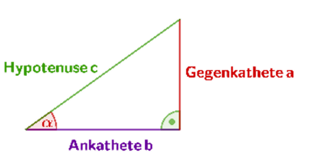
1 Grundlagen

1.1 Trigometrie

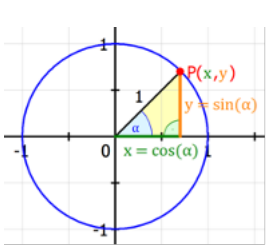


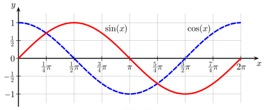
$\sin(\alpha) = \frac{G}{H}$

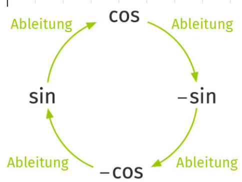
$\cos(\alpha) = \frac{A}{H}$

$\tan(\alpha) = \frac{G}{A} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–







1.2 Vektorrechnung

Länge des Vektors: $|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$

1.3 Ableitungen

Funktion	Ableitung
x^a	$a \cdot x^{a-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos(2)^x}$

Produktregel:

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Kettenregel:

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

1.3.1 Physikalische Grössen

Geschwindigkeit	v	-	m/s
Beschleunigung	a	-	m/s^2
Federkonstante	D	-	N/m
Frequenz	f	Hertz	$1/s$
Kraft	F	Newton	$kg \cdot m/s^2$
Energie	E	Joule	$N \cdot m$
Arbeit = Δ Energie	W	Joule	$J = N \cdot m$
Leistung = Arbeit pro Zeit	P	Watt	J/s

* 4.19 Joule = 1 Cal, 1 Joule = 1 Watt/s => $3.6 \cdot 10^6 J = 1$ kWh

1.3.2 Basisgrössen

Länge	l	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Zeit	t	Sekunde	s

1.3.3 Abhängigkeit Weg Geschwindigkeit und Beschleunigung über die Zeit

Wegfunktion	$s(t)$
Geschwindigkeitsfunktion	$v(t) = \dot{s}(t)$
Beschleunigungsfunktion	$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$

1.3.4 Konstanten

Fallbeschleunigung	g	$9.80665 m/s^2$
Lichtgeschwindigkeit	c	$2.99792458 \cdot 10^8 m/s$
Gravitationskonstante	G	$6.673 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2/\text{kg}^2$

Konservative Kraft: Die Kraft ist konservativ, da sie nur von Ortskoordinaten abhängt, und da $-F(x)$ als reell wertige Funktion einer Variable eine Stammfunktion besitzt. Das Hook'schen Gesetz beschreibt eine konservative Kraft, da sie nur von Ortskoordinaten abhängt, und da $-F(x)$ als reellwertige Funktion einer Variable eine Stammfunktion besitzt

2 Kinematik

Mittlere Geschwindigkeit: $\bar{v} = \frac{\Delta v}{\Delta s}$

Mittlere Beschleunigung: $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

Gleichförmige Bewegung: $s = s_0 + v \cdot ta \Rightarrow \frac{s}{v} = t$

Geradlinige Bewegung: $\Delta s = \bar{v} \Delta t$

Gleichmässig beschleunigte Bewegung:

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v = v_0 + at$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0) \Rightarrow \text{wenn } v_0 = 0 \Rightarrow s = \frac{v^2}{2a}$$

$$\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

$$t = \frac{v}{a} = \frac{v_0 - v}{a}$$

2.1 Gleichförmige Kreisbewegung (ω = konst.)

Umlaufzeit:	T	$[T] = s$
Frequenz:	$f = \frac{1}{T}$	$[f] = s^{-1} = \text{Hz}$
Winkelkoordinate:	$\varphi = \frac{b}{r}$	$[\varphi] = \text{rad} = \frac{m}{m}$
Winkelgeschwindigkeit:	$\omega = \Delta\frac{\varphi}{\Delta} t = 2\frac{\pi}{T} = 2\pi f$	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{s}$
Bahngeschwindigkeit:	$v = r\omega$	

Zentripetalbeschleunigung: $a_z = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$

