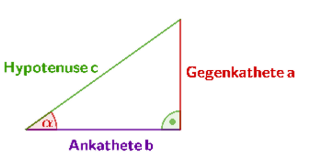
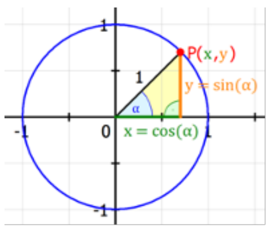
1 Grundlagen

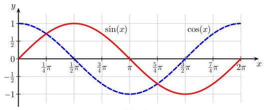
1.1 Trigometrie

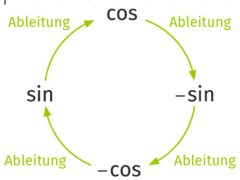


$$\sin(\alpha) = \frac{G}{H}$$
$$\cos(\alpha) = \frac{A}{H}$$
$$\tan(\alpha) = \frac{G}{A} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–







1.2 Vektorrechnung

Länge des Vektors: $|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$

1.3 Ableitungen

Funktion	Ableitung
x^a	$a \cdot x^{a-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos(2)^x}$

Produktregel:
$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$
Kettenregel:
$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$
Quotientenregel:
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g(x)^2}$$

1.3.1 Physikalische Grössen

Geschwindigkeit	v	-	m/s
Beschleunigung	a	-	m/s^2
Federkonstante	D	-	N/m
Frequenz	f	Hertz	$1/s$
Kraft	F	Newton	$\text{kg} \cdot m/s^2$
Energie	E	Joule	$N \cdot m$
Arbeit = Δ Energie	W	Joule	$J = N \cdot m$
Leistung = Arbeit pro Zeit	P	Watt	J/s

* 4.19 Joule = 1 Cal, 1 Joule = 1 Watt/s => $3.6 \cdot 10^6 J = 1$ kWh

1.3.2 Basisgrössen

Länge	l	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Zeit	t	Sekunde	s

1.3.3 Abhängigkeit Weg Geschwindigkeit und Beschleunigung über die Zeit

Wegfunktion	$s(t)$
Geschwindigkeitsfunktion	$v(t) = \dot{s}(t)$
Beschleunigungsfunktion	$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$

1.3.4 Konstanten

Fallbeschleunigung	g	$9.80665 m/s^2$
Lichtgeschwindigkeit	c	$2.99792458 \cdot 10^8 m/s$
Gravitationskonstante	G	$6.673 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2/\text{kg}^2$

Konservative Kraft: Die Kraft ist konservativ, da sie nur von Ortskoordinaten abhängt, und da $-F(x)$ als reell wertige Funktion einer Variable eine Stammfunktion besitzt. Das Hook'schen Gesetz beschreibt eine konservative Kraft, da sie nur von Ortskoordinaten abhängt, und da $-F(x)$ als reellwertige Funktion einer Variable eine Stammfunktion besitzt

2 Kinematik

Mittlere Geschwindigkeit: $\bar{v} = \frac{\Delta v}{\Delta s}$

Mittlere Beschleunigung: $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

Gleichförmige Bewegung: $s = s_0 + v \cdot ta \Rightarrow \frac{s}{v} = t$

Geradlinige Bewegung: $\Delta s = \bar{v}\Delta t$

Gleichmässig beschleunigte Bewegung:
$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2$$
$$v = v_0 + at$$
$$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0) \Rightarrow \text{wenn } v_0 = 0 \Rightarrow s = \frac{v^2}{2a}$$
$$\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$
$$t = \frac{v}{a} = \frac{v_0 - v}{a}$$

2.1 Gleichförmige Kreisbewegung (ω = konst.)

Umlaufzeit: T $\quad [T] = s$

Frequenz: $f = \frac{1}{T}$ $\quad [f] = s^{-1} = \text{Hz}$

Winkelkoordinate: $\varphi = \frac{b}{r}$ $\quad [\varphi] = \text{rad} = \frac{m}{m}$

Winkelgeschwindigkeit: $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = 2\frac{\pi}{T} = 2\pi f$ $\quad [\omega] = \frac{\text{rad}}{s}$

Bahngeschwindigkeit: $v = r\omega$

Zentripetalbeschleunigung: $a_z = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$

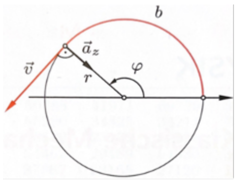
Tangentialgeschwindigkeit: $v_T = \frac{2\pi r}{T}$

Radialbeschleunigung/ Zentripetalbeschleunigung: $a_r = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$

Tangentialbeschleunigung: $a_T = \frac{v_1 - v_0}{t}$

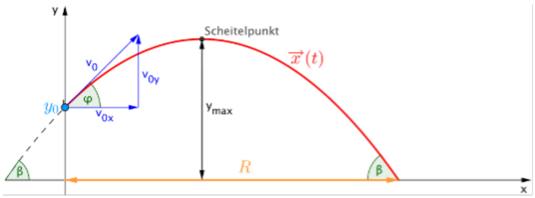
Kreisbewegung Funktion: $r(t) = r\begin{pmatrix}\cos(wt+\varphi_0)\\ \sin(wt+\varphi_0)\end{pmatrix}$

Radialgeschwindigkeit: $v = \frac{\text{Umfang}}{T}$

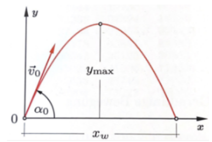


2.2 Schiefer Wurf

Bewegungsgleichung: $\vec{r}(t) = \vec{r_0} + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$
$$\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ y_0\end{pmatrix} + v_0\begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{pmatrix} \cdot t + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\ -g\end{pmatrix}t^2$$



$$y = x \cdot \tan(\alpha_0) - \frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha_0)} \cdot x^2$$
$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha_0)}{2g}$$
$$x_w = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha_0)}{g}$$



