Asymptotische Analyse von Erzeugenden-Funktonen

mit dem Anwendungsbeispiel regulärer Sprachen

Daniel Busch

4. Juli 2016

Inhalt

- Grundlagen zur Berechnung der Asymptotik von EFs

Inhalt

- Grundlagen zur Berechnung der Asymptotik von EFs
- Asymptotik von rationalen EFs

Inhalt

- Grundlagen zur Berechnung der Asymptotik von EFs
- Asymptotik von rationalen EFs
- Asymptotik von meromorphen EFs

Inhalt

Inhalt

- Grundlagen zur Berechnung der Asymptotik von EFs
- Asymptotik von rationalen EFs
- Asymptotik von meromorphen EFs
- Rationale EFs und reguläre Sprachen
- Ein paar Beispiele

Asymptotik rationaler EFs

Satz 1: Asymptotik rationaler EFs bei einer eindeutigen Polstelle kleinsten Modulus (Theorem 4.1, [SF96])

Sei $f = \frac{P}{Q}$ eine rationale Funktion mit $P, Q \in \mathbb{C}[z]$ teilerfremd. Sei weiter $z_0 = \frac{1}{\beta}$ die eindeutige Polstelle, sodass $|\beta| > |\alpha|$ für alle Polstellen $\frac{1}{\alpha} \neq \frac{1}{\beta}$. Dann gilt

$$[z^n]f \sim C\beta^n n^{\nu-1} \quad \text{mit} \quad C = \nu \frac{(-\beta)^\nu P(\frac{1}{\beta})}{\frac{d^\nu}{dz^\nu} Q(\frac{1}{\beta})}.$$

Asymptotik rationaler EFs

Beweis: Wir benötigen zunächst die Partialbruchzerlegung der Funktion f.

Partialbruchzerlegung

Sei $f = \frac{P}{Q}$ eine rationale Funktion mit $P, Q \in \mathbb{C}[z]$ und $0 \leq \text{grad}(P) < \text{grad}(Q) = k$. Q habe die Produktdarstellung

$$Q = c(z - \frac{1}{\alpha_1})^{\nu_1} \cdots (z - \frac{1}{\alpha_k})^{\nu_k}.$$

Dann besitzt f eine Darstellung der Form

$$\frac{P}{Q} = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{\nu_i} \frac{a_{ij}}{(z - \frac{1}{\alpha_i})^j}.$$

Asymptotik rationaler EFs

Offensichtlich gehören alle Terme der Summe zu einem der Polstellen der Funktion f und können in die Form $a'_{ij}(1-\alpha_i z)^{-j}$ gebracht werden:

$$\frac{a_{ij}}{(z-\frac{1}{\alpha_i})^j} = \frac{(-1)^j a_{ij}}{(\frac{1}{\alpha_i}-z)^j} = \frac{(-1)^j \frac{1}{\alpha_i^j} a_{ij}}{(1-\alpha_i z)^j} = \frac{a'_{ij}}{(1-\alpha_i z)^j}$$

Da es nach Annahme eine eindeutige Polstelle $\frac{1}{\beta}$ kleinsten Modulus gibt ist klar:

$$|\alpha_i| < |\beta| \quad \forall \alpha_i$$

Im Folgenden wird gezeigt, dass alle Terme bis auf den Term $c_0(1-\beta z)^{-\nu_\beta}$ asymptotisch vernachlässigbar sind.

Wir betrachten zunächst den n-ten Kooeffizienten einer der Terme (der konstante Faktor kann ignoriert werden):

$$\begin{aligned}
[z^n]\frac{1}{(1-\alpha z)^{\nu_\alpha}} &= \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\frac{1}{(1-\alpha z)^{\nu_\alpha}}\bigg|_{z=0} \\
&= \frac{1}{n!}\left((-\nu_\alpha)(-\nu_\alpha-1)\cdots(-\nu_\alpha-(n-1)\right)(-\alpha)^n \\
&= \frac{(\nu_\alpha+n-1)!}{(\nu_\alpha-1)!n!}\alpha^n \\
&= \binom{\nu_\alpha+n-1}{\nu_\alpha-1}\alpha^n
\end{aligned}$$