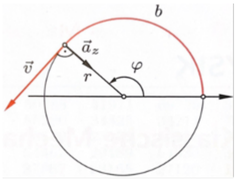
Tangentialgeschwindigkeit: $v_T = \frac{2\pi r}{T}$

Radialbeschleunigung/ Zentripetalbeschleunigung: $a_r = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$

Tangentialbeschleunigung: $a_T = \frac{v_1 - v_0}{t}$

Kreisbewegung Funktion: $r(t) = r\begin{pmatrix}\cos(wt+\varphi_0) \\ \sin(wt+\varphi_0)\end{pmatrix}$

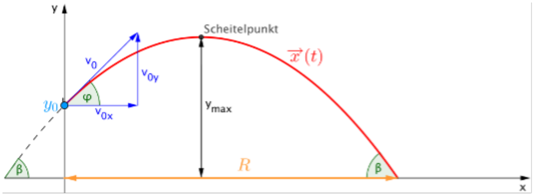
Radialgeschwindigkeit: $v = \frac{\text{Umfang}}{T}$



2.2 Schiefer Wurf

Bewegungsgleichung: $\vec{r}(t) = \vec{r_0} + \vec{v_0} t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$

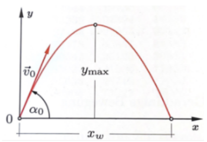
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix} + v_0 \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \cdot t + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t^2$$



$$y = x \cdot \tan(\alpha_0) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha_0)} \cdot x^2$$

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha_0)}{2g}$$

$$x_w = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha_0)}{g}$$



3 Messen und Messfehler

Systematische Fehler: z.B. Messen mit falsch kalibriertem Messgerät.

Berechnet sich der Wert einer Grösse z aus Messwerten der Grössen x und y.

$$z = f(x, y)$$

und wurden die Messgrössen x und y mit einem Fehler von Δx bzw. Δy bestimmt, so ist der Wert von z nur ungenau bestimmt. Für den prognostizierten Wert und den prognostizierten Messfehler gilt

$$z = z_0 \pm \Delta z$$

$$z_0 = f(x_0, y_0)$$

$$\Delta z = \left|\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0)\right| \cdot \Delta x + \left|\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)\right| \cdot \Delta y$$

sofern die Grössen x und y, z.B. auf Grund von fehlerhaften Messinstrumenten, systematisch falsch bestimmt wurden. Die Fehlerabschätzung durch systematische Fehler ist eine «worst-case»-Abschätzung

Statistische Fehler: Bei mehrfach messen unterschiedliche Ergebnisse

⇒ Mehrmals messen und Mittelwert nehmen verkleinert den Fehler Fehlerfortpflanzung für normalverteilte Fehler. Berechnet sich der Wert einer Grösse z aus Messwerten der Grössen x und y gemäss

$$z = f(x, y)$$

und wurden die Messgrössen x und y durch Mehrfachmessung (x n-fach gemessen, y m-fach gemessen) und ohne systematischen Fehler bestimmt, so darf von statistisch normalverteilten Fehlern ausgegangen werden. In diesem Fall errechnet sich die Standardunsicherheit der Messwerte von x und y gemäss

$$\Delta x = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

$$\Delta y = \sqrt{\frac{1}{m(m-1)} \sum_{i=1}^{m} (y_i - \bar{y})^2} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{m}}$$

σ = Standardabweichung

$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=n}^{n} x_i$ = Mittelwert

Es gilt also

$$x = \bar{x} \pm \Delta x$$

$$y = \bar{y} \pm \Delta y$$

Ausserdem ist der prognostizierte Wert und der statistische Fehler von z durch folgende Formeln berechenbar

$$z = z \pm \Delta z$$

$$\bar{z} = f(\bar{x}, \bar{y})$$

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) \cdot \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) \cdot \Delta y\right)^2}$$