3 Messen und Messfehler

Systematische Fehler: z.B. Messen mit falsch kalibriertem Messgerät.
Berechnet sich der Wert einer Grösse z aus Messwerten der Grössen x und y.
$$z = f(x, y)$$
und wurden die Messgrössen x und y mit einem Fehler von Δx bzw. Δy bestimmt, so ist der Wert von z nur ungenau bestimmt. Für den prognostizierten Wert und den prognostizierten Messfehler gilt
$$z = z_0 \pm \Delta z$$
$$z_0 = f(x_0, y_0)$$
$$\Delta z = \left|\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0)\right| \cdot \Delta x + \left|\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)\right| \cdot \Delta y$$
sofern die Grössen x und y, z.B. auf Grund von fehlerhaften Messinstrumenten, systematisch falsch bestimmt wurden. Die Fehlerabschätzung durch systematische Fehler ist eine «worst-case»-Abschätzung

Statistische Fehler: Bei mehrfach messen unterschiedliche Ergebnisse

⇒ Mehrmals messen und Mittelwert nehmen verkleinert den Fehler Fehlerfortpflanzung für normalverteilte Fehler. Berechnet sich der Wert einer Grösse z aus Messwerten der Grössen x und y gemäss
$$z = f(x, y)$$
und wurden die Messgrössen x und y durch Mehrfachmessung (x n-fach gemessen, y m-fach gemessen) und ohne systematischen Fehler bestimmt, so darf von statistisch normalverteilten Fehlern ausgegangen werden. In diesem Fall errechnet sich die Standardunsicherheit der Messwerte von x und y gemäss
$$\Delta x = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$
$$\Delta y = \sqrt{\frac{1}{m(m-1)}\sum_{i=1}^{m}(y_i - \bar{y})^2} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{m}}$$
$\sigma \quad$ = Standardabweichung

$\bar{x} \quad = \frac{1}{n}\sum_{i=n}^{n} x_i$ = Mittelwert

Es gilt also
$$x = \bar{x} \pm \Delta x$$
$$y = \bar{y} \pm \Delta y$$
Ausserdem ist der prognostizierte Wert und der statistische Fehler von z durch folgende Formeln berechenbar
$$z = z \pm \Delta z$$
$$\bar{z} = f(\bar{x}, \bar{y})$$
$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) \cdot \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) \cdot \Delta y\right)^2}$$

Beispiel Systematischer Fehler: Ein Gewicht unbekannter Masse wird auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel α platziert, auf der es reibungsfrei gleiten kann. Die Hangabtriebskraft und der Neigungswinkel α werden experimentell bestimmt. Die Werte sind $\alpha = (30° \pm 2°)$, $F_H = (10 \pm 0.3)N$. Aus Tabelle $g = (9.81 \pm 0.03)$
$$F_H = mg \cdot \sin(\alpha) \Rightarrow m = \frac{F_H}{g \cdot \sin(\alpha)}$$
$$m = \frac{10N}{9.81 m/s^2 \cdot \sin(30°)} = 2.0387$$
Partielle Ableitungen:
$$\frac{\partial m}{\partial g}\left(\frac{F_H}{g \cdot \sin(\alpha)}\right) = -\frac{F_H}{g^2 \cdot \sin(\alpha)}$$
$$\frac{\partial m}{\partial \alpha}\left(\frac{F_H}{g \cdot \sin(\alpha)}\right) = -\frac{F_H \cdot \cos(\alpha)}{g \cdot \sin^{2°}(F_H)}$$
$$\Delta m = \left|-\frac{F_H}{g^2 \cdot \sin(\alpha)} \cdot \Delta g\right| + \left|-\frac{F_H \cdot \cos(\alpha)}{g \cdot \sin^2(F_H)} \cdot \Delta\alpha\right|$$
$$+ \left|\frac{1}{g \cdot \sin(\alpha)} \cdot \Delta F_H\right| = 0.191\text{kg}$$
$$m = (2.04 \pm 0.19)\text{kg}$$
Achtung $\Delta\alpha$ muss in Bogenmass sein!

Gradmass in Bogenmass $\quad x = \frac{\alpha}{180} \cdot \pi$

Bogenmass in Gradmass $\quad \alpha = \frac{x}{\pi} \cdot 180$

4 Kraft

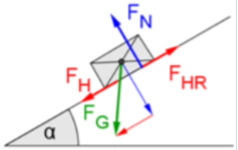
Kraft: $\vec{F}_{\text{res}} = m\vec{a}$

Gewichtskraft: $F_G = mg$

Federkraft: $F_F = Dy \quad D$ = Federkonst. $\quad y = |l - l_0|$

Hook`sches Gesetz: $\Delta F = D \cdot \Delta y$

Schiefe Ebene:



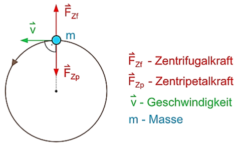
$F_G = mg$

Normalkraft:
$F_N = mg \cdot \cos(\alpha)$

Hangabtriebskraft:
$F_H = mg \cdot \sin(\alpha)$

Haftreibungskraft:
$F_{HR} = \mu \cdot F_N$

Zentripetalkraft / Zentrifugalkraft: $F_Z = \frac{mv^2}{r} = m \cdot \omega^2 \cdot r$

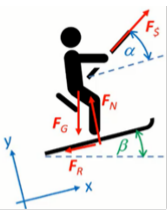


Die **Zentripetalkraft** und **Zentrifugalkraft** wirken bei einer beschleunigten Kreisbewegung und haben die gleiche Formel. Es handelt sich um entgegengesetzte Kräfte, die abhängig von dem Bezugssystem sind. Wird eine Kreisbewegung von außen betrachtet, wirkt nur die Zentripetalkraft. Befindet sich der Beobachter im rotierenden System nimmt er beide Kräfte wahr.