Asymptotik rationaler EFs

Für den Binomialkoeffizienten gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \leq \frac{n^k}{k!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = 1 \implies \binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$$

Damit lassen sich die Koeffizienten mit

$$[z^n]\frac{1}{(1-\alpha z)^{\nu_\alpha}} \sim \frac{(\nu_\alpha + n - 1)^{\nu_\alpha - 1}}{(\nu_\alpha - 1)!}\alpha^n \sim \frac{n^{\nu_\alpha - 1}}{(\nu_\alpha - 1)!}\alpha^n$$

asymptotisch abschätzen.

Asymptotik rationaler EFs

Für $|\alpha| < |\beta|$ gilt nun aber

$$n^k \alpha^n \in o(\beta^n),$$

denn es ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k \alpha^n}{\beta^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n} = 0.$$

Für die Asymptotik von f gilt dann:

$$[z^n]f \sim [z^n] \frac{c_0}{(1-\beta z)^{\nu_\beta}}$$

Asymptotik rationaler EFs

Um die Konstante c_0 zu bestimmen, kann man einfach das Verhalten der Funktion in der Nähe der Polstelle $1/\beta$ betrachten:

$$c_0 = \lim_{z \to 1/\beta} (1 - \beta z)^{\nu_\beta} f(z) = \lim_{z \to 1/\beta} (1 - \beta z)^{\nu_\beta} \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Da P und Q teilerfremd sind, folgt mit der ν_β-fachen Anwendung der Regel von L'Hospital:

$$c_0 = P(1/\beta) \lim_{z \to 1/\beta} \frac{\frac{d^{\nu_\beta}}{dz^{\nu_\beta}} (1 - \beta z)^{\nu_\beta}}{\frac{d^{\nu_\beta}}{dz^{\nu_\beta}} Q(z)} = P(1/\beta) \frac{\nu_\beta!(-\beta)^{\nu_\beta}}{\frac{d^{\nu_\beta}}{dz^{\nu_\beta}} Q(1/\beta)}$$

Asymptotik rationaler EFs

Zusammengefasst ergibt

$$[z^n]\frac{c_0}{(1-\beta z)^{\nu_\beta}} \sim \frac{c_0 n^{\nu_\beta - 1}}{(\nu_\beta - 1)!}\beta^n \quad \text{und} \quad c_0 = P(1/\beta)\frac{\nu_\beta!(-\beta)^{\nu_\beta}}{\frac{d^{\nu_\beta}}{dz^{\nu_\beta}}Q(1/\beta)},$$

dass

$$[z^n]f \sim C\beta^n n^{\nu_\beta - 1} \quad \text{mit} \quad C = \nu_\beta \frac{(-\beta)^{\nu_\beta}P(1/\beta)}{\frac{d^{\nu_\beta}}{dz^{\nu_\beta}}Q(1/\beta)}.$$

$\square$

Asymptotik meromorpher EFs

Dieser Satz lässt sich noch für mehrere (endlich viele) Polstellen, die gemeinsam auf dem Konvergenzring einer EF liegen, verallgemeinern!

Dazu allerdings erst noch ein paar Definitionen und Sätze:

Definition: Holomorphe Funktion

Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt holomorph in $z_0 \in \mathbb{C}$, falls f in einer Umgebung U von z_0 komplex differenzierbar ist. Dann heißt f auch holomorph auf U.

Definition: Meromorphe Funktion

Eine komplexe Funktion f heißt meromorph, wenn sie bis auf Polstellen holomorph ist.

