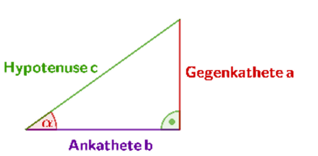
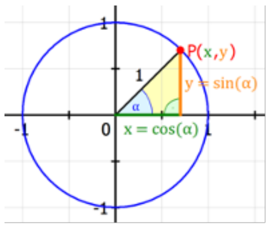
1 Grundlagen

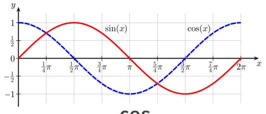
1.1 Trigometrie

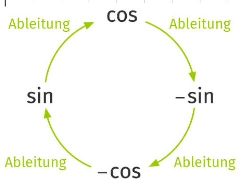


$$\sin(\alpha) = \frac{G}{H}$$
$$\cos(\alpha) = \frac{A}{H}$$
$$\tan(\alpha) = \frac{G}{A} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–







1.1.1 Physikalische Grössen

Geschwindigkeit	v	-	m/s
Beschleunigung	a	-	m/s^2
Federkonstante	D	-	N/m
Frequenz	f	Hertz	$1/s$
Kraft	F	Newton	$\text{kg} \cdot m/s^2$
Energie	E	Joule	$N \cdot m$
Arbeit = Δ Energie	W	Joule	$J = N \cdot m$
Leistung = Arbeit pro Zeit	P	Watt	J/s

* 4.19 Joule = 1 Cal, 1 Joule = 1 Watt/s => $3.6 \cdot 10^6 J = 1$ kWh

1.1.2 Basisgrössen

Länge	l	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Zeit	t	Sekunde	s

1.1.3 Abhängigkeit Weg Geschwindigkeit und Beschleunigung über die Zeit

Wegfunktion	$s(t)$
Geschwindigkeitsfunktion	$v(t) = \dot{s}(t)$
Beschleunigungsfunktion	$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$

1.1.4 Konstanten

Fallbeschleunigung	g	$9.80665 m/s^2$
Lichtgeschwindigkeit	c	$2.99792458 \cdot 10^8 m/s$
Gravitationskonstante	G	$6.673 \cdot 10^{-}11N \cdot m^2/\text{kg}^2$

Konservative Kraft: Die Kraft ist konservativ, da sie nur von Ortskoordinaten abhängt, und da $-F(x)$ als reell wertige Funktion einer Variable eine Stammfunktion besitzt. Das Hook'schen Gesetz beschreibt eine konservative Kraft, da sie nur von Ortskoordinaten abhängt, und da $-F(x)$ als reellwertige Funktion einer Variable eine Stammfunktion besitzt

2 Kinematik

Mittlere Geschwindigkeit: $\bar{v} = \frac{\Delta v}{\Delta s}$

Mittlere Beschleunigung: $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

Gleichförmige Bewegung: $s = s_0 + v \cdot ta \Rightarrow \frac{s}{v} = t$

Geradlinige Bewegung: $\Delta s = \bar{v}\Delta t$

Gleichmässig beschleunigte Bewegung:

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2$$
$$v = v_0 + at$$
$$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0) \Rightarrow \text{wenn } v_0 = 0 \Rightarrow s = \frac{v^2}{2a}$$
$$\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$
$$t = \frac{v}{a} = \frac{v_0 - v}{a}$$

2.1 Gleichförmige Kreisbewegung (ω = konst.)

Umlaufzeit: T $[T] = s$

Frequenz: $f = \frac{1}{T}$ $[f] = s^{-1} = \text{Hz}$

Winkelkoordinate: $\varphi = \frac{b}{r}$ $[\varphi] = \text{rad} = \frac{m}{m}$

Winkelgeschwindigkeit: $\omega = \Delta\frac{\varphi}{\Delta}t = 2\frac{\pi}{T} = 2\pi f$ $[\omega] = \frac{\text{rad}}{s}$

Bahngeschwindigkeit: $v = r\omega$

Zentripetalbeschleunigung: $a_z = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$

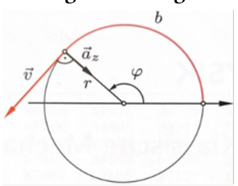
Tangentialgeschwindigkeit: $v_T = \frac{2\pi r}{T}$

Radialbeschleunigung/ Zentripetalbeschleunigung: $a_r = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$

Tangentialbeschleunigung: $a_T = \frac{v_1 - v_0}{t}$

Kreisbewegung Funktion: $r(t) = r\begin{pmatrix} \cos(wt+\varphi_0) \\ \sin(wt+\varphi_0) \end{pmatrix}$

