\tau := \frac{F_\parallel}{A}$$

Scherwinkel γ:

$$\gamma = \frac{1}{G} \cdot \tau$$

Schubmodul G

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1+\mu)}$$

Querkontraktion ε_q:
d = Urprungsdicke
$\triangle d$ = Dickeänderung

$$\varepsilon_q = \frac{\triangle d}{d}$$

$$\varepsilon_q = -\mu \cdot \varepsilon$$

2.4.3. Kompression

Kompression:
$\triangle p$ = Druckänderung
κ = Kompressibilität

$$\frac{\triangle V}{V} = -\kappa \cdot \triangle p$$

2.4.4. Schubbeanspruchung

Torsionsmodul G:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

2.5. Beispiele

2.5.1. Torsionsfeder

c = Konstante
φ = Winkel der Drehung
G = Schubmodul
l = Länge der Torsionsfeder
r = Radius der Torsionsfeder

Drehmoment Torsionsfeder:

$$M = c \cdot \varphi$$

Federkonstante:

$$c = \frac{\pi G r^4}{2l}$$

Bei M konstant:

$$l \to 2l \Rightarrow \varphi \to 2\varphi$$

$$r \to 2r \Rightarrow \varphi \to \frac{\varphi}{16}$$

$$E \to 2E \Rightarrow \varphi \to \frac{\varphi}{2}$$

$$\mu(0.2) \to \mu(0.3) \Rightarrow \varphi(0.2) < \varphi(0.3)$$

2.5.2. Schraubenfeder

k = Federkonstante
n = Windungszahl
R = Windungsradius
r = Drahtdurchmesser
x = Auslenkung

$$k = \frac{Gr^4}{4nR^3}$$

$$F = kx$$

$$x = \frac{F}{k} = \frac{4nR^3 \cdot F}{Gr^4}$$

Bei konstanter Kraft F:

$$r \to 2r \Rightarrow x \to \frac{x}{16}$$

$$R \to 2R \Rightarrow x \to 8x$$

$$E \to 2E \Rightarrow x \to \frac{x}{2}$$

$$\mu(0.2) \to \mu(0.3) \Rightarrow x \text{ wird grösser}$$

2.5.3. Plattfeder

b = Breite Material
h = Höhe Material
l = Länge Material
p = Dichte des Materials
E = Elastizitätsmodul
z = Auslenkung

Durchbiegung am Ende:

$$z = \frac{4l^3}{Ebh^3}$$

Durchbiegung in der Mitte:

$$z = \frac{5pgl^4}{32Eh^2}$$

3. Kinematik

3.1. Bewegung

Mittlere Geschwindigkeit:

$$\vec{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Momentane Geschwindigkeit:

$$v(t) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle x}{\triangle t} = \frac{d}{dt} x(t)$$

Mittlere Beschleunigung:

$$\vec{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Momentane Beschleunigung:

$$a(t) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{v(t) - v(t - \triangle t)}{\triangle t} = \frac{d}{dt} v(t)$$

Aufprallgeschwindigkeit (Höhe h):

$$v = \sqrt{2gh}$$

3.2. Lineare Bewegung

3.2.1. Gleichförmige Bewegung

s = Strecke (m)
v = Geschwindigkeit (frac(m,s))
t = Zeit (s)

Ort:

$$x(t) = v_0 \cdot t + x_0$$

Geschwindigkeit:

$$v(t) = v_0 = \text{konstant}$$

Beschleunigung:

$$a(t) = 0$$

Anderes:

$$s = v \cdot t$$

$$v = \frac{s}{t}$$

$$t = \frac{s}{v}$$

3.2.2. Gleichmässig beschleunigte Bewegung

a = Beschleunigung ($\frac{m}{s^2}$)
v = Geschwindigkeit ($\frac{m}{s}$)
t = Zeit (s)

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0$$

$$v(t) = a_0 t + v_0$$

$$a(t) = a_0 = \text{konstant}$$

Was häufiger antreffen sind, sind Aufgaben im Stil von Gesamtzeit 10s, ein Teil beschleunigt, ein Teil konstante Geschwindigkeit, Gesamtstrecke 100m.

$$x = \frac{1}{2} a_0 t_0^2 + v_0 \cdot (t - t_0)$$

$$v_0 = a \cdot t_0$$

Ohne Anfangswerte:
x = Ort
v = Geschwindigkeit
a = Beschleunigung

$$x = \frac{v^2}{2a}$$

$$v = \sqrt{2ax}$$

$$a = \frac{v^2}{2x}$$

Mit Anfangswerte:
x = Ort
v = Geschwindigkeit
a = Beschleunigung
x_0 = Anfangsort
v_0 = Anfangsgeschwindigkeit

$$x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} + x_0$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2a \cdot (x - x_0)}$$

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot (x - x_0)}$$

Idk what this is for:

$$a = \frac{1}{2} \frac{v}{t}$$

$$t = \frac{v}{a}$$

$$v = a \cdot t$$

$$a = \frac{v}{t}$$

$$t = \frac{v}{a}$$

3.3. Beliebige Bewegungen

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Mittlere Geschwindigkeit:

$$\vec{v} = \frac{\triangle \vec{r}}{\triangle t}$$

$$\triangle \vec{r} = \vec{r}(t + \triangle t) \vec{r}(t)$$

Momentane Geschwindigkeit:

$$\vec{v}(t) := \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\vec{r}}{\triangle t} = \frac{d}{dt} \vec{r}(t)$$

3.3.1. Beschleunigung

Mittlere Beschleunigung:

$$\vec{a} = \frac{\triangle \vec{v}}{\triangle t}$$

Momentane Beschleunigung:

$$\vec{a} := \frac{d}{dt} \vec{v} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \ddot{\vec{r}}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \frac{d}{dt} \vec{v} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\vec{v}(t) - \vec{v}(t - \triangle t)}{\triangle t}$$

$$a_{\text{tangential}} = \lim \frac{\triangle v_{\text{tangential}}}{\triangle t} = \frac{d}{dt} v = \dot{v}$$

$$a_{\text{radial}} = \lim \frac{\triangle v_{\text{radial}}}{\triangle t} = \frac{v^2}{r}$$

3.3.2. Gleichförmige Bewegung

s = Strecke entlang der Bahnkurve

$$a_{\text{tangential}} = 0$$

$$v_{\text{tangential}(t)} = v_0 = \text{konstant}$$

$$s(t) = v_0 t + s_0$$

3.3.3. Gleichmässig beschleunigte Bewegung

$$a_{\text{tangential}} = a_0 \neq 0$$

$$v(t) = a_0 t + v_0$$

$$s(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + s_0$$

3.4. Kreisbewegung

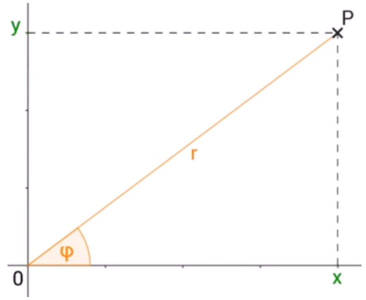
Spezialfall einer beliebigen Bewegung.