4.1 Kraft Statik

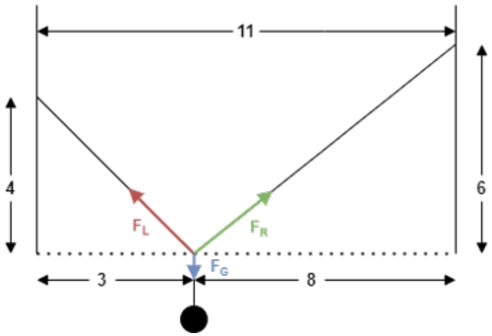
In der Statik bewegen sich die Objekte nicht. Dort gilt also:

$$\sum F = 0, v(t) = 0m/s, a(t) = 0m/s^2$$



X) $F_s \cdot \cos(18°) - \mu \cdot F_N - F_G \cdot \sin(35°) = 0$

Y) $F_s \cdot \sin(18°) + F_N - F_G \cdot \cos(35°) = 0$



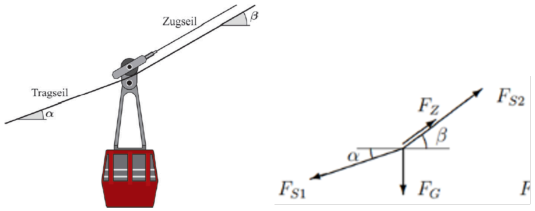
Ein Gewicht der Masse $m = 10$kg wird entsprechend der obigen Skizze durch Seile an einer Wand befestigt. Welche Kräfte wirken im linken und rechten Seil?

1. Methode:

$$\frac{F_L}{\sqrt{3^2+4^2}}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} + \frac{F_R}{\sqrt{8^2+6^2}}\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix} + mg\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = 0$$

2. Methode

$$F_L\begin{pmatrix}-\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{pmatrix} + F_R\begin{pmatrix}\cos(\beta)\\ \sin(\beta)\end{pmatrix} + mg\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = 0$$



Eine 20 kN schwere Luftseilbahnkabine hängt reibungsfrei an einem Tragseil und wirdduch ein Zugseil festgehalten. Wie gross sind die Zugkräfte im Zug- und im Tragseil? ($\alpha = 20° = 20\circ$ und $\beta = 20°$)

$$F_{S1} = F_{S2} = F_T$$

$$F_T\begin{pmatrix}\cos(180° - 20°)\\ \sin(180° - 20°)\end{pmatrix} + F_T\begin{pmatrix}\cos(20°)\\ \sin(20°)\end{pmatrix}$$

$$+F_Z\begin{pmatrix}\cos(20°)\\ \sin(20°)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ -20\text{ kN}\end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow F_T = 9.97 \cdot 10^4 N, F_Z = 8.48 \cdot 10^3 N$$

5 Energie E

Kinetische Energie $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

Potenzielle Energie $E_p = mgh$

Spannenergie einer Feder $E_F = \frac{1}{2}Dy^2$

Energieerhaltungssatz $E_{\text{tot}} = \sum_i E_i = \text{konst.}$

E_{tot}: Gesamtenergie im abgeschlossenen System
E_i: Teilenergie

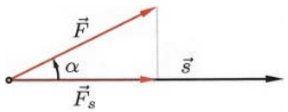
Energieerhaltung potenzielle Energie => Feder:
$mg(h+y) = \frac{1}{2}Dy^2$

6 Arbeit W

Beziehung zwischen Arbeit und Energie:
$\Delta E = W_{AB}$ ΔE: Energieänderung eines offenen Systems
W_{AB}: Arbeit, einer äusseren Kraft an diesem System

$W = F_s s$

$W = F \cdot s \cdot \cos(\alpha) = \vec{F} \cdot \vec{s}$



Arbeit auf der scheifen Ebene mit Reibung:
$W = (\sin(\alpha) + \mu_R \cdot \cos(\alpha)) \cdot F_G \cdot s$

7 Leistung P

Mittlere Leistung: $\bar{P} = \frac{W_{AB}}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta t}$

Momentane Leistung: $\frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

Wirkungsgrad: $\eta = \frac{W_2}{W_1} = \frac{P_2}{P_1}$ $W_1 P_1$: aufgenommene Leistung bzw. Arbeit
$W_2 P_2$: nutzbare Leistung bzw. Arbeit

Vortriebskraft: $F = \frac{P}{v}$

Reibungskoeffizient: $\mu = \frac{P}{F_G v}$

Steigleistung: $\frac{dh}{dt} = \frac{P}{F_G + \frac{P}{v}\cot(\alpha)}$

Welche Wassermenge pro Zeiteinheit fördert eine 4-kW-Pumpe in ein 45 m höher liegendes Reservoir?

$$\frac{dV}{dt} = \frac{P}{\varrho g h}$$

Leistung auf der Schiefen Ebene in Abhängigkeit von s und h:

$$W = \left(h + \mu_R\sqrt{s^2 - h^2}\right)mg$$

8 Kosmologie

Umkreisung in geringer Höhe: Gravitationskraft zwischen Satelliten und Erde F_G ist gerade das Gewicht mg des Satelliten, welches es er auch auf der Erde hätte

$$mg = \frac{mv^2}{r}$$

Daraus folgt die Formel für die

Geschwindigkeit	Umlaufzeit
$v = \sqrt{gr}$	$T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$

Geostationär: Geostationär bedeutet, dass der Satellit gleiche Umlaufzeit T wie die Erde hat.
(Umlaufzeit Erde $= T = 24 \cdot 3600s = 86400s$)
Gravitation:

Gravitationskraft zweier Massenpunkte: $F_G = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$

$$\vec{F_G} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

Potenzielle Energie: $E_p = -G\frac{m_1 m_2}{r}$

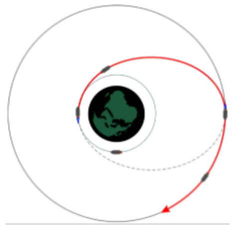
Kreisbahngeschwindigkeit: $v = \sqrt{\frac{GM_E}{r_E}}$

Fluchtgeschwindigkeit: $v = \sqrt{\frac{2GM_E}{r_E}}$

Energie Änderung bei Bahnänderung:

$\Delta E = \frac{GM_E m}{r}\frac{r' - r}{r' r}$

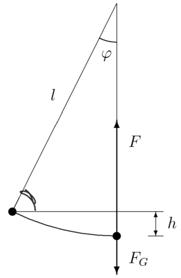
r' = Radius neue Bahn



Potenzielle Energie eines Objekts im Gravitationsfeld eines anderen:

$$E_p = \frac{GM_E m}{r}$$

9 Fadenpendel



$$\left.\begin{array}{l} F = \text{Fadenkraft} \\ F_G = \text{Gewichtskraft}\end{array}\right\} F_{\text{res}} = F - F_G$$

$$= \left(\frac{mv^2}{l}\right)$$

Die Energie-Erhaltung sagt uns, dass potenzielle Energie gleich kinetische Energie ist. Daraus folgt:

$$\frac{mv^2}{2} = mgh$$
$$= mg(l - l\cdot\cos(\varphi))$$
$$= mgl(1 - \cos(\varphi))$$

Schwingungsdauer:
Feder $T = 2\varphi\sqrt{\frac{m}{D}}$
Mathematisches Pendel $T \approx 2\varphi\sqrt{\frac{l}{g}}$

10 Mehrdimensionale Analysis

Linearisierung:

$$f(x) \underset{x \approx x_0}{\approx} f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Häufig mit Funktionen mehrerer Variablen zu tun, die weitere Funktionen beinhalten.

$$f(x, y) = x^2 \cdot \sin(y)$$
$$x(t) = \sin(t)$$
$$y(t) = t^3$$

Partielle Ableitung:
Nach x und y getrennt ableiten.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x^2 \cdot \sin(y)) = 2x \cdot \sin(y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x^2 \cdot \sin(y)) = x^2 \cdot \cos(y)$$

Totale Ableitung:
$x(t)$ und $y(t)$ in $f(x, y)$ einsetzen und dann ableiten.

$$\frac{df}{dt}(x(t), y(t)) = \frac{d}{dt}\left(\sin(t)^2 \cdot \sin(t^3)\right)$$
$$= 2\sin(t) \cdot \cos(t) \cdot \sin(t^3) + \sin(t)^2 \cdot \cos(t^3) \cdot 3t^2$$

Altenativ mit mehrdimensionale Kettenregel möglich. Bei dieser werden die partiellen Ableitungen mit der Ableitung der Funktion multipliziert und addiert.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

11 Beispiel Aufgaben

11.1 Allgemein

11.1.1 Zahlen wissenschaftlich korrekt darstellen

Mit expliziter Angabe des Messfehlers und ohne:

$$2.521162 \pm 0.531 = 2.52 \pm 0.53 = 2.5$$
$$161261 \pm 10000 = 1.61 \cdot 105 \pm 0.10 \cdot 10^5 = 1.61 \cdot 10^5$$
$$613.627 \pm 1.4 = 6.136 \cdot 102 \pm 0.014 \cdot 10^2 = 6.136 \cdot 10^2$$
$$1610.12 \pm 17 = 1.610 \cdot 103 \pm 0.017 \cdot 10^3 = 1.610 \cdot 10^3$$
$$16.1612 \pm 8.7 = 1.62 \cdot 101 \pm 0.87 \cdot 10^1 = 1.6 \cdot 10^1$$
$$870261 \pm 10125 = 8.70 \cdot 105 \pm 0.10 \cdot 10^5 = 8.70 \cdot 10^5$$
$$870261 \pm 40125 = 8.70 \cdot 105 \pm 0.40 \cdot 10^5 = 8.7 \cdot 10^5$$

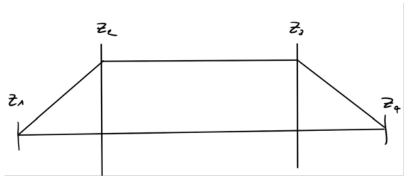
11.2 Kinematik

11.2.1 Zeit zwischen zwei Punkten

Berechnen Sie die Zeit, die ein Trolleybus für die Strecke von $600m$ zwischen zwei Hal- testellen benötigt, wenn die Anfahrbeschleunigung $1\frac{m}{s^2}$, die Bremsverzögerung $0.75\frac{m}{s^2}$ und die Geschwindigkeit während der gleichförmigen Bewegung $54\frac{km}{h}$ beträgt.

Lösungsweg:

1. Skizze erstellen und in Zonen aufteilen



2. Gegebene Werte notieren

Zone 0	Zone 1	Zone 2	Zone 3
$a_{01} = 1\frac{m}{s^2}$	$a_{12} = 0\frac{m}{s^2}$	$a_{23} = -0.75\frac{m}{s^2}$	$a_{32} = 0\frac{m}{s^2}$
$r_0 = 0m$	$r_1 = ?$	$r_2 = ?$	$r_3 = 600m$
$v_0 = 0\frac{m}{s}$	$v_1 = 54\frac{\text{km}}{h} = 15\frac{m}{s}$	$v_2 = 54\frac{\text{km}}{h} = 15\frac{m}{s}$	$v_3 = 0\frac{m}{s}$
$t_0 = 0s$	$t_1 = ?$	$t_2 = ?$	$t_3 = ?$

3. Fehlende Werte für Zone 1 berechnen in dem man Formeln umstellt

$$v_1 = v_0 + a_{01} \cdot t_1$$

$$t_1 = \frac{v_1 - v_0}{a_{01}} = \frac{15\frac{m}{s} - 0\frac{m}{s}}{1\frac{m}{s^2}} = 15s$$

$$r_1 = r_0 + v_0 \cdot t_1 + \frac{1}{2} \cdot a_{01} \cdot t_1^2$$

$$= 0m + 0\frac{m}{s} \cdot 15s + \frac{1}{2} \cdot 1\frac{m}{s^2} \cdot (15m)^2 = 112.5m$$