Beispiel Systematischer Fehler: Ein Gewicht unbekannter Masse wird auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel α platziert, auf der es reibungsfrei gleiten kann. Die Hangabtriebskraft und der Neigungswinkel α werden experimentell bestimmt. Die Werte sind $\alpha = (30° \pm 2°)$, $F_H = (10 \pm 0.3)N$. Aus Tabelle $g = (9.81 \pm 0.03)$

$$F_H = mg \cdot \sin(\alpha) \Rightarrow m = \frac{F_H}{g \cdot \sin(\alpha)}$$

$$m = \frac{10N}{9.81m/s^2 \cdot \sin(30°)} = 2.0387$$

Partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial m}{\partial g}\left(\frac{F_H}{g \cdot \sin(\alpha)}\right)) = -\frac{F_H}{g^2 \cdot \sin(\alpha)}$$

$$\frac{\partial m}{\partial \alpha}\left(\frac{F_H}{g \cdot \sin(\alpha)}\right)) = -\frac{F_H \cdot \cos(\alpha)}{g \cdot \sin^{2°}(F_H)}$$

$$\Delta m = \left|-\frac{F_H}{g^2 \cdot \sin(\alpha)} \cdot \Delta g\right| + \left|-\frac{F_H \cdot \cos(\alpha)}{g \cdot \sin^2(F_H)} \cdot \Delta\alpha\right|$$

$$+\left|\frac{1}{g \cdot \sin(\alpha)} \cdot \Delta F_H\right| = 0.191\text{kg}$$

$$m = (2.04 \pm 0.19)\text{kg}$$

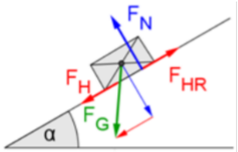
Achtung $\Delta\alpha$ muss in Bogenmass sein!

Gradmass in Bogenmass $x = \frac{\alpha}{180} \cdot \pi$

Bogenmass in Gradmass $\alpha = \frac{x}{\pi} \cdot 180$

4 Kraft

Kraft	$\vec{F}_{\text{res}} = m\vec{a}$
Gewichtskraft	$F_G = mg$
Federkraft	$F_F = Dy$ D = Federkonst. $y = \lvert l - l_0 \rvert$
Hook\`sches Gesetz	$\Delta F = D \cdot \Delta y$
Zentripetalkraft	$F_Z = \frac{mv^2}{r}$
Schiefe Ebene	$F_G = mg$



Normalkraft:
$F_N = mg \cdot \cos(\alpha)$

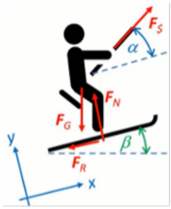
Hangabtriebskraft:
$F_H = mg \cdot \sin(\alpha)$

Haftreibungskraft:
$F_{HR} = \mu \cdot F_N$

4.1 Kraft Statik

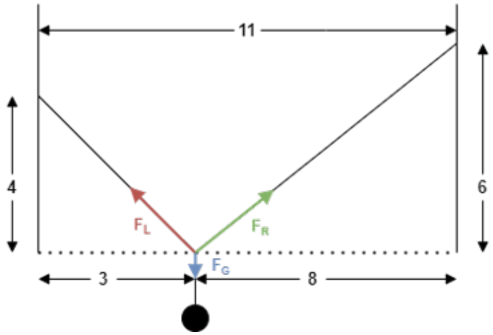
In der Statik bewegen sich die Objekte nicht. Dort gilt also:

$$\sum F = 0, v(t) = 0m/s, a(t) = 0m/s^2$$



$$X)\ F_s \cdot \cos(18°) - \mu \cdot F_N - F_G \cdot \sin(35°) = 0$$

$$Y)\ F_s \cdot \sin(18°) + F_N - F_G \cdot \cos(35°) = 0$$



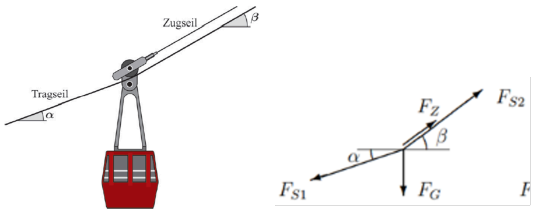
Ein Gewicht der Masse $m = 10$kg wird entsprechend der obigen Skizze durch Seile an einer Wand befestigt. Welche Kräfte wirken im linken und rechten Seil?