Kartesische Koordination:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}}_{\text{Polar -> Kartesisch}}$$

Polarkoordinaten:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} |\sqrt{x^2 + y^2}| \\ \tan(\frac{y}{x}) \end{pmatrix}}_{\text{Kartesisch -> Polar}}$$



3.4.1. Winkelgeschwindigkeit

T = Periode (Zeit pro Umdrehung)
f = Drehfrequenz (Umdrehungen pro Sekunde)
r = Radius
s = Strecke
φ = Winkel
ω = Winkelgeschwindigkeit

Winkel φ:

$$\varphi = \frac{s}{r}$$

Winkelgeschwindigkeit ω:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$v = \omega \cdot r$$

oder irgendwie das unten

$$\omega = a \cdot t$$

Bahngeschwindigkeit v:

$$v = \frac{s}{T} = \frac{\varphi \cdot r}{T} = r \cdot \omega$$

Drehfrequenz f:

$$f = \frac{1}{T}$$

Umlaufzeit T:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

Periode:

$$\omega = 2\pi f$$

3.4.2. Winkelbeschleunigung

α = Winkelbeschleunigung

$$\alpha = \frac{d}{dt}\omega = \dot{w} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$$

$$a_{\text{tangential}} = \frac{d}{dt} r \cdot \omega = r \cdot \alpha$$

3.4.3. Gleichförmige Kreisbewegung

φ = Zurückgelegte Strecke auf Einheitskreis
φ_0 = Anfangswinkel ω = Pro Zeit Zurückgelegter Winkel

$$a = 0$$

$$\omega = \omega_0 = \text{konstant}$$

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$$

Tacho (Bahnangaben):

$$a = \alpha \cdot r = 0$$

$$v = w_0 \cdot r = \text{konstant} = v_0$$

$$s = w_0 r t + \varphi_0 r$$

3.4.4. Gleichförmig beschleunigte Kreisbewegung

φ = Zurückgelegte Strecke auf Einheitskreis
φ_0 = Anfangswinkel ω = Pro Zeit Zurückgelegter Winkel ω_0 = Anfangsgeschwindigkeit

$$a = a_0 = \text{konstant}$$

$$\omega = a_0 t + \omega_0$$

$$\varphi = \frac{1}{2} a_0 t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$$

Ohne Anfangswerte:
φ = Winkel
ω = Winkelgeschwindigkeit
a = Winkelbeschleunigung

$$\varphi = \frac{\omega^2}{2a}$$

$$\omega = \sqrt{2a\varphi}$$

$$a = \frac{\omega^2}{2\varphi}$$

Mit Anfangswerte:
φ = Winkel
ω = Winkelgeschwindigkeit
a = Winkelbeschleunigung
φ_0 = Anfangswinkel ω_0 = Anfangsgeschwindigkeit

$$\varphi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2a} + \varphi_0$$

$$\omega = \sqrt{w_0^2 + 2a \cdot (\varphi - \varphi_0)}$$

$$a = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2 \cdot (\varphi - \varphi_0)}$$

3.5. Wurfbahnen

3.5.1. Senkrechter Wurf

Maximalhöhe erreicht, wenn die Geschwindigkeit 0 ist.

$$a(t) = -g = \text{konstant}$$

$$v(t) = -gt + v_0 (v_0 < 0 = \text{nach unten werfen})$$

$$x(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + x_0$$

3.5.2. Freier Fall

$$a(t) = -g = \text{konstant}$$

$$v(t) = -gt + 0$$

$$x(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + x_0$$

3.5.3. Horizontaler Wurf

$$a_{x(t)} = 0$$

$$v_{x(t)} = v_0$$

$$x(t) = v_0 t$$

$$a_{y(t)} = -g = \text{konstant}$$

$$v_{y(t)} = -gt + \underbrace{v_0}_{0}$$

$$x(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + y_0$$

Wurfhöhe:
v_0 = Anfangsgeschwindigkeit

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

Steigzeit t:
v_0 = Anfangsgeschwindigkeit

$$t = \frac{v_0}{g}$$

3.5.4. Schiefer Wurf

Wurfweite maximiert bei Abwurfwinkel von 45°.

$$a_x = 0$$

$$v_{x(t)} = v_0 \cdot \cos(a)$$

$$x(t) = v_0 \cdot \cos(a) \cdot t + x_0$$

$$a_y = -g$$

$$v_{y(t)} = v_0 \cdot \sin(a) - g \cdot t$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(a) \cdot t + y_0$$

Bahnkurve $y(x)$:

$$y(x) = \tan(a) \cdot x - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos(a)^2} \cdot x^2$$

Horizontale Distanz zur Zeit t:

$$x(t) = v_0 \cdot \cos(a) \cdot t$$

Vertikale Distanz zur Zeit t:

$$y(t) = v_0 \cdot t \cdot \sin(a) - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

Maximale Wurfdistanz d:

$$d = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2 \cdot a)$$

Maximale Wurfhöhe $h_{\max}$:

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \cdot \sin(a)^2$$

Distanz bis zur maximalen Wurfhöhe $X_{\max}$:

$$X_{\max} = \frac{V_0^2}{g} \cdot \sin(a)^2 \cdot \cos(a) = \frac{d}{2}$$

Konstante horizontale Geschwindigkeit v_x:

$$v_x = v_0 \cdot \cos(a)$$

Vertikale Geschwindigkeit zur Zeit t:

$$v_y = v_0 \cdot \sin(a) - g \cdot t$$

4. Dynamik

Gewichtskraft:
F_G = Kraft
m = Masse

$$F_G = m \cdot g$$

4.1. Reibungskräfte

μ_{Gleit} = Gleitreibungskoeffizient
μ_{Roll} = Rollreibungskoeffizient
F_N = Normalkraft

Gleitreibung:

$$F_{\text{Gleit, R}} = \mu_{\text{Gleit}} \cdot F_N$$

Rollreibung:

$$F_{\text{Roll, R}} = \mu_{\text{Roll}} \cdot F_N$$

Rollreibungslänge e:

$$e = \frac{r \cdot F_{\text{Reibung}}}{F_N} = r \cdot \mu_R$$

4.2. Arbeit und Energie

Einheit von $W: 1J = 1Nm$
s = Strecke

Arbeit W:

$$W = F_s \cdot s$$

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Potentielle Energie E_{pot}:
m = Masse
h = Höhe ab Referenz

$$E_{\text{pot}} = F_G \cdot h = \underbrace{m \cdot g}_{F_G} \cdot h$$

Elastische Energie E_{ela}:
k = Federkonstante
x = Verschiebung

$$E_{\text{ela}} = \frac{1}{2} k x_0^2$$

Kinetische Energie E_{kin}:
m = Masse
v = Geschwindigkeit

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} \cdot v^2$$

Totale Energie E_{tot}:

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}}$$

Verschiebungsarbeit (what this):

$$W = F \cdot s = (m \cdot a) \cdot \left(\frac{1}{2} a t^2\right) = \frac{1}{2} m v^2$$