4. Nun müssen wir t_3 berechnen um damit dann r_2 berechnen zu können

$$t_3 = \frac{0\frac{m}{s} - 15\frac{m}{s}}{-0.75\frac{m}{s^2}} = 20s$$

$$r_3 = r_2 + v_2 \cdot t_3 + \frac{1}{2} \cdot a_{23} \cdot t_3^2$$

$$r_2 = r_3 - (v_2 \cdot t_3) - \left(\frac{1}{2} \cdot a_{23} \cdot t_3^2\right)$$

$$r_2 = 600m - \left(15\frac{m}{s} \cdot 20s\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot -0.75\frac{m}{s^2} \cdot (20s)^2\right)$$

$$= 450m$$

5. t_2 berechnen

$$r_2 = r_1 + v_1 \cdot t_2 \cancel{+ \frac{1}{2} \cdot a_{12} \cdot t_2^2} \text{ (fällt weg da } a_{12} = 0)$$

$$t_2 = \frac{r_2 - r_1}{v_1} = \frac{450m - 112.5m}{15\frac{m}{s}} = 22.5s$$

6. t_{Total} berechnen

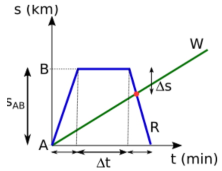
$$t_{\text{Total}} = t_0 + t_1 + t_2 + t_3$$
$$= 0s + 15s + 22.5s + 20s = 57.53s$$

11.2.2 Fussgänger und Radfahrer

Ein Radfahrer und ein Fussgänger bewegen sich gleichzeitig von A nach B, wobei der eine stündlich 5 km und der andere 15 km zurücklegt. Der Radfahrer hält sich eine Stunde in B auf und trifft auf dem Rückweg den Fussgänger 30 km vor B entfernt. Wie gross ist die Distanz zwischen A und B?

Lösungsweg:

1. s-t-Diagramm erstellen



2. Formel für Zeit des Fussgänger, t_F aufstellen.

$$t_F = \frac{s_{AB} - \Delta s}{v_F}$$

3. Formel für Zeit des Radfahrer, t_R aufstellen. (Δt = Pause 1h)

$$t_R = \frac{s_{AB} + \Delta s}{v_R} + \Delta t$$

4. Da gemäss s-t-Diagramm beide Zeiten gleich sind, können wir die beiden Gleichungen gleichsetzen und nach S_{AB} umstellen.

$$t_F = t_R$$

$$\frac{s_{AB} - \Delta s}{v_F} = \frac{s_{AB} + \Delta s}{v_R} + \Delta t$$

$$\frac{s_{AB}}{v_F} - \frac{s_{AB}}{v_R} = \Delta\frac{s}{v_F} + \Delta\frac{s}{v_R} + \Delta t$$

$$s_{AB}\left(\frac{1}{v_F} - \frac{1}{v_R}\right) = \Delta s\left(\frac{1}{v_F} + \frac{1}{v_R}\right) + \Delta t$$

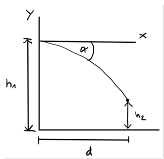
$$s_{AB} = \frac{\Delta s\left(\frac{1}{v_F} + \frac{1}{v_R}\right) + \Delta t}{\frac{1}{v_F} - \frac{1}{v_R}}$$

$$s_{AB} = \frac{30\text{ km}\left(\frac{1}{5\text{ km }h^{-1}} + \frac{1}{15\text{ km }h^{-1}}\right) + 1h}{\frac{1}{5\text{ km }h^{-1}} + \frac{1}{15\text{ km }h^{-1}}}$$

$$= 67.5\text{ km}$$

11.2.3 Schiefer Wurf

Ein Ball wird unter einem Winkel von 20° (notwendig) schräg nach unten geworfen (12m nach rechts und 7.5m nach unten). Mit welcher Anfangsgeschwindigkeit wurde der Ball geworfen?



Lösungsweg:

1. Richtungsgleichung aufstellen

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{v_0} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \vec{a} \cdot t^2$$

2. Anfangsbedingungen festlegen beim Werfer

$$\vec{v_0} = v_0 \cdot \begin{pmatrix} \cos(-20°) \\ \sin(-20°) \end{pmatrix} \cdot t$$

$$\vec{r_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r_1} = \begin{pmatrix} 12 \\ -7.5 \end{pmatrix}$$

3. Bedinungen in die Richtungsgleichung einsetzen

$$\begin{pmatrix} 12 \\ -7.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_0 \cdot \begin{pmatrix} \cos(-20°) \\ \sin(-20°) \end{pmatrix} \cdot t$$
$$+ \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -9.81 \end{pmatrix} \cdot t^2$$

4. X-Gleichung nach $v_0 \cdot t = s_1$ auflösen

$$12 = v_0 \cdot \cos(-20°) \cdot t \Leftrightarrow v_0 \cdot t = \frac{12}{\cos(-20°)}$$
$$= 12.77$$

5. Y-Gleichung nach t auflösen

$$-7.5 = v_0 \cdot \sin(-20°) \cdot t + \frac{1}{2} \cdot -9.81 \cdot t^2$$

$$\Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot (7 - 5 - v_0 \cdot t \cdot \sin(-20°))}{9.81}} = 0.8$$

6. Geschwindigkeit berrechnen

$$\frac{s_1}{t} = v_0 = \frac{12.77}{0.8} = 16\frac{m}{s}$$

11.2.4 Radialbeschleunigung

Ein Riesenrad hat eine Umlaufdauer von $12s$. Wie gross sind Geschwindigkeit und Radialbeschleunigung einer Person im Abstand von $5.6m$ von der Drehachse?

Lösungsweg:

1. Tangentialgeschwindigkeit v_T berechnen

$$v_T = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi \cdot r}{T} = \frac{2\pi \cdot 5.6m}{12s} = 2.9ms^{-1}$$

2. Radialbeschleunigung a_T berechnen aus v_T

$$a_T = \frac{v_T^2}{r} = \frac{4\pi^2 \cdot r}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 5.6m}{(12s)^2} = 1.5ms^{-2}$$

11.2.5 Aufprallgeschwindigkeit

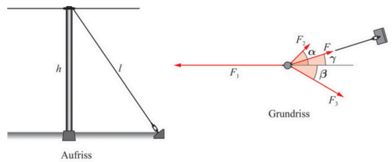
Aus welcher Höhe muss ein Mann herunterspringen, um den gleichen Aufprall zu erleben wie ein landender Fallschirmspringer, dessen Sinkgeschwindigkeit $6\frac{m}{s}$ beträgt ?