1. Methode:

$$\frac{F_L}{\sqrt{3^2+4^2}}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} + \frac{F_R}{\sqrt{8^2+6^2}}\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix} + mg\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = 0$$

2. Methode

$$F_L\begin{pmatrix}-\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{pmatrix} + F_R\begin{pmatrix}\cos(\beta)\\ \sin(\beta)\end{pmatrix} + mg\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = 0$$



Eine 20 kN schwere Luftseilbahnkabine hängt reibungsfrei an einem Tragseil und wirddurch ein Zugseil festgehalten. Wie gross sind die Zugkräfte im Zug- und im Tragseil?
($\alpha = 20°$ = 20◦ und $\beta = 20°$)

$$F_{S1} = F_{S2} = F_T$$

$$F_T\begin{pmatrix}\cos(180° - 20°)\\ \sin(180° - 20°)\end{pmatrix} + F_T\begin{pmatrix}\cos(20°)\\ \sin(20°)\end{pmatrix}$$

$$+F_Z\begin{pmatrix}\cos(20°)\\ \sin(20°)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ -20\text{ kN}\end{pmatrix} = 0$$

$$\implies F_T = 9.97 \cdot 10^4 N, F_Z = 8.48 \cdot 10^3 N$$

5 Energie E

Kinetische Energie $\quad E_k = \frac{1}{2}mv^2$

Potenzielle Energie $\quad E_p = mgh$

Spannenergie einer Feder $\quad E_F = \frac{1}{2}Dy^2$

Energieerhaltungssatz $\quad E_{\text{tot}} = \sum_i E_i = \text{konst.}$

E_{tot}: Gesamtenergie im abgeschlossenen System
E_i: Teilenergie

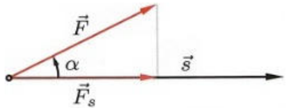
Energieerhaltung potenzielle Energie => Feder:
$mg(h + y) = \frac{1}{2}Dy^2$

6 Arbeit W

Beziehung zwischen Arbeit und Energie:
$\Delta E = W_{AB}$ ΔE: Energieänderung eines offenen Systems
W_{AB}: Arbeit, einer äusseren Kraft an diesem System

$W = F_s s$

$W = F \cdot s \cdot \cos(\alpha) = \vec{F} \cdot \vec{s}$



Arbeit auf der scheifen Ebene mit Reibung:
$W = (\sin(\alpha) + \mu_R \cdot \cos(\alpha)) \cdot F_G \cdot s$

7 Leistung P

mittlere Leistung $\quad \bar{P} = \frac{W_{AB}}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta t}$

momentane Leistung $\quad \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

Wirkungsgrad $\quad \eta = \frac{W_2}{W_1} = \frac{P_2}{P_1}$ $\quad W_1P_1$: aufgenommene Leistung bzw. Arbeit
W_2P_2: nutzbare Leistung bzw. Arbeit

Vortriebskraft $\quad F = \frac{P}{v}$

Reibungskoeffizient $\quad \mu = \frac{P}{F_G v}$

Steigleistung $\quad \frac{dh}{dt} = \frac{P}{F_G + \frac{P}{v}\cot(\alpha)}$

Welche Wassermenge pro Zeiteinheit fördert eine 4-kW-Pumpe in ein 45 m höher liegendes Reservoir?

$$\frac{dV}{dt} = \frac{P}{\varrho g h}$$

Leistung auf der Schiefen Ebene in Abhängigkeit von s und h:

$$W = \left(h + \mu_R\sqrt{s^2 - h^2}\right)mg$$

8 Kosmologie

Umkreisung in geringer Höhe: Gravitationskraft zwischen Satelliten und Erde F_G ist gerade das Gewicht mg des Satelliten, welches es er auch auf der Erde hätte

$$mg = \frac{mv^2}{r}$$

Daraus folgt die Formel für die

Geschwindigkeit	Umlaufzeit
$v = \sqrt{gr}$	$T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$

Geostationär: Geostationär bedeutet, dass der Satellit gleiche Umlaufzeit T wie die Erde hat. (Umlaufzeit Erde $= T = 24 \cdot 3600s = 86400s$)

Gravitation:

Gravitationskraft zweier Massenpunkte $\quad F_G = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$

