

# Télécommunications - TPs

## Étude de chaines de transmissions en bande de base

Première année - Département Sciences du numérique

2022-2023

### 1 Introduction

L'objectif de ce travail est de vous initier à l'étude d'une chaine de transmission en bande de base, afin que vous soyez capables (via l'étude de quelques cas) :

- D'en évaluer l'efficacité spectrale et l'efficacité en puissance.
- D'identifier les solutions possibles pour l'optimiser en termes d'efficacité spectrale et d'efficacité en puissance.
- De comparer des chaines de transmission en termes d'efficacité spectrale et d'efficacité en puissance.

### 2 Étude de modulateurs bande de base

Ce premier travail est dédié à l'étude des modulateurs bande de base et, en particulier, à l'identification des éléments ayant un impact sur l'efficacité spectrale obtenue pour la transmission.

Pour cela vous allez devoir implanter plusieurs modulateurs bande de base, en utilisant une fréquence d'échantillonnage  $F_e = 24000$  Hz pour transmettre un même débit binaire  $R_b = \frac{1}{T_b} = 3000$  bits par seconde. Le facteur de suréchantillonnage  $N_s$  sera à déterminer, dans chaque cas, pour respecter ces paramètres. On rappelle qu'en numérique la durée symbole  $T_s$  est constituée de  $N_s$  points distants de  $T_e$ ,  $T_e$  représentant la période d'échantillonnage.

**Les modulateurs à implanter, étudier et comparer, en termes d'efficacité spectrale, sont les suivants :**

- Modulateur 1:
  - Mapping : symboles binaires à moyenne nulle.
  - Filtre de mise en forme rectangulaire de hauteur 1 et de durée égale à la durée symbole.
- Modulateur 2:
  - Mapping : symboles 4-aires à moyenne nulle.
  - Filtre de mise en forme : rectangulaire de hauteur 1 et de durée égale à la durée symbole.
- Modulateur 3:
  - Mapping : symboles binaires à moyenne nulle.
  - Filtre de mise en forme : racine de cosinus surélevé. Vous pouvez utiliser la fonction `rcosdesign.m` de Matlab afin de générer la réponse impulsionnelle de ce filtre. Ce filtre a une bande fréquentielle finie, il a donc une réponse impulsionnelle infinie qui devra être tronquée afin de réaliser un filtre de type RIF. En utilisant  $h = \text{rcosdesign}(\alpha, L, N_s)$ ; vous pouvez réaliser un filtre en racine de cosinus surélevé avec une réponse impulsionnelle de longueur  $N = L \times N_s + 1$  échantillons (ou coefficients) et de roll off  $\alpha$  (paramètre compris entre 0 (filtre passe-bas idéal) et 1).

**Pour chaque modulateur implanté, votre rapport devra comporter les tracés suivants :**

- Tracé du signal généré avec une échelle temporelle correcte en secondes.
- Tracé de la densité spectrale de puissance (DSP) du signal généré avec une échelle fréquentielle correcte en Hz.
- Tracés superposés sur une même figure de la DSP estimée du signal généré et de sa DSP théorique. La DSP théorique du signal généré par le modulateur 3 vous est donnée ci-dessous, sachant que celles des modulateurs 1 et 2 peuvent se calculer avec ce que vous avez vu en cours/TD et que leurs expressions devront être données dans votre rapport.

DSP théorique du signal généré par le modulateur 3 :

$$S_x(f) = \frac{\sigma_a^2}{T_s} \begin{cases} T_s \text{ if } |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T_s} \\ \frac{T_s}{2} \left( 1 + \cos \left( \frac{\pi T_s}{\alpha} \left( |f| - \frac{1-\alpha}{2T_s} \right) \right) \right) \text{ for } \frac{1-\alpha}{2T_s} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T_s} \\ 0 \text{ elsewhere} \end{cases} \quad (1)$$

où  $\sigma_a^2$  représente la variance des symboles émis,  $\alpha$  le roll off et  $T_s$  la durée symbole.