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{6^2}{2 \cdot 9.81} = 1.84m$$

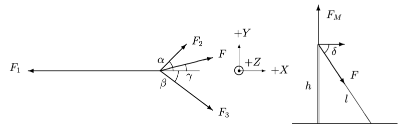
11.3 Kräfte

11.3.1 Komplexe Kräfteaufgabe

An der Spitze eines $h = 8m$ hohen Mastes üben die befestigten Leitungen die Zugkräfte $F_1 = 4800N$, $F_2 = 1200N$ und $F_3 = 2700N$ aus. Der Winkel $\alpha = 40°$ und $\beta = 30°$. In welcher Richtung γ muss ein l = 9.6 m langes schräges Drahtseil verankert werden, damit an der Mastspitze keine horizontale Kraft wirksam wird? Wie gross ist die Zugkraft F im Seil?



Lösungsweg: Aus dem Seitenriss geht hervor, dass die Kraft F in eine horizontale (xy-Ebene) Kompo- nente $F_{xy} = F\cos\delta$ und in eine vertikale (z-Richtung) Komponente $F_z = F\sin\delta$ zerlegt werden kann. Somit:



1. Gleichgewicht in x-Richtung:

$$-F_1 + F_2\cos(\alpha) + F_3\cos(\beta) + F\cos(\delta)\cos(\gamma) = 0$$

2. Gleichgewicht in y-Richtung:

$$F_2\sin(\alpha) - F_3\sin(\beta) + F\cos(\delta)\sin(\gamma) = 0$$

3. Gleichgewicht in z-Richtung:

$$F_M - F\sin(\delta) = 0$$

4. Daraus folgt aus X-Gleichung:

$$F\cos(\delta)\cos(\gamma) = [F_1 - F_2\cos(\alpha) - F_3\cos(\beta)]$$

5. Daraus folgt aus Y-Gleichung:

$$F\cos(\delta)\sin(\gamma) = \{-F_2\sin(\alpha) + F_3\sin(\beta)\}$$

6. Da $F^2\cos^2(\delta)(\sin^2(\gamma) + \cos^2(\gamma)) = F^2\cos^2(\delta)$ können wir die 2 Gleichungen quadrieren und zusammenzählen:

$$F^2\cos^2(\delta) = []^2 + \{\}^2$$

7. Da $\sin(\delta) = \frac{h}{l}$ erhalten wir für den Cosinus:

$$\cos^2(\delta) = 1 - \frac{h^2}{l^2}$$

8. Die gesuchte Seilkraft F ist somit:

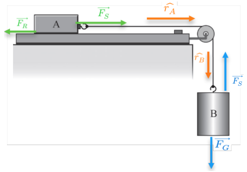
$$F = \sqrt{\frac{[]^2 + \{\}^2}{1 - \frac{h^2}{l^2}}} = 3056N$$

9. Winkel γ erhalten wir als Quotient von Y und X-Gleichung:

$$\gamma = \arctan\left(\frac{\{\}}{[]}\right) = 17.3°$$

11.3.2 2. Newtonsche Gesetz (Kräfte in Bewegung)

Ein Körper A der Masse 1 kg wird mit Hilfe eines masselosen Seils und einer masselosen, reibungsfreien Umlenkrolle durch einen Körper B der Masse 1.5 kg auf einer horizontalen Ebene gezogen. Der Gleitreibungskoeffizient zwischen dem Körper A und der Ebene beträgt 0.5.



Mit welcher Beschleunigung bewegen sich die beiden Körper und wie gross ist die Kraft im Seil?

Lösungsweg:

1. Seilkraft für A und B bestimmen (Umlenkrolle lenkt $\hat{r}$ um)

$$F_A = m_a \cdot a = F_S \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + F_R \cdot \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\Leftrightarrow F_S = m_a \cdot a + \mu \cdot F_N = m_a \cdot a + \mu \cdot m_a \cdot g$$

$$F_B = m_b \cdot a = F_G \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + F_S \cdot \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\Leftrightarrow F_S = -m_b \cdot a + F_G = -m_b \cdot a + m_b \cdot g$$

2. Formeln gleichsetzen und nach a umstellen:

$$m_a \cdot a + \mu \cdot m_a \cdot g = -m_b \cdot a + m_b \cdot g$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{m_b \cdot g - \mu \cdot m_a \cdot g}{m_a + m_b}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1.5 \cdot 9.81 - 0.5 \cdot 1 \cdot 9.81}{1 + 1.5} = 3.92\frac{m}{s^2}$$

3. Geschwindigeit in eine der Formeln einsetzen:

$$F_S = m_a \cdot a + \mu \cdot m_a \cdot g$$
$$= 1 \cdot 3.92 + 0.5 \cdot 1 \cdot 9.81 = 8.67N$$

11.3.3 Bewegung zwei Körper

Wir betrachten zwei Wagen mit den Massen $m_1 = 150g$ und $m_2 = 100g$, die sich reibungslos bewegen können. Zwischen den Wagen befindet sich eine Feder mit einer ungespannten Länge von $l_0 = 10$ cm und einer Federkonstante von $k = 100Nm^{-1}$, die zunächst auf eine Länge von $l = 5.0$ cm zusammengestaucht wird. Bei $t = 0$ werden die Wagen losgelassen und fangen an zu beschleunigen. Die Feder ist an

den Wagen befestigt, so dass sich die Wagen nicht beliebig voneinander entfernen können.
$\Rightarrow$ Wagen pendeln hin und her
Bewegungsgleichung:

$$m_1\ddot{x_1} = k \cdot (x_2 - x_1 - l_0)$$
$$m_2\ddot{x_2} = -k \cdot (x_2 - x_1 - l_0)$$

Funktion der Zeit:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = x_R + l_0$$
$$= A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}}t\right) + l_0$$

1. Mittels Ableitung der Funktion der Zeit Startwerte bestimmen:

$$\Delta x(0) = A + l_0 \Rightarrow A = \Delta x(0) - l_0 = 5 \text{ cm} - 10 \text{ cm} = -5 \text{ cm}$$
$$\Delta x(0) = B\sqrt{\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}} = 0 \Rightarrow B = 0$$