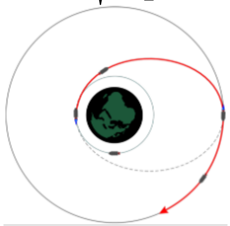
$$\vec{F_G} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

Potenzielle Energie $\quad E_p = -G\frac{m_1 m_2}{r}$

Kreisbahngeschwindigkeit $\quad v = \sqrt{\frac{GM_E}{r_E}}$

Fluchtgeschwindigkeit $\quad v = \sqrt{\frac{2GM_E}{r_E}}$

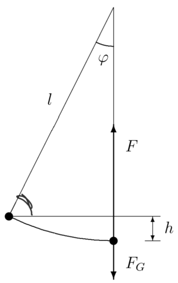
Energie Änderung bei Bahnänderung
$\Delta E = \frac{GM_E m}{r}\frac{r'-r}{r'r}$
$r' = \text{Radius neue Bahn}$



potenzielle Energie eines Objekts im Gravitationsfeld eines anderen:

$$E_p = \frac{GM_E m}{r}$$

9 Fadenpendel



$$\left.\begin{array}{l} F = \text{Fadenkraft} \\ F_G = \text{Gewichtskraft}\end{array}\right\} F_{\text{res}} = F - F_G$$

$$= \left(\frac{mv^2}{l}\right)$$

Die Energie-Erhaltung sagt uns, dass potenzielle Energie gleich kinetische Energie ist. Daraus folgt: $\frac{mv^2}{2} = mgh$

$$= mg(l - l \cdot \cos(\varphi))$$
$$= mgl(1 - \cos(\varphi))$$

Schwingungsdauer:
Feder $\quad T = 2\varphi\sqrt{\frac{m}{D}}$
Mathematisches Pendel $\quad T \approx 2\varphi\sqrt{\frac{l}{g}}$

10 Mehrdimensionale Analysis

Linearisierung:

$$f(x) \underset{x \approx x_0}{\approx} f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Häufig mit Funktionen mehrerer Variablen zu tun, die weitere Funktionen beinhalten.

$$f(x, y) = x^2 \cdot \sin(y)$$
$$x(t) = \sin(t)$$
$$y(t) = t^3$$

Partielle Ableitung:
Nach x und y getrennt ableiten.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x^2 \cdot \sin(y)) = 2x \cdot \sin(y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x^2 \cdot \sin(y)) = x^2 \cdot \cos(y)$$

Totale Ableitung:
$x(t)$ und $y(t)$ in $f(x, y)$ einsetzen und dann ableiten.

$$\frac{df}{dt}(x(t), y(t)) = \frac{d}{dt}\left(\sin(t)^2 \cdot \sin(t^3)\right)$$
$$= 2\sin(t) \cdot \cos(t) \cdot \sin(t^3) + \sin(t)^2 \cdot \cos(t^3) \cdot 3t^2$$

Altenativ mit mehrdimensionale Kettenregel möglich. Bei dieser werden die partiellen Ableitungen mit der Ableitung der Funktion multipliziert und addiert.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

11 Weiteres

11.1 Taschenrechner

- **Menu** → **3** → **1** für solve()
- **Menu** → **3** → **7** → **1** für Gleichungsystem lösen
- **doc** → **7** → **2** für Umstellung von Grad auf Rad
- **Menu** → **4** → **1** für Ableitungen

11.2 Fundamentum Mathematik und Physik Inhalt

- **Trigometrie:** Seite 26
- **Ableitungen:** Seite 60
- **Kinematik:** Seite 81
- **Kräfte:** Seite 83
- **Energie:** Seite 85

11.3 Aufgabenbeispiele

11.3.1 Ballwurf mit Energieerhaltung

Ein Kind will einen Ball über eine 2m von ihm entfernte Mauer werfen. Die dazu minimal erforderliche Wurfhöhe ist 10m. Welches ist der minimal erforderliche Betrag der Geschwindigkeit, mit der der Junge den Ball abwerfen muss?