Radialgeschwindigkeit: $v = \frac{\text{Umfang}}{T}$

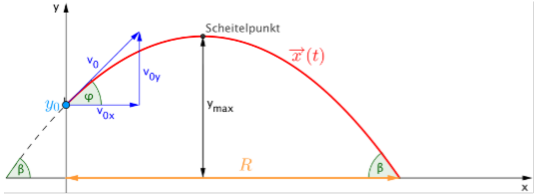


2.2 Schiefer Wurf

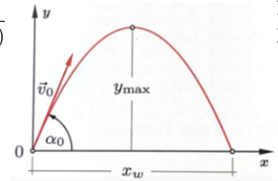
Bewegungsgleichung:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix} + v_0 \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \cdot t + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t^2$$



$$y = x \cdot \tan(\alpha_0) - \frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha_0)} \cdot x^2$$
$$y_{\max} = \frac{v_0^2\sin^2(\alpha_0)}{2g}$$
$$x_w = \frac{v_0^2\sin(2\alpha_0)}{g}$$



3 Messen und Messfehler

Systematische Fehler: z.B. messen mit falsch kalibriertem Messgerät Berechnet sich der Wert einer Grösse z aus Messwerten der Grössen x und y.

$$z = f(x, y)$$

und wurden die Messgrössen x und y mit einem Fehler von Δx bzw. Δy bestimmt, so ist der Wert von z nur ungenau bestimmt. Für den prognostizierten Wert und den prognostizierten Messfehler gilt

$$z = z_0 \pm \Delta z$$
$$z_0 = f(x_0, y_0)$$
$$\Delta z = \left|\frac{\partial}{\partial x}f(x_0, y_0)\right| \cdot \Delta x + \left|\frac{\partial}{\partial y}f(x_0, y_0)\right| \cdot \Delta y$$

sofern die Grössen x und y, z.B. auf Grund von fehlerhaften Messinstrumenten, systematisch falsch bestimmt wurden. Die Fehlerabschätzung durch systematische Fehler ist eine «worst-case»-Abschätzung **Statistische Fehler:** bei mehrfach messen unterschiedliche Ergebnisse

⇒ mehrmals mässen und Mittelwert nehmen verkleinert den Fehler Fehlerfortpflanzung für normalverteilte Fehler. Berechnet sich der Wert einer Grösse z aus Messwerten der Grössen x und y gemäss

$$z = f(x, y)$$

und wurden die Messgrössen x und y durch Mehrfachmessung (x n-fach gemessen, y m-fach gemessen) und ohne systematischen Fehler bestimmt, so darf von statistisch normalverteilten Fehlern ausgegangen werden. In diesem Fall errechnet sich die Standardunsicherheit der Messwerte von x und y gemäss

$$\Delta x = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$
$$\Delta y = \sqrt{\frac{1}{m(m-1)}\sum_{i=1}^{m}(y_i - \bar{y})^2} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{m}}$$

σ = Standardabweichung

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=n}^{n} x_i$ = Mittelwert

Es gilt also

$$x = \bar{x} \pm \Delta x$$
$$y = \bar{y} \pm \Delta y$$

Ausserdem ist der prognostizierte Wert und der statistische Fehler von z durch folgende Formeln berechenbar

$$z = z \pm \Delta z$$
$$\bar{z} = f(\bar{x}, \bar{y})$$
$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x_0, y_0) \cdot \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}f(x_0, y_0) \cdot \Delta y\right)^2}$$

Beispiel Systematischer Fehler: Ein Gewicht unbekannter Masse wird auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel α platziert, auf der es reibungsfrei gleiten kann. Die Hangabtriebskraft und der Neigungswinkel α werden experimentell bestimmt. Die Werte sind $\alpha = (30° \pm 2°)$, $F_H = (10 \pm 0.3)N$. Aus Tabelle $g = (9.81 \pm 0.03)$

$$F_H = mg \cdot \sin(\alpha) \Rightarrow m = \frac{F_H}{g \cdot \sin(\alpha)}$$
$$m = \frac{10N}{9.81m/s^2 \cdot \sin(30°)} = 2.0387$$

Partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial g}\left(\frac{F_H}{g \cdot \sin(\alpha)}\right)) = -\frac{F_H}{g^2 \cdot \sin(\alpha)}$$
$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{F_H}{g \cdot \sin(\alpha)}\right)) = -\frac{F_H \cdot \cos(\alpha)}{g \cdot \sin^{2°}(F_H)}$$
$$\Delta m = \left|-\frac{F_H}{g^2 \cdot \sin(\alpha)} \cdot \Delta g\right| + \left|-\frac{F_H \cdot \cos(\alpha)}{g \cdot \sin^2(F_H)} \cdot \Delta\alpha\right| + \left|\frac{1}{g \cdot \sin(\alpha)} \cdot \Delta F_H\right| = 0.191\text{kg}$$
$$m = (2.04 \pm 0.19)\text{kg}$$

Achtung $\Delta\alpha$ muss in Bogenmass sein!

Gradmass in Bogenmass $x = \frac{\alpha}{180} \cdot \pi$

Bogenmass in Gradmass $\alpha = \frac{x}{\pi} \cdot 180$