Asymptotik meromorpher EFs

Definition: Laurent-Reihe

Die Laurent-Reihe von $f : U \to \mathbb{C}$ um einen Punkt $c \in \mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}} dz.$$

Definition: Hauptteil und Nebenteil

Die Laurent-Reihe besteht aus einem Haupt- und einem Nebenteil:

$$f(z) = H(z) + N(z)$$

Diese sind gegeben durch:

$$H(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n} \quad \text{und} \quad N(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Asymptotik meromorpher EFs

Bemerkung 1: Die Laurent-Reihe um einen isolierten Pol z_0 entwickelt hat einen bei k abbrechenden Hauptteil, wobei ν die Multiplizität der Polstelle ist! Damit gilt:

$$\begin{aligned} H(f; z_0) &= \sum_{n=1}^{\nu} \frac{a_{-j}}{(z - z_0)^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\nu} \frac{(-1)^n a_{-n}}{(z_0 - z)^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\nu} \frac{(-1)^n a_{-n}}{z_0^n} \frac{1}{(1 - \frac{z}{z_0})^n} \end{aligned}$$

($H(f; z_0)$ soll hier den Hauptteil der Laurent-Entwicklung von f um den Punkt z_0 bezeichnen)

Asymptotik meromorpher EFs

Mit der Potenzreihenentwicklung

$$\frac{1}{(1-z)^{j+1}} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+j}{i} z^n$$

gilt weiter:

$$\begin{aligned} H(f;z_0) &= \sum_{n=1}^{\nu} \frac{(-1)^n a_{-n}}{z_0^n} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{m} \left(\frac{z}{z_0}\right)^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\nu} \binom{m+n-1}{n-1} \frac{(-1)^n a_{-n}}{z_0^{n+m}} \right)}_{=a_m} z^m \end{aligned}$$

Bemerkung 2: Die Laurent-Reihe um einen analytischen Punkt z_0 entwickelt hat $H(f;z_0) = 0$!

Asymptotik meromorpher EFs

Koeffizienten-Abschätzung (Theorem 2.4.3, [W92])

Sei $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ analytisch in einer Umgebung, die den Ursprung enthält. Sei $z_0 \neq 0$ eine Singularität von f. Dann gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n > n_0 : |a_n| < \left(\frac{1}{|z_0|} + \varepsilon \right)^n$$

und für unendliche viele n gilt weiter

$$|a_n| > \left(\frac{1}{|z_0|} - \varepsilon \right)^n .$$

Asymptotik meromorpher EFs

Satz 2: Asymptotik meromorhper EFs bei mehreren Polstellen kleinsten Modulus (Theorem 5.2.1, [W92])

Sei f eine meromorphe Funktion und analytisch im Ursprung. Seien $z_0, \dots, z_s$ die Polstellen von f mit $r = |z_0| = \cdots = |z_s|$ und $|z_0| < |y|$ für alle anderen Polstellen y. Ferner sei $r' > r$ Modulus der Polstellen des nächstgrößeren Modulus. Es gilt dann

$$[z^n]f = [z^n]\left(\sum_{i=0}^{s} H(f; z_i)\right) + O\left(\left(\frac{1}{r'} + \varepsilon\right)^n\right).$$

Asymptotik meromorpher EFs

Beweis: Die Idee ist, die Polstellen von f auf dem Konvergenzkreis r zu entfernen und das Resultat mit der eben gezeigten oberen Schranke abzuschätzen. Dazu subtrahieren wir den Hauptteil von f um z_0 entwickelt von f selbst, den Hauptteil der entstandenen Funktion, diesmal aber um z_1 entwickelt, wieder von dieser und so weiter, bis keine Polstellen auf r mehr vorhanden sind.

$$
\begin{aligned}
g &= f - H(f; z_0) \\
g' &= g - H(g; z_1) = f - H(f; z_0)) - H(f - H(f; z_0); z_1)) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Asymptotik meromorpher EFs

Den Term $H(f - H(f;z_0);z_1))$ kann man aber umschreiben als:

$$\begin{aligned}
H(f - H(f;z_0);z_1)) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_1)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f - H(f;z_0)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right) (z - z_1)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right) (z - z_1)^n \\
&- \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{H(f;z_0)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right) (z - z_1)^n \\
&= H(f;z_1) - H(H(f;z_0);z_1)
\end{aligned}$$

Asymptotik meromorpher EFs

Da $H(f;z_0)$ allerdings analytisch in z_1 ist ($H(f;z_0)$ hat nur eine Polstelle und zwar z_0) folgt mit Bemerkung 2:

$$H(f - H(f;z_0);z_1)) = H(f;z_1) - \underbrace{H(H(f;z_0);z_1)}_{=0} = H(f;z_1)$$