Energieerhaltungssatz (what this):

$$W = F_G \cdot h = mgh = mg\frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} m v^2 = E_{\text{kin}}$$

4.3. Leitung / Wirkungsgrad

Einheit von $P: 1W = 1\frac{J}{s}$
Leistung P:

$$P = \frac{\triangle W}{\triangle t} = \frac{F \cdot \triangle s}{\triangle t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Watt W:

$$1W = 1\frac{J}{s}$$

Wirkungsgrad η:
P_{ab} = Abgeführte Leistung
P_{zu} Zugeführte Leistung

$$\eta = \frac{P_{\text{ab}}}{P_{\text{zu}}}$$

4.4. Impuls / Impulserhaltung

Impuls $\vec{p}$:
m = Masse
v = Geschwindigkeit

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

2. Newtonsches Gesetz umschreiben:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = \frac{d}{dt}\vec{p}$$

4.5. Stösse

4.5.1. Elastischer Stoss

Wenn sich hier zwei Körper aufeinander zu bewegen, muss die Geschwindigkeit des Körpers, welcher von rechts nach links geht, negativ sein.

v_1 = Geschwindigkeit von Körper 1 vor Stoss
v_2 = Geschwindigkeit von Körper 2 vor Stoss
v_1' = Geschwindigkeit von Körper 1 nach Stoss
v_2' = Geschwindigkeit von Körper 2 nach Stoss
m_1 = Masse von Körper 1
m_2 = Masse von Körper 2

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{2 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2$$

$$v_2' = \frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_2$$

4.5.2. Total inelastischer Stoss

v_1 = Geschwindigkeit von Körper 1 vor Stoss
v_2 = Geschwindigkeit von Körper 2 vor Stoss
m_1 = Masse von Körper 1
m_2 = Masse von Körper 2
v' = Gemeinsame Geschwindigkeit nach Stoss

$$v' = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$$

4.5.3. Deformationsarbeit

v_1 = Geschwindigkeit von Körper 1 vor Stoss
v_2 = Geschwindigkeit von Körper 2 vor Stoss
m_1 = Masse von Körper 1
m_2 = Masse von Körper 2
μ = Reduzierte Masse

Relativgeschwindigkeit v_{rel}:

$$v_{\text{rel}} = |v_1 - v_2|$$

Reduzierte Masse μ:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Deformationsarbeit Q in J:

$$Q = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2$$

oder vereinfacht:

$$Q = \frac{\mu \cdot v_{\text{rel}}^2}{m_1 + m_2}$$

Impulssatz (what this):

$$\vec{P}_{\text{tot}} = \vec{P}_{\text{tot}} \Leftrightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 \Rightarrow m_1 v' + m_2 v' = v'(m_1 + m_2)$$

Energiesatz total elastisch (what this):

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 {v_1'}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_2'}^2$$

4.6. Rakete

Endgeschwindigkeit in Erdferne ($g = 0$):
u = Ausstoßgeschwindigkeit
m = Verbleibende Masse

$v_m = u \cdot \ln(\frac{m_0}{m}) + v_0$

Geschwindigkeit nach Flugzeit t in Erdnähe ($g \neq 0$): m_0 = Startmasse $m°$ = Ausgestossense Masse pro Zeit v_0 = Startgeschwindigkeit u = Ausstoßgeschwindigkeit

$$v(t) = u \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - m° t}\right) - g \cdot t + v_0$$

Steighöhe nach Flugzeit t in Erdnähe ($g \neq 0$):
m_0 = Startmasse $m°$ = Ausgestossense Masse pro Zeit
v_0 = Startgeschwindigkeit u = Ausstoßgeschwindigkeit

$$h(t) = u \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t - \frac{u}{m}° \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - m° \cdot t}\right) \cdot (m_0 - m° \cdot$$

Mit Brenndauer:
m_0 = Startmasse $m°$ = Ausgestossense Masse pro Zeit
m = Verbleibende Masse

$$t = \frac{m_0 - m}{m°}$$

Kepler Gesetze:

1. Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht
2. Der Fahrstrahl eines Planeten ¨uberstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der Halbachsen der Planten.

4.6.1. Gravitation

$G = 6.673 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$
$m_E = 5.96 \cdot 10^{24} kg$ = Erdmasse
m = Beliebige Masse
r_E = Abstand der Masse m von der Erde

$$E_{\text{pot}} = -G \cdot \frac{m_e \cdot m}{r_E}$$

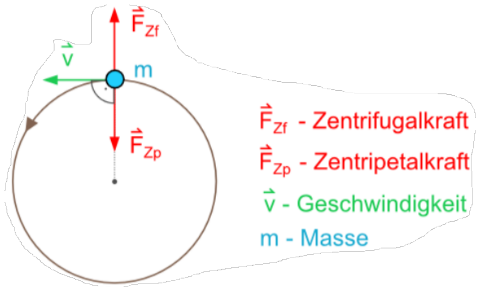
Fluchtgeschwindigkeit V_F:

$$V_F = \sqrt{2\frac{G \cdot m_E}{r_E}} = 11.15\frac{km}{s}$$

Minimale Kreisbahngeschwindigkeit V_K:

$$V_K = \sqrt{\frac{G \cdot m_E}{r_E}} = 7.89\frac{km}{s}$$

4.7. Zentripetalkraft



Zentrifugalkraft vektoriell:
m = Masse
a_r = Radiale Zentripetalbeschleunigung

$$\vec{F}_Z = -m \cdot \vec{a}_r$$

Zentrifugalkraft:
r = Radius
ω = Winkelgeschwindigkeit
$v = \omega \cdot r$ = Umfangsgeschwindigkeit bei Radius r

$$F_Z = m \cdot a_r$$

$$F_Z = m \cdot \omega^2 \cdot r$$

$$F_Z = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Zentripetalbeschleunigung:

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$$

Corioliskraft (Betrag):
v_r = Radiale Geschwindigkeit
ω = Winkelgeschwindigkeit

$$F_C = 2 \cdot m \cdot v_r \cdot \omega$$

Tangentielle Coriolisbeschleunigung:
v_r = Radiale Geschwindigkeit
ω = Winkelgeschwindigkeit

$$F_C = 2 \cdot v_r \cdot \omega$$

Rotationsarbeit:
v_r = Radiale Geschwindigkeit
ω = Winkelgeschwindigkeit

$$F_C = 2 \cdot v_r \cdot \omega$$

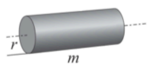
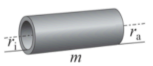
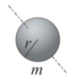
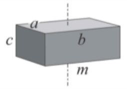
4.8. Drehbewegung