2. A und B in Funktion der Zeit einsetzen:

$$\Delta x = -5 \text{ cm}\cos\left(\sqrt{\frac{100}{0.15} + \frac{100}{0.1}} \cdot t\right) + 10 \text{ cm}$$
$$= -5 \text{ cm}\cos\left(\frac{40.8 \cdot t}{1}s\right) + 10 \text{ cm}$$
$$T = \frac{2\pi}{40.8} = 0.154s$$

11.4 Energie

11.4.1 Ballwurf mit Energieerhaltung

Ein Kind will einen Ball über eine $2m$ von ihm entfernte Mauer werfen. Die dazu minimal erforderliche Wurfhöhe ist $10m$. Welches ist der minimal erforderliche Betrag der Geschwindigkeit, mit der der Junge den Ball abwerfen muss?
Lösungsweg:

1. In y-Richtung ($y = 10m$) gilt dank Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2}mv_y^2 = mgy$$
$$v_y = \sqrt{2gy}$$

2. Die Flugzeit, bis die Geschwindigkeit in y-Richtung 0 ist, ist:

$$v_y = gt \text{ (Da freier Fall)}$$
$$t = \frac{v_y}{g} = \sqrt{2\frac{y}{g}}$$

3. In dieser Zeit muss der Ball die Distanz x ($x = 2m$) zurücklegen:

$$x = v_x t$$
$$v_x = \frac{x}{t} = \sqrt{\frac{gx^2}{2y}}$$

4. Die gesuchte Geschwindigkeit ist:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\frac{gx^2}{2y} + 2gy}$$
$$= \sqrt{\frac{9.81m/s^2 \cdot 2^2m^2}{2 \cdot 10m} + 2 \cdot 9.81m/s^2 * 10m}$$
$$= \sqrt{198m^2/s^2} = 14m/s$$

11.4.2 Fall auf eine Feder

Eine Masse von 12 kg fällt aus 70 cm Höhe auf eine gefederte Unterlage, deren Federkonstante $4000\frac{N}{m}$ beträgt. Wieviel wird die Feder beim Aufprall zusammengedrückt?
Lösungsweg:

1. Energieerhaltungssatz anwenden und Gleichungsystem aufstellen

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{Feder}} \Longrightarrow mg(h+s) = \frac{cs^2}{2}$$

2. Dies ergibt die quadratische Gleichung:

$$\frac{c}{2}s^2 - mgs - mgh = 0$$

3. Die Lösung der quadratischen Gleichung ist:

$$s = \frac{mg}{c} + \sqrt{\left(\frac{mg}{c}\right)^2 + 2\frac{mgh}{c}}$$
$$= \frac{12 \cdot 9.81}{4000} + \sqrt{\left(\frac{12 \cdot 9.81}{4000}\right)^2 + 2\frac{12 \cdot 9.81 \cdot 0.7}{4000}}$$
$$= 0.2345 = 23,5 \text{ cm}$$

11.5 Arbeit / Leistung

11.5.1 Leistung einer Lokomotive

Welche Arbeit (in kWh) leistet eine Lokomotive, die einen Zug von Flüelen nach Göschenen zieht? Die totale Masse des Zuges beträgt $400t = 400'000$ kg, die Strecke 37 km, die Höhendifferenz $670m$ und der Rollreibungskoeffizient 0.002. Der Luftwiderstand werde vernachlässigt.
Lösungsweg:

1. Winkel α bestimmen mittels Trigometrie

$$\sin(\alpha) = \frac{670m}{37'000m} \Leftrightarrow \alpha = 1.04°$$

2. Energieerhaltungssatz aufstellen

$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h + (m \cdot g \cdot s \cdot \cos(\alpha)) \cdot \mu$$

3. EES Einsetzen am Anfang ($v = 0$, $h = 0$, $s = 0$)

$$E_0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 0^2 + m \cdot g \cdot 0 + (m \cdot g \cdot 0 \cdot \cos(\alpha)) \cdot \mu$$
$$= 0$$

4. EES Einsetzen am Ende ($v = 0$, $h = 670m$, $s = 37'000m$)

$$E_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 0^2 + m \cdot g \cdot 670 + (m \cdot g \cdot 37'000 \cdot \cos(\alpha)) \cdot \mu$$
$$= 2'919'408'166J$$

5. Arbeit W berechnen und in kWh umrechnen

$$W = E_0 - E_1 = \frac{2'919'408'166J - 0J}{3600s \cdot 1000} = 810.97 \text{ kWh}$$

11.5.2 Leistung eines Autos

Ein Auto braucht bei der Geschwindigkeit $80\frac{km}{h}$ auf 100 km 8 Liter Benzin. Wie gross ist der Fahrwiderstand (Rollreibung + Luftwiderstand), wenn der Wirkungsgrad des Motors 20 % beträgt? Das Benzin hat eine Dichte von $700\frac{\text{kg}}{m^3}$ und einen Heizwert von $42\frac{\text{MJ}}{\text{kg}}$.
Lösungsweg:

$$P_{\text{ab}} = F * v, P_{\text{zu}} = \varrho \cdot \frac{dV}{dt} \text{ (Benzinvolumen)} \cdot H \text{ (Heizwert)}$$
$$P_{\text{zu}} = \varrho \cdot \frac{dV}{ds} \text{ (Literverbrauch)} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot H = \varrho \cdot \frac{dV}{ds} \cdot v \cdot H$$
$$F = \frac{P_{\text{ab}}}{v} = \frac{\eta \cdot P_{\text{zu}}}{v} = \frac{\eta \cdot \varrho \cdot \frac{dV}{ds} \cdot H}{v}$$
$$F = 0.2 \cdot 700 \cdot \left(8 \cdot \frac{10^{-3}}{10^{-5}} \cdot 42 \cdot 10^6\right) = 470N$$