Induktiv erhält man nun eine Funktion

$$g = f - H(f;z_0) - H(f;z_1) - \cdots - H(f;z_s),$$

von der bekannt ist, dass keine Polstelle mehr auf r liegt. Die nächste Polstelle liegt nach Annahme erst bei r':

$$|[z^n]g| \in O\left(\left(\frac{1}{r'} + \varepsilon\right)^n\right)$$

Also folgt:

$$[z^n]f = [z^n](H(f;z_0) + H(f;z_1) + \cdots + H(f;z_s)) + O\left(\left(\frac{1}{r'} + \varepsilon\right)^n\right)$$

$\square$

Asymptotik meromorpher EFs

Falls $r' > 1$ ist (andernfalls kann man den obigen Satz einfach mehrfach anwenden), erhält man für die Asymptotik:

$$[z^n]f \sim \sum_{i=0}^{s} \sum_{j=1}^{\nu_s} \binom{n+j-1}{j-1} (-1)^j \frac{a_{-j}}{z_i^{j+n}}$$

($z_0, \ldots, z_s$ sind die Polstellen von f, k_s die Multiplizität der jeweiligen Polstelle)

Reguläre Sprachen

Definition: Reguläre Sprache

Eine Sprache $\mathcal{L}$ ist genau dann regulär, wenn es einen regulären Ausdruck gibt, der sie erzeugt.

Für einen regulären Ausdruck können wir induktiv wie folgt sehr einfach eine Mengenschreibweise finden (wobei R_1 und R_2 zwei beliebige reguläre Ausdrücke seien):

$$
\begin{aligned}
R_1 R_2 &\mapsto \mathcal{L}(R_1) \times \mathcal{L}(R_2) \\
R_1 | R_2 &\mapsto \mathcal{L}(R_1) \cup \mathcal{L}(R_2) \leftrightarrow \mathcal{L}(R_1) + \mathcal{L}(R_2) \\
(R_1)^* &\mapsto \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{L}^n(R_1) \leftrightarrow \mathrm{SEQ}(\mathcal{L}(R_1))
\end{aligned}
$$

Reguläre Sprachen

So ist zum Beispiel der reguläre Ausdruck für binäre Wörter, die mit einer 1 beginnen gegeben durch

$$R = 1(0|1)^*,$$

die zugehörige Sprache ist also

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(R) &= \{1\} \times \mathrm{SEQ}(\{0,1\}) \\ &= \{1\} \times (\{\varepsilon\} + \{0,1\} + \{0,1\}^2 + \dots).\end{aligned}$$

Reguläre Sprachen

Das Ziel ist es nun eine Erzeugenden-Funktion für eine reguläre Sprache zu ermitteln.

Die Zählsequenz der aus dieser Konstruktion abgeleiteten Erzeugenden-Funktion zählt Wörter jedoch eventuell mehrfach. So erzeugt

$$R = 1(0|1)^*(0|1)^*$$

dieselbe Sprache wie im Beispiel eben, alle Wörter $w \in \mathcal{L}(R)$ können jedoch auf $|w|$ verschiedene Weisen „zustandekommen“.

Reguläre Sprachen

Es wird also ein Mechanismus benötigt, um einen regulären Ausdruck in eine eindeutige reguläre Spezifikation zu verwandeln.

Es ist bekannt, dass wir einen regulären Ausdruck direkt in einen NFA übersetzen können und diesen mittels der Potenzmengenkonstruktion in einen DFA.

Satz von Kleene

Zu jedem DFA gibt es einen regulären Ausdruck R, sodass jedes Wort $w \in \mathcal{L}(R)$ eindeutig aus R hervorgeht.

Reguläre Sprachen

Folglich kann jeder reguläre Ausdruck so umgeformt werden, dass er direkt in eine eindeutige reguläre Spezifikation übersetzt werden kann.

Asymptotische Anzahl von Wörtern der Länge n

Sei $\mathcal{L}$ eine eindeutige reguläre Spezifiation. Dann induziert die Wortlänge $|w|$, $w \in \mathcal{L}$ eine Größenfunktion und die Zählsequenz $(L_n)_{n\geq 0}$.