Drehmoment M um eine vorgegebene Achse A:
M = Betrag des Drehmoments um Achse A
a = Winkelbeschleunigung um Achse A
J = Trägheitsmoment bzgl. der Achse A
r = Radius

$$M = J_A \cdot a = r \cdot F$$

Trägheitsmoment J einer Punkt-Masse m_0:
m_0 = Punktmasse r = Abstand der Punktmasse von der Achse A

$$J = m_0 \cdot r_A^2$$

Körper		Trägheitsmoment
Vollzylinder		$\frac{m r^2}{2}$
Hohlzylinder		$\frac{m(r_a^2 + r_i^2)}{2}$
Kugel		$\frac{2}{5} m r^2$
Quader		$\frac{m(a^2+b^2)}{12}$

4.8.1. Satz von Steiner

Trägheitsmoment J_A bzgl. einer Achse A berechnet aus Schwerpunkts-Trägheitsmoment J_{SP}:

J_A = Trägheitsmoment bzgl. Achse A
J_{SP} = Trägheitsmoment bzgl. Schwerpunkt
R_A = Abstand der Achse A vom Schwerpunk SP
m = Masse

$$J_A = J_{SP} + m \cdot R_A^2$$

Trägheitsmoment J_B bzgl. einer Achse B berechnet aus Trägheitsmoment J_A bzgl. Achse A

J_A = Trägheitsmoment bzgl. Achse A
J_B = Trägheitsmoment bzgl. Achse B
R_{AB} = Abstand der parallelen Achse A und B
m = Masse

$$J_B = J_A + m \cdot R_{AB}^2$$

4.9. Drehstuff

Rotationsleistung P:
M = Drehmoment
ω = Winkelgeschwindigkeit

$$P = M \cdot \omega$$

Totale Energie E_{tot}:
E_{tra} = Translationsenergie
E_{rot} = Rotationsenergie

$$E_{tot} = E_{tra} + E_{rot}$$

Rotationsenergie E_{rot}:
J_{SP} = Trägheitsmoment bzgl. Schwerpunkt
ω = Winkelgeschwindigkeit

$$E_{rot} = \frac{J_{SP} \cdot \omega^2}{2}$$

Translationsenergie E_{tra}:
m = Masse
v_{SP} = Schwerpunktgeschwindigkeit

$$E_{tra} = \frac{m \cdot v_{SP}^2}{2}$$

Drehimpuls L bei Rotation um eine Achse A
J_A = Trägheitsmoment bzgl. Achse A
ω = Winkelgeschwindigkeit

$$L = J_A \cdot \omega$$

Kreisel
Ω = Präzessions-Winkelgeschwindigkeit
r_{os} = Abstand Drehpunkt zu Schwerpunkt
m = Masse
J = Trägheitsmoment
ω = Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega = \frac{M}{L_r}$$

$$\Omega = \frac{r_{OS} \cdot m \cdot g}{J \cdot \omega}$$

Betrag des Drehmoments durch Gewichtskraft:
$M = |\overrightarrow{M}|$ = Betrag des Drehmoment r_{os} = Abstand Drehpunkt zu Schwerpunkt
m = Masse
β = Kegelwinkel der Präzession

$$M = r_{OS} \cdot m \cdot g \cdot \sin(\beta)$$

Radialer Drehimpuls:
L_r = Radialkomponente des Drehimpuls
$L = J \cdot \omega$ = Totaler Drehimpuls
β = Kegelwinkel der Präzession

$$L_r = L \cdot \sin(\beta) = J \cdot \omega \cdot \sin(\beta)$$

4.10. Translation vs Rotation

4.10.1. Drehbewegung

$\triangle\, \theta$ = Drehwinkel
M = Drehmoment
l = Trägheitsmoment

Winkelgeschwindigkeit ω:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Winkelbeschleunigung α:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Gleichungen für den Fall konstanter Winkelbeschleunigung:"

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\triangle\, \theta = <\omega> \triangle\, t$$

$$<\omega> = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2a \triangle\, \theta$$

Arbeit:"

$$dW = M \cdot d\theta$$

Kinetische Energie:"

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \omega^2$$

Leistung:"

$$P = M \cdot \omega$$

Drehimpuls:"

$$L = l \cdot \omega$$

Zweites Newton'sches Axiom:"

$$M = l \cdot \alpha = \frac{dL}{dt}$$

4.10.2. Lineare Bewegung

$\triangle\, x$ = Verschiebung
F = Kraft
m = Masse

Geschwindigkeit:"

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Beschleunigung:"

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Gleichungen für den Fall konstanter Beschleunigung:

$$v = v_0 + at$$

$$\triangle x = < v > \triangle t$$

$$< v > = \frac{1}{2}(v_0 + v)$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a \triangle x$$

Arbeit:

$$dW = F \cdot ds$$

Kinetische Energie:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Leistung:

$$P = F \cdot v$$

Impuls:

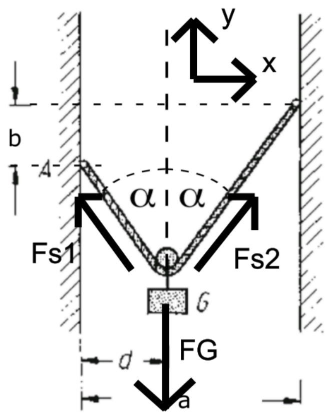
$$p = m \cdot v$$

Zweites Newton'sches Axiom:

$$F_{\text{ext}} = m \cdot a = \frac{dp}{dt}$$

5. Examples

5.1.1. Seilkräfte finden



Ein (masseloses) Seil ist an den Punkten A und B an zwei gegenüberliegenden Wänden befestigt, wobei die Wände im Abstand $a = 2m$ stehen. Der Befestigungspunkt A befindet sich $1m$ unterhalb vom Befestigungspunkt B. Eine Masse $m_G = 20kg$ werde an das Seil gehängt (wobei sich die Masse entlang des Seils bewegen kann). Die beiden Seilenden haben einen Winkel von $\alpha = 30°$ zum Lot hin.

a) Wie gross sind die einzelnen Seilkräfte?

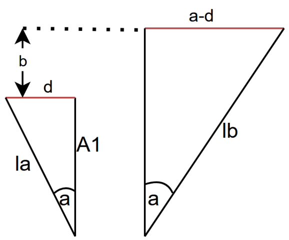
$$x = \underbrace{0}_{F_G} + \underbrace{\cos(60)\cdot F_{s1}}_{F_{s1}} - \underbrace{\cos(60)\cdot F_{s2}}_{F_{s2}} = 0$$

$$y = \underbrace{-F_G}_{F_G} + \underbrace{\cos(30)\cdot F_{s1}}_{F_{s1}} + \underbrace{\cos(30)\cdot F_{s2}}_{F_{s2}} = 0$$

Nach F_{s1} und F_{s2} auflösen oder im TR lösen gibt:

$$F_{s1} = F_{s2} = 113.27N$$

b) Wie lang sind die einzelnen Seilabschnitte?