**Votre rapport devra également inclure une comparaison des modulateurs implantés en termes d'efficacité spectrale, en s'appuyant, par exemple, sur un tracé superposé des DSP des différents signaux générés pour un même débit binaire (fonction *hold.m* pour superposer des tracés sur une même figure).**

**Enfin, vous devrez en déduire l'identification des éléments, des paramètres permettant, quand on implante un modulateur numérique en bande de base, d'augmenter l'efficacité spectrale de la transmission.**

### 3 Étude des interférences entre symbole et du critère de Nyquist

Vous allez devoir implanter ici une chaîne de transmission en bande de base sans bruit et l'analyser en vous focalisant sur les interférences entre symboles : leur impact sur la transmission et l'influence du respect ou du non respect du critère de Nyquist.

La chaîne de transmission à implanter devra l'être avec une fréquence d'échantillonnage  $F_e = 24000$  Hz pour transmettre un débit binaire  $R_b = \frac{1}{T_b} = 3000$  bits par seconde. On considérera un mapping binaire à moyenne nulle. Le facteur de suréchantillonnage  $N_s$  sera à déterminer pour respecter les paramètres donnés. Le filtre de mise en forme et le filtre de réception auront les mêmes réponses impulsionnelles rectangulaires de durées égales à la durée symbole et de hauteur 1.

#### 3.1 Étude sans canal de propagation

Dans un premier temps, la chaîne de transmission devra être étudiée sans canal de propagation, c'est-à-dire sans bruit mais également sans filtrage introduit par le canal (réponse impulsionnelle du canal  $h_c(t) = \delta(t)$ ). Ce qui revient à étudier uniquement le bloc modulateur/démodulateur.

1. **Réaliser l'implantation optimale du bloc modulateur/démodulateur proposé. Elle doit vous conduire à obtenir un taux d'erreur binaire nul.**

**A partir de cette implantation optimale, votre rapport devra comporter les éléments de son étude suivants :**

- Le tracé du signal en sortie du filtre de réception et l'explication du tracé obtenu en vous appuyant sur l'étude théorique de ce bloc modulateur/démodulateur.
- Le tracé de la réponse impulsionnelle globale de la chaîne de transmission,  $g$ , et l'explication du tracé obtenu en vous appuyant sur le calcul théorique de  $g$ .
- L'explication de la détermination, à partir du tracé de  $g$ , des instants d'échantillonnage optimaux  $n_0 + mN_s$ , si  $N_s$  représente le facteur de suréchantillonnage de la chaîne implantée.
- Le tracé du diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception. Vous pouvez utiliser pour cela l'instruction `plot(reshape(z, N_s, length(z)/N_s))`, si  $z$  représente le signal en sortie du filtre de réception et que vous souhaitez tracer ce diagramme de l'oeil sur une durée correspondant à  $N_s$  échantillons.

- L'explication de la détermination, à partir du diagramme de l'oeil, des instants d'échantillonnage optimaux  $n_0 + mN_s$ .
  - L'explication de la décision implantée pour retrouver les symboles émis à partir du signal échantillonné.
2. **Modifiez les instants d'échantillonnage dans votre implantation précédente pour échantillonner à  $n_0 + mN_s$ , avec  $n_0 = 3$  (tous les autres éléments restant identiques par ailleurs). Estimez le taux d'erreur binaire de la transmission et expliquez le résultat obtenu.**

### 3.2 Étude avec canal de propagation sans bruit

Vous allez maintenant considérer un canal de propagation à bande limitée  $BW$  mais qui n'introduit pas de bruit. Pour cela, vous devez reprendre votre schéma modulateur/démodulateur optimal implanté précédemment, en y ajoutant un filtre passe-bas représentant le canal de propagation.

**Pour deux valeurs de  $BW$ ,  $BW = 8000$  Hz et  $BW = 1000$  Hz, votre rapport devra comporter les tracés suivants :**

- Tracé de la réponse impulsionnelle globale de la chaîne de transmission.
- Tracé du diagramme de l'oeil à la sortie du filtre de réception.
- Tracé, sur une même figure, de  $|H(f)H_r(f)|$  et de  $|H_c(f)|$ , où  $H(f)$  est la réponse en fréquence du filtre de mise en forme,  $H_r(f)$  la réponse en fréquence du filtre de réception et  $H_c(f)$  la réponse en fréquence du filtre canal.