Reguläre Sprachen (ein Beispiel)

Für $R = a(b|c)^*b(c|d)^*$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ können wir schreiben:

$$\mathcal{L}(R) = \{a\} \times \mathrm{SEQ}(\{b\} + \{c\}) \times \{b\} \times \mathrm{SEQ}(\{c\} + \{d\})$$

Reguläre Sprachen (ein Beispiel)

Für $R = a(b|c)^*b(c|d)^*$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ können wir schreiben:

$$\mathcal{L}(R) = \{a\} \times \mathrm{SEQ}(\{b\} + \{c\}) \times \{b\} \times \mathrm{SEQ}(\{c\} + \{d\})$$

Daraus ergibt sich die Erzeugenden-Funktion

$$L(z) = z \cdot \frac{1}{1-2z} \cdot z \cdot \frac{1}{1-2z} = \frac{z^2}{(1-4z)^2}$$

Reguläre Sprachen (ein Beispiel)

Für $R = a(b|c)^*b(c|d)^*$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ können wir schreiben:

$$\mathcal{L}(R) = \{a\} \times \mathrm{SEQ}(\{b\} + \{c\}) \times \{b\} \times \mathrm{SEQ}(\{c\} + \{d\})$$

Daraus ergibt sich die Erzeugenden-Funktion

$$L(z) = z \cdot \frac{1}{1-2z} \cdot z \cdot \frac{1}{1-2z} = \frac{z^2}{(1-4z)^2}$$

und offensichtlich ist

$$P(z) = z^2\ , \quad Q(z) = (1-2z)^2 \ \text{ und } \frac{d^2}{dz^2}Q(z) = 8$$

Reguläre Sprachen (ein Beispiel)

Für $R = a(b|c)^*b(c|d)^*$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ können wir schreiben:

$$\mathcal{L}(R) = \{a\} \times \mathrm{SEQ}(\{b\} + \{c\}) \times \{b\} \times \mathrm{SEQ}(\{c\} + \{d\})$$

Daraus ergibt sich die Erzeugenden-Funktion

$$L(z) = z \cdot \frac{1}{1-2z} \cdot z \cdot \frac{1}{1-2z} = \frac{z^2}{(1-4z)^2}$$

und offensichtlich ist

$$P(z) = z^2 \ , \quad Q(z) = (1-2z)^2 \ \text{ und } \ \frac{d^2}{dz^2} Q(z) = 8$$

sowie

$$\beta = 2 \ \text{ und } \ \nu = 2.$$

Reguläre Sprachen (ein Beispiel)

Da es sich um eine eindeutige Polstelle handelt, kann der erste Satz angewendet werden, also ist

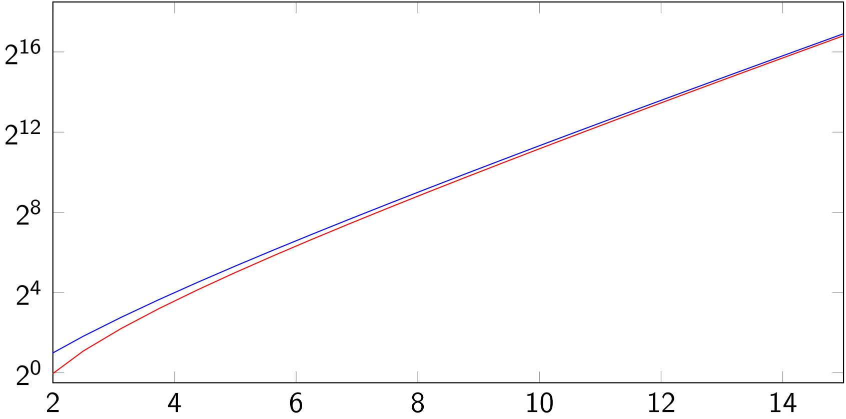
$$C = 2 \cdot \frac{(-2)^2 f(\frac{1}{2})}{\frac{d^2}{dz^2} Q(\frac{1}{2})} = 2 \cdot \frac{(-2)^2 \cdot (\frac{1}{2})^2}{8} = \frac{1}{4}$$

und damit

$$[z^n]L \sim C2^n n = 2^{n-2} n.$$

Reguläre Sprachen (ein Beispiel)