Formel für x herausfinden:

$$\frac{d}{l_a} = \sin(\alpha) \Rightarrow d = l_a\cdot\sin(\alpha)$$

$$\frac{a-d}{l_b} = \sin(\alpha) \Rightarrow a-d = l_b\cdot\sin(\alpha)$$

$$x : \underbrace{l_a\cdot\sin(\alpha)}_{d} + \underbrace{l_b\cdot\sin(\alpha)}_{a-d} = a$$

Formel für y herausfinden:

$$\frac{A_1}{l_a} = \cos(\alpha) \Rightarrow A_1 = \cos(\alpha)\cdot l_A$$

$$\frac{A_1+b}{l_b} = \cos(\alpha) \Rightarrow A_1 + b = \cos(\alpha)\cdot l_b$$

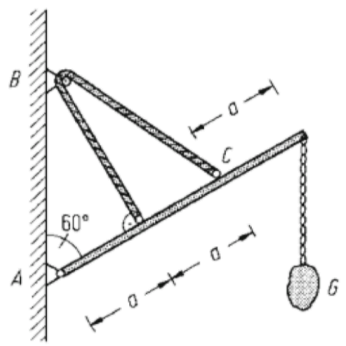
$$y : b + \underbrace{\cos(\alpha)\cdot l_A}_{A_1} = \underbrace{\cos(\alpha)\cdot l_b}_{A_1+b}$$

x und y nach l_a und l_b im TR auflösen:

$$l_A = 1.422m$$

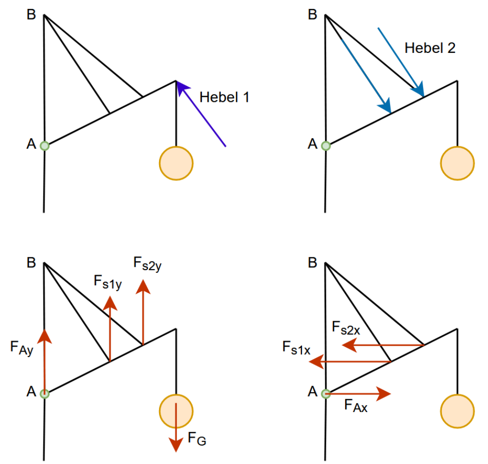
$$l_B = 2.577m$$

5.1.2. Kraft auf Kranarm



Skizze der Krankonstruktion.

Ein Kran hebt einen Stein der Masse $G = 150kg$ wie in der Skizze dargestellt. Der Kranarm ist an Punkt A drehbar gelagert und das Seil ist in Punkt B um eine Umlenkrolle geschleift und am Kranarm fest verbunden.
Berechnen sie die Kraft, mit welcher das Kranlager an Punkt A auf den Kranarm wirkt, wenn das System im Gleichgewicht ist.



$$M = \text{Hebel 1} + \text{Hebel 2} = 0$$

$$F_X = F_{S1} + F_{S2}F_A = 0$$

$$F_Y = F_{S1} + F_{S2}F_A - F_G = 0$$

Einsetzen in Solver:

$$3\cdot 150kg\cdot 9.81\cdot\cos(30) - 1\cdot F_S - 2\cdot F_S\cdot\cos(30) = 0$$

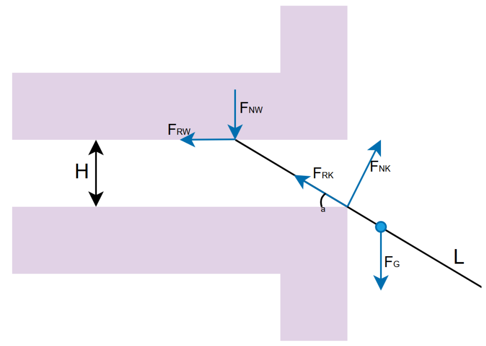
$$-F_S\cdot\sin(30) - F_S\cdot\sin(60) + F_{Ax} = 0$$

$$F_S\cdot\cos(30) + F_S\cdot\cos(60) + A_{Ay} - 150kg\cdot 9.81 = 0$$

5.1.3. Kraft auf Stab

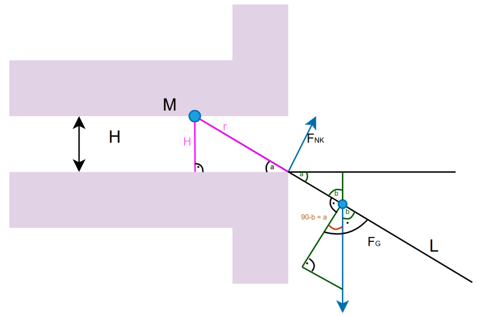
Ein dünner Stab der Länge $L = 23.95cm$ mit der Masse $m = 493g$ liegt lose in einem Schlitz. Die Höhe des Schlitzes wird langsam vergrössert. Im Moment, wo der Stab zu rutschen beginnt ist die Höhe $H = 4.97cm$ und der Stab in einem Winkel $a = 31.4°$ zur Horizontalen. Der Haftreibungskoeffizient μ_{HK} zwischen Stab und Kante beträgt 0.41.

a) Skizzieren und berechnen Sie alle auftretenden Kräfte



$$x : -F_{RW} - \cos(58.6)\cdot F_{RK} + \cos(a)\cdot F_{NK} = 0$$

$$y : \underbrace{-g\cdot m}_{F_G} - F_{NW} + \sin(a)\cdot F_{RK} + \sin(58.6)\cdot F_{NK} = 0$$



$$M : \frac{L}{2}\cos(a)\cdot F_G - F_{NK}\cdot\frac{H}{\sin(a)} = 0$$

Gewichtskraft des Stabs:

$$F_G = m\cdot g = 4.83N$$

Aus der Drehmomentengleichung können die Kantenkräfte berechnet werden:

$$F_{NK} = \frac{\frac{l}{2}\cos(a)\cdot F_G}{\frac{H}{\sin(a)}} = \frac{\frac{l}{2}\cos(a)\cdot\sin(a)\cdot F_G}{H} = 5.182N$$

$$F_{RK} = \mu_{HK}\cdot F_{NK} = 2.125N$$

Aus der Gl. für die x-Richtung:

$$F_{RW} = -\cos(58.6)\cdot F_{RK} + \cos(a)\cdot F_{NK} = 0.886N$$

Aus der Gl. für die y-Richtung:

$$F_{NW} = \underbrace{-g\cdot m}_{F_G} + \sin(a)\cdot F_{RK} + \sin(58.6)\cdot F_{NK} = 0.694N$$

b) Warum ist es am optimalsten, den Berührungspunkt des Stabs mit der oberen Fläche als Bezugspunkt für die Drehmomente zu wählen?

Die meisten Kräfte verschwinden mit diesem Bezugspunkt. Die Berechnung wird somit einfacher.

c) Wie gross ist der Haftreibungskoeffizient μ_H zwischen Stab und Fläche?

$$F_R = \mu \cdot F_N$$

$$\mu_{\text{HW}} = \frac{F_{\text{RW}}}{F_{\text{NW}}} = 1.277$$

5.1.4. Ruckartige Bewegung

Auf einem Tisch steht eine Blumenvase. Wir wollen das Tischtuch wegziehen, ohne dass die Vase herunterfällt.
Das Tuch wird ruckartig auf eine konstante Geschwindigkeit v_0 beschleunigt (die für die Beschleunigung benötigte Zeit wird vernachlässigt) und wird dann mit dieser konstanten Geschwindigkeit auf einer Strecke von $60cm$ bewegt. Die Gleitreibung zwischen Vase und Tischtuch hat den Wert $\mu_G = 0.3$. Wie schnell muss daS Tuch bewegt werden, damit sich die Vase in der gleichen Zeit höchstens $5cm$ bewegt?

