

Two Grid with Pre and Post Smoothing

Derivation and Algorithm

August 29, 2019

$$(I - B^{-1}A) = (I - B_{po}^{-1}A)(I - B_{tg}^{-1}A)(I - B_{pr}^{-1}A) \quad (1)$$

$$(I - B^{-1}A) = (I - B_{po}^{-1})(I - B_{pr}^{-1}A - B_{tg}^{-1}A + B_{tg}^{-1}AB_{pr}^{-1}A) \quad (2)$$

$$(I - B^{-1}A) = I - B_{pr}^{-1}A - B_{tg}^{-1}A + B_{tg}^{-1}AB_{pr}^{-1}A - B_{po}^{-1}A + B_{po}^{-1}AB_{pr}^{-1}A + B_{po}^{-1}AB_{tg}^{-1}A - B_{po}^{-1}AB_{tg}^{-1}AB_{pr}^{-1}A \quad (3)$$

$$B^{-1}A = B_{pr}^{-1}A + B_{tg}^{-1}A - B_{tg}^{-1}AB_{pr}^{-1}A + B_{po}^{-1}A - B_{po}^{-1}AB_{pr}^{-1}A - B_{po}^{-1}AB_{tg}^{-1}A + B_{po}^{-1}AB_{tg}^{-1}AB_{pr}^{-1}A \quad (4)$$

$$B^{-1}A = B_{pr}^{-1}A + B_{tg}^{-1}A(I - B_{pr}^{-1}A) + B_{po}^{-1}A(I - B_{pr}^{-1}A) - B_{po}^{-1}AB_{tg}^{-1}A(I - B_{pr}^{-1}A) \quad (5)$$

$$B^{-1}A = B_{pr}^{-1}A + (B_{tg}^{-1}A + B_{po}^{-1}A - B_{po}^{-1}AB_{tg}^{-1}A)(I - B_{pr}^{-1}A) \quad (6)$$

$$B^{-1} = B_{pr}^{-1} + (B_{tg}^{-1} - B_{po}^{-1}AB_{tg}^{-1} + B_{po}^{-1})(I - B_{pr}^{-1}A) \quad (7)$$

$$B^{-1} = B_{pr}^{-1} + B_{tg}^{-1} - B_{tg}^{-1}AB_{pr}^{-1} + B_{po}^{-1} - B_{po}^{-1}AB_{pr}^{-1} - B_{po}^{-1}AB_{tg}^{-1} + B_{po}^{-1}AB_{tg}^{-1}AB_{pr}^{-1} \quad (8)$$

$$B^{-1} = B_{pr}^{-1} + B_{tg}^{-1}(I - AB_{pr}^{-1}) + B_{po}^{-1}(I - AB_{pr}^{-1} - AB_{tg}^{-1} + AB_{tg}^{-1}AB_{pr}^{-1}) \quad (9)$$

$$B^{-1} = B_{pr}^{-1} + B_{tg}^{-1}(I - AB_{pr}^{-1}) + B_{po}^{-1}(I - AB_{tg}^{-1})(I - AB_{pr}^{-1}) \quad (10)$$

$$B^{-1} = B_{pr}^{-1} + (I - AB_{pr}^{-1})[B_{tg}^{-1} + B_{po}^{-1}(I - AB_{tg}^{-1})] \quad (11)$$

$$B^{-1} = B_{pr}^{-1} + [B_{tg}^{-1} + B_{po}^{-1}(I - AB_{tg}^{-1})][I - AB_{pr}^{-1}] \quad (12)$$

Algorithm 1 Solve $B_{\text{tg_solve}}x = b$

Require: $B_{\text{pr}}, B_{\text{po}}, B_{\text{tg}}, A, b$

- 1: // Relax with the smoother - Pre Smoothing
- 2: $t = B_{\text{pr}}^{-1}u$
- 3: // Compute residual
- 4: $r = u - At$
- 5: // Restrict residual
- 6: $s = B_{\text{tg}}^{-1}r$
- 7: // Coarse grid correction
- 8: $r = r - As$
- 9: Post Smoothing $s = s + B_{\text{po}}^{-1}r$
- 10: // Prolongate the coarse grid correction
- 11: $x = t + s$

Ensure: x