Mit ein paar kombinatorischen Überlegungen findet man für den exakten Wert $\sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-2}$ (rot) und sieht, dass sich der asymptotische Wert (blau) sehr schnell diesem angleicht:



Reguläre Sprachen (noch ein Beispiel)

Der reguläre Ausdruck $R = a(a|bb)^*$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ lässt sich als

$$\mathcal{L}(R) = \{a\} \times \mathrm{SEQ}(\{a\} + \{bb\})$$

schreiben

Reguläre Sprachen (noch ein Beispiel)

Der reguläre Ausdruck $R = a(a|bb)^*$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ lässt sich als

$$\mathcal{L}(R) = \{a\} \times \mathrm{SEQ}(\{a\} + \{bb\})$$

schreiben und ergibt die Erzeugenden-Funktion

$$L(z) = z \cdot \frac{1}{1 - (z + z^2)} = \frac{z}{1 - z - z^2}.$$

Reguläre Sprachen (noch ein Beispiel)

Der reguläre Ausdruck $R = a(a|bb)^*$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ lässt sich als

$$\mathcal{L}(R) = \{a\} \times \mathrm{SEQ}(\{a\} + \{bb\})$$

schreiben und ergibt die Erzeugenden-Funktion

$$L(z) = z \cdot \frac{1}{1 - (z + z^2)} = \frac{z}{1 - z - z^2}.$$

Die Polstellen der Funktion sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} z^2 - z - 1 &= 0 \\ \iff (z + \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4} &= 0 \\ \iff z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Reguläre Sprachen (noch ein Beispiel)

Die betragsmäßig kleinere Nullstelle ist $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$. Damit ist:

$$\beta = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} \quad \text{und} \quad \nu = 1$$

Reguläre Sprachen (noch ein Beispiel)

Die betragsmäßig kleinere Nullstelle ist $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$. Damit ist:

$$\beta = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} \quad \text{und} \quad \nu = 1$$

$$P(z) = z, \quad Q(z) = 1 - z - z^2 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dz} Q(z) = -1 - 2z$$

Reguläre Sprachen (noch ein Beispiel)

Die betragsmäßig kleinere Nullstelle ist $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$. Damit ist:

$$\beta = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} \quad \text{und} \quad \nu = 1$$

$$P(z) = z, \;\; Q(z) = 1 - z - z^2 \;\; \text{und} \;\; \frac{d}{dz}Q(z) = -1 - 2z$$

Und weiter:

$$C = \nu \frac{-\beta\frac{1}{\beta}}{-1 - 2\frac{1}{\beta}} = \frac{1}{1+2\frac{1}{\beta}} = \frac{1}{1+(-1+\sqrt{5})} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Reguläre Sprachen (noch ein Beispiel)

Die betragsmäßig kleinere Nullstelle ist $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$. Damit ist:

$$\beta = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} \quad \text{und} \quad \nu = 1$$

$$P(z) = z, \ \ Q(z) = 1 - z - z^2 \ \ \text{und} \ \ \frac{d}{dz} Q(z) = -1 - 2z$$

Und weiter:

$$C = \nu \frac{-\beta \frac{1}{\beta}}{-1 - 2\frac{1}{\beta}} = \frac{1}{1 + 2\frac{1}{\beta}} = \frac{1}{1 + (-1 + \sqrt{5})} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$L \sim C\beta^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{2}{-1+\sqrt{5}}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{2(1+\sqrt{5})}{5-1}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \phi^n \sim f_n$$

Fragen?

Referenzen I

[1] Robert Sedgewick Philippe Flajolet. *Analytic Combinatorics*. 2009.

[2] Philippe Flajolet Robert Sedgewick. *An Introduction to the Analysis of Algorithms*. 1996.

[3] Herbert S. Wilf. *Generating Functionology*. 1992.