Zuerst können wir die Zeit durch einige der Grössen ausdrücken:

$$t = \frac{S_T}{v_0}$$

Beschleunigt wird unsere Vase durch die Reibung des durchrutschenden Tischtuches. Dabei können wir sagen, dass die Gesamtkraft für die Beschleunigung der Reibungskraft entsprechen muss.

$$m \cdot a = \mu_G \cdot m \cdot g$$

$$a = \mu_G \cdot g$$

Nun können wir die Strecke der Vase berechnen:

$$t = \frac{S_T}{v_0} S_V = \frac{a_v}{2} \cdot t^2$$

$$t = \frac{0.6}{v_0} 0.05 = \frac{0.3 \cdot 9.81}{2} \cdot t^2$$

$$v = 3.25 \frac{m}{s}$$

5.1.5. Mindestabstand Fahrzeug

Auf einer Autobahn fährt ein Fahrzeug A mit konstanter Geschwindigkeit $v_{\text{A0}} = 110 \frac{km}{h}$. In die Autobahn fährt ein Fahrzeug B ein. Zum Zeitpunkt des Einfahren ($t = 0$) hat Fahrzeug B eine Geschwindigkeit $v_{\text{B0}} = 110 \frac{km}{h}$ und einen Abstand von Fahrzeug A von $d = 200m$. Welche (konstant angenommene) Beschleunigung aB muss Fahrzeug B haben, wenn ein Mindestabstand der beiden von $d_{\min} = 40m$ eingehalten werden soll?

Überlegung: Der Mindestabstand muss eingehalten werden, wenn beide Fahrzeuge gleich schnell sind. Dieser Mindestabstand muss zum Zeitpunkt tx erreicht sein. Falls A langsamer ist als B, dann vergrössert sich der Abstand, umgekehrt verringert sich der Abstand.
Somit gilt:

$$v_{\text{A0}} = v_{\text{B0}} + a_B \cdot t_x$$

Ausserdem können wir den Mindestabstand algebraisch ausdrücken. Fahrzeug A bewältigt diese Strecke mit seiner regelmässigen Geschwindigkeit $v_{\text{A0}} \cdot tx$. Bei Fahrzeug B ist dies etwas mehr:

$$\text{Beschleunigung: } \frac{a_B}{2} \cdot t_x^2$$

$$\text{Startgeschwindigkeit: } v_{\text{B0}} \cdot t_x$$

$$\text{Vorsprung: } 200m$$

Zusammengesetzt:

$$d_{\min} = S_B - S_A$$

$$d_{\min} = \frac{a_B}{2} \cdot t_x^2 + v_{\text{B0}} \cdot t_x + d - v_{\text{A0}} \cdot t_x$$

$$t_x = 28.8$$

$$a_B = 0.39$$

5.1.6. Reh überfahren

Ein Bus fährt mit $60k\frac{m}{h}$ auf einer geraden Strecke durch den Wald. Plötzlich tritt ein Reh auf die Strasse und der Fahrer beginnt $27m$ vor dem Hindernis mit einer Vollbremsung. Es reicht gerade bis zum Stillstand $4m$ vor dem erstarrten Reh.

Mit welcher Geschwindigkeit würde er auf das Reh prallen, wenn er erst $22m$ vor dem Hindernis die Vollbremsung eingeleitet hätte.

Verzögerung berechnen:

$$x_1 = 27m - 4m = 23m$$

$$x_1 = \frac{v_0^2}{2a}$$

$$a = \frac{v_0^2}{2x_1} = 6.04 \frac{m}{s^2}$$

$$x_2 = \frac{v_0^2 - v_1^2}{2a}$$

$$v_1 \Rightarrow \sqrt{v_0^2 - 2ax_2}$$

$$v_1 = 3.47 \frac{m}{s} = 12.5 \frac{km}{h}$$

5.1.7. Vollbremse

Ein Auto fährt im Nebel mit $36k\frac{m}{h}$. Plötzlich taucht ein Hindernis auf und er beginnt $15m$ vor dem Hindernis mit einer Vollbremsung. Es reicht gerade bis zum Stillstand $0m$ vor der Wand.

Mit welcher Geschwindigkeit würde er auf das Hindernis prallen, wenn er eine höhere Ge- schwindigkeit von $45k\frac{m}{h}$ gehabt hätte, dafür aber bereits $18m$ vor der Wand die Vollbremsung eingeleitet hätte.

Beschleunigung a berechnen:

$$x_1 = \frac{v_1^2}{2a} \Rightarrow a = \frac{v_1^2}{2x_1}$$

$$a = \frac{10^2}{2 \cdot 15} = 3.33 \frac{m}{s}$$

Zeit für Bremsung:

$$x_2 = -\frac{1}{2} a t^2 + v_{20} \cdot t$$

$$x_2 = -\frac{3.33}{2} \cdot t^2 + 12.5 \cdot t = 18m$$

$$t = 1.944s$$

Aufprallgeschwindigkeit:

$$v_2 = v_{20} - a \cdot t$$

$$v_2 = 12.5 - 3.33 \cdot 1.944$$

$$v_2 = 6.02 \frac{m}{s}$$

5.1.8. U-Bahn Beschleunigung

Eine U-Bahn legt zwischen 2 Stationen einen Weg von $3km$ zurück. Aus der Anfahrbeschleunigung $a_A = -0.6 \frac{m}{s^2}$ und der Höchstgeschwindigkeit $v_{\max} = 90 \frac{km}{h}$ soll der Anfahrweg, Bremsweg, Wegstrecker der gleichförmigen Bewegung und die Fahrzeit ermittelt werden.

Aus der konstanten Beschleunigung a_A folgt beim Anfahren ein Geschwindigkeitsverlauf

$$v_A = a_A \cdot t$$

Mit der vorgegebenen Höchstgeschwindigkeit findet man die Anfahrtzeit

$$t_A = \frac{v_{\max}}{a_A} = \frac{90 \cdot 1000}{3500 \cdot 0.2} = 125s$$

und den Anfahrweg

$$s_A = \frac{1}{2} a_A t_A^2 = \frac{1}{2} \cdot o.2 \cdot 125^2 = 1563m$$

Beim Bremsen mit konstanter Verzögerung a_B gilt für die Geschwindigkeit

$$v_B = v_{\max} + a_B t$$

Die Zeit t_B bis zum Stillstand ($v_B = 0$) ist wird daher

$$t_B = -\frac{v_{\max}}{a_B} = \frac{90 \cdot 1000}{3600 \cdot (-0.6)} = 41.67s$$

und der zugehörige Bremsweg ergibt sich zu

$$s_B = v_{\max} t_B + \frac{1}{2} a_B t_B^2 = \frac{90 \cdot 1000}{3600} \cdot 41.67 - \frac{1}{2} \cdot 0.6 \cdot 41.67^2$$

$$s_B = 521m$$

Für die Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit $v_{\max}$ bleibt dann ein Weg von

$$s^* = 3000 - s_A - s_B = 916m$$

Hierzu gehört eine Zeit

$$t^* = \frac{s^*}{v_{\max}} = \frac{916 \cdot 3600}{90 \cdot 1000} = 36.64s$$

Die Gesamtfahrzeit wird damit

$$T = t_A + t^* + t_B = 203.31s$$

5.1.9. Bremsen vor Ampel

Ein PKW-Fahrer nähert sich mit einer Geschwindigkeit von $v_0 = 50 \frac{km}{h}$ einer Ampel. Sie sprint aufu rot, wenn er noch $l = 100m$ entfernt ist. Die Rot- und Gelbphase dauert $t^* = 10s$. Der Fahere möchte diei Ampel gerade noch passieren, wenn sie weider auf grün wechselt.

