

INTRODUCTION AUX TELECOMMUNICATIONS

Introduction à la synchronisation

Impact d'une erreur de phase porteuse et méthode de récupération

Première Année - Département Sciences du Numérique

2022-2023

1 Introduction

Soit la chaîne de transmission présentée dans la figure 1. Elle représente la chaîne passe-bas équivalente associée à une transmission BPSK sur canal AWGN : $x_e(t)$ représente l'enveloppe complexe associée au signal modulé sur porteuse (voie en phase uniquement en BPSK : $x_e(t) = I(t)$), tandis que $I_n(t)$ représente l'enveloppe complexe associée au bruit introduit par le canal de propagation (voie en phase uniquement également).

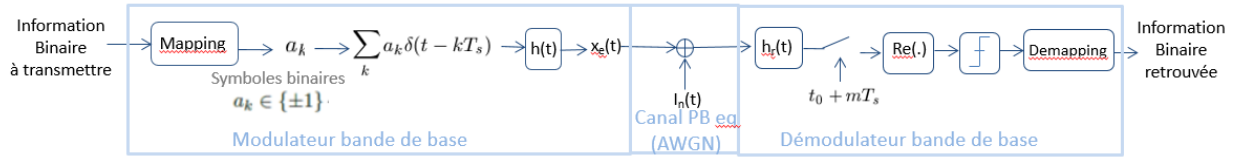


Figure 1: Chaîne de transmission passe-bas équivalente avec une synchronisation idéale de la chaîne sur porteuse correspondante (modulation BPSK).

Cette chaîne passe-bas équivalente suppose que, dans la chaîne de transmission sur porteuse associée (figure 2), le récepteur dispose localement d'une onde porteuse avec exactement la même fréquence et la même phase que celle utilisée à l'émission (démodulation cohérente). On suppose également ici que l'horloge du récepteur dispose localement d'une horloge avec la même phase et la même fréquence que celle de l'émetteur, lui permettant d'échantillonner aux instants optimaux. En résumé on suppose une synchronisation idéale, à la fois "en fréquence" (sur la porteuse) et "en temps" (sur l'horloge).

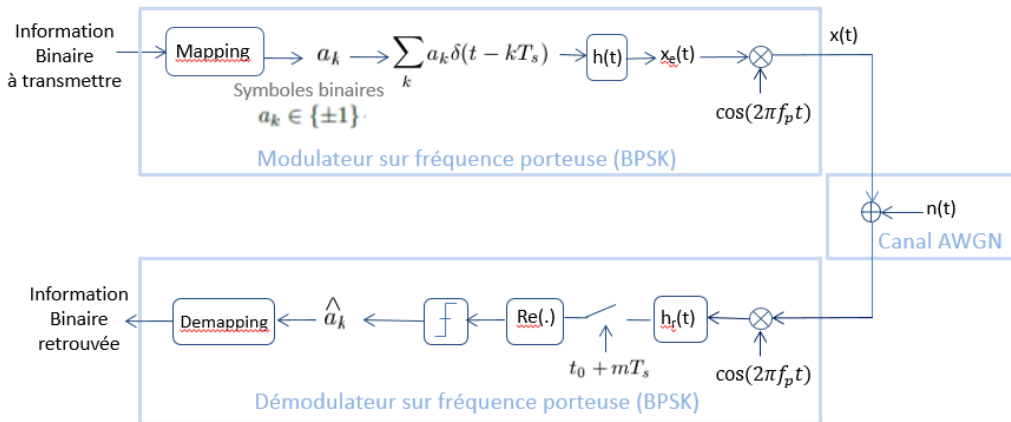


Figure 2: Chaîne de transmission BPSK avec synchronisation idéale.

En pratique, des méthodes de synchronisation doivent être mise en oeuvre pour assurer une démodulation cohérente et une synchronisation temporelle. L'objectif de ce projet n'est pas de développer complètement la

mise en place de la synchronisation au niveau du récepteur (cela fait l'objet d'un cours de deuxième année), mais d'en introduire quelques concepts. Après avoir étudié l'impact d'une erreur de synchronisation sur la phase porteuse, nous allons vous proposer d'implanter une méthode de synchronisation basée sur le calcul de l'estimée de l'erreur pour correction.