**ainsi que l'explication du TEB obtenu, dans chaque cas, en vous appuyant sur chacun des tracés proposés.**

## 4 Étude de l'impact du bruit et du filtrage adapté, notion d'efficacité en puissance

Cette dernière partie va être dédiée à l'étude du bruit dans la chaîne de transmission numérique : impact du bruit introduit par le canal sur la transmission, influence du filtrage adapté, calcul et estimation du taux d'erreur binaire (TEB) pour comparer les chaînes de transmission en termes d'efficacité en puissance.

**Pour cela, nous allons vous demander d'implanter, sous Matlab, avec une fréquence d'échantillonnage  $F_e = 24$  kHz, trois chaînes de transmission permettant de transmettre un débit binaire  $R_b = 3000$  bits par seconde. Elles seront constituées des éléments suivants :**

- Mapping :
  - Chaîne 1 : symboles binaires à moyenne nulle.
  - Chaîne 2 : symboles binaires à moyenne nulle.
  - Chaîne 3 : symboles 4-aires à moyenne nulle.
- Facteur de suréchantillonnage  $N_s$  à déterminer pour respecter les paramètres donnés auparavant.
- Filtre de mise en forme rectangulaire de durée égale à la durée symbole et de hauteur 1.
- Canal de propagation à bruit additif et gaussien. Le bruit sera ajouté en utilisant :

$$\text{bruit} = \sigma_n * \text{randn}(1, \text{length}(x));$$

où  $x$  représente le signal à bruite et  $\sigma_n^2$  la puissance du bruit, donnée en fonction du rapport signal à bruit par bit souhaité à l'entrée du récepteur,  $\frac{E_b}{N_0}$ , par (voir démonstration en annexe) :

$$\sigma_n^2 = \frac{P_x N_s}{2 \log_2(M) \frac{E_b}{N_0}},$$

où  $N_s$  représente le facteur de suréchantillonnage,  $M$  l'ordre de la modulation et  $P_x$  la puissance du signal à bruite (signal en sortie du modulateur bande de base).  $P_x$  peut être obtenue sous matlab de la manière suivante :  $P_x = \text{mean}(\text{abs}(x).^2)$ .

- Filtre de réception :
  - Chaîne 1 : rectangulaire de durée égale à la durée symbole et de hauteur 1.
  - Chaîne 2 : rectangulaire de durée égale à la moitié de la durée symbole et de hauteur 1.
  - Chaîne 3 : rectangulaire de durée égale à la durée symbole et de hauteur 1.
- Echantillonnage aux instants optimaux.
- Décisions sur les symboles par détecteur à seuil avec seuil(s) optimal(aux).
- Demapping adapté au mapping utilisé.

## 4.1 Etude de chaque chaîne de transmission

Pour chaque chaîne de transmission étudiée :

1. **Sans bruit** : Vous commencerez par identifier, sans bruit, les instants optimaux d'échantillonnage et le ou les seuil(s) optimal(aux) de décision en vous aidant d'un diagramme de l'oeil tracé en sortie du filtre de réception sur une (ou deux) période(s) symbole. Vous vérifierez alors que le TEB obtenu est bien nul. **Le tracé du diagramme de l'oeil devra figurer dans votre rapport et vos choix d'implantation pour l'échantillonneur et le détecteur à seuil devront être expliqués.**
2. **Avec bruit** : Vous introduirez ensuite le bruit et, à partir de la chaîne de transmission bruitée, votre rapport devra comporter les éléments de son étude suivants :
  - (a) Un tracé du diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception pour différentes valeurs de  $E_b/N_0$  afin d'identifier l'impact du bruit.
  - (b) Le tracé, sur une même figure, du taux d'erreur binaire obtenu par simulation et du taux d'erreur binaire théorique de la chaîne étudiée. Tous deux devront être tracés en échelle log, en fonction de  $E_b/N_0$  pour des valeurs allant de 0 à 8 dB. Ce tracé doit permettre de valider le bon fonctionnement de votre chaîne de transmission. Le TEB théorique considéré devra être donné dans votre rapport. Attention à la précision de vos mesures pour les TEBs simulés (voir en annexe).

## 4.2 Comparaison des chaînes de transmission implantées

Votre rapport devra comporter les éléments suivants :

1. Un tracé sur la même figure des TEBs obtenu par simulation pour les chaînes de transmission 1 et 2.
2. Une comparaison des chaînes de transmission 1 et 2 en termes d'efficacité en puissance. Les similitudes ou différences obtenues devront être expliquées et les éléments ayant un impact sur l'efficacité en puissance identifiés.
3. Un tracé sur la même figure des TEBs obtenu par simulation pour les chaînes de transmission 1 et 3.
4. Une comparaison des chaînes de transmission 1 et 3 en termes d'efficacité en puissance. Les similitudes ou différences obtenues devront être expliquées et les éléments ayant un impact sur l'efficacité en puissance identifiés.