Bei konstanter Beschleunigung a_0 gilt

$$v = v_0 + a_0 t$$

$$x = v_0 t + a_0 \frac{t^2}{2}$$

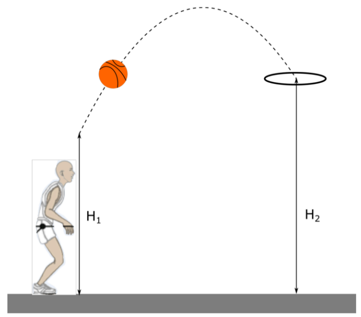
a) Mit welcher konstanten Beschleunigung a_0 muss der Fahrer bremsen?
Aus der Bedingung $x(t^*) = l$ folgt

$$a_0 = \frac{2}{t^{*2}} (l - v_0 t^*) = \frac{2}{10^2} \left(100 - \frac{50 \cdot 1000}{3600} \cdot 10 \right) = -0.78 \frac{m}{s^2}$$

b) Welche Geschwindigkeit v_1 hat er auf der Höhe der Ampel?
Mit der nun bekannten Bremsverzöerung ergibt sich aus der ersten Gleichung

$$v_1 = v(t^*) = 50 \cdot \frac{1000}{3600} - 0.78 \cdot 10 = 6.09\frac{m}{s}$$

5.1.10. Schiefer Wurf mit Basketball



Ein Basketball mit $30cm$ Durchmesser soll in einem Abwurfwinkel von 70° zur Horizontalen direkt in den Basketball-Korb geworfen werden aus einer Höhe von $2.1m$ (Ballmittelpunkt). Die Mitte des Korbrings von 35cm Durchmesser befindet sich in einer Distanz von $2.7m$ und in $3.2m$ Höhe.

$$a_x = 0$$

$$v_{x(t)} = v_0 \cdot \cos(\varphi)$$

$$x(t) = v_0 \cdot \cos(\varphi) \cdot t + \underbrace{0}_{\text{Anfangshöhe}}$$

$$a_y = -g$$

$$v_{x(t)} = v_0 \cdot \sin(\varphi) - g \cdot t$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \cdot \sin(\varphi) \cdot t + \underbrace{2.1m}_{\text{Anfangshöhe}}$$

a) Was ist die Abwurf-Geschwindigkeit unter der Annahme eines perfekten Wurfs (Ballmittelpunkt passiert genau in der Korbmitte)? Wie lange braucht der Ball bis zur Korbmitte? Formel für Abwurfgeschwindigkeit:

$$x(t) : v_0 \cdot \cos(\varphi) \cdot t = 2.7m \Rightarrow v_0 = \frac{2.7m}{\cos(\varphi) \cdot t}$$

Formel zum t herausfinden:

$$y(t) : -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \cdot \sin(\varphi) \cdot t + 2.1m = 3.2m$$

x und y nach t und v_0 im TR auflösen:

$$t = 1.13s$$

$$v_0 = 6.95\frac{m}{s}$$

c) Welche maximale Höhe erreicht der Ball (Referenzpunkt: Ballmitte)?

$$h_{\max} = \frac{v_0}{2 \cdot g} \cdot \sin(\varphi)^2 + 2.1m$$

$$h_{\max} = \frac{6.95\frac{m}{s}}{2 \cdot g} \cdot \sin(70)^2 + \underbrace{2.1m}_{\text{Abwurfhöhe}}$$

$$h_{\max} = 4.27m$$

d) In welcher Distanz und Höhe relativ zur Abwurfstelle befindet sich der Ball nach 1.1s?

$$x(1.1) = 6.95 \cdot \cos(70) \cdot 1.1 = 2.7m$$

$$y(1.1) = -\frac{1}{2}g \cdot 1.1^2 + 6.95 \cdot \sin(70) \cdot 1.1 = 1.1m$$

5.1.11. Schiefer Gartenschlauch

Ein Schlauch wird so gehalten, dass ein kollimierter Wasserstrahl mit $15\frac{m}{s}$ unter 55° gegenüber der Horizontalen nach oben spritzt. In $7.0m$ Entfernung befindet sich eine Wand.

$$a_x = 0$$

$$v_{x(t)} = v_0 \cdot \cos(\varphi)$$

$$x(t) = v_0 \cdot \cos(\varphi) \cdot t + \underbrace{x_0}_{\text{Anfangshöhe}}$$

$$a_y = -g$$

$$v_{x(t)} = v_0 \cdot \sin(\varphi) - g \cdot t$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \cdot \sin(\varphi) \cdot t + \underbrace{x_0}_{\text{Anfangshöhe}}$$

a) Wo befindet sich das Wasser 0.5 s nach Verlassen der Schlauchdüse und welche Geschwindigkeit hat es?
Ort:

$$x(0.5) = 15\frac{m}{s} \cdot \cos(55) \cdot 0.5s = 4.3m$$

$$y(0.5) = -\frac{1}{2}g \cdot 0.5^2 + 15\frac{m}{s} \cdot \sin(55) \cdot 0.5 = 4.9m$$

Geschwindigkeit:

$$v_{x(0.5)} = 15\frac{m}{s}\cos(55) = 8.6\frac{m}{s}$$

$$v_{y(0.5)} = 15\frac{m}{s} \cdot \sin(55) - g \cdot t = 7.3\frac{3}{s}$$

b) Nach welcher Zeit und in welcher Höhe über der Schlauchdüse trifft das Wasser auf die Wand?

$$\underbrace{7m}_{x(t)} = v_0 \cdot \cos(\varphi) \cdot t$$

$$t = \frac{7m}{15\frac{m}{s} \cdot \cos(55)} = 0.8s$$

$$y(0.8) = -\frac{1}{2}g \cdot 0.8^2 + 15\frac{m}{s} \cdot \sin(55) \cdot 0.8 = 6.7m$$

c) Wie weit (auf der Höhe der Düse) und wie hoch würde das Wasser ohne Wand spritzen?

$$d = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2 \cdot \varphi) = 21.55m$$

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2 \cdot g} \cdot \sin(\varphi)^2 = 7.6m$$

5.1.12. Konstante Beschleunigung einer Stahlkugel

Wie lange braucht eine homogene Stahlkugel zum Herabrollen auf einer $1m$ langen, schiefen Ebene mit einem Steigungswinkel von $\varphi = 30°$? Die Bewegung beginne aus dem Stillstand und Kugel rollt ohne zu gleiten. Die Kugel erfährt eine konstante Beschleunigung.
Energiebilanz:

$$m \cdot g \cdot h = \frac{m \cdot v^2}{2} + \frac{J \cdot \omega^2}{2}$$

$$\omega = \frac{v}{r}$$

$$J = \frac{2 \cdot m \cdot R^2}{5}$$

$$s = \frac{a \cdot t^2}{2}$$

$$v = a \cdot t$$

$$h = s \cdot \sin(\varphi)$$

Setzen wir das zusammen, k¨urzt sich der Radius und die Masse der Kugel heraus.