2 Impact d'une erreur de phase porteuse

La figure 3 présente la chaîne passe-bas équivalente associée à une transmission sur porteuse de type BPSK lorsqu'il existe une erreur de phase porteuse φ . On va supposer que sont placés en émission et en réception deux filtres de même réponse impulsionnelle : fonction porte de largeur T_s et de hauteur égale à 1. L'enveloppe complexe associée au bruit introduit par le canal de transmission, $n_e(t)$, est ici réelle avec une densité spectrale de puissance égale à N_0 quelle que soit la fréquence.

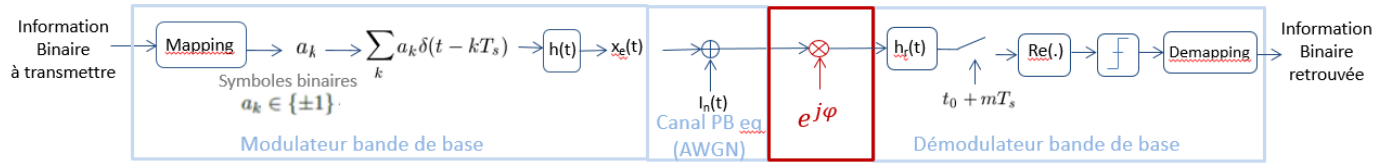


Figure 3: Chaîne de transmission passe-bas équivalente avec une erreur de phase porteuse φ .

2.1 Étude théorique

Vous utiliserez, pour réaliser cette étude, la chaîne passe-bas équivalente de la figure 3.

1. Quelle est la condition qui permet de respecter le critère de Nyquist sur cette chaîne de transmission ? On supposera par la suite que cette condition est respectée.
2. Donnez l'expression du signal en sortie de l'échantillonneur pour une erreur de phase porteuse φ donnée. On notera $I_w(t)$ le bruit en sortie du filtre de réception.
3. En supposant que l'on utilise un détecteur optimal pour prendre les décisions, calculez le TEB de la liaison, conditionnellement à une erreur de phase porteuse φ , en fonction de φ , T_s et $\sigma_{I_w}^2$, $\sigma_{I_r}^2$ représentant la puissance du bruit en sortie du filtre de réception $h_r(t)$.
4. Calculez la puissance du bruit en sortie du filtre de réception $\sigma_{I_w}^2$ en fonction de N_0 et de T_s .
5. Calculez l'énergie des symboles à l'entrée du récepteur, E_s , en fonction de T_s .
6. Déduisez des questions précédentes l'expression du taux d'erreur binaire de la liaison, conditionnellement à une erreur de phase porteuse φ , en fonction de E_b/N_0 , rapport signal sur bruit par bit à l'entrée du récepteur, pour la chaîne étudiée.

2.2 Implantation sous Matlab

1. Paramètres : la chaîne de transmission sera implantée avec une fréquence d'échantillonnage $F_e = 24000$ Hz, pour transmettre un débit binaire $R_b = 6000$ bits par seconde.
2. Implantez la chaîne de transmission sans erreur de phase et sans bruit, tracez la constellation en sortie de l'échantillonneur et vérifiez que le TEB de la liaison est bien nul.
3. Implantez la chaîne de transmission avec erreur de phase et sans bruit, tracez la constellation en sortie de l'échantillonneur et déterminez le TEB de la liaison pour des erreurs de phase de 40° , 100° et 180° . Expliquez les résultats obtenus : constellations observée, TEB mesurés. On expliquera notamment, à partir des constellations attendues et observées, la mesure attendue et obtenue pour le TEB.
4. Implantez la chaîne de transmission complète avec erreur de phase et ajout de bruit. Vous prendrez des valeurs du rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur (E_b/N_0) en décibels allant de 0 à 6 dB

- (a) Comparez, en les traçant sur une même figure, le TEB simulé au TEB théorique de la chaîne étudiée, en fonction de E_b/N_0 en décibels, pour une erreur de phase porteuse de $\varphi = 40^\circ$. Ce tracé doit permettre de valider le bon fonctionnement de votre chaîne de transmission.
- (b) Comparez, en les traçant sur une même figure, le TEB de la chaîne de transmission implantée pour une erreur de phase porteuse donnée de $\varphi = 40^\circ$, et le TEB obtenu pour la même chaîne de transmission sans erreur de phase ($\varphi = 0$).
- (c) Tracez le taux d'erreur binaire en fonction de E_b/N_0 en décibels, pour les deux valeurs de l'erreur de phase φ utilisées précédemment : 40° et 100° .
- (d) Commentez les résultats obtenus.