11.5.3 Pumpleistung

Welche Wassermenge pro Zeiteinheit fördert eine 4-kW-Pumpe in ein $45m$ höher liegendes Reservoir?
Lösungsweg:
Die an einem infinitesimalen Massen-Element dm geleiste Arbeit dW ist gleich seiner Zunahme an potentieller Energie, also $dW = dmgh$. Somit ist die Leistung P der Pumpe, also die Arbeit pro Zeiteinheit:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dm \cdot g \cdot h}{dt} = \varrho\frac{dV}{dt} \cdot g \cdot h$$

1. Formel nach $\frac{dV}{dt} = \dot{V}$ auflösen

$$\frac{dV}{dt} = \frac{P}{\varrho gh} = \frac{4'000W}{1'000\frac{\text{kg}}{m^3} \cdot 9.81\frac{m}{s^2} \cdot 45m} = 9,061 \cdot 10^{-3}\frac{m^3}{s}$$
$$\dot{V} = 9,061s^{-1}$$

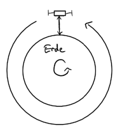
11.6 Kosmologie

11.6.1 Satellit

11.6.1.1 Höhe eines geostationären Satelliten

Welcher Höhe muss Satellit auf Kreisbahn laufen, wenn er geostationär sein soll?

Erdradius:	$r_E = 6.378 \cdot 10^6 m$
Erdmasse:	$M_E = 5.98 \cdot 10^{24}$ kg
Gravitation:	$G = 6.67 \cdot 10^{-11}m^3\text{kg}^{-1}s^{-2}$



Lösungsweg:

1. Ist die Geschwindigkeit des Satelliten konstant?
Ja, da Erde nicht schneller oder langsamer wird mit der Zeit $\Rightarrow v = \text{const} \Rightarrow \dot{v} = 0$
Hinterer Teil der Kreisbewegung kann ignoriert werden
2. Abhängig von Unbekannten Zentripetalkraft Formel anwenden

$$F_{\text{äussere}} = m \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \hat{r} + m \cdot 0 \cdot \hat{v} = m \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \hat{r}$$

3. Umlaufzeit Erde berechnen

$$T = 24h \cdot 3600 = 86'400s$$

4. Formel der Kräfte bestimmen: Satellit muss auf der Bahn bleiben, heisst

$$\vec{F_G} - \vec{F_{\text{äussere}}} = \vec{0}$$
$$G \cdot \frac{M_E \cdot m}{r^2} \cdot \hat{r} = m \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \hat{r}$$

5. Formel kürzen, einsetzen und nach r auflösen

$$G \cdot \frac{M_E}{r^3} = \omega^2 \Rightarrow G \cdot \frac{M_E}{r^3} = \frac{2^2 \cdot \pi^2}{T^2}$$
$$r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_E \cdot T^2}{4\pi^2}}$$

6. Erdradius von Radius abziehen, um Höhe zu bekommen

$$h = r - r_E \Rightarrow \sqrt[3]{\left(\frac{G \cdot M_E \cdot T^2}{4\pi^2}\right)} - r_E \approx 35800 \text{ km}$$

11.6.1.2 Kinetische Energie des Satelliten

Welche kinetische Energie hat der Satellit?
Lösungsweg:

1. E_{kin} aufstellen

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} \cdot v^2$$

2. v bestimmen

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$$

3. Zahlen in E_kin Formel einsetzen

11.6.1.3 Flughöhe Satelliten bei 2 Umläufen pro Tag

Welche Flughöhe muss der Satellit haben, wenn er die Erde zweimal pro Tag umrundet?
Lösungsweg:

1. Formel nach r auflösen
$G \cdot \frac{M}{r^3} = \omega^2 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M}{\omega^2}}$
2. Winkelgeschwindigkeit berechnen (Ein Tag = 86'400s)
$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \varphi}{43'}200s$
3. r berechnen und Radius der Erde abziehen
$h = r - r_E$

11.7 Fadenpendel

11.7.1 Winkel eines Fadenpendels

Unter welchem Winkel muss ein Fadenpendel losgelassen werden, wenn die maximale Beanspruchung des Fadens gerade doppelt so gross werden soll wie die beim ruhenden Pendel?
(Bild siehe Abschnitt Fadenpendel)
Lösungsweg:

1. Resultierende Kraft ermitteln (Zentripetalkraft)
$\Rightarrow$ Bewegungsgleichung

$$F_{\text{res}} = F - F_G = \frac{mv^2}{l}$$

2. Energieerhaltungssatz anwenden (potentielle Energie = kinetische Energie)

$$\frac{mv^2}{2} = mgh = mgl(1 - \cos(\varphi))$$
$$\text{(Mal 2, durch l)} \Longrightarrow \frac{mv^2}{l} = 2mg(1 - \cos(\varphi))$$

3. Dies in Bewegungsgleichung einsetzen

$$F - F_G = 2mg(1 - \cos(\varphi))$$

4. Auflösen nach cos(phi)

$$\cos(\varphi) = 1 - \frac{F - F_G}{2F_G} = \frac{2F_G - F + F_G}{2F_G} = \frac{3F_G - F}{2F_G}$$
$$= \frac{3 - \frac{F}{F_G}}{2}$$

5. Nach Voraussetzung ist Verhältnis von F und F_G = 2, also $F : F_G = \frac{F}{F_G} = 2$

$$\cos(\varphi) = \frac{3-2}{2} = 0.5 \Rightarrow \varphi = 60°$$

12 Weiteres

12.1 Taschenrechner

- **Menu** $\longrightarrow$ **3** $\longrightarrow$ **1** für solve()
- **Menu** $\longrightarrow$ **3** $\longrightarrow$ **7** $\longrightarrow$ **1** für Gleichungsystem lösen
- **doc** $\longrightarrow$ **7** $\longrightarrow$ **2** für Umstellung von Grad auf Rad
- **Menu** $\longrightarrow$ **4** $\longrightarrow$ **1** für Ableitungen

12.2 Fundamentum Mathematik und Physik Inhalt

- **Trigometrie:** Seite 26
- **Ableitungen:** Seite 60
- **Kinematik:** Seite 81
- **Kräfte:** Seite 83
- **Energie:** Seite 85