Lösungsweg:

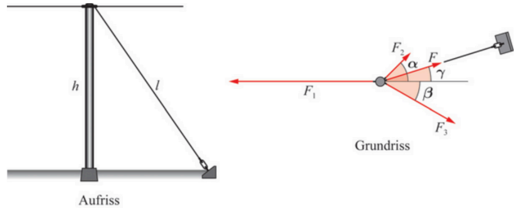
1. In y-Richtung ($y = 10m$)gilt dank Energieerhaltung:
$$\frac{1}{2}mv_y^2 = mgy$$
$$v_y = \sqrt{2gy}$$
2. Die Flugzeit, bis die Geschwindigkeit in y-Richtung 0 ist, ist:
$$v_y = gt \text{ (Da freier Fall)}$$
$$t = \frac{v_y}{g} = \sqrt{2\frac{y}{g}}$$
3. In dieser Zeit muss der Ball die Distanz x ($x = 2m$) zurücklegen:
$$x = v_x t$$
$$v_x = \frac{x}{t} = \sqrt{\frac{gx^2}{2y}}$$

4. Die gesuchte Geschwindigkeit ist:

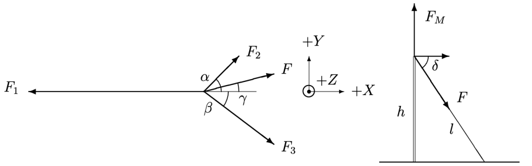
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\frac{gx^2}{2y} + 2gy}$$
$$= \sqrt{\frac{9.81m/s^2 \cdot 2^2m^2}{2 \cdot 10m} + 2 \cdot 9.81m/s^2 * 10m}$$
$$= \sqrt{198m^2/s^2} = 14m/s$$

11.3.2 Komplexe Kräfteaufgabe

An der Spitze eines h = 8 m hohen Mastes üben die befestigten Leitungen die Zugkräfte $F_1 = 4800N, F_2 = 1200N$ und $F_3 = 2700N$ aus. Der Winkel $\alpha = 40°$ und $\beta = 30°$. In welcher Richtung γ muss ein l = 9.6 m langes schräges Drahtseil verankert werden, damit an der Mastspitze keine horizontale Kraft wirksam wird? Wie gross ist die Zugkraft F im Seil?



Aus dem Seitenriss geht hervor, dass die Kraft F in eine horizontale (xy-Ebene) Kompo- nente $F_{xy} = F\cos\delta$ und in eine vertikale (z-Richtung) Komponente $F_z = F\sin\delta$ zerlegt werden kann. Somit:



1. Gleichgewicht in x-Richtung:
$$-F_1 + F_2\cos(\alpha) + F_3\cos(\beta) + F\cos(\delta)\cos(\gamma) = 0$$
2. Gleichgewicht in y-Richtung:
$$F_2\sin(\alpha) - F_3\sin(\beta) + F\cos(\delta)\sin(\gamma) = 0$$
3. Gleichgewicht in z-Richtung:
$$F_M - F\sin(\delta) = 0$$
4. Daraus folgt aus X-Gleichung:
$$F\cos(\delta)\cos(\gamma) = [F_1 - F_2\cos(\alpha) - F_3\cos(\beta)]$$
5. Daraus folgt aus Y-Gleichung:
$$F\cos(\delta)\sin(\gamma) = \{-F_2\sin(\alpha) + F_3\sin(\beta)\}$$
6. Da $F^2\cos^2(\delta)(\sin^2(\gamma) + \cos^2(\gamma)) = F^2\cos^2(\delta)$ können wir die 2 Gleichungen quadrieren und zusammenzählen:
$$F^2\cos^2(\delta) = [\,]^2 + \{\,\}^2$$
7. Da $\sin(\delta) = \frac{h}{l}$ erhalten wir für den Cosinus:
$$\cos^2(\delta) = 1 - \frac{h^2}{l^2}$$
8. Die gesuchte Seilkraft F ist somit:
$$F = \sqrt{\frac{[\,]^2 + \{\,\}^2}{1 - \frac{h^2}{l^2}}} = 3056N$$
9. Winkel γ erhalten wir als Quotient von Y und X-Gleichung:
$$\gamma = \arctan\left(\frac{\{\,\}}{[\,]}\right) = 17.3°$$