3 Estimation et correction de l'erreur de phase porteuse

3.1 Étude théorique

Considérons la chaîne de transmission de la figure 3 avec erreur de phase porteuse φ . Les échantillons reçus, après échantillonnage aux instants optimaux $t_0 + mT_s$, peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$z_m = a_m g(t_0) e^{j\varphi} + w_m$$

où w_m représente l'échantillon de bruit filtré à l'instant $t_0 + mT_s$, a_m le m^{ieme} symbole issu du mapping et $g(t)$ la réponse impulsionnelle globale de la chaîne de transmission : $g(t) = h(t) * h_r(t)$ ici.

Soient \tilde{a}_m et $\tilde{\varphi}$ des valeurs test pour a_m et φ , il est possible d'écrire la vraisemblance en fonction de \tilde{a}_m et $\tilde{\varphi}$ pour un vecteur d'observation $\mathbf{z} = [z_0, \dots, z_N]$ de la manière suivante :

$$L(\tilde{a}_m, \tilde{\varphi}) = P[\mathbf{z} | \tilde{a}_m, \tilde{\varphi}] = \prod_{m=0}^N P[z_m | \tilde{a}_m, \tilde{\varphi}] = \prod_{m=0}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_w} \exp\left(-\frac{|z_m - \tilde{a}_m g(t_0) e^{j\tilde{\varphi}}|^2}{\sigma_w^2}\right)$$

si l'on suppose les échantillons z_m indépendants.

Nous allons, à partir de là, supprimer la dépendance vis à vis des données en adoptant une stratégie Non Data Aided :

$$L(\tilde{\varphi}) = E_{\tilde{a}_m} [L(\tilde{a}_m, \tilde{\varphi})]$$

pour obtenir l'estimée de l'erreur de phase porteuse recherchée :

$$\hat{\varphi} = \underset{\tilde{\varphi}}{\operatorname{argmax}} L(\tilde{\varphi}) \quad (1)$$

Remarquons tout d'abord que le seul terme qui dépend de $\tilde{\varphi}$ dans $|z_m - \tilde{a}_m g(t_0) e^{j\tilde{\varphi}}|^2$ est le terme $-\tilde{a}_m g(t_0) \operatorname{Re}[z_m e^{-j\tilde{\varphi}}]$. On peut donc définir une fonction de vraisemblance équivalente :

$$L(\tilde{a}_m, \tilde{\varphi}) \propto \prod_{m=0}^N \exp\left(\frac{2}{\sigma_w^2} \tilde{a}_m g(t_0) \operatorname{Re}[z_m e^{-j\tilde{\varphi}}]\right) \propto \exp\left(\sum_{m=0}^N \tilde{a}_m \operatorname{Re}[z_m e^{-j\tilde{\varphi}}]\right)$$

On obtient alors, en considérant que les symboles \tilde{a}_m sont indépendants et équiprobables :

$$L(\tilde{\varphi}) = E_{\tilde{a}_m} [L(\tilde{a}_m, \tilde{\varphi})] = \prod_m E_{\tilde{a}_m} [\exp(\tilde{a}_m \operatorname{Re}[z_m e^{-j\tilde{\varphi}}])] \propto \prod_m \operatorname{ch}(\operatorname{Re}[z_m e^{-j\tilde{\varphi}}])$$

Ce qui donne la log-vraisemblance suivante :

$$\Lambda(\tilde{\varphi}) \propto \sum_m \ln(\operatorname{ch}(\operatorname{Re}[z_m e^{-j\tilde{\varphi}}])) \quad (2)$$

que nous devons dériver et annuler afin d'obtenir l'estimée de l'erreur de phase porteuse $\hat{\varphi}$:

$$\hat{\varphi} = \underset{\tilde{\varphi}}{\operatorname{argmax}} \Lambda(\tilde{\varphi}) \quad (3)$$

En utilisant le développement en série de $\ln(ch(x))$, nous pouvons, dans un premier temps, réécrire la log-vraisemblance de la manière suivante :

$$\Lambda(\tilde{\varphi}) \propto \sum_m Re^2 \left[z_m e^{-j\tilde{\varphi}} \right]$$

D'où :

$$\frac{\partial \Lambda(\tilde{\varphi})}{\partial \tilde{\varphi}} \propto \sum_m Im \left[z_m^2 e^{-2j\tilde{\varphi}} \right]$$

L'estimée de l'erreur de phase porteuse $\hat{\varphi}$ est donc la phase $\hat{\varphi}$ qui vérifie :

$$\sum_m Im \left[z_m^2 e^{-2j\hat{\varphi}} \right] = 0$$

D'où

$$\hat{\varphi} = \frac{1}{2} \text{atan} \left\{ \frac{\sum_m Im[z_m^2]}{\sum_m Re[z_m^2]} \right\} \quad (4)$$

L'arctangente étant définie à π près, l'erreur de phase estimée en utilisant l'expression (4) va être estimée à $\frac{\pi}{2}$ près. On dit que la phase est estimée avec une ambiguïté de $k\frac{\pi}{2}$. Afin de réduire cette ambiguïté, on montre qu'il est possible d'estimer l'erreur de phase en utilisant l'argument (estimateur de Viterbi et Viterbi^[1]) :

$$\hat{\varphi} = \frac{1}{2} \arg \left\{ \sum_m z_m^2 \right\} \quad (5)$$

L'argument étant défini à 2π près, la phase sera alors estimée avec une ambiguïté de $k\pi$. Une fois l'erreur de phase estimée, le signal reçu pourra être corrigé.

3.2 Implantation sous Matlab

Implantez la chaîne de transmission avec estimation de l'erreur de phase et correction, en gardant $F_e = 24000$ Hz et $R_b = 6000$ bits par seconde.

1. Expliquez les résultats obtenus pour les estimées de l'erreur de phase φ , quand $\varphi = 40^\circ$ et quand $\varphi = 100^\circ$.
2. Tracez le TEB obtenu avec correction de l'erreur de phase et comparez le à celui obtenu avec erreur de phase non corrigée et à celui obtenu sans erreur de phase pour les deux erreurs de phase : $\varphi = 40^\circ$ et $\varphi = 100^\circ$. Expliquez les résultats observés.

4 Utilisation d'un codage par transition

Nous allons vous demander, dans cette partie d'implanter un codage par transition des symboles émis et d'analyser l'impact sur la chaîne de transmission. La figure 4 présente la réalisation du codage par transition (au niveau de l'émetteur), tandis que la figure 5 présente la réalisation du décodage par transition (au niveau du récepteur).

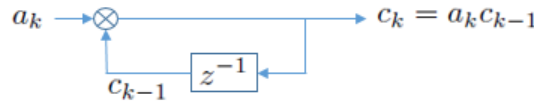


Figure 4: Codage par transition

4.1 Étude théorique

1. Montrez que l'utilisation du codage par transition permet de s'affranchir de l'ambiguïté de π sur l'estimée de l'erreur de phase porteuse.
2. Montrez que le TEB sur les symboles codés (par codage par transition) est le double du TEB obtenu sur les symboles non codés.

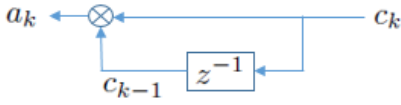


Figure 5: Décodage par transition

4.2 Implantation sur Matlab

Introduisez le codage par transition dans votre chaine précédente et, pour les deux erreurs de phase $\varphi = 40^\circ$ et $\varphi = 100^\circ$, tracez le TEB obtenu et comparez le avec :

1. celui obtenu sans correction de l'erreur de phase.
2. celui obtenu avec correction de l'erreur de phase mais sans utilisation du codage par transition.

Commentez vos résultats, en vous appuyant sur la partie théorique.

[1] Viterbi, A. J.; Viterbi, A. M. Nonlinear estimation of PSK-modulated carrier phase with application to burst digital transmission, IEEE Trans. Inf. Theory 1983, 29(4), 543-551.