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2 \cdot \left(\frac{V}{R}\right)^2$$

$$m \cdot g \cdot h = m \cdot v^2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}\right)$$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{7 \cdot m \cdot v^2}{10}$$

$$g \cdot h = \frac{7 \cdot v^2}{10}$$

5.1.13. Bowlingkugel

Eine Bowlingkugel der Masse $2.7kg$ und mit dem Durchmesser $22cm$ wird so geworfen, dass sie sich nach dem Auftreffen auf der Bahn, ohne zu rotieren mit einer Geschwindigkeit von $8.5\frac{m}{s}$ bewegt. Die Gleitreibungszahl zwischen Kugel und Bahn beträgt 0.3. a) Wie gross ist die lineare Beschleunigung (infolge Reibung)?
In Y-Richtung wirkt sowohl die Gewichtskraft als auch die Normalkraft. Beide kompensieren sich. In X-Richtung ist nur die Reibung entgegen der Bewegungsrichtung wirksam, die durch die Normalkraft ausgedrükt wird:

$$F_G = F_N$$

$$F_R = -\mu F_N$$

Mit dem zweiten Newtonschen Axiom ergibt sich:

$$F_{\text{res}} = ma$$

$$F_{\text{res}} = F_R$$

$$F_{\text{res}} = -\mu mg$$

$$a = -\mu g$$

c) Wie gross ist die Winkelbeschleunigung der Kugel während des Gleitens?
Die Winkelbeschleunigung α erhalten wir aus der Grundgleichung der Rotation (bzgl. Schwerpunkt)

$$J_a = M_{\text{res}}$$

$$a = \frac{M_{\text{res}}}{J}$$

$$a = \frac{\mu mgR}{J}$$

$$a = \frac{\mu mgR}{\frac{2}{5}mR^2}$$

$$a = \frac{5\mu g}{2R}$$

$$a = \frac{5\mu \cdot 9.81\frac{m}{s^2}}{20.11m}$$

$$a = 66.89\frac{\text{rad}}{s^2}$$

d) Wie lange gleitet die Kugel, bevor sie zu einer reinen Rollbewegung übergeht? (Hinweis: Die Schwerpunktsgeschwindigkeit muss hier der Tangentialgeschwindigkeit entsprechen.)
Wenn die Kugel aufhört zu gleiten, gilt die Rollbedingung: $v = R\omega$:

$$v = R \cdot \omega$$

$$v_0 - a \cdot t = R \cdot a \cdot t$$

$$= \frac{5\mu gt}{2}$$

$$v_0 = \frac{5\mu gt}{2} + \mu g \cdot t$$

$$= \left(\frac{7}{2}\mu g\right) \cdot t$$

$$t = \frac{2v_0}{7\mu g}$$

$$= \frac{2 \cdot 8.5\frac{m}{s}}{7 \cdot 0.3 \cdot 9.81\frac{m}{s^2}}$$

$$= 0.83s$$

5.1.14. Drehmoment Seiltrommel

An einer Seiltrommel mit einem Durchmesser von $29cm$ und einem Massenträgheitsmoment von $3.3kgm^2$ hängt eine Masse von $70kg$. Welches Drehmoment muss der Motor an der Seiltrommel aufbringen, damit die Last mit einer Beschleunigung von $2\frac{m}{s^2}$ aufgehoben wird?

Hier müssen wir uns fragen, wo die Kraft des Motors ansetzen wird. Basierend auf der Aufgabenstellung wird wohl die Achse der Seiltrommel rotiert, somit gilt das Drehmoment um eine gegebene Achse ($M = J_A \cdot \alpha$). J_A ist mit $3.3kgm^2$ bereits gegeben. Die Winkelbeschleunigung kann mit $\alpha = \frac{a}{r}$ berechnet werden. a entspricht $2\frac{m}{s^2}$ und $r = \frac{0.29}{2}$.

Nun soll der Motor auch noch die Masse heben können. Dazu brauchen wir das Drehmoment $M = F \cdot r$. F entspricht hierbei $m \cdot a$, wobei wir a nochmals aufschlüsseln müssen, da einerseits g nach unten zieht, aber wir die Masse mit $2\frac{m}{s^2}$ hochziehen wollen. Unser finales a ist somit $g + 2\frac{m}{s^2}$. Stecken wir das alles zusammen erh¨alt man:

$$M_M = J_A \cdot \alpha + F \cdot r$$

$$M_M = 3.3 \cdot \frac{2}{0.145} + 70 \cdot (9.81 + 2) \cdot 0.145$$

$$M_M = 165.389N$$

Es kann auch sein, dass gefragt wird nach der Kraft, welche auf dem Seil wirkt. Die Gleichungen wären:

$$F_{\text{res}} = m \cdot g - s = m \cdot a$$

$$M_{\text{res}} = r \cdot s = J \cdot \frac{a}{r}$$

5.1.15. Winkelgeschwindigkeit Raumkapsel

Eine Raumkapsel mit starr befestigten Sonnensegeln soll ausgerichtet werden. Dazu muss sie um den Winkel $\varphi = 180°$ um ihre Längsachse gedreht werden. Dazu wird ein Elektromotor - dessen Drehachse parallel zur Längsachse des Raumschiffs ausgerichtet wird, eingeschaltet.

Das axiale Massenträgheitsmoment des Rotors des Elektromotors ist $J_M = 0.2kg \cdot m^2$.

Welche Winkelgeschwindigkeit ω_R der Raumkapsel stellt sich ein, wenn der Motor mit der Drehfrequenz $3000min^{-1}$ rotiert? Die Winkelgeschwindigkeit des Motors ist $\omega_M = 2\pi\frac{3000}{60} = 100\pi$.

Der Drehimpuls muss erhalten bleiben, daher kann man die beiden Formeln für den Rotationsimpuls um eine Achse gleich stellen:

$$J_M \cdot \omega_M = J_R \cdot \omega_R$$

$$\cdot 100\pi = 3 \cdot 10^3 \cdot \omega_R$$

$$\omega_R = 0.021s^{-1}$$