# 5 Annexes

## 5.1 Puissance de bruit à introduire dans les chaînes de transmission

On introduit un bruit de densité spectrale de puissance  $N_0/2$  dans la bande  $F_e$ . La variance du bruit à introduire est donc donnée par :

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} F_e = \frac{E_s}{2 \frac{E_s}{N_0}} F_e = \frac{P_x T_s}{2 \frac{E_s}{N_0}} F_e = \frac{P_x N_s}{2 \log_2(M) \frac{E_b}{N_0}}$$

où

- $E_s$  représente l'énergie par symbole à l'entrée du récepteur :  $E_s = \log_2(M)E_b$ , si  $E_b$  représente l'énergie binaire à l'entrée du récepteur et  $M$  l'ordre de la modulation,
- $T_s$  représente la durée symbole,
- $N_s$  représente le facteur de suréchantillonnage :  $T_s = N_s T_e$ ,  $T_e = 1/F_e$  étant la période d'échantillonnage
- $P_x$  représente la puissance du signal à bruite (signal en sortie du modulateur bande de base).

## 5.2 Précision sur les mesures de TEB

Le TEB peut être modélisé par une somme de variables aléatoires  $X_k$  prenant leurs valeurs dans l'ensemble  $\{0, 1\}$  avec les probabilités  $P[X_k = 0] = 1 - p$  (pas d'erreur) et  $P[X_k = 1] = p$  (erreur) :

$$TEB = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k.$$

L'erreur quadratique relative sur le TEB est donnée par :

$$\epsilon^2 = \frac{\sigma_{TEB}^2}{m_{TEB}^2},$$

où  $m_{TEB}$  et  $\sigma_{TEB}^2$  représentent, respectivement, la moyenne et la variance sur l'estimation du TEB. La précision sur les mesures de TEB sera donnée par  $\epsilon$ . On peut écrire :

$$m_{TEB} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E[X_k] = \frac{1}{N} N (1 \times p + 0 \times (1 - p)) = p$$

et

$$\sigma_{TEB}^2 = E \left[ \left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k \right)^2 \right] - p^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N E[X_k X_i] - p^2$$

- si  $k = i$  ( $N$  cas) alors  $E[X_k^2] = 1^2 \times p + 0^2 \times (1 - p) = p$
- si  $k \neq i$  ( $N^2 - N$  cas) alors  $E[X_k X_i] = E[X_k] E[X_i] = p^2$

D'où :

$$\sigma_{TEB}^2 = \frac{1}{N^2} \{ Np + (N^2 - N) p^2 \} - p^2 = \frac{p(1-p)}{N}$$

On constate que la variance de l'erreur tend vers 0 quand  $N$  augmente et on peut écrire l'erreur quadratique relative sur le TEB de la manière suivante :

$$\epsilon^2 = \frac{\sigma_{TEB}^2}{m_{TEB}^2} = \frac{1-p}{Np} \simeq \frac{1}{Np} \text{ pour } p \ll 1$$

On obtient alors :

- le nombre d'élément binaire à générer,  $N$ , de manière à obtenir une précision  $\epsilon$  fixée sur la mesure d'un TEB dont la valeur est, a priori, connue. Par exemple, si on veut mesurer un TEB de  $10^{-2}$  avec une précision de 10%, il faudra générer  $N = \frac{1}{10^{-2} \times (10^{-1})^2} = 10^4$  bits.
- le nombre de simulations à réaliser si la valeur à mesurer pour le TEB n'est pas, a priori, connue. On fera alors des simulations jusqu'à observer  $1/\epsilon^2$  erreurs pour obtenir une mesure avec une précision  $\epsilon$  fixée. Par exemple, si on veut mesurer le TEB avec une précision  $\epsilon = 10\%$ , il faudra compter les erreurs jusqu'à en obtenir  $1/\epsilon^2 = 10^2$  avant de considérer la mesure de TEB obtenue comme disposant de